République Algérienne **D**émocratique et **P**opulaire

Ministère de l'**E**nseignement **S**upérieur et de

La **R**echerche **S**cientifique

Université Ibn **K**haldoun-**T**iaret **-**

Faculté des Mathématiques et Informatiques

Département des Mathématiques

MEMOIRE EN VUE DE L'OBTENTION DU DIPLÔME DE MASTER

DOMAINE : Mathématique et Informatique.

FILIERE : MATHEMATIQUES

SPECIALITE : ANALYSE FONCTIONNELLE ET APPLICATIONS

Présenté par :

Yahia Nadjet — Benmokhtar Imane

Brahim Widad — Benaouda Meriem

Sujet du mémoire

L' OPERATEUR DE HARDY DANS CERTAINS ESPACES FONCTIONNELS

Soutenu le 16/05/2018 Devant le jury composé de :

M. Senouci Abdelkader	Président
M. Halim Benali	Encadreur
M. MazzouzeKadda	Examinateur

Année Universitaire 2017/2018

DEDICACES

Nous dédions ce travail

A nos parents pour leur soutien, leur patience et leur encouragement durant notre parcours scolaire.

A nos sœurs et nos frères ainsi qu'à toutes nos familles :

Benaouda, Yahia, Brahim et Benmokhtar

Et leurs proches à tous nos amis et l'ensemble des étudiants de la promotion master LMD/MI : 2017/2018.

Nous remercions tous

Remerciements

Avant tout, nous remercions Allah de nous avoir donné du savoir et du courage pour accomplir ce travail.

Nos remerciements les plus avoués à notre promoteur Dr :B.Halim , d'avoir accepté et supporté la charge d'encadrer notre travail avec une grande patience.

Un grand merci pour les membres qui nous ont fait l'honneur de faire partie du Jury.

Ainsi, nous tenons à remercier l'ensemble des enseignants de la faculté des Mathématiques et informatique - Université de Tiaret.

A tous ceux qui ont contribué de loin ou de prés pour la réalisation de ce travail

Table des matières

Bibliographie

[1] Bennett, C, Sharpley,R. :Interpolation of Operators.Academic Press,Boston (1988).

[2] Boza,S.,Soria,J. :Solution to a conjecture on the norm of the Hardy operator minus the ibentity.J.Funct.Anal.260,1020-1028(2011).

[3] Carro,M.,Gogatishvili,A.,Martin,J.,Pick ,L. :Weighted inequalities involving two Hardy operators with applications to embeddings of function spaces.J.Oper .Theory 59,309-332(2008).

[4] Hardy,G.H.,Littlewood ,J.E.,Pólya,G, :Inequalities,2nd edn.Cambridge University Press ,Cambridge(1967).

[5] Kruglyak,N.,Setterqvist,E. :Sharp estimates for the identity minus Hardy operator on the cone of decreasing functions.Proc .Am .Math .Soc.136,2005-2013(2008).

[6] H.Y.Gao,C.Liu,H.Tian,A generalization of exponential class and its applications,Abstract Appl.Anal.,2013,Article ID :476309.

[7] B. Opic and A.Kufner,Hardy -Type Inequalities,Pitman Research Notes in Mathematics ,no.219,Long-man Scientific and Technical,Hrlow,1990.

[8] A. Kufner ,L.Maligranda,and L.E. Persson,The Hardy inequality-About its history and some related resultas, research report ,Lulea University of Technology ,Lulea,2006.

[9] V.I.Kolyada Optimal relationships between L_p-norms for the Hardy operator and its dual,Annali di Mathematica (2014) 193 :423-430.DOI 10.1007/s10231-012-0283-9.

[10] Gao Hongya Hardy Inequality for $L^{(\theta,\infty)}$ Space Mathematica Aeterna,Vol.4,2014,no.8,905-908.

0.1 Introduction

Le dévellopement de la célébre inégalité de Hardy dans sa forme discréte et continue durant la période $1906 - 1928$ a son propre histoire.

Les contribution des mathématiciens autre que G.Hardy , comme E.Landau , G.Polya , I.Schur , et M.Riesz sont importantes .

Dans ce mémoire on a considéré les opérateurs $H, \widetilde{H}$ dans leurs formes continues définis par :

$$\widetilde{H}, H : L_p(.) \longrightarrow L_p(.), (p > 1)$$

$$(Hf)(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt, (\widetilde{H})(x) = \frac{1}{x}\int_x^\infty f(t)dt$$

$$H : L^{\theta,\infty}(I) \longrightarrow L_p(I)$$

$$f \longmapsto (Hf)(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt \forall x \in (0,1)$$

Dans le 1^{er} chapitre , on rappelle quelque notions sur les espaces de lebesgue et certaines de leurs propriétés .Ces espaces ont de remarquables propriétes telles que : Complétude ,reflexivité , dualité , densité , séparabilité .

Ona aussi fait rappels á quelques inégalités intégrales qui jouent un rôle fondamontal dans les preuves des résultats (théorme, lemmes, propositions .....) telles que l'inégalité de Hölder , Inégalité de Minkowsky et des variants ,inégalité de Jensen pour les intégales .

Le chapitre deux est consacé á la définition des opérateurs H,$\widetilde{H}$ et l'etude de la bornétude de ces derniers dans les espaces fonctionnels $L_p(\mathbb{R}_+), L_p(\mathbb{R}), L_p(R^n)$,
$(1 < p < \infty), L_{q,u}(\mathbb{R}_+)$ dans $L_{p,v}(\mathbb{R}_+)$. et l'optémalité

Le 3^{eme} chapitre , est consacré á présenter endetail la relation entre la norme de l'opérateur H de Hardy et son dual $\widetilde{H}$ (voir définition ....) , aussi est cité une relation entre la norme de l'opérateur H et la norme de l'opérateur de diffirence :$(H - I)$, avec constante optimale.

Dans le chapitre quatre est étudié l'opérateur de Hardy dans l'espace fonctionel $L^{(\theta,\infty)}(I)$ dit grand espace de Lebesgue oú I est un interval et $\theta \in \mathbb{R}_{[0.\infty]}$

Chapitre 1

Notions sur les espaces L_p

Les espaces de Lebesgue notés par $L_p(0 < p \leq \infty)$ sont des espaces de fonctions , normés complets et des espaces hilbertiens (cas $p = 2$). Ils jouent un role assez important en analyse mathémathique et jouissent de remarquable proprietés.

Dans tout ce qui suit,on utilise les notations suivantes :

Soit (Ω, T, m) un espace mesuré :

. T une sigma-algebre et $m : T \longrightarrow [0, \infty]$ une mesure positive

. $(\Omega, T, m) :=$ un espace mesuré et $|A| :=$ mesure de A.

. $M(\Omega) :=$ L'ensemble des applications numériques mesurables sur Ω

. $M_+(\Omega) :=$ l'ensemble des applications positives sur Ω.

1.1 Les espaces $\mathcal{L}_P, L_p$

Fixons une constante $p \in]0, \infty[$.Une fonction mesurable $f : \Omega \mapsto \mathbb{R}$.

La fonction $f : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ est dite p-intégrable si

$$\int_\Omega |f|^p dm < \infty.$$

L'ensemble des fonctions p-intégrables sur Ω sera noté par :

$$\mathcal{L}_p(\Omega) = \{f : \Omega \mapsto \mathbb{R},\ f \ est\ mesurable\ et \int_\Omega |f|^p dm < \infty\}.$$

Proposition 1.1.1. *L'ensemble $\mathcal{L}_p(\Omega)$ pour $0 < p < \infty$ muni de l'addition et de la multiplication scalaire est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ou $\mathbb{C}$.*

Preuve : La démonstration repose sur le lemme suivant :

Lemme 1.1.2. *Si $p \in (0, \infty)$et $a, b \in \mathbb{R}_+$,alors :*

1) Si $1 \leq p < \infty$

$$(a+b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p) \tag{1.1}$$

2) Si $0 < p \leq 1$

$$(a+b)^p \leq a^p + b^p \tag{1.2}$$

Preuve du Lemme :

1) Si $p = 1$,alors (1.1)est satisfaite.

2) Si $p > 1$, la fonction $\varphi : t \mapsto t^p$ est convexe sur $[0, \infty)$.

$$\varphi\left(\frac{a}{2} + \frac{b}{2}\right) \leq \frac{1}{2}\varphi(a) + \frac{1}{2}\varphi(b)$$

Soit encore :

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^p \leq \frac{1}{2}a^p + \frac{1}{2}b^p$$

$$(a+b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p)$$

3) Si $0 < p < 1$

L'équation (1.2) est équivalente á $(1 + \frac{b}{a})^p \leq (\frac{b}{a})^p + 1$, ou encore á $(1 + \frac{b}{a})^p - (\frac{b}{a})^p \leq 1$.

En posant : $x = \frac{b}{a} \geq 0$,$\varphi(x) = (1+x)^p - x^p$.

Alors $(a+b)^p$ est équivalent á $(1+x)^p - x^p \leq 1$.

On a :$\varphi(0) = 1$ et $\varphi^{'}(x) = p((1+x)^{p-1} - x^{p-1}) < 0$.donc est décroissante

Donc :$\forall x \geq 0, \varphi(x) \leq \varphi(0) = 1$. Ce qui est équivalent á l'inégalité (1.1).

Définition 1.1.1. *Soient (Ω, T, m) un espace mesure,$0 < p < \infty$ et f une fonction de Ω dans R,mesurable. On dit que $f \in \mathcal{L}_p = \mathcal{L}_p(\Omega, T, m)$ si ; $\int_\Omega \mid f \mid^p d\mu < \infty$. on pose alors :*

$$\|f\|_{\mathcal{L}_p(\Omega)} = \left(\int_\Omega \mid f \mid^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{1.3}$$

La fonction $\|.\|_p : \mathcal{L}_p(\Omega) \mapsto \mathbb{R}$ définie par :

$$\|f\|_p := \|f\|_{p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |f|^p dm \right)^{\frac{1}{p}}.$$

et non négative.

La fonction identiquement nulle n'est pas la seule á satisfaire $\|f\|_p = 0$,et donc $\|.\|_p$ n'est pas une norme dans le sens habituel du terme et par conséquent c'est une semi-norme sur $\mathcal{L}_p(\Omega)$ .C'est á dire :

$$\|f\|_p = 0 \Rightarrow f = 0 \ (p.p)$$

Donc du point de vu de l'intégrale on ne distingue pas deux fonctions égales presque partout.

Définissons donc la relation " $\sim$ " suivante sur $\mathcal{L}_p$: $f \sim g \Leftrightarrow f = g(p.p)$ La relation " $\sim$ " $(= p.p)$ définie une relation d'équivalence sur $\mathcal{L}_p$.

Si $f \in \mathcal{L}_p$ sa classe d'équivalence est notée temporairement par :

$$[f] = \{g \in \mathcal{L}_p : f \sim g\} = \{g \in \mathcal{L}_p : f = g(p.p)\}.$$

Sur la droite réelle la fonction $f = 1_{\mathbb{Q}} \in [0]$ $(1_{\mathbb{Q}}(x) = 1 \ sur \ Q, 0 \ si \ non)$. Formellement ceci revient á considérer l'ensemble quotient ,$L_p(\Omega, T, m) := \mathcal{L}_p(\Omega, T, m)/\sim$.

Définition 1.1.2. *(Les espaces L_p)*

Soient (Ω, T, m) un espace mesuré et $0 < p < \infty$. On définit l'espace $L_p(\Omega, T, m)$ comme l'ensemble des classes d'équivalence des fonctions de $\mathcal{L}_p$ modulo la relation d'équivalence.

S'il n'y a pas de confusion on note par L_p l'espace $L_p(\Omega, T, m)$.

1.2 Quelques inégalités fendamentales

Lemme 1.2.1. *Soient* $u \geq 0, v \neq 0$ *et* $0 \leq t \leq 1$.*Alors*

$$u^t v^{1-t} \leq tu + (1-t)v \tag{1.4}$$

Preuve : *Si* $v = 0$ *ou* $u = 0$ *l'égalité est vérifiée. Définissons la fonction.*

$$\varphi : (0, \infty) \to \mathbb{R}. \quad \varphi(s) = ts - s^t$$

Alors $\varphi^{'}(s) = t - ts^{t-1} = t(1 - s^{t-1}) < 0$ *pour* $s > 1$ *et* $\varphi^{'}(s) > 0$ *pour* $0 < s < 1$ *donc* φ *posséde un minimum en* $s = 1$, $\varphi(1) = t - 1 \leq \varphi(s) = ts - s^t$ *pour* $s > 0$. *En posant* $s = \frac{u}{v} > 0$, *on a :*

$$t - 1 \leq t(\frac{u}{v}) - (\frac{u}{v})^t \Rightarrow (\frac{u}{v})^t \leq t(\frac{u}{v}) + (1-t)$$

multipluons par v, *alors :*

$$u^t v^{1-t} \leq tu + (1-t)v.$$

Lemme 1.2.2. *(Inégalité de Young) Soient* $a, b \geq 0$ *et* $p, p' \in \mathbb{R}$ *conjugués, i,e :*$(\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1)$.

1) Si $1 < p < \infty$,*alors :*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'} \tag{1.5}$$

2) Si $0 < p \leq 1$,*alors :*

$$ab \geq \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'} \tag{1.6}$$

Preuve : On prend $t = \frac{1}{p}, 1-t = \frac{1}{p'}$ dans le lemme précédent pour prouver l'inégalité de Young.

