RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITÉ IBN KHALDOUN DE TIARET.

FACULTÉ DES MATHEMATIQUES ET D'INFORMATIQUES

DÉPARTEMENT MATHEMATIQUES

Mémoire de fin d'études pour obtenir le diplôme de Master

Spécialité : MATH

Option : ANALYSE FONCTIONNELLE ET APPLICATION

Présenté par :

BOURAGHDA MOKHTARIA

BRAHIM NOUR EL HOUDA

BOURAMLA FAIROUZ

SADEK AMEL

Sujet du mémoire

L'approximation et la régularisation Dans les espaces $\mathbf{L^p}$ *et* $\mathbf{L^{p(x)}}$

Soutenu publiquement le 25 juin 2018 devant le jury composé par :

Mr, AEK Senouci	Pr	Président
Mr, Mohammed Sofrani	MAA	Examinateur
Mr, Abed Bendaoud	MAA	Encadreur

PROMOTION : 2017\2018

Remerciement

Avant tout, je remercie ALLAH tout puissant qui m'a aidé à accomplir

Ce travail.

E tiens à adresser mes sincères remerciements à mon encadreur monsieur

BENDAOUD qui par ses conseils, ses recommandations, sa patience

M'a permis de réaliser ce mémoire avec un très grand plaisir.

Merci Mr pour la confiance que vous m'avez faite et la liberté que

Vous m'avez laissée.

Mes sincères remerciements à :

Monsieur SENOCI qui est en réalité une école parfaite. Vous m'avez monsieur appris beaucoup beaucoup …

J'exprime ma très profonde reconnaissance à l'examinateur monsieur

Soufrani

Je tiens aussi à remercier tout enseignant respectable qui m'a aidé de Près ou de loin.

Je considère ce mémoire le fruit de cinq ans de travail et d'effort, j'espère

Qu'il vous présente une petite récompense.

Merci pour tout ce que vous m'avez donné : le respect, la joie…

DÉDICACE

Au notre dieu, par sa valente et son aide qui enrichit nos savoir .

-A nos très chers parents

-A nos frères et sœurs.

-Et toutes nos familles

-A TOUT nos CHERS AMIS

-A toutes personnes qui aident-nous à poursuivre nos études.

Mokhtaria, Houda, Fairouz et Amel

Table des matières

Introduction

Les espaces fonctionnels de Banach sont très connus et très utilisés dans le domaine mathématique.
L'objectif de ce travail est d'étudier un problème mathématique, qu'on trouve souvent dans le domaine fonctionnel, qui sont la convolution et l'approximation . Cette étude sera faite dans l'espace L^p et $L^{p(x)}$ dont ils sont peu connu dans le domaine de la recherche, mais ayant des propriétés plus riches par rapport aux autres espaces.
Les espaces $L^{p(x)}$ apparaissent pour la première fois dans les années 1931 dans un article de W. Orlicz (voir [12]). La première recherche systématique a été effectuée en 1950 par H. Nakano (voir [11]) puis un peu plus tard poursuivie par I. Musicleh (voir [10]). La théorie des espaces de fonctions (dans$\mathbb{R}$) avec un exposant variable est développée par I. Tsenov ([16]), I. I. Sharapudinov ([15]), et v. v. zhikov ([17] et [18]).
Dans les années 1980 ces espaces ont été étudiés pour être appliqués aux problèmes de la mécanique (voir par exemple [17]). Quelques propriétés de ces espaces sont établies par O. Kovacik, et J. Rakosnik, (voir [7]). Les normes dans $L^{p(x)}$ sont considérées d'une manière plus détaillée par D. E. Edmunds,et J. Lang, et A. Nekvinda (voir [5]).
Récemment ces espaces sont intensivement étudiés à cause de la publication de M.Ružicka voir [13] qui constitue un cadre naturel pour le modèle mathématique de certains fluides électrorhoéologiques qui est lié à un système non linéaire d'équations aux dérivées partielles à coefficients variables.
Beaucoup de mathématiciens ont été intéressés par cette partie de l'analyse fonctionnelle et par conséquent un nombre assez important de résultats intéressants a été obtenu.
D'autre part beaucoup de problèmes restent ouverts jusqu'à présent. L'une des plus importantes différences qui existent entre l'espace L^p classique et $L^{p(x)}$ est que ce dernier n'est pas invariant par rapport à la translation (plus précisément $\|f(x+h)\|_{L^{p(x)}} \neq \|f(x)\|_{L^{p(x)}}$). Ce problème cause beaucoup de difficultés dans certaines questions, par exemple l'inégalité de Young dans les convolutions, la densité

des fonctions de classe C^1 dans l'espace de Sobolev. Il y'a aussi le problème de la fonction maximale.
Le champ des espaces $L^{p(x)}$ a connu un grand développement les dernières années ; par exemple 15 articles ont été publiés avant 2000 ; entre 2000 et 2004, il y'eût apparition de 31 publications et finalement entre 2005 et 2010 ont vu le jour 242 publications !.
Dans le présent travail on étudie les espaces classiques de Lebesgue et quelques unes de ses généralisations, c'est à dire les espaces $L^{p(x)}$ et on aborde quelques notions sur les espaces classiques
Ce mémoire comprend deux parties, telle que nous partageons ce travail en cinq chapitres :
Dans le premier chapitre est un préliminaires on donne des définitions et des principes généraux comme les inégalités intégrales (Hölder et Minkowsky) dans l'espace de Lebesgue classique L^p.
Dans le deuxième chapitre, nous parlons de la convolution et l'approximation dans l'espace de Banach L^p, et on donne les conditions qui vérifient la densité de C_0^∞ dans l'espace L^p.
Dans le troisième chapitre, on étudie les définitions et les inégalités intégrales (Hölder et Minkowsky) dans $L^{p(x)}$ où $p(x)$ est une fonction (par exemple l'inégalité de Hölder ressemble à celle des L^p à une constante prés), et on expose les propriétés de l'espace $L^{p(x)}$, et dans le quatrièmé chapiter on constate que quelques propriétés ne sont pas conservées par rapport au cas classique.
Pour le dernier chapitre,on considère les convolutions et l'approximation dans $L^{p(x)}$ où on voit qu'il y'a une certaines différences de ces notions par rapport à L^p classique.

Chapitre 1

Préliminaire

Dans ce chapitre nous présentons des notations, définitions et des théorèmes utilisés dans ce mémoire.

Dans toute suite Ω désigne un ouvert de $\mathbb{R}^n$ muni de la mesure de Lebesgue

Définition 1.1. ***(fonctin mesurable)*** *: [1]*
Une fonction f est mesurable au sens de Lebesgue si $\int|f| < \infty$,cette condition équivaut à l'ensemble des conditions : $\int f^+ < \infty$ et $\int f^- < \infty$, et on pose, lorsqu'elle est satisfaits :

$$\int f = \int f^+ - \int f^-.$$

On désigne par $L^1(\Omega)$ l'espace des fonctions intégrables sur Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$
On pose $\|f\|_{L^1} = \int_\Omega |f|dx$

Quand il n'y aura pas d'ambiguïté on écrira L^1 au lieu de $L^1(\Omega)$ et $\int f$ au lieu $\int_\Omega f(x)dx$

Quelques résultats d'intégration qu'il faut absolument connaitre

Théorème 1.1. ***(Convergence monotone)*** *:*
Soit (f_n) une suite de fonctions croissante de L^1 telle que $\sup\limits_n \int f_n < \infty$ alors $f_n(x)$ converge p-p sur Ω vers une limite finie notée $f(x)$, de plus $f \in L^1$ et $\|f_n - f\|_{L^1} \to 0$

Démonstration : Voir [8]

Corollaire 1.1. *Soit (f_n) une suite décroissante de fonctions mesurables qui converge vers $f(x)$ alors f est mesurable et $\lim\limits_{n\to\infty} \int_\Omega f_n(x)dx = \int_\Omega f(x)dx$*

Théorème 1.2. ***(convergence dominée de Lebesgue) :***
Soit (f_n) une suite de fonction de L^1, tel que :
a) $f_n(x) \to f(x)$ p-p sur Ω
b) Il existe une fonction $g \in L^1$ telle que pour chaque n, $|f_n(x)| \leq g(x)$ p-p sur Ω alors, $f \in L^1(\Omega)$ et $\|f_n - f\|_{L^1} \to 0$.

Démonstration : Voir [1]

Lemme 1.1. ***(de Fatou) :***

Soit (f_n) une suite de fonction de L^1 telle que
1) pour chaque n, $f_n(x) \geq 0$ p-p sur Ω
2) $\sup\limits_n \int f_n < \infty$ pour chaque $x \in \Omega$ on pose $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \inf f_n(x)$ alors $f \in L^1$ et

$$\int f \leq \lim_{n\to\infty} \inf \int f_n.$$

Démonstration : Voir [1]

Théorème 1.3. ***(Densité) :***
L'espace C_0 est dense dans $L^1(\Omega)$, c'est -à-dire $\forall f \in L^1(\Omega), \forall \epsilon > 0, \exists f_1 \in C_0(\Omega)$ tel que $\|f - f_1\|_{L^1} < \epsilon$.

Démonstration : Voir [1]
Soient $\Omega_1 \in \mathbb{R}^{n_1}, \Omega_2 \in \mathbb{R}^{n_2}$ des ouverts et soit $F : \Omega_1 \times \Omega_2 \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction mesurable

Théorème 1.4. *On suppose que $\int_{\Omega_2} |F(x,y)| dy < \infty$ p-p $x \in \Omega_1$ et que $\int_{\Omega_1} dx \int_{\Omega_2} |F(x,y)| dy < \infty$ alors $F \in L^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$*

Démonstration : Voir [1]

Théorème 1.5. ***(De Fubini) :***
On suppose que $F \in L^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$ alors p-p $x \in \Omega_1$, $F(x,y) \in \mathtt{L}^1_{\mathtt{y}}(\Omega_2)$ $\int_{\Omega_2} |F(x,y)| dy \in \mathtt{L}^1_{\mathtt{x}}(\Omega_1)$
De même pour presque tout $y \in \Omega_2$
$F(x,y) \in \mathtt{L}^1_{\mathtt{x}}(\Omega_1)$ et $\int_{\Omega_1} F(x,y) dx \in \mathtt{L}^1_{\mathtt{y}}(\Omega_2)$
De plus on a :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_1} dx \int_{\Omega_2} F(x,y) dy &= \int_{\Omega_2} dy \int_{\Omega_1} F(x,y) dx \\ &= \iint_{\Omega_1 \times \Omega_2} F(x,y) dx dy. \end{aligned}$$

Démonstration : Voir [1]

1.1 Définition et propriétés élémentaires sur les espaces L^p

Définition 1.2. *Soit $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq p < \infty$, on pose*
$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}\}$ *telle que f mesurable et $|f|^p \in L^1(\Omega)$*
On note

$$\|f\|_{L^p} = [\int_\Omega |f(x)|^p dx]^{\frac{1}{p}}.$$

On vérifiera ultérieurement que $\|.\|_{L^p}$ est une norme.

Démonstration : Voir [9]

Définition 1.3. *On pose*
$L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}\}$ *telle que f mesurable et il existe $c > 0$ constante telle que $|f(x)| \leq c$ p-p sur Ω.*
On note
$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \inf\{c : |f(x)| \leq c,\ \ p-p\ \ sur\ \Omega\}$ *où* $\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \sup vrai|f|$.
$\|.\|_{L^\infty(\Omega)}$ *est une norme.*

Démonstration : Voir [9]

Remarque 1.1. *Si $f \in L^\infty$ on a, $|f(x)| \leq \|f\|_{L^\infty}$, p-p sur Ω.*

1.2 Inégalités de Hölder.

Notation :

Soit $1 \leq p \leq \infty$ on désigne par q l'exposant conjugué de p i,e ; $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.

Lemme 1.2. *Soit $p \geq 1$, alors*

$$\forall a, b \geq 0, \quad ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}, \tag{1.1}$$

avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Démonstration :
On prend la fonction

$$\varphi(t) = \frac{t}{p} + \frac{t^{-\frac{1}{p-1}}}{q},\ pour\ tout\ t > 0;$$

Et on doit montrer que

$$\varphi(t) \geq \varphi(1) = 1$$

Pour

$$t \geq 1$$

Et

$$\varphi(t) \leq \varphi(1) = 1$$

Pour

$$0 < t \leq 1.$$

On a

$$\begin{aligned}\varphi'(t) &= \frac{1}{p} - \frac{1}{p-1}\frac{1}{q}t^{-\frac{1}{p-1}-1} \\ &= \frac{1}{p} - \frac{1}{p}t^{-\frac{1}{p-1}-1} = \frac{1}{p}\big(1 - t^{-q}\big)\end{aligned}$$

$\varphi'(t) = 0$ nous donne $t = 1$, donc $t = 1$ est un extrémum, mais comme la fonction φ est croissante sur l'intervalle $[1;\infty)$ (en effet si $\varphi'(t) > 0$ nous donne $\frac{1}{p}\big(1 - t^{-q}\big) > 0$ d'où $t^{-q} < 1$ et comme $q > 1$ alors $t > 1$), φ et aussi décroissante sur $(0;1]$. Alors $t = 1$ est un minimum sur $[1;\infty)$ d'où

$$\varphi(t) \geq \varphi(1) = 1, \; \textit{pour } t \geq 1.$$

Maintenant, posons $t = \frac{a^{p-1}}{b}$, donc

$$\frac{t^{-\frac{1}{p-1}}}{q} = \frac{1}{qt^{\frac{1}{p-1}}} = \frac{1}{q\big(\frac{a^{p-1}}{b}\big)^{\frac{1}{p-1}}} = \frac{b^{\frac{1}{p-1}}}{qa} = \frac{1}{q}\frac{b^{q-1}}{a}$$

D'où

$$\varphi(t) = \frac{t}{p} + \frac{t^{-\frac{1}{p-1}}}{q} = \frac{a^{p-1}}{bp} + \frac{b^{q-1}}{qa}$$

$= \frac{1}{p}\frac{a^p}{ab} + \frac{1}{q}\frac{b^q}{ab} = \frac{1}{ab}\left(\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}\right) \geq \varphi(1) = 1$ finalement on trouve $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$.

Lemme 1.3. *Si* $0 < p < 1$, *alors on a* $\forall a, b \geq 0, ab \geq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$.

Démonstration :
D'une maniéré analogue que lemme 1.2.

Corollaire 1.2. *Soit* $p, q, r \geq 1$ *tel que* $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$, *alors*

$$\forall A, B \geq 0, \quad \big(AB\big)^r \leq \frac{r}{p} A^p + \frac{r}{q} B^q. \tag{1.2}$$

Démonstration : Comme $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$, alors $1 = \frac{1}{p/r} + \frac{1}{q/r}$, et on applique l'inégalité (1.1) avec $a = A^r$ et $b = B^r$ on trouve

$$\big(AB\big)^r = ab \leq \frac{a^{p/r}}{p/r} + \frac{b^{q/r}}{q/r} = \frac{r}{p} A^p + \frac{r}{q} B^q.$$

Lemme 1.4. *Soit* Ω *un ensemble mesurable, si les fonctions* $f : \Omega \to \mathbb{R}$ *et* $g : \Omega \to \mathbb{R}$ *sont mesurables sur* Ω, *et* g *est non négative, alors :*

$$\inf_{x \in \Omega} vrai f(x) \int_\Omega g(x)dx \leq \int_\Omega f(x)g(x)dx \leq \sup_{x \in \Omega} vrai f(x) \int_\Omega g(x)dx. \tag{1.3}$$

Démonstration : Soit $e \subset \Omega$ tel que $|e| = 0$, alors

$$\int_\Omega fgdx = \int_{\Omega \setminus e} fgdx \leq \sup_{\Omega \setminus e} f(x) \int_\Omega gdx,$$

Alors

$$\int_\Omega f(x)g(x)dx \leq \sup_{\Omega / e} f(x) \int_\Omega g(x)dx,$$

D'où

$$\begin{aligned} \int_\Omega f(x)g(x)dx &\leq \inf_{x \in e} \sup_{x \in \Omega \setminus e} f(x) \int_\Omega gdx \\ &= \sup_{x \in \Omega} vrai f(x) \int_\Omega gdx \end{aligned}$$

D'une manière analogue on montre l'autre inégalité de (1.3).

