Mémoire en vue de l'obtention du diplôme de Master en Mathématiques, Intitulé: **Approximation Polynomiale des Fonctions**

Présenté par:
Assam Abdelhak
Aidouni Sarra
Hadad Fatma
Marouani Horiya

Département des Mathématiques

Université Ibn Khaldoun de Tiaret

Plan de Travail

- **Introduction**
- **Résultats Généraux de Projection dans un EVN**
- **Techniques d'Approximation Polynomiale**
- **Calcul des Meilleures approximations**

D'une façon générale, l'approximation polynomiale tente de répondre au problème suivant, à la base même du calcul scientifique : étant donné une fonction f calculable, mais "compliquée", comment la remplacer par une fonction $\tilde{f}$ plus " simple", tout en restant proche de f?.

Pour se fixer un cadre de travail, on considérera que la fonction f qu'on cherche à approcher appartient à un espace vectoriel normé E, et on notera M la partie de E dans laquelle seront choisies les approximations.

Dans la suite, les situations dans lesquelles on se placera seront celles où E est soit l'espace des fonctions continues

$$E = \mathcal{C}^0([a, b]) \tag{1}$$

muni de la norme

$$\|f\|_{L^\infty} = \|f\|_{L^\infty([a,b])} := \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$$

soit l'espace des fonctions de carré (pondéré) intégrable

$$E = L^2_\omega([a, b]) \tag{2}$$

muni de la norme

$$\|f\|_{L^2_\omega} = \|f\|_{L^2_\omega([a,b])} := \left(\int_a^b |f(x)|^2 \omega(x) dx\right)^{1/2}$$

Notion de meilleure approximation:
Dans un tel cadre, la norme de E est l'outil naturel pour mesurer la qualité des approximations. En particulier, on dira que f_M est une meilleure approximation de f (dans M) si:

$$f_M \in M \, et \|f - f_M\|_E = d(f, M) := \inf_{g \in M} \|f - g\|_E. \tag{3}$$

Theorem

(Existence d'une meilleure approximation) *Si M est un sous-espace de dimension fini de E, alors tout élément f de E possède (au moins) une meilleure approximation dans M.*

Preuve:

Tout d'abord, commençons par rappeler que dans un espace de dimension finie, les boules sont compactes, ce qui signifie (entre autres choses) qu'une suite bornée possède toujours une sous-suite convergente (ce qui n'est clairement pas vrai dans un espace de dimension infinie). C'est cette propriété qu'on va utiliser ici. D'après la définition d'une borne inférieure, on sait en effet qu'il existe une suite d'éléments $g_n \in M$, telle que

$$\|f - g_n\|_E \to \inf_{g \in M} \|f - g\|_E.$$

En particulier, une telle suite est forcément bornée, on peut donc utiliser l'argument ci-dessus pour en extraire une sous-suite $g_{\sigma(n)}$ qui converge dans M vers un élément qu'on notera g^*. On aura alors, en utilisant la continuité de la norme,

$$\|f - g^*\|_E = \lim_{n\to\infty} \|f - g_{\sigma(n)}\|_E$$

et

$$\lim_{n\to\infty} \|f - g_n\|_E = \inf_{g\in M} \|f - g\|_E$$

comme $g_{\sigma(n)}$ sous suite de g_n alors:

$$\lim_{n\to\infty} \|f - g_{\sigma(n)}\|_E = \lim_{n\to\infty} \|f - g_n\|_E$$

donc on a:

$$\|f - g^*\|_E = \lim_{n\to\infty} \|f - g_{\sigma(n)}\|_E = \lim_{n\to\infty} \|f - g_n\|_E = \inf_{g\in M} \|f - g\|_E.$$

D'après (3) on obtient :

$$\|f - g^*\|_E = d_E(f, M) = \inf_{g\in M} \|f - g\|_E$$

Alors g^* est une meilleure approximation de f dans M.

Dans la suite, la partie M sera toujours un espace vectoriel de dimension finie. Par exemple, on considèrera le cas où M est l'espace

$$\mathbb{P}_n(x) = \left\{ p(x) = c_n x^n + \cdots + c_0 : c_0, \ldots, c_n \in \mathbb{R} \right\}$$

des polynômes de degré inférieur ou égal à n, clairement inclu dans les espaces (1) et (2) .

Unicité de la meilleure approximation:
La question suivante que l'on peut se poser est alors de savoir si l'on a unicité de la meilleure approximation. L'exemple suivant (très simple) montre que ce n'est a priori pas toujours le cas.

Example

Prenons ici $E = \mathbb{R}^2$ muni de la norme $\|x\|_{\ell^\infty} := \max\left\{|x_1|, |x_2|\right\}$, et pour M, la droite $\left\{x : x_2 = 0\right\}$. Dans la mesure où les "boules" de E sont des carrés de côtés parallèles aux axes, il est facile de voir que le point $y := (0, 1)$, qui est à distance 1 de la droite M, possède une infinité de meilleures approximations dans M : tout le segment $[-1, 1] \times \left\{0\right\} \subset M$, en fait, puisque

$$\|x - y\|_E = \max\left\{|x_1|, 1\right\} \quad \textit{lorsque} \quad x \in M.$$

On a toutefois le résultat suivant.

Definition

(Convexité) Une partie M d'un espace vectoriel E est *convexe si* f *et* $g \in M \Rightarrow \lambda f + (1-\lambda)g \in M, \forall \lambda \in [0,1]$ (combinaison convexe de f et g). Toute boule $B_f = \{g \in E : \|g - f\| \leqslant r\}$ d'un espace métrique E est convexe.

Theorem

(Unicité-cas strictement convexe) *Dans les hypothéses du théorème 1(M est un espace de dimension finie), supposons la boule unité de E soit strictement convexe i.e. que*

$$\|f_1\|_E = \|f_2\|_E = 1 \text{ et } f_1 \neq f_2 \quad \Rightarrow \|f_1 + f_2\|_E < \|f_1\|_E + \|f_2\|_E$$

$$\Rightarrow \left\| \frac{f_1 + f_2}{2} \right\|_E < 1$$

(on dit alors que E est un espace strictement convexe). Alors la meilleure approximation est unique.

