REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE & POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR & DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

**Université Ibn Khaldoun- Tiaret**
**FACULTÉ DES MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUE**
**DÉPARTEMENT DES MATHEMATIQUES**

# MEMOIRE MASTER

*Présenté par :*

*Kouider Hayat*

*Daoudi Imane*

*Boudelal Fatima Zohra*

***Spécialité :*** *Mathématiques*

***Option :*** *Analyse fonctionnelle et applications*

***Intitulé***

## Equation hypergéométrique
## Fonction de Bessel

*Soutenue le : 16/ 06 / 2022*

*Devant le jury composé de :*

***Président :*** Mr. LARABI Abderrahmane *MCA. Univ. Ibn Khaldoun Tiaret*

***Examinateur:*** Mr. OUERDANI Abderrahmane *MCB. Univ. Ibn Khaldoun Tiaret*

***Encadreur :*** Mr .HALLOUZ Ahmed *MCB. Univ. Ibn Khaldoun Tiaret*

2021-2022

# Table des matières

# Introduction

## 0.1 INTRODUCTION

La théorie des fonctions spéciales qui est née dans les travaux d'Euler, Gauss, Laplace, Jacobi, Riemann et Tchébychev est de longue date une discipline classique des mathématiques qui s'est profondément enracinée en analyse mathématiques en théorie des fonctions d'une variable complexe, en théorie des représentations des groupes, en physique théorique et mathématiques. et qui de par ses liens avec ces branches, possède un vaste champ d'applications, Les propriétés des fonctions spéciales ont fait l'objet de travaux fondamentaux. Malheureusement chaque classe de fonctions spéciales a son propre appareil mathématique (au surplus assez lourd) et d'innombrables artifices. Le présent mémoire propose une méthode de construction de la théorie des fonctions spéciales qui est basée sur une idée générale relativement simple permettant de traiter cette théorie d'un point de vue unique avec un outil mathématique assez élémentaire. Les fonctions spéciales sont toutes considérées comme des solutions particulières de l'équation différentielle d'un certain type apparaissant dans de nombreux problèmes de physique théorique et mathématique. Grâce à une généralisation assez évidente de la formule de Rodrigues pour les polynômes de Legendre, on a pu trouver une représentation intégrale unique pour toutes les fonctions spéciales. Ceci a permis de développer d'une façon naturelle et assez concise les principaux faits de la théorie des fonctions sphériques, cylindriques(fonction de Bessel) et hypergéométriques (ainsi que des généralités sur les polynômes orthogonaux classiques d'une variable continue et d'une variable discrète), faits dont l'étude nécessitait bien plus de temps et d'efforts. Ce mémoire étant destiné surtout aux physiciens, les auteurs ont regroupé l'essentiel de ce qui concerne les fonctions spéciales en physique mathématique et en mécanique des quanta. En même temps ils ne se sont pas fixé pour objectif de donner le maximum de détails sur les fonctions spéciales, mais d'esquisser les grands traits d'une méthode qui, en s'appuyant sur une approche unique, permette d'appliquer cette théorie aux autres disciplines scientifiques et de résoudre les divers problèmes auxquels sont confrontés le physicien, le mathématicien, l'ingénieur. "Les auteurs espèrent que cette approche, qui repose en fait sur 1a seule formule du mathématicien français Benjamin Olinde Rodrigues (1794-1851), rappelle au lecteur la pensée de Poincaré : Les mathématiques sont l'art d'appeler des choses différentes par le même nom » et aide les futurs ingénieurs et chercheurs en physique. chimie et autres sciences appliquées à assimiler vite et sérieusement la théorie des fonctions spéciales et leurs applications, qu'elle s'avère enfin utile dans la préparation des cours de physique mathématique de mécanique des quanta, voire de théorie des fonctions d'une variable complexe. La connaissance des fonctions spéciales est indispensable à la bonne intelligence de nombreuses questions capitales de la Physique théorique et de la Physique mathématique. D'autre part, à l'époque où les méthodes numériques s'implantent de plus en plus dans la pratique et le rôle du calcul numérique dans les expériences ne cesse de croître, nous assistons au renouveau d'intérêt pour les fonctions spéciales. Ce regain tient à deux circonstances. Premièrement, on est souvent amené, en construisant le modèle mathématique d'un phénomène physique et en cherchant à préciser l'importance relative des différents effets en jeu, à simplifier le problème initial dans le but d'obtenir la solution sous forme analytique se prêtant facilement à l'analyse. Deuxièmement, le problème simplifié facilite le choix d'un algorithme de calcul fiable et économique, bien adapté à la résolution sur ordinateur des problèmes complexes. Or, il arrive rarement qu'un tel problème se réduise à des fonctions élémentaires. Les fonctions spéciales les plus utilisées sont celles que l'on réunit sous le terme de fonctions spéciales de la Physique mathématique : les polynômes orthogonaux classiques (polynômes de Jacobi, de La guerre, d'Hermite), les fonctions sphériques, cylindriques, hyper géométriques. La théorie de ces fonctions et leurs différentes applications font l'objet de nombreux mémoire de fond. Malheureusement, les auteurs de ce mémoire se servent d'un appareil mathématique extrêmement encombrant, ainsi que de toute une série d'artifices particuliers. Le besoin d'une théorie des fonctions spéciales bâtie autour d'une idée maîtresse, générale et suffisamment simple, se faisait donc sentir depuis longtemps. Les auteurs du préfacé proposent une approche, remarquablement simple, de la théorie des fonctions spéciales fondée sur la généralisation de la formule connue de Rodrigues pour les polynômes orthogonaux classiques. Une telle approche permet d'obtenir sous forme explicite les représentations intégrales de toutes les fonctions spéciales de la Physique mathématique, ainsi que de dégager leurs propriétés principales. En particulier, on résout par cette méthode les équations différentielles linéaires du second ordre dont on cherche d'habitude les solutions par la méthode de Laplace. L'appa posséder les rudiments de la théorie des équations ordinaires et de théorie des fonctions d'une variable complexe. C'est là un avantage indiscutable de naissances mathemat pas en effet qu'un volu me effrayant des connections spécialematiques requises, y compris dans le domaine des fonctions spéciales, constitue la pierre d'achoppement de quiconque veut étudier la physique théorique mathématique. En parlant des fonctions sphériques et cylindriques, on fait intervenir les théorèmes d'addition, largement utilisés dans la théorie des spectres atomiques, la théorie de la diffusion, dans le calcul des réacteurs nucléaires. Considérant les fonctions sphériques généralisées, ils abordent la théorie des représentations du groupe de rotations, ainsi que la théorie générale du moment de la quantité de mouvement.