Corollaire 1.3. *Soit* Ω *un ensemble mesurable, si les fonctions* $f : \Omega \to \mathbb{C}$ *et* $g : \Omega \to \mathbb{C}$ *sont mesurables sur* Ω *et* $f \in L^\infty(\Omega)$, $g \in L^1(\Omega)$, *alors :*

$$\Big| \int_\Omega f(x)g(x)dx \Big| \leq \big\| f \big\|_{L^\infty(\Omega)} \big\| g \big\|_{L^1(\Omega)}. \tag{1.4}$$

Démonstration :

$$\Big|\int_\Omega fg dx\Big| \leq \int_\Omega \big|fg\big|dx \leq \sup_{x\in\Omega} vrai\big|f(x)\big| \int \big|g\big|dx$$
$$\leq \big\|f\big\|_{L_\infty(\Omega)}\big\|g\big\|_{L_1(\Omega)}.$$

Théorème 1.6. ***(Inégalité de Hölder)***
Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble mesurable, et $0 < p \leq \infty$, $f \in L^p(\Omega)$ et $g \in L^q(\Omega)$ avec $1/p + 1/q = 1$, alors :

(i) Si $1 \leq p \leq \infty$

$$\int_\Omega \big|fg\big|dx \leq \big\|f\big\|_{L^p(\Omega)}\big\|g\big\|_{L^q(\Omega)}, \tag{1.5}$$

(ii) Si $0 < p < 1$ *et avec* $\big|\Omega\big| > 0$, *et* $\forall x \in \Omega,\ g(x) \neq 0$

$$\int_\Omega \big|fg\big|dx \geq \big\|f\big\|_{L^p(\Omega)}\big\|g\big\|_{L^q(\Omega)}. \tag{1.6}$$

Démonstration :
(i) (1) $1 \leq p < \infty$, on applique le Lemme (1.2) avec

$$a = \frac{\big|f(x)\big|}{\big\|f\big\|_{L^p(\Omega)}}, \quad et \quad b = \frac{\big|g(x)\big|}{\big\|g\big\|_{L^q(\Omega)}}$$

On aura

$$\begin{aligned} ab &= \frac{|f(x)g(x)|}{\|f\|_{L^p(\Omega)}\|g\|_{L^q(\Omega)}} \\ &\leq \frac{1}{p}\frac{|f(x)|^p}{\|f\|^p_{L^p(\Omega)}} + \frac{1}{q}\frac{|g(x)|^q}{\|g\|^q_{L^q(\Omega)}}, \end{aligned}$$

On intégral les deux momber on trouve

$$\begin{aligned} \int \frac{|f(x)g(x)|}{\|f\|_{L^p(\Omega)}\|g\|_{l^q(\Omega)}}dx &\leq \frac{1}{p}\int \frac{|f(x)|^p}{\|f\|^p_{L^p(\Omega)}}dx + \frac{1}{q}\int \frac{|g(x)|^q}{\|g\|^q_{L^q(\Omega)}}dx \\ &= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \end{aligned}$$

D'où l'inégalité (1.5).
(2) $p = \infty$; voir corollaire 1.3.
(ii) $0 < p < 1$, un raisonnement analogue au précédent avec une application de lemme1.3 nous donne l'inégalité (1.6).

Proposition 1.1. *Soit $p_i \in]1, \infty[$, $i = 1, 2, ..., k$, et $1 < r < \infty$ tel que $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + ... + \frac{1}{p_k} = \frac{1}{r}$ (les p_i sont dits r conjugués), $f_i \in L^{p_i}(\Omega)$, alors*

$$f = \prod_{i=1}^{k} f_i \in L^r(\Omega) \text{ et } \|f\|_{L^r(\Omega)} \leq \prod_{i=1}^{k} \|f_i\|_{L^{p_i}(\Omega)} \tag{1.7}$$

Démonstration : Par récurrence.

1.3 Inégalités de Minkowsky.

Lemme 1.5. *Soit $f, g \in L^\infty(\Omega)$, alors on a l'inégalité suivante :*

$$\|f + g\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|f\|_{L^\infty(\Omega)} + \|g\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Démonstration : Soit e_1 et e_2 deux ensembles tel que $|e_1| = |e_2| = 0$, on pose $e = e_1 \cup e_2$, alors $\forall \epsilon > 0$, on a

$$\sup_{\Omega/e_i} |f_i| \leq \|f_i\|_{L^\infty(\Omega)} + \frac{\epsilon}{2}, \quad i = 1, 2.$$

Et donc

$$\begin{aligned} \sup_{\Omega/e} |f_1 + f_2| &\leq \sup_{\Omega/e}(|f_1| + |f_2|) \\ &\leq \sup_{\Omega/e_1} |f_1| + \sup_{\Omega/e_2} |f_2| \leq \|f_1\|_{L^\infty(\Omega)} + \|f_2\|_{L^\infty(\Omega)} + \epsilon \end{aligned}$$

Donc

$$\inf_e \sup_{\Omega/e} |f_1 + f_2| \leq \|f_1\|_{L^\infty(\Omega)} + \|f_2\|_{L^\infty(\Omega)} + \epsilon,$$

On fait tendre ϵ vers 0, on trouve :

$$\inf_e \sup_{\Omega/e} |f_1 + f_2| \leq \|f_1\|_{L^\infty(\Omega)} + \|f_2\|_{L^\infty(\Omega)}$$

Finalement

$$\|f_1 + f_2\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|f_1\|_{L^\infty(\Omega)} + \|f_2\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Théorème 1.7. ***(Inégalité de Minkowsky)***
Soit $\Omega \in \mathbb{R}^n$, un ensemble mesurable, $1 \leq p \leq \infty$, $f \in L^p(\Omega)$ et $g \in L^p(\Omega)$, alors :

$$\|f + g\|_{L^p(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} + \|g\|_{L^p(\Omega)}. \tag{1.8}$$

Démonstration :

1) Si $p = 1$:

$$\|f+g\|_{L^p(\Omega)} = \int_\Omega |f+g|dx \leq \int_\Omega |f|dx + \int_\Omega |g|dx = \|f\|_{L^p(\Omega)} + \|g\|_{L^p(\Omega)}.$$

2) Si $p = \infty$: Voir le lemme 1.5.

3) Si $1 < p < \infty$

$$\begin{aligned}\int_\Omega |f+g|^p dx &= \int_\Omega |f+g||f+g|^{p-1}dx \\ &\leq \int_\Omega |f||f+g|^{p-1}dx + \int_\Omega |g||f+g|^{p-1}dx.\end{aligned}$$

On applique l'inégalité de Hölder :

$$\int_\Omega |f+g|^p dx \leq \|f\|_{L^p(\Omega)}\||f+g|^{p-1}\|_{L^q(\Omega)} + \|g\|_{L^p(\Omega)}\||f+g|^{p-1}\|_{L^q(\Omega)}$$

avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, et donc $q = \frac{p}{p-1}$, alors :

$$\begin{aligned}\||f+g|^{p-1}\|_{L^q(\Omega)} &= \Big(\int_\Omega |f+g|^{p-1\frac{p}{p-1}}dx\Big)^{\frac{p-1}{p}} \\ &= \Big(\Big(\int_\Omega |f+g|^p dx\Big)^{\frac{1}{p}}dx\Big)^{p-1} \\ &= \|f+g\|^{p-1}_{L^p(\Omega)}.\end{aligned}$$

D'où

$$\int_\Omega |f+g|^p dx \leq \|f+g\|^{p-1}_{L^p(\Omega)}\Big(\|f\|_{L^p(\Omega)} + \|g\|_{L^p(\Omega)}\Big),$$

On déduit que :

$$\|f+g\|^p_{L^p(\Omega)} \leq \|f+g\|^{p-1}_{L^p(\Omega)}\Big(\|f\|_{L^p(\Omega)} + \|g\|_{L^p(\Omega)}\Big).$$

Et par conséquent

$$\|f+g\|_{L^p(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} + \|g\|_{L^p(\Omega)}.$$

Corollaire 1.4. *Soient $m \in \mathbb{N}$, et $f_k \in L^p(\Omega)$ pour tout $k \in \{1, 2, ..., m\}$, $1 \leq p \leq \infty$, alors*

$$\Big\| \sum_{k=1}^{m} f_k \Big\|_{L^p(\Omega)} \leq \sum_{k=1}^{m} \Big\| f_k \Big\|_{L^p(\Omega)} \tag{1.9}$$

Démonstration : Par récurrence.

Théorème 1.8. ***(Inégalité intégrale de Minkowsky)***
Soient $E \subset \mathbb{R}^n$ et $F \subset \mathbb{R}^n$ des ensembles mesurables, et $1 \leq p \leq \infty$, f une fonction mesurable sur $E \times F$ alors

$$\Big\| \int_F f(., y)dy \Big\|_{L^p(E)} \leq \int_F \Big\| f(., y) \Big\|_{L^p(E)} dy. \tag{1.10}$$

Démonstration : Voir ([2]).

Théorème 1.9. *Soient $E \subset \mathbb{R}^m$ et $F \subset \mathbb{R}^n$ des ensembles mesurables, et f une fonction mesurable sur $E \times F$ alors pour $0 < q \leq p \leq \infty$ on a*

$$\Big\| \|f(x, y)\|_{L^q_y(F)} \Big\|_{L^p_x(E)} \leq \Big\| \|f(x, y)\|_{L^p_x(E)} \Big\|_{L^q_y(F)} \tag{1.11}$$

Démonstration :

$$\begin{aligned}
\Big\| \|f(x, y)\|_{L^q_y(F)} \Big\|_{L^p_x(E)} &= \Big\| (\int_F |f(x, y)|^q dy)^{\frac{1}{q}} \Big\|_{L^p_x(E)} \\
&= \Big\| \int_F |f(x, y)|^q dy \Big\|^{\frac{1}{q}}_{L_x^{\frac{p}{q}}(E)} \\
&\leq \Big(\int_F \Big\| |f(x, y)|^q \Big\|_{L_x^{\frac{p}{q}}(E)} dy \Big)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq \Big(\int_F \Big\| f(x, y) \Big\|^q_{L^p_x(E)} dy \Big)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq \Big\| \Big\| f(x, y) \Big\|_{L^p_x(E)} \Big\|_{L^q_y(F)}.
\end{aligned}$$

Proposition 1.2. *L^p est un espace vectoriel et $\|.\|_{L^p}$ est une norme pour tout $1 \leq p \leq \infty$*

Demonstration : Voir [9]

Théorème 1.10. ***(Fischer-Riesz)***

$(L^p, \|.\|_{L^p})$ est un espace de Banach pour $1 \leq p \leq \infty$.

Démonstration : *1) Si $p = \infty$, soit (f_n) une suite de Cauchy dans L^∞, donc pour $k \geq 1$ il existe $N_k \in \mathbb{N}$ tel que $\forall m, n \geq N_k$ on a*
$\|f_m - f_n\|_{L^\infty} \leq \dfrac{1}{k}$
Donc il existe une ensemble E_k négligeable tel que

$$|f_m - f_n| \leq \frac{1}{k}, \forall x \in \Omega \backslash E_k. \tag{1.12}$$

Posons $E = \cup E_k$, donc $(f_n(x))$ est de Cauchy pour tout $x \in \Omega \backslash E$. passant à la limite dans (1.12) quand $m \longrightarrow \infty$, on obtient

$|f(x) - f_n(x)| \leq \dfrac{1}{k}, x \in \Omega \backslash E_k, n \geq N_k.$

Donc $f \in L^\infty(\Omega)$ et $\|f - f_n\|_{L^\infty} \leq \dfrac{1}{k}, \forall n \geq N_k, \|f - f_n\|_{L^\infty} \to \infty.$

2) Si $1 \leq p < \infty$, Soit (f_n) une suite de Cauchy dans $L^p(\Omega)$. Pour conclure il suffit de montrer qu'une sous-suite extraite converge dans L^p. On extrait une sous-suite $(f_{n_k})_k$ telle que$\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_{L^p} \leq \dfrac{1}{2^k}, \forall k \geq 1.$
(on procède comme suit : il existe n_1 tel que $\|f_m - f_n\|_{L^p} \leq \dfrac{1}{2}$ pour $m, n \geq n_1$, on prend ensuite $n_2 \geq n_1$ tel que $\|f_m - f_n\|_{L^p} \leq \dfrac{1}{2^2}$ pour $m, n \geq n_2$, etc).
Posons

$g_n(x) = \sum_{k=1}^n |f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)|$

Donc
$\|g_k\|_{L^p} = \||\sum_{k=1}^n f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)|\|_{L^p} \leq \sum_{k=1}^n \|f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)\|_{L^p}$

$$\leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} \leq 1.$$

Alors d'après le théorème de la convergence monotone sur Ω p-p $g_n(x)$ converge vers une limite notée $g(x)$ avec $g \in L^p$.
D'autre part on a pour $m \geq n \geq 2$
$|f_m(x) - f_n(x)| \leq |f_m(x) - f_{m-1}(x)| + ... + |f_{n+1}(x) - f_n(x)| \leq g_n(x) - g_{n-1}(x)$
Il en résulte que p.p. sur Ω,(f_n est de Cauchy et converge vers une limite notée $f(x)$

.
On a p-p sur Ω
$|f(x) - f_n(x)| \leq g(x) - g_n(x) \leq g(x)$ *pour* $n \geq 2$.
D'où $f \in L^p(\Omega)$
Enfin $\|f_n - f\|_{L^p} \to 0$, *en effet on a* $|f_n(x) - f(x)|^p \to 0$ *p-p et* $|f_n(x) - f(x)|^p \leq g^p(x)$ *majorant intégrable. On conclut grâce au théorème de Lebesgue.*

Chapitre 2

Approximation dans $L^p(\mathbb{R}^n)$

2.1 Convolution

Définition 2.1. *Deux fonctions f et g définies p.p. et mesurables sur $\mathbb{R}^n$ sont dites convolables , si pour presque tout $x \in \mathbb{R}^n$ la fonction :*

$$y \mapsto f(x-y)g(y) \quad est \ \ intgrable \ \ sur \quad \mathbb{R}^n$$

On définit alors le produit de convolution de f et de g par la formule

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy \ \ p.p \ \ en \ \ x \in \mathbb{R}^n$$

Proposition 2.1. ***(Commutativité de la convolution)*** *:*
Soient deux fonctions f et g mesurables sur $\mathbb{R}^n$ et convolables , alors

$$f * g(x) = g * f(x) \ \ p.p \ \ en \quad x \in \mathbb{R}^n$$

Démonstration : Voir [6]

Définition 2.2. ***(Le support d'une fonction)*** *;*
Soit une fonction f définie sur un espace topologique X et à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, Le support de la fonction f est

$$supp(f) = \{\overline{x \in X | f(x) \neq 0}\}$$

Proposition 2.2. ***(Majoration du support de*** $f * g$***)***
Soient f et g deux fonctions mesurables définies p.p. sur $\mathbb{R}^n$ et convolables. Alors

$$supp(f * g) \subset \overline{supp(f) + supp(g)}$$

Avec la notation

$$A + B = \{a + b/\ \ a \in A\ \ et\ \ b \in B\}$$

Lemme 2.1. *Soient $A \subset \mathbb{R}^n$ compact et $B \subset \mathbb{R}^n$ fermé. Alors $A + B$ est fermé dans $\mathbb{R}^n$*

Démonstration : Voir [6]

Proposition 2.3. ***(Régularité de la convolution** $C_0^\infty * L^1_{loc}$)*
Pour toute fonction $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ et tout $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, le produit de convolution $\phi * f$ appartient à $C^\infty(\mathbb{R}^n)$, et on a

$$\partial^\alpha(\phi * f) = (\partial^\alpha \phi) * f, \quad pour\ \ tout\ \ \alpha \in \mathbb{N}^n$$

De même

$$\phi \in C_0^m(\mathbb{R}^n)\ \ et\ \ f \in L^1_{loc}(R^n) \Longrightarrow \phi * f \in C^m(\mathbb{R}^n)$$

Démonstration : Voir [6]

Lemme 2.2. ***(Invariance de la norme dans** $L^p(\mathbb{R}^n)$ **par rapport à la translation).***
Soit $1 \leq p \leq \infty$, $h \in \mathbb{R}^n$ et $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, alors :

$$\|f(x + h)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = \|f(x)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}. \tag{2.1}$$

Démonstration :

1. $1 \leq p < \infty$.