Preuve: Supposons que f possède (au moins) deux meilleures approximations distinctes f_1 et f_2 dans M. On a $\|f-f_1\|_E = d_E(f,M)$ et $\|f-f_2\|_E = d_E(f,M)$ donc: $\|f-f_1\|_E = \|f-f_2\|_E = d_E(f,M)$ on divise par $d_E(f,M)$, on obtient: $\left\|\dfrac{f-f_1}{d_E(f,M)}\right\|_E = \left\|\dfrac{f-f_2}{d_E(f,M)}\right\|_E = 1$ et, M étant convexe, $f_3 = \dfrac{f_1+f_2}{2} \in M$. La strict convexité de E nous permet alors d'écrire:
$\|f-f_3\|_E = d_E(f,M)\left\|\dfrac{f-f_1}{2d_E(f,M)} + \dfrac{f-f_2}{2d_E(f,M)}\right\|_E < d_E(f,M)$ ce qui est en contradiction avec la définition de $d_E(f,M)$.
En ce qui concerne nos applications, on a le corollaire suivant.

Corollaire

Pour toute fonction f de $L^2_\omega([a,b])$, il existe une et une seule meilleure approximation polynomiale.

Preuve:

Commençons par observer que $L^2_\omega([a,b])$ est un espace de Hilbert, et à ce titre, strictement convexe. En effet, il est facile de voir que si f_1 et f_2 sont deux fonctions de norme $\|f_1\|_{L^2_\omega} = \|f_2\|_{L^2_\omega} = 1$, l'inégalité (théorème) de Cauchy-Schwarz nous apprend que

$$f_1 \neq f_2 \Rightarrow \langle f_1, f_2\rangle := \int_b^a f_1(x) f_2(x)\omega(x)dx \leqslant \|f_1\|_{L^2_\omega}\|f_2\|_{L^2_\omega} = 1,$$

avec égalité lorsque f_1 et f_2 sont colinéaires. Supposons d'abord que ce n'est pas le cas (on pourrait aussi utiliser l'égalité du parallélogramme) : on aurait

$$\left\|\frac{f_1+f_2}{2}\right\|^2_{L^2_\omega} = \frac{1}{4}\langle f_1+f_2, f_1+f_2\rangle_\omega = \frac{1}{2}\left(1+\langle f_1+f_2\rangle_\omega\right) < 1.$$

Considérons maintenant le cas où f_1 et f_2 sont colinéaires : étant de même norme, mais différentes, f_1 et f_2 seraient alors opposées, et $\left\| f_1 + f_2 \right\|_{L^2_\omega}^2 = 0 < 2$. On en déduit la stricte convexité, et le théorème (1) s'applique.

Remarque

Pour l'approximation en distance uniforme, le théorème (1) ne s'applique pas, en effet il est assez facile de voir que $\mathcal{C}^0([a,b])$ n'est pas strictement convexe. La meilleure approximation polynomiale y est néanmoins unique, comme on le montrera dans la suite. Enfin, on attirera l'attention sur le fait que cette unicité n'a plus lieu lorsque f appartient seulement à $L^\infty([a,b])$: penser à l'approximation affine de $f(x) = \mathrm{sgn}(x)$ sur $[-1,1]$.

Projections orthogonales dans un Hilbert:
Lorsque E est un espace de Hilbert, les résultats précédents nous garantissent donc l'existence et l'unicité d'une meilleure approximation polynomiale. On a en fait un résultat plus précis, énoncé par le théorème ci-dessous (à toutes fins utiles, on attirera l'attention sur le fait que le titre de ce paragraphe est superflu : la notion d'orthogonalité, de même que celle d'angle en général, n'a en effet de sens que dans un espace de Hilbert).

Theorem

(Projection orthogonale sur une partie convexe) *Si E est un espace de Hilbert (de produit scalaire $\langle ., . \rangle_E$), et M un convexe fermé non vide (inclus dans un sous-espace de dimension finie), alors tout $f \in E$ possède une unique meilleure approximation $f_M \in M$, caractérisée par la relation*

$$\langle f - f_M, g - f_M \rangle_E \leqslant 0 \qquad \forall g \in M. \tag{4}$$

Avant de montré le théorème ci-dessus, nous avons la remarque suivante:

Remarque

Le théorème ci-dessus s'explique par les observations suivantes : d'une part, il est clair que l'application $P_M : f \to f_M$ *vérifie* $(P_M)^2 = P_M$, *c'est donc bien une projection. D'autre part, on peut dire qu'elle est orthogonale dans la mesure où, si l'on désigne par*

$$E^{\perp}(f, f_*) := \left\{g \in E : \langle f - f_*, g - f_* \rangle_E = 0\right\}.$$

l'hyperplan orthogonal à $f - f_*$ *passant par un* $f_* \in E$ *arbitraire, et par*

$$E^{-}(f, f_*) := \left\{g \in E : \langle f - f_*, g - f_* \rangle_E \leqslant 0\right\}.$$

le demi-espace délimité par$E^{\perp}(f, f_*)$ *qui ne contient pas* f, f_M *se caractérise par le fait qu'il est le seul élément de* M *pour lequel* M *est entièrement inclus dans* $E^{-}(f, f_M)$.

Preuve du théorème :

D'aprés les théorèmes (1) et (4) ci-dessus, l'existence et l'unicité sont acquises. Notons qu'il est nécessaire de supposer M inclus dans un sous-espace de dimension finie, ou plus généralement, de supposer M localement compact. Il ne nous reste donc plus qu'à montrer que la meilleure approximation est effectivement caractérisée par la relation 3 : considérons donc pour commencer que $\bar{g} \in E$ vérifie:

$$\langle f - \bar{g}, g - \bar{g} \rangle_E \leqslant 0 \qquad \forall g \in M.$$

On a alors

$$\left\|f - \bar{g}\right\|_E^2 + \left\|f - g\right\|_E^2 + 2\langle f - \bar{g}, g - \bar{g} \rangle_E - \left\|g - \bar{g}\right\|_E^2 \leqslant \left\|f - g\right\|_E^2$$

pour tout $g \in M$, preuve que $\bar{g}$ est dans ce cas la meilleure approximation. Réciproquement, supposons par contraposée qu'il existe un $g \in M$ pour lequel

$$\langle f - \bar{g}, g - \bar{g} \rangle_E > 0.$$

On en déduit que la fonction

$$D(\lambda) := \left\| f - ((1-\lambda)\bar{g} + \lambda g) \right\|_E^2$$

est strictement décroissante sur un voisinage de 0, et donc qu'il existe un $\lambda_* \in]0.1[$ pour lequel $g_* := (1-\lambda_*)\bar{g} + \lambda g$ vérifie

$$\left\| f - g_* \right\|_E^2 = D(\lambda_*) < D(0) = \left\| f - \bar{g} \right\|_E^2 .$$

Comme M est convexe, un tel g_* est dans M, et il en découle que $\bar{g}$ n'est pas la meilleure approximation de f dans M. Par contraposée, on conclut la preuve du théorème.

