République **A**lgérienne **D**émocratique et **P**opulair
Ministère de l'**E**nseignement **S**upérieur et de
la **R**echerche **S**cientifique
Université Ibn Khaldoun – Tiaret –

Faculté des Mathématiques et Informatique

Département des MATHEMATIQUES

MEMOIRE EN VUE DE L'OBTENTION DU DIPLÔME DE MASTER

DOMAINE : MI

FILIERE : MATHEMATIQUES

SPECIALITE: ANALYSE FONCTIONNELLE ET EQUATIONS DIFFERENTIELLES

Composé par :

Gadi Ilham

Mekhazni Bakhta

Ouadhah Bakhta

Cherchab Zoulikha

SUJET DU MEMOIRE :

ETUDE DE QUELQUES CLASSES D'EQUATIONS DIFFERENTIELLES FRACTIONNAIRES

SOUTENU LE 13 / 05 / 2018 Devant Le Jury Composé de :

Mr : Mazzouz Kada.	Président
Mr : Ziane Mohamed.	Encadreur
Mr :Diab Abderazak.	Examinateur

Année Universitaire : 2017/2018

Table des matières

Remerciements

On remercie tout d'abord DIEU tout puissant de nous avoir donné le courage, la force et la patience d'achever ce modeste travail.

En tout premier lieu, nous tenons à remercier chaleureusement et respectivement nos encadreur Mr. Ziane Mohamed pour l'aide, les remarques, ses encouragement et précieux conseils.

Nos remerciement vont à l'endroit Mr.Maazouz.A et Mr.Dieb.A d'avoir acceptés d'être notre jury et pour leur disponibilité, leur suggestions et recommandations.

Nous tenons à remercier tous les enseignants qui ont participé à nos formation tout au long universitaire.

Nous exprimons également nos sincères remerciements le chef département Mr.Larabi Abd el Rahman.

Enfin, nous ne voudrons pas non plus oublier toutes les personnes que nous pouvons rencontre au long de ces années universitaire.

Dédicaces

Ce travail est dédié à :
Ma mère Khadidja et mon père Mohamed.
Mes frères : Mohamed, Djamel, Ibrahim.
Mes Soeurs : Fatima, Hanna, Habiba, Khawla.
Ma nièce Lina.
Ma famille et mes amies : Bakhta, Zoulikha, Bakhta, Sarah, Zineb.

Ilham.

Ce travail est dédié à :
Ma mère Kheira et mon père Mohamed.
Mes frères : Abd Alhalim, Benaouda.
Mes Soeurs : Malika, Kheira, Sara.
Mes chers neveux : Anes, Loay.
Ma famille et mes amies : Ilham, Zoulikha, Bakhta, Sarah, Zineb, Fadhila.

Bakhta.

Dédicaces

Ce travail est dédié à :
Ma mère et mon défunt père.
Mes frères et Mes Sœurs.
Mes chers neveux : Zizou, Fahima, Hami, Mariem, Anes, Malek.
Ma famille et mes amies : Zoulikha, Bakhta, Ilham, sghayra, Samira, Rachida, Amina, Ibtissam, Zahia.

Bakhta.

Ce travail est dédié à :
Ma mère Mbarka et mon père M'hamed.
Mes frères : Ibrahim, Youssef.
Mes Soeurs : Khadidja, fatima, Marwa, Sarah, Halima, Naima.
Mes chers neveux : Abd ALLatif , Mohamed Yacin.
Ma famille et mes amies : Souad, Bakhta, Ilham, Bakhta, Hadjira, Intissar.

Zoulikha.

Introduction

La théories des équations différentielles fractionnaires a émergé comme un domaine intéressant à explorer ces dernières années. Cette théorie a de nombreuses applications [1, 4, 8] par exemples : la biologie, l'électricité, la physique et la chimie $\cdots$ etc.

Le sujet principal de ce mémoire est l'étude de l'existence et l'unicité des solutions pour certaines classes d'équations différentielles d'ordre fractionnaire.
Ce travail est divise en cinq chapitres ;
Premier chapitre : Dans ce chapitre, nous rappelons quelques notions et outils de base qui nous seront utiles dans la suite de travail.

Deuxième chapitre : Ce chapitre est consacré aux définitions quelques opérateurs d'intégration et de dérivation fractionnaire et leurs propriétés.

Troisième chapitre : Dans ce chapitre, nous étudions l'existence et l'unicité de solutions pour des équations différentielles d'ordre fractionnaire au sens Hadamard.

Quatrième chapitre : Ce chapitre est consacré à l'étude de l'existence des solutions pour une équation différentielle fractionnaire avec poids.

Cinquième chapitre : On traite dans ce chapitre l'existence de la solution pour une classe de problèmes aux valeurs initiales d'ordre fractionnaire.

Chapitre 1

Préliminaires

Ce chapitre constitue une partie préliminaire dans laquelle on rappelle des notions et des résultats fondamentaux de la théorie de l'analyse fonctionnelle, notamment les fonctions spéciales qui représentent un outils indispensable dans notre étude.

1.1 Espaces fonctionnels

Soient $[a, b]$ un intervalle compact de $\mathbb{R}$ avec $a > 0$ et $n \in \mathbb{N} = 0, 1, ...$

1.1.1 Espaces des fonctions intégrables

Définition 1.1.1 *Pour $1 \leq p < \infty$, on note par $L^p([a, b])$ l'espace des fonctions f réelles sur $[a, b]$ telles que f soit mesurable et*

$$\int_a^b |f(x)|^p \, dx < +\infty.$$

Pour $p = \infty$, l'espace $L^\infty([a, b])$ est l'espace des fonctions mesurables f bornées presque partout (p,p) sur $[a, b]$.

Théorème 1.1.1 [1, 8]

(1) *Pour* $1 \leq p < \infty$, *l'espace* $L^p([a,b])$ *est un espace de Banach muni de la norme :*

$$\|f\|_{L^p} = \left(\int_a^b |f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{P}}.$$

(2) *L'espace* $L^\infty([a,b])$ *est un espace de Banach muni de la norme :*

$$\|f\|_{L^\infty} = \inf\{M \geq 0 : |f(x)| \leq M \quad p.p \quad sur \quad [a,b]\}.$$

Définition 1.1.2 *Définissons l'espace* $X_c^p(a,b)$, $(c \in \mathbb{R}, 1 \leq p \leq \infty)$ *est l'espace des fonctions* f *réelles et mesurable sur* $[a,b]$, *muni de la norme :*

$$\|f\|_{X_c^p} = \left(\int_a^b |t^c f(t)|^p \, \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{P}}, \qquad (c \in \mathbb{R}, 1 \leq p < \infty).$$

$$\|f\|_{X_c^\infty} = ess \sup_{a \leqslant t \leqslant b} (t^c \, |f(t)|), \qquad (p = \infty).$$

1.1.2 Espace des fonctions continues et absolument continues

Définition 1.1.3 *On désigne par* $C^n([a,b])$ *l'espace des fonctions* f *qui ont leurs dérivées d'ordre inférieure ou égale à* n *continues sur* $[a,b]$, *muni de la norme :*

$$\|f\|_{C^n} := \sum_{k=0}^{n} \sup_{x \in [a,b]} \left| f^{(k)}(x) \right|.$$

En particulier si $n = 0, C^0([a,b]) := C([a,b])$ *l'espace des fonctions* f *continues sur* $[a,b]$ *muni de la norme :*

$$\|f\|_C := \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|.$$

Remarque 1.1.1 $(C^n([a,b]), \|\cdot\|_{C^n})$ *est un espace de Banach.*

Définition 1.1.4 *On dit qu'une fonction* f *est absolument continue sur* $[a,b]$ *et on note* $f \in AC([a,b])$ *si :*
$\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ *tel que pour toute partition* $((a_k, b_k))_k$ *de* $[a,b]$, *on a :*

$$\sum_{k=1}^{n} (b_k - a_k) < \delta \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} |f(b_k) - f(a_k)| < \epsilon.$$

Proposition 1.1.1 *Si $f \in AC([a,b])$, alors elle admet une dérivée intégrable sur l'intervalle $[a,b]$ presque partout et*

$$\forall x \in [a,b] : f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)dt.$$

Proposition 1.1.2 *L'espace $AC([a,b])$ muni de la norme $\|f\| = \|f\|_C + \|f'\|_{L^1}$ est un espace Banach.*

Définition 1.1.5 *On note par $AC^n([a,b])$, la classe des fonctions f continuement dérivables jusqu'à l'ordre $(n-1)$ sur $[a,b]$ avec $f^{n-1} \in AC([a,b])$.*

En particulier $AC^1([a,b]) = AC([a,b])$.

Définition 1.1.6 *On définit l'espace $AC^n_{\delta,\mu}$ des fonctions telle que :*

$$AC^n_{\delta,\mu}[a,b] = \left\{ f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R} / \delta^{n-1} x^\mu f(x) \in AC[a,b], \mu \in \mathbb{R}, \delta = x\frac{d}{dx} \right\}.$$

1.1.3 Espaces des fonctions continues avec poids

Définition 1.1.7 *Soit $\lambda \in \mathbb{R} :\ 0 \leq \lambda) < 1$. On désigne par $C_\lambda([a,b],\mathbb{R})$ l'espace des fonctions f définies sur $]a,b]$ telles que la fonction $\left(\log \frac{x}{a}\right)^\lambda f(x) \in C([a,b],\mathbb{R})$ c'est-à-dire :*

$$C_\lambda([a,b],\mathbb{R}) = \left\{ f :]a,b] \to \mathbb{R}, \textit{continue et } \lim_{x \to a^+} \left(\log \frac{x}{a}\right)^\lambda f(x)\, \textit{existe} \right\}.$$

muni de la norme :

$$\|f\|_\lambda = \left\| \left(\log \frac{x}{a}\right)^\lambda f(x) \right\|_C = \sup_{x \in [a,b]} \left| \left(\log \frac{x}{a}\right)^\lambda f(x) \right|.$$

L'espace $C_\lambda([a,b],\mathbb{R})$ est appelé l'espace des fonctions continues avec poids. On peut montrer que $\|\cdot\|_\lambda$ est une norme et que $(C_\lambda([a,b],\mathbb{R}), \|\cdot\|_\lambda)$ est un espace de Banach.

Remarque 1.1.2 *En particulier $C_0([a,b]) = C([a,b])$, il est clair que $C_0 \subsetneq C_\lambda$.*

Définition 1.1.8 *Pour un sous ensemble Ω de $C_\lambda([a,b],\mathbb{R})$, on définit Ω_λ par :*

$$\Omega_\lambda = \{f_\lambda : f \in \Omega\}.$$

avec

$$f_\lambda(x) = \begin{cases} \left(\log \dfrac{x}{a}\right)^\lambda f(x), & x \in]a,b]. \\ \\ \lim\limits_{x\to a^+} \left(\log \dfrac{x}{a}\right)^\lambda f(x), & x = a. \end{cases}$$

Donc $f_\lambda \in C([a,b],\mathbb{R})$.

Définition 1.1.9 *Construisons l'espace généralisé $C_{\mu,\gamma,\log}[a,b]$ défini par :*

$$C_{\mu,\gamma,\log}[a,b] = \left\{ f(x) | \left(\log \frac{x}{a}\right)^\gamma x^\mu f(x) \in C[a,b], \ \|f\|_{\mu,\gamma,\log} = \left\| \left(\log \frac{x}{a}\right)^\gamma x^\mu f(x) \right\|_C \right\}.$$

En particulier $C_{0,\gamma,\log}[a,b] \equiv C_{\gamma,\log}[a,b]$ et $C_{0,0,\log}[a,b] \equiv C[a,b]$.

1.2 Outils d'analyse fonctionnelle

1.2.1 Notations et définitions

On considère dans toute ce paragraphe que E et F sont des espaces de Banach munis des normes $\|\cdot\|_E$ et $\|\cdot\|_F$ respectivement, K un compact dans E et $C(K,F)$ l'espace des fonctions continues muni de la norme uniforme :

$$\|f\|_C = \sup_{x\in K} \|f(x)\|_F.$$

Définition 1.2.1

1) On dit que une famille de fonctions $M \subset C(K,F)$ est équicontinue si :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall u, v \in K : \|u - v\|_E < \delta \Rightarrow \|f(u) - f(v)\|_F < \epsilon, \ \forall f \in M.$$

2) Dans le cas où $E = [a,b]$ et $F = \mathbb{R}$ muni de la topologie usuelle, une partie M de $C(E,F)$ et dit équicontinue si :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall f \in M, \forall x_1, x_2 \in [a,b] : |x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon.$$

Définition 1.2.2 *On dit que M est uniformement borné s'il existe une constante $c > 0$ telle que :*

$$\|f\|_C \leq c \qquad \forall f \in M.$$

Définition 1.2.3 *Soit f une application définie sur E à valeurs dans F. On dit que f est complètement continue si elle est continue et transforme tout borné de E en un ensemble relativement compact dans F. f est dit compact si $f(E)$est relativement compact dans F.*

1.2.2 Théorème d'Ascoli-Arzéla

Ce théorème est connu pour son nombre considérable d'applications entre autre la compacité de certains opérateurs. Il caractérise les parties relativement compactes de l'espace des fonctions continues.

Théorème 1.2.1 [3] *Soient E un espace de Banach compact et F un espace de Banach quelconque.*
Une partie M de $C(E, F)$ est relativement compact si et seulement si :
1) *M est uniformément bornée.*
2) *M est équicontinue.*
3) *Pour tout $x \in E$, l'ensemble $M(x)$ définit par :*

$$M(x) = \{f(x),\ f \in M\}.$$

est relativement compact dans F.