$$\|f(x + h)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = \Big(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x + h)|^p dx \Big)^{\frac{1}{p}}$$

On fait le changement de variable $x + h = y \Leftrightarrow x = y - h$ d'où :

$$\|f(x + h)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = \Big(\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|^p dy \Big)^{\frac{1}{p}} = \|f(x)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

2. $p = \infty$.

$$\|f(x + h)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} vrai |f(x + h)| = \inf_{\{e:|e|=0\}} \sup_{\mathbb{R}^n/e} |f(x + h)|$$

Oú e est l'ensemble de mesure nulle.
On fait le changement de variable $x + h = y$; c-à-d $\mathbb{R}^n/e \Rightarrow (\mathbb{R}^n/e) + h = \mathbb{R}^n/(e + h)$ (somme arithmétique). On pose $X = e + h$; si $|e| = 0$ alors $|X| = 0$ et réciproquement.

$$\inf_{\{e:|e|=0\}} \sup_{y \in \mathbb{R}^n/(e+h)} |f(y)| = \inf_{\{X:|X|=0\}} \sup_{y \in \mathbb{R}^n/X} |f(y)| = \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}.$$

2.1.1 Inégalité de Hausdorff-Young

Théorème 2.1. ***(Inégalité de Hausdorff-Young)***
Soient $p, q, r \in [1, \infty]$ *tels que*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}, \quad \textit{avec la convention } 1/0 = \infty.$$

Et soient $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ *et* $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$
Alors f *et* g *sont convolables sur* $\mathbb{R}^n$ *et* $f * g \in L^r(\mathbb{R}^n)$, *De plus* $f * g$ *vérifie l'inégalité*

$$\|f * g\|_{L^r(\mathbb{R}^n)} \leq \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \|g\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}$$

Démonstration [6] : Distinguons 4 cas.
<u>1 er cas :</u> supposons que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, de sorte que

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1, \quad \textit{donc } r = \infty.$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, la fonction

$$y \longrightarrow f(x - y) \in L^p(\mathbb{R}^n).$$

Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, l'application

$$y \longrightarrow f(x - y)g(y) \in L^1(\mathbb{R}^n),$$

D'après l'inégalité de Hölder ce qui montre que f et g sont convolables, et que, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ l'on a

$$\begin{aligned}
\Big|f * g(x)\Big| &= \Big|\int_{\mathbb{R}^n} f(x - y)g(y)dy\Big| \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} \Big|f(x - y)\Big|\Big|g(y)\Big|dy \\
&\leq \Big\|f(x - y)\Big\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \Big\|g\Big\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} = \Big\|f\Big\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \Big\|g\Big\|_{L^q(\mathbb{R}^n)},
\end{aligned}$$

D'où

$$\|f * g\|_{L^\infty(R^n)} \leq \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \|g\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}.$$

<u>2 ème cas :</u> Supposons que $p = q = 1$, de sorte que $r = 1$ puisque

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1 = 1.$$

Soient f et $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, alors la fonction

$$(X,Y) \longrightarrow f(X)g(Y) \;\in\; L^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$$

Effectuons le changement de variables
X=x-y, Y=y, le jacobien

$$\frac{D(X,Y)}{D(x,y)} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Alors la fonction $(x,y) \longrightarrow f(x-y)g(y)$ appartient également à $L^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$
D'après le théorème de Fubini, la fonction

$$y \longrightarrow f(x-y)g(y) \in L^1(\mathbb{R}^n) \;\; p.p \;\; en \;\; x \in \mathbb{R}^n$$

De sorte que f et g sont convolables. De plus

$$\begin{aligned} \int_{R^n} \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy \right| dx &\leq \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \left|f(x-y)\right|\left|g(y)\right| dydx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \left|f(X)\right|\left|g(Y)\right| dXdY \\ &= \left\|f\right\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \left\|g\right\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \end{aligned}$$

<u>3 ème cas :</u> supposons que $p = 1 \;\; et \;\; 1 < q = r < \infty$. D'après le 2 ème cas, la fonction

$$y \longrightarrow |f(x-y)|^{\frac{1}{q}}|g(y)| \;\in L^q(\mathbb{R}^n) \;\; p.p \;\; en \;\; x \in \mathbb{R}^n$$

tandis que la fonction

$$y \longrightarrow |f(x-y)|^{1-\frac{1}{q}}|g(y)| \;\;\in\;\; L^{q'}(\mathbb{R}^n) \;\; p.p \;\; en \;\; x \in \mathbb{R}^n$$

En notant $q' = \frac{q}{q-1}$.
D'après l'inégalité de Hölder, la fonction

$$y \longrightarrow |f(x-y)||g(y)| = |f(x-y)|^{1-\frac{1}{q}}|f(x-y)|^{\frac{1}{q}}|g(y)|$$

appartient donc à $L^1(\mathbb{R}^n)$ pour presque tout $x \in \mathbb{R}^n$, de sorte que f et g sont convolables, et on a

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} \left|f(x-y)\right|^{\frac{1}{q}} \left|g(y)\right| \left|f(x-y)\right|^{1-\frac{1}{q}} \right)^q$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} \Big|f(x-y)\Big|\Big|g(y)\Big|^q dy \left(\Big|f(x-y)\Big|^{q'(1-\frac{1}{q})} dy\right)^{q/q'} \\
&= |f|{*}|g|^q(x)\|f\|^{q-1}_{L^1(\mathbb{R}^n)}.
\end{aligned}
$$

En appliquant l'inégalité de Hausdorff-Young dans le cas déjà établi oú $p = q = r = 1$ au produit de convolution $|f|{*}|g|^p$, on trouve donc que

$$
\begin{aligned}
\Big\|f * g\Big\|^q_{L^q(\mathbb{R}^n)} &= \int_{\mathbb{R}^n} \Big|\int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy\Big|^q dx \\
&\leq \Big\|f\Big\|^{q-1}_{L^1(R^n)} \int_{\mathbb{R}^n} \Big|f\Big| * \Big|g\Big|^p dx \\
&= \Big\|f\Big\|^{q-1}_{L^1(\mathbb{R}^n)} \Big\|f\Big\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \Big\|g\Big\|^q_{L^q(\mathbb{R}^n)} = \Big\|f\Big\|^q_{L^1(\mathbb{R}^n)} \Big\|g\Big\|^q_{L^q(\mathbb{R}^n)}.
\end{aligned}
$$

4 ème cas : Supposons que $1 < p, q, r < \infty$ vérifient

$$1 + \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$$

D'après le 2 ème cas, la fonction

$$y \longrightarrow |f(x-y)|^{p/r}|g(y)|^{q/r} \ \in L^r(\mathbb{R}^n) \ \ p.p \ \ en \ \ x \in \mathbb{R}^n$$

tandis que

$$y \longrightarrow |f(x-y)|^{1-p/r} \ \in L^{rp/r-p}(\mathbb{R}^n) \ \ pour \ \ tout \ en \ \ x \in \mathbb{R}^n$$

$$y \longrightarrow |g(y)|^{1-q/r} \ \in L^{rq/r-q}(\mathbb{R}^n) \ \ pour \ tout \ \ en \ \ x \in \mathbb{R}^n$$

Remarquons en effet que

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + (\frac{1}{q} - 1) < \frac{1}{p}$$

De sorte que

$$1 < p < r, \ \ et \ \ 1 < q < r$$

Appliquons l'inégalité de Hölder à trois termes, avec $n = 3$, $p_1 = r$, $p_2 = \frac{rp}{r-p}$ et $p_3 = \frac{rq}{r-q}$, de sorte que

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} = \frac{1}{r} = (\frac{1}{p} - \frac{1}{r}) + (\frac{1}{q} - \frac{1}{r}) = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - \frac{1}{r} = 1$$

On en déduit que la fonction

$$y \longrightarrow |f(x-y)||g(y)| = |f(x-y)|^{1-p/r}|f(x-y)|^{\frac{p}{r}}|g(y)|^{\frac{q}{r}}|g(y)|^{1-q/r}$$

Appartient à $L^1(\mathbb{R}^n)$ *p.p. en* $x \in \mathbb{R}^n$

De sorte que f et g sont convolables, et que

$$\left(\int_{(\mathbb{R}^n)} |f(x-y)|^{\frac{p}{r}}|g(y)|^{\frac{q}{r}}|f(x-y)|^{1-p/r}|g(y)|^{1-q/r}dy\right)^r$$

$$\leq \left(\left|f\right|^p * \left|g\right|^q(x)\right)\left\|f\right\|^{r-p}_{L^p(\mathbb{R}^n)}\left\|g\right\|^{r-q}_{L^q(\mathbb{R}^n)}$$

Appliquant l'inégalité de Hausdorff-Young dans le cas déjà établi oú $p = q = r = 1$ au produit de convolution $\left|f\right|^p * \left|g\right|^q$, on trouve finalement que

$$\begin{aligned}
\left\|f * g\right\|^r_{L^r(\mathbb{R}^n)} &= \int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{(\mathbb{R}^n)} |f(x-y)|^{\frac{p}{r}}|g(y)|^{\frac{q}{r}}|f(x-y)|^{1-p/r}|g(y)|^{1-q/r}dy\right)^r dx \\
&\leq \left\|f\right\|^{r-p}_{L^p(\mathbb{R}^n)}\left\|g\right\|^{r-q}_{L^q(\mathbb{R}^n)}\int_{\mathbb{R}^n}\left|f\right|^p * \left|g\right|^q(x)dx \\
&\leq \left\|f\right\|^{r-p}_{L^p(\mathbb{R}^n)}\left\|g\right\|^{r-q}_{L^q(\mathbb{R}^n)}\left\|f\right\|^{p}_{L^p(\mathbb{R}^n)}\left\|g\right\|^{q}_{L^q(\mathbb{R}^n)} \\
&= \left\|f\right\|^{r}_{L^p(\mathbb{R}^n)}\left\|g\right\|^{r}_{L^q(\mathbb{R}^n)}.
\end{aligned}$$

Ce qui conclut la démonstration.

2.2 *Approximation dans* $L^p(\mathbb{R}^n)$

Définition 2.3. ***(approximation de l'identité)*** *:*
On appelle approximation de l'identité (ou suite régularisation) toute suite $(\rho_n)_{n\geq 1}$ *de fonctions telle que*

1. $\rho_n \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$
2. *supp* $\rho_n \subset B(0, \frac{1}{n})$
3. $\int \rho_n = 1$
4. $\rho_n \geq 0$ *sur* $\mathbb{R}^n$.

Dorénavant on utilisera systématiquement la notation ρ_n pour désigner une suite régularisante

Remarque 2.1. *Qu'il existe des suites régularisantes.*
En effet, il suffit fixer une fonction $\rho \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ *avec supp*$(\rho) \subset B(0,1)$, $\int \rho = 1$, $\rho \geq 0$ *sur* $\mathbb{R}^n$.
Prendre la fonction par :

$$\rho(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x^2-1}} & si\ |x| < 1 \\ 0 & si\ |x| \geq 1 \end{cases}$$

Appartient à $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$
On construit une fonction de $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ *en remplaçant la valeur absolue* $|x|$*par la norme* $\|x\|$ *d'un élément* $x \in \mathbb{R}^n$
À partir d'une fonction de $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ *, comme la fonction* ξ*, on introduit une notion très utile dans le problème de l'approximation des fonctions par des fonctions régulières, la notion de suite régularisante. En posant :*

$$\rho_n = \frac{\xi(nx)}{\int_{\mathbb{R}} \xi(nx)dx} \qquad \forall n > 1.$$

On obtient une suite régularisation à savoir quelle vérifient :

(1) $\rho_n \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \forall \geq 1$
(2) $\rho_n(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}, \forall n \geq 1$
(3) $\int_{\mathbb{R}} \rho_n(x)dx = 1, \forall n \geq 1$
(4) Le support de ρ_n *est contenu dans un intervalle* $[-\xi_n, \xi_n]$ *avec qui tend vers* 0 *quand* n *tend vers l'infini*
Ce type de fonction à pour limite fonction de Dirac.

Proposition 2.4. *Soit* $f \in C(\mathbb{R}^n)$*, alors* $\rho_n * f \longrightarrow f$ *uniformément sur tout compact sur* $\mathbb{R}^n$

Démonstration *:*
Soit $k \subset \mathbb{R}^n$ *un compact fixé.*
$\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0$ *tel que* $|f(x-y) - f(x)| < \epsilon, \forall x \in k, \forall y \in B(0,\delta)$
On a

$$\begin{aligned}(\rho_n * f)(x) - f(x) &= \int [f(x-y) - f(x)]\rho_n(y)dy \\ &= \int_{B(0,\frac{1}{n})} [f(x-y) - f(x)]\rho_n(y)dy\end{aligned}$$

Et dans $n > \dfrac{1}{\delta}$ *et* $x \in k$,

$$|(\rho_n * f)(x) - f(x)| \leq \epsilon \int_{B(0,\frac{1}{n})} \rho_n = \epsilon$$

Théorème 2.2. *:*
Soit $f \in C_0(\mathbb{R}^n)$ et soit $(\rho_n)_{0<n<n_0}$ une suite régularisante. alors

$$\rho_n * f \in C_0^\infty \ \ et \ \ \rho_n * f \to f \quad uniformment \ \ sur \ \ \mathbb{R}^n \ \ lorsque \ \ n \to 0^+$$

Démonstration [6] :Supposons que $supp(f) \subset B(0,R)$, alors

$$supp(\rho_n * f) \subset B(0,R) + B(0,r_n) \subset B(0,R+r_n) \ \ pour \ \ tout \ \ n \in]0,n_0[,$$

d'après la Proposition 2.2.
D'autre part, d'après la Proposition 2.3, la fonction $\rho_n * f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$; *pour tout* $n \in]0, n_0[$.
En fin, en utilisant la commutativité du produit de convolution (cf. Proposition 2.1), on a

$$\begin{aligned} \rho_n * f(x) - f(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} \rho_n(y) f(x-y) dy - f(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \rho_n(y)(f(x-y) - f(x)) dy \end{aligned}$$

Car :

$$\int_{\mathbb{R}^n} \rho_n(y) dy = 1$$

Par conséquent, comme $\rho_n \geq 0$ est à support dans $\overline{B(0,r_n)}$

$$\begin{aligned} \rho_n * f(x) - f(x) &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \rho_n(y) \big| f(x-y) - f(x) \big| dy \\ &\leq \sup_{|y| \leq r_n} \big| f(x-y) - f(x) \big| \int_{B(0,r_n)} \rho_n(y) dy \\ &= \sup_{|y| \leq r_n} \big| f(x-y) - f(x) \big| \end{aligned}$$

Or f est continue à support compact, et donc uniformément continue sur $\mathbb{R}^n$ par conséquent, comme $r_n \to 0$ lorseque $n \to 0^+$

$$\sup_{x \in R^n, |y| \leq r_n} \left| f(x-y) - f(x) \right| \longrightarrow 0 \quad lorsque \quad n \to 0^+$$

On en déduit alors que

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |\rho_n * f(x) - f(x)| \to 0 \quad lorsque \quad n \to 0^+$$

2.2.1 Densité de $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ dans $L^p(\mathbb{R}^n)$

Théorème 2.3. *:*
Soit $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ avec $1 \leq p < \infty$, Alors
a) pour toute suite régularisante $(\rho_n)_{0<n<n_0}$, on a

$$\|\rho_n * f - f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \longrightarrow 0 \quad lorsque \quad n \to 0^+;$$

b) pour tout $\eta > 0$, il existe une fonction $f_\eta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ telle que

$$\|f_\eta - f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \eta$$

Remarque 2.2. *L'ensemble $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $L^p(\mathbb{R}^n)$ pour $1 \leq p < \infty$. Mais pour $p = \infty$, ce cas $C_0(\mathbb{R}^n)$ n'est pas dense dans $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ (puisque la limite uniforme d'une suite de fonctions continues est une fonction continue).*
Donc, en particulier, $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ n'est pas dense dans $L^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Démonstration : *[6]*
Par densité de $C_0(\mathbb{R}^n)$ dans $L^p(\mathbb{R}^n)$ étant donné $\eta > 0$, il existe $\phi \in C_0(\mathbb{R}^n)$ telle que

$$\|f - \phi\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} < \frac{1}{2}\eta$$

Puis, d'après le Théorème 2.2, si $(\rho_n)_{0<n<n_0}$ est une suite régularisante