1.3 Inégalité de Hölder :

Théorème 1.3.1. *Soient* $f \in L_p(\Omega)$ *et* $g \in L_q(\Omega)$ *ou* $1 \leq p \leq +\infty$.
Alors $fg \in L_1(\Omega)$,*et*

$$\int_\Omega fgdx \leq \left(\int_\Omega f^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_\Omega g^{p'} dx\right)^{\frac{1}{p'}}. \tag{1.7}$$

Preuve : A partire de l'inégalité de Young pour $(p, p^{'}, conjugus)$ $\forall a, b \geq 0$,
$a \cdot b \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'}$ posons $a = \frac{f(x)}{(\int_\Omega f^p)^{\frac{1}{p}}}$,$b = \frac{g(x)}{(\int_\Omega g^{p'})^{\frac{1}{p'}}}$. En remplacent a et b,on obtient :

$$\frac{fg}{(\int_\Omega f^p)^{\frac{1}{p}}(\int_\Omega g^{p'})^{\frac{1}{p'}}} \leq \frac{f(x)^p}{p(\int_\Omega f(x)^p)} + \frac{g(x)^{p'}}{p'(\int_\Omega g(x)^{p'})} \tag{1.8}$$

On intégre (1.22),d'ou :

$$\int_\Omega \frac{(fg)(x)dx}{(\int_\Omega f^p dx)^{\frac{1}{p}}(\int_\Omega g^{p'} dx)^{\frac{1}{p'}}} \leq \frac{1}{p}\int_\Omega \frac{f(x)^p dx}{(\int_\Omega f(x)^p dx)} + \frac{1}{p'}\int_\Omega \frac{g(x)^{p'} dx}{(\int_\Omega g(x)^{p'} dx)}$$

alors :

$$\frac{\int_\Omega (fg)(x)dx}{(\int_\Omega f^p dx)^{\frac{1}{p}}(\int_\Omega g^{p'} dx)^{\frac{1}{p'}}} \leq \frac{1}{p}\frac{\int_\Omega f(x)^p dx}{(\int_\Omega f(x)^p dx)} + \frac{1}{p'}\frac{\int_\Omega g(x)^{p'} dx}{(\int_\Omega g(x)^{p'} dx)}$$

donc on obtient :

$$\frac{\int_\Omega (fg)(x)dx}{(\int_\Omega f^p dx)^{\frac{1}{p}}(\int_\Omega g^{p'} dx)^{\frac{1}{p'}}} \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

par conséquent

$$\left(\int_\Omega (fg)dx\right) \leq \left(\int_\Omega f^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_\Omega g^{p'} dx\right)^{\frac{1}{p'}}. \tag{1.9}$$

1.4 Inégalité de Minkowsky :

Théorème 1.4.1. *Soient* f, g *deux fonctions mesurables positives sur* $E(mesurable)$ *et*
$p \in [1, \infty)$.*Alors :*

$$\left(\int_E (f+g)^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_E f^p dx\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_E g^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \tag{1.10}$$

Preuve : On a :$(f+g)^p=(f+g)(f+g)^{p-1}=f(f+g)^{p-1}+g(f+g)^{p-1}$

$$I=\int_E (f+g)^p dx = I_1+I_2$$

où

$$\begin{aligned}I_1=\int_E f(f+g)^{p-1}dx &\leq \left(\int_E f^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_E ((f+g)^{p-1})^{p'}dx\right)^{\frac{1}{p'}}\\ &= \left(\int_E f^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_E ((f+g)^{p-1})^{\frac{p}{p-1}}dx\right)^{\frac{p-1}{p}}\\ &\leq \left(\int_E f^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_E (f+g)^p dx\right)^{\frac{p-1}{p}}.\end{aligned}$$

De même on a :

$$I_2 \leq \left(\int_E g^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_E (f+g)^p dx\right)^{\frac{p-1}{p}}$$

donc :

$$\begin{aligned}I&=\int_E (f+g)^p dx\\ &\leq \left(\int_E (f+g)^p dx\right)^{\frac{p-1}{p}}\left[\left(\int_E f^p dx\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\int_E g^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\right].\end{aligned}$$

si :

$\int_E (f+g)^p dx \neq 0$,alors :

$$\left(\int_E (f+g)^p\right)^{1+\frac{p+1}{p}} \leq \left(\int_E f^p dx\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\int_E g^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

d'ou :

$$\left(\int_E (f+g)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_E f^p dx\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\int_E g^p dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

1.4.1 Opérations sur L_p

On munit l'espace L_p de :

1) l'opération "addition" par :$[f]+[g]=[f+g].\forall f,g\in\mathcal{L}_p$.

2) l'opération "muliplication" par un scalaire :$\forall f \in \mathcal{L}_p, \forall \alpha \in \mathbb{C}$ *ou* $\mathbb{R}$.

$$\alpha[f] = [\alpha f].$$

3) d'une structure topologique en posant :$\forall f \in \mathcal{L}_p$:

$$\|[f]\|_p = \|f\|_p.$$

Proposition 1.4.2. *Soient* (Ω, T, m) *un espace mesuré et* $0 < p < \infty$ *.*

1) Si $1 \leq p < \infty$*,alors : L'application* $f \mapsto \|f\|_p$ *est une norme sur* L_p*.*

2) Si $0 < p < 1$ *L'application* $f \mapsto \|f\|_p$ *est une quasi-norme sur* L_p*.*

1.5 L'espace L_∞

Définition 1.5.1. *Soient* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *un ensemble mesurable* $e \subset \Omega$ *un sous ensemble de mesure nulle ,*$f : \Omega \mapsto \mathbb{R}$*.Une fonction mesurable.On definit :*

$$\sup_{x\in\Omega} vrai f(x) = \inf_{e} \sup_{x\in\Omega\setminus e} f(x) \tag{1.11}$$

$$\inf_{x\in\Omega} vrai f(x) = \sup_{e} \inf_{x\in\Omega\setminus e} f(x) \tag{1.12}$$

Le $\sup$ *vrai est aussi appelé* $\sup$ *essentiel.*

Il est claire que :$\sup_{x\in\Omega}$*vrai* $f(x) \leq \sup_{x\in\Omega} f(x)$*.*

Définition 1.5.2. *Pour une fonction a valeurs reelles défines sur* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *et* $a \in \mathbb{R}$*,on définit l'ensemble :*

$$\Omega_a \equiv \Omega_a(f) = \{x \in \Omega : f(x) > a\}. \tag{1.13}$$

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$*,mes*$(\Omega) \neq 0$*,*$f : \Omega \mapsto \mathbb{R}$*.Alors :*

$$\sup_{x\in\Omega} vrai\Big(f(x)\Big) := inf\Big\{a \in \mathbb{R} : mes\Big(\Omega_a\Big) = 0\Big\} \tag{1.14}$$

On commence par quelques propriétés du sup essentiel similaires á celles du sup ordinaire.

Lemme 1.5.1. *Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$,$mes(\Omega) \neq 0$ et $f : \Omega \mapsto \mathbb{R}$.*

(i) Si $a = \sup_\Omega vraif < \infty$,alors :

$$mes(\Omega_a) = 0 \tag{1.15}$$

qui est équivalent a :

$$f(x) \leq a \text{ pour presque tout } x \in \Omega \tag{1.16}$$

et

$$\forall \varepsilon > 0, mes(\Omega_{a-\varepsilon}) \neq 0 \tag{1.17}$$

(ii) Si $a = \infty$,alors :

$$\forall N > 0, mes(\Omega_N) = 0 \tag{1.18}$$

Lemme 1.5.2. *Soient $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{R}^n$ et $f : \Omega_1 \bigcup \Omega_2 \mapsto \mathbb{R}$.Alors :*

$$\sup_{\Omega_1 \bigcup \Omega_2} vraif = max(\sup_{\Omega_1} vraif, \sup_{\Omega_2} vraif) \tag{1.19}$$

Démonstration : On applique l'inégalité

$$(\Omega_1 \bigcup \Omega_2)_a(f) = \{x \in \Omega_1 \bigcup \Omega_2 : f(x) > a\} = [(\Omega_1)_a \bigcup (\Omega_2)_a](f)$$

Corollaire 1.5.3. *Soient $G \subset \Omega \subset \mathbb{R}^n$ et $f : \Omega \mapsto \mathbb{R}$.Alors*

$$\sup_G vraif(x) \leq \sup_\Omega vraif(x).$$

Démonstration : On applique le lemme précédent avec $\Omega_1 = G$,$\Omega_2 = \Omega \backslash G$.

Lemme 1.5.4. *Soient f, g deux fonctions á valeurs réelles définies sur un ensemble $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ Si $f \leq g$ p.p. sur Ω.Alors*

$$\sup_{x \in \Omega} vraif(x) \leq \sup_{x \in \Omega} vraig(x). \tag{1.20}$$

Définition 1.5.3. *(Les espaces $\mathcal{L}_\infty, L_\infty$).Soient (Ω, T, m) un espace mesuré et f une fonction mesurable de Ω dans $\mathbb{R}$.On dit que f est essentiellement bornée,ou encore que $f \in \mathcal{L}_\infty(\Omega, T, m)$ s'il existe $C \in \mathbb{R}_+$ tel que $\mid f \mid \leq C \ \ (p.p)$;*

(i) si $f \in L_\infty$, on pose $\|f\|_\infty = \inf\{C \in \mathbb{R}_+; \mid f \mid \leq C \ (p.p)\}$.

(ii) si $\mid \Omega \mid = 0$, on pose $\|f\|_\infty = 0$.

(iii) On note $L_\infty = L_\infty(\Omega, T, m)$ comme l'ensemble des classes d'équivalence sur $\mathcal{L}_\infty$ modulo la relation d'équivalence ($=$ p.p).
Soit $F \in L_\infty$, on pose $\|F\|_{L_\infty} = \|f\|_{L_\infty}$ avec $f \in F$,de sorte que :

$$F = \{g \in \mathcal{L}_\infty; g = f \ p.p.\}.$$

Lemme 1.5.5.

(i) Si $f \in L_\infty$, alors $|f| \leq \|f\|_{L_\infty} p.p.$

(ii) $f = 0$ p.p.$\Longleftrightarrow \|f\|_\infty = 0$

Lemme 1.5.6. *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un sous-ensemble mesurable et f, g des fonctions mesurables sur Ω.Alors :*

$$\left| \int_\Omega fgdm \right| \leq \int_\Omega |fg|dx \leq \|f\|_{L\infty(\Omega)} \|g\|_{L1(\Omega)} \tag{1.21}$$

(Ideé de la preuve) :On applique le Lemme (1.5.5)

Corollaire 1.5.7. *Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ mesurable ,$mes(\Omega) < \infty$,une fonction f mesurable sur Ω,$0 < p < \infty$.Alors :*

$$\|f\|_{Lp(\Omega)} \leq (mes(\Omega))^{\frac{1}{p}} \|f\|_{L\infty(\Omega)} \tag{1.22}$$

(Ideé de la preuve) :On applique l'inégalité (1.13)

1.6 Propriétés fondamentales des espaces L_p

Théorème 1.6.1. *(Théoréme de Riesz) Soit Ω un ensemble mesurable de mesure finie et f une fonction sur Ω, alors :*

$$\lim_{p\mapsto\infty} \|f\|_{L_{p(\Omega)}} = \|f\|_{L_{\infty(\Omega)}}. \tag{1.23}$$

1.6.1 Complétude

Théorème 1.6.2. *(Riesz-Fischer,1910)*

Soient (Ω, T, m) un espace mesuré et $1 \leq p \leq +\infty$. L'espace vectoriel normé $(L_p; \|.\|_p)$ est complet .i.e. c'est un espace de Banach.

Démonstration :

1)Cas $p = \infty$:

Soit (f_n) une suite de Cauchy dans L_∞,donc pour $k \geq 1$ il existe $N_k \in \mathbb{N}$ tel que $\forall m, n \geq N_k$ on a :

$$\|f_m - f_n\|_{L_\infty} \leq \frac{1}{k}.$$

En vertu du Lemme (1.5.1) on a $|f_m(x) - f_n(x)| \leq \|f_m - f_n\|_\infty$.(p-p)

Alors :

$$| f_m(x) - f_n(x) | \leq \frac{1}{k}, \forall x \in \Omega/E_k, \forall m, n \geq N_k. \tag{1.24}$$

oú E_k est un ensemble de mesure nulle.On pose $E = \bigcup_k E_k$,donc $(f_n(x))_n$est de Cauchy pour tout $x \in \Omega \setminus E$.

En passant á la limite dans (1.24) quand $m \mapsto \infty$,on obtient :

$$| f(x) - f_n(x) | \leq \frac{1}{k}, \forall x \in \Omega/E_k, \forall n \geq N_k.$$

Donc : $\|f - f_n\|_{L_\infty} \leq \frac{1}{k}, \forall n \geq N_k$ et comme :$f = f_n + f - f_n \in L_\infty(\Omega)$.

d'oú : $\|f - f_n\|_{L_\infty} \longrightarrow 0$.

1) Cas $1 \leq p < \infty$,soit (f_n) une sous suite de Cauchy de L_p.Soit (f_{n_i})une suite extraire telle que

$$\forall i, \|f_{n_{i+1}} - f_{n_i}\| \leq \frac{1}{2^i} \tag{1.25}$$

posons

$$g_k = \sum_{i=0}^{k} \mid f_{n_{i+1}} - f_{n_i} \mid, et \ g = \sum_{i=0}^{+\infty} \mid f_{n_{i+1}} - f_{n_i} \mid$$

On a :

$$\begin{aligned}
\|g_k\|_{L_p} &= \| \sum_{i=0}^{k} \mid f_{n_{i+1}} - f_{n_i} \mid \|_{L_p} \\
&\leq \sum_{i=0}^{k} \| \mid f_{n_{i+1}} - f_{n_i} \mid \|_{L_p} \\
&= \sum_{i=0}^{k} \|f_{n_{i+1}} - f_{n_i}\|_{L_p} \leq \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{2^i} \\
&\leq \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2 \Rightarrow g_k \in L_p(X).
\end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned}
\|g\|_{L_p(X)} &= \| \sum_{i=0}^{\infty} \mid f_{n_{i+1}} - f_{n_i} \mid \|_{L_p(X)} \\
&\leq \sum_{i=0}^{\infty} \| \mid f_{n_{i+1}} - f_{n_i} \mid \|_{L_p(X)} \leq 2.
\end{aligned}$$

Ce qui entraine $g \in L_p(X)$, et g est finie presque partout sur X.

La série :$\sum_{i=0}^{\infty} \mid f_{n_{i+1}}(X) - f_{n_i}(X) \mid$ est convergente (p.p) sur X donc :

$f_{n_0} + \sum_{i=0}^{\infty}(f_{n_{i+1}}(X) - f_{n_i}(X))$ est absolument convergente pour presque tout $x \in X$.Désignons par $f(x)$ sa somme

on a :

$$f(x) = f_{n_0}(x) + \sum_{i=0}^{\infty}(f_{n_{i+1}}(x) - f_{n_i}(x)), (p.p) \ sur \ X.$$

alors :

$$f(x) = \lim_{k \mapsto \infty}(f_{n_0}(x) + \sum_{i=0}^{k}(f_{n_{i+1}}(X) - f_{n_i}(X))) = \lim_{k \mapsto \infty} f_{n_{k+1}}(x) \ (p.p) \ sur \ X.$$

D'où : la suite $(f_{n_k})_k \geq 1$ converge p.p. vers $f(x)$.