Remarque 1.2.1 *Pour qu'une partie $M \subset C([a, b], \mathbb{R})$ soit relativement compact il faut et il suffit qu'elle soit uniformément bornée et équicontinue.*

Le théorème suivant est une extension naturelle du théorème d'Ascoli- Arzéla.

Théorème 1.2.2 *L'ensemble $\Omega \subset C_\lambda([a, b], \mathbb{R})$ est relativement compact si et seulement si Ω_λ est relativement compact dans $C([a, b], \mathbb{R})$.*

1.2.3 Algèbre de Banach

Définition 1.2.4 *On appelle algèbre de Banach un espace de Banach A (espace vectoriel normé complet) sur le corps des nombres complexe muni d'une multiplication bilinéaire et associative $(\cdot)$ vérifiant :*

$$\|x \cdot y\| \leq \|x\| \cdot \|y\|\,;$$

pour tout x et tout y de A.

1.3 Quelques théorèmes de point fixe

1.3.1 Principe de contraction de Banach

Définition 1.3.1 *Soit $T : E \to E$. On dit que $x \in E$ est un point fixe de l'application T si $T(x) = x$.*

Définition 1.3.2 *Soit T une application d'un espace de Banach de E dans lui même. On dit que T est lipschitzienne s'il existe un nombre $k > 0$ tel que :*

$$\|Tx - Ty\| \leq k \|x - y\|, \qquad \forall x, y \in E.$$

Si $0 \leq k < 1$, on dit alors que T est une contraction.

Théorème 1.3.1 [11] *Soit T une application d'un espace de Banach E dans lui même et T une contraction alors T admet un point fixe unique dans E, i.e il existe unique $u \in E$ tel que : $Tu = u$.*

Théorème 1.3.2 [11] *Le résultat de Théorème 1.3.1 reste valable si il existe $m \in \{1, 2, \cdots\}$ telle que T^m une contraction.*

1.3.2 Alternative non linéaire de Leray-Schauder

Théorème 1.3.3 [11] *Soient E un espace de Banach, U un sous ensemble ouvert borné, avec $0 \in U$ de E et $T : \overline{U} \to E$ est complètement continue, alors :*
(i) T admet un point fixe dans $\overline{U}$, ou bien
(ii) Il existe $y \in \partial U$ et $y = \lambda T(y)$ pour $\lambda \in]0, 1[$.

1.3.3 Théorème de Dhage

Théorème 1.3.4 [11] *Soit S un sous ensemble convexe borné et fermé non vide de l'algèbre de Banach X. Soient $A : X \longrightarrow X$ et $B : S \longrightarrow X$ deux opérateurs tels que :*

(a) A est lipschitzien avec k constante de Lipschitz.
(b) B est complètement continue.
(c) $x = Ax \cdot By \Rightarrow x \in S$ pour tout $y \in S$ et
(d) $Mk < 1$ où $M = \|B(S)\| = \sup_{x \in S} \|B(x)\|$.

Alors l'équation de l'opérateur $x = (A \cdot B)(x)$ admet une solution.

1.4 Fonctions spéciales

Dans cette section, nous présentons les fonctions spéciales à savoir la Gamma, Bêta et Mittag-Leffler. Ces fonctions jouent un rôle important dans le calcul fractionnaire. L'une des fonctions de base du calcul fractionnaire est la fonction Gamma d'Euler $\Gamma(z)$.
Cette fonction est tout simplement la généralisation de la factorielle à tous les nombres réels.

Définition 1.4.1 *La fonction Gamma d'Euler est définie par l'intégrale suivante :*

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt.$$

Avec $\Re(z) > 0$, on désigne par $\Re(z)$ la partie réelle de $z \in \mathbb{C}$.

Proposition 1.4.1 [1] *La fonction Gamma $\Gamma(\cdot)$ possède les propriétés fondamentales suivantes :*
. *Pour $z \in \mathbb{C}, \Re(z) > 0$ on a :*$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \quad et \quad \Gamma(1) = 1,$

. $\Gamma(n) = (n-1)!$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, . $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \dfrac{\pi}{\sin(\pi z)}$,

. $\displaystyle\int_0^1 t^{z-1} e^{-t} dt = \sum_0^{\infty} \frac{(-1)^n}{(z+n)!}$, . $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$,

. $\displaystyle\Gamma(z) = \int_0^1 \ln\left(\frac{1}{t}\right)^{z-1} dt, \qquad pour \quad \Re(z) > 0,$

. $\displaystyle\Gamma(z) = \lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{n! n^z}{z(z+1)\cdots(z+n)}$, . $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} z\Gamma(z) = 1$,

. $\displaystyle\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+n)}{z(z+1)\cdots(z+n+1)}$, . $\Gamma(0^+) = \infty$.

Définition 1.4.2 *La fonction Bêta est une fonction à deux variables est définie par l'intégrale suivante : Pour $z, w \in \mathbb{C}^2 \quad avec \quad \Re(z) > 0$ on a :*

$$\beta(z, w) = \int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{w-1} dt.$$

Proposition 1.4.2 [1] *La fonction Bêta vérifié les propriétés suivantes :*

. *Pour* $z, w \in \mathbb{C}^2$ *avec* $\Re(z) > 0, \Re(w) > 0$ *alors* : $\beta(z,w) = \dfrac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}$,

. *Pour* $\Re(z) > 0$, $\Re(w) > 0$ *on a* : $\beta(z,w) = \beta(w,z)$,

. $\beta(z,w) = \beta(z+1,w) + \beta(z,w+1)$,

.$\beta(z,w+1) = \dfrac{w}{z}\beta(z+1,w) = \dfrac{w}{w+z}\beta(z,w)$,

. $\beta(z,w) = \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{t^{z-1}}{(1+t)^{z+w}} dt$.

Définition 1.4.3 *La fonction de Mittag-Leffler est définie par la série de fonctions suivantes :*

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}, \quad \alpha > 0, \ z \in \mathbb{C}.$$

La fonction généralisée de Mittag-Leffler est donnée par :

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \quad \alpha, \beta > 0, \ z \in \mathbb{C}.$$

Proposition 1.4.3 [1]

.$E_{1,1}(z) = e^z$,

. $\forall m \in N, E_{1,m} = \dfrac{1}{z^{m-1}}\left[e^z - \displaystyle\sum_{k=0}^{m-2} \frac{z^k}{k}\right]$,

.$E_{1,2}(z) = \dfrac{e^z - 1}{z}$,

. $E_{2,1}(z) = \cosh(\sqrt{z})$,

.$E_{1,3}(z) = \dfrac{e^z - 1 - z}{z^2}$,

. $E_{2,2} = \dfrac{\sinh(z)}{2}$.

1.5 Inégalité de Gronwall généralisée

Théorème 1.5.1 [6] *Soient* x, h, k *des fonctions continues sur* $[t_0, T[$ $(T \leq \infty)$ *telle que* $k(t) \geq 0$. *Si*

$$x(t) \leq h(t) + \int_{t_0}^{t} k(s)x(s)ds.$$

alors

$$x(t) \leq h(t) + \int_{t_0}^{t} h(s)k(s) \exp\left[\int_{s}^{t} k(u)du\right] ds, \qquad t \in [t_0, T[.$$

Si, en plus $h(t)$ est non décroissante alors

$$x(t) \leq h(t) \exp\left(\int_{t_0}^{t} k(s)ds\right), \qquad t \in [t_0, T[.$$

Théorème 1.5.2 *Soient $\alpha > 0$, $a(t)$ et $u(t)$ deux fonctions positives et localement intégrables sur $1 \leq t < T$, $T \leq \infty$, $g(t)$ est une fonction continue positive et croissante sur $1 \leq t < T$ et $g(t) \leq M$, (M constant) si*

$$u(t) \leq a(t) + g(t) \int_{1}^{t} \left(\log \frac{t}{s}\right)^{\alpha-1} u(s) \frac{ds}{s}, \qquad 1 \leq t < T, \tag{1.1}$$

alors

$$u(t) \leq a(t) + \int_{1}^{t} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(g(t)\Gamma(\alpha))^n}{\Gamma(n\alpha)} \left(\log \frac{t}{s}\right)^{n\alpha-1}\right] \frac{ds}{s}. \tag{1.2}$$

Preuve Soit

$$B\varphi(t) = g(t) \int_{1}^{t} \left(\log \frac{t}{s}\right)^{n\alpha-1} \varphi(s) \frac{ds}{s},$$

alors

$$u(t) \leq a(t) + Bu(t)$$

Par itération on obtient :

$$u(t) \leq \sum_{k=0}^{n-1} B^k a(t) + B^n u(t).$$

Par suite, on a :

$$B^n u(t) \leq \int_{1}^{t} \frac{(g(t)\Gamma(\alpha))^n}{\Gamma(n\alpha)} \left(\log \frac{t}{s}\right)^{n\alpha-1} u(s) \frac{ds}{s} \tag{1.3}$$

et $B^n u(t) \longrightarrow 0$ quand $n \to +\infty$ pour $t \in [1, T[$.
En effet ; (par récurrence) on a : pour $n = 1$, (1.3) est donnée :

$$Bu(t) \leq \int_{1}^{t} g(t) \left(\log \frac{t}{s}\right)^{\alpha-1} u(s) \frac{ds}{s}.$$

Supposons qu' elle est vraie pour $n = k$

$$B^k u(t) \leq \int_1^t \frac{(g(t)\Gamma(\alpha))^k}{\Gamma(k\alpha)} \left(\log \frac{t}{s}\right)^{k\alpha-1} u(s)\frac{ds}{s}$$

Montrons qu'elle est vraie pour $n = k+1$, nous avons :

$$\begin{aligned}
B^{k+1}u(t) &= B\left(B^K u(t)\right) \\
&\leq \int_1^t g(t)\left(\log \frac{t}{s}\right)^{\alpha-1} B^k u(s)\frac{ds}{s} \\
&\leq \int_1^t g(t)\left(\log \frac{t}{s}\right)^{\alpha-1}\left[\int_1^s \frac{(g(t)\Gamma(\alpha))^k}{\Gamma(k\alpha)}\left(\log\frac{s}{\tau}\right)^{k\alpha-1} u(\tau)\frac{d\tau}{\tau}\right]\frac{ds}{s} \\
&\leq (g(t))^{k+1}\int_1^t \left(\log \frac{t}{s}\right)^{\alpha-1}\left[\int_1^s \frac{(\Gamma(\alpha))^k}{\Gamma(k\alpha)}\left(\log\frac{s}{\tau}\right)^{k\alpha-1} u(\tau)\frac{d\tau}{\tau}\right]\frac{ds}{s}.
\end{aligned}$$

D'après le théorème de Fubini, on trouve :

$$\begin{aligned}
B^{k+1}u(t) &\leq (g(t))^{k+1}\int_1^t \left[\int_\tau^t \frac{(\Gamma(\alpha))^k}{\Gamma(k\alpha)}\left(\log\frac{t}{s}\right)^{\alpha-1}\left(\log\frac{s}{\tau}\right)^{k\alpha-1}\frac{ds}{s}\right]u(\tau)\frac{d\tau}{\tau} \\
&\leq \int_1^t \frac{(g(t)\Gamma(\alpha))^{k+1}}{\Gamma((k+1)\alpha)}\left(\log\frac{t}{s}\right)^{(k+1)\alpha-1} u(s)\frac{ds}{s}
\end{aligned}$$

Faisons un changement de variable $\log(s) = \log(\tau) + z\log(\frac{t}{\tau})$ donc

$$\begin{aligned}
\int_\tau^t \left(\log\frac{t}{s}\right)^{\alpha-1}\left(\log\frac{s}{\tau}\right)^{k\alpha-1}\frac{ds}{s} &= \left(\log\frac{t}{\tau}\right)^{k\alpha+\alpha-1}\int_0^1 (1-z)^{\alpha-1} z^{k\alpha-1}dz \\
&= \left(\log\frac{t}{\tau}\right)^{(k+1)\alpha-1}\beta(k\alpha,\alpha) \\
&= \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(k\alpha)}{\Gamma((k+1)\alpha)}\left(\log\frac{t}{\tau}\right)^{(k+1)\alpha-1}.
\end{aligned}$$

Donc

$$B^n u(t) \leq \int_1^t \frac{(g(t)\Gamma(\alpha))^n}{\Gamma(n\alpha)} \left(\log \frac{t}{s}\right)^{n\alpha-1} u(s)\frac{ds}{s} \longrightarrow 0 \text{ quand } n \to \infty$$

D'où $\quad B^n u(t) \longrightarrow 0$ quand $n \to \infty$.

Corrollaire 1 *Soit $g(t) = b > 0$, l'inégalité (1.1) est donnée par :*
Si

$$u(t) \leq a(t) + b\int_1^t \left(\log \frac{t}{s}\right)^{\alpha-1} u(s)\frac{ds}{s},$$

alors

$$u(t) \leq a(t) + \int_1^t \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(b\Gamma(\alpha))^n}{\Gamma(n\alpha)} \left(\log \frac{t}{s}\right)^{n\alpha-1} a(s)\right] \frac{ds}{s}, \quad t \in [1, T[.$$

Corrollaire 2 *Sous l'hypothèse du Théorème 1.5.2, supposons que $a(t)$ est une fonction non décroissante sur $[1, T[$. Alors*

$$u(t) \leq a(t)E_{\alpha,1}\left(g(t)\Gamma(\alpha)(\log t)^{\alpha}\right),$$

avec $E_{\alpha,1}$ la fonction de Mittag Leffler définie par $E_{\alpha,1}(z) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+1)}$.