Chapitre 1

# Équation de type hypergéométrique

### 1.0.1 Introduction

Les fonctions spéciales font leur apparition dans de nombreux problèmes de la Physique théorique et de la Physique mathématique. tels que la conduction de la chaleur, l'interaction rayonnement matière, la propagation d'ondes électromagnétiques et sonores, la théorie des réacteurs nucléaires, celle de la structure des étoiles ...
Dans la pratique, les fonctions spéciales interviennent généralement comme solutions d'équations différentielles : il est donc tout naturel, en se plaçant sur le point de vue de la Physique mathématique, de déduire leurs propriétés directement à partir des équations différentielles qui constituent la définition mathématique du problème posé. Les auteurs se sont donc attachés à mettre au point une méthode grâce à laquelle la théorie des fonctions spéciales se développe au départ d'une équation différentielle du type

$$\boldsymbol{u'' + \frac{\tilde{\tau}(z)}{\sigma(z)}u' + \frac{\tilde{\sigma}(z)}{\sigma^2(z)}u = 0} \tag{1.1}$$

oú $\boldsymbol{\sigma}$ et $\boldsymbol{\tilde{\sigma}}$ sont deux polynômes de degré $\leq \mathbf{2}$ et $\boldsymbol{\tilde{\tau}(z)}$ est un polynôme de degré $\leq \mathbf{1}$
L'équation (1.1) admet à titre de cas particuliers des équations différentielles qui conduisent aux fonctions spéciales usitées en Physique mathématique et en Mécanique quantique. L'architecture du mémoire est la suivante. nous définissons une classe de transformations $\boldsymbol{u = \varphi(z)y}$ qui permettent, par un choix particulier de la fonction $\boldsymbol{\varphi(z)}$, de passer de (1.1) à une autre équation de même type, mais plus simple