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n}\big|\rho_n * \phi(x) - \phi(x)\big| \longrightarrow 0 \quad lorsque \;\; n \to 0^+$$

Or supp(ϕ) est compact, soit donc $R > 0$ tel que supp$(\phi) \subset B(0, R)$ de sorte que

$$supp(\rho)_n * \phi \subset B(0, R) + B(0, r_n) = B(0, R + r_n),$$

D'après la Proposition 2.2 et le Lemme 2.1. Alors, grâce à l'inégalité de Hölder

$$\|\rho_n * \phi - \phi\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \sup_{x\in\mathbb{R}^n}|\rho_n * \phi(x) - \phi(x)||B(0, \sup_{0<n<n_0} r_{n_0})|^{\frac{1}{p}} \to 0 \quad lorseque \;\; n \to 0^+$$

Pour démontrer le b), on choisit $n > 0$ assez petit pour que

$$\|\rho_n * \phi - \phi\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} < \frac{1}{2}\eta$$

Et on pose $f_\eta = \rho_n * \phi$: ainsi

$$\|f_\eta - f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \|f - \phi\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\|\rho_n * \phi - \phi\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} < \eta.$$

D'autre part

$$\rho_n * \phi \in C_0^\infty(R^n) \ \ est \quad support \ \ dans \quad B(0, R + \underset{0<n<n_0}{r_{n_0}}),$$

ce qui établit le b).
Pour démontrer le a), on écrit que

$$\begin{aligned}\|f * \rho_n - f\|_{L^p(R^n)} &\leq \|f - \phi\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \|\rho_n * \phi - \phi\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \|\rho_n * f - \rho_n * \phi\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq (1 + \|\rho_n\|_{L^1(\mathbb{R}^n)})\|f - \phi\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \|\rho_n * \phi - \phi\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\ &= \eta + \|\rho_n * \phi - \phi\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.\end{aligned}$$

Prenant la limite supérieure de chaque membre de cette inégalité pour $n \to 0^+$ *, on trouve que*

$$\overline{\lim_{n \to 0^+}} \|\rho_n * \phi - \phi\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \eta$$

Et comme ceci vaut pour tout $\eta > 0$*, il s'ensuit que le membre de gauche de cette inégalité, qui est un nombre indépendant de* η *, est nul, ce qui établit le a).*
D'après l'inégalité de Hausdorff-Young (Théorème 2.1). Or on a vu que

$$\|\rho_n * \phi - \phi\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \longrightarrow 0, \quad lorseque \quad n \to 0^+$$

Chapitre 3

L'espace $L^{p(x)}$

3.1 Notation et Définitions

NOTATION

Ω est un ensemble de $\mathbb{R}^n$
$|\Omega|$ désigne la mesure de Ω
$P(\Omega)$ L'ensemble de toutes les fonctions mesurables telles que $p : \Omega \longrightarrow [1, \infty]$
On pose :

$$\Omega_a = \Omega_a(p) = \{x \in \Omega, p(x) = a, a \in [1, \infty]\}$$

En particulier : $\Omega_1 = \{x \in \Omega, p(x) = 1\}$ et $\Omega_\infty = \{x \in \Omega, p(x) = \infty\}$
puis :

$$\begin{aligned}
\Omega_0 &= \Omega/(\Omega_1 \cup \Omega_\infty) \\
\overline{p} &= \sup_{x \in \Omega} vrai\ p(x), \underline{p} = \inf_{x \in \Omega} vrai\ p(x). \\
c_p &= \|\chi_{\Omega_1}\|_\infty + \|\chi_{\Omega_0}\|_\infty + \|\chi_{\Omega_\infty}\|_\infty \\
r_p &= 1 + \frac{1}{\underline{p}} - \frac{1}{\overline{p}}.
\end{aligned}$$

Oû χ désigne la fonction caractéristique des ensembles correspondants.

Définition 3.1. *On note par $L^{p(x)}(\Omega)$ l'ensemble des fonctions f mesurables et telles que :*

$$I_p(f) = \int_{\Omega/\Omega_\infty} |f(x)|^{p(x)} dx + \sup_{x \in \Omega_\infty} vrai|f(x)| < \infty \tag{3.1}$$

Remarque 3.1. *On peut adopter une autre définition.*

Définition 3.2. *On note par $L^{p(x)}$ l'ensemble des fonctions f mesurables et telles que :*

$$I_p(f) = \int_{\Omega/\Omega_\infty} |f(x)|^{p(x)} dx < \infty \tag{3.2}$$

$$\sup_{x \in \Omega_\infty} vrai|f(x)| < \infty \tag{3.3}$$

Les définition 3.1 et 3.2 sont équivalents.

Dans ce qui suit on cite certaines propriétés de $I_p(f)$.

Proposition 3.1.

1. $I_p(f) \geq 0, \forall f$.
2. $I_p(f) = 0$ *si et seulement si* $f = 0$ *p.p* .
3. $I_p(-f) = I_p(f), \forall f \in L^{p(x)}(\Omega)$.
4. I_p *est convexe.*
5. *si* $|f(x)| \geq |g(x)|$ *pour* $x \in \Omega$ *presque par tout, et si* $I_p(f) < \infty$ *alors* $I_p(f) \geq I_{p(g)}$.
6. *si* $0 < I_p(f) < \infty$ *alors l'application* $\lambda \longrightarrow I_p(\frac{f}{\lambda})$ *est continue et décroissante sur l'intervalle* $[1, \infty)$

***Démonstration** :*

(1) et(2) sont obtenues á partir des propriétés de l'intégrale de Lebesgue.
(3)Egalité évidente.
(4) voir [10].
(5) Est déduire d'une propriété de l'intégrale de Lebesgue.
(6) Soit λ_1 et $\lambda_2 \geq 1$ alors

$$\frac{|f(x)|}{\lambda_1} \leq \frac{|f(x)|}{\lambda_2}$$

$$\int_\Omega \frac{|f(x)|}{\lambda_1} dx \leq \int_\Omega \frac{|f(x)|}{\lambda_2} dx$$

.

Et donc $I_p(\lambda_1) \geq I_p(\lambda_2)$. La continuité de $I_p(\frac{f}{\lambda})$ est évidente.

Définition 3.3. *On définit sur $L^{p(x)}(\Omega)$ la norme suivante ;*

$$\|f\|_{L^{p(x)}(\Omega)} = inf\{\lambda, \lambda > 0 : I_p(\frac{f}{\lambda}) \leq 1\} \tag{3.4}$$

Lemme 3.1. *.Soit $f \in L^{p(x)}(\Omega)$ alors*

$$I_p\left(\frac{f}{\|f\|_{L^{p(x)}(\Omega)}}\right) \leq 1 \; \forall \; f \; \; telle \; \; que \; \; 0 < \|f\|_{L^{p(x)}(\Omega)} < \infty \tag{3.5}$$

Démonstration *: On prend une suit $(\lambda_n)_n$ décroissante qui converge vers $\|f\|_{L^{p(x)}(\Omega)}$ et donc la suite $(\frac{|f|}{\lambda_n})_n$ est criossante et converge vers $\frac{|f|}{\|f\|_{L^{p(x)}(\Omega)}}$ et donc en vertu de lemme de Fatou ,On obtient :*

$$\int_\Omega \left(\frac{|f|}{\|f\|_{L^{P(x)}(\Omega)}}\right)^{p(x)} dx \leq \lim_{n\to\infty} \inf \int_\Omega \left(\frac{|f|}{\lambda_n}\right)^{p(x)} dx \leq 1,$$

Si $x \in \Omega_\infty$ (3.5) est évidente .
Et finalement on a $I_p\left(\frac{|f|}{\|f\|_{L^{p(x)}(\Omega)}}\right) \leq 1.$

Corollaire 3.1. *Pour tout $f \in L^{p(x)}(\Omega)$ tel que $0 < \|f\|_{L^{p(x)}(\Omega)} < \infty$*

$$Si \|f\|_{L^{p(x)}(\Omega)} \leq 1 \; \; alors \; \; I_p(f) \leq \|f\|_{L^{p(x)}(\Omega)} \tag{3.6}$$

Démonstration *: On a*

$$\left(\frac{1}{\|f\|_{L^{p(x)}(\Omega)}}\right)^{p(x)} \geq \frac{1}{\|f\|_{L^{p(x)}(\Omega)}} \geq 1, \; \; ou \; \; p(x) \geq 1$$

$$\frac{\int_\Omega |f(x)|^{p(x)} dx}{\|f\|_{L^{p(x)}(\Omega)}} \leq \int_\Omega \left(\frac{|f(x)|}{\|f\|_{L^{p(x)}(\Omega)}}\right)$$

Ou la dérniére inégalité d'ecoule du lemme 1.6, d'ou $I_{p(f)} \leq \|f\|_{L^{p(x)}(\Omega)}$

Lemme 3.2. *Soit $f \in L^{p(x)}(\Omega), \bar{p} < \infty$ alors*

$$\left(\frac{\|f\|_{L^{p(x)}(\Omega)}}{\lambda}\right)^{\bar{p}} \leq I_p(\frac{f}{\lambda}) \leq \left(\frac{\|f\|_{L^{p(x)}(\Omega)}}{\lambda}\right)^{\underline{p}}, si \; \; \lambda \geq \|f\|_{L^{p(x)}(\Omega)} \tag{3.7}$$

$$\left(\frac{\|f\|_{L^{p(x)}(\Omega)}}{\lambda}\right)^{\underline{p}} \leq I_p(\frac{f}{\lambda}) \leq \left(\frac{\|f\|_{L^{p(x)}(\Omega)}}{\lambda}\right)^{\bar{p}}, \; \; si \; \; 0 < \lambda \leq \|f\|_{L^{p(x)}(\Omega)} \tag{3.8}$$

Démonstration *: On prouve (3.8).*

Soit $f \in L^{p(x)}(\Omega)$ *et soit* $0 < \lambda \leq \|f\|_{L^{p(x)}(\Omega)}$ *et donc* $\frac{\|f\|_{L^{p(x)}(\Omega)}}{\lambda} \geq 1$ *on a*

$$I_p(\frac{f}{\lambda}) = \int_\Omega \left|\frac{f}{\lambda}\right|^{p(x)} dx = \int_\Omega \left(\frac{|f|}{\|f\|_{L^{p(x)}(\Omega)}}\right)^{p(x)} \left(\frac{\|f\|_{L^{p(x)}(\Omega)}}{\lambda}\right)^{p(x)} dx.$$

Mais

$$\int_\Omega \left(\frac{|f|}{\|f\|_{L^{p(x)}(\Omega)}}\right)^{p(x)} \left(\frac{\|f\|_{L^{p(x)}(\Omega)}}{\lambda}\right)^{p(x)} dx \leq \int_\Omega \left(\frac{|f|}{\|f\|_{L^{p(x)}(\Omega)}}\right)^{p(x)} \left(\frac{\|f\|_{L^{p(x)}(\Omega)}}{\lambda}\right)^{\bar{p}} dx.$$

Alors

$$I_p(\frac{f}{\lambda}) \leq \int \left(\frac{|f|}{\|f\|_{L^{p(x)}(\Omega)}}\right)^{p(x)} \left(\frac{\|f\|_{L^{p(x)}(\Omega)}}{\lambda}\right)^{\bar{p}} dx.$$

Et comme $\bar{p} < \infty$ *alors dápres le lemme 3.1 on a* $I_p\left(\frac{f}{\|f\|_{L^{p(x)}(\Omega)}}\right) = 1$

Donc

$$I_P\left(\frac{f}{\lambda}\right) \leq \left(\frac{\|f\|_{L^{p(x)}(\Omega)}}{\lambda}\right)^{\bar{p}}.$$

Le méme raisonnement est valable pour l'inégalité à gauche , et l'inégalité (3.7) est taitée d'une maniére analogue

Lemme 3.3. *Soit* $0 < \underline{p} \leq \bar{p} \leq \infty$*, si* $I_p(\frac{f}{a}) < b$*, pour* $a > 0$*,* $b > 0$*, alors*

$$\|f\|_{L^{p(x)}(\Omega)} \leq ab^v$$

Avec

$$v = \begin{cases} 1/\underline{p} & si\ b \geq 1 \\ 1/\bar{p} & si\ b \leq 1 \end{cases}$$

Démonstration : Soit $b \geq 1$ et $I_p\left(\frac{f}{a}\right) = \int_\Omega \left|\frac{f(x)}{a}\right|^{p(x)} dx < b$ alors

$$\int_\Omega \left|\frac{f(x)}{ab^{\frac{1}{\underline{p}}}}\right|^{p(x)} dx \leq \frac{1}{b} \int_\Omega \left|\frac{f(x)}{a}\right|^{p(x)} dx \leq 1$$

Et comme

$$\|f\|_{L^{p(x)}(\Omega)} = \inf\{\lambda, \lambda > 0, I_p\left(\frac{f}{\lambda}\right) \leq 1\}$$

Alors

$$\|f\|_{L^{p(x)}(\Omega)} \leq ab^{\frac{1}{p}} \quad pour \quad b \geq 1.$$

De maniére analgue on monter que $\|f\|_{L^{p(x)}(\Omega)} \leq ab^{1/\bar{p}}$ pour $b \leq 1$ et donc

$$\|f\|_{L^{p(x)}(\Omega)} \leq ab^{v}$$

Définition 3.4. *Soit $p(x) \in [1;\infty)$ alors on dit que la fonction $q(x)$ est la conjuguée de $p(x)$ si :*

$$q(x) = \begin{cases} \infty & pour \ x \in \Omega_1, \\ 1 & pour \ x \in \Omega_\infty, \\ \frac{p(x)}{p(x)-1} & pour \ x \in \Omega_0, \end{cases}$$

Remarque 3.2. *Si $p(x) = cste$*

$$\begin{aligned} I_p(\frac{f}{\lambda}) = \int \left|\frac{f(x)}{\lambda}\right|^{p(x)} dx &= \int \left|\frac{f(x)}{\lambda}\right|^{p} dx \\ &= \frac{1}{\lambda^p} \int |f|^p \leq 1 \end{aligned}$$

On trouve

$$\int |f|^p \leq \lambda^p \Longrightarrow (\int |f|^p)^{\frac{1}{p}} \leq \lambda$$

Donc

$$\|f\|_{L^{p(x)}(\Omega)} = \{\inf \lambda > 1, \ \ tq \ \ I_p(\frac{f}{\lambda}) \leq 1\} = (\int |f|^p)^{\frac{1}{p}} = \|f\|_{L^p}$$

3.1.1 *Quelques exemples :*

Exemple 3.1.1. *Soit $\Omega = (-1, 1)$*

$$p(x) = \begin{cases} 1 & si \ \ -1 \leq x \leq 0 \\ 2 & si \ \ 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & si \ \ -1 \leq x \leq 0 \\ 2 & si \ \ 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

Alors

$$\begin{aligned} I_p(f) = \int_\Omega |f(x)|^{p(x)}dx &= \int_0^1 2^2 dx \\ &= 4 < \infty \end{aligned}$$

Donc

$$f \in L^{p(x)}(\Omega).$$

Exemple 3.1.2. *Soit* $\Omega =]0,1[$ *;*

$$p(x) = \frac{1}{x} \ \ et \ \ f(x) = 4^{-x}x^{\frac{-x}{2}}.$$

Donc

$$\begin{aligned} I_p(f) &= \int_0^1 4^{-1}x^{\frac{-1}{2}}dx \\ &= \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx \\ &= \frac{1}{4}\int_0^1 x^{\frac{-1}{2}}dx \\ &= \frac{1}{8} < \infty. \end{aligned}$$

D'oú $f \in L^{p(x)}(\Omega)$

Exemple 3.1.3. *Soit* $\Omega =]0,1[$, $p(x) = \dfrac{1}{x}, f(x) = x^{-x}$
Donc

$$I_p(f) = \int_0^1 x^{-1}dx = |\ln x|_0^1 = \infty$$

D'oú

$$f \notin L^{p(x)}(\Omega)$$

Exemple 3.1.4. *(Calcule de la norme dans* $L^{p(x)}(\Omega)$*).*

Soit $\Omega = (-1,1)$

$$p(x) = \begin{cases} 1 & si \ \ -1 \leq x \leq 0 \\ 2 & si \ \ 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 2 & si \ \ -1 \leq x \leq 0 \\ 1 & si \ \ 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} I_p(\frac{f}{\lambda}) &= \int_\Omega \left|\frac{f(x)}{\lambda}\right|^{p(x)} dx \\ &= \int_{-1}^{0} \frac{2}{\lambda} dx + \int_0^1 \frac{1}{\lambda^2} dx \\ &= \lambda^{-2} + 2\lambda^{-1} \leq 1 \end{aligned}$$

Donc on résoudre l'inégalité

$$\lambda^{-2} + 2\lambda^{-1} - 1 \leq 0.$$

Posons $\lambda^{-1} = x > 0$ *on obtenu* $x^2 + 2x - 1 \leq 0$.
Alors $\Delta = 8$, *donc* $x_1 = -\sqrt{2} - 1, x_2 = \sqrt{2} - 1$
Donc $S = [0, \sqrt{2} - 1]$, *alors* $\sup \lambda = \sqrt{2} - 1$ *et* $\inf \lambda = (\sqrt{2} - 1)^{-1}$
D'oú

$$\|f\|_{L^{p(x)}(\Omega)} = (\sqrt{2} - 1)^{-1} = \sqrt{2} + 1.$$

3.2 Inégalités de Hölder

Théorème 3.1. ***(Inégalité de Hölder)*** *Soient* $p(x)$ *et* $q(x) \in P(\Omega)$. *alors l'inégalité*

$$\int_\Omega |f(x)g(x)|dx \leq r_p \|f\|_{L^{p(x)}(\Omega)} \|g\|_{L^{q(x)}(\Omega)}. \tag{3.9}$$

Est vérifiée pour chaque $f \in L^{p(x)}(\Omega)$ *et* $g \in L^{q(x)}(\Omega)$, *oú* $r_p = 1 + \frac{1}{\underline{p}} - \frac{1}{\bar{p}}$ *avec* $\frac{1}{p(x)} + \frac{1}{q(x)} = 1$, *et* $\|f\|_{L^{p(x)}(\Omega)} = inf\{\lambda, \lambda > 0 : I_P(\frac{f}{\lambda}) \leq 1\}$.