Preuve D'après Corrollaire 1, on a :

$$\begin{aligned}
u(t) &\leq a(t)\left[1 + \int_1^t \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(g(t)\Gamma(\alpha))^n}{\Gamma(n\alpha)} \left(\log \frac{t}{s}\right)^{n\alpha-1} \frac{ds}{s}\right] \\
&\leq a(t)\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(g(t)\Gamma(\alpha)(\log t)^{\alpha})^n}{\Gamma(n\alpha+1)} \\
&= a(t)E_{\alpha,1}\left(g(t)\Gamma(\alpha)(\log t)^{\alpha}\right).
\end{aligned}$$

Chapitre 2

Calcul fractionnaire

Dans ce chapitre, nous présentons principalement quelques définitions de base, les propriétés liées à l'intégrale et dérivée fractionnaire de type Hadamard.
Tout d'abord soit $f(x)$ une fonction définie sur $[a, b]$ ou $0 < a \leq b < \infty$ et $\mu \in \mathbb{R}$.

2.1 Intégrale fractionnaire de type Hadamard

Propriété 2.1.1 [2] *Pour $n \in \mathbb{N}^*$, l'intégrale d'ordre n de type Hadamard pour $\mu \in \mathbb{R}\, et\, a \geq 0$ est donnée par la formule suivante :*

$$\begin{aligned}({}^H I^n_{a^+,\mu} f)(x) &= x^{-\mu} \int_a^x \frac{dt_1}{t_1} \int_a^{t_1} \frac{dt_2}{t_2} \cdots \int_a^{t_{n-1}} t_n^\mu f(t_n) \frac{dt_n}{t_n} \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x \left(\frac{t}{x}\right)^\mu \left(\log \frac{x}{t}\right)^{n-1} \frac{f(t)}{t} dt. \qquad (x > a)\end{aligned}$$

On peut généraliser, d'une manière naturelle, la formule précédente pour $n = \alpha$ qui est nombre réel quelconque par la définition suivante.

Définition 2.1.1 *L'intégrale fractionnaire de type Hadamard avec paramètre $\mu \in \mathbb{R}$ de la fonction f d'ordre $\alpha \in \mathbb{R}$ est définie par :*

$$({}^H I^\alpha_{a^+,\mu} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \left(\frac{t}{x}\right)^\mu \left(\log \frac{x}{t}\right)^{\alpha-1} \frac{f(t)}{t} dt. \tag{2.1}$$

avec $x \in (a, b)$.

Dans le cas $\mu = 0$, (2.1) est donné par :

$$({}^{H}I^{\alpha}_{a^+,\mu}f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \left(\log \frac{x}{t}\right)^{\alpha-1} \frac{f(t)}{t} dt.$$

Exemple 1 *Soit* $f(x) = x^{-\mu} \left(\log \frac{x}{a}\right)^{\beta-1}$ *avec* $0 < \alpha < 1$ *et* $\beta > 0$ *on a :*

$$ {}^{H}I^{\alpha}_{a^+,\mu}f(x) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta+\alpha)} x^{-\mu} \left(\log \frac{x}{a}\right)^{\beta+\alpha-1}. \tag{2.2}$$

En effet ;

$$ {}^{H}I^{a}_{a^+,u} \left[x^{-\mu} \left(\log \frac{x}{a}\right)^{\beta-1} \right] = \frac{x^{-\mu}}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \left(\log \frac{x}{t}\right)^{\alpha-1} \left(\log \frac{t}{a}\right)^{\beta-1} \frac{dt}{t},$$

en effectuant le changement de variable $y = \dfrac{\log \frac{t}{a}}{\log \frac{x}{a}}$, *on obtient :*

$$\begin{aligned} {}^{H}I^{a}_{a^+,u} \left[x^{-\mu} \left(\log \frac{x}{a}\right)^{\beta-1} \right] &= \frac{x^{-\mu} \left(\log \frac{x}{a}\right)^{\beta+\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-y)^{\alpha-1} y^{\beta-1} dy \\ &= \frac{\Gamma(\beta)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha+\beta)\Gamma(\alpha)} x^{-\mu} \left(\log \frac{x}{a}\right)^{\beta+\alpha-1} \\ &= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} x^{-\mu} \left(\log \frac{x}{a}\right)^{\beta+\alpha-1}. \end{aligned}$$

Remarque 2.1.1 *Intégrale de type Hadamard de (2.2) avec* $\mu = 0$ *est donnée par :*

$$ {}^{H}I^{\alpha}_{a^+} \left(\log \frac{x}{a}\right)^{\beta-1} = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} \left(\log \frac{x}{a}\right)^{\alpha+\beta-1}. \tag{2.3}$$

2.2 La dérivée fractionnaire de type Hadamard

Définition 2.2.1 *La dérivée fractionnaire de type Hadamard avec paramètre $\mu \in \mathbb{R}$ de la fonction f d'ordre $\alpha > 0$ est définie par :*

$$({}^{H}D^{\alpha}_{a^+,\mu}f)(x) = x^{-\mu}\delta^n x^{\mu}({}^{H}I^{n-\alpha}_{a^+,\mu}f(x)). \tag{2.4}$$

avec $\delta = x\dfrac{d}{dx}$, $n-1 < \alpha \leq n \in \mathbb{Z}^+, x \in (a,b)$ et $0 \leq a < b \leq \infty$.
Dans le cas $\mu = 0$ la définition 2.2.1 est donnée :

$$({}^{H}D^{\alpha}_{a^+}f)(x) = \delta^n({}^{H}I^{n-\alpha}_{a^+}f(x)).$$

Exemple 2 $f(x) = x^{-\mu}\left(\log\dfrac{x}{a}\right)^{\beta-1}$ *avec $0 < \alpha < 1$ et $\beta > 0$*

$${}^{H}D^{\alpha}_{a^+,\mu}f(x) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)}x^{-\mu}\left(\log\frac{x}{a}\right)^{\beta-\alpha-1}. \tag{2.5}$$

En effet ;

$$\begin{aligned}
{}^{H}D^{\alpha}_{a^+,\mu}\left[x^{-\mu}\left(\log\frac{x}{a}\right)^{\beta-1}\right] &= x^{-\mu}\delta^n x^{\mu}\left[{}^{H}I^{n-\alpha}_{a^+,\mu}\left(\log\frac{x}{a}\right)^{\beta-1}\right] \\
&= x^{-\mu}\delta^n x^{\mu}\left[\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta+n-\alpha)}x^{-\mu}\left(\log\frac{x}{a}\right)^{n-\alpha+\beta-1}\right] \\
&= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta+n-\alpha)}x^{-\mu}\delta^n\left(\log\frac{x}{a}\right)^{n-\alpha+\beta-1} \\
&= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta+n-\alpha)}\frac{\Gamma(n-\alpha+\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)}x^{-\mu}\left(\log\frac{x}{a}\right)^{\beta-\alpha-1} \\
&= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)}x^{-\mu}\left(\log\frac{x}{a}\right)^{\beta-\alpha-1}.
\end{aligned}$$

Remarque 2.2.1 *La dérivée de type Hadamard de (2.5) avec $\mu = 0$ est donnée par :*

$${}^{H}D^{\alpha}_{a^+}\left(\left(\log\frac{x}{a}\right)^{\beta-1}\right) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)}\left(\log\frac{x}{a}\right)^{\beta-\alpha-1}.$$

Pour $\beta = 1$, on a :

$$^{H}D^{\alpha}_{a^+}(1) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left(\log\frac{x}{a}\right)^{-\alpha}.$$

Donc la dérivée fractionnaire d'une constante au sens de Hadamard n'est pas nulle.

2.3 Propriétés de la dérivée et l'intégrale fractionnaire de Hadamard

Lemme 2.3.1 *Soient $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $1 \leq p \leq \infty$, $0 \leq a \leq b \leq \infty$ et μ, $c \in \mathbb{R}$ avec $\mu \geq c$. Pour $f \in X^p_c(a,b)$ on a :*

$$(^{H}I^{\alpha}_{a^+,\mu}.{}^{H}I^{\beta}_{a^+,\mu}f)(x) ={}^{H} I^{\alpha+\beta}_{a+,\mu}f(x). \tag{2.6}$$

Preuve

$$\begin{aligned}
&\left(^{H}I^{\alpha}_{a^+,\mu}.{}^{H}I^{\beta}_{a^+,\mu}f\right)(x)\\
=\ & \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x\left(\frac{u}{x}\right)^{\mu}\left(\log\frac{x}{u}\right)^{\alpha-1}\frac{du}{u}\times\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_a^u\left(\frac{t}{u}\right)^{\mu}\left(\log\frac{u}{t}\right)^{\beta-1}f(t)\frac{dt}{t}\\
=\ & \frac{x^{-\mu}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^x t^{\mu-1}f(t)dt\int_t^x\left(\log\frac{x}{u}\right)^{\alpha-1}\left(\log\frac{u}{t}\right)^{\beta-1}\frac{du}{u}
\end{aligned}$$

L'intégrale interne est évaluée par le changement de variable suivant :
$\tau = \dfrac{\log\frac{u}{t}}{\log\frac{x}{t}}$

$$\int_t^x\left(\log\frac{x}{u}\right)^{\alpha-1}\left(\log\frac{u}{t}\right)^{\beta-1}\frac{du}{u} = \left(\log\frac{x}{t}\right)^{\alpha+\beta-1}\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$$

D'où

$$\begin{aligned}
(^{H}I^{\alpha}_{a^+,\mu}.{}^{H}I^{\beta}_{a^+,\mu}f)(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_a^x\left(\frac{u}{x}\right)^{\mu}\left(\log\frac{x}{u}\right)^{\alpha+\beta-1}\frac{du}{u}\\
&= (^{H}I^{\alpha+\beta}_{a^+,\mu}f)(x).
\end{aligned}$$

Lemme 2.3.2 [10] *Soient* $\alpha \geq \beta > 0$, $1 \leq p \leq \infty$, $0 \leq a \leq b \leq \infty$ *et* μ, $c \in \mathbb{R}$ *avec* $\mu \geq c$. *Pour* $f \in X_c^p(a,b)$ *on a :*

$$({}^H D^{\beta}_{a^+,\mu} . {}^H I^{\alpha}_{a^+,\mu} f)(x) = {}^H I^{\alpha-\beta}_{a^+,\mu} f(x). \tag{2.7}$$

En particulier si $\beta = m \in \mathbb{Z}^+$, *alors*

$$({}^H D^{m}_{a^+,\mu} . {}^H I^{\alpha}_{a^+,\mu} f)(x) = {}^H I^{\alpha-m}_{a^+,\mu} f(x). \tag{2.8}$$

Lemme 2.3.3 *(I)Pour l'intégrale fractionnaire au sens de Hadamard (2.1), si* $\alpha \longrightarrow 1$ *alors*

$${}^H I^{\alpha}_{a^+,\mu} f(x) = \int_a^x \left(\frac{t}{x}\right)^{\mu} \frac{f(t)}{t} dt. \tag{2.9}$$

et si $\alpha \longrightarrow 0^+$ *on a :*

$${}^H I^{\alpha}_{a^+,\mu} f(x) = f(x). \tag{2.10}$$

(II) Pour la dérivée fractionnaire au sens Hadamard (2.2)
Si $\alpha \longrightarrow 0^+$ *alors*

$${}^H D^{\alpha}_{a^+,\mu} f(x) = f(x). \tag{2.11}$$

Preuve
(I) En utilisant une intégration par parties, on obtient :

$$\begin{aligned}
& \lim_{\alpha\to 0^+} \left({}^H I^{\alpha}_{a^+,\mu} f(x)\right) \\
= & \lim_{\alpha\to 0^+} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \left(\frac{t}{x}\right)^{\mu} \left(\log\frac{x}{t}\right)^{\alpha-1} \frac{f(t)}{t} dt \\
= & \lim_{\alpha\to 0^+} \frac{-1}{\Gamma(1+\alpha)} \left\{ \left(\frac{t}{x}\right)^{\mu} f(t) \left(\log\frac{x}{t}\right)^{\alpha} |_a^x - \int_a^x \left(\log\frac{x}{t}\right)^{\alpha} d\left[\left(\frac{t}{x}\right)^{\mu} f(t)\right]\right\} \\
= & f(x).
\end{aligned}$$

(II) On a :

$$\begin{aligned}
\lim_{\alpha\to 0^+} D^{\alpha}_{a^+,\mu} f(x) &= \lim_{\alpha\to 0^+} x^{-\mu} \left(x\frac{d}{dx}\right) \left\{ x^{\mu} \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^x \left(\frac{t}{x}\right)^{\mu} \left(\log\frac{x}{t}\right)^{-\alpha} f(t)\frac{dt}{t} \right\} \\
&= x^{-\mu+1} \frac{d\left(\displaystyle\int_a^x t^{\mu} f(t)\frac{dt}{t}\right)}{dx} \\
&= f(x).
\end{aligned}$$

Si $\alpha \longrightarrow (n-1)^+$ alors

$$^H D^{\alpha}_{a^+,\mu} f(x) = x^{-\mu}\delta^{n-1}(x^{\mu} f(x)) = (\delta+\mu)^{n-1} f(x). \tag{2.12}$$

Avec $\delta = x\dfrac{d}{dx}$.