$$\boldsymbol{\sigma(z)y'' + \tau(z)y' + \lambda y = 0} \tag{1.2}$$

dans laquelle $\boldsymbol{\tau(z)}$ est un polynôme de degré $\leq \mathbf{1}$ et $\boldsymbol{\lambda}$ est une constante. nous dirons que (1.2)est une équation du type hypergéométrique , et ses solutions,des fonctions du type hypergéométrique, la théorie de ces fonctions sera développée dans l'ordre suivant, on commence par montrer que les dérivées d'une fonction du type hypérgéometrique sont elles aussi des fonctions du type hypergéomertrique, ayant établi cette propriété, on construit la famille des solutions particuliéres de l'équation (1.2) qui correspondent à telle ou telle valeur de $\boldsymbol{\lambda}$ , en partant de la solution évidente de (1.2) :$\boldsymbol{y(z) = const}$ pour $\boldsymbol{\lambda = 0}$ . chaque solution est un polynôme en z. une génératisation naturelle de la représentation intégrale de ces polynômes nous conduit a la représentaion intégrale des fonctions quelconques du type hypergéométrique, quelle que soit la valeur de $\boldsymbol{\lambda}$ . De cette dernière représentation, en passant de (1.2) a d'autres équations de même type, on déduit toutes les propriétés principales des fonctions des fonctions envisagées :développements en séries de puissances,représentations asymptotique, relations de récurrence, relations fonctionnelles.la théorie dévlopée permet de trouver toutes les solutions de l'équation (1.1) nous mettons en pratique ce programme sur des fonctions concrètes du hypergéométrique, les polynômes orthogonaux les fonctions sphéri les fonctions cylindriques, fonctions hypergéométriques. fois le premier chapitre assimilé, Il est noter que presque tous les types de problèmes Mécanique quantique admettent solution forme explicite examinés ; solutions par une méthode physiciens apprécieront une relation remarquablement que nous établissons , largement utilisés Mécanique quantique et les polynômes orthogonaux d'une variable discrète, plus exactement les polynômes de Hahn. La connaissance des propriétés de la fonction Gamma d'Euler étant indispensable à l'étude des fonctions spéciales.

## 1.1 L'équation différentielle pour les fonctions spéciales

Dans un grand nombre de problèmes importants de la physique théorique et mathématique, on est conduit à l'équation différentielle

$$\boldsymbol{u'' + \frac{\tilde{\tau}(z)}{\sigma(z)}u' + \frac{\tilde{\sigma}(z)}{\sigma^2(z)}u = 0} \tag{1.3}$$

dans laquelle $\boldsymbol{\sigma(z)}$ et $\boldsymbol{\tilde{\sigma}(z)}$ sont des polynômes de degré $\leq \mathbf{2}$, et $\boldsymbol{\tilde{\tau}(z)}$ un polynôme de degré $\leq \mathbf{1}$. On rencontre des équations de ce type en résolvant les équations de Laplace et d'Helmholtz en coordonnées curvilignes par séparation des variables, dans les problèmes fondamentaux de la mécanique quantique : mouvement d'une particule dans un champ à symétrie sphérique, oscillateur harmonique, recherche des solutions d'équations de Schrödinger, de Dirac pour le potentiel coulombien, mouvement d'une particule dans un champ électrique ou magnétique homogène... L'équation (1.3) apparaît également dans bon nombre de problèmes modèles de la physique atomique, moléculaire et nucléaire. Les équations du type(1.3) admettent comme solutions particulières des fonctions spéciales appartenant aux classes suivantes : -polynômes orthogonaux classiques (polynômes de Jacobi, de Laguerre et d'Hermite) ;
- fonctions sphériques ;
- fonctions cylindriques ;
- fonctions hypergéométriques

Ces fonctions sont souvent appelées fonctions spéciales de la physique mathématique. Dans le texte qui suit, nous admettrons partout que la variable $\boldsymbol{z}$ et les coefficients des polynômes $\boldsymbol{\sigma(z)}$, $\boldsymbol{\tilde{\sigma}(z)}$ et $\boldsymbol{\tilde{\tau}(z)}$ sont susceptibles de prendre toute valeur réelle ou complexe.. Essayons de mettre l'équation (1.3) sous une forme plus simple au moyen du changement $\boldsymbol{u = \varphi(z)y}$ et d'un choix particulier de la fonction $\boldsymbol{\varphi(z)}$. Il vient

$$\boldsymbol{y'' + (2\frac{\varphi'}{\varphi} + \frac{\tilde{\tau}}{\sigma})y' + (\frac{\varphi''}{\varphi} + \frac{\varphi'}{\varphi}\frac{\tilde{\tau}}{\sigma} + \frac{\tilde{\sigma}}{\sigma^2})y = 0} \tag{1.4}$$