Etape 2 :Montrons que $f_n \mapsto f$ dans $L_p(X)$.

$$\begin{aligned}\int_X \mid f - f_n \mid^p dx &= \int_X \lim_{k\mapsto\infty} \mid f_{n_k} - f_n \mid^p dx \\ &\leq \lim_{k\mapsto\infty} \int_X \mid f_{n_k} - f_n \mid^p dx \Rightarrow \|f - f_n\|^p_{L_p(X)} \\ &\leq \lim_{k\mapsto\infty} \|f_{n_k} - f_n\|^p_{L_p(X)} \\ &< \lim_{k\mapsto\infty} \frac{1}{2^k} = 0.\end{aligned}$$

Car la suite (f_n) étant de Cauchy Çeci assure que $f_n \mapsto f$ dans $L_p(X)$

$$\|f\|_{L_p(X)} = \|f_n + f - f_n\|_{L_p(X)} \leq \|f_n\|_{L_p(X)} + \|f - f_n\|_{L_p(X)} < \infty \Rightarrow f \in L_p(X).$$

1.6.2 Densité

Théorème 1.6.3. *(Densité des fonctions simples) Si $1 \leq p < +\infty$,alors l'ensemble des fonctions simple $f = \sum_{i=1}^n a_i 1_{E_i}$, ou chaque E_i est un élément de la sous algebre A et $\mu(E_i) < \infty$, est dense dans $L_p(\Omega, T, m)$.*

Théorème 1.6.4. *(Densité de $C(\Omega, \mathbb{R})$ dans $L_p(\Omega)$).Soient $n \geq 1$,$p \in [1; +\infty)$ et Ω un sous-ensemble ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$ (par exemple $\Omega = \mathbb{R}^n$) Alors $C_0(\Omega, \mathbb{R})$est dense dans $L_p(\Omega)$ c'est-á-dire :*

$$\forall f \in L_p(\Omega), \forall \varepsilon > 0, \exists \varphi_\varepsilon \in C_0(\Omega, \mathbb{R}) \ t.q. \ \|f - \varphi_\varepsilon\|_p \leq \varepsilon. \tag{1.26}$$

Théorème 1.6.5. *(Densité de $C_0^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ dans $L_p(\mathbb{R}^n)$. Soient $n \geq 1$, $p \in [1; +\infty)$ alors $C_0^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ est dense dans $L_p(\mathbb{R}^n)$.*

Théorème 1.6.6. *(Densité de $C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ dans $L_p(\Omega)$). Soient $n \geq 1$, $p \in [1; +\infty)$ et Ω ouvert de $\mathbb{R}^n$, alors $C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ est dense dans $L_p(\Omega)$.*

1.6.3 Séparabilité de $L_p(\Omega)$

Proposition 1.6.7. *Soient Ω un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$ et p tel que $1 \leq p < +\infty$. Alors l'espace $L_p(\Omega)$ est séparable .*

Remarque 1.6.8. *Les espaces du type L_∞ ne sont pas en général , séparables.*

1.6.4 Dualité-Réflexivité.

Théorème 1.6.9. *(Théoréme de représentation de Riesz) (Dualité $L_p - L_q$).*
Soit F une fonctionnelle linéaire bornée sur L_p, $1 < p < \infty$. Alors il existe une fonction $g \in L_q$ unique de telle sorte que : $F(f) = \int fg$.et de plus :

$$\|F\|_{L_p} = \|g\|_{L_q}. \tag{1.27}$$

Remarque 1.6.10. *(Dual de L_∞) On note que le théoréme précédent est , en général ne pas vérifier pour $p = 1$. L'application $F : g \mapsto F_g$,ou F_g est donnée par $F_g(f) = \int f \cdot g$ est donc une isométrie (linéaire ou antilinéaire , selon le cas réel ou complexe) de L_1 dans (L_∞) mais l'image de F est sauf cas trés particuliers,différente de (L_∞) . L'application F ne permet donc pas d'identifier le dual de L_∞ a L_1.*

Proposition 1.6.11. *Soient (Ω, T, m) un espace mesuré et $1 < p < +\infty$, Alors l'espace $L_p(\Omega, T, m)$ est réflexif .*

Proposition 1.6.12. *Les espace L_1 et L_∞ ne sont pas réflexifs.*

1.7 Théoréme de Fubini

Théorème 1.7.1. *Soient Ω un ensemble mesurable dans $\mathbb{R}^n$, G un ensemble mesurable dans $\mathbb{R}^m$ et une fonction f intégrable sur $\Omega \times G$. Alors pour presque tout $x \in \Omega$. Les fonctions $f(x)$ sont intégrables sur G pour presque tout $y \in G$ les fonctions $f(x, y)$ sont intégrables sur Ω et on a :*

$$\int_{\Omega \times G} f(x,y)dxdy = \int_G \left(\int_\Omega f(x,y)dx \right) dy = \int_\Omega \left(\int_G f(x,y)dy \right) dx \tag{1.28}$$

Corollaire 1.7.2. *Soient Ω un ensemble mesurable de $\mathbb{R}^n$ et G un ensemble mesurable de $\mathbb{R}^m$. Une fonction f mesurable sur $\Omega \times G$ et au moins l'une des intégrales :*

$$\int_G \left(\int_\Omega \mid f(x,y) \mid dx \right) dy, \int_\Omega \left(\int_G \mid f(x,y) \mid dy \right) dx \tag{1.29}$$

est finie,Alors les intégrales dans (1.28) sont finies et égales .

Corollaire 1.7.3. *Soient Ω mes dans $\mathbb{R}^n$ G mes dans $\mathbb{R}^m$,f une fonction non négative et mesurable dans $\Omega \times G$ .Alors les égalités (1.28) ont lieu (Dans ce cas les intégrales peuvent être infinies).*

Les corollaires (1.7.2) et (1.7.3) sont presque utilisés comme conditions suffisants pour échanger l'ordre d'intégration. La condition d'intégrabilité de f dans $\Omega \times G$. Sont essentielles et la mesurabilité de f dans $\Omega \times G$.

Exemple 1.7.1. *:Soient $m = n = 1$,et $\Omega = G = (-1, 1)$ et la fonction :*

$$f(x, y) = x \cdot 1_E(y) + 1$$

pour $x, y \in (-1, 1)$ ou E :=sous ensemble non mesurable de $(-1, 1)$,alors :

$$\int_{-1}^{1} \left(\int_{-1}^{1} f(x, y)dx \right) dy = 4$$

$$\int_{-1}^{1} \left(\int_{-1}^{1} f(x, y)dy \right) dx = n'existe\ pas\ presque\ pour\ tout\ x \in (-1, 1)\ sauf\ x = 0$$

les fonctions $f(x, y)$ ne sont pas mesurables sur $(-1, 1)$.

1.8 Inégalité intégrale de Minkowsky :

Théorème 1.8.1. *Soient $E \in \mathbb{R}^n$et $F \in \mathbb{R}^m$ des ensembles mesurables et $1 \leq p \leq \infty$ f une fonction mesurable sur $E \times F$ Alors :*

$$\left\| \int_F f(x, y)dy \right\|_{L_p(E)} \leq \int_F \|f(x, y)\|_{L_p(E)} dy. \tag{1.30}$$

Interprétation : Si la fonction f est mesurable sur $E \times F$,$\forall y \in F, f(x, y) \in L_p(E)$ et la fonction $\|f(x, y)\|_{L_p(E)}$ est intégrable sur F et la fonction $\int_F f(x, y)dy \in L_p(E)$ et (1.30) est vérifier.

Lemme 1.8.2. *Soient $E \in \mathbb{R}^m$,$F \in \mathbb{R}^n$ des ensembles mesurables la fonction f est mesurable sur $E \times F$ et $\forall y \in F$,La fonction $f(x, y)$ est intégrable sur E alors la fonction $\int_E f(x, y)dx$ est mesurable sur F.*

Preuve : Soient mes de $E < \infty$ par hypothése $\forall$ y,$f(x,y) \in L_p(E)$ et par conséquent d'aprés l'inégalité de Hölder :

$$\int_E \mid f(x,y) \mid dx \leq (mesE)^{\frac{1}{p'}} \|f(x,y)\|_{L_p(E)} < \infty. \tag{1.31}$$

donc $f(x,y)$ est intégrable sur E. Comme la fonction f est mesurable sur $E \times F$.Alors $\mid f \mid$ est aussi intégrable sur $E \times F$ et d'aprés le lemme la fonction $\int_E \mid f(x,y) \mid dx$ est mesurable sur F par conséquent :

$$\int_F \left(\int_E \mid f(x,y) \mid dx \right) dy \leq (mesE)^{\frac{1}{p'}} \cdot \int_F \|f(x,y)\|_{L_p(E)} dy. \tag{1.32}$$

Comme f est mesurable sur $E \times F$ alors d'aprés le théoréme de fubini on peut conclure que f est intégrable sur $E \times F$,$\forall x \in E$ la fonction $f(x,y)$ est intégrable sur F et la fonction $\int_F f(x,y)dy$ est intégrable sur E et un particulier elle est mesurable sur E D'aprés la formule de dualité on aura :

$$\left\| \int_F f(x,y)dy \right\|_{L_p(E)} = \sup_{\|g\|_{L_{p'}(E)}=1} \mid \int_E \left(\int_F f(x,y)dyg(x)dx \right) \mid$$

$$\leq \sup_{\|g\|_{L_{p'}(E)}=1} \int_E \left(\int_F \mid f(x,y)g(x) \mid dy \right) dx$$

D'aprés la conséquence de Fubini et l'inégalité de Hölder on obtient :

$$\left\| \int_F f(x,y)dy \right\|_{L_p(E)} \leq \sup_{\|g\|_{L_{p'}(E)}=1} \int_E \left(\int_F \mid f(x,y)g(x) \mid dy \right) dx$$

$$= \sup_{\|g\|_{L_{p'}(E)}=1} \int_F \left(\int_E \mid f(x,y)g(x) \mid dx \right) dy$$

$$\leq \sup_{\|g\|_{L_{p'}(E)}} \int_F \|f(x,y)\|_{L_p(E)} \cdot \|g\|_{L_{p'}(E)} dy$$

si on prendre $\|g\| = 1$ par rapport ou sup :

$$\left\| \int_F f(x,y)dy \right\|_{L_p(E)} \leq \int_F \left\| f(x,y) \right\|_{L_p(E)} dy$$

Donc on conclut que :

$$\left\| \int_F f(x,y)dy \right\|_{L_p(E)} \leq \int_F \left\| f(x,y) \right\|_{L_p(E)} dy$$

1.9 Inégalité de Jensen pour Intégrales

Théorème 1.9.1. *Soit g et k continue sur $[a,b]$ et tq : $\alpha \leq g(t) \leq \beta$ et $k(t) \geq 0$. Soit $f(u)$ continue et convexes sur l'intervalle :$\alpha \leq u \leq \beta$. Alors :*

$$f\left[\frac{\int_a^b g(t)kdt}{\int_a^b kdt}\right] \leq \frac{\int_a^b f(g(t))k(t)dt}{\int_a^b k(t)dt} \tag{1.33}$$

Corollaire 1.9.2. *Sous les conditions du Théoréme (1.9.1) et pour $p \geq 1$,on a :*

$$\left(\int_a^b g(t)k(t)dt\right)^p \leq \left(\int_a^b k(t)dt\right)^{p-1} \int_a^b g^p(t)kdt.$$

Preuve : Soit $f(u) = u^p, p \geq 1$.On a :

$$f\left[\frac{\int_a^b g(t)k(t)dt}{\int_a^b kdt}\right] = \left(\frac{\int_a^b g(t)kdt}{\int_a^b kdt}\right)^p$$

d'ou :

$$\left(\int_a^b g(t)k(t)dt\right)^p \leq \left(\int_a^b k(t)dt\right)^{p-1} \int_a^b g^p(t)kdt.$$

Chapitre 2

Opérateur de Hardy sur Les espaces L_p

2.0.1 Opérateur de Hardy

L'opérateur de Hardy défini dans (2.1) joue un rôle important dans différentes applications par exemple dans la théorie des espaces fonctionnels, dans la théorie spectrale des opérateurs, pour des équations intégrales et différentielles. Certaines des étapes importantes dans le développement de ce qu'on appelle aujourdhui les inégalités du type de Hardy sont décrites par A.Kufner,L.Maligranda et L.-E.Persson .

2.1 Cas undimmensionel

2.1.1 Opérateur de Hardy sur Les espaces $L_p(0, \infty)$

Définition 2.1.1. *Soient* $1 < p < \infty$ *,* $f \in \mathtt{L}_1^{\mathtt{loc}}(0, \infty)$ *on définit les opérateurs de Hardy*

$$H_1 : L_p(0, \infty) \to L_p(0, \infty)$$

$$f \mapsto (H_1 f), (H_1 f)(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(y)dy \tag{2.1}$$

$$H_2 : L_p(0,\infty) \to L_p(0,\infty)$$
$$f \mapsto H_2 f, (H_2 f)(x) = \frac{1}{x}\int_x^{\infty} f(y)dy.$$

Théorème 2.1.1. *Soient* $1 < p < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, f *une fonction mesurable non négative sur l'intervalle* $(0,\infty)$ *,Alors*

$$\| H_1 f \|_{\mathrm{L}_p(0,\infty)} \leq p' \| f \|_{\mathrm{L}_p(0,\infty)}, \tag{2.2}$$

$$\| H_2 f \|_{\mathrm{L}_p(0,\infty)} \leq p' \| f \|_{\mathrm{L}_p(0,\infty)}, \tag{2.3}$$

On a $\|H_1\| \leq p' = \frac{p}{p-1}$. *et* $\|H_2\| \leq p' = \frac{p}{p-1}$.

$$(\|H_i\|_{(L_p \to L_p)}) \leq \frac{p}{p-1}$$

on démontre qu'en fait :

$$\|H_1\|_{(L_p \to L_p)} = \frac{p}{p-1} = \|H_2\|_{(L_p \to L_p)}$$

ce qui signifie que la constante $C_p = \frac{p}{p-1}$ *est optimale i.e la plus petite possible.*

Preuve

1^{er} **Méthode** :(Due Kufner Maligranda et Persson 2006)

posons pour tout $x > 0$

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt, \quad donc \ (H_1 f)(x) = \frac{F(x)}{x}$$

notons que pour presque tout $x \in (0,\infty)$.

$$\frac{d}{dx}(F^p(x)) = pF^{p-1}(x)f(x)$$

on a pour $0 < a$,$A < \infty$ arbitraires :

$$\int_a^A \left(\frac{F(x)}{x}\right)^p dx = -\frac{1}{p-1}\int_a^A F^p(x)\frac{d}{dx}(x^{-p+1})dx \tag{2.4}$$

Alors en intégrant par partie :(le 2^{ieme} membre de (2.4)

$$\int_a^A \left(\frac{F(x)}{x}\right)^p dx = \frac{a^{1-p}F^p(a)}{p-1} - \frac{A^{1-p}F^p(A)}{p-1} + \frac{1}{p-1}\int_a^A x^{1-p}\frac{dF^p(x)}{dx}$$
$$= -\frac{1}{p-1}[F^p(x)(x^{-p+1})]_a^A + \frac{1}{p-1}\int_a^A x^{1-p}\frac{d}{dx}(F^p(x))dx$$
$$\leq \frac{a^{1-p}F^p(a)}{p-1} + \frac{p}{p-1}\int_a^A \left(\frac{F(x)}{x}\right)^{p-1} f(x)dx \tag{2.5}$$

Dáutre part l'inégalité de Hölder

$$\int_a^A \left(\frac{F(x)}{x}\right)^{p-1} f(x)dx \leq \left(\int_a^A f^p(x)dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^A \left(\frac{F(x)}{x}\right)^p dx\right)^{\frac{p-1}{p}} \tag{2.6}$$

Considérons maintenant β telque $0 < a < \beta < A$

et appliquons les inégalités (2.5) et(2.6) à $F(x) - F(a)$ au lieu de $F(x)$:

$$\int_a^A \left(\frac{F(x)-F(a)}{x}\right)^p dx \leq \frac{p}{p-1}\left(\int_a^A f^p(x)dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^A \left(\frac{F(x)-F(a)}{x}\right)^p dx\right)^{1-\frac{1}{p}}$$

on déduit

$$\left(\int_a^A \left(\frac{F(x)-F(a)}{x}\right)^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{p}{p-1}\left(\int_a^A f^p(x)dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

et à fortiori

$$\left(\int_\beta^A \left(\frac{F(x)-F(a)}{x}\right)^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{p}{p-1}\left(\int_0^\infty f^p(x)dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

Dans cette derniére inégalité faisons d'abord $a \to 0$ et remarquons que F(a) ; ensuite pour finir on fait $A \to +\infty$ et $\beta \to 0^+$ et finallement nous obtenons :

$$\left(\int_0^\infty \left(\frac{F(x)}{x}\right)^p dx\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_0^\infty (Hf(x))^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$
$$\leq \frac{p}{p-1}\left(\int_0^\infty f^p f(x)dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

Constante optimale :[Hardy Littlewood et Polya Inéqualities 1934].