Démonstration : On pose $a = \frac{|f|}{\|f\|_{L^{p(x)}(\Omega)}}$ et $b = \frac{|g|}{\|g\|_{L^{q(x)}(\Omega)}}, p = p(x), q = q(x)$ On applique l'inégalité $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$
Puis on intégré sur
$\Omega_0 = \Omega / \Omega_1 \cup \Omega_\infty$ alors :

$$I_p\left(\frac{f}{\|f\|_{L^{p(x)}(\Omega)}}\right) \leq 1 \textit{ pour tout } f \textit{ tel que } 0 < \|f\|_{L^{p(x)}(\Omega)} < \infty$$

D'oú

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_0}\left|\frac{f(x)g(x)}{\|f\|_{L^{p(x)}(\Omega)}g\|_{L^{q(x)}(\Omega)}}\right|dx &\leq \int_{\Omega_0}\frac{1}{p(x)}\left|\frac{f}{\|f\|_{L^{p(x)}(\Omega)}}\right|^{p(x)}dx+\int_{\Omega_0}\frac{1}{q(x)}\left|\frac{g}{\|g\|_{L^{q(x)}(\Omega)}}\right|^{q(x)}dx\\
&\leq \frac{1}{\underline{p}}\int_{\Omega_0}\left|\frac{f}{\|f\|_{L^{p(x)}(\Omega)}}\right|^{p(x)}dx+\frac{1}{\underline{q}}\int_{\Omega_0}\left|\frac{g}{\|g\|_{Lq(x)(\Omega)}}\right|^{q(x)}dx\\
&\leq \frac{1}{\underline{p}}I_P\Big(\frac{f}{\|f\|_{L^{p(x)}(\Omega)}}\Big)+\frac{1}{\underline{q}}I_q\Big(\frac{g}{\|g\|_{L^{q(x)}(\Omega)}}\Big)\\
&\leq \frac{1}{\underline{p}}+\frac{1}{\underline{q}}\\
&\leq \frac{1}{\underline{p}}+1-\frac{1}{\bar{p}}=1+\frac{1}{\underline{p}}-\frac{1}{\bar{p}}=r_p.
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_0}|f(x)g(x)|dx &\leq (1+\frac{1}{\underline{p}}-\frac{1}{\bar{p}})\|f\|_{L^{p(x)}(\Omega_0)}\|g\|_{L^{q(x)}(\Omega_0)}\\
&\leq r_p\|f\|_{L^{p(x)}(\Omega_0)}\|g\|_{L^{p(x)}(\Omega_0)}.
\end{aligned}$$

Pour $x\in\Omega_1$ *ou* $x\in\Omega_\infty$ on retrouve l'inégalité de Hölder classique.

Remarque 3.3. *Si* $p = cste \in [1;\infty)$, *on retrouve l'inégalité classique de Hölder avec* $r_p = 1$

Corollaire 3.2. *On peut définir sur* $L^{p(x)}(\Omega)$ *la norme suivante*

$$\|f\|^*_{L^{p(x)}(\Omega)}= inf\{\lambda,\lambda>0:\int_{\Omega_0}\frac{2}{p(x)}\left|\frac{f}{\lambda}\right|^{p(x)}dx\leq 1\}, \tag{3.10}$$

Avec la quelle on exprime l'inégalité de Hölder comme suite

$$\int_{\Omega}|f(x)g(x)dx\leq\|f\|^*_{L^{p(x)}(\Omega)}\|g\|^*_{L^{q(x)}(\Omega)}.$$

Démonstration *: On procéd comme dans le Théorème 3.1 c'est-dire :*

$$\begin{aligned}
\int_{(\Omega_0}\frac{|f(x)g(x)|}{\|f\|^*_{L^{p(x)}(\Omega)}\|g\|^*_{L^{q(x)}(\Omega)}}dx &\leq \int_{\Omega_0}\frac{1}{p(x)}\left|\frac{f}{\|f\|_{L^{p(x)}(\Omega)}}\right|^{p(x)}dx+\int_{\Omega_0}\frac{1}{q(x)}\left|\frac{g}{\|g\|_{L^{q(x)}(\Omega)}}\right|^{q(x)}\\
&\leq \frac{1}{2}\int_{\Omega_0}\frac{2}{p(x)}\left|\frac{f}{\|f\|_{L^{p(x)}(\Omega)}}\right|^{p(x)}dx+\frac{1}{2}\int_{\Omega_0}\frac{2}{q(x)}\left|\frac{g}{\|g\|_{L^{q(x)}(\Omega)}}\right|^{q(x)}\\
&\leq \frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1.
\end{aligned}$$

D'oú

$$\int_{(\Omega)(0)} |f(x)g(x)|dx \leq \|f\|^*_{L^{p(x)}(\Omega_0)} \|g\|^*_{L^{q(x)}(\Omega_0)}.$$

Et pour Ω_∞, Ω_1 on est ramené aux cas classique.

3.2.1 Généralisation de l'inégalité de Hölder.

L'inégalité de Hölder pour $\frac{1}{p(x)} + \frac{1}{q(x)} = \frac{1}{r(x)}$ et valable mais pas comme une conséquence direct de l'inégalité de Hölder comme dans le cas classique (car $\|f^{r(x)}\|_{L^{\frac{p(x)}{r(x)}}(\Omega)} \neq \|f\|^{r(x)}_{L^{p(x)}(\Omega)}$).

Lemme 3.4. *Soit $0 < s(x) \leq p(x) < \bar{p} < \infty, x \in \Omega/\Omega_\infty$, alors*

$$\|f\|^{\underline{s}}_{L^{p(x)}(\Omega)} \leq \|f^{s(x)}\|_{L^{\frac{p(x)}{s(x)}}(\Omega)} \leq \|f\|^{\bar{s}}_{L^{p(x)}(\Omega)}, pour \ \|f\|_{L^{p(x)}(\Omega)} \geq 1 \tag{3.11}$$

Et

$$\|f\|^{\bar{s}}_{L^{p(x)}(\Omega)} \leq \|f^{s(x)}\|_{L^{\frac{p(x)}{s(x)}}(\Omega)} \leq \|f\|^{\underline{s}}_{L^{p(x)}(\Omega)}, pour \ \|f\|_{L^{p(x)}(\Omega)} \leq 1 \tag{3.12}$$

Démonstration *: Soit $f \in L^{p(x)}(\Omega)$ telle que $\|f\|_{L^{p(x)}(\Omega)} \geq 1$, et soit $0 < s(x) \leq p(x) < \bar{p} < \infty, x \in \Omega/\Omega_\infty$, alors*

$$\begin{aligned} \|f^{s(x)}\|_{L^{\frac{p(x)}{s(x)}}(\Omega)} &= \inf\{\mu \geq 1, I_{\frac{p}{s}}(\frac{f^{s(x)}}{\mu}) \leq 1\} \\ &= \inf\{\mu \geq 1, \int_\Omega \left|\frac{f^{s(x)}}{\mu}\right|^{\frac{p(x)}{s(x)}} dx \leq 1\} \\ &= \inf\{\mu \geq 1, \int_\Omega \frac{|f^{p(x)}|}{\mu^{\frac{p(x)}{s(x)}}} dx \leq 1\}. \end{aligned}$$

On pose $\lambda = (\mu^{s(x)^{-1}})$ alors $\mu = \lambda^{s(x)}$ et donc

$$\|f^{s(x)}\|_{L^{\frac{p(x)}{s(x)}}(\Omega)} = \inf\{\lambda^{s(x)} \geq 1, \int_\Omega \frac{|f(x)|^{p(x)}}{\lambda^{p(x)}} dx \leq 1\}.$$

Et comme $\lambda \geq 1$ alors

$$\lambda^{\underline{s}} \leq \lambda^{s(x)} \leq \lambda^{\bar{s}}.$$

Donc

$$\inf \lambda^{\underline{s}} \leq \inf \lambda^{s(x)} \leq \inf \lambda^{\bar{s}}.$$

Et on a

$$\begin{aligned}
\|f\|^{\underline{s}}_{L^{p(x)}(\Omega)} &= \left[\inf\{\lambda, \lambda \geq 1, \int_\Omega \frac{|f(x)|^{p(x)}}{\lambda^{p(x)}}dx \leq 1\}\right]^{\underline{s}} \\
&= \inf\{\lambda^{\underline{s}}, \lambda \geq 1, \int_\Omega \frac{|f(x)|^{p(x)}}{\lambda^{p(x)}}dx \leq 1\} \\
\|f\|^{\bar{s}}_{L^{p(x)}(\Omega)}. &= \left[\inf\{\lambda, \lambda \geq 1, \int_\Omega \frac{|f(x)|^{p(x)}}{\lambda^{p(x)}}dx \leq 1\}\right]^{\bar{s}} \\
&= \inf\{\lambda^{\bar{s}}, \lambda \geq 1, \int_\Omega \frac{|f(x)|^{p(x)}}{\lambda^{p(x)}}dx \leq 1\}.
\end{aligned}$$

Par suit

$$\|f\|^{\underline{s}}_{L^{p(x)}(\Omega)} \leq \|f^{s(x)}\|_{L^{\frac{p(x)}{s(x)}}(\Omega)} \leq \|f\|^{\bar{s}}_{L^{p(x)}(\Omega)}.$$

Et de manière analogue on montre la seconde inégalité.

Proposition 3.2. *Soit* $p(x) \geq 1, q(x) \geq 1$ *et* $r(x) \geq 1$ *avec* $\frac{1}{p(x)} + \frac{1}{q(x)} = \frac{1}{r(x)}$, *et soit* $\sup\limits_{x \in \Omega/\Omega_\infty} r(x) < \infty$, *alors*

$$\|fg\|_{L^{r(x)}(\Omega)} \leq c\|f\|_{L^{p(x)}(\Omega)}\|g\|_{L^{q(x)}(\Omega)} \tag{3.13}$$

avec $c = \sup \frac{r(x)}{p(x)} + \sup \frac{r(x)}{q(x)}$

Démonstration *: On a l'inégalité du corollaire 1.2*

$$(AB)^{r(x)} \leq \frac{r(x)}{p(x)}A^{p(x)} + \frac{r(x)}{q(x)}B^{p(x)}$$

On remplace dans cette inégalité A *par* $f/\|f\|_{L^{p(x)}(\Omega)}$ *et* B *par* $g/\|g\|_{L^{q(x)}(\Omega)}$, *on obtient*

$$\left|\frac{f(x)g(x)}{\|f\|_{L^{p(x)}(\Omega)}\|g\|_{L^{q(x)}(\Omega)}}\right|^{r(x)} \leq \frac{r(x)}{p(x)}\left|\frac{f(x)}{\|f\|_{L^{p(x)}(\Omega)}}\right|^{p(x)} + \frac{r(x)}{q(x)}\left|\frac{g(x)}{\|g\|_{L^{q(x)}(\Omega)}}\right|^{q(x)},$$

Alors

$$\int_{\Omega/\Omega_\infty}\left|\frac{f(x)g(x)}{\|f\|_{L^{p(x)}(\Omega)}\|g\|_{L^{q(x)}(\Omega)}}\right|^{r(x)}dx \leq \int_{\Omega/\Omega_\infty}\frac{r(x)}{p(x)}\left|\frac{f(x)}{\|f\|_{L^{p(x)}(\Omega)}}\right|^{p(x)}dx + \int_{\Omega/\Omega_\infty}\frac{r(x)}{q(x)}\left|\frac{g(x)}{\|g\|_{L^{q(x)}(\Omega)}}\right|^{q(x)}dx.$$

Donc

$$\begin{aligned}\int_{\Omega/\Omega_\infty}\left|\frac{f(x)g(x)}{\|f\|_{L^{p(x)}(\Omega)}\|g\|_{L^{q(x)}(\Omega)}}\right|^{r(x)}dx &\leq \sup\frac{r(x)}{p(x)}\int_{\Omega/\Omega_0}\frac{r(x)}{p(x)}\left|\frac{f(x)}{\|f\|_{L^{p(x)}(\Omega)}}\right|^{p(x)} \\ &+ \sup\frac{r(x)}{q(x)}\int_{\Omega/\Omega_\infty}\frac{r(x)}{q(x)}\left|\frac{g(x)}{\|g\|_{L^{q(x)}(\Omega)}}\right|^{q(x)} \\ &\leq \sup\frac{r(x)}{p(x)} + sup\frac{r(x)}{q(x)} = c.\end{aligned}$$

D'oú

$$I_r\left(\frac{f(x)g(x)}{c\|f\|_{L^{p(x)}(\Omega)}\|g\|_{L^{q(x)}(\Omega)}}\right) \leq 1.$$

Et finalement On a

$$\|fg\|_{L^{r(x)}(\Omega)}\leq c\|f\|_{L^{p(x)}(\Omega)}\|g\|_{L^{q(x)}(\Omega)}.$$

Remarque 3.4. *Si $r(x) = 1$,on trouve l'inégalité (3.9) avec $c = r_p$.*

3.3 Inégalite de Minkowsky

On se propose de définir une autre norme

Définition 3.5. *Soit $f \in L^{p(x)}(\Omega)$ alors on definit sur $L^{p(x)}(\Omega)$ la norme suivante :*

$$\|f\|_p= \sup_{I_q(g)\leq 1}\left|\int_\Omega f(x)g(x)dx\right| < \infty,$$

Oú $1/p(x) + 1/q(x) = 1$.

Proposition 3.3. *.(Inégalité de Minkowsky)*
Soit $f, g \in L^{p(x)}(\Omega)$, alors on a

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p+\|g\|_p,$$

Oú $\|f\|_p= \sup\limits_{I_q(\varphi)\leq 1} |\int_\Omega f(x)\varphi(x)dx|$.