Si $\alpha \longrightarrow n^-$ alors

$$^H D^{\alpha}_{a^+,\mu} f(x) = x^{-\mu}\delta^{n}(x^{\mu} f(x)) \equiv (\delta+\mu)^{n} f(x). \tag{2.13}$$

En particulier $\alpha \longrightarrow 1$ alors

$$^H D^{\alpha}_{a^+,\mu} f(x) = \mu f(x) + x f'(x) = (\mu+\delta) f(x). \tag{2.14}$$

Théorème 2.3.1 *Soit $(n-1) < \alpha < \beta \leq n \in \mathbb{Z}^+, 1 \leq p \leq \infty$, $0 \leq a < b \leq \infty$ et soit $\mu, c \in R$ pour $\mu \geq c$ et pour $f \in X^p_c(a,b)$ et $^H I^{\alpha}_{a^+,\mu} f \in AC^n_{\delta,\mu}[a,b]$ on a :*

$$^H D^{\beta}_{a^+,\mu} . ^H I^{\alpha}_{a^+,\mu} f(x) = ^H D^{\beta-\alpha}_{a^+,\mu} f(x). \tag{2.15}$$

En particulier si $\beta = n$ alors

$$^H D^{n}_{a^+,\mu} . ^H I^{\alpha}_{a^+,\mu} f(x) = ^H D^{n-\alpha}_{a^+,\mu} f(x). \tag{2.16}$$

Preuve

D'après la définition de l'intégrale (2.1) et la dérivée (2.2) de type Hadamard on a :

$$\begin{aligned}
(^H D^{\beta}_{a^+,\mu} . ^H I^{\alpha}_{a^+,\mu} f)(x) &= x^{-\mu}\delta^{n} x^{\mu}(^H I^{n-\beta}_{a^+,\mu} . ^H I^{\alpha}_{a^+,\mu} f(x)) \\
&= x^{-\mu}\delta^{n} x^{\mu}(^H I^{n-\beta+\alpha}_{a^+,\mu} f(x)) \\
&= x^{-\mu}\delta\delta^{n-1} x^{\mu}(^H I^{n-\beta+\alpha}_{a^+,\mu} f(x)).
\end{aligned}$$

L'expression intérieure peut être formulée comme suit :

$$\begin{aligned}
& \delta^{n-1} x^{\mu}\left({}^{H}I_{a^+,\mu}^{n-\beta+\alpha} f(x)\right) \\
= \;& \delta^{n-1}\left(\frac{1}{\Gamma(n+\alpha-\beta)}\int_a^x t^{\mu}\left(\log\frac{x}{t}\right)^{n+\alpha-\beta-1} f(t)\frac{dt}{t}\right) \\
= \;& \frac{(n+\alpha-\beta-1)(n+\alpha-\beta-2)\cdots(n+\alpha-\beta-(n-1))}{\Gamma(n+\alpha-\beta)} \\
& \int_a^x t^{\mu}\left(\log\frac{x}{t}\right)^{\alpha-\beta} f(t)\frac{dt}{t} \\
= \;& \frac{x^{\mu}}{\Gamma(\alpha-\beta+1)}\int_a^x \left(\frac{t}{x}\right)^{\mu}\left(\log\frac{x}{t}\right)^{(\alpha-\beta+1)-1} f(t)\frac{dt}{t} \\
= \;& x^{\mu}.{}^{H}I_{a^+,\mu}^{\alpha-\beta+1} f(x)
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
\left({}^{H}D_{a^+,\mu}^{\beta}.{}^{H}I_{a^+,\mu}^{\alpha} f\right)(x) &= x^{-\mu}\delta x^{\mu}\left({}^{H}I_{a^+,\mu}^{1+\alpha-\beta} f(x)\right) \\
&={}^{H} D_{a^+,\mu}^{\beta-\alpha} f(x).
\end{aligned}$$

Théorème 2.3.2 [10] *Soient $\beta \geq \alpha > 0, (n-1) < \alpha \leq n, n \in \mathbb{Z}^+, m-1 < \beta \leq m \in \mathbb{Z}^+$, $0 \leq a \leq b \leq \infty$,$1 \leq p \leq \infty$, et soit μ, $c \in \mathbb{R}$ avec $\mu \geq c$ et pour $f \in AC_{\delta,\mu}^{m}$ et ${}^{H}D_{a^+,\mu}^{\alpha} f \in X_c^p(a,b)$ on a :*

$$ {}^{H}I_{a^+,\mu}^{\beta}.{}^{H}D_{a^+,\mu}^{\alpha} f(x) ={}^{H} I_{a^+,\mu}^{\beta-\alpha} f(x). \tag{2.17}$$

En particulier si $\alpha = \beta$ alors

$$ {}^{H}I_{a^+,\mu}^{\beta}.{}^{H}D_{a^+,\mu}^{\alpha} f(x) = f(x). \tag{2.18}$$

Lemme 2.3.4 *Si $\alpha > 0$, $f(\cdot) \in C([a,b])$ et $a > 0$ alors l'équation différentielle :*

$$ {}^{H}D_{a^+}^{\alpha} f(t) = 0. \tag{2.19}$$

admet comme solution :

$$ f(t) = \sum_{j=1}^{n} c_j \left(\log\frac{t}{a}\right)^{\alpha-j}. \tag{2.20}$$

Et on a la formule suivante :

$$ {}^{H}I^{\alpha}_{a^+}.{}^{H}D^{\alpha}_{a^+}f(t) = f(t) + \sum_{j=1}^{n} c_j \left(\log \frac{t}{a}\right)^{\alpha-j}, \tag{2.21} $$

où $j = 1, 2, \cdots, n,\ n-1 < \alpha < n$ *et* $c \in \mathbb{R}$.

Preuve

$$ \begin{aligned} {}^{H}D^{\alpha}_{a^+}f(t) = 0 \quad & \Leftrightarrow \delta^{n}.{}^{H}I^{n-\alpha}_{a^+}f(t) = 0 \\ & \Leftrightarrow {}^{H}I^{n-\alpha}_{a^+}f(t) = \sum_{j=0}^{n-1} c_j \left(\log \frac{t}{a}\right)^{j} \\ & \Rightarrow {}^{H}D^{n-\alpha}_{a^+}.{}^{H}I^{n-\alpha}_{a^+}f(t) = \sum_{j=0}^{n-1} c_j {}^{H}D^{n-\alpha}_{a^+} \left(\log \frac{t}{a}\right)^{j} \\ & \Rightarrow f(t) = \sum_{j=0}^{n-1} c_j \frac{\Gamma(j+1)}{\Gamma(j-n+\alpha+1)} \left(\log \frac{t}{a}\right)^{j-n+\alpha} \\ & \Rightarrow f(t) = \sum_{j=1}^{n} c_j \frac{\Gamma(j)}{\Gamma(j-n+\alpha)} \left(\log \frac{t}{a}\right)^{j-n+\alpha-1} \\ & \Rightarrow f(t) = \sum_{j=1}^{n} c'_j \left(\log \frac{t}{a}\right)^{j-n+\alpha-1} \\ & \Rightarrow f(t) = \sum_{j=1}^{n} c_j \left(\log \frac{t}{a}\right)^{\alpha-j}. \end{aligned} $$

Inversement, on a :

$$\begin{aligned} f(t)=\sum_{j=1}^{n} c_j\left(\log\frac{t}{a}\right)^{\alpha-j} \quad &\Rightarrow^{H} D^{\alpha}_{a^+}f(t)=^{H} D^{\alpha}_{a^+}\sum_{j=1}^{n} c_j\left(\log\frac{t}{a}\right)^{\alpha-j} \\ &\Rightarrow^{H} D^{\alpha}_{a^+}f(t)=\sum_{j=1}^{n} c_j.^{H}D^{\alpha}_{a^+}\left(\log\frac{t}{a}\right)^{\alpha-j} \\ &\Rightarrow^{H} D^{\alpha}_{a^+}f(t)=\sum_{j=1}^{n} c_j.0=0. \end{aligned}$$

Pour (2.21) on a : d'après (2.19) et (2.20)

$$^{H}D^{\alpha}_{a^+}f(t)=0 \Leftrightarrow f(t)=\sum_{j=1}^{n} c_j\left(\log\frac{t}{a}\right)^{\alpha-j}. \tag{2.22}$$

Puisque

$$^{H}I^{\alpha}_{a^+}.^{H}D^{\alpha}_{a^+}f(t)=f(t)+\sum_{j=1}^{n} c_j\left(\log\frac{t}{a}\right)^{\alpha-j}$$

est équivalente à

$$^{H}I^{\alpha}_{a^+}.^{H}D^{\alpha}_{a^+}f(t)-f(t)=\sum_{j=1}^{n} c_j\left(\log\frac{t}{a}\right)^{\alpha-j},$$

on pose

$$y(t)=^{H} I^{\alpha}_{a^+}.^{H}D^{\alpha}_{a^+}f(t)-f(t).$$

Alors d'après la relation (2.25), on obtient :

$$\begin{aligned} ^{H}D^{\alpha}_{a^+}y(t)=0 \quad &\Leftrightarrow^{H} D^{\alpha}_{a^+}(I^{\alpha}_{a^+}.^{H}D^{\alpha}_{a^+}f(t)-f(t))=0 \\ &\Leftrightarrow^{H} D^{\alpha}_{a^+}.^{H}I^{\alpha}_{a^+}.^{H}D^{\alpha}_{a^+}f(t)-^{H} D^{\alpha}_{a^+}f(t)=0 \\ &\Leftrightarrow^{H} D^{\alpha}_{a^+}f(t)-^{H} D^{\alpha}_{a^+}f(t)=0. \end{aligned}$$

Lemme 2.3.5 [7] *Si $\alpha > 0$, $f(x) \in C([a,b])$ et $\mu \neq 0$, alors l'équation différentielle :*

$$^{H}D^{\alpha}_{a^+,\mu}f(t)=0. \tag{2.23}$$

admet comme unique solution

$$f(t) = \sum_{j=1}^{n} c_j t^{-\mu} \left(\log \frac{t}{a} \right)^{\alpha - j}. \tag{2.24}$$

Et on a la formule suivante :

$${}^{H}I^{\alpha}_{a^+,\mu} . {}^{H}D^{\alpha}_{a^+,\mu} f(t) = f(t) + \sum_{j=1}^{n} c_j t^{-\mu} \left(\log \frac{t}{a} \right)^{\alpha - j}, \tag{2.25}$$

où $j = 1, 2, \cdots, n$, $n - 1 < \alpha < n$ *et* $c \in \mathbb{R}$.

Chapitre 3

Existence de solution pour un problème associé à une équation différentielle d'ordre fractionnaire

3.1 Caractérisation de la solution

Dans cette section, nous allons caractériser la solution du problème de Cauchy d'ordre fractionnaire au sens de Hadamard par la méthode de la variation de la constante dans le cas $0 < \alpha < 1$ et $\mu \neq 0$.

Proposition 3.1.1 *Le problème suivant :*

$$\begin{cases} {}^{H}D^{\alpha}_{a,\mu}u(t) = 0, & a < t \leq b, \\ u(t_0) = u_0, & a < t_0 \leq b, \end{cases} \tag{3.1}$$

admet une unique solution dans $C_{\mu,1-\alpha,\log}[a,b]$ *est donnée par :*

$$u(t) = u_0 t_0^{\mu} \left(\log \frac{t_0}{a}\right)^{1-\alpha} t^{-\mu} \left(\log \frac{t}{a}\right)^{\alpha-1}. \tag{3.2}$$

Preuve D'après le Lemme 2.3.4 la solution de l'équation est donnée par :

$$u(t) = ct^{-\mu} \left(\log \frac{t}{a}\right)^{\alpha-1}.$$

D'autre part, on a :

$$u(t_0) = c(t_0)^{-\mu} \left(\log \frac{t_0}{a}\right)^{\alpha-1} = u_0.$$

Donc

$$c = u_0 t_0^{\mu} \left(\log \frac{t_0}{a}\right)^{1-\alpha}.$$

Par conséquent

$$u(t) = u_0 t_0^{\mu} \left(\log \frac{t_0}{a}\right)^{1-\alpha} t^{-\mu} \left(\log \frac{t}{a}\right)^{\alpha-1}.$$

Remarque 3.1.1 *Si $t_0 = a$, alors l'unique solution du problème homogène (3.1) est la solution triviale.*

Proposition 3.1.2 *Le problème suivant :*

$$\begin{cases} {}^{H}D^{\alpha}_{a,\mu} u(t) = 0, & a < t \leq b, \\ \lim\limits_{t \longrightarrow a^+} \left(\log \frac{t}{a}\right)^{1-\alpha} u(t) = u_0, & \end{cases} \tag{3.3}$$

Admet une unique solution dans $C_{\mu,1-\alpha,\log}[a,b]$ est donnée par :

$$u(t) = u_0 a^{\mu} t^{-\mu} \left(\log \frac{t}{a}\right)^{\alpha-1}. \tag{3.4}$$

Preuve D'après le Lemme 2.3.4 la solution de l'équation est donnée par :

$$u(t) = c t^{-\mu} \left(\log \frac{t}{a}\right)^{\alpha-1}.$$

Multiplions les deux membre de l'égalité par $\left(\log \frac{t}{a}\right)^{1-\alpha}$ et par passage a la limite, on a :

$$u_0 = \lim_{t \longrightarrow a^+} \left(\log \frac{t}{a}\right)^{1-\alpha} u(t) = \lim_{t \longrightarrow a^+} c t^{-\mu}.$$

Donc

$$c = u_0 a^{\mu}.$$

Par conséquent

$$u(t) = u_0 a^{\mu} t^{-\mu} \left(\log \frac{t}{a}\right)^{\alpha-1}. \tag{3.5}$$

Théorème 3.1.1 *Soit $u(\cdot) \in C_{\mu,1-\alpha,\log}[a,b]$, alors le problème :*

$$\begin{cases} {}^{H}D^{\alpha}_{a,\mu}u(t) = u(t), & a < t \leq b, \\ u(t_0) = u_0, & a < t_0 \leq b, \end{cases} \tag{3.6}$$

admet une unique solution donnée par :

$$u(t) = u_0 t_0^{\mu} \left(\log \frac{t_0}{a}\right)^{1-\alpha} \left(E_{\alpha,\alpha}\left(\left(\log \frac{t}{a}\right)^{\alpha}\right)\right)^{-1} t^{-\mu} \left(\log \frac{t}{a}\right)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}\left(\left(\log \frac{t}{a}\right)^{\alpha}\right). \tag{3.7}$$