Corollaire

(Projection orthogonale sur un espace vectoriel) *Lorsque M est un sous-espace vectoriel (de dimension finie) de E, la caractérisation (3) de la meilleure approximation devient:*

$$\langle f_M, g\rangle_E = \langle f, g\rangle_E \qquad \forall g \in M, \tag{5}$$

ou, de façon équivalente, $f - f_M \in M^\perp$. En particulier, la projection $P_M : f \to f_M$ est alors linéaire, et si l'on note $\mathcal{G} = \{g_1, \ldots, g_m\}$ une base de M, la meilleure approximation $f_M = \sum_{i=1}^m c_i g_i$ est donnée par:

$$\mathbf{c} = A^{-1}\mathbf{f}, \tag{6}$$

où $\mathbf{c}$, $\mathbf{f}$ et A désignent respectivement les vecteurs (colonnes) $(c_i)_{1\le i\le m}$, $(\langle f, g_i\rangle_E)_{1\le i\le m}$ et la matrice $(\langle g_i, g_j\rangle_E)_{1\le i,j\le m}$ (diagonale lorsque $\mathcal{G}$ est une base orthogonale).

Développements de Taylor:

Un exemple très classique d'approximation polynomiale est donné par les polynômes de Taylor qui apparaissent dans le développement limité d'une fonction. Rappelons-les brièvement : en supposant - pour l'instant - f infiniment régulière, on a en intégrant par parties, pour $x \in [0, 1]$,

$$
\begin{aligned}
f(x) &= f(0) + \int_0^x f'(y) \\
&= f(0) - \left[(x-y)f'(y)\right]_0^x + \int_0^x f''(y)dy \\
&= f(0) + xf'(0) + \int_0^x (x-y)f''(y)dy \\
&= f(0) + xf'(0) - \left[\frac{(x-y)^2}{2}f''(y)\right]_0^x + \int_0^x \frac{(x-y)^2}{2}f^{(3)}(y)dy \\
&= f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2}f''(0) + \int_0^x \frac{(x-y)^2}{2}f^{(3)}(y)dy
\end{aligned}
$$

$$(\ldots)$$

$$= f(0) + x'f'(0) + (\ldots) + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) + \int_0^x \frac{(x-y)^n}{n!}f^{(n+1)}(y)dy.$$

On en déduit donc que le polynôme

$$\mathcal{T}_n f(x) := \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0)$$

qu'on pourrait appeler "polynôme de Taylor de f à l'ordre n", approche f avec une précision ponctuelle

$$|f - \mathcal{T}_n f(x)| = \left| \int_0^x \frac{(x-y)^n}{n!} f^{n+1}(y) dy \right|, \qquad x \in [0,1]. \qquad (7)$$

Estimations d'erreur pour des développements de Taylor:
Ainsi, on obtient facilement l'estimation suivante en distance uniforme, pour une fonction $f \in \mathcal{C}^{(n+1)}([0,1])$:

$$\begin{aligned}\|f - \mathcal{T}_n f\|_{L^\infty([0,1])} &\leq \sup_{x\in[0,1]} \left(\int_0^x \frac{(x-y)^n}{n!} dy\right) \|f^{(n+1)}\|_{L^\infty([0,1])} \\ &\leq C(n) \|f^{(n+1)}\|_{L^\infty([0,1])}\end{aligned} \tag{8}$$

avec $C(n) = \dfrac{1}{(n+1)!}$.

Remarque:

On sera attentif au fait que l'erreur est bien plus faible près du point $x = 0$ (et, plus généralement, de l'origine du développement), dans la mesure où l'on a

$$\|f - \mathcal{T}_n f\|_{L^\infty([0,r])} \leq \frac{r^{n+1}}{(n+1)!}\left\|f^{(n+1)}\right\|_{L^\infty([0,r])} \text{ pour tout } r > 0.$$

A partir de (7), il est également possible d'estimer l'erreur en moyenne quadratique pondérée. On peut en effet écrire, lorsque la dérivée $(n+1)$ -éme f est de carré intégrable,

$$\begin{aligned}
\|f - \mathcal{T}_n f\|^2_{L^2_\omega[0,1]} &= \int_0^1 \left| \int_0^x \frac{(x-y)^n}{n!} f^{(n+1)}(y) dy \right|^2 \omega(x) dx \\
&\leq \int_0^1 \left(\int_0^1 \left| \frac{(x-y)^n}{n!} f^{(n+1)}(y) \right| dy \right)^2 \omega(x) dx \\
&\leq \int_0^1 \left(\left\| \frac{(x-y)^n}{n!} \right\|_{L^2([0,1])} \left\| f^{(n+1)} \right\|_{L^2([0,1])} \right)^2 \omega(x) dx
\end{aligned}$$

où l'on a utilisé l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans la dernière inégalité. Pour $x \in [0,1]$, un petit calcul nous donne

$$\begin{aligned}\int_0^1 |x-y|^k dy &= \int_0^x (x-y)^k dy + \int_x^1 (y-x)^k dy \\ &= \frac{1}{k+1}(x^{k+1} + (1-x)^{k+1}) \leq \frac{1}{k+1}\end{aligned} \tag{9}$$

on en déduit

$$\left\| \frac{(x-y)^n}{n!} \right\|^2_{L^2([0,1])} \leq \frac{1}{(n!)^2} \int_0^1 \left|x-y\right|^{2n} dy \leq \frac{1}{(2n+1)(n!)^2},$$

puis finalement

$$\|f - \mathcal{T}_n f\|_{L^2_\omega([0,1])} \leq C_\omega(n) \left\| f^{(n+1)} \right\|_{L^2([0,1])} \tag{10}$$

avec $\quad C_\omega(n) = \dfrac{1}{n!\sqrt{2n+1}} \|\omega\|^{\frac{1}{2}}_{L^1([0,1])}.$

Interpolation de Lagrange:

Les méthodes d'interpolation sont fondées sur le principe suivant, bien connu

Lemme:

Par $(n+1)$ points fixés $\{(x_0, y_0), \ldots (x_n, y_n)\}$ dans $\mathbb{R}^2$, tels que $a \leq x_0 < \ldots < x_n \leq b$, il passe un et un seul polynôme $p \in \mathbb{P}_n$, vérifiant

$$p(x_i) = y_i, \quad i = 0, \ldots n. \tag{11}$$

Theorem

le polynôme interpolant f aux points x_i, est donné par:
$\mathcal{L}_n f(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\mathcal{L}_{n,i}(x)$ *avec*

$$\mathcal{L}_{n,i}(x) = \prod_{j \neq i} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}, \quad i = 0, \ldots, n$$

Estimations d'erreur pour l'interpolation de Lagrange:

Theorem

Supposons $a \leq x_0 < \ldots < x_n \leq b$. *Si* $f \in C^{(n+1)}([a, b])$, *alors pour tout* $x \in [a, b]$,*il existe un* $\xi_x \in]a, b[$ *pour lequel*

$$f(x) - \mathcal{L}_n f(x) = \frac{1}{(n+1)!} \prod_{n+1}(x) f^{(n+1)}(\xi_x),$$

où $\prod_{n+1}(x) := \prod_{i=0}^{n}(x - x_i)$.