En vue de rendre (1.4) plus simple que (1.3), on donnera au coefficient de $\boldsymbol{y'}$ l'aspect $\boldsymbol{\tau(z)\sigma(z)}$, où $\boldsymbol{\tau(z)}$ est un polynôme de degré $\leqslant \mathbf{1}$. La fonction $\boldsymbol{\varphi(z)}$ se définira alors par l'équation

$$\varphi' \backslash \varphi = \pi(z) \backslash \sigma(z) \tag{1.5}$$

dans laquelle

$$\pi(z) = \frac{1}{2}[\tau(z) - \tilde{\tau}(z)] \tag{1.6}$$

est un polynôme de degré $\leqslant 1$. Puisque

$$\frac{\varphi''}{\varphi} = (\frac{\varphi'}{\varphi})' + (\frac{\varphi'}{\varphi})^2 = (\frac{\pi}{\sigma})' + (\frac{\pi}{\sigma})^2$$

l'équation (1.4) devient

$$y'' + \frac{\tau(z)}{\sigma(z)}y' + \frac{\tilde{\sigma}(z)}{\sigma^2(z)}y = 0 \tag{1.7}$$

où

$$\tau(z) = \tilde{\tau}(z) + 2\pi(z) \tag{1.8}$$

$$\tilde{\sigma}(z) = \tilde{\sigma}(z) + \pi^2 + \pi(z)[\tilde{\tau}(z) - \sigma'(z)] + \pi'(z)\sigma(z) \tag{1.9}$$

Les fonctions $\tau(z)$, $\tilde{\sigma}$ sont deux polynômes de degré $\leqslant 1$ et à 2 respectivement. L'équation (1.7) est donc de même type que (1.3). Nous avons trouvé de cette façon la classe des trans formations qui laissent inchangé le type de l'équation : ce sont les transformations qu'on fait subir à (1.3) en opérant le changement $u = \varphi(z)y$ où la fonction $\varphi(z)$ vérifie l'équation (1.5), quel que soit le polynôme du premier degré $\pi(z)$. L'arbitraire dans le choix de $\pi(z)$ nous permettra de choisir, parmi les formes possibles de l'équation (1.7), celle qui est la plus simple et qui se prête le mieux à la discussion. Choisissons les coefficients du polynôme $\pi(z)$ de telle façon que le polynôme $\bar{\sigma}(z)$ figurant dans (1.7) soit un multiple exact de $\sigma(z)$, i.e.

$$\bar{\sigma}(z) = \lambda\sigma(z) \tag{1.10}$$

$\lambda$ étant une constante. Cela est possible, car, en identifiant les coefficients qui affectent les puissances correspondantes de z dans les deux membres de l'égalité (1.10), on obtient trois équations pour trois constantes inconnues : la constante $\lambda$ et deux coefficients du polynôme $\pi(z)$ L'équation (1.7) deviendra donc

$$\sigma(z)y'' + \tau(z)y' + \lambda y = 0 \tag{1.11}$$

Nous dirons que (1.11) est une équation du type hypergéométrique, et ses solutions, des fonctions du type hypergéométrique. Il sera donc tout naturel d'appeler l'équation (1.3) équation généralisée du type hypergéométrique ). Pour définir le polynômen $\pi(z)$ et la constante $\lambda$ , mettons la condition (1.10) sous la forme

$$\pi^2 + (\tilde{\tau} - \sigma')\pi + \tilde{\sigma} - \kappa\sigma = 0.$$

Où

$$\kappa = \lambda - \pi'(z) \tag{1.12}$$

Supposant provisoirement la constante $\kappa$ connue, on peut expliciter $\pi(z)$ dans l'équation du second degré :

$$\pi(z) = \frac{\sigma' - \tilde{\tau}}{2} \pm \sqrt{(\frac{\sigma' - \tilde{\tau}}{2})^2 - \tilde{\sigma} + \kappa\sigma} \tag{1.13}$$

$\pi(z)$ étant un polynôme, le radicande doit être le carré d'un polynôme. Pour qu'il en soit ainsi, il faut que soit nul le discriminant du polynôme du second degré sous le signe de la racine. Cette condi tion nous conduit à l'équation, en général du second degré, pour la constante $\kappa$. Une fois $\kappa$ trouvé, on cherche $\pi(z)$ par la formule (1.13), puis $\varphi(z)$, $\tau(z)$ et $\lambda$ à l'aide des formules (1.5), (1.8) et (1.12). Il est évident qu'il existe plus d'une possibilité de réduire l'équation (1.3) à l'équation du type hypergéométrique (1.11), possibilités fournies par choix dela constante $\kappa$ et celui du signe de $\pi(z)$ dans la formule (1.13). Grâce à la transformation proposée, on aura à discuter, au lieu de l'équation (1.3), une équation plus simple du type (1.11).