Preuve

$${}^{H}D^{\alpha}_{a,\mu}u(t) = u(t).$$

En appliquant l'opérateur ${}^{H}I^{\alpha}_{a^+,\mu}$ aux deux membres de l'égalité on a :

$${}^{H}I^{\alpha}_{a^+,\mu}.{}^{H}D^{\alpha}_{a^+,\mu}u(t) = {}^{H}I^{\alpha}_{a^+,\mu}u(t)$$

Alors

$$u(t) = ct^{-\mu}\left(\log \frac{t}{a}\right)^{\alpha-1} + {}^{H}I^{\alpha}_{a^+,\mu}u(t), \qquad c \in \mathbb{R}.$$

D'après le calcul et par itération, on obtient :

$$\begin{aligned} u(t) &= ct^{-\mu}\left(\log \tfrac{t}{a}\right)^{\alpha-1} + {}^{H}I^{\alpha}_{a^+,\mu}\left[ct^{-\mu}\left(\log \tfrac{t}{a}\right)^{\alpha-1} + {}^{H}I^{\alpha}_{a^+,\mu}u(t)\right] \\ &= ct^{-\mu}\left(\log \tfrac{t}{a}\right)^{\alpha-1} + \frac{c\Gamma(\alpha)}{\Gamma(2\alpha)}t^{-\mu}\left(\log \frac{t}{a}\right)^{2\alpha-1} + {}^{H}I^{2\alpha}_{a^+,\mu}u(t) \\ &= ct^{-\mu}\Gamma(\alpha)\left[\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left(\log \frac{t}{a}\right)^{\alpha-1} + \frac{1}{\Gamma(2\alpha)}\left(\log \frac{t}{a}\right)^{2\alpha-1} + \cdots + \frac{1}{\Gamma(n\alpha)}\left(\log \frac{t}{a}\right)^{n\alpha-1}\right] \\ &+ {}^{H}I^{n\alpha}_{a^+,\mu}u(t). \end{aligned}$$

Montrons que $\left\| {}^{H}I^{n\alpha}_{a^+,\mu}u(t)\right\| \longrightarrow 0$ quand $n \longrightarrow \infty$

$$\begin{aligned}
\left|{}^{H}I^{n\alpha}_{a^+,\mu}u(t)\right| &\leq \frac{1}{\Gamma(n\alpha)}\int_a^t \left|\log\frac{t}{\tau}\right|^{n\alpha-1}\left|\frac{\tau}{t}\right|^{\mu}u(\tau)\frac{d\tau}{\tau}\\
&\leq \frac{t^{-\mu}}{\Gamma(n\alpha)}\|u\|_{\mu,1-\alpha,\log}\int_a^t\left(\log\frac{t}{\tau}\right)^{n\alpha-1}\left(\log\frac{\tau}{a}\right)^{\alpha-1}\frac{d\tau}{\tau}\\
&\leq \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(n\alpha+\alpha)}t^{-\mu}\left(\log\frac{t}{\tau}\right)^{n\alpha+\alpha-1}.
\end{aligned}$$

quand $n \longrightarrow \infty$ alors

$$\begin{aligned}
&u(t)\\
=\;& ct^{-\mu}\Gamma(\alpha)\left[\tfrac{1}{\Gamma(\alpha)}(\log\tfrac{t}{a})^{\alpha-1}+\tfrac{1}{\Gamma(2\alpha)}(\log\tfrac{t}{a})^{2\alpha-1}+\cdots+\tfrac{1}{\Gamma(n\alpha)}(\log\tfrac{t}{a})^{n\alpha-1}+\cdots\right]\\
=\;& ct^{-\mu}\Gamma(\alpha)\left[\tfrac{1}{\Gamma(\alpha)}(\log\tfrac{t}{a})^{\alpha-1}+\tfrac{1}{\Gamma(2\alpha)}(\log\tfrac{t}{a})^{2\alpha-1}+\cdots+\tfrac{1}{\Gamma(n\alpha)}(\log\tfrac{t}{a})^{n\alpha-1}+\cdots\right]\\
\times\;& \left(\log\frac{t}{a}\right)^{\alpha-1}\left(\log\frac{t}{a}\right)^{1-\alpha}\\
=\;& ct^{-\mu}\Gamma(\alpha)E_{\alpha,\alpha}\left(\left(\log\frac{t}{a}\right)^{\alpha}\right)\left(\log\frac{t}{a}\right)^{\alpha-1}.
\end{aligned}$$

D'autre part, on a :

$$u(t_0) = ct_0^{-\mu}\Gamma(\alpha)E_{\alpha,\alpha}\left(\left(\log\frac{t_0}{a}\right)^{\alpha}\right)\left(\log\frac{t_0}{a}\right)^{\alpha-1} = u_0.$$

Donc

$$c = u_0t_0^{\mu}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left(E_{\alpha,\alpha}\left(\left(\log\frac{t_0}{a}\right)^{\alpha}\right)\right)^{-1}\left(\log\frac{t_0}{a}\right)^{1-\alpha}$$

Par conséquent

$$u(t) = u_0t_0^{\mu}\left(\log\frac{t_0}{a}\right)^{1-\alpha}\left(E_{\alpha,\alpha}\left(\left(\log\frac{t}{a}\right)^{\alpha}\right)\right)^{-1}t^{-\mu}\left(\log\frac{t}{a}\right)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}\left(\left(\log\frac{t}{a}\right)^{\alpha}\right).$$

Théorème 3.1.2 *Si $\gamma \geq 1-\alpha$ et $f(\cdot) \in C_{\mu,\gamma,\log}[a,b]$ le problème avec condition*

$$\begin{cases} {}^H D^{\alpha}_{a,\mu} u(t) = f(t,u(t)), & a < t \leq b, \\ u(t_0) = u_0, & a < t_0 \leq b, \end{cases} \tag{3.8}$$

admet une unique solution dans $C_{\mu,1-\alpha,\log}[a,b]$ de la forme intégrale suivante :

$$u(t) = ct^{-\mu}\left(\log\frac{t}{a}\right)^{\alpha-1} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t \left(\frac{\tau}{t}\right)^{\mu}\left(\log\frac{t}{\tau}\right)^{\alpha-1} f(\tau)\frac{d\tau}{\tau}, \tag{3.9}$$

où $$c = \left(u_0 - \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^{t_0}\left(\frac{\tau}{t_0}\right)^{\mu}\left(\log\frac{t_0}{\tau}\right)^{\alpha-1} f(\tau)\frac{d\tau}{\tau}\right) t_0^{\mu}\left(\log\frac{t_0}{a}\right)^{1-\alpha}.$$

Preuve On a :

$${}^H D^{\alpha}_{a,\mu} u(t) = f(t,u(t)).$$

En appliquant l'opérateur ${}^H I^{\alpha}_{a^+,\mu}$ aux deux membres de l'égalité on a :

$${}^H I^{\alpha}_{a,\mu}.{}^H D^{\alpha}_{a,\mu} u(t) = {}^H I^{\alpha}_{a,\mu} f(t,u(t)).$$

Par suite

$$u(t) + ct^{-\mu}\left(\log\frac{t}{a}\right)^{\alpha-1} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t \left(\frac{\tau}{t}\right)^{\mu}\left(\log\frac{t}{\tau}\right)^{\alpha-1} f(\tau)\frac{d\tau}{\tau}.$$

Ainsi

$$u(t) = ct^{-\mu}\left(\log\frac{t}{a}\right)^{\alpha-1} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t \left(\frac{\tau}{t}\right)^{\mu}\left(\log\frac{t}{\tau}\right)^{\alpha-1} f(\tau)\frac{d\tau}{\tau}.$$

D'autre part, on a :

$$u(t_0) = u_0 = ct_0^{-\mu}\left(\log\frac{t_0}{a}\right)^{\alpha-1} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^{t_0} \left(\frac{\tau}{t_0}\right)^{\mu}\left(\log\frac{t_0}{\tau}\right)^{\alpha-1} f(\tau)\frac{d\tau}{\tau}.$$

Donc

$$c = \left(u_0 - \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^{t_0}\left(\frac{\tau}{t_0}\right)^{\mu}\left(\log\frac{t_0}{\tau}\right)^{\alpha-1} f(\tau)\frac{d\tau}{\tau}\right) t_0^{\mu}\left(\log\frac{t_0}{a}\right)^{1-\alpha}.$$

3.2 Existence et l'unicité de la solution pour une équation différentielle fractionnaire avec un paramètre

Dans cette section, nous allons étudier l'existence et l'unicité de la solution d'un problème aux valeurs initiales, pour des équations différentielles fractionnaires au sens de Hadamard dans le cas $0 < \alpha < 1$ et $\mu \neq 0$. Nous considérons le problème suivant :

$$\begin{cases} {}^{H}D^{\alpha}_{a\cdot\mu}u(t) = f(t,u(t)), & a < t \leq b, \\ u(t_0) = u_0, & a < t_0 \leq b, \end{cases} \tag{3.10}$$

en supposant que $f(t,u(t))$ satisfait à la condition suivante :

$$(H_1) : \begin{cases} f(t,0) = 0, \\ |f(t,u) - f(t,v)| \leq L\,|u - v|\,, \end{cases}$$

où L est une constante positive.
Avant de présenter le résultat principal du système nous donnons le lemme suivant :

Théorème 3.2.1 *Supposons que f satisfait l'hypothèse (H_1) le problème (3.10) admet une solution unique donnée par :*

$$u(t) = ct^{-\mu}\left(\log\frac{t}{a}\right)^{\alpha-1} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t \left(\frac{\tau}{t}\right)^{\mu}\left(\log\frac{t}{\tau}\right)^{\alpha-1} f(\tau)\frac{d\tau}{\tau}, \tag{3.11}$$

avec $u(\cdot) \in C_{\mu,1-\alpha,\log}[a,b]$.

Preuve La preuve sera dévisée en trois étapes

Etape 1 : On définit l'opérateur suivant :

$$B_{c,\mu} : C_{\mu,1-\alpha,\log} \longrightarrow C_{\mu,1-\alpha,\log}, \tag{3.12}$$

tel que

$$(B_{c,\mu}u)(t) = ct^{-\mu}\left(\log\frac{t}{a}\right)^{\alpha-1} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t \left(\frac{\tau}{t}\right)^{\mu}\left(\log\frac{t}{\tau}\right)^{\alpha-1} f(\tau,u(\tau))\frac{d\tau}{\tau} \tag{3.13}$$

. **Etape 2 :** Montrons que

$$B_{c,\mu} : C_{\mu,1-\alpha,\log} \longrightarrow C_{\mu,1-\alpha,\log} \tag{3.14}$$

est bien défini.
On a :

$$\begin{aligned}
\|(B_{c,\mu}u)(t)\|_{\mu,1-\alpha,\log} &\leq |c| + \frac{L}{\Gamma(\alpha)} \left|\log \frac{t}{a}\right|^{1-\alpha} \int_a^t \tau^{\mu} \left(\log \frac{t}{\tau}\right)^{\alpha-1} |u(\tau)| \frac{d\tau}{\tau} \\
&\leq |c| + \frac{L \left(\log \frac{t}{a}\right)^{1-\alpha} \|u\|_{\mu,1-\alpha,\log}}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \left(\log \frac{t}{\tau}\right)^{\alpha-1} (\log \frac{\tau}{a})^{\alpha-1} \frac{d\tau}{\tau} \\
&\leq |c| + \frac{L \left(\log \frac{b}{a}\right)^{\alpha} \Gamma(\alpha)}{\Gamma(2\alpha)} \|u\|_{\mu,1-\alpha,\log}.
\end{aligned}$$

Nous avons utilisé $|f(t,u)| \leq L\,|u|$ par l'hypothèse (H_1).

Etape 3
On montre maintenant que $B^n_{c,\mu}$ est contractante , pour n suffisamment grand
.
Soient $u, v \in C_{\mu,1-\alpha,\log}[a,b]$ on a :

$$t^{\mu}(\log \frac{t}{a})^{1-\alpha} \left|(B_{c,\mu}u(t) - B_{c,\mu}v(t))\right| \leq \frac{L \left(\log \frac{t}{a}\right)^{\alpha} \Gamma(\alpha)}{\Gamma(2\alpha)} \|u - v\|_{\mu,1-\alpha,\log}, \tag{3.15}$$

avec $t \in [a,b]$.
Supposons que pour un certain entier n on a :

$$t^{\mu} \left(\log \frac{t}{a}\right)^{1-\alpha} \left|(B^n_{c,\mu}u(t) - B^n_{c,\mu}v(t))\right| \leq \frac{L^n \left(\log \frac{t}{a}\right)^{n\alpha} \Gamma(\alpha)}{\Gamma((n+1)\alpha)} \|u - v\|_{\mu,1-\alpha,\log}$$

Alors on obtient :

$$t^{\mu}\left(\log\tfrac{t}{a}\right)^{1-\alpha}\left|(B^{n+1}_{c,\mu}u(t)-B^{n+1}_{c,\mu}v(t))\right| = t^{\mu}\left(\log\tfrac{t}{a}\right)^{1-\alpha}\left|(B\circ B^{n}_{c,\mu}u(t)-B\circ B^{n}_{c,\mu}v(t))\right|$$

$$\leq \frac{t^{\mu}}{\Gamma(\alpha)}\left(\log\frac{t}{a}\right)^{1-\alpha}\int_a^t\left(\frac{\tau}{t}\right)^{\mu}\left(\log\frac{t}{\tau}\right)^{\alpha-1}\left|f(\tau,B^{n}_{c,\mu}u(\tau))-f(\tau,B^{n}_{c,\mu}v(\tau))\right|\frac{d\tau}{\tau}$$

$$\leq \frac{L^{n+1}}{\Gamma((n+1)\alpha)}\left\|u-v\right\|_{\mu,1-\alpha,\log}\int_a^t\left(\log\frac{t}{\tau}\right)^{\alpha-1}(\log\frac{\tau}{a})^{n\alpha+\alpha-1}\frac{d\tau}{\tau}$$

$$\leq \frac{L^{n+1}\Gamma(\alpha)}{\Gamma((n+2)\alpha)}\left(\log\frac{t}{a}\right)^{((n+1)\alpha)}\left\|u-v\right\|_{\mu,1-\alpha,\log}.$$

Ce qui achève la démonstration.
Donc

$$\left\|(B^{n}_{c,\mu}u)(t)-(B^{n}_{c,\mu}v)(t))\right\|_{\mu,1-\alpha,\log}\leq\frac{L^{n}\Gamma(\alpha)}{\Gamma((n+1)\alpha)}\left(\log\frac{b}{a}\right)^{n\alpha}\left\|u-v\right\|_{\mu,1-\alpha,\log}.$$

Donc il existe un $n\in\mathbb{N}^*$ tel que $\dfrac{L^{n}\left(\log\frac{b}{a}\right)^{n\alpha}}{\Gamma((n+1)\alpha)}<1$ car $\left(\lim\limits_{n\longrightarrow\infty}\dfrac{L^{n}\left(\log\frac{b}{a}\right)^{n\alpha}}{\Gamma((n+1)\alpha)}=0\right)$
Par le principe de contraction de Banach, on conclut que $B^{n}_{c,\mu}$ est un opérateur contractant.
Par conséquent nous donnons la conclusion suivante pour le système (3.10).