Polynômes et noeuds de Chebyshev :
Pour un entier n et un intervalle $[a, b]$ fixés, le polynôme $\prod_{n+1}(x) = \prod_{i=0}^{n}(x - x_i)$ sur $[a, b]$ peut être écrit comme un cosinus. Plus précisément,il possède la propriété de passer $n + 2$ fois par sa valeur (absolue) maximale : une fois dans chaque intervalle $]x_{i-1}, x_i[, \quad i = 1, \dots, n$. et une fois par extrémité de l'intervalle. Pour établir cette propriété, on va se placer par commodité sur l'intervalle $[-1, 1]$. Les polynômes de Chebyshev y sont définis par la relation

$$\mathcal{C}_k(x) := \cos(k \arccos(x)),$$

et vérifient (en appliquant quelques formules de trigonométrie)

$$\arccos(x) = \theta \Longleftrightarrow x = \cos(\theta) \Longrightarrow \mathcal{C}_0(x) = \cos(0\arccos(x)) = \cos(0) = 1$$

$$\mathcal{C}_1(x) = \cos(\arccos(x)) = \cos(\theta) = x,$$

et

$$\mathcal{C}_{k+1}(x) = \cos((k+1)\arccos(x)) = \cos(k+1)\theta),$$

D'autre par on a

$$\cos(k+1)\theta = \cos(k\theta)\cos(\theta) + \cos(k\theta)\cos(\theta) - \cos(k-1)\theta$$

donc

$$\mathcal{C}_{k+1}(x) = 2x\mathcal{C}_k(x) - \mathcal{C}_{k-1}(x) \quad pour \quad k \geq 1 \qquad (12)$$

ce qui prouve que ce sont bien des polynômes. Clairement, on a

$$|\mathcal{C}_k(x)| = |\cos\theta| \leq 1 \Longrightarrow \|\mathcal{C}_k(x)\|_{L^\infty([-1,1])} = \|\cos\theta\|_{L^\infty([-1,1])}$$

Donc

$$\|\mathcal{C}_k\|_{L^\infty([-1,1])} \leq 1$$

pour tout k , et cette valeur est au moins atteinte aux extrémités de l'intervalle, puisque

$$\mathcal{C}_k(-1) = \cos(k\pi) = (-1)^k \; et \; \mathcal{C}_k(1) = \cos(k \arccos(1)) = \cos(0) = 1. \tag{13}$$

La fonction $x \to k \arccos(x)$ étant d'autre part une bijection continue de $[-1, 1]$ sur $[0, k\pi]$, il apparaît que $\mathcal{C}_k$ possède k zéros distincts $x_0^{\mathcal{C}}, \dots, x_{k-1}^{\mathcal{C}}$ dans l'intervalle $[-1, 1]$, et passe une fois (et une seule) par ± 1 entre chaque couple de zéros successifs. On désignera les $k + 1$ extrema de $\mathcal{C}_k$ par

$$y_0 = -1, \quad y_i \in \,]x_{i-1}^{\mathcal{C}}, x_i^{\mathcal{C}}[\quad pour \quad i = 1, \dots, k-1, \quad et \quad y_k = 1.$$

Le point essentiel consiste alors à montrer que grâce à ses oscillations d'amplitude maximale (on parle alors d'équi-oscillation, et pour être bien clair, au risque d'être redondant,nous parlerons d'équi-oscillations d'amplitude maximale), $\mathcal{C}_k$ minimise son amplitude sur l'intervalle $[-1, 1]$ à un facteur multiplicatif près.

Pour le voir, commençons par observer d'après (12) que le coefficient dominant de $\mathcal{C}_k$ est 2^{k-1}. Considérons ensuite un polynôme arbitraire de degré k et de coefficient dominant 2^{k-1} , i.e.

$$p_k(x) = 2^{k-1}x^k + \ldots + \mathcal{C}_0,$$

et supposons que p_k soit de norme strictement inférieure à 1, i.e.

$$\|p_k\|_{L^\infty([-1,1])} < 1 = \|\mathcal{C}_k\|_{L^\infty([-1,1])}.$$

Les $(k+1)$ extrema de $\mathcal{C}_k$ étant alors de valeur absolue strictement supérieure à p_k , on en déduirait que

$$signe(\mathcal{C}_k(y_i) - p_k(y_i)) = signe(\mathcal{C}_k(y_i)) = (-1)^{k+i}, \quad i = 0, \ldots, k$$

et il existerait k points en lesquels la différence $\mathcal{C}_k - p_k$ devrait s'annuler. Cette différence étant un polynôme de degré $(k-1)$, ceci ne serait possible qu'à condition qu'il soit nul, et l'on aurait alors $\|p_k\|_{L^\infty([-1,1])} = \|\mathcal{C}_k\|_{L^\infty([-1,1])} = 1$, d'où la contradiction. On a donc montré le théorème suivant.

Theorem

Sur l'intervalle $[-1,1]$, *un polynôme* p_{n+1} *unitaire (i.e. de coefficient dominant égal à* 1 *) de degré (exactement) égal à* $(n+1)$ *vérifie*

$$\|p_{n+1}\|_{L^\infty([-1,1])} \geq 2^{-n} = \|\prod_{n+1}^{\mathcal{C}}\|_{L^\infty([-1,1])},$$

où $\prod_{n+1}^{\mathcal{C}}(x) = \prod_{i=0}^{n}(x - x_{n+1,i}^{\mathcal{C}}) = 2^{-n}\mathcal{C}_{n+1}(x)$ *n'est rien d'autre que le polynôme de Chebyshev de degré* $n+1$, *ramené à un coefficient dominant égal à* 1.