Soit $C > 0$ telle que

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt\right)^p dx \leq C\int_0^\infty f^p(x)dx$$

pour que $\left(\frac{p}{p-1}\right)$ soit optimale (la plus petite possible)

Montrons que $\left(\frac{p}{p-1}\right)^p \leq c$. Notons que si $f \neq 0$ on a

$$C \geq \frac{\int_0^\infty \left(\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt\right)^p dx}{\int_0^\infty f^p(x)dx} = \frac{A}{B}$$

Choisissons $\varepsilon > 0$ telle que $\varepsilon < p-1$ et considérons dans l'inégalité précédente la fonction

$$f_\varepsilon(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in (0,1) \\ x^{-\frac{1+\varepsilon}{p}} & \text{si } x \in [1,\infty) \end{cases}$$

En notant que $-\dfrac{1+\varepsilon}{p} + 1 > 0$ on a d'une part

$$\begin{aligned} A &= \int_0^1 \left(\frac{1}{x}\int_0^x 1dt\right)^p dx + \int_1^\infty \left(\frac{1}{x}\int_0^x t^{-\frac{1+\varepsilon}{p}} dt\right)^p dx \\ &= 1 + \frac{1}{\varepsilon\left(-\dfrac{1+\varepsilon}{p}+1\right)^p}\int_1^\infty x^{-1-\varepsilon}dx \\ &= 1 + \frac{1}{\varepsilon\left(-\dfrac{1+\varepsilon}{p}+1\right)^p} \end{aligned}$$

Et d'autre part

$$\begin{aligned} B &= \int_0^1 1dx + \int_1^\infty (x^{-\frac{1+\varepsilon}{p}})^p dx \\ &= 1 + \int_1^\infty x^{-1-\varepsilon}dx \\ &= 1 + \frac{1}{\varepsilon} \end{aligned}$$

D' oú

$$C \geq \frac{1 + \dfrac{1}{\varepsilon\left(-\dfrac{1+\varepsilon}{p}+1\right)^p}}{1+\dfrac{1}{\varepsilon}} \geq \frac{\varepsilon + \dfrac{1}{\left(-\dfrac{1+\varepsilon}{p}+1\right)^p}}{\varepsilon+1}.$$

en faisant $\varepsilon \to 0$ on obtient

$$C \geq \frac{1}{\left(-\frac{1}{p}+1\right)^p} = \left(\frac{p}{p-1}\right)^p$$

ce qui implique que $\left(\frac{p}{p-1}\right)^p$ est la plus petite possible (optimale)vérifiant l'inégalité

Remarque 2.1.2. *On ne peut passer sans présenter une élégante preuve du Théorème précédent due à Ingham [voir (Hardy ,Littlewood et polya Inequalities 1934)p243].*

2^{eme} **Méthode** [preuve due á Ingham]

En utilisant le changement de variable $t = zx$ on obtient :

$$\begin{aligned}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt &= \frac{1}{x}\int_0^1 f(zx)xdz \\ &= \int_0^1 f(zx)dz \\ &= \int_0^1 f(tx)dt\end{aligned}$$

alors

$$\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt = \int_0^1 f(tx)dt$$

Donc nous avons

$$\left[\int_0^\infty \left(\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt\right)^p dx\right]^{\frac{1}{p}} = \left[\int_0^\infty \left(\int_0^1 f(tx)dt\right)^p dx\right]^{\frac{1}{p}}$$

L'inégalité integrale de Minkowsky permet d'obtenir :

$$\left[\int_0^\infty \left(\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt\right)^p dx\right]^{\frac{1}{p}} \leq \int_0^1 \left(\int_0^\infty f^p(tx)dx\right)^{\frac{1}{p}} dt$$

Un nouveau changement de variable $s = tx$ nous obtient :

$$\begin{aligned}\int_0^1 \left(\int_0^\infty f^p(tx)dx\right)^{\frac{1}{p}} dt &= \int_0^1 \left(\int_0^\infty f^p(s)\frac{ds}{t}\right)^{\frac{1}{p}} dt \\ &\leq \int_0^1 \left(\int_0^\infty f^p(s)\frac{ds}{t}\right)^{\frac{1}{p}} dt\,(comme:\ t\in[0,1])\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^1 \left(\int_0^\infty t^{-1} f^p(s) ds \right)^{\frac{1}{p}} dt \\
&= \int_0^1 t^{\frac{-1}{p}} \left(\int_0^\infty f^p(s) ds \right)^{\frac{1}{p}} dt \\
&= \left[\frac{t^{\frac{-1}{p}+1}}{\frac{p-1}{p}} \right]_0^1 \left(\int_0^\infty f^p(s) ds \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \frac{1}{\frac{p-1}{p}} \left(\int_0^\infty f^p(s) ds \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \frac{p}{p-1} \left(\int_0^\infty f^p(s) ds \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \frac{p}{p-1} \left(\int_0^\infty f^p(t) dt \right)^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}
$$

se qui vérifier que :

$$
\left[\int_0^\infty \left(\frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt \right)^p dx \right]^{\frac{1}{p}} \leq \frac{p}{p-1} \left(\int_0^\infty f^p(t) dt \right)^{\frac{1}{p}}
$$

2.1.2 Opérateur sur $L_p(\mathbb{R})$

Les résultats du Théorème (2.1.1) s'étendent à l'espace $L_p(\mathbb{R})$.

Théorème 2.1.3. *Soient* $1 < p < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, f *une fonction mesurable non négative sur* $\mathbb{R}$ *,Alors :*

$$
\| (H_1 f)(x) \|_{\mathrm{L}_p(\mathbb{R})} \leq p' \| f(x) \|_{\mathrm{L}_p(\mathbb{R})}
$$

$$
\|(H_2 f)(x)\|_{L_p(\mathbb{R})} \leq p' \|f(x)\|_{L_p(\mathbb{R})}
$$

On a $\|H_1\| \leq p' = \frac{p}{p-1}$. *et* $\|H_2\| \leq p' = \frac{p}{p-1}$.

Preuve : Est simillaire á celle des Théorème (2.1.1)

2.1.3 Opérateur sur les espaces $L_p((0, \infty), x^\alpha)$

Théorème 2.1.4. *Soient* $1 < p < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq \frac{1}{p'}$ *;* f *une fonction mesurable non négative sur l'intervalle* $(0, \infty)$ *, on a :*

1. *si* $\alpha < \dfrac{1}{p'}$

$$\| x^{\alpha}(H_1 f)(x) \|_{L_p((0,\infty),x^{\alpha})} \leq (\frac{1}{p'} - \alpha)^{-1} \| x^{\alpha} f(x) \|_{L_p((0,\infty),x^{\alpha})}$$

2. *si* $\alpha > \dfrac{1}{p'}$

$$\|x^{\alpha}(H_2 f)(x)\|_{L_p((0,\infty),x^{\alpha})} \leq (\alpha - \frac{1}{p'})^{-1} \|x^{\alpha} f(x)\|_{L_p((0,\infty),x^{\alpha})}$$

On a $\|H_1\| \leq (\frac{1}{p'} - \alpha)^{-1}$. *et* $\|H_2\| \leq (\alpha - \frac{1}{p'})^{-1}$.
Si $\dfrac{-1}{p} < \alpha < \dfrac{1}{p'}$ *la constante* $(\dfrac{1}{p'} - \alpha)^{-1}$ *est optimale (la plus petite possible).*

Preuve :

1. Si $\alpha < \dfrac{1}{p'}$ on pose

$$\begin{aligned} J &= \left\| x^{\alpha}(H_1 f)(x) \right\|_{L_p(0,\infty)} \\ &= \left\| \int_0^x x^{\alpha-1} f(y) dy \right\|_{L_p(0,\infty)} \end{aligned}$$

Par le changement de variable $z = \dfrac{y}{x}$ on obtient $dy = xdz$, $y = 0 \rightarrow z = 0$, $y = x \rightarrow z = 1$

$$\begin{aligned} J &= \| \int_0^1 x^{\alpha} f(xz) dz \|_{L_p(0,\infty)} \\ &\leq \int_0^1 \|x^{\alpha} f(xz)\|_{L_{p,x}(0,\infty)} dz \end{aligned}$$

on pose $t = xz$ on a $dt = zdx$ et donc $dx = \dfrac{dt}{z}$

$$\begin{aligned} \left\| x^{\alpha} f(xz) \right\|_{L_x^p((0,\infty),x^{\alpha})} &= \left(\int_0^{\infty} x^{p\alpha} \mid f(xz) \mid^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= z^{-\alpha-\frac{1}{p}} \left(\int_0^{\infty} t^{p\alpha} \mid f(t) \mid^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= z^{-\alpha-\frac{1}{p}} \left\| t^{\alpha} f(t) \right\|_{L_p(0,\infty)} \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} J &\leq \int_0^1 z^{-\alpha-\frac{1}{p}} \|t^\alpha f(t)\|_{L_p(0,\infty)} dz \\ &\leq (1-\frac{1}{p}-\alpha)^{-1} \Big\| t^\alpha f(t) \Big\| l_{L_p(0,\infty)} \end{aligned}$$

finalement on a

$$\Big\| x^\alpha (H_1 f)(x) \Big\|_{L_p(0,\infty)} \leq (\frac{1}{p'}-\alpha)^{-1} \|t^\alpha f(t)\|_{L_p(0,\infty)}$$

2. Si $\alpha > \frac{1}{p'}$ on pose

$$\begin{aligned} I &= \|x^\alpha (H_2 f)(x)\|_{L_p(0,\infty)} \\ &= \| \int_x^\infty x^{\alpha-1} f(y) dy \|_{L_p(0,\infty)} \end{aligned}$$

on pose $z = \frac{y}{x}$ alors $dy = xdz$

$$\begin{aligned} I &= \| \int_1^\infty x^\alpha f(xz) dz \|_{L_p(0,\infty)} \\ &\leq \int_1^\infty \|x^\alpha f(xz)\|_{L_{p,x}(0,\infty)} dz \end{aligned}$$

on pose $t = xz$ alors $dt = zdx$ et donc $dx = \frac{dt}{z}$

$$\begin{aligned} \|x^\alpha f(xz)\|_{L_{p,x}(0,\infty)} &= \left(\int_0^\infty x^{p\alpha} \mid f(xz) \mid^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= z^{-\alpha-\frac{1}{p}} \left(\int_0^\infty t^{p\alpha} \mid f(t) \mid^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= z^{-\alpha-\frac{1}{p}} \|t^\alpha f(t)\|_{L_p(0,\infty)} \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} I &\leq \int_1^\infty z^{-\alpha-\frac{1}{p}} \|t^\alpha f(t)\|_{L_p(0,\infty)} dz \\ &\leq (-1+\frac{1}{p}+\alpha)^{-1} \|t^\alpha f(t)\|_{L_p(0,\infty)} \\ &\leq (\frac{1}{p'}+\alpha)^{-1} \|t^\alpha f(t)\|_{L_p(0,\infty)} \end{aligned}$$

2.2 Cas de la dimension n

Soient $x \in \mathbb{R}^n$, $r =\mid x \mid> 0$, $B_r = \Big\{y \in \mathbb{R}^n; \mid y \mid< r\Big\}$,$1 \leq p < \infty$, f une fonction mesurable non négative sur B_r.Considérons les deux opérateurs suivants : $H_n : L_p(\mathbb{R}^n) \to L_p(\mathbb{R}^n)$,définit par :

$$(H_n f)(x) := \frac{1}{mesB_r}\int_{B_r} f(y)dy$$

$\widetilde{H}_n : L_p(\mathbb{R}^n) \to L_p(\mathbb{R}^n)$, définit par :

$$(\widetilde{H'}_n f)(x) := \frac{1}{mesB_r}\int_{\mathbb{R}^n\setminus B_r} f(y)dy$$

Théorème 2.2.1. *: Soient* $1 \leq p < \infty$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}$, α *un nombre réel et* $f(r,\xi) \in \mathbb{L}_p(S^{n-1})$ *(*S^{n-1} *: désigne la sphére unité dans* $\mathbb{R}^n$*), alors*

1. *Si* $\alpha < \frac{n}{p'}$

$$\||\, x \,|^\alpha\, (H_n f)(x) \,\|_{\mathbb{L}_p(\mathbb{R}^n)} \leq (\frac{1}{p'} - \frac{\alpha}{n})^{-1} \,\||\, x \,|^\alpha\, f(x) \,\|_{\mathbb{L}_P(\mathbb{R}^n)} \tag{2.7}$$

2. *Si* $\alpha > \frac{n}{p'}$

$$\||\, x \,|^\alpha\, (\widetilde{H}_n f)(x) \,\|_{\mathbb{L}_p(\mathbb{R}^n)} \leq (\frac{\alpha}{n} - \frac{1}{p'})^{-1} \,\||\, x \,|^\alpha\, f(x) \,\|_{\mathbb{L}_P(\mathbb{R}^n)} \tag{2.8}$$

Preuve : On démontre l'ingalité (2.7) . On introduit les coordonnées sphériques (coordonnées polaires dans $\mathbb{R}^n(\rho,\xi)$ où $\rho =\mid y \mid$,$\xi = \frac{y}{|y|} \in S^{n-1}$ (S^{n-1} désigne la sphére unité dans $\mathbb{R}^n$) et on pose

$$\bar{f}(\rho) = \int_{S^{n-1}} f(\rho,\xi)d\xi$$

Alors

$$\begin{aligned}(H_n f)(x) &= \frac{1}{v_n r^n}\int_0^r \rho^{n-1}d\rho\int_{S^{n-1}} f(\rho,\xi)d\xi \\ &= \frac{1}{v_n r^n}\int_0^r \rho^{n-1}\bar{f}(\rho)d\rho\end{aligned}$$

où $v_n = \pi^{\frac{n}{2}}(\Gamma(\frac{n}{2}+1))^{-1}$ est le volume de la boule unité et Γ est la fonction Gamma définie par :

$$\Gamma(\delta) = \int_0^\infty t^{\delta-1}\exp(-t)dt$$

et par suite ,

$$\begin{aligned}
\||\, x\,|^\alpha\,(H_n f)(x)\,\|_{\mathbb{L}_p(\mathbb{R}^n)} &= \left(\int_{\mathbb{R}^n}\left|\frac{r^{\alpha-n}}{v_n}\int_0^r \rho^{n-1}\bar{f}(\rho)d\rho\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\\
&= (nv_n)\int_0^\infty r^{n-1}\left|\frac{r^{\alpha-n}}{v_n}\int_0^r \rho^{n-1}\bar{f}(\rho)d\rho\right|^p dr)^{\frac{1}{p}}\\
&= (nv_n)\int_0^\infty r^{n-1+p(\alpha-n+1)}v_n^{-p}\left|\frac{1}{r}\int_0^r \rho^{n-1}\bar{f}(\rho)d\rho\right|^p dr)^{\frac{1}{p}}\\
&= n^{\frac{1}{p}}v_n^{\frac{1}{p}-1}\left(\int_0^\infty\left|r^{\alpha-n+1+\frac{n-1}{p}}(H_n(\rho^{n-1}\bar{f}))(r)\right|^p dr\right)^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}
\left\|\,|\,x\,|^\alpha\,(\widetilde{H}_n f)(x)\right\|_{\mathbb{L}_p(\mathbb{R}^n)} &= n^{\frac{1}{p}}v_n^{\frac{1}{p}-1}\left(\int_0^\infty\left|r^{\alpha-n+1+\frac{n-1}{p}}(H_n(\rho^{n-1}\bar{f}))(r)\right|^p dr\right)^{\frac{1}{p}}\\
&= n^{\frac{1}{p}}v_n^{\frac{-1}{p'}}\left(\int_0^\infty\left|r^{\alpha-\frac{n-1}{p'}}(H_n(\rho^{n-1}\bar{f}))(r)\right|^p dr\right)^{\frac{1}{p}}\\
&= n^{\frac{1}{p}}v_n^{\frac{-1}{p'}}\left(\int_0^\infty\left|r^{\alpha_1}(H_n(\rho^{n-1}\bar{f}))(r)\right|^p dr\right)^{\frac{1}{p}}\\
&= n^{\frac{1}{p}}v_n^{\frac{-1}{p'}}\left\|r^{\alpha_1}(H_n(\rho^{n-1}\bar{f}))(r)\right\|_{\mathrm{L}_p(0,\infty)}
\end{aligned}$$

où $\alpha_1 = \alpha - \frac{n-1}{p}$.