Théorème 3.2.2 [10] *Si f est vérifié (H_1) avec condition initiale, (3.10) admet une unique solution $u(\cdot)\in C_{\mu,1-\alpha,\log}[a,b]$ donnée par :*

$$u(t)=ct^{-\mu}\left(\log\frac{t}{a}\right)^{\alpha-1}+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t\left(\frac{\tau}{t}\right)^{\mu}\left(\log\frac{t}{\tau}\right)^{\alpha-1}f(\tau)\frac{d\tau}{\tau}. \tag{3.16}$$

Où $c=(u_0-\dfrac{1}{\Gamma(\alpha)}\displaystyle\int_a^{t_0}\left(\frac{\tau}{t_0}\right)^{\mu}\left(\log\frac{t_0}{\tau}\right)^{\alpha-1}f(\tau)\frac{d\tau}{\tau})t_0^{\mu}\log\left(\frac{t_0}{a}\right)^{1-\alpha}.$

Preuve On peut utiliser le Lemme 3.2.1 pour achever cette démonstration.

Exemple 3 *On considérons le problème suivant :*

$$\begin{cases} {}^{H}D^{\frac{1}{2}}_{1^+,\frac{1}{2}}u(t)=\frac{1}{6}\sin(u), \quad 1\leq t\leq 2,\\ u(1.5)=1, \end{cases}$$

Un calcul simple nous montre que l'hypothèse (H_1) *est vérifiée*

$$\begin{cases} f(t,0)=0, \\ |f(t,u)-f(t,v)| \leq \frac{1}{6}|u-v|, \end{cases}$$

Donc, d'après le Théorème 3.2 ce problème a une solution unique dans $C_{\frac{1}{2},\frac{1}{2},\log}[1,2]$*, ceci implique que la condition de la valeur initiale est bien posée.*

Chapitre 4

Existence de solution pour une équation différentielle fractionnaire avec poids

4.1 Équation différentielle fractionnaire au sens de Hadamard avec poids

Théorème 4.1.1 [1] *Soit $\alpha > 0$, $n = -[-\alpha]$ et $0 \leq \gamma < 1$. Soit G un ouvert de $\mathbb{R}$ et $f :]a, b] \times G \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction telle que :$f(x) \in C_{\gamma,\log}[a, b]$ pour tout $y \in G$. Alors le problème*

$$\begin{cases} {}^{H}D^{\alpha}_{a^+}y(t) = f(t, y(t)), \\ {}^{H}I^{\alpha-k}y(a^+) = b_k, \qquad b_k \in \mathbb{R},\ (k = 1, \cdots, n). \end{cases} \tag{4.1}$$

Satisfait l'équation intégrale de Volterra

$$y(t) = \sum_{j=1}^{n} \frac{b_j}{\Gamma(\alpha - j + 1)} \left(\log \frac{t}{a}\right)^{\alpha-j} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \left(\log \frac{t}{s}\right)^{\alpha-1} f(s, y(s)) \frac{ds}{s}. \tag{4.2}$$

Pour $t > a > 0$ i.e $y(\cdot) \in C_{n-\alpha,\log}[a, b]$, satisfait le problème (4.1) si et seulement si elle satisfait l'équation intégrale de Volterra (4.2)avec un noyau faiblement singulier.

En particulier si $0 < \alpha \leq 1$, *le problème (4.1) équivaut à l'équation*

$$y(t) = \frac{b}{\Gamma(\alpha)}\left(\log\frac{t}{a}\right)^{\alpha-1} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t \left(\log\frac{t}{s}\right)^{\alpha-1} f(s, y(s))\frac{ds}{s}, \qquad s > \alpha > 0. \tag{4.3}$$

Théorème 4.1.2 *Soit* $0 < \alpha < 1$. *Supposons que* $f :]1, T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *est une fonction continue. Alors la solution du problème*

$$\begin{cases} {}^{H}D^{\alpha}y(t) = f(t, y(t)), \quad 1 \leq t \leq T,\ T > 1, \\ {}^{H}I^{1-\alpha}y(t)\mid_{t=1} = y_0. \end{cases} \tag{4.4}$$

est

$$y(t) = \frac{y_0}{\Gamma(\alpha)}(\log t)^{\alpha-1} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_1^t \left(\log\frac{t}{s}\right)^{\alpha-1} f(s, y(s))\frac{ds}{s}. \tag{4.5}$$

Théorème 4.1.3 *Soit* $f :]1, T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. *Supposons que :*
(H1) Il existe $l > 0$ *tel que :*

$$|f(t, u) - f(t, v)| \leq l\,|u - v|, \quad t \in [1, T].$$

Si $\dfrac{l\,(\log T)^{\alpha}\,\Gamma(\alpha)}{\Gamma(2\alpha)} < 1$, *alors il existe une unique solution du problème (4.4) sur* $[1, T]$.

Preuve Considérons l'opérateur
$N : C_{1-\alpha,\log}([1, T], \mathbb{R}) \to C_{1-\alpha,\log}([1, T], \mathbb{R})$ définit par :

$$Ny(t) = \frac{y_0}{\Gamma(\alpha)}(\log t)^{\alpha-1} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_1^t \left(\log\frac{t}{s}\right)^{\alpha-1} f(s, y(s))\frac{ds}{s}. \tag{4.6}$$

Pour appliquer le théorème du point fixe de Banach, nous avons besoin de vérifier que N est une contraction.

En effet, pour tout $u, v \in C_{1-\alpha,\log}([1,T],\mathbb{R})$ et $\forall t \in [1,T]$, on a :

$$\begin{aligned}
& (\log t)^{1-\alpha} \left| Nu(t) - Nv(t) \right| \\
\leq \; & \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left(\log \frac{t}{a}\right)^{1-\alpha} \int_1^t \left(\log \frac{t}{s}\right)^{\alpha-1} \left| f(s,u(s)) - f(s,v(s)) \right| \frac{ds}{s} \\
\leq \; & \frac{l}{\Gamma(\alpha)} (\log t)^{1-\alpha} \int_1^t \left(\log \frac{t}{s}\right)^{\alpha-1} \left| u(s)) - v(s)) \right| \frac{ds}{s} \\
\leq \; & \frac{l}{\Gamma(\alpha)} (\log t)^{1-\alpha} \left\| u - v \right\|_{1-\alpha,\log} \int_1^t \left(\log \frac{t}{s}\right)^{\alpha-1} (\log s)^{\alpha-1} \frac{ds}{s} \\
\leq \; & \frac{l \,(\log T)^{\alpha}\, \Gamma(\alpha)}{\Gamma(2\alpha)} \left\| u - v \right\|_{1-\alpha,\log}.
\end{aligned}$$

Nous avons utilisé l'hypothèse $(H1)$ et on pose le changement de variable $\tau = \dfrac{\log t}{\log s}$. Par conséquent,

$$\left\| Nu - Nv \right\|_{1-\alpha,\log} \leq \frac{l \,(\log T)^{\alpha}\, \Gamma(\alpha)}{\Gamma(2\alpha)} \left\| u - v \right\|_{1-\alpha,\log}.$$

Donc, le théorème du point fixe de Banach nous assure l'existence d'un unique point fixe qui est l'unique solution du problème (4.4) .

Théorème 4.1.4 *Supposons que :*
(H2) $f :]1,T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *est une fonction continue.*

(H3) $|f(t,u)| \leq (\log t)^{1-\alpha} |u|, \quad \forall (t,u) \in [1,T] \times \mathbb{R}.$

(H4) Il existe $M > 0$ *tel que :*

$$\frac{M}{\dfrac{|y_0|}{\Gamma(\alpha)} E_{\alpha,1}\left((\log T)\right)} > 1.$$

Alors le problème (4.4) admet au moins une solution sur $[1,T]$.

Preuve La démonstration de ce théorème est basée sur l'Alternative non linéaire de Leray-Schauder. On définit l'opérateur
$N : C_{1-\alpha,\log}([1,T],\mathbb{R}) \to C_{1-\alpha,\log}([1,T],\mathbb{R})$ et montrons que l'opérateur

$$Ny(t) = \frac{y_0}{\Gamma(\alpha)}(\log t)^{\alpha-1} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_1^t \left(\log\frac{t}{s}\right)^{\alpha-1} f(s,y(s))\frac{ds}{s}. \tag{4.7}$$

est complètement continue.

Etape 1 N est continu
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que $u_n \to u$ dans $C_{1-\alpha,\log}([1,T],\mathbb{R})$. Alors pour chaque $t \in [1,T]$

$$\begin{aligned}
&(\log t)^{1-\alpha}|Nu_n(t) - Nu(t)| \\
\leq\ & \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left(\log\frac{t}{a}\right)^{1-\alpha}\int_1^t\left(\log\frac{t}{s}\right)^{\alpha-1}|f(s,u_n(s)) - f(s,u(s))|\frac{ds}{s} \\
\leq\ & \frac{1}{\Gamma(\alpha)}(\log t)^{1-\alpha}\|f(\cdot,u_n(\cdot)) - f(\cdot,u(\cdot))\|_{1-\alpha,\log}\int_1^t\left(\log\frac{t}{s}\right)^{\alpha-1}(\log s)^{\alpha-1}\frac{ds}{s} \\
\leq\ & \frac{(\log T)^{\alpha}\Gamma(\alpha)}{\Gamma(2\alpha)}\|f(\cdot,u_n(\cdot)) - f(\cdot,u(\cdot))\|_{1-\alpha,\log}.
\end{aligned}$$

Puisque f est continue, nous avons :

$$\|Nu_n - Nu\|_{1-\alpha,\log} \to 0,\ \text{quand}\, n \to \infty.$$

D'où la continuité de N.

Etape 2 L'image de tout ensemble borné par N est un ensemble borné dans $C_{1-\alpha,\log}([1,T],\mathbb{R})$.
En effet, il suffit de montrer que pour tout $\eta^* > 0$, il existe une constante $\tilde{l} > 0$ telle que pour tout $u \in B_{\eta^*}$,
$B_{\eta^*} = \left\{u \in C_{1-\alpha,\log}([1,T],\mathbb{R}) : \|u\|_{1-\alpha,\log} \leq \eta^*\right\}$, on a $\|Nu\|_{1-\alpha,\log} \leq \tilde{l}$.

Par $(H3)$, on a pour tout $t \in [1,T]$,

$$
\begin{aligned}
& (\log t)^{1-\alpha} |Nu(t)| \\
\leq\ & \frac{|u_0|}{\Gamma(\alpha)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} (\log t)^{1-\alpha} \int_1^t \left(\log \frac{t}{s}\right)^{\alpha-1} |f(s,u(s))| \frac{ds}{s} \\
\leq\ & \frac{|u_0|}{\Gamma(\alpha)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} (\log t)^{1-\alpha} \|u\|_{1-\alpha,\log} \int_1^t \left(\log \frac{t}{s}\right)^{\alpha-1} \frac{ds}{s} \\
\leq\ & \frac{|u_0|}{\Gamma(\alpha)} + \frac{\log T}{\Gamma(\alpha+1)} \eta^*.
\end{aligned}
$$

Donc

$$
\|Nu\|_{1-\alpha,\log} \leq \frac{|u_0|}{\Gamma(\alpha)} + \frac{\log T}{\Gamma(\alpha+1)} \eta^* = \tilde{l}.
$$

et par suite $N(B_{\eta^*})$ est borné.