Preuve :
Pour que ce résultat soit applicable en pratique, il ne nous reste plus qu'à calculer les zéros $x_i^{\mathcal{C}}$ de $\mathcal{C}_{n+1}$, ce qui ne pose aucune difficulté particulière. On a en effet (en faisant attention à ce les équivalences soient bien des équivalences ...) On a

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}_{n+1}(x) = 0 &\iff \cos((n+1)\arccos(x)) = 0 \\
&\iff \cos(n+1)\theta = 0 \\
&\iff (n+1)\theta = \frac{\pi}{2} + j\pi, \quad j \in \mathbb{Z} \\
&\iff \theta = \frac{1}{(n+1)}\left(\frac{\pi}{2} + j\pi\right), \quad j \in \mathbb{Z} \\
&\iff \cos\theta = \cos\left(\frac{(2j+1)\pi}{2(n+1)}\right), \quad j \in \mathbb{Z} \\
&\iff x = \cos\left(\frac{(2j+1)\pi}{2(n+1)}\right), \qquad j \in \mathbb{Z} \\
&\iff x \in \left\{x_{n+1,j}^{\mathcal{C}} := \cos\left(\frac{(2j+1)\pi}{2(n+1)}\right) \quad : \quad j = 0, \dots, n\right\}.
\end{aligned}$$

tel que $\dfrac{(2j+1)}{2(n+1)} \in [0,\pi]$.

Pour appliquer ces résultats à n'importe quel segment $[a,b]$, on peut finalement désigner par $\hat{x}^{\mathcal{C}}_{n+1,i}$ les noeuds de Chebyshev sur l'intervalle $[-1,1]$, $\hat{\prod}_{n+1}(\hat{x}) = \prod_{i=0}^{n}(\hat{x} - \hat{x}^{\mathcal{C}}_{n+1,i})$ le polynôme correspondant, et utiliser le changement de variable

$$\hat{x} \in [-1,1] \to x = a + \frac{b-a}{2}(\hat{x}+1) \in [a,b].$$

En définissant par

$$x^{\mathcal{C}}_{n+1} := a + \frac{b-a}{2}\left(\cos\left(\frac{(2j+1)\pi}{2(n+1)}\right)+1\right), \quad j = 0,\ldots,n \quad (14)$$

les noeuds de Chebyshev sur l'intervalle $[a,b]$, on aura ainsi

$$\prod_{n+1}^{\mathcal{C}}(x) := \prod_{i=0}^{n}(x - x^{\mathcal{C}}_{n+1,i}) = \left(\frac{b-a}{2}\right)^{n+1} \hat{\prod}_{n+1}^{\mathcal{C}}(\hat{x}) \qquad (15)$$

d'où $\|\prod^{\mathcal{C}}_{n+1}\|_{L^\infty([a,b])} = \left(\dfrac{b-a}{2}\right)^{n+1} 2^{-n}$, et le théorème (8) prend la forme suivante.

Corollaire

Si p_{n+1} *est un polynôme unitaire de degré* $(n+1)$, *alors il vérifie*

$$\|p_{n+1}\|_{L^\infty([a,b])} \geq 2\left(\frac{b-a}{4}\right)^{n+1} = \|\prod_{n+1}^{\mathcal{C}}\|_{L^\infty([a,b])},$$

où $\prod_{n+1}^{\mathcal{C}}$, *donné par* $(14)-(15)$, *est le polynôme de Chebyshev associé à l'intervalle* $[a,b]$, *ramené à un coefficient dominant égale à* 1.

Plus tard, on verra réapparaître la proprieté d'équi-oscillation d'amplitude maximale lorsqu'on cherchera à caractériser (et à calculer) le polynôme de meilleure approximation en distance uniforme. En termes d'approximation polynomiale, il est déjà intéressant de remarquer que le théorème précédent (dans sa version " segment $[a, b]$ ", donnée par le corollaire) peut se formuler de la façon (équivalente) suivante.

Theorem

(formulation équivalente du corollaire) *Si la fonction* $f = q_{n+1}$ *est un polynôme unitaire de degré (exactement) égal à* $(n+1)$*, alors toute approximation polynomiale* p_n *de degré* n *vérifie*

$$\|q_{n+1} - p_n\|_{L^\infty([a,b])} \geq 2\left(\frac{b-a}{4}\right)^{n+1},$$

et la meilleure approximation (sur l'intervalle $[a,b]$*) est donnée par*

$$p_n = q_{n+1} - \prod_{n+1}^{\mathcal{C}} \in \mathbb{P}_n$$

où $\prod_{n+1}^{\mathcal{C}}$*, donné par* $(14)-(15)$*, est le polynôme de Chebyshev associé à l'intervalle* $[a,b]$*, ramené à un coefficient dominant égale à 1.*

Interpolation d'Hermite :
L'interpolation d'Hermite suit une approche qui généralise à la fois les approximations de Taylor et de Lagrange. En d'autres termes, on cherche ici à faire coïncider f et p, ainsi que quelques dérivées, en différents points x_i de $[a, b]$. Sans surprise, on commencera donc par établir le théorème suivant.

Theorem

Etant donnés $(k+1)$ *points* $x_0, \dots, x_k$ *de* $[a, b]$, *et* $(k+1)$ *entiers naturels* $\alpha_0, \dots, \alpha_k$, *on pose*
$n = \sum_{i=0}^{k}(\alpha_i + 1) - 1 = k + \sum_{i=0}^{n} \alpha_i$. *Alors pour toute fonction* f *définie sur* $[a, b]$ *et admettant des dérivées jusqu'à l'ordre* α_i *en chaque point* x_i, *il existe un unique polynôme* $p_n \in \mathbb{P}_n$ *interpolant* f *et ses* α_i *dérivées aux points* x_i, *i.e. tel que*

$$\forall i \in \{0, \dots, k\}, \quad \forall j \in \{0, \dots, \alpha_i\}, \quad p_n^{(j)}(x_i) = f^{(j)}(x_i) \qquad (16)$$

interpolation de f et f' :
On prend ici $\alpha_i = 1$ pour tout $i = 0, \ldots, k$. Alors il existe un unique polynôme p_n de degré inférieur ou égal à $n = 2k + 1$ qui interpole f et f' aux points x_i, au sens où

$$\forall x_i \in \{0, \ldots, k\}, \quad p_n(x_i) = f(x_i) \quad et \quad p'(x_i) = f'(x_i).$$

De plus, il n'est pas très difficile de vérifier que p_n s'écrit

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{k} f(x_i) q_i(x) + \sum_{i=0}^{k} f'(x_i) r_i(x) \tag{17}$$

avec (en désignant classiquement par $\mathcal{L}_i(x) = \prod_{j=0}^{k} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$ les polynômes de Lagrange associés aux points $x_0, \ldots, x_k$)

$$q_i(x) = \left[1 + 2\mathcal{L}_i'(x_i)(x_i - x)\right]\mathcal{L}_i^2(x) \quad et \quad r_i(x) = (x - x_i)\mathcal{L}_i^2(x).$$

On remarquera en effet que les polynômes q_i et r_i sont les polynômes de $\mathbb{P}_n$ qui vérifient

$$q_i(x_j) = \delta_{i,j} \quad et \quad q_i'(x_j) = 0, \quad \forall i, j \in \{0, \dots, k\} \tag{18}$$

et

$$r_i(x_j) = 0 \quad et \quad r_i'(x_j) = \delta_{i,j}, \quad \forall i, j \in \{0, \dots, k\} \tag{19}$$

(dont l'existence et l'unicité est donnée par le théorème 10). Enfin, on pourra remarquer qu'il est équivalent de vérifier $(16) - (17)$ pour toute fonction f (dérivable),ou de vérifier $(18) - (19)$.