D'aprés (2.2) du théorème (2.1.1), on obtient

$$\|\, r^{\alpha_1}(H_n(\rho^{n-1}\bar{f}))(r)\,\|_{\mathrm{L}_p(0,\infty)} \leq (\frac{1}{p'}-\alpha_1)^{-1}\,\|\, r^{\alpha_1}\rho^{n-1}\bar{f}(r)\,\|_{\mathrm{L}_p(0,\infty)}$$

comme $\alpha_1 = \alpha - \frac{n-1}{p'} < \frac{1}{p'}$.

Ona

$$\begin{aligned}
\left\|\,|\,x\,|^\alpha\,(\widetilde{H}_n f)(x)\right\|_{\mathrm{L}_p(\mathbb{R}^n)} &\leq n^{\frac{1}{p}}v_n^{\frac{-1}{p'}}(\frac{1}{p'}-\alpha_1)^{-1}\left\|r^{\alpha_1}\rho^{n-1}\bar{f}(r)\right\|_{\mathrm{L}_p(0,\infty)}\\
&\leq n^{\frac{1}{p}}v_n^{\frac{-1}{p'}}(\frac{1}{p'}-\alpha_1)^{-1}\left\|r^{\alpha_1+n-1}\bar{f}(r)\right\|_{\mathrm{L}_p(0,\infty)}
\end{aligned}$$

$$= n^{\frac{1}{p}} v_n^{\frac{-1}{p'}} (\frac{n}{p'} - \alpha_1)^{-1} \Big(\int_0^{\infty} r^{\alpha p + n - 1} \mid \bar{f}(r) \mid^p dr \Big)^{\frac{1}{p}}$$

En vertu de l'inégalité de Hölder , on a

$$\begin{aligned} |\bar{f}(r)| &= \Big| \int_{S^{n-1}} f(r,\xi) d\xi \Big| \leq \int_{S^{n-1}} \Big| f(r,\xi) \Big| d\xi \\ &\leq \Big(\int_{S^{n-1}} \mid f(r,\xi) \mid d\xi \Big)^{\frac{1}{p}} \Big(mes S^{n-1} \Big)^{\frac{1}{p'}} \\ &= (n v_n)^{\frac{1}{p'}} \Big(\int_{S^{n-1}} \mid f(r,\xi) \mid d\xi \Big)^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

En revenant aux coordonnées cartisienns , on obtient

$$\begin{aligned} \Big\| |x|^{\alpha} (\widetilde{H}_n f))(x) \Big\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} &\leq n^{\frac{1}{p}} v_n^{\frac{-1}{p'}} (\frac{n}{p'} - \alpha)^{-1} ((n v_n)^{\frac{p}{p'}} \int_0^{\infty} r^{\alpha p + n - 1} \int_{S^{n-1}} \mid f(r,\xi) \mid^p d\xi dr)^{\frac{1}{p}} \\ &= n (\frac{n}{p'} - \alpha)^{-1} \Big(\int_0^{\infty} \int_{S^{n-1}} r^{n-1} (r^{\alpha} \mid f(r,\xi) \mid)^p d\xi dr \Big)^{\frac{1}{p}} \\ &= (\frac{1}{p'} - \frac{\alpha}{n})^{-1} \Big(\int_{\mathbb{R}^n} \mid r^{n-1} f(x) \mid^p dx \Big)^{\frac{1}{p}} \\ &= (\frac{1}{p'} - \frac{\alpha}{n})^{-1} \, \| \mid x \mid^{\alpha} f(x) \|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \end{aligned}$$

$\blacksquare$

D'où

$$\| \mid x \mid^{\alpha} (\widetilde{H}_n f)(x) \|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \leq (\frac{1}{p'} - \frac{\alpha}{n})^{-1} \, \| \mid x \mid^{\alpha} f(x) \|_{L_p(\mathbb{R}^n)}$$

De maniére analogue on démontre l'ingalité (2.8).

Constante optimale : Soit $A > 0$ telle que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Big(\frac{1}{\mid B_{|x|} \mid} \int_{B_{|x|}} f(y) dy \Big)^p \mid x \mid^{\alpha} dx \leq A \int_{\mathbb{R}^n} f^p(x) \mid x \mid^{\alpha} dx$$

montrons que forcément $A \geq \Big(\frac{np}{n(p-1)-\alpha} \Big)^p$.Si $f \neq 0$ on a

$$A \geq \frac{\int_{\mathbb{R}^n} \Big(\frac{1}{\mid B_{|x|} \mid} \int_{B_{|x|}} f(y) dy \Big)^p \mid x \mid^{\alpha} dx}{\int_{\mathbb{R}^n} f^p(x) \mid x \mid^{\alpha} dx} = \frac{N}{D}$$

Etant donné que $\alpha + n(p-1) > 0$ choisissons $-\frac{\alpha+n(p-1)}{n} > \varepsilon > 0$ et considérons dans l'inégalité précedente la fonction

$$f_\varepsilon(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in B_1 \\ \mid x \mid^{-\frac{\alpha}{p}-n\frac{1+\varepsilon}{p}} & \text{si } x \in \mathbb{R}^n \setminus B_1 \end{cases}$$

Notons que $-\frac{\alpha}{p}-n\frac{1+\varepsilon}{p}+n > 0$ et que $\alpha+n > 0$ puis passons aux coordonnée sphériques :

$$\begin{aligned} N &= \int_{B_1} \left(\frac{1}{v_n \mid x \mid^n} \int_{B_{|x|}} 1dy\right)^p \mid x \mid^\alpha dx \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^n\setminus B_1} \left(\frac{1}{v_n \mid x \mid^n} \int_{B_{|x|}} \mid y \mid^{-\frac{\alpha}{p}-n\frac{1+\varepsilon}{p}} dy\right)^p \mid x \mid^\alpha dx \\ &= \int_0^1 \int_{S_{n-1}} \left(\frac{1}{v_n r^n} \int_0^r \int_0^1 \int_{S_{n-1}} 1\rho^{n-1} d\xi d\rho\right)^p r^\alpha r^{n-1} d\chi dr \\ &\quad + \int_1^\infty \int_{S_{n-1}} \left(\frac{1}{v_n r^n} \int_0^r \int_{S_{n-1}} \rho^{-\frac{\alpha}{p}-n\frac{1+\varepsilon}{p}} d\rho\right)^p r^\alpha r^{n-1} d\chi dr \\ &= \int_0^1 \int_{S_{n-1}} \left(\frac{nv_n}{v_n r^n} \times \int_0^r \rho^{n-1} d\rho\right)^p \rho r^{\alpha-n-1} d\chi dr \\ &\quad + \int_1^\infty \int_{S_{n-1}} \left(\frac{nv_n}{v_n r^n} \times \int_0^r \rho^{-\frac{\alpha}{p}-n\frac{1+\varepsilon}{p}+n-1} d\rho\right)^p d\chi dr. \end{aligned}$$

d'ou

$$\begin{aligned} N &= \int_0^1 \int_{S_{n-1}} \left(\frac{n}{r^n} \times \frac{r^n}{n}\right)^p r^{\alpha+n-1} d\chi dr \\ &\quad + \int_1^\infty \int_{S_{n-1}} \left(\frac{n}{r^n} \times \frac{r^{-\frac{\alpha}{p}-n\frac{1+\varepsilon}{p}+n}}{-\frac{\alpha}{p}-n\frac{1+\varepsilon}{p}+n}\right)^p r^{\alpha+n-1} d\chi dr \\ &= nv_n \int_0^1 r^{\alpha+n-1} dr + nv_n \left(\frac{n}{-\frac{\alpha}{p}-n\frac{1+\varepsilon}{p}+n}\right)^p \int_1^\infty r^{\alpha-n-n\varepsilon} r^{\alpha+n-1} dr \\ &= nv_n \frac{1}{\alpha+n} + \frac{v_n}{\varepsilon} \left(\frac{n}{-\frac{\alpha}{p}-n\frac{1+\varepsilon}{p}+n}\right)^p \end{aligned}$$

D'autre part

$$\begin{aligned} D &= \int_{B_1} \mid x \mid^\alpha dx + \int_{\mathbb{R}^n\setminus B_1} \mid x \mid^{-\alpha-n-n\varepsilon} \mid x \mid^\alpha dx \\ &= \int_0^1 \int_{S_{n-1}} r^\alpha r^{n-1} \end{aligned}$$

$$= \int_0^1 \int_{S_{n-1}} r^\alpha r^{n-1} d\chi dr + \int_1^\infty \int_{S_{n-1}} r^{-n-n\varepsilon} r^{n-1} d\chi dr$$
$$= \frac{nv_n}{\alpha + n} + \frac{v_n}{\varepsilon}$$

d'oú

$$A \geq \frac{nv_n \frac{1}{\alpha+n} + \frac{v_n}{\varepsilon}\left(\frac{n}{-\frac{\alpha}{p} - n\frac{1+\varepsilon}{p} + n}\right)^p}{\varepsilon \frac{nv_n}{\alpha+n} + \frac{v_n}{\varepsilon}}$$
$$= \frac{\varepsilon nv_n \frac{1}{\alpha+n} + \frac{v_n}{\varepsilon}\left(\frac{n}{-\frac{\alpha}{p} - n\frac{1+\varepsilon}{p} + n}\right)^p}{\varepsilon^2 \frac{nv_n}{\alpha+n} + v_n}$$

en faisant $\varepsilon \to 0$ on obtient

$$A \geq \left(\frac{n}{-\frac{\alpha}{p} - \frac{n}{p} + n}\right)^p = \left(\frac{np}{n(p-1) - \alpha}\right)^p$$

ce qui implique que $\left(\frac{np}{n(p-1)-\alpha}\right)^p$ est optimale , i.e la plus petite possible et

$$\| H_n \|_{L_p(\mathbb{R}^n)} = \frac{np}{n(p-1) - \alpha}$$

2.2.1 Opérateur du type Hardy $p \geq 1$

Définition 2.2.1. *On appelle fonction de poids toute fonction mesurable positive.*

Dans ce qui suit on cite un résultat concernant les inégalités avec poids que plusieurs auteurs ont étudié.

$$H_{u,v} : L_p((0,\infty), v(x)) \to L_q((0,\infty), u(x))$$

$$f \mapsto (H_u f)$$
$$\Big(H_u f\Big)(x) = u(x) \int_0^x f(t) dt$$

Dans [1] on trouve la preuve du théoréme suivant.

Théorème 2.2.2. *: (Inégalités avec poids)(1960-1990).Soient* f *une fonction mesurable positive sur* $(0,\infty)$, u , v *deux fonction poids* $1 \leq p \leq \infty$, $0 < q < \infty$, *et* $C > 0$ *Alors*

$$\left(\int_0^\infty \left(\int_0^x f(t)dt\right)^q u(x)dx\right)^{\frac{1}{q}} \leq C\left(\int_0^\infty f^p(x)v(x)dx\right)^{\frac{1}{p}} \tag{2.9}$$

si est seulement si

$$\sup_{x>0}\left(\int_x^\infty u(t)dt\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_0^x v^{1-p'}(t)dt\right)^{\frac{1}{p}} < \infty \tag{2.10}$$

où $p' = \frac{p}{p-1}$

En observent que si $v(x) = u(x) = x^\alpha$ *avec* $\alpha < p-1$ *on obtient (2.2) l'inégalité clasique de Hardy .*

Sample output to test PDF Combine only

Chapitre 3

Relation entre les normes de Hf ,$\widetilde{H}f$ dansL_p.

3.1 Introduction et résultats

Notion par $M^+(\mathbb{R}_+)$ la classe de toutes les fonctions mesurables non négatives sur l'ensemble $\mathbb{R}_+ \equiv (0, \infty)$.

Soit $f \in M^+(\mathbb{R}_+)$ on définit l'opérateur H de Hardy et son dual $\widetilde{H}$ sur l'espace $L_p(0, \infty)$

$$H : L_p(0,\infty) \mapsto L_p(0,\infty) \; f \mapsto Hf \; ,\widetilde{H} : L_{p'}(0,\infty) \mapsto L_{p'}(0,\infty)$$

Cas : $p > 1$

$$(Hf)(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt$$
$$(\widetilde{H}f)(x) = \int_x^\infty \frac{f(t)}{t}dt$$

$$\begin{aligned}(Hf)(x) &= \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt \\ &= \frac{1}{x}\int_0^x \int_0^t du \frac{f(t)}{t}dt\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{x}\int_0^x \int_0^t \frac{f(t)}{t}dudt$$

Ces égalités définissent l'opérateur classique de Hardy.

Ces opérateurs sont bornés dans $L_p(\mathbb{R}_+)$ pour tout $1 < p < \infty$.