**Exemple 1.1.1.**

Mettons sous la forme (1.11) l'équation de Bessel

$$z^2u'' + zu' + (z^2 - v^2)u = 0$$

en faisant le changement $u = \varphi(z)y$ . L'équation de Bessel est un cas particulier de l'équation (1.3) pour $\sigma(z) = z, \tilde{\tau} = 1, \tilde{\sigma} = z^2 - v^2$. Le radicande de (1.13) se présente alors sous la forme $-z^2 + v^2 + \kappa z$. Annulant le discriminant de ce trinôme du second degré, on obtient l'équation pour la constante $\kappa$ :

$$\kappa^2 + 4v^2 = 0$$

d' où $\kappa = 2iv$ . l'on a donc, en vertu de (1.13),
Si $\sigma(z)$ est un polynôme de degré $2$, l'équation (1.3)est un cas particulier de l'équation de Riemann a trois points singuliers dont l'un a l'infini. l'équation de Riemann est étudiée dans les cours de théorie analytique des équations différentielles. Ainsi donc, dans le cas considéré le polynôme $\pi(z)$ peut se mettre sous quatre formes différentes. Plaçons-nous dans le cas où $\kappa = 2iv$, $\pi(z) = iz + v$ par exemple.
Les formules (1.5). (1.8) et (1.10) nous donnent

$$\varphi(z) = z^v e^{iz},$$

$$\tau(z) = 2iz + 2v + 1,$$

$$\lambda = \kappa + \pi'(z) = i(2v + 1).$$

L'équation (1.11) devient finalement

$$zy'' + (2iz + 2v + 1)y' + i(2v + 1)y = 0.$$

**Remarque 1.1.1.**

Puisque l'équation (1.3) ne change pas lorsqu'on multiplie $\sigma(z)$ et $\tilde{\tau}(z)$ par $c$ et $\tilde{\sigma}(z)$ par $c^2$ ($c$ étant une constante quel conque), on peut admettre que le coefficient affectant le terme de plus haut degré du polynôme $\sigma(z)$ est égal à un nombre donné. Cette remarque reste aussi vraie pour l'équation (1.11). Dans la suite, on peut se borner à considérer les cas où, dans les équations (1.3) et (1.11), le polynôme $\sigma(z)$ n'admet pas de racines multiples. En effet, si le polynôme $\sigma(z)$ admet des racines multiples, i,e. $\sigma(z) = (z-a)^2$, il suffie de faire le chengement $z - a = 1\backslash s$ pour ramener l'équation (1.3) à la forme.

$$\frac{d^2u}{ds^2} + \frac{2 - s\tilde{\tau}(a+1\backslash s)}{s}\frac{du}{ds} + \frac{s^2\tilde{\sigma}(a+1\backslash s)}{s^2}u = o. \tag{1.14}$$

Les expressions $s\tilde{\tau}((a+1\backslash s)$ et $s^2\tilde{\sigma}(a+1\backslash s)$ sont deux polynômes de degré non supérieur à 1 et à 2 respectivement en $s$. Aussi l'équation (1.14) est-elle une équation du type (1.3) dont le polynôme $\sigma(s)$ est égal à $s$ et n'admet donc pas de racines multiples. Il n'est pas possible de réduire l'équation (1.3) à une équation du type (1.11) par le procédé décrit si $\sigma(z) = 1$ et si l'expression $(\tilde{\tau}/2)^2 - \tilde{\sigma}$ est un polynôme du premier degré. Dans ce cas, pour réduire l'équation (1.3) à une forme plus simple, on peut choisir le polynôme $\pi(z)$ dans (1.5) de la condition $\tau(z) = 0$. Alors $\bar{\sigma}(z)$ devient un polynôme du premier degré, et l'équation (1.7) s'écrit

$$y'' + (az+b)y = 0. \tag{1.15}$$

Par un changement linéaire $s = az + b$, on ramène (1.15) à un cas particulier de l'équation