Approximation par des polynômes de Bernstein :
Les estimations d'erreur qu'on a établies ne permettent de garantir une précision donnée pour une méthode d'ordre élevé, que si la fonction cible f possède elle-même un nombre élevé de dérivées continues. Concrètement,cette restriction risque de poser problème, car les fonctions qu'on rencontre en pratique ne sont en général pas très régulières, et l'amplitude des dérivées d'ordre élevées - lorsqu'elles sont bornées - augmente souvent très vite avec l'ordre (penser par exemple à un signal très régulier qui serait perturbé par un "bruit" de très faible amplitude mais de très haute fréquence).

Dans la suite, on verra comment contourner cet obstacle par l'emploi de splines,ou plus généralement de méthodes polynomiales par morceaux. Mais il est également possible de construire des polynômes d'ordres élevés qui convergent en distance uniforme vers une fonction f pour peu qu'elle soit continue, ce que dit le théorème 11 (de Weierstrass), très célèbre. Une façon de réaliser cette construction est d'utiliser les polynômes de Bernstein associés à $f \in \mathcal{C}^0$, qu'on définit (ici sur le segment $[0, 1]$) comme

$$\mathcal{B}_n f(x) := \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k}.$$

On pourra observer que $\mathcal{B}_n f$ interpole f aux extrémités du segment, i.e. $\mathcal{B}_n f(0) = f(0)$ et $\mathcal{B}_n f(1) = f(1)$

En d'autres termes, on voit que $\mathcal{B}_n$ n'est pas une projection sur les polynômes $\mathbb{P}_n$,du moins pas lorsque $n \geq 2$. Une autre façon de le voir est de poser $p(x,y) = (x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k x^k y^{n-k}$ et d'observer que

$$f(x) = 1 \implies \mathcal{B}_n f(x) = p(x, 1-x) = 1 \qquad (20)$$

d'après la formule du binôme de Newton, ce qui signifie que $\mathcal{B}_n$ (application linéaire) préserve les constantes. En dérivant p, on a également

$$\sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k \left(\frac{k}{n}\right) x^k y^{n-k} = \frac{x}{n}\frac{\partial p}{\partial x}(x,y) = \frac{x}{n}\left(n(x+y)^{n-1}\right),$$

d'où

$$f(x) = x \implies \mathcal{B}_n f(x) = \frac{x}{n}\frac{\partial p}{\partial x}(x, 1-x) = x, \qquad (21)$$

ce qui signifie que $\mathcal{B}_n$ préserve également les fonctions affines. En revanche $\mathcal{B}_n$ ne préserve plus les polynômes quadratiques : on a en effet, par un calcul semblable

$$\sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k \left(\frac{k(k-1)}{n^2} \right) x^k y^{n-k} = \frac{x^2}{n^2} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}(x,y) = \frac{x^2}{n^2} \left(n(n-1)(x+y)^{n-2} \right),$$

d'où

$$\sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k \left(\frac{k^2}{n^2} \right) x^k y^{n-k} = \frac{x^2(n-1)}{n}(x+y)^{n-2} + \frac{x}{n}(x+y)^{n-1},$$

et finalement

$$f(x) = x^2 \implies \mathcal{B}_n f(x) = \frac{x^2(n-1)}{n} + \frac{x}{n} \neq x^2. \qquad (22)$$

Venons-en maintenant au théorème de Weierstrass.

Theorem

(Weierstrass) *Toute fonction continue sur un segment* $[a, b]$ *peut être approchée uniformément par des polynômes.*

Caractérisation de la meilleure approximation en distance uniforme:
nous avons prouvé que lorsque f était un polynôme de degré $(n+1)$, i.e. $f(x) = c_{n+1}x^{n+1}, \ldots, c_0$ avec $c_{n+1} \neq 0$, l'approximation par un polynôme de degré n vérifiait nécessairement

$$\|f - p_n\|_{L^\infty([a,b])} \geq 2c_{n+1}\left(\frac{b-a}{4}\right)^{n+1}$$

et que la meilleure approximation - au sens de la distance $L^\infty([a, b])$ était donnée par le polynôme

$$p_n = f - c_{n+1}\prod_{n+1}^{\mathcal{C}} \in \mathbb{P}_n,$$

$\prod_{n+1}^{\mathcal{C}}$ étant le polynôme de Chebyshev associé à l'intervalle $[a, b]$

on a vu que la différence entre f et sa meilleure approximation equi-oscillait autour de 0 avec une amplitude maximale, au sens où il existait $(n+2)$ points $y_0, \ldots, y_{n+1} \in [a, b]$, tels que

$$\begin{aligned} (f - p_n)(y_i) &= (-1)^i (f - p_n)(y_0), \quad i = 1, \ldots, n+1, \\ \textit{et} \qquad |(f - p_n)(y_0)| &= \|f - p_n\|_{L^\infty([a,b])}, \end{aligned} \tag{23}$$

Theorem

Si f est continue sur $[a, b]$, $p_n \in \mathbb{P}_n$ est meilleure approximation polynomiale si et seulement si la propriété (23) est vérifiée pour un ensemble de points $y_0, \ldots, y_{n+1}$ donnés.

Theorem

Il existe un et un seul polynôme $p_n \in \mathbb{P}_n$ *de meilleure approximation de* f *en distance uniforme, caractérisé par la propriété d'équi-oscillation d'amplitude maximale* (23).