Etape 3 L'image de tout ensemble borné par N est un ensemble équicontinue de $C_{1-\alpha,\log}([1,T],\mathbb{R})$.
Soient $t_1, t_2 \in]1,T]$, $t_1 < t_2$, B_{η^*} un ensemble borné de $C_{1-\alpha,\log}([1,T],\mathbb{R})$ et soit $u \in B_{\eta^*}$. Alors

$$
\begin{aligned}
& \left|(\log t_2)^{1-\alpha} Nu(t_2) - (\log t_1)^{1-\alpha} Nu(t_1)\right| \\
\leq\ & \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^{t_1} \left[\left(\log \frac{t_2}{s}\right)^{\alpha-1} (\log t_2)^{1-\alpha} - \left(\log \frac{t_1}{s}\right)^{\alpha-1} (\log t_1)^{1-\alpha} \right] \\
& |f(s,u(s))| \frac{ds}{s} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_1}^{t_2} \left(\log \frac{t_2}{s}\right)^{\alpha-1} (\log t_2)^{1-\alpha} |f(s,u(s))| \frac{ds}{s}.
\end{aligned}
$$

Quand $t_1 \to t_2$, le membre de droite de l'inégalité précédente tend vers 0, d'où $N(B_{\eta^*})$ est équicontinue. D'après les étapes 2 et 3 et le Théorème 1.2.2 $N(B_{\eta^*})$ est relativement compact pour tout borné B_{η^*}, c'est-à-dire $\overline{N(B_{\eta^*})}$ est compact, et d'après étape 1, N est continu. Par conséquent
$N : C_{1-\alpha,\log}([1,T],\mathbb{R}) \to C_{1-\alpha,\log}([1,T],\mathbb{R})$ est complètement continue.

Etape 4 Nous montrons que il existe un ouvert $U \subseteq C_{1-\alpha,\log}([1,T],\mathbb{R})$ avec

$u \neq \lambda Nu$ pour $\lambda \in]0,1[$ et $u \in \partial U$.
Soit $u \in C_{1-\alpha,\log}([1,T],\mathbb{R})$ et $u = \lambda Nu$ pour tout $0 < \lambda < 1$. Ainsi pour chaque $t \in [1,T]$, on a :

$$u(t) = \lambda \left(\frac{u_0}{\Gamma(\alpha)} \left(\log \frac{t}{a}\right)^{\alpha-1} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \left(\log \frac{t}{s}\right)^{\alpha-1} f(s,u(s)) \frac{ds}{s} \right).$$

Par (H4), pour chaque $t \in [1,T]$, on obtient :

$$\begin{aligned}
(\log t)^{1-\alpha} |u(t)| &\leq \frac{|u_0|}{\Gamma(\alpha)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} (\log t)^{1-\alpha} \int_1^t \left(\log \frac{t}{s}\right)^{\alpha-1} |f(s,u(s))| \frac{ds}{s} \\
&\leq \frac{|u_0|}{\Gamma(\alpha)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} (\log t)^{1-\alpha} \int_1^t \left(\log \frac{t}{s}\right)^{\alpha-1} (\log s)^{1-\alpha} |u(s)| \frac{ds}{s}.
\end{aligned}$$

D'après l'inégalité de Gronwall, on a :

$$\begin{aligned}
(\log t)^{1-\alpha} |u(t)| &\leq \frac{|u_0|}{\Gamma(\alpha)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} (\log t)^{1-\alpha} \int_1^t \left(\log \frac{t}{s}\right)^{\alpha-1} (\log s)^{1-\alpha} |u(s)| \frac{ds}{s} \\
&\leq \frac{|u_0|}{\Gamma(\alpha)} E_{\alpha,1}\left((\log t)\right) \\
&\leq \frac{|u_0|}{\Gamma(\alpha)} E_{\alpha,1}\left((\log T)\right).
\end{aligned}$$

Donc

$$\frac{\|u\|_{1-\alpha,\log}}{\frac{|u_0|}{\Gamma(\alpha)} E_{\alpha,1}\left((\log T)\right)} \leq 1.$$

D'après (H4), il existe M tel que $\|u\|_{1-\alpha,\log} \neq M$, on définit un ouvert

$$U = \left\{ u \in C_{1-\alpha,\log}([1,T],\mathbb{R}), \|u\|_{1-\alpha,\log} < M \right\}.$$

et considérons l'opérateur $N : \overline{U} \to C_{1-\alpha,\log}([1,T],\mathbb{R})$ et par choix de U il n'y a aucune $u \in \partial U$ tel que : $u = \lambda Nu$ pour certains $0 < \lambda < 1$. Par conséquent le théorème de Alternative non linéaire de Leray-Schauder affirme l'existence d'un point fixe $u \in \partial U$ qui est une solution du problème (4.4).

Chapitre 5

Existence de solution pour une classe de problèmes aux valeurs initiales d'ordre fractionnaire

On étudie ici l'existence et la dépendance continue de la solution par rapport à la donnée initiale pour un problème de Cauchy d'ordre fractionnaire au sens de Hadamard.

5.1 Problème aux valeurs initiales des équations différentielles hybrides de type Hadamard

Dans cette section nous étudions l'existence des solutions pour un problème aux valeurs initiales des équations aux dérivées fractionnaires Hybrides de type Hadamard donné par :

$$\begin{cases} {}^{H}D^{\alpha}\left(\dfrac{x(t)}{f(t,x(t))}\right) = g(t,x(t)), \quad 1 \leq t \leq T, \quad 0 < \alpha < 1, \\ {}^{H}I^{1-\alpha}x(t) \mid_{t=1} = \eta, \end{cases} \tag{5.1}$$

où ${}^{H}D^{\alpha}$ est la dérivée fractionnaire de type Hadamard
$f(\cdot) \in C_{1-\alpha,\log}([1,T] \times \mathbb{R}, \mathbb{R} \setminus \{0\})$ et $g(\cdot) \in C_{1-\alpha,\log}([1,T] \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$, ${}^{H}I$ l'intégrale fractionnaire de type Hadamard et $\eta \in \mathbb{R}$.

Lemme 5.1.1 *Soit $y(\cdot) \in C_{1-\alpha,\log}([1,T],\mathbb{R})$. La solution intégrale du problème aux valeurs initiales*

$$\begin{cases} {}^{H}D^{\alpha}\left(\dfrac{x(t)}{f(t,x(t))}\right) = y(t), \quad 1 < t < T, \\ {}^{H}I^{1-\alpha}x(t)\mid_{t=1} = \eta, \end{cases} \tag{5.2}$$

est donnée par :

$$x(t) = f(t,x(t))\left(\frac{\eta}{\Gamma(\alpha)}(\log t)^{\alpha-1} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_1^t \left(\log\frac{t}{s}\right)^{\alpha-1}\frac{y(s)}{s}ds\right), \quad t \in [1,T]. \tag{5.3}$$

Théorème 5.1.1 *Supposons que*

H1) La fonction $f :]1,T] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\backslash\{0\}$ bornée, continue et il existe une fonction bornée positive φ telle que :

$$|f(t,x(t)) - f(t,y(t))| \leq \varphi(t)\,|x(t) - y(t)|,$$

pour $t \in [1,T]$ et pour tous $x, y \in \mathbb{R}$.

H2) Il existe une fonction $p \in C([1,T],\mathbb{R}^+)$ et Ω fonction continue non décroissante $\Omega : [0,\infty) \longrightarrow (0,\infty)$ telle que :

$$|g(t,x(t))| \leq p(t)\Omega(|x|), \qquad (t,x) \in [1,T] \times \mathbb{R}.$$

H3) Il existe un nombre $r > 0$ telle que :

$$r \geq k\left[\frac{|\eta|}{\Gamma(\alpha)} + \log(T)\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\|p\|\,\Omega(r)\right] \tag{5.4}$$

où $|f(t,x(t))| \leq k$, $\forall (t,x) \in [1,T] \times \mathbb{R}$.

H4)

$$\|\varphi\|\left[\frac{|\eta|}{\Gamma(\alpha)} + \log(T)\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\|p\|\,\Omega(r)\right] < 1.$$

Alors le problème (5.1) admet au moins une solution sur $[1,T]$.

Preuve Soit $X = C_{1-\alpha,\log}([1,T]\times\mathbb{R})$ et on définit un sous ensemble S de X par : $S = \left\{x \in X,\ \|x\|_{1-\alpha,\log} \leq r\right\}$ où r satisfait l'inégalité (5.4).
Il est clair que S est un sous ensemble convexe borné et fermé de l'espace de

Banach X.
Par le Lemme 5.1.1 le problème (5.1) est équivalent à l'équation intégrale quadratique.

$$x(t)=f(t,x(t))\left(\frac{\eta}{\Gamma(\alpha)}(\log t)^{\alpha-1}+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_1^t\left(\log\frac{t}{s}\right)^{\alpha-1}\frac{g(s,x(s))}{s}ds\right),\quad t\in[1,T]. \tag{5.5}$$

On définit deux l'opérateur $A : X \to X$, par :

$$Ax(t)=f(t,x(t)),\qquad t\in[1,T]. \tag{5.6}$$

et $B : S \longrightarrow X$ par :

$$Bx(t)=\frac{\eta}{\Gamma(\alpha)}(\log t)^{\alpha-1}+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_1^t\left(\log\frac{t}{s}\right)^{\alpha-1}\frac{g(s,x(s))}{s}ds. \tag{5.7}$$

Puis $x=(A\cdot B)(x)$ et nous montrons que les opérateurs A et B satisfont toutes les conditions du Théorème 1.3.4.

Etape 1 : Montrons que A est lipschitzien sur X .
Soient $x, y \in X$, nous avons ensuite par (H1) :

$$\begin{aligned}
&\left|(\log(t))^{1-\alpha}Ax(t)-(\log(t))^{1-\alpha}Ay(t)\right|\\
=\ & (\log(t))^{1-\alpha}\left|f(t,x(t)-f(t,y(t))\right|\\
\le\ & \varphi(t)\,(\log(t))^{1-\alpha}\left|x(t)-y(t)\right|\\
\le\ & \|\varphi\|\,\|x-y\|_{1-\alpha,\log}.
\end{aligned}$$

Alors A est lipschitzienne avec $\|\varphi\|$ constant de Lipschitz.

Etape 2 : Montrons que l'opérateur B est complètement continue.
Montrons d'abord que B est continue sur S.
Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans S convergente vers $x \in S$, d'après le théorème

de convergence dominée on a :

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} (\log(t))^{1-\alpha} Bx_n(t) \\
= &\lim_{n\to\infty} \left(\frac{\eta}{\Gamma(\alpha)} + (\log(t))^{1-\alpha} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^t \left(\log \frac{t}{s}\right)^{\alpha-1} \frac{g(s, x_n(s))}{s} ds \right) \\
= &\left(\frac{\eta}{\Gamma(\alpha)} + (\log(t))^{1-\alpha} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^t \left(\log \frac{t}{s}\right)^{\alpha-1} \frac{\lim_{n\to\infty} g(s, x_n(s))}{s} ds \right) \\
= &\left(\frac{\eta}{\Gamma(\alpha)} + (\log(t))^{1-\alpha} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^t \left(\log \frac{t}{s}\right)^{\alpha-1} \frac{g(s, x(s))}{s} ds \right) \\
= &(\log(t))^{1-\alpha} Bx(t).
\end{aligned}$$

Donc B est continue.
Il suffit de montre que $B(S)$ est uniformément borné est équicontinu dans X. On a :

$$\begin{aligned}
&(\log(t))^{1-\alpha} |Bx(t)| \\
= &\left| \frac{\eta}{\Gamma(\alpha)} + (\log(t))^{1-\alpha} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^t \left(\log \frac{t}{s}\right)^{\alpha-1} \frac{g(s, x(s))}{s} ds \right| \\
\leq &\left[\frac{|\eta|}{\Gamma(\alpha)} + \|p\| \, \Omega(r) \, (\log(t))^{1-\alpha} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^t \left(\log \frac{t}{s}\right)^{\alpha-1} \frac{1}{s} ds \right] \\
\leq &\frac{|\eta|}{\Gamma(\alpha)} + (\log(T))^{T} \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \|p\| \, \Omega(r).
\end{aligned}$$

Donc

$$\|Bx\|_{1-\alpha,\log} \leq \frac{|\eta|}{\Gamma(\alpha)} + (\log(T))^{T} \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \|p\| \, \Omega(r).$$

$B(S)$ est uniformément borné sur S.
Ensuite, nous montrons que $B(S)$ est équicontinu dans X, soit $\tau_1, \tau_2 \in [1, T]$

avec $x \in S$, alors on a :

$$\begin{aligned}
&\left|(\log(\tau_2))^{1-\alpha}(Bx)(\tau_2) - (\log(\tau_1))^{1-\alpha}(Bx)(\tau_1)\right| \\
\leq\ & \frac{\|p\|\,\Omega(r)}{\Gamma(\alpha)}\left|\int_1^{\tau_2}(\log(\tau_2))^{1-\alpha}\left(\log\frac{\tau_2}{s}\right)^{\alpha-1}\frac{ds}{s} - \int_1^{\tau_1}(\log(\tau_1))^{1-\alpha}\left(\log\frac{\tau_1}{s}\right)^{\alpha-1}\frac{ds}{s}\right| \\
\leq\ & \frac{\|p\|\,\Omega(r)}{\Gamma(\alpha)}\left|\int_1^{\tau_1}\left[(\log(\tau_2))^{1-\alpha}\left(\log\frac{\tau_2}{s}\right)^{\alpha-1} - (\log(\tau_1))^{1-\alpha}\left(\log\frac{\tau_1}{s}\right)^{\alpha-1}\right]\frac{ds}{s}\right| \\
+\ & \frac{\|p\|\,\Omega(r)}{\Gamma(\alpha)}\left|\int_{\tau_1}^{\tau_2}(\log(\tau_2))^{1-\alpha}\left(\log\frac{\tau_2}{s}\right)^{\alpha-1}\frac{1}{s}ds\right|.
\end{aligned}$$

Donc la partie droite de l'inégalité tend vers 0 quand $\tau_2 \longrightarrow \tau_1$.
Par conséquent d'après le Théorème 1.2.2 $B(S)$ est relativement compact.
D'où B est compact. Ainsi B est complètement continue.