$$\frac{d^2y}{ds^2} + \frac{1+2\alpha}{s}\frac{dy}{ds} + [(\beta\gamma v s - 1)^2 + \frac{\alpha^2 - v^2\gamma^2}{s^2}]y = 0 \tag{1.16}$$

dans laquelle $\alpha, \beta, \gamma, v$ sont des constantes. Cette équation sera étudiée au 13 (voir l'équation de Lommel). Les solutions de (1.16) s'expriment au moyen de fonctions cylindriques. Un autre cas d'application des équations du type hypergéométrique est la solution des équations différentielles simultanées du premier ordre

$$u_1' = u_{11}(z)u_1 + a_{12}(z)u_2, u_2' = u_{21}(z)u_1 + a_{22}(z)u_2 \tag{1.17}$$

aux coefficients

$$a_{ik}(z) = \frac{\tau_{ik}(z)}{\sigma(z)}, \tag{1.18}$$

où $\tau_{ik}(z)$ est un polynôme de degré non supérieur à 1, et $\sigma(z)$ un polynôme de degré non supérieur à 2. En éliminant la fonction $u_2(z)$ entre les équations (1.17), on obtient l'équation définissant $u_1(z)$ :

$$u_1'' - (a_{11} + a_{22} + \frac{a_{12}'}{a_{12}})u_1' + (a_{11}a_{22} - a_{12})a_{21} + a_{11}\frac{a_{12}'}{a_{12}} - a_{11}'u_1 = 0. \tag{1.19}$$

Puisque

$$\frac{a_{12}'}{a_{12}} = \frac{-\sigma'}{\sigma} + \frac{\tau_{12}'}{\tau_{12}},$$

l'équation (1.19) sera une équation du type hypergéométrique pour $\tau'_{12} = 0$. Si $\tau'_{12} \neq 0$, on peut effectuer une transformation linéaire

$$v_1 = \alpha u_1 + \beta u_2,$$

$$v_2 = \gamma u_1 + \delta u_2,$$

$\alpha, \beta, \gamma, \delta$ étant des constantes. On obtient alors un système d'équations du type

$$v'_1 = \tilde{a}_{11}(z)v_1 + \tilde{a}_{12}(z)v_2, v'_2 = \tilde{a}_{21}(z)v_1 + \tilde{a}_{22}(z)v_2, \tag{1.20}$$

où les fonctions $\tilde{a}_{ik}(z)$ sont des combinaisons linéaires des fonctions $a_{ik}(z)$ à coefficients constants dépendant de $\alpha$,$\beta$,$\gamma$,$\delta$ ; elles s'écrivent donc

$$\tilde{a}_{ik}(z) = \frac{\tilde{\tau}_{ik}(z)}{\sigma(z)},$$

$\tilde{\tau}_{ik}(z)$ est un polynôme de degré non supérieur à 1. En choisissant les coefficients $\alpha$,$\beta$,$\gamma$,$\delta$ de façon à avoir $\tilde{\tau}'_{12} = 0$ (ce qui est toujours possible), on obtient, après avoir éliminé la fonction $v_2(z)$ entre les équations (1.20), une équation généralisée du type hypergéométrique pour la fonction $v_1(z)$. Au cas où $o(z)$ est un polynôme du premier degré, on peut passer de l'équation (1.17) à l'équation généralisée du type hypergéométrique par un procédé différent, en choisissant les constantes $\alpha, \beta, \gamma$ et $\delta$ de telle façon que le coefficient $\tilde{a}_{12}$ soit indépendant de $z$, i.e. $\tilde{\tau}_{12} = v\sigma(z)$ ($v$ étant une constante).

Chapitre 2

# Fonction Gamma

## 2.1 Détermination de la fonction Gamma

La fonction Gamma est trés simple à déduire à partir de l'intégrale d'Euler :

$$\int_0^\infty e^{-x}x^{p-1}dx$$

Cette intégrale est une fonction de paramètre $p$ ; elle est représentée par le symbole $\Gamma(p)$et s'appelle la fonction Gamma. L'intégrale d'Euler est une intégrale non propre, car la borne supérieure est infinie, l'intégrale est égale à $x^{p-1}$ pour $x = 0$ et par conséquent toutes les expressions sous intégrale tendent vers zéro pour $p < 1$. Considérons pour quelles valeurs de p l'intégrale peut exister. Pour cela, divisons l'intervalle d'intégration en trois parties : de zéro à $a_1 > 0$, de $a_1$ a $a_2$ et de $a_2$ a l'infini. On aura :

$$\int_0^\infty e^{-x}x^{p-1}dx = \int_0^{a_1} e^{-x}x^{p-1}dx + \int_{a_1}^{a_2} e^{-x}x^{p-1}dx + \int_{a_2}^\infty e^{-x}x^{p-1}dx$$