Calcul de la meilleure approximation en distance uniforme :
Commençons par un résultat pratique.
proposition Pour $(n+2)$ points donnés $x_0, \ldots, x_{n+1}$, il existe un unique polynôme $p_n \in \mathbb{P}_n$ qui vérifie

$$(f - p_n)(x_i) = (-1)^i (f - p_n)(x_0), \quad i = 1, \ldots, n+1. \tag{24}$$

De plus, ce polynôme minimise (strictement) les erreurs d'approximations aux points $x_0, \ldots, x_{n+1}$, au sens où l'on a

$$q_n \in \mathbb{P}_n \backslash \{p_n\} \Longrightarrow \max_{0 \leq i \leq n+1} \left|(f - p_n)(x_i)\right| < \max_{0 \leq i \leq n+1} \left|(f - q_n)(x_i)\right|.$$

Calcul de la meilleure approximation en moyenne quadratique:

Dans la section 15, on a vu que le polynôme $p_n \in \mathbb{P}_n$ de meilleure approximation au sens de la norme L^2_ω était donnée par la projection orthogonale (5). En pratique, cela signifiait que dans une base $\mathcal{G}_n = \{g_0, \ldots, g_n\}$ de $\mathbb{P}_n$ (on adapte ici les notations au contexte), $p_n = \sum_{i=1}^{n} c_i g_i$ pouvait se calculer en inversant la matrice

$$A_n = \left(\langle g_i, g_j \rangle_{L^2_\omega}\right)_{0 \le i,j \le n},$$

les relations $\langle p_n - f, q_n \rangle_{L^2_\omega} = 0,\ \forall q_n \in \mathbb{P}_n$ étant en effet équivalentes à

$$c = A_n^{-1}\mathrm{f} \qquad \mathit{avec} \qquad \mathrm{f} = \left(\langle f, g_i \rangle_{L^2_\omega}\right)_{0 \le i,j \le n},$$

On avait enfin remarqué que la matrice A_n était diagonale lorsque la base $\mathcal{G}_n$ était orthogonale, i.e. lorsque

$$\langle g_i, g_j \rangle_{L^2_\omega} = \delta \|g_i\|^2_{L^2_\omega}, \qquad 0 \leq i, j \leq n.$$

Dans ce cas, les calculs sont immédiats : on a $A_n^{-1} = \mathrm{diag}\left(\|g_i\|^{-2}_{L^2_\omega} \qquad 0 \leq i \leq n \right)$, d'où finalement

$$p_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{\langle f, g_i \rangle_{L^2_\omega}}{\|g_i\|^2_{L^2_\omega}} g_i.$$

Il ne nous reste donc plus qu'à étudier (et construire) de telles bases de polynômes orthogonaux.

Suites de polynômes orthogonaux:
Pour construire des suites de polynômes orthogonaux, on utilisera la proposition suivante (simple application du procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt)
proposition:(**Polynômes orthogonaux**)
Pour tout poids ω intègrable,il existe une suite $(g_n)_n$ de polynômes vérifiant

- $\deg(g_n) = n$.
- pour tout couple d'entiers distincts (i, j), on a $\langle g_i, g_j \rangle_{L^2_\omega} = 0$.

On dit alors que les $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ forment une suite de polynômes orthogonaux sur $[a, b]$ pour le produit scalaire de L^2_ω (ou pour un poids ω).

Remarquons qu'à proprement parler, la premiére condition ($\deg(g_n) = n$) n'a pas grand chose à voir avec l'orthogonalité des polynômes. Simplement, elle permet de construire des bases orthogonales de façon récursive, la base de $\mathbb{P}_n$ étant alors formée par les $(n+1)$ premiers polynômes de la suite.
En particulier, on notera que si $(g_n)_n$ est une suite de polynômes orthogonaux pour ω, alors

- $g_0, g_1, \ldots, g_n$ forment une base de $\mathbb{P}_n$,
- $(g_i, g_j)_{L^2_\omega} = \delta_{i,j} \|g_i\|^2_{L^2_\omega}$,
- g_n est orthogonal à $\mathbb{P}_{n-1}$, pour le produit scalaire de L^2_ω:

$$\forall q \in \mathbb{P}_{n-1}, \langle g_n, q \rangle_{L^2_\omega} = 0;$$

- la suite $(\lambda_n g_n)_n$, pour tous réels λ_n non nuls, est aussi orthogonale, et une fois ces coefficients fixés, la suite est unique. Dans la suite, on conviendra donc d'une normalisation pour fixer les réels λ_n. Par exemple, on pourra choisir

$$\|g_n\|_{L^2_\omega} = 1 \tag{25}$$

ou

$$\textit{le coefficient de plus haut degré de } g_n \textit{ est égal à } 1. \tag{26}$$

Toute famille de polynômes orthogonaux vérifie une relation de récurrence à trois termes.

proposition:

Les polynômes orthogonaux g_n, normalisés par la condition (26), vérifient $g_0(x) = 1$, $g_1(x) = x - \langle x, 1\rangle_{L^2_\omega} / \langle 1, 1\rangle_{L^2_\omega}$, et pour $n \geq 1$, la relation de récurrence

$$g_{n+1}(x) = (x - \alpha_n) g_n(x) - \beta g_{n-1}(x),$$

où $\alpha_n = \langle x g_n, g_n\rangle_{L^2_\omega} / \|g_n\|^2_{L^2_\omega}$ et $\beta_n = \|g_n\|^2_{L^2_\omega} / \|g_{n-1}\|^2_{L^2_\omega}$.

Corollaire

Si l'intervalle $[a, b]$ est symétrique et le poids w pair, alors les polynômes orthogonaux p_n ont la parité de leur degré : i.e. si n est pair (resp. impair) p_n est pair (resp. impair).

Donnons quelques suites de polynômes orthogonaux (pour différents ω).

- Polynômes de Chebyshev (dits de première espèce). Pour le poids $\omega(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$, on va montrer que les polynômes de Chebyshev $\mathcal{C}_n(x) = \cos(n \arccos(x))$ introduits plus haut forment une suite orthogonale sur le segment $[-1, 1]$. Pour n et m deux entiers distincts, on a en effet

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{C}_n, \mathcal{C}_m \rangle_\omega &= \int_{-1}^{1} \mathcal{C}_n(x)\mathcal{C}_m(x) \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_0^\pi \cos(n\theta)\cos(m\theta) d\theta \\
&= \frac{1}{2} \int_0^\pi \cos\left[(n+m)\theta\right] + \cos\left[(n-m)\theta\right] d\theta \\
&= \frac{1}{2} \left[\frac{\sin\left[(n+m)\theta\right]}{n+m} + \frac{\sin\left[(n-m)\theta\right]}{n-m} \right]_0^\pi = 0
\end{aligned}$$

Comme $\mathcal{C}_0 = 1$ et $\mathcal{C}_N = 2^{N-1}x^n + \dots$ pour $n \geq 1$, la relation de récurrence (déjà établie dans la section 29) est

$$\mathcal{C}_{n+1}(x) = 2x\mathcal{C}_n(x) - \mathcal{C}_{n-1}(x) \qquad (n \geq 1) \tag{27}$$

avec $\mathcal{C}_0(x) = 1$ et $\mathcal{C}_1(x) = x$. Noter que $\mathcal{C}_n(\pm 1) = (\pm 1)^n$ et que la norme de $\mathcal{C}_n$ est donnée par $\|\mathcal{C}_0\|^2_{L^2_\omega([-1,1])} = \pi$ et $\|\mathcal{C}_n\|^2_{L^2_\omega([-1,1])} = \pi/2$ pour $n \geq 1$.