Démonstration *: On a*

$$\begin{aligned}\|f + g\|_p &= \sup_{I_q(g)\leq 1}\left|\int_\Omega\Big(f(x) + g(x)\Big)\varphi(x)dx\right| \\ &\leq \sup_{I_q(g)\leq 1}\left|\int_\Omega f(x)\varphi(x)\right| + \sup_{I_q(g)\leq 1}\left|\int_\Omega g(x)\varphi(x)\right| \\ &\leq \|f\|_p+\|g\|_p\end{aligned}$$

Corollaire 3.3. *Soient $m \in \mathbb{N}, f_k \in L^{P(x)}(\Omega)$ pour tout $k = \{1, 2, ..., m\}$; alors*

$$\|\sum_{k=1}^{m} f_k\|_p \leq \sum_{k=1}^{m} \|f_k\|_p \tag{3.14}$$

Démonstration *: Par récurrence*

Définition 3.6. *Soit $f \in L^{p(x)}(\Omega)$, alors on peut définir sur $L^{P(x)}(\Omega)$ la norme suivante :*

$$\|f\|_p^{'} = \sup_{\|\varphi\|_{L^{q(x)}(\Omega)} \leq 1} |\int_{\Omega} f(x)\varphi(x)dx| < \infty \tag{3.15}$$

Avec $\frac{1}{p(x)} + \frac{1}{q(x)} = 1$

Proposition 3.4. *Pour tout $f \in L^{p(x)}(\Omega)$ on a l'équivalence des normes suivantes :*

$$c\|f\|_p^{'} \leq \|f\|_p \leq \|f\|_p^{'} \tag{3.16}$$

Avec

$$c = 2^{1-\frac{\bar{q}}{\underline{q}}} \tag{3.17}$$

Démonstration *: Voir [14]*

Proposition 3.5. *Soit $p \in P(\Omega)$, tel que $\bar{p} < \infty$ et $\underline{p} > 1$ alors*

$$\|\int_{\Omega} f(., y)dy\|_{p,x}^{'} \leq \int_{\Omega} \|f(., y)\|_{p,x}^{'} dy \tag{3.18}$$

Démonstration *: On a*

$$\begin{aligned}
\|\int_{\Omega} f(., y)\|_{p,x}^{'}\| &= \sup_{\|\varphi\|_{L^{q(x)}(\Omega)} \leq 1} \left| \int_{\Omega} \left(\int_{\Omega} f(x, y)dy \right) \varphi(x)dx \right| \\
&\leq \sup_{\|\varphi\|_{L^{q(x)}(\Omega)} \leq 1} \int_{\Omega} \int_{\Omega} |\varphi(x)f(x, y)|dxdy \\
&= \int_{\Omega} \left(\sup_{\|\varphi\|_{L^{q(x)}(\Omega)} \leq 1} \int_{\Omega} |f(x; y)\varphi(x)|dx \right) dy \\
&= \int_{\Omega} \|f(., y)\|_{p,x}^{'} dy.
\end{aligned}$$

Proposition 3.6. $L^{p(x)}(\Omega) = \{f : \|f\|_p < \infty\}$ *et pour chaque* $f \in L^{p(x)}(\Omega)$ *On a :*

$$c_p^{-1}\|f\|_{L^{p(x)}(\Omega)} \leq \|f\|_p \leq r_p\|f\|_{L^{p(x)}(\Omega)}$$

Démonstration *: Voir [7]*

Corollaire 3.4. *Soit* $p \in P(\Omega)$, *tel que* $\bar{p} < \infty$ *et* $\underline{p} > 1$. *alors*

$$\|\int_\Omega f(., y)dy\|_{p,x} \leq c\int_\Omega \|f(., y)\|'_{p,x}dy \tag{3.19}$$

Avec $c = 2^{-1+\frac{\bar{q}}{\underline{q}}}$ *et*

$$\|\int_\Omega f(., y)\|_{L^{p(x)}(\Omega)} \leq c\int_\Omega \|f(., y)\|_{L^{p(x)}(\Omega)}dy \tag{3.20}$$

Démonstration *:L'intégrale (3.19) découle de la proposition 3.4 et la proposition 3.5 pour l'inégalite (3.20) on utilise la proposition 3.4 la proposition 3.6.*

Chapitre 4

Propriétés des espace $L^p(x)$

Théorème 4.1. *Soient* Ω *et* $p \in \mathcal{P}(x)$, *Alors*

$$L^{p(x)}(\Omega) \subset L^{\bar{p}}(\Omega) + L^{\underline{p}}(\Omega)$$

Et

$$\|f\|_{L^{\bar{p}}(\Omega)+L^{\underline{p}}(\Omega)} \leq 2\|f\|_{L^{p(x)}(\Omega)}$$

Démonstration : Voir [3]

Théorème 4.2. *Soient* $\Omega, p(x) \in \mathcal{P}(\Omega)$, *alors l'espace* $L^{p(x)}(\Omega)$ *est complet*

Démonstration : Soit $\{f_n\}$ une suit de Cauchy de fonction de $L^{p(x)}(\Omega)$ et soit $\epsilon > 0$, alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\int_\Omega |f_m(x) - f_n(x)||g(x)|dx < \epsilon, \tag{4.1}$$

Pour tout, $n \geq n_0$ et pour tout g telle que $I_q(g) \leq 1$, on décompose Ω sous forme d'ensemble G_n de mesure finie et on définit les fonctions $g_k = (1+|G_k|)^{-1}\chi G_k, k \in \mathbb{N}$, alors

$$I_q(G_k) \leq \int_{G_k} (1 + |G_k|)^{-p(x)}dx + (1+|G_k|)^{-1} \leq 1.$$

En remplaçant g par g_k dans (4.1) on trouve

$$\int_{G_k} |f_m(x) - f_n(x)|dx \leq \epsilon(1 + |G_K|), m, n \geq n_0, k \in \ltimes.$$

Ceci montre que la suite $\{f_n\}$ est de Cauchy, et donc convergente dans chaque $L^1(G_k)$, et par récurrence on trouve une suit $\{f_n^{(k)}\}_n$et fonctions $f^{(k)} \in L^1(G_k)$ tel

que $f_n^{(k)}(x) \to f^{(k)}(x)$ pour $x \in G^k$presque partout , $k \in \mathbb{N}$.
Ainsi,

$$f_n^m(x) \to \sum_{k=1}^{\infty} f^{(k)}(x)\chi_{G(k)}(x) = f(x), \;\; pour \;\; x \in \Omega \; p.p$$

Remplaçant f_m par $f_m^{(m)}$ dans (4.1) en utilisant le lemme de Fatou on trouve

$$\int_\Omega |f(x) - f_n(x)||g(x)|dx \leq \sup \int_\Omega |f_m^{(m)} - f_n(x)||g(x)|dx \leq \epsilon$$

pour tout $n \geq n_0$ et chaque g avec $I_q(g) \leq 1$.
Ainsi $\|f - f_n\|_p \leq \epsilon$.

4.1 Normes équivalentes

Lemme 4.1. *Soit* $\|f\|_p < \infty$ *et* $I_q(g) < \infty$*, alors*

$$\left| \int_\Omega f(x)g(x)dx \right| \leq \left\{ \begin{array}{ll} \|f\|_p & si \; I_q(g) \leq 1 \\ I_q(g)\|f\|_p & si \; I_q(g) > 1 \end{array} \right\}$$

Démonstration : Si $I_q(g) \leq 1$ alors la première inégalité découle de la définition de$\|f\|_p$ (voir 3.5)
Soit $I_q(g) > 1$ en vertu de la convexite de $I_q(g)$ on a :

$$I_q(I_q(g)^{-1}g) \leq I_q(g)^{-1}I_q(g) = 1$$

Et donc

$$\begin{aligned} \left| \int_\Omega f(x)g(x)dx \right| &= I_q(g)\left| \int_\Omega f(x)I_q(g)^{-1}g(x)dx \right| \\ &\leq I_q(g) \sup_{(I_q(g)^{-1}) \leq 1} \left| \int_\Omega f(x)I_q(g)^{-1}g(x)dx \right| \\ &\leq I_q(g)\|f\|_p \end{aligned}$$

Lemme 4.2. *Soit* $1 < p(x) < \infty$ *et* $I_p(f) < \infty$*, si* $\|f\|_p \leq 1$*,alors*

$$I_p(f) \leq 1 \tag{4.2}$$

Démonstration :
Supposons le contraire $I_p(f) > 1$, on rappelle que l'application $\lambda \to I_p(f)$ est continue et décroissante alors il existe $\lambda > 1$ tel que $I_p(\frac{f}{\lambda}) = 1$ (car si $\lambda = 1$ implique que $I_p(f) > 1$ et $I_p(f) = 1$ au même temps, donc c'est impossible, et de même pour $\lambda < 1$ impossibilité).
posons

$$g(x) = \left|\frac{f(x)}{\lambda}^{p(x)-1}\right| \quad signf(x), x \in \Omega$$

On a

$$I_q(g) = \int_\Omega \left|\frac{f(x)}{\lambda}\right|^{q(x)(p(x)-1)} signf(x)dx = \int_\Omega \left|\frac{f(x)}{\lambda}\right|^{p(x)} dx = I_p(\frac{f}{\lambda}) = 1$$

Et donc

$$\begin{aligned}\|f\|_p \geq \int_\Omega |f(x)g(x)|dx &= \int_\Omega |f(x)|\left|\frac{f(x)}{\lambda}\right|^{p(x)-1} |signf(x)|dx \\ &= \lambda \int_\Omega |f(x)|\left|\frac{f(x)}{\lambda}\right|^{p(x)} dx = \lambda I_p(\frac{f}{\lambda}) = \lambda > 1,\end{aligned}$$

Qui contredit le fait que $\|f\|_p \leq 1$

Proposition 4.1. *Soit $f \in L^{p(x)}(\Omega)$ tel que $\|f\|_p \leq 1$, alors*

$$I_p(f) \leq c_p \|f\|^p$$

Oú $c_p = \|\chi_{\Omega_1}\|_\infty + \|\chi_{\Omega_0}\|_\infty + \|\chi_{\Omega_\infty}\|_\infty$

Démonstration : voir [7]

Proposition 4.2. *(sur les normes équivalents)*
$L^{p(x)}(\Omega) = \{f : \|f\|_p < \infty\}$ et pour chaque $f \in L^{p(x)}(\Omega)$ on a :

$$c_p^{-1} \|f\|_{L^{p(x)}(\Omega)} \leq \|f\|_p \leq r_p \|f\| L^{p(x)}(\Omega)$$

Dèmonstration : Soit $f \in L^{p(x)}(\Omega)$
Si $I_q(g) \leq 1$ alors d'après l'inégalité (3.7) on a $\|g\|_{L^{q(x)}(\Omega)} \leq 1$ et de l'inégalité de Hölder on a

$$\int_\Omega |f(x)g(x)dx| \leq r_p \|f\|_{L^{p(x)}(\Omega)} \|g\|_{L^{q(x)}(\Omega)} \leq r_p \|f\|_{L^{p(x)}(\Omega)}$$

et donc
$$\|f\|_p = \sup_{I_q(\Omega)\leq 1}\left|\int_\Omega f(x)g(x)dx\right| \leq r_p\|f\|_{L^{p(x)}(\Omega)}$$
D'autre part , soit $0 < \|f\|^p < \infty$ donc
$$\left\|\frac{f}{c_p\|f\|_p}\right\|_p = c_p^{-1} \leq 1 \ (car\ c_p \geq 1\ voir\ notation) \tag{4.3}$$

D'après la proposition 4.1 on a $I_p(\frac{f}{c_p\|f\|_p}) \leq c_p = 1$ et de 3.9 on obtient $\left\|\frac{f}{c_p\|f\|_p}\right\|_{Lp(x)(\Omega)} \leq 1$ alors $\|f\|_{L^{p(x)}(\Omega)} \leq c_p\|f\|_p$ et finalement on trouve
$$c_p^{-1}\|f\|_{L^{p(x)}(\Omega)} \leq \|f\|_p$$

4.2 Convergences.

Proposition 4.3. *soit $\bar{p} < \infty$ alors :*
$$I_p(f_n) \longrightarrow 0 \ \ si\ \ et\ \ seulement\ \ si\ \ \|f_n\|_p \longrightarrow 0 \tag{4.4}$$

Démonstration : $\|f_n\|_p \longrightarrow 0$ alors de la proposition 4.1 $I_p(f_n) \longrightarrow 0$ quand $n \to \infty$
Maintenant, soit $I_p(f_n) \longrightarrow 0$ et soit $\epsilon \in (0;1]$ pour n suffisamment grand on a $I_p(f_n) < \epsilon < 1$ donc
$$\begin{aligned} I_p(f_n I_p(f_n)^{\frac{-1}{p}}) &= \int_{\Omega\setminus\Omega_\infty} |f_n(x)I_p(f_n)^{\frac{-1}{p}}|^{p(x)}dx + \sup_{x\in\Omega_\infty} vrai|f_n(x)I_p(f_n)^{\frac{-1}{p}}| \\ &\leq I_p(f_n)^{-1}\int_{\Omega\setminus\Omega_\infty}|f_n(x)|^{p(x)}dx + I_p(f_n)^{\frac{1}{p}}\sup_{x\in\Omega_\infty} vrai|f_n(x)| \\ &\to I_p(f_n)^{-1}I_p(f_n) = 1 \end{aligned}$$

Et donc
$$\|f_n\|_p \leq I_p(f_n)^{\frac{1}{p}} < \epsilon^{\frac{1}{p}}.$$
Finalement $\|f_n\|_p \to 0$.

Proposition 4.4. *Soit $\bar{p} < \infty$ si $f_n \to 0$ dans $L^{p(x)}(\Omega)$ alors $f_n \to 0$ en mesure*

Démonstration : *On suppose le contraire. Donc il existe $\epsilon, \delta \in (0,1]$et une sous-suite $\{n_k\}$ telle que*

$$\lim_k \big|\{x \in \Omega; |f_{n_k}|| > \epsilon\}\big| \geq \delta$$

Alors d'après la proposition 4.3 on trouve $I_p(f_{n_k}) \geq \delta\epsilon^{\bar{p}}$ et cela contredit le fait que $f_n \to 0$ dans $L^{p(x)}(\Omega)$

Proposition 4.5. *Soit $0 < |\Omega| < \infty$ et $p, q \in P(\Omega)$ alors*

$$L^{q(x)}(\Omega) \hookrightarrow L^{p(x)}(\Omega) \ \ si \ \ et \ \ seulement \ \ si \ p(x) \leq (x) \ \ p.p \ \ x \in \Omega \tag{4.5}$$

oú la norme de l'opérateur d'injection n'existe de pas $|\Omega|+1$

Démonstration : Voir [7]

Proposition 4.6. *Soit $1 \leq \underline{p} \leq q(x) \leq \bar{q} \leq \infty$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ On a*

$$L^{\underline{p}}(\mathbb{R}^n) \cap L^{\bar{q}}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^n).$$

Il existe un constante $c > 0$ telle que

$$\|f\|_{L^{q(x)}(\mathbb{R}^n)} \leq \ C \max(\|f\|_{L^{\underline{q}}(\mathbb{R}^n)}, \|f\|_{L^{\bar{q}}(\mathbb{R}^n)})$$

Démonstration : *première ètape, soit $\bar{q} < \infty$ et $\lambda > 0$ alors*

$$\begin{aligned} I_q\left(\frac{f}{\lambda}\right) &= \int_{\mathbb{R}^n} \left|\frac{f(x)}{\lambda}\right|^{q(x)} dx \\ &\leq \int_{\{x:|f(x)\leq\lambda\}} \left|\frac{f(x)}{\lambda}\right|^{\underline{q}(x)} dx + \int_{\{x:|f(x)>\lambda\}} \left|\frac{f(x)}{\lambda}\right|^{\bar{q}(x)} dx \\ &\leq \left(\frac{\|f\|_{L^{\underline{q}}(\mathbb{R}^n)}}{\lambda}\right)^{\underline{q}} + \left(\frac{\|f\|_{L^{\bar{q}}(\mathbb{R}^n)}}{\lambda}\right)^{\bar{q}} \end{aligned}$$

Si $\lambda = 2\max\left(\|f\|_{L^{\underline{q}}(\mathbb{R}^n)}, \|f\|_{L^{\bar{q}}(\mathbb{R}^n)}\right)$ alors on a

$$I_q\left(\frac{f}{\lambda}\right) \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{\underline{q}} + \left(\frac{1}{2}\right)^{\bar{q}} \leq 1.$$

Deuxième étape $\bar{q}=\infty$ *alors* $f\in L^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ *et* $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}^n} vrai|f(x)|<\infty$, *Soit* $\lambda=2\max\Bigg(\|f\|_{L^{\underline{q}}(\mathbb{R}^n)},\|f\|_{L^{\infty}(\mathbb{R}^n)}\Bigg)$ *alors*

$$\begin{aligned}I_q\left(\frac{f}{\lambda}\right) &= \int_{\mathbb{R}^n/\Omega_\infty}\left|\frac{f(x)}{\lambda}\right|^{q(x)}dx+\underset{\Omega_\infty}{supvrai}\left|\frac{f(x)}{\lambda}\right|\\ &\leq \left(\frac{\|f(x)\|_{L^{\underline{q}}(\mathbb{R}^n)}}{\lambda}\right)^{q(x)}+\frac{\|f\|_{L^{\infty}(\mathbb{R}^n)}}{\lambda}\\ &\leq \left(\frac{1}{2}\right)^{\underline{q}}+\frac{1}{2}\leq 1\end{aligned}$$