Montrons que la dernière intégrale existe pour n'importe quelle valeur de $p$.

$$\int_{a_2}^\infty e^{-x}x^{p-1}dx = \lim_{b\to\infty}\int_{a_2}^b e^{-x}x^{p-1}dx$$

(Si la limite existe). On utilise pour montrer l'existence de la limite : $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^{p+1}}{e^x} = 0$ (qu'on peut facilement monter en appliquant plusieurs fois le théorème de l'Hôspital) et par conséquent, pour les grandes valeurs de $x$, par exemple, si $x > x_0$ , la variable $\dfrac{x^{p+1}}{e^x}$ sera inférieure à $\epsilon$ ; si on pose$\epsilon = 1$, ainsi pour $x > x_0$ on a :

$$\frac{x^{p+1}}{e^x} < 1 \, et \, \frac{x^{p-1}}{e^x} < \frac{1}{x^2}$$

Si on pose $a_2 = x_0$, on aura :

$$e^{-x}x^{p-1} < \frac{1}{x^2}$$

et

$$\int_{a_2}^{b} e^{-x}x^{p-1}dx < \int_{a_2}^{b} \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}|_{a_2}^{b} = \frac{1}{a_2} - \frac{1}{b} < \frac{1}{a_2}.$$

Étant donné que $e^{-x}x^{p-1} > 0$, avec la croissance de $b$, $\int_{a_2}^{b} e^{-x}x^{p-1}dx$ augmente.
Donc :
$\lim_{b\to\infty} \int_{a_2}^{b} e^{-x}x^{p-1}dx$ exist $\forall p$.
Considérons l'intégrale $\int_{a_0}^{a_1} e^{-x}x^{p-1}dx$ pour $p < 1$. Pour $x \to 0, e^{-x};$ et la fonction sous intégrale sera de l'ordre $x^{p-1}$ pour $x \to 0$, et $\int_{0}^{a_1} x^{p-1}$ existera pour les mêmes valeurs de $p$ pour lesquelles existe l'intégrale $\int_{a_0}^{a_1} e^{-x}x^{p-1}dx$ Cependant :

$$\int_{0}^{a_1} x^{p-1}dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\varepsilon}^{a_1} x^{p-1}dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{x^p}{p}|_{\varepsilon}^{a_1} = \frac{1}{p} \lim_{\varepsilon\to 0}(a_1^p - \varepsilon^p).$$

On peut remarquer que : si $p > 0$, $\varepsilon^p \to 0$ et l'intégrale existera ; si $p < 0$ ,$\varepsilon^p \to \infty$ et l'intégrale existera. Si $p = 0$ , on aura :

$$\int_{0}^{a_1} x^{-1}dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\epsilon}^{a_1} dx/x = \lim_{\varepsilon\to 0} Lnx|_{\varepsilon}^{a_1} = \infty$$

c'est-à-dire que l'intégrale n'existe pas.
Donc,

$$\int_{0}^{\infty} e^{-x}x^{p-1}dx$$

existe pour $p > 0$. Par conséquent pour $p > 0$, on a :

$$\Gamma(p) = \int_{0}^{\infty} e^{-x}x^{p-1}dx \tag{2.1}$$

A titre d'exemple calculons $\Gamma(1)$ et $\Gamma(1/2)$ :

$$\Gamma(1) = \int_{0}^{\infty} e^{-x}x^{0}dx = -e^{-x}|_{0}^{\infty} = 1;$$

$$\Gamma(1/2) = \int_{0}^{\infty} e^{-x}x^{1/2-1}dx.$$

Posons $x^{1/2} = z$ ;$dz = 1/2x^{-1/2}dx$ ;$x = z^2$Donc :

$$\Gamma(1/2) = 2\int_{0}^{\infty} e^{-z^2}dz$$

Pour calculer cette intégrale posons :

$$A = \int_{0}^{\infty} e^{-z^2}dz$$

On peut écrire que :