- Polynômes de Chebyshev de deuxième espèce. Pour $\omega(x) = \sqrt{1-x^2}$, montrer que les polynômes définis sur $[-1, 1]$ par

$$\mathrm{C}_n(x) = \sin\left[(n+1)\arccos(x)\right]/\sin(\arccos(x))$$

vérifient $\mathrm{C}_0(x) = 1, \mathrm{C}_1(x) = 2x$ et la relation de récurrence

$$\mathrm{C}_{n+1}(x) = 2x\mathrm{C}_n(x) - \mathrm{C}_{n-1}(x) \qquad (n \geq 1)$$

Montrer qu'ils sont orthogonaux $(sur[-1,1])$, que $\mathrm{C}_n(\pm 1) = 2(\pm 1)^n$ et enfin que $\|\mathrm{C}_n\|^2_{L^2_\omega([-1,1])} = \pi/2$.

- Polynômes de Legendre. On note ici $(g_n)_n$ les polynômes orthogonaux sur $[-1,1]$ pour le poids $\omega(x) = 1$. Nous allons montrer que les polynômes de Legendre définis par

$$L(x) = c_n \Big[(1-x^2)^n \Big]^{(n)}, \quad avec \quad c_n = \frac{(-1)^n}{2^n n!}$$

sont aussi orthogonaux sur $[-1,1]$ pour le même poids, et donc qu'il sont proportionnels aux g_n. Pour n et m deux entiers distincts $(n > m)$, on a, en intégrant par parties et notant que le "terme de bord" $\Big[(1-x^2)^n\Big]^{(n-k)} L_m^k(x)$ est nul en ± 1 pour tout k tel que $1 \leq k \leq n$,

$$
\begin{aligned}
\langle L_n, L_m \rangle_{L^2_\omega} &= c_n \int_{-1}^{1} \left[(1-x^2)^n\right]^{(n)} L_m(x) dx \\
&= \dots \\
&= (-1)^m c_n \int_{-1}^{1} \left[(1-x^2)^n\right]^{(n-m)} L_m^{(m)}(x) dx.
\end{aligned}
$$

Soit, puisque $L_m^{(m)}(x) = (-1)^m \dfrac{(2m)!}{m!} c_m$ est constant,

$$
\langle L_n, L_m \rangle_{L^2_\omega} = c_n c_m \frac{(2m)!}{m!} \left[\left[(1-x^2)^n\right]^{(n-m-1)} \right]_{-1}^{1} = 0
$$

On en déduit l'orthogonalité des polynômes de Legendre. En comparant les coefficients de plus haut degré de g_n et L_n, on obtient $L_0 = g_0$ et $L_n = c_n \dfrac{(2n)!}{n!} g_n$ pour $n \geq 1$.

La relation de récurrence vérifiée par les polynômes L_n est donc

$$(n+1)L_{n+1}(x) = (2n+1)xL_n(x) - nL_{n-1}(x) \qquad (n \geq 1)$$

avec $L_0(x) = 1$ et $L_1(x) = x$. Noter que $L_n(\pm 1) = (\pm 1)^n$ et que la norme de L_n est égale à

$$\begin{aligned}\|L_n\|^2_{L^2_\omega([-1,1])} &= \int_{-1}^{1} \left|L_n(x)\right|^2 dx \; = (-1)^n c_n \int_{-1}^{1} (1-x^2)^n L_n^{(n)}(x) dx \\ &= \frac{(2n)!}{(n!2^n)^2} \int_{-1}^{1} (1-x^2)^n dx = \frac{2}{(2n+1)}.\end{aligned}$$

- Polynômes de Laguerre. Avec l'intervalle $[0, +\infty[$ et le poids $\omega(x) = e^{-x}$, on trouve les polynômes de Laguerre $\mathbf{L}_n$. Normalisés par la condition $n!(-1)^n \mathbf{L}_n = x^n + \ldots$, ces polynômes vérifient la relation de récurrence

$$(n+1)\mathbf{L}_{n+1}(x) = (2n+1-x)\mathbf{L}_n(x) - n\mathbf{L}_{n-1}(x) \qquad (n \geq 1)$$

avec $\mathbf{L}_0(x) = 1$ et $\mathbf{L}_1(x) = 1 - x$.

- Polynômes d'Hermite.Sur l-intervalle $\mathbb{R}$ et le poids $\omega(x) = e^{-x^2}$, on trouve les polynômes d'Hermite. Normalisés par la condition $H_n = 2^n x^n + \ldots$,ces polynômes vérifient la relation de récurrence

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x) \qquad (n \geq 1)$$

Les polynômes orthogonaux ont la propriété remarquable suivante.
proposition:(Zéros de polynômes orthogonaux)
Soit $(g_n)_{n\geq 0}$ une suite de polynômes orthogonaux sur un intervalle $[a, b]$. Pour tout $n \geq 1$, le polynôme g_n a n racines réelles, distinctes (donc simples) et incluses dans $]a, b[$.

Remarque

Comme tous les zéros de g_n sont inclus dans l'intervalle ouvert $]a, b[$, $g_n(a)$ et $g_n(b)$ ne sont pas nuls et on peut donc définir un troisième type de normalisation en imposant la valeur de g_n en a ou en b, par exemple en posant

$$g_n(a) = 1. \tag{28}$$

Par exemple, les polynômes de Legendre sont normalisés par la condition $L_n(1) = 1$.

conclusion

Plusieurs techniques importantes d'approximation polynomiale, à savoir les développements de Taylor, l'interpolation de Lagrange (*i.e.* simple), l'interpolation de Hermite (*i.e.* d'ordre élevé), les polynômes de Berstein. Le problème de la conception (ou du choix) d'une méthode d'approximation numérique consiste essentiellement, avant de chercher à obtenir une approximation très précise, à faire en sorte que le compromis réalisé entre la complexité du calcul d'une part, et sa précision d'autre part, (en quelque sorte, donc le rapport qualité/prix) soit le meilleur possible.

Références

- Approximation polynomiale des fonctions et des intégrales, Martin Campos Pinto (d'après le cours de Laurence Halpern).
- Introduction to numerical analysis, F.B. Hildebrand, Second edition, Dover publications,INC. New york.
- Chebyshev polynomials, J.C.Mason, D.C.Handscomb, Chapman and Hall/CRC.
- An introduction to numerical analysis, Endre Süli and David Mayers, Cambridge.

MERCI POUR VOTRE ATTENTION