Alors :

$$\|f\|_{L^{q(x)}(\mathbb{R}^n)}\leq 2\max\Bigg(\|f\|_{L^{\underline{q}}(\mathbb{R}^n)},\|f\|_{L^{\infty}(\mathbb{R}^n)}\Bigg).$$

Et finalement on trouve

$$\|f\|_{L^{q(x)}(\mathbb{R}^n)}\leq 2\max\Bigg(\|f\|_{L^{\underline{q}}(\mathbb{R}^n)},\|f\|_{L^{\bar{q}}(\mathbb{R}^n)}\Bigg).$$

Lemme 4.3. ***(Propriété de la semi-additivité)***
Soit $\Omega'\cup\Omega"=\Omega$, *et soit* $p\in P(\Omega)$ *tel que* $\bar{p}<\infty$. *Alors pour tout* $f\in L^{p(x)}(\Omega)$ *On a*

$$\max\Bigg\{\|f\|_{L^{p(x)}(\Omega')},\|f\|_{L^{p(x)}(\Omega")}\Bigg\}\leq\|f\|_{L^{p(x)}(\Omega)}\leq\|f\|_{L^{p(x)}(\Omega')}+\|f\|_{L^{p(x)}(\Omega")} \tag{4.6}$$

Démonstration : on pose $a=\|f\|_{L^{p(x)}(\Omega')}$ et $b=\|f\|_{L^{p(x)}(\Omega")}$,et on pose que $a\geq b$,alors

$$\int_\Omega\left|\frac{f(x)}{\max(a,b)}\right|^{p(x)}dx\geq\int_{\Omega'}\left|\frac{f(x)}{a}\right|^{p(x)}dx=I_{p_{\Omega'}}\left(\frac{f}{\|f\|_{L^{p(x)}(\Omega')}}\right).$$

Et donc $\|f\|_{L^{p(x)}(\Omega)}\geq\max(a,b)$.
Et démontrée l'inégalité de droite, on pose

$$\frac{f(x)}{a+b}=\frac{a}{a+b}\frac{\chi_1 f(x)}{a}+\frac{b}{a+b}\frac{\chi_2 f(x)}{b}$$

Et donc

$$\int_\Omega|\frac{f(x)}{a+b}|^{p(x)}dx\leq\int_\Omega|\frac{a}{a+b}\frac{\chi_1 f(x)}{a}|^{p(x)}dx+\int_\Omega|\frac{b}{a+b}\frac{\chi_2 f(x)}{b}|^{p(x)}dx$$

$$\frac{a}{a+b}+\frac{b}{a+b}=1.$$

D'où $\|f\|_{L^{p(x)}}\leq a+b$ (d'après la définition de $\|f\|_{L^{p(x)}}$).

Lemme 4.4. *soit* $0 \leq p_1(x) \leq p(x) \leq p_2(x) \leq \infty$ *et* $|\Omega_\infty(p_2)|= 0$, *alors*

$$L^{p_1(x)}(\Omega) \cap L^{p_2(x)}(\Omega) \subseteq L^{p(x)}(\Omega) \subseteq L^{p_1(x)}(\Omega) + L^{p_2(x)}(\Omega) \tag{4.7}$$

Oú $L^{p_1(x)}(\Omega) + L^{p_2(x)}(\Omega)$ *désigne la somme algébrique des espaces*

Démonstration. Découle du lemme 4.3

Théorème 4.3. *Soient* Ω *un ouvert et* $p(x) \in P(\Omega)$, *supposons que* $\bar{p} < \infty$ *alors, pour tout* $f \in L^{p(x)}(\Omega)$ *et* $\{f_k\} \subset L^{p(x)}(\Omega)$,*les conditions suivantes sont équivalentes :*
(1) $f_k \longrightarrow f$ *en norme*
(2) $f_k \longrightarrow f$ *en moduler*
(3) $f_k \longrightarrow f$ *en mesure*

Démonstration : Voir ([3])

Théorème 4.4. *Soient* Ω *un ouvert et* $p(x) \in P(\Omega)$, *supposons que* $\bar{p} < \infty$ *alors , l'ensemble des fonctions bornées à support compact avec supp*$(f) \subset \Omega$ *est dense dans* $L^{p(x)}(\Omega)$

Démonstration : Voir ([3])

4.3 p(x)-continuité.

Définition 4.1. *Soit* $f \in L^{p(x)}$, *on dit que* f *est p(x)-continue si*

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta(\epsilon) > 0 \ \textit{ telle que } \ I_p(f_h - f) < \epsilon \ \textit{ pour } h \in \mathbb{R}^n, |h|< \delta$$

Où $f_h(x) = f(x + h), x \in \mathbb{R}^n$.

Remarque 4.1. *Il existe des fonctions* $f \in L^{p(x)}(\Omega)$ *qui ne sont pas p(x)-continue. Voir exemple ci-dessous.*

Exemple 4.3.1. *soit* $n = 1$,$\Omega = (-1, 1)$ *et* $1 \leq r < s < \infty$

$$p(x) = \begin{cases} r & si\ x \in [0, 1) \\ s & si\ x \in [-1, 0) \end{cases}$$

Et

$$f(x) = \begin{cases} x^{\frac{-1}{s}} & si\ x \in [0, 1) \\ 0 & si\ x \in (-1, 0) \end{cases}$$

Alors f n'est pas p(x)-continue
Démonstration : On a

$$\int_{-1}^{1} |\frac{f(x)}{\lambda}|^{p(x)} dx = \lambda^{-1} \int_{0}^{1} |x|^{\frac{-r}{s}} dx < \infty$$

Alors $f \in L^{p(x)}(\Omega)$
Soit $h \in (0,1)$ alors

$$f(x+h) = \begin{cases} (x+h)^{\frac{-1}{s}} & \text{si } x+h \in [0,1) \quad \text{donc} \quad x \in [-h; 1-h) \\ 0 & \text{si } x+h \in (-1,0) \text{ donc } x \in (1-h; -h) \end{cases}$$

Et donc

$$\begin{aligned} I_p(\frac{f_h}{\lambda}) &= \int_{-1-h}^{1-h} |\frac{f(x+h)}{\lambda}|^{p(x)} dx = \lambda^{-1} \int_{-h}^{1-h} (|x+h|^{\frac{-1}{s}})^{p(x)} dx \\ &= \lambda^{-1} [\int_{-h}^{0} |x+h|^{-1} dx + \int_{0}^{1-h} |x+h|^{\frac{-r}{s}} dx] \\ &\geq \lambda^{-1} \int_{-h}^{0} |x+h|^{-1} dx = \infty, \quad \textit{pour tout } \lambda > 0 \end{aligned}$$

Donc $f_h \notin L^{p(x)}$ pour tout $\lambda > 0$.

Remarque 4.2. *Cet exemple nous montre bien que l'espace $L^{p(x)}$ n'est pas invariant par rapport à la translation.*

Théorème 4.5. *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ contient une boule $B(x_0, r) = \{x \in \Omega, |x - x_0| < r\}$ sur laquelle la fonction p est continue et non constante, alors il existe une fonction $f \in L^{p(x)}(\Omega)$ pour laquelle f n'est pas p(x)-continue.*

Démonstration : Voir [7]

Chapitre 5

Approximation dans $L^{p(x)}$

5.1 convolution

Définition 5.1. *Pour deux fonctions f et g mesurables, on définit la convolution par :*

$$f * g(z) = \int_{\mathbb{R}^n} f(z-y)g(y)dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(z-y)dy \tag{5.1}$$

Quel que soit $x \in \mathbb{R}^n$, pour vu que cette formule ait un sens. Si les fonctions f et g sont seulement définies sur le sous-ensemble Ω alors on les prolonge par zéro en dehors de Ω L'opération de convolution dans les espaces classiques de Lebesgue est décrite par l'inégalité de Young pour les convolutions (voir en détails chapitre convolution dans L^p).

$$\|f * g\|_{L^r(\mathbb{R}^n)} \leq \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \|g\|_{L^q(\mathbb{R}^n)},$$

Si $q = 1$, on a

$$\|f * g\|_{L^r(\mathbb{R}^n)} \leq \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \|g\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}.$$

Malheureusement ces inégalités ne peuvent pas re généralisées dans les espaces $L^{p(x)}$ pour p non constant ceci est du fait que ces espaces ne sont pas invariants par rapport à la translation (par contre quand p est constant on a $\|f(x+h)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = \|f(x)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$).

Dans ce qui suit, on montre que l'opérateur de translation est bornée dans $L^{p(x)}$ si et seulement si $p(x)$ est une constante, autrement dit ceci est possible seulement dans le cadre des espaces classiques de Lebesgue.

Proposition 5.1. *soit $p \in P(\mathbb{R}^n)$ et Soit l'opérateur de translation τ_h défini comme suit $(\tau_h f)(y) = f(y-h)$.*
Alors τ_h est une application de $L^{p(x)}(\mathbb{R}^n)$ vers $L^{p(x)}(\mathbb{R}^n)$ pour tout $h \in \mathbb{R}^n$ si et seulement si p est constante

Démonstration :
Si p est constant alors le résultat est bien connu dans $L^p(\mathbb{R}^n)$
Inversement, on a

$$\begin{aligned}
\|\tau_h f\|_{L^{p(x)}(\mathbb{R}^n)} &= \inf\big\{\lambda, \lambda > 0 : I_p\big(\frac{\tau_h f}{\lambda}\big) \leq 1\big\} \\
&= \inf\big\{\lambda, \lambda > 0 : \int_{\mathbb{R}^n} \big|\frac{f(x-h)}{\lambda}\big|^{p(x)} dx \leq 1\big\}
\end{aligned}$$

On pose $y = x - h$ alors $x = y + h$ et donc

$$\begin{aligned}
\|\tau_h f\|_{L^{p(x)}(\mathbb{R}^n)} &= \inf\left\{\lambda, \lambda > 0, \int_{\mathbb{R}^n} \big|\frac{f(y)}{\lambda}\big|^{p(y+h)} dy \leq 1\right\} \\
&= \inf\left\{\lambda, \lambda > 0, \int_{\mathbb{R}^n} \big|\frac{f(y)}{\lambda}\big|^{(\tau_{-h}p)(y)} dy \leq 1\right\} \\
&= \|f\|_{L^{\tau_{-h}p(x)}(\mathbb{R}^n)},
\end{aligned}$$

En vertu de la définition de la norme dans $L^{p(x)}(\mathbb{R}^n)$.
Et donc $L^{p(x)}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^{\tau_{-h}p(x)}(\mathbb{R}^n)$, alors à partir de la proposition 4.5, on a $p \geq \tau_{-h}p$ presque pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ c'est à dire que

$$p(x) \geq p(x+h) \ \ \textit{presque pour tout} \ \ x \in \mathbb{R}^n. \tag{5.2}$$

On remplace h par $-h$ dans (5.2) et on trouve $p(x) \geq p(x-h)$, posons $y = x - h$, alors $x = y + h$ et cela donne

$$p(y+h) \geq p(y) \ \ \textit{presque pour tout} \ \ y \in \mathbb{R}^n \tag{5.3}$$

Finalement de (5.2) et (5.3) on a $p(x) \geq p(x+h) \geq p(x)$ presque pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, et comme h est arbitraire, alors p est constante.

Remarque 5.1. *La proposition précédente est aussi valable si on remplace* $\mathbb{R}^n$*par un ouvert* $\Omega \subset \mathbb{R}^n, \Omega \neq \emptyset$ *car on suit la même démarche de la démonstration et on trouve que* $p(x) \geq p(x+h) \geq p(x)$ *sur* $(\Omega - h) \cap \Omega$.

Théorème 5.1. *Soit* Ω *un ouvert bornée de* $\mathbb{R}^n$ *et* $p, r \in P(\mathbb{R}^n)$ *avec* $1 \leq \underline{p} \leq \bar{p} < \infty, 1 \leq \underline{r} \leq \bar{r} < \infty$ *alors la convolution* $* : (f, g) \mapsto f * g$ *est bornée en tant qu'une application de* $L^{p(x)}(\Omega) \times L^1(\mathbb{R}^n)$ *vers* $L^{r(x)}(\Omega)$ *si et seulement si* $\underline{p} \geq \bar{r}$
Démonstration *: Voir[4]*

On peut encore illustrer ce résultat avec un contre-exemple.

Exemple 5.1.1. *Soit* $p(x)$ *définie comme suit*

$$p(x) = \begin{cases} p_1 & si\ x < 0 \\ p_2 & si\ x > 0. \end{cases}$$

Avec $1 < p_1 < p_2 < \infty$, et

$$g(x) = \begin{cases} |x-2|^{\alpha-1} & \text{si } |x| \leq 3 \\ 0 & \text{si } |x| \geq 3 \end{cases}$$

Avec $0 < \alpha < \frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2}$ et aussi on prend f définie comme suit

$$f(x) = \begin{cases} |x-1|^{-v} & \text{si } x \in (-2, 0) \\ 0 & \text{si } \ sinon \end{cases}$$

oú $0 < v < \dfrac{1}{p_1}$, alors $g \in L^1(\mathbb{R})$ et $f \in L^{p(x)}(\mathbb{R})$, mais $g * f \notin L^{p(x)}(\mathbb{R})$ **Démonstration** : $g \in L^1(\mathbb{R})$ car

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \left|g(x)\right| dx &= \int_{-3}^{3} \left|x-2\right|^{\alpha-1} dx \\ &= \int_{-3}^{2} (2-x)^{\alpha-1} dx + \int_{2}^{3} (x-2)^{\alpha-1} dx \\ &= \frac{-1}{\alpha}(2-x)^{\alpha} \Big|_{-3}^{2} + \frac{1}{\alpha}(x-2)^{\alpha} \Big|_{2}^{3} \end{aligned}$$

Comme $\alpha - 1 > -1$, alors

$$\int_{\mathbb{R}} |g(x)| dx = \frac{1}{\alpha}[(5)^{\alpha} + 1] < \infty$$

Et $f \in L^{p(x)}(\mathbb{R})$ car

$$\begin{aligned} I_p\Big(f\Big) &= \int_{\mathbb{R}} \Big|f(x)\Big|^{p(x)} dx = \int_{-2}^{0} \Big|x+1\Big|^{-vp_1} dx \\ &= \int_{-2}^{-1} -(x+1)^{-vp_1} dx + \int_{-1}^{0} (x+1)^{-vp_1} dx \\ &= \frac{1}{vp_1 - 1}[(x+1)^{-vp_1+1}|_{-2}^{-1} - (x+1)^{-vp_1+1}|_{-1}^{0}] \end{aligned}$$

Et comme $-vp_1 + 1 > 0$,alors

$$I_p(f) = \frac{1}{vp_1 - 1}[(-1)^{-vp_1+1} - 1] < \infty$$

Maintenant en calcule $g * f$

$$g * f(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)g(x-t)dt \geq \int_{x-3}^{-1} |t+1|^{-v}|x-t-2|^{\alpha-1}dt.$$

On pose $s = -t - 1$ alors $t = -s - 1$ et donc

$$g * f(x) \geq \int_{0}^{2-x} (s)^{-v}(x-1+s)^{\alpha-1}ds,$$

Et on pose $\xi = \dfrac{s}{x-1}$, alors $s = (x-1)\xi$ et donc

$$\begin{aligned} (g*f)(x) &\geq \int_{0}^{\frac{2-x}{x-1}} \xi^{-v}(x-1)^{-v}(x-1)^{\alpha-1}(\xi+1)^{\alpha-1}(x-1)d\xi \\ &\geq (x-1)^{-v+\alpha} \int_{0}^{\frac{2-x}{x-1}} \xi^{-v}(\xi+1)^{\alpha-1}d\xi \\ &\geq \frac{c}{(x-1)^{v-\alpha}}. \end{aligned}$$

Avec

$$c = \int_{0}^{1} \xi^{-v}(1+\xi)^{\alpha-1}d\xi.$$

Alors

$$\int_{\mathbb{R}} |g * f|^{p(x)}dx \geq \int_{0}^{1} \frac{c^{p_2}}{|x-1|^{(v-\alpha)p_2}}dx,$$

Et cette intégrale est diverge car$(v-\alpha)p_2 > 1$ et donc $g * f \notin L^{p(x)}(\mathbb{R})$.