On se propose dans ce qui suit de montrer que pour tout $f \in M_+(\mathbb{R}_+)$ $1 < p < \infty$, les normes L_p des fonctions Hf et $\widetilde{H}f$ sont équivalentes.

le théorème de Fubini permet d'obtenir :

$$\begin{aligned}(Hf)(x) &= \frac{1}{x}\int_0^x du \int_u^x \frac{f(t)}{t}dt \\ &= \frac{1}{x}\int_0^x \Big(\int_u^x \frac{f(t)}{t}dt\Big)du \\ &\leq \frac{1}{x}\int_0^x \Big(\int_u^\infty \frac{f(t)}{t}dt\Big)du \\ &= \frac{1}{x}\int_0^x \Big(\widetilde{H}f\Big)(u)du\,.\end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\Big(Hf\Big)(x) \leq \frac{1}{x}\int_0^x \Big(\widetilde{H}f\Big)(u)du \tag{3.1}$$

De même le théorème de Fubini nous permet d'obtenir

$$\begin{aligned}\Big(\widetilde{H}f\Big)(x) = \int_x^\infty \frac{f(t)}{t} &= \int_x^\infty \Big(\int_t^\infty \frac{1}{u^2}du\Big)f(t)dt \\ &= \int_x^\infty \int_t^\infty \frac{1}{u^2}f(t)dudt \\ &= \int_x^\infty \frac{1}{u}\Big(\frac{1}{u}\int_x^u f(t)dt\Big)du \\ &\leq \int_x^\infty \frac{1}{u}\Big(\frac{1}{u}\int_0^u f(t)dt\Big)du \\ &= \int_x^\infty \frac{1}{u}\cdot Hf(u)du.\end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\left(\widetilde{H}f\right)(x) \leq \int_x^\infty \frac{Hf(u)}{u}du \tag{3.2}$$

Maintenant nous calculons la norme L_p de Hf .

$$\begin{aligned}
\|Hf(x)\|_{L_p(0,\infty)} &= \Big(\int_0^\infty \Big[\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt\Big]^p dx\Big)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \Big[\int_0^\infty \Big(\frac{1}{x}\int_0^x \widetilde{H}f)(t)dt\Big)^p dx\Big]^{\frac{1}{p}} \\
&= \Big[\int_0^\infty \Big(\int_0^1 \widetilde{H}f)(ux)du\Big)^p dx\Big]^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \int_0^1 \Big(\int_0^\infty (\widetilde{H}f)^p(ux)dx\Big)^{\frac{1}{p}} du \\
&= \int_0^1 \left(\int_0^\infty \left(\widetilde{H}f\right)^p(t)u^{-1}dt\right)^{\frac{1}{p}} du \\
&= \int_0^1 u^{-\frac{1}{p}}du\|\widetilde{H}f\|_{L_p(0,\infty)} = p'\|\widetilde{H}f\|_{L_p(0,\infty)}.
\end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\frac{1}{p'}\|Hf\|_{L_p(0,\infty)} \leq \|\widetilde{H}f\|_{L_p(0,\infty)}. \tag{3.3}$$

Par la même méthode , nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\|\widetilde{H}f\|_{L_p(0,\infty)} &= \left(\int_0^\infty \left(\widetilde{H}f^p(x)\right)dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \left(\int_0^\infty \Big(\int_x^\infty \frac{Hf(u)}{u}du\Big)^p\right)dx)^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

Finalement

$$\|\widetilde{H}f\|_{L_p(0,\infty)} \leq p\|Hf\|_{L_p(0,\infty)}. \tag{3.4}$$

de (3.3) et (3.4) , nous obtenons.

$$\frac{1}{p'}\|Hf\|_{L_p(0,\infty)} \leq \|\widetilde{H}f\|_{L_p(0,\infty)} \leq p\|Hf\|_{L_p(0,\infty)}. \tag{3.5}$$

La norme de Hf et $\widetilde{H}f$ sont équivalentes pour $1 < p < \infty$. Cependant les constantes dans (3.5) ne sont pas optimales .

3.2 Constantes optimales

Théorème 3.2.1. *: Soit* $f \in \mathbb{M}_+(\mathbb{R}_+)$ *et* $1 < p < \infty$. *Alors*

$$\Big(p-1\Big)\big\|Hf\big\|_p \leq \big\|\widetilde{H}f\big\|_p \leq \Big(p-1\Big)^{\frac{1}{p}}\big\|Hf\big\|_p \,, \tag{3.6}$$

si $1 < p \leq 2$ *et*

$$\Big(p-1\Big)^{\frac{1}{p}}\big\|Hf\big\|_p \leq \big\|\widetilde{H}f\big\|_p \leq \Big(p-1\Big)\big\|Hf\big\|_p \,, \tag{3.7}$$

si $2 < p < \infty$.

Les constantes dans (3.6) et (3.7) sont les plus petites possibles .

Le thérème (3.2.1). a une formulation équivalente en termes de l'opérateur $H\varphi - \varphi$.

Soit φ une fonction non croissante et non négative sur $\mathbb{R}_+$ telle que $\varphi(\infty) = 0$.

La fonction $H\varphi - \varphi$ joue un rôle important en analyse . On sait que les normes

$$\big\|H\varphi - \varphi\big\|_{L_p} \, et \, \big\|\varphi\big\|_{L_P} \;\; (1 < p < \infty)$$

sont équivalentes Cependant la constante optimale est connue dans l'négalité suivante.

Soit φ une fonction non croissante est non négative sur $\mathbb{R}_+$.

Alors pour tout $p \geqslant 2$:

$$\big\|H\varphi - \varphi\big\|_p \leqslant (p-1)^{\frac{-1}{p}} . \big\|\varphi\big\|_P \qquad (*)$$

et la constante $(p-1)^{\frac{-1}{p}}$ est optimale .

Ce résultat a eté obtenu dans (3.7) pour $p = 2k$ $(k \in \mathbb{N})$ et dans (3.2) pour tout $p \geqslant 2$.

Théorème 3.2.2. *: Soit φ une fonction non croissante et non négative sur $\mathbb{R}_+$ telle que $\varphi(+\infty) = 0$ et soit $1 < p < \infty$. Alors*

$$\Big(p-1\Big)\big\|H\varphi - \varphi\big\|_p \leq \big\|\varphi\big\|_p \leq \Big(p-1\Big)^{\frac{1}{p}}\big\|H\varphi - \varphi\big\|_p \ , \tag{3.8}$$

si $1 < p \leq 2$ et

$$\Big(p-1\Big)^{\frac{1}{p}}\big\|H\varphi - \varphi\big\|_p \leq \big\|\varphi\big\|_p \leq \Big(p-1\Big)\big\|H\varphi - \varphi\big\|_p \ , \tag{3.9}$$

si $2 \leq p < \infty$.

Preuve : En tenant compte de (3.5) nous pouvons assumer que Hf et $\widetilde{H}f \in L_p(\mathbb{R}_+)$. Notons

$$\begin{aligned} I_p &:= \big\|Hf\big\|_p^p \\ &= \Big(\int_0^\infty \Big(\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt\Big)^p dx\Big) \end{aligned}$$

Nous avons

$$\lim_{x\mapsto 0^+} \frac{Hf(x)}{x^{\frac{-1}{p}}} = 0 \quad \text{et} \quad lim_{x\mapsto +\infty}\frac{Hf(x)}{x^{\frac{-1}{p}}} = 0$$

Par conséquent : $\Big(Hf\Big)(x) = o\Big(x^{\frac{-1}{p}}\Big) \quad x \mapsto 0^+ \ , \ x \mapsto +\infty$

En intégrant par parties , nous obtenons

$$\begin{aligned} I_p &= \int_0^\infty \Big(\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt\Big)^p dx \\ &= \int_0^\infty x^{-p}\Big(\int_0^x f(t)dt\Big)^p dx \\ &= \int_0^\infty \Big(\int_0^x f(t)dt\Big)^p x^{-p}dx \\ &= \Big[x^{-p}\Big(\int_0^x f(t)dt\Big)^p\Big]_0^{+\infty} - \frac{p}{p-1}\int_0^\infty x^{-p+1}f(t)\Big(\int_0^x f(t)dt\Big)^{p-1}dx. \end{aligned}$$

Donc , nous avons

$$I_p = 0 + p'\int_0^\infty x^{1-p}f(t)\Big(\int_0^x f(t)dt\Big)^{p-1}dx \, . \tag{3.10}$$

Nous posons

$$\widetilde{I}_p = \int_0^\infty \Big(\int_t^\infty \frac{f(x)}{x} dx \Big)^p dt \,. \tag{3.11}$$

Maintenant démontrons que

$$\Big(p-1\Big) I_p \leq \widetilde{I}_p \quad si \quad 2 \leq p < \infty \,. \tag{3.12}$$

et

$$\widetilde{I}_p \leq \Big(p-1\Big) I_p \quad si \quad 1 < p \leq 2 \,, \tag{3.13}$$

observons que $I_2 = \widetilde{I}_2 \quad (si \;\; p=2)$

Posons pour $0 < t < x \quad \phi\Big(t,x\Big) = \int_t^x \frac{f(u)}{u} du$ et $G(t,x) = \phi\Big(t,x\Big)^p$,

Nous avons $G(t,t) = 0$,

$$G(t,x) = \phi(t,x)^p = \Big(\int_t^x \frac{f(u)}{u} du \Big)^p$$

$$\phi_x^{'}(t,x) = \frac{f(x)}{x} \quad .$$

Alors

$$\begin{aligned} G_x^{'}(t,x) &= p \cdot \phi^{p-1}(t,x) \cdot \frac{f(x)}{x} \\ &= p \cdot \phi^{p-1}(t,x) \cdot \phi_x^{'}(t,x) \,. \end{aligned}$$

Ona d'une part

$$\widetilde{I}_p = p \int_0^\infty \int_t^\infty \frac{f(x)}{x} \cdot \phi\big(t,x\big)^{p-1} dx dt$$

$$= p \int_0^\infty \frac{f(x)}{x} \Big(\int_0^x \phi^{p-1}(t,x) dt \Big) dx \tag{3.14}$$

de l'autre part ,

$$
\begin{aligned}
(Hf)(x) &= \frac{1}{x}\int_0^x \Big(\int_t^x \frac{f(u)}{u}du\Big)dt \\
&= \frac{1}{x}\int_0^x \phi(t,x)dt \\
&= \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt\,.
\end{aligned}
$$

donc

$$\int_0^x f(t)dt = \int_0^x \phi\big(t,x\big)dt$$

D'où , de (3.10) il découle que

$$I_p = p'\int_0^\infty x^{1-p}f(x)\Big(\int_0^x f(t)dt\Big)^{p-1}dx$$

$$= p'\int_0^\infty x^{1-p}f(x)\Big(\int_0^x \phi(t,x)dt\Big)^{p-1}dx\ . \tag{3.15}$$

On supose $2 \le p < \infty$.

Alors par l'inégalité de Jensen, nous avons

$$
\begin{aligned}
\Big(\int_0^x \phi(t,x)dt\Big)^{p-1} &\le \Big(\int_0^x dt\Big)^{p-2}\Big(\int_0^x \phi^{p-1}(t,x)dt\Big) \\
&= x^{p-2}\int_0^x \phi^{p-1}(t,x)dt
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
I_p &\le p'\int_0^\infty \frac{f(x)}{x}\Big(\int_0^x \phi^{p-1}(t,x)dt\Big)dx \\
&= p'\frac{\widetilde{I}_p}{p} \\
&= \frac{\widetilde{I}_p}{p-1}\ ,
\end{aligned}
$$

Donc , (3.12) découle i.e :

$$(p-1)I_p \le \widetilde{I}_p \ .$$

Maintenant supposons $1 < p < 2$ en appliquant l'inégalité de Jensen , nous obtenons

$$\begin{aligned}\Big(\int_0^x \phi(t,x)dt\Big)^{p-1} &\ge \Big(\int_0^x dt\Big)^{p-2}\Big(\int_0^x \phi^{p-1}(t,x)dt\Big)\\ &= x^{p-2}\int_0^x \phi^{p-1}(t,x)dt\end{aligned}$$

$$\Big(\int_0^x \phi^{p-1}(t,x)dt\Big)dx \le x^{2-p}\Big(\int_0^x \phi(t,x)dt\Big)^{p-1} \ ,$$

Il suit par (3.14) et(3.15) que ,

$$\begin{aligned}\widetilde{I}_p = p\Big(\int_0^\infty \frac{f(x)}{x}\int_0^x \phi^{p-1}(t,x)dt\Big)dx &\le p\int_0^\infty \frac{f(x)}{x}x^{2-p}\Big(\int_0^x \phi(t,x)dt\Big)^{p-1}dx\\ &= p\int_0^\infty x^{1-p}\cdot f(x)\Big(\int_0^x \phi(t,x)dt\Big)^{p-1}dx\\ &= p\frac{I_p}{p'}\end{aligned}$$

Comme $\dfrac{p}{p'} = p-1$, l'inégalité (3.13)découle ie

$$\widetilde{I}_p \le (p-1)I_p.$$

Il reste à montrer

$$\widetilde{I}_p \le (p-1)^p I_p \qquad si \qquad 2 < p < \infty \tag{3.16}$$

et

$$(p-1)^p I_p \le \widetilde{I}_p \qquad si \qquad 1 < p < 2 \tag{3.17}$$

nous avons $\quad f > 0 \quad$ et $\quad \widetilde{H}f \in L_p(\mathbb{R}_+)$

$$0 < \int_t^\infty \frac{f(x)}{x} dx < \infty \qquad \text{pour tout} \qquad t > 0$$

rappelons que pour tout $q > 0$, nous avons

$$\Big(\int_t^\infty \frac{f(x)}{x} dx\Big)^q = q \int_t^\infty \frac{f(x)}{x} \Big(\int_x^\infty \frac{f(u)}{u} du\Big)^{q-1} dx \tag{3.18}$$

En effet, ,soit

$$\int_t^\infty \frac{f(x)}{x} dx = K(t) \qquad \Big(K'(t) = \frac{f(t)}{t}\Big)$$

$$\begin{aligned} q\int_t^\infty \frac{f(x)}{x} \Big(\int_x^\infty \frac{f(u)}{u} du\Big)^{q-1} dx &= q \int_t^\infty K'(x) K(x)^{q-1} d(x) \\ &= q \int_x^\infty \frac{d(K(x))^q}{q} \\ &= \Big(K(x)\Big)^q \\ &= \Big(\int_t^\infty \frac{f(x)}{x} dx\Big)^q \ . \end{aligned}$$

En appliquant (3.18) avec $p = q$ dans (3.11) , nous obtenons

$$\begin{aligned} \widetilde{I}_p &= \int_0^\infty \Big(\int_t^\infty \frac{f(x)}{x} dx\Big)^p dt \\ &= p \int_0^\infty \int_t^\infty \frac{f(x)}{x} \Big(\int_x^\infty \frac{f(u)}{u} du\Big)^{p-1} dx\, dt \ , \end{aligned}$$

par application du théorème de Fubini , nous obtenons

$$\begin{aligned} \widetilde{I}_p &= p \int_0^\infty \frac{f(x)}{x} \int_0^x dt \Big(\int_x^\infty \frac{f(u)}{u} du\Big)^{p-1} dx \\ &= p \int_0^\infty \frac{f(x)}{x} \Big(\int_x^\infty \frac{f(u)}{u} du\Big)^{p-1} dx \,, \end{aligned} \tag{3.19}$$

de nouveau , par application de (3.18) pour $q = p - 1$,

$$\widetilde{I}_p = p \int_0^\infty f(x) \cdot (p-1) \int_x^\infty \frac{f(u)}{u} \Big(\int_u^\infty \frac{f(v)}{v} dv\Big)^{p-2} du\ dx \,. \tag{3.20}$$

En utilisant à nouveau le théorème de Fubini

$$\widetilde{I}_p = p(p-1)\int_0^\infty f(x)\int_x^\infty \frac{f(u)}{u}\Big(\int_u^\infty \frac{f(v)}{v}dv\Big)^{p-2}du\ dx$$
$$= p(p-1)\int_0^\infty \frac{f(u)}{u}\Big(\int_u^\infty \frac{f(v)}{v}d(v)\Big)^{p-2}\cdot\int_0^u f(x)dx\,du$$

observons que

$$\frac{f(u)}{u} = \frac{f(u)^{\frac{1}{p-1}}}{u}f(u)^{\frac{p-2}{p-1}}\ \ ,$$

soient

$$\varphi(u) = \frac{f(u)^{\frac{1}{p-1}}}{u}\int_0^u f(x)dx$$

$$\psi(u) = f(u)^{\frac{p-2}{p-1}}\Big(\int_u^\infty \frac{f(x)}{x}dx\Big)^{p-2}$$

alors , $\widetilde{I}_p$ s'écrit

$$\widetilde{I}_p = p(p-1)\int_0^\infty \varphi(u)\ \psi(u)\ du\,, \tag{3.21}$$

alors d'aprés (3.10) nous avons

$$\int_0^\infty \varphi(u)^{p-1}du = \int_0^\infty u^{1-p}\cdot f(u)\Big(\int_0^u f(x)dx\Big)^{p-1}du \tag{3.22}$$

$$\int_0^\infty \varphi(u)^{p-1}du = \frac{I_p}{p'}\ \ .$$

Il suit que

$$\int_0^\infty \psi(u)^{(\frac{p-1}{p-2})}du = \int_0^\infty f(u)\Big(\int_u^\infty \frac{f(x)}{x}dx\Big)^{p-1}du = \frac{\widetilde{I}_p}{p} \tag{3.23}$$

pour tout $p>1$, $p\neq 2$.