Etape 3 : Montrons que la condition (c) est vérifiée
Soit $x \in X$ et $y \in S$ tels que $x = Ax \cdot By$, on a :

$$\begin{aligned}
&(\log(t))^{1-\alpha}|x(t)| = (\log(t))^{1-\alpha}|Ax(t)|\,|By(t)| \\
=\ & |f(t,x(t))|\left|\left(\frac{\eta}{\Gamma(\alpha)} + (\log(t))^{1-\alpha}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_1^t\left(\log\frac{t}{s}\right)^{\alpha-1}\frac{g(s,y(s))}{s}ds\right)\right| \\
\leq\ & k|\left|\left(\frac{\eta}{\Gamma(\alpha)} + (\log(t))^{1-\alpha}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_1^t\left(\log\frac{t}{s}\right)^{\alpha-1}\frac{g(s,y(s))}{s}ds\right)\right| \\
\leq\ & k\left[\frac{|\eta|}{\Gamma(\alpha)} + (\log(t))^{1-\alpha}\|p\|\,\Omega(r)\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_1^t\left(\log\frac{t}{s}\right)^{\alpha-1}\frac{ds}{s}\right] \\
\leq\ & k\left[\frac{|\eta|}{\Gamma(\alpha)} + \log(T)\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\|p\|\,\Omega(r)\right].
\end{aligned}$$

Donc

$$\|x\|_{1-\alpha,\log} \leq k\left[\frac{|\eta|}{\Gamma(\alpha)} + \log(T)\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\|p\|\,\Omega(r)\right] \leq r.$$

Autrement dit $x \in S$.

Etape 4 : Montrons que $Mk < 1$
Cela évident par (H4) puisque nous avons :

$$
\begin{aligned}
M &= \|B(s)\| = \sup\{\|B(s)\| : x \in S\} \\
&\leq \frac{|\eta|}{\Gamma(\alpha)} + \log(T)\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\|p\|\,\Omega(r), \qquad \textit{avec} \quad k = \|\varphi\|\,.
\end{aligned}
$$

Ainsi toute les conditions du Lemme 1.3.4 sont vérifiées, donc l'équation de l'opérateur $x = (A \cdot B)(x)$ admet une solution dans S.
Par conséquent, le problème (5.1) a une solution sur $[1, T]$.

Exemple 4 *On considère le problème suivant :*

$$
\begin{cases}
{}^{H}D^{\frac{1}{2}}\left(\dfrac{x(t)}{f(t,x(t))}\right) = g(t,x(t)), \quad 1 < t < e, \\
{}^{H}I^{\frac{1}{2}}x(t)\mid_{t=1} = 1.
\end{cases}
\tag{5.8}
$$

Où $f(t,x) = \dfrac{1}{5\sqrt{\pi}}\left(\sin(t)\tan^{-1}(x) + \dfrac{\pi}{2}\right)$
$g(t,x) = \dfrac{1}{10}\left(\dfrac{1}{16}|x| + \dfrac{1}{8}\cos(x) + \dfrac{|x|}{4(1+|x|)} + \dfrac{1}{16}\right).$
On a $|f(t,x)| \leq \dfrac{\sqrt{\pi}}{5} = k,\ \|\varphi\| = \dfrac{1}{5\sqrt{\pi}}$ *et* $|g(t,x)| \leq \dfrac{1}{10}\left(\dfrac{1}{16}|x| + \dfrac{7}{10}\right).$
Choisissons $\|p\| = \dfrac{1}{10}$ *et* $\Omega(r) = \dfrac{1}{6}r + \dfrac{7}{16}$.
Par la condition (H3) on obtient : $\dfrac{261}{1192} \leq r < \dfrac{3}{8}(400\pi - 87).$

Il est clair que toutes les conditions du théorème 5.1.1 sont vérifiées . Grâce au Théorème 5.1.1, il résulte que le problème (5.8) admet au moins une solution.

5.2 Dépendance des solutions aux paramètres

Dans cette section, nous étudions la dépendance de la solution sur l'ordre et la condition initiale d'équation différentielle fractionnaire avec la dérivée fractionnaire de type Hadamard. Maintenant nous considérons le problème fractionnaire suivant :

$$\begin{cases} {}^H D_1^{\alpha} y(t) = f(t, y(t)), \\ {}^H I_1^{1-\alpha} y(t) \mid_{t=1} = \eta, \end{cases} \tag{5.9}$$

avec $0 < \alpha < 1$, $1 < t < T \leq \infty$, $f : [1, T[\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
La solution de problème (5.9) est donnée par :

$$y(t) = \frac{\eta}{\Gamma(\alpha)} (\log t)^{\alpha-1} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^t \left(\log \frac{t}{\tau}\right)^{\alpha-1} f(\tau, y(\tau)) \frac{d\tau}{\tau}. \tag{5.10}$$

Théorème 5.2.1 *Soit $\alpha > 0$ et $\delta > 0$ tel que $0 < \alpha - \delta < \alpha \leq 1$. soit f une fonction continue et lipschitzienne par rapport à la deuxième variable :*

$$|f(t, y) - f(t, z)| \leq L\,|y - z|\,, \qquad t, y, z \in \mathbb{R}.$$

Pour $1 \leq t \leq h < T$. Supposons que y , z des solutions de problème au valeurs initiale (5.9) et

$$\begin{cases} {}^H D_1^{\alpha-\delta} z(t) = f(t, z(t)), \\ {}^H I_1^{1-(\alpha-\delta)} z(t) \mid_{t=1} = \tilde{\eta}, \end{cases} \tag{5.11}$$

alors pour $1 \leq t \leq h$, on a :

$$|z(t) - y(t)| \leq A(t) + \int_1^t \left[\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{L}{\Gamma(\alpha)} \Gamma(\alpha - \delta)^n \right)^n \frac{\left(\log \frac{t}{s}\right)^{n(\alpha-\delta)-1}}{\Gamma(n(\alpha - \delta))} A(s) \right] \frac{ds}{s},$$

avec

$$\begin{aligned} &A(t) \\ &= \left| \frac{\tilde{\eta}}{\Gamma(\alpha - \delta)} (\log t)^{\alpha-\delta-1} - \frac{\eta}{\Gamma(\alpha)} (\log t)^{\alpha-1} \right| + \left| \frac{(\log t)^{\alpha-\delta}}{(\alpha - \delta)\Gamma(\alpha)} \right| \|f\| \\ &+ \left| \frac{(\log t)^{\alpha-\delta}}{\alpha - \delta} \left[\frac{1}{\Gamma(\alpha - \delta)} - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \right] \right| \|f\|\,. \end{aligned}$$

et $\qquad \|f\| = \max_{1 \leq t \leq h} |f(t, y(t))|$.

Preuve Les solutions du problème (5.9) et (5.11) sont :

$$y(t) = \frac{\eta}{\Gamma(\alpha)}(\log t)^{\alpha-1} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_1^t \left(\log\frac{t}{\tau}\right)^{\alpha-1} f(\tau, y(\tau))\frac{d\tau}{\tau}$$

et

$$z(t) = \frac{\tilde{\eta}}{\Gamma(\alpha-\delta)}(\log t)^{\alpha-\delta-1} + \frac{1}{\Gamma(\alpha-\delta)}\int_1^t \left(\log\frac{t}{\tau}\right)^{\alpha-\delta-1} f(\tau, z(\tau))\frac{d\tau}{\tau}.$$

Donc, on a :

$$\begin{aligned}
& |z(t) - y(t)| \\
\leq\ & \left|\frac{\tilde{\eta}}{\Gamma(\alpha-\delta)}(\log t)^{\alpha-\delta-1} - \frac{\eta}{\Gamma(\alpha)}(\log t)^{\alpha-1}\right| \\
+\ & \left|\frac{1}{\Gamma(\alpha-\delta)}\int_1^t \left(\log\frac{t}{\tau}\right)^{\alpha-\delta-1} f(\tau, z(\tau))\frac{d\tau}{\tau} - \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_1^t \left(\log\frac{t}{\tau}\right)^{\alpha-\delta-1} f(\tau, z(\tau))\frac{d\tau}{\tau}\right| \\
+\ & \left|\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_1^t \left(\log\frac{t}{\tau}\right)^{\alpha-1} f(\tau, z(\tau))\frac{d\tau}{\tau} - \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_1^t \left(\log\frac{t}{\tau}\right)^{\alpha-\delta-1} f(\tau, y(\tau))\frac{d\tau}{\tau}\right| \\
+\ & \left|\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_1^t \left(\log\frac{t}{\tau}\right)^{\alpha-\delta-1} f(\tau, y(\tau))\frac{d\tau}{\tau} - \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_1^t \left(\log\frac{t}{\tau}\right)^{\alpha-1} F(\tau, y(\tau))\frac{d\tau}{\tau}\right| \\
\leq\ & A(t) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_1^t \left(\log\frac{t}{\tau}\right)^{\alpha-\delta-1} L\,|z(\tau) - y(\tau)|\,\frac{d\tau}{\tau},
\end{aligned}$$

Avec

$$\begin{aligned}
& A(t) \\
=\ & \left|\frac{\tilde{\eta}}{\Gamma(\alpha-\delta)}(\log t)^{\alpha-\delta-1} - \frac{\eta}{\Gamma(\alpha)}(\log t)^{\alpha-1}\right| + \left|\frac{(\log t)^{\alpha-\delta}}{(\alpha-\delta)\Gamma(\alpha)}\right| \|f\| \\
+\ & \left|\frac{(\log t)^{\alpha-\delta}}{\alpha-\delta}\left[\frac{1}{\Gamma(\alpha-\delta)} - \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right]\right| \|f\|.
\end{aligned}$$

D'après le Corrollaire 1 :

$$|z(t)-y(t)| \leq A(t)+\int_1^t \left[\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{L}{\Gamma(\alpha)}\Gamma(\alpha-\delta)^n\right)^n \frac{\left(\log\frac{t}{s}\right)^{n(\alpha-\delta)-1}}{\Gamma(n(\alpha-\delta))}A(s)\right]\frac{ds}{s}.$$

Exemple 5 *On pose*

$$\begin{cases} {}^H D_1^1 y(t) = y(t), \\ {}^H I_1^0 y(t) \mid_{t=1} = 1, \end{cases} \tag{5.12}$$

$$\begin{cases} {}^H D_1^{1-\delta} x(t) = x(t), \\ {}^H I_1^{-\delta} x(t) \mid_{t=1} = 1, \end{cases} \tag{5.13}$$

avec $1 \leq t < T \leq \infty$ *;* $\delta \in \mathbb{R}^+$*.*
Donc d'après Théorème 5.2.1, on obtient :

$$\begin{aligned} & A(t) \\ = \ & \left|\frac{1}{\Gamma(1-\delta)}(\log t)^{-\delta}-1\right| + \left|\frac{(\log t)^{1-\delta}}{(1-\delta)}-\log t\right| \|x\| \\ + \ & \left|\frac{(\log t)^{1-\delta}}{1-\delta}\left[\frac{1}{\Gamma(1-\delta)}-1\right]\right| \|y\|. \end{aligned}$$

Quand $\delta \longrightarrow 0$ *et* $t \in [1, T[$ *on obtient* $A(t) \longrightarrow 0$ *et*

$$|x(t)-y(t)| = \left|e^{\log t} - \frac{1}{\Gamma(1-\delta)}(\log t)^{-\delta}E_{1-\delta}((\log t)^{1-\delta})\right| \longrightarrow \left|e^{\log t}-e^{\log t}\right| = 0.$$

Alors l'équation différentielle fractionnaire de type Hadamard est dépendante à la fois des conditions initiales et de l'ordre de la dérivée.

Conclusion

Notre but principal, dans ce mémoire est de présenter plusieurs résultats d'existence pour certaines classes d'équations différentielles d'ordre fractionnaires au sens de Hadamard avec des conditions aux valeurs initiales.
Ce résultat on été obtenus par l'utilisation de la théorie de point fixe, en particulier on a utilisé le théorème de point fixe de Banach, Alternative non linéaire de Leray-Schauder et le théorème de Dhage.

Bibliographie

[1] A.A.Kilbas, H.M.Srivastava and J.J.Trujillo, Theory and Applications of fractional differential Equation, North-Holland Mathematics Studies 204, Elesevier science, Amesterdam. 2006.

[2] A. A. Kilbas. Hadamard Type Fractional Calculus. J. Korean Math, Soc 38. 1191-1204. 2001.

[3] A. Kolmogorov and S. Fomine, Élement de la Théorie des Fonctions de l'Analyse Fonctionnelle, Edition MIR, Moscou . 1973.

[4] B. Ahmad, A. Alseadi, S. K. Ntouyes and J. Tariboon, Hadamard-Type Fractional Differential Equation Inclusion and Inequalities, Springer. 2017.

[5] B. Dhage, On a Fixed Point Theorem in Algebras with Application, Appl. Math. Lett 18, 273-280. 2005.

[6] C. Corduneanu, Principe of Differential and Integral Equation. Allyn And Bacon, Inc. Boston. 1971.

[7] G. Wang and T. Wanq, On a Nonlinear Hadamard Type Fractional Differential Equation with p-Laplacian Operateur and Strip Condition, J. Nonlinear. Sci. Appl, 5073-5081. 2016.

[8] H. Brezis, Analyse Fonctionnelle Théorie et Applications, Masson, Paris. 1983.

[9] H. Ye, J, Gao and Y. Ding. A Generaliezd Gronwall Inequality and ites Application to a Fractional Differential Eguation. J. Math. Anal. Appl. 328, 1075-1081. 2007.

[10] L. MA* and C. LI, On Hadamard Fractional Calculus. Fractals, No. 3 (2017) 1750033 (16 pages) c, DOI : 10.1142/S0218348X17500335.

[11] S.Djebali, L. Górniewicz and A.Ouahab. Solution Sets for differential Equations and Inclusions, De Grayter. 2013.