La proposition suivante est une conséquence du théorème précédent. Elle exprime le fait que même dans le cas particulier oú $q = 1$, l'inégalité de Young pour les convolutions n'est pas vérifiée

Proposition 5.2. *Soit $p \in P(\mathbb{R}^n)$ avec $1 < \underline{p} \leq \bar{p} < \infty$ alors l'inégalité*

$$\|f * g\|_{L^{P(x)}(\mathbb{R}^n)} \leq c\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}\|g\|_{L^{p(x)}(\mathbb{R}^n)} \tag{5.4}$$

Est vérifiée pour une certaine constante $c > 0$,et quelle que soit $f \in L^{p(x)}(\mathbb{R}^n)$ et quelle que soitg $\in L^1(\mathbb{R}^n)$ si et seulement si p est constante.

Démonstration : Si l'inégalité est vraie, alors d'après le théorème 5.1 on a $\underline{p} > \bar{p}$ p pour tout sous-ensemble ouvert borné $\Omega \subset \mathbb{R}^n$et donc p est constante. Inversement, si p est constante, alors cette inégalité est une conséquence directe de l'inégalité de Young pour les espaces classiques de Lebesgue.

5.2 Approximations dans $L^{p(x)}$

Définition 5.2. ***(opérateur de Hardy-Littlewood "fonction maximal") :***
Soit $f \in L^1_{Loc}(\mathbb{R}^n)$,On définie l'opérateur de Hardy-Littlewood pour $x \in \mathbb{R}^n$ comme suite,

$$Mf(x) = M_B f(x) := \sup_{r>0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(y)|dy$$

pour $f \in L^q_{Loc}(\mathbb{R}^n)$ le q-ème opérateur maximal est définie par :

$$M_q f(x) := \sup_{x \in Q} \left(\frac{1}{|m(Q)|} \int_Q |f(y)|^q dy \right)^{\frac{1}{q}}$$

Avec $Q = [-r, r]^n$

Définition 5.3. ***(Le majorant radial) :***
Soit $\phi \in C_0(\mathbb{R}^n)$, pour tout $t > 0$, $\phi_t(x) = t^{-n}\phi(x/t)$, cette normalisation est valable si $\phi \in L^1(\mathbb{R}^n)$, Alors : $\|\phi_t\|_1 = \|\phi\|_1$, On définie donc le majorant radial de ϕ par la fonction suivante :

$$\Phi(x) = \sup_{|y| \geqslant |x|} |\phi(y)|.$$

Remarque 5.2. *Soit $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, si ϕ est bornée, donc On a*

$$|\phi_t * f(x)| \leq (\Phi * |f|)(x)$$

Définition 5.4. *Soit $\phi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ telle que* $\displaystyle\int_{R^n} \phi(x)dx = 1$.
L'ensemble $\{\phi_t\} = \{\phi_t : t > 0\}$ est appelé une approximation d'identité. Si le majorant radial de ϕ est aussi dans $L^1(R^n)$, $\{\phi_t\}$ est appelé identité approximative d'un type potentiel

-Le nom " approximation d'identité" est motivé par le théorème suivant

Théorème 5.2. *Soit $\{\phi_t\}$, pour tout $p, 1 \leq p < \infty$, si $f \in L^p(R^n)$ alors*

$$\|\phi_t * f - f\|_p \longrightarrow 0 \quad lorsque \quad t \longrightarrow 0.$$

Plus loin, si $\{\phi_t\}$ est un type potentiel, alors pour tout p, $1 \leq p < \infty$

$$\phi_t * f(x) \longrightarrow f(x) \;\; simplement \;\; presque \;\; partout \;\; lorsque \;\; t \longrightarrow 0.$$

Démonstration : *Voir [3].*

Lemme 5.1. *Soit $\{\phi_t\}$ un identité approximative d'un type potentiel, et soit Φ le radial majorant de ϕ ,alors*

$$\forall f \in L^1_{loc}(R^n) \;\; et \;\; \forall x, \sup_{t>0} |\phi_t * f(x)| \leq C(n)\|\Phi\|_1 Mf(x)$$

Démonstration : Voir [3]

Théorème 5.3. *Soient Ω et $p(x) \in \mathcal{P}(\Omega)$, soit $f \in L^{p(x)}(\Omega)$, si$\{\Phi_t\}$ est un identité approximative d'un type potentiel alors pour tout t>0*
f est finie presque par tout $\Phi_t : f \to f$ convergence simplement presque par tout
Démonstration *: D'après le théorème 4.1 on écrire $f = f_1 + f_2$ ou $f_1 \in L^{\bar{p}}(\Omega)$ et $f_2 \in L^{\underline{p}}(\Omega)$ dupuis $\Phi_t * f = \Phi_t * f_1 + \Phi_t * f_2$, et $\Phi_t \in L^1(R)$d'après l'inégalité de Young (2.1) chaque terme est fini presque par tout, et la limite souhaitée suite à la fois de théorème 5.2*
Quand Ω est de mesure finie comme corollaire de théorème 5.3 donc nous ce type potentiel approximatif converge aussi dans la mesure, si nous supposons que $\bar{p} < \infty$ alors c'est vrais pour tous ensemble ouvert Ω

Théorème 5.4. *Soient Ω et $p(x) \in P(\Omega)$ tel que $\bar{p} < \infty$, Soit $f \in L^{p(x)}(\Omega)$*
Si $\{\phi_t\}$ est un identité approximative d'un type potentiel, alors $\phi_t * f \to f$ en mesure sur Ω

Démonstration :
Fixer $f \in L^{p(x)}(\Omega)$ depuis $\bar{p} < \infty$ Selon le théorème 4.4, il existe une suite $\{g_k\} \subset L^{p(x)}(\Omega)$ des fonctions bornées de support compacte tel que $g_k \to f$ en norme, fixe ϵ, $0 < \epsilon < 1$,alors pour tout k

$$\begin{aligned} |\{x \in \Omega : |\phi_t * f(x) - f(x)| \geq \epsilon\}| &\leq |\{x \in \Omega : |\phi_t * (f - g_k)(x)| \geq \epsilon/3\}| \\ &+ |\{x \in \Omega : |\phi_t * g_k(x) - g_k(x)| \geq \epsilon/3\}| \\ &+ |\{x \in \Omega : |g_k(x) - f(x) \geq \epsilon/3\}| \end{aligned}$$

Selon théorème 5.3 $g_k \to f$ en mesure par conséquent, pour tout k suffisamment grand, le dernière terme est inférieure à $\epsilon/3$ encoure en utilisant le fait que $\bar{p} < \infty$, par le lemme 5.1et théorème 5.2
nous vous cela :

$$\begin{aligned} |\{x &\in \Omega : |\phi_t \to (f - g_k)(x)| \geq \varepsilon/3\}| \\ &\leq |\{x \in \Omega : M(f - g_k)(x) \geq \epsilon/c\}| \\ &\leq c\epsilon^{-\bar{p}} \int_\Omega |f(x) - g_k(x)|^{p(x)} dx. \end{aligned}$$

Ici M désigne la fonction maximal
Encore par théorème 4.3 $g_k \to f$ en moduler, donc pouvons choisir k suffisamment grand que la côte droite est également inférieure à $\epsilon/3$, Enfin donné $k, g_k \in L^1(\Omega)$, et donc $\phi_t * g_k \to g_k$ en norme L^1, et aussi dans la mesure $t \to 0$, donc pour tous t suffisamment proche de 0.

$$|\{x \in \Omega : |\phi_t * g_k(x) - g_k(x)| \geq \epsilon/3\}| < \epsilon/3.$$

Si nous combinons les trois inégalités, nous avons cela

$$|\{x \in \Omega : |\phi_t * f(x) - f(x)| \geq \epsilon\}| < \epsilon.$$

Puis que $\epsilon > 0$ est arbitraire, $\phi_t * f \to f$ en mesure dans Ω.

Théorème 5.5. *Soient Ω un ouvert et $p(x) \in P(\Omega)$, supposons $\bar{p} < \infty$ et l'opérateur maximal est borné sur $L^{p'(x)}(\Omega)$ si $\{\phi_t\}$ est un identité approximative d'un type potentiel, alors*

$$\sup_{t>0} \|\phi_t * f\|_{p(x)} \leq c\|f\|_{p(x)}, \tag{5.5}$$

Et $\phi_t * f \to f$ en norme dans $L^{p(x)}(\Omega)$, le constante C dans (5.5) dépend de n, $p(x)$, $\|M\|_{L^{p'(x)}(\Omega)}$ et $\|\phi\|_1$.

Démonstration :Fixé $f \in L^{P(x)}(\Omega)$ et $t > 0$, soit Φ est la majorant radial de ϕ alors d'après (5.2), il existe $h \in L^{p'(x)}(\Omega)$, $\|h\|_{p'(x)}= 1$ tel que

$$\|\phi_t * f\|_{p(x)} \leq \|\phi_t * |f|\|_{p(x)} \leq 2k^{-1}_{p(x)} \int_{\Omega} \phi_t * |f|(x)h(x)dx,$$

Oú

$$K_{p(x)} = (\frac{1}{\underline{p}} - \frac{1}{\bar{p}} + 1)\|\chi_{\Omega_0}\|_{\infty}\|\chi_{\Omega_{\infty}}\|_{\infty}\|\chi_{\Omega_1}\|_{\infty}$$

Depuis ϕ_t est une fonction radial d'après le théorème de Fubini et inégalité de Hölder, lemme (5.1) et notre hypothèse sur $p'(x)$

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega}(\phi_t * |f|)(x)h(x)dx &= \int_{\Omega}|f(x)|\phi_t * h(x)dx \\
&\leq c(x)\|\phi\|_1 \int_{\Omega}|f(x)|Mh(x)dx \\
&\leq c(x)\|\phi\|_1 k_{p(x)}\|f\|_{p(x)}\|Mh\|_{p'(x)} \\
&\leq c\|M\|_{L^{p'(x)}(\Omega)}\|f\|_{p(x)}\|h\|_{p'(x)} = c\|f\|_{p(x)}
\end{aligned}$$

Puisque les constante ne dépendant pas de t, l'inégalité (5.5) suite à la fois,
Pour prouver que $\phi_t * f$ converge vers f en norme dans $L^{p(x)}(\Omega)$, nous utilisons un argument d'approximation similaire à cette preuve du théorème 5.4
Fixe $\epsilon > 0$ par le théorème 4.4 il existe une fonction g borné avec un support compact et non identiquement nulle,tel que $\|f - g\|_{p(x)} < \epsilon$,puis par (5.5)

$$\begin{aligned}
\|\phi_t * f - f\|_{p(x)} &\leq \|\phi_t * (f - g)\|_{p(x)} + \|\phi_t + g - g\|_{p(x)} + \|f - g\|_{p(x)} \\
&\leq c_{\epsilon} + \|\phi_t + g - g\|_{p(x)}
\end{aligned}$$

Depuis $\epsilon > 0$ est arbitraire pour compléter la preuve, il suffira de montrer que

$$\lim_{t\to 0} = \|\phi_t * g - g\|_{p(x)} = 0$$

Depuis $\bar{p} < \infty$, Selon le théorème 4.3 on aura

$$\lim_{t\to 0} \int_{\Omega}|\phi_t * g(x) - g(x)|^{p(x)}dx = 0.$$

Soit $g_0(x) = g(x)/(2\|\phi\|_1\|g\|_{\infty})$, depuis $\|\phi\|_1 \geq 1$, $\|g_0\|_{\infty} \leq 1/2$, en autre

$$\begin{aligned}
|\phi_t * g_0(x)| &\leq \int_{\Omega}|\phi_t(x - y)||g_0(y)|dy \\
&\leq \|g_0\|_{\infty}\int_{\Omega}|\phi_t(x - y)|dy \\
&\leq 1/2.
\end{aligned}$$

Donc, $\|\phi_t * g_0 - g_0\|_\infty \leq 1$, et donc

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0}\int_\Omega |\phi_t * g(x) - g(x)|^{p(x)}dx &= \lim_{t\to 0}\int_\Omega (2\|\phi\|_1\|g\|_\infty)^{p(x)}|\phi_t * g_0(x) - g_0(x)|^{p(x)}dx \\ &\leq (2\|\phi\|_1\|g\|_\infty + 1)^{\bar{p}}\lim_{t\to 0}\int_\Omega |\phi_t * g_0(x) - g_0(x)|^{\underline{p}}dx\end{aligned}$$

Depuis $g_0 \in L^{\underline{p}}(\Omega)$ et $1 \leq \underline{p} < \infty$, par le théorème 5.2 le dernière terme est égale 0 cela complète la preuve .

Remarque 5.3. *Si nous supposons que $\underline{p} > 1$, et l'opérateur maximal est borné dans $L^{p(x)}(\Omega)$, alors l'inégalité (5.5) suite immédiatement du lemme 5.1*

Conclusion

A cause de la suite régularisation on a pu démontrer une propriété important dans les espaces fonctionnelles tel que la densité de l'espace $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ dans $L^p(\mathbb{R}^n)$. Mais dans $L^{p(x)}(\mathbb{R}^n)$ on a trouver un problème dans le produit de convolution , ce problème est causé par l'invariance par rapport à la translation qui n'est pas valable dans $L^{p(x)}(\mathbb{R}^n)$ (voir contre exemple 4.3.1) ; mais malgré ça les propriétés d'approximation de $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ dans $L^{p(x)}(\Omega)$ reste valable mais avec d'autre méthode que dans $L^{p(x)}(\mathbb{R}^n)$ (dans $L^{p(x)}(\Omega)$ on utilise l'opérateur potentiel type approximation de l'identité ou lieu d'une suite régularisante)

Bibliographie

[1] HAIM.BREZIS, Analyse Fonctionnelle, Théorie et applications, collection mathématique appliquées pour les la maîtrise

[2] V. I. Burenkov, Mans inequalities in L^p , Moscow-university 1989.

[3] David V. Cruz-Uribe,Alberto Fiorenza, Variable Lebesgue Spaces , Foundations and Harmonic Analysis, 2013

[4] L.Diening, P.Harjulehto, Lebesgue and Sobolev spaces with variable exponents, SPIN Springerś internal project number,December 2, 2010.

[5] D.E. Edmunds, J. Lang, A. Nekvinda, On $L^{p(x)}$ norms, Proc. R. Soc.Lond , Ser. A 445,219-225 (1999).

[6] F.Golse,Distributions, analyse de Fourier,Équations aux dérivées partielles,Octobre 2012.

[7] O. Kovacik, J. Rakosnik,On spaces $L^{p(x)}$ and $W^{k,p(x)}$, Czechoslovak Mathematical Journal, vol. 41(1991)

[8] E. Lieb, M.Loss, Analysis. American Mathematical Society. volume 14.2000, Primary 28-01, 42-01, 46-01, 49-01.

[9] Xavier MARY, Mesure et intégration, (Notes de cours)

[10] J. Musielak,Orlicz Spaces and Modular , Springer, Berlin (1983).

[11] H. Nakano,Modulared Semi-Ordered Linear Spaces , Maruzen, Tokyo (1950)

[12] W.Orlicz, Über konjugierte Exponentenfolgen, StudiaMath. 3, 200U212(1931).

[13] M. Ružicka, Electrorheological Fluids : Modeling and Mathematical Theory, Lecture Notes in Mathematics , vol. 1748. Springer, Berlin (2000).

[14] S. G. Samko, Diferentiation and integration of variable order and the spaces $L^{p(x)}$. Contemporary Mathematics, Volume 212. 1998.

[15] I. I. Sharapudinov,On a topology of the space L[0 ; 1]) , Matem. Zametki 26(1979), no4, 613-632.

[16] I. Tsenov,Generalization of the problem of best approximation of a function in the space L^s , Uch, Zap, Dagestan Gos, Univ, 7,25-37(1961).

[17] V. V. Zhikov, Averaging of functionals of the calculus of variations and elasticity theory, Math. USSR, Izv. 29,33-66(1987).

[18] V. V. Zhikov,n passing to the limit in nonlinear variational problem O. Mat. Sb. 183, 47-84 (1992).