Soit $p>2$, en appliquant l'inégalité de Holder avec l'exposant $(p-1)$á l'égalité (3.21) nous obtenons

$$\Big(\frac{1}{p-1}+\frac{1}{\alpha}=1 \iff \frac{1}{\alpha}=1-\frac{1}{p-1}=\frac{p-2}{p-1}\Big)$$

$$\int_0^\infty \varphi(u)\,\psi(u)\,du \le \Big(\int_0^\infty \varphi(u)^{p-1}du\Big)^{\frac{1}{p-1}}\Big(\int_0^\infty \psi(u)^{\frac{p-1}{p-2}}du\Big)^{\frac{p-2}{p-1}}$$

en tenant compte des égalités (3.22) et (3.23) ,nous avons .

$$\begin{aligned}\widetilde{I}_p &= p(p-1)\int_0^\infty \varphi(u)\ \psi(u)\,du\\ &\le p(p-1)\Big(\int_0^\infty \varphi(u)^{p-1}du\Big)^{\frac{1}{p-1}}\Big(\int_0^\infty \psi(u)^{\frac{p-1}{p-2}}du\Big)^{\frac{p-2}{p-1}}\\ &= p(p-1)\Big(\frac{I_p}{p'}\Big)^{\frac{1}{p-1}}\cdot\Big(\frac{\widetilde{I}_p}{p}\Big)^{\frac{p-2}{p-1}}. \end{aligned}\tag{3.24}$$

Ce qui donne

$$\begin{aligned}\widetilde{I}_p^{\frac{1}{1-p}} &\le (p-1)p\cdot\frac{I_p^{(\frac{1}{p-1})}}{p'^{(\frac{1}{p-1})}}\cdot p^{(-\frac{p-2}{p-1})}\\ &= (p-1)^{(\frac{p}{p-1})}\cdot I_p^{(\frac{1}{p-1})}.\end{aligned}$$

Finalement , ona :

$$\widetilde{I}_p \le (p-1)^p\cdot I_p \quad , \tag{3.25}$$

à partir des inégalités (3.12) et (3.25) découle l'inégalité (3.7).

Soit $1<p<2$.

En appliquant l'inégalité de Hölder à l'enégalité (3.21) avec l'exposant $(p-1)\in(0,1)$

,

$$\begin{aligned}\widetilde{I}_p &\ge p(p-1)\Big(\frac{I_p}{p'}\Big)^{\frac{1}{p-1}}\cdot\Big(\frac{\widetilde{I}_p}{p}\Big)^{\frac{p-2}{p-1}}\\ \widetilde{I}_p^{\frac{1}{p-1}} &\ge (p-1)^{\frac{p}{p-1}}\cdot I_p^{\frac{1}{p-1}}\end{aligned}$$

$$\widetilde{I}_p \ge (p-1)^p\cdot I_p \tag{3.26}$$

les inégalités (3.27) et (3.10) .

Maintenant , nous allons montrer que le théorème (3.2.1) et le théorème (3.2.2) sont equivalent.

Soit φ une fonction non croissante et non négative sur $\mathbb{R}_+$. telle que $\varphi(\infty) = 0$

On pose

$$\varphi_n(x) = n \int_x^{x+\frac{1}{n}} \varphi(t)\,dt \quad (n \in \mathbb{N}) \tag{3.27}$$

Supposons que φ est absolumont continue. i.e $\varphi(x) = \int_0^x \varphi'(t)dt$.

Comme $\left[x, x + \dfrac{1}{n+1}\right] \subseteq \left[x, x + \dfrac{1}{n}\right]$, alors $0 \leqslant \varphi_{n+1}(x) \leq \varphi_n(x)$,

celà traduit que les φ_n son non croissantes , non négatives et locallement absollument continue sur $\mathbb{R}_+$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$. En effet

$\{\varphi_n(x)\}_{1\geq} \quad (\varphi(x) \geq 0)$

$\varphi_n(x)$ converge vers $\varphi(x)$ en tout point de continuité de la fonction φ.

$\left(\varphi_n(x) = n \int_x^{x+\frac{1}{n}} \varphi(t)\ dt \leq n\varphi(x) \cdot \dfrac{1}{n} = \varphi(x)\right)$

$$\begin{aligned} H\varphi_n(x) &= \frac{1}{x} \int_0^x \varphi_n(t)dt \\ &= \frac{n}{x} \int_0^x \Big(\int_t^{t+\frac{1}{n}} \varphi(u)du \Big) dt \end{aligned}$$

par le théorème de convergence monotone

$$\begin{aligned} \lim_{n \mapsto \infty} \int \varphi_n(t)dt &= \int \lim_{n \mapsto \infty} \varphi_n(t)dt \\ &= \int \varphi(t)dt, \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} lim_{n \mapsto \infty} H\varphi_n(x) &= lim_{n \mapsto \infty} \Big(\frac{1}{x} \int_0^x \varphi_n(t)dt \Big) \\ &= \frac{1}{x} \int_0^x lim_{n \mapsto \infty} \varphi_n(t)dt \\ &= \frac{1}{x} \int_0^x \varphi(t)dt \\ &= H\varphi(x), \end{aligned}$$

pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, et par conséquent

$$\left\|H\ \varphi_n\right\|_p \longrightarrow \left\|H\varphi\right\|_P \quad n \mapsto \infty \tag{3.28}$$

dans le théorème (3.2) ,nous pouvons supposer que $\varphi \in L_p(\mathbb{R}_+)$.

Nous avons pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, quand $n \mapsto \infty$,

Comme.

$$\big(H\varphi_n\big)(x) - \varphi_n(x) \longrightarrow \big(H\varphi\big)(x) - \varphi(x).$$

$$\begin{aligned}
\left|\big(H\varphi_n\big)(x) - \varphi(x)\right| &\leq \Big|\frac{1}{x}\int_0^x \varphi_n(t) - \varphi(x)dt\Big| \\
&= \frac{1}{x}\int_0^x \Big|n\int_t^{t+\frac{1}{n}} \varphi(u)du - \varphi(x)\Big|dt \\
&\leq n \cdot \frac{1}{x}\int_0^x \int_t^{t+\frac{1}{n}} \big|\varphi(u) - \varphi(x)\big|du\ dt \\
&\leq \varepsilon \qquad (\varepsilon > 0).
\end{aligned}$$

Alors

$$\left\|H\varphi_n - \varphi_n\right\|_p \longrightarrow \left\|H\varphi - \varphi\right\|_p \tag{3.29}$$

Sous l'hypothèse faite sur la fonction φ ,nous avouns

$$\varphi(x) - \varphi(t) = \textstyle\int_t^x \varphi'(u)du$$

$$\begin{aligned}
H\varphi(x) - \varphi(x) &= \frac{1}{x}\int_0^x \varphi(t) - \varphi(x)dt \\
&= \frac{1}{x}\int_0^x \big|t - x\big|\varphi'(u)\big|dt \\
&= \frac{1}{x}\int_0^x \big|\varphi'(u)\big|\int_t^x du\ dt \\
&= \frac{1}{x}\int_0^x u\big|\varphi'(u)\big|du \\
&= \frac{1}{x}\int_0^x f(u)du\,.
\end{aligned}$$

en posant

$$f(u) = u\big|\varphi'(u)\big|$$
$$H\varphi(x) - \varphi(x) = \frac{1}{x}\int_0^x u\big|\varphi'(u)\big|du$$

D'aprés la définition de l'opérateur $\widetilde{H}$ et comme

$$\varphi(\infty) = 0 \ , \quad \varphi(x) = \int_x^\infty \big|\varphi'(u)\big|du = \int_x^\infty \frac{f(u)}{u}du$$

Alors ona pour tout $x > 0$,

$$\varphi(x) = \big(\widetilde{H}f\big)(x) \tag{3.30}$$
$$H\varphi(x) - \varphi(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(u)du = Hf(x).$$

Donc

$$H\varphi - \varphi = Hf. \tag{3.31}$$

Inversement ,si $f \in \mathbb{M}^+(\mathbb{R}_+)$ et $0 \le \int_0^x f(u)du < \infty$ pour tout $x > 0$
nous définissons la fonction φ par $\varphi(x) = \int_x^\infty \frac{f(u)}{u}du$.
car $\frac{f(u)}{u}$ est localement intégrable
Nous avons : $\varphi(x) \ge 0$, $\varphi(\infty) = 0$, φ localement absolument continue sur $\mathbb{R}_+$

$$\big|\varphi'(x)\big| = \frac{f(x)}{x}.$$

Nous avons

$$\begin{aligned}
H\varphi(x) - \varphi(x) &= \frac{1}{x}\int_0^x [\varphi(t) - \varphi(x)]dt \\
&= \frac{1}{x}\int_0^x \int_t^x \mid \varphi'(u) \mid du\ dt \\
&= \frac{1}{x}\int_0^x u \mid \varphi'(u) \mid du \\
&= \frac{1}{x}\int_0^x f(u)du \\
&= Hf(x)
\end{aligned}$$

$$H\varphi - \varphi = Hf\,;$$

Ces arguments montrent l'équivalence des deux théorèmes.

Ils reste à montrer que les constantes sont optimales.

Soit la fonction f_ε définie par

$$f_\varepsilon(x) = 1_{[1,1+\varepsilon]}(x) \quad (\varepsilon > 0).\ Alors$$
$$\left\|Hf_\varepsilon\right\|_p^p = \int_1^{1+\varepsilon}$$

3.3 Optimalité des constantes

En premier lieu soit la fonction f_ε définie par :

$$f_\varepsilon(x) = 1_{[1,1+\varepsilon]}(x) \quad (\varepsilon > 0).$$

Donc

$$\begin{aligned}\left\|Hf\right\|_{L_p}^p &= \int_1^{1+\varepsilon} x^{-p}\Big(\int_1^x dt\Big)^p dx + \int_{1+\varepsilon}^{\infty} x^{-p}\Big(\int_1^{1+\varepsilon} dt\Big)^p dx \\ &= \int_1^{1+\varepsilon} x^{-p}\Big(x-1\Big)^p dx + \int_{1+\varepsilon}^{\infty} \varepsilon^p x^{-p} dx \\ &= I_1 + I_2\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}I_1 = \varepsilon^{+p}\int_{1+\varepsilon}^{+\infty} x^{-p}dx = & \varepsilon^{+p}\lim_{A\mapsto\infty}\int_{1+\varepsilon}^{A} x^{-p}dx \\ &= \varepsilon^{+p}\lim_{A\mapsto\infty}\Big[\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\Big]^A \\ &= \frac{\varepsilon^{+p}}{p-1}\Big[\big(1+\varepsilon\big)^{1-p} - A^{1-p}\Big] \\ &= \frac{\varepsilon^{+p}\big(1+\varepsilon\big)^{1-p}}{p-1}\end{aligned}$$

et

$$I_2 = \int_1^{1+\varepsilon} x^{-p}\big(x-1\big)^p dx \leqslant \varepsilon^p \int_1^{1+\varepsilon} dx = \varepsilon^{p+1}$$
$$car \quad x^{-p} \leqslant 1 \quad et \quad \big(x-1\big)^p \leqslant \varepsilon^p$$

Par conséquent ona :

$$\big\|Hf\big\|_{L_p}^p \leqslant \frac{\varepsilon^{+p}\big(1+\varepsilon\big)^{1-p}}{p-1} + \varepsilon^{p+1} \quad et \quad \frac{\varepsilon^p\big(1+\varepsilon\big)^{1-p}}{p-1} \leqslant \big\|Hf\big\|_{L_p}^p$$

Donc :

$$\lim_{\varepsilon \mapsto 0^+} \frac{\big\|Hf_\varepsilon\big\|_p}{\big\|\widetilde{H}f_\varepsilon\big\|_p} \geqslant \frac{1}{p-1}$$

Ceci entraine que la constante dans le membre gauche de (3.2) est optimale.

Considérons maintenant $p > 2$.

$$Soit \quad f_\varepsilon(x) = x^{-\varepsilon-\frac{1}{p}} 1_{[1,\infty]}(x) \quad \Big(0 < \varepsilon < \frac{1}{p'} \ , \quad p' \ conjugu\,de \ \ p\Big)$$

Alors

$$\big\|\widetilde{H}f_\varepsilon\big\|_p^p \geqslant \int_1^\infty \Big(\int_x^\infty \frac{dt}{t^{1+\varepsilon+\frac{1}{p}}}\Big)^p dx = \frac{p^p}{\varepsilon p(1+\varepsilon p)^p}$$

et

$$\big\|Hf_\varepsilon\big\|_p^p \leqslant \int_1^\infty \Big(\frac{1}{x}\int_0^x \frac{dt}{t^{\frac{1}{p}+\varepsilon}}\Big)^p dx = \frac{p^p}{\varepsilon p(p-1-\varepsilon p)^p}$$

Par conséquent :

$$\lim_{\varepsilon \mapsto 0^+} \frac{\big\|Hf_\varepsilon\big\|_p}{\big\|\widetilde{H}f_\varepsilon\big\|_p} \geqslant p-1$$

Ceci montre que la constante dans le membre droite de (3.3) est la plus petite possible.

Finalement ona :

$$\frac{\varepsilon^p(1+\varepsilon)^{1-p}}{p-1} \leqslant \big\|Hf_\varepsilon\big\|_{L_p}^p \leqslant \frac{\varepsilon^p(1+\varepsilon)^{1-p}}{p-1} + \varepsilon^{p+1} \tag{3.32}$$

De même , ona

$$\|\widetilde{H}f_\varepsilon\|_{L_p}^p = \int_0^1 \Big(\int_1^{1+\varepsilon} \frac{dt}{t}\Big)^p dx + \int_1^{1+\varepsilon} \Big(\int_x^{1+\varepsilon} \frac{dt}{t}\Big)^p dx$$
$$= \Big[\ln(1+\varepsilon)\Big]^p + \int_1^{1+\varepsilon} \Big(\ln\big(\frac{1+\varepsilon}{x}\big)\Big)^p dx$$

Par conséquent :

$$\Big[\ln(1+\varepsilon)\Big]^p \leqslant \|\widetilde{H}f_\varepsilon\|_{L_p}^p \leqslant \Big[\ln(1+\varepsilon)\Big]^p (1+\varepsilon) \tag{3.33}$$

En utilisant les estimations (3.32) et (3.33) , nous obtenons

$$\lim_{\varepsilon \mapsto 0^+} \frac{\|Hf_\varepsilon\|_p}{\|\widetilde{H}f_\varepsilon\|_p} = (p-1)^{\frac{-1}{p}}$$

Il suit que les constantes dans le membre droit de (3.2) et le membre gauche de (3.3) ne peu veut pas être altérés.