$A = \int_0^\infty e^{-t^2} dt.$ prenons $A^2 = \int_0^\infty e^{-z^2} dz \ . \int_0^\infty e^{-t^2} dt$ .
Le facteur $e^{-z^2} dz$ est une constante qu'on peut inclure dans l'intégrale. Donc :

$$A^2 = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(z^2+t^2)} dz dt$$

Le calcul est plus simple à réaliser si l'on utilise les coordonnées polaires. $p$ et $\varphi$ . On connaît que : $p = \sqrt{(z^2 + t^2)}$ et l'élément de surface est égale à $\varphi$.
Donc :

$$A^2 = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\infty e^{-p^2} ede = -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{-\infty} e^u du$$

où $u = -\rho^2$ , $du = -2\rho d\rho$ ;

$$A^2 = -\frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} d\varphi e^u|_0^{-\infty} = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} d\varphi = \frac{\pi}{4};$$

$$A = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \Gamma(\frac{1}{2}) = 2A = \sqrt{\pi}.$$

Le calcul réalisé ci-dessus montre, que le calcule de $\Gamma(p)p$ par l'intégrale d'Euler est compliqué.

## 2.2 Propriètès de la fonction Gamma

**Propriété 2.2.1.**

$$\Gamma(p+1) = p\Gamma(p) \tag{2.2}$$

**Exemple 2.2.1.**

$$\Gamma(\frac{7}{3}) = \Gamma(\frac{4}{3} + 1) = \frac{4}{3}\Gamma(\frac{4}{3}) = \frac{4}{3}\Gamma(\frac{1}{3} + 1)$$
$$= \frac{4}{3}.\frac{1}{3}\Gamma(\frac{1}{3})$$

**Preuve 2.2.1.**

représentons $\Gamma(p+1)$ par l'intégrale d'Euler et intégrons par parties :

$$\Gamma(p+1) = \int_0^\infty e^{-x} x^p dx = -x^p e^{-x}|_0^\infty + p \int_0^\infty e^{-x} x^{p-1} dx;$$

où

$$u = x^p, du = px^{p-1}dx;$$

$$dv = e^{-x}dx, v = -e^{-x}.$$

Or

$$\lim_{x\to\infty} x^p e^{-x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^p}{e^x} = 0$$

Par conséquent :

$$\Gamma(p+1) = p\int_0^{\infty} e^{-x}x^{p-1}dx = p\Gamma(p)$$

**Corollaire 2.2.1.**

Si $p$ est nombre entier, on a $\Gamma(p) = (p-1)!$. Ainsi, on a :

$$\Gamma(p) = (p-1)\Gamma(p-1) = (p-1)(p-2)\Gamma(p-2) = ... = (p-1) = (p-2)...2.1\Gamma(1) = (p-1)!$$

Donc, de ce corollaire, on peut remarquer comment la fonction gamma croit rapidement :

| | | |
|---|---|---|
| $\Gamma(1) = 1$ | $\Gamma(5) = 4! = 24$ | $\Gamma(9) = 8! = 40320$ |
| $\Gamma(2) = 1$ | $\Gamma(6) = 5! = 120$ | $\Gamma(10) = 362880$ |
| $\Gamma(3) = 2! = 2$ | $\Gamma(7) = 6! = 720$ | |
| $\Gamma(4) = 3! = 6$ | $\Gamma(8) = 7! = 5040$ | |

La fonction Gamma peut être utilisée pour réduire la représentation du produit $(m+p)(m-1+p)...(2+p)(1+p)p$ où $m$- entier et $0 < p < 1...$ Si l'on ajoute $\Gamma(p)$, on obtient $\Gamma(m+p+1)$, d'où l'on peut écrire :

$$(m+p)(m-1+p)...(1+p)p = \frac{\Gamma(p+m+1)}{\Gamma(p)}$$

**Corollaire 2.2.2.**

Détermination de la fonction gamma pour les valeurs négatives et non entières de $p$. Soit $p$ donné sur l'intervalle $(-1, 0)$. Donc $p+1$ sera trouvé sur l'intervalle $(0, 1)$ et $\Gamma(p+1)$ peut être calculé par la formule d'Euler (2.1).
Posons :

$$\Gamma(p) = \frac{\Gamma(p+1)}{p} \, pour - 1 < p < 0 \tag{2.3}$$

Pour $p = -1$, la formule donne l'infini, et donc :
$p+1 = 0$ et $\Gamma(0) = \infty$ Par conséquent $\Gamma(1