Soit $1 < p < 2$.

$$f_\varepsilon(x) = x^{\varepsilon - \frac{1}{p}} 1_{[0,1]}(x) \qquad (0 < \varepsilon < \frac{1}{p}).$$

Alors d'une par ona :

$$\|Hf_\varepsilon\|_p^p \geqslant \int_0^1 \Big(\frac{1}{x}\int_0^x t^{\varepsilon - \frac{1}{p}} dt\Big)^p dx$$
$$= \frac{p^p}{\varepsilon p (p-1+\varepsilon p)^p}$$

d'autre part

$$\|\widetilde{H}f_\varepsilon\|_p^p \leqslant \Big(\frac{1}{p} - \varepsilon\Big)^{-p} \int_0^1 x^{[\varepsilon - \frac{1}{p}]p} dx = \frac{p^p}{\varepsilon p (1-\varepsilon p)^p}$$

Chapitre 4

L'espace $L^{(\theta,\infty)}$

4.1 Définition et proprieté de L'espace $L^{(\theta,\infty)}$

Définition 4.1.1. *Soit $I = (0,1), \theta \geq 0, 1 \leq p < \infty$ Le grand espace L^{∞} note par $L^{(\theta,\infty)}(I)$ a été introduit dans* [1] *par*

$$L^{(\theta,\infty)}(I) = \left\{ f(x) \in \bigcap_{1 \leq p < \infty} L^p(I) : \sup_{1 \leq p < \infty} \frac{1}{p^\theta} \left(\frac{1}{|I|} \int_I f^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \right\}$$

et on pose :

$$\| f \|_{L^{(\theta,\infty)}(I)} = \sup_{1 \leq p < \infty} \frac{1}{p^\theta} \left(\frac{1}{|I|} \int_I f^p dx \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{4.1}$$

Proposition 4.1.1. *$L^{(\theta,\infty)}(I)$ est un espace vectoriel normé complet ie : est un espace de Banach*

Preuve : 1) Montrer que $L^{(\theta,\infty)}(I)$ est espace vectoriel normé :

soient $f, g \in L^{(\theta,\infty)}(I)$ et $\lambda \in \mathbb{C}$

Alors ona $\forall 1 \leq p < \infty$; $f + g \in L_p(I)$ et $\lambda f \in L_p(I)$

Il suffit de montrer que :

$$\|f + g\|_{L^{(\theta,\infty)}(I)} < \infty$$

et

$$\|\lambda f\|_{L^{(\theta,\infty)}(I)} < \infty$$

On peut écrire $\|f\|_{L^{\theta,\infty}(I)}$ comme suite :

$$\begin{aligned}
\|f\|_{L^{(\theta,\infty)}(I)} &= \sup_{1\leq p<\infty} \frac{1}{p^\theta}\left(\frac{1}{|I|}\int_I f^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \sup_{1\leq p<\infty} \frac{1}{p^\theta}\left(|I|^{-1}\int_I f^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \sup_{1\leq p<\infty} \frac{1}{p^\theta}|I|^{\frac{-1}{p}}\left(\int_I f^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \sup_{1\leq p<\infty} \frac{1}{p^\theta}|I|^{\frac{-1}{p}}\|f\|_{L_p(I)}
\end{aligned}$$

Il s'ensuit de (4.1) que

$$\begin{aligned}
\|f+g\|_{L^{(\theta,\infty)}(I)} &= \sup_{1\leq p<\infty} \frac{1}{p^\theta}|I|^{\frac{-1}{p}}\|f+g\|_{L_p(I)} \\
&\leq \sup_{1\leq p<\infty} \frac{1}{p^\theta}|I|^{\frac{-1}{p}}\left(\|f\|_{L_p(I)}+\|g\|_{L_p(I)}\right)(Inegalite\,de\,Minkowski) \\
&\leq \sup_{1\leq p<\infty} \frac{1}{p^\theta}|I|^{\frac{-1}{p}}\|f\|_{L_p(I)} + \sup_{1\leq p<\infty} \frac{1}{p^\theta}|I|^{\frac{-1}{p}}\|g\|_{L_p(I)} \\
&= \|f\|_{L^{(\theta,\infty)}(I)} + \|g\|_{L^{(\theta,\infty)}(I)} < \infty
\end{aligned}$$

Ceci entraine que $f+g \in L^{(\theta,\infty)}(I)$

Et

$$\begin{aligned}
\|\lambda f\|_{L^{(\theta,\infty)}(I)} &= \sup_{1\leq p<\infty} \frac{1}{p^\theta}\|\lambda f\|_{L^{\theta,\infty}(I)} \\
&= \sup_{1\leq p<\infty} \frac{1}{p^\theta}\left(|I|^{-1}\int_I (\lambda f)^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \sup_{1\leq p<\infty} \frac{1}{p^\theta}|\lambda|\|f\|_{L_p(I)} \\
&= |\lambda|\|f\|_{L^{\theta,\infty}(I)} < \infty
\end{aligned}$$

Donc $\lambda f \in L^{(\theta,\infty)}(I)$

Par conséquent $L^{(\theta,\infty)}(I)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$

Montrons qu'il est normé par

$$\| f \|_{L^{(\theta,\infty)}(I)} = \sup_{1\leq p<\infty} \frac{1}{p^\theta}\left(\frac{1}{|I|}\int_I (f(x))^p dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Considérons la fonctionelle définie par :

$$\|.\|_{L^{(\theta,\infty)}(I)} : L^{(\theta,\infty)}(I) \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

$$f \longmapsto \|f\|_{L^{(\theta,\infty)}(I)} = \sup_{1\leq p<\infty} \frac{1}{p^\theta}\left(\frac{1}{|I|}\int_I (f(x))^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

La fonctionelle $\| \, . \, \|_{L^{(\theta,\infty)}(I)}$ définie bien une norme sur l'espace $L^{(\theta,\infty)}(I)$.En effet ;

1) $0 \leq \|f\|_{L^{(\theta,\infty)}(I)} = \sup\limits_{1\leq p<\infty} \left(\frac{1}{p^\theta}|I|^{\frac{-1}{p}}\right)\|f\|_{L_p(I)} < \infty$
2) $\|f\|_{L^{(\theta,\infty)}(I)} = 0 \Longleftrightarrow \|f\|_{L^p(I)} = 0 \Longleftrightarrow f = 0$
3) $\|\lambda f\|_{L^{(\theta,\infty)}(I)} = |\lambda|\|f\|_{L^{(\theta,\infty)}(I)}$
4) $\|f+g\|_{L^{(\theta,\infty)}(I)} \leq \|f\|_{L^{(\theta,\infty)}(I)} + \|g\|_{L^{(\theta,\infty)}(I)}, \forall f,g \in L^{(\theta,\infty)}(I)$

Complétude :

On demontre que toute suite de Cauchy dans $L^{(\theta,\infty)}(I)$ est convergente dans L'espace $L^{(\theta,\infty)}(I)$

Preuve : similaire á celle de la complétude des espaces $L_p(I)$

Remarque 4.1.2. *Pour $\theta = 0$ ona :*

$$L^{(\theta,\infty)}(I) = L_\infty(I)$$

En effet :

$$\lim_{p\longrightarrow\infty} \|f\|_{L_p(I)} = \|f\|_{L_\infty(I)}$$

Ona les inclusion suivantes :

$$L_\infty(I) \subset L^{(\theta,\infty)}(I) \subset L_p(I)$$

4.2 Opérateur de Hardy dans $L^{(\theta,\infty)}(I)$

Théorème 4.2.1. *Soit $p > 1$ et f une fonction mesurable et non negative dans $I = [0.1]$.Alors*

$$\left(\int_0^1 \left(\tfrac{1}{|x|}\int_0^x f dt\right)^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{p}{p-1}\left(\int_0^1 f^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \tag{4.2}$$

En d'autres terme , (4.2) *equivalente á*

$$\left\|\frac{1}{|x|}\int_0^1 f dt\right\|_{L^p(I)} \leq \frac{p}{p-1}\|f\|_{L^p(I)} \tag{4.3}$$

Preuve : En utilisant le changement de variable $t = zx$ nous obtenons :

$$\begin{aligned}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt &= \frac{1}{x}\int_0^1 f(zx)xdz \\ &= \int_0^1 f(zx)dz \\ &= \int_0^1 f(tx)dt\end{aligned}$$

alors

$$\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt = \int_0^1 f(tx)dt$$

Donc nous avons

$$\left[\int_0^1 \left(\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt\right)^p dx\right]^{\frac{1}{p}} = \left[\int_0^1 \left(\int_0^1 f(tx)dt\right)^p dx\right]^{\frac{1}{p}}$$

D'aprés l'inégalité integrale de Minkowsky :

$$\left[\int_0^1 \left(\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt\right)^p dx\right]^{\frac{1}{p}} \leq \int_0^1 \left(\int_0^1 f^p(tx)dx\right)^{\frac{1}{p}} dt$$

Un nouveau changement de variable $s = tx$ nous permet d'obtenir :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \left(\int_0^1 f^p(tx)dx \right)^{\frac{1}{p}} dt &= \int_0^1 \left(\int_0^t f^p(s)\frac{ds}{t} \right)^{\frac{1}{p}} dt \\
&\leq \int_0^1 \left(\int_0^1 f^p(s)\frac{ds}{t} \right)^{\frac{1}{p}} dt \,(\textit{comme}:\ t \in [0,1]) \\
&= \int_0^1 \left(\int_0^1 t^{-1} f^p(s)ds \right)^{\frac{1}{p}} dt \\
&= \int_0^1 t^{\frac{-1}{p}} \left(\int_0^1 f^p(s)ds \right)^{\frac{1}{p}} dt \\
&= \left[\frac{t^{\frac{-1}{p}+1}}{\frac{p-1}{p}} \right]_0^1 \left(\int_0^1 f^p(s)ds \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \frac{1}{\frac{p-1}{p}} \left(\int_0^1 f^p(s)ds \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \frac{p}{p-1} \left(\int_0^1 f^p(s)ds \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \frac{p}{p-1} \left(\int_0^1 f^p(t)dt \right)^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}$$

Finalement nous avons :

$$\left[\int_0^1 \left(\frac{1}{x} \int_0^x f(t)dt \right)^p dx \right]^{\frac{1}{p}} \leq \frac{p}{p-1} \left(\int_0^1 f^p(t)dt \right)^{\frac{1}{p}}$$

Théorème 4.2.2. *Soit* $0 < \theta < \infty$. *alors*

$$\left\| \frac{1}{|x|} \int_0^x f dt \right\|_{L^{(\theta,\infty)}(I)} \leq \frac{(1+\theta)^{1+\theta}}{\theta^\theta} \|f\|_{L^{(\theta,\infty)}(I)}$$

Preuve : Pour tout $p_0 \in (1,\infty)$, on a

$$
\begin{aligned}
&\left\| \tfrac{1}{|x|}\textstyle\int_0^x f dt \right\|_{L^{(\theta,\infty)}(I)} \\
= &\sup_{1\leq p<\infty} \frac{1}{p^\theta}\left(\int_0^1 \left(\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt\right)^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
= &\; max\left\{\sup_{1\leq p<p_0} \tfrac{1}{p^\theta}\left(\textstyle\int_0^1\left(\tfrac{1}{|x|}\textstyle\int_0^x fdt\right)^p dx\right)^{\frac{1}{p}}, \sup_{p_0\leq p<\infty}\frac{1}{p^\theta}\left(\int_0^1\left(\frac{1}{|x|}\int_0^x fdt\right)^p dx)^{\frac{1}{p}}\right\} \\
\leq &\; max\left\{\sup_{1\leq p<p_0}\frac{p_0^\theta}{p{p_0}^\theta}\left(\int_0^1\left(\frac{1}{|x|}\int_0^x fdt\right)^{p_0} dx\right)^{\frac{1}{p_0}}, \sup_{p_0\leq p<\infty}\frac{1}{p^\theta}\left(\int_0^1\left(\frac{1}{|x|}\int_0^x fdt\right)^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\right\} \\
\leq &\; max\left\{\sup_{1\leq p<p_0}\frac{p_0^\theta}{p^\theta}\sup_{p_0\leq p<\infty}\frac{1}{p^\theta}\left(\int_0^1\left(\frac{1}{|x|}\int_0^x fdt\right)^p dx\right)^{\frac{1}{p}}, \sup_{p_0\leq p<\infty}\frac{1}{p^\theta}\left(\int_0^1\left(\frac{1}{|x|}\left\{\int_0^x fdt\right)^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\right\} \\
= &\; p_0^\theta \sup_{p_0\leq p<\infty}\frac{1}{p^\theta}\left(\int_0^1\left(\frac{1}{|x|}\int_0^x fdt\right)^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
\leq &\; p_0^\theta \sup_{p_0\leq p<\infty}\frac{p}{p^\theta(p-1)}\left(\int_0^1 f^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
\leq &\; \tfrac{p_0^{1+\theta}}{p_0-1}.\sup_{1\leq p<\infty}\frac{1}{p^\theta}\left(\int_0^1 f^p dx\right)^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}
$$

oú nous avons utilisé le Theorem (4.2.1) .Comme $\frac{p_0^{1+\theta}}{p_0-1}$ atteind sa valeur minimale $\frac{(1+\theta)^{1+\theta}}{\theta^\theta}$ on $p_0 = \frac{1+\theta}{\theta}$,alors nous posons $p_0 = \frac{1+\theta}{\theta}$ ainsi nous obtenons l'inégalité (3)

Théorème 4.2.3. *Soit* $1 < p_0 < \infty$. *Alors*

$$\sup_{p_0\leq p<\infty}\frac{1}{p^\theta}\left(\int_I f^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq \|f\|_{L^{(\theta,\infty)}(I)} \leq p_0^\theta \sup_{p_0\leq p<\infty}\frac{1}{p^\theta}\left(\int_I f^p dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

preuve : l'inégalité

$$\sup_{p_0\leq p<\infty}\frac{1}{p^\theta}\left(\int_I f^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq \|f\|_{L^{(\theta,\infty)}(I)}$$

est triviale.

Nous prouvons

$$\|f\|_{L^{(\theta,\infty)}(I)} \leq p_0^\theta \sup_{p_0\leq p<\infty}\frac{1}{p^\theta}\left(\int_I f^p dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

$$\sup_{1\leq p<p_0}\frac{1}{p^\theta}\left(\int_I f^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq \sup_{1\leq p<p_0}\frac{1}{p^\theta}\left(\int_I f^{p_0} dx\right)^{\frac{1}{p_0}}$$

$$\leq \sup_{1\leq p<p_0} \frac{p_0^\theta}{p^\theta}. \sup_{p_0\leq p<\infty} \frac{1}{p^\theta}\left(\int_I f^p dx\right)^{\frac{1}{p}} = p_0^\theta \sup_{p_0\leq p<\infty} \frac{1}{p^\theta}\left(\int_I f^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

puis

$$\|f\|_{L^{\theta,\infty}(I)} = max\left\{ \sup_{1\leq p<p_0} \frac{1}{p^\theta}\left(\int_I f^p dx\right)^{\frac{1}{p}}, \sup_{p_0\leq p<\infty} \frac{1}{p^\theta}\left(\int_I f^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \right\}$$

$$\leq p_0^\theta \sup_{p_0\leq p<\infty} \frac{1}{p^\theta}\left(\int_I f^p dx\right)^{\frac{1}{p}},$$

comme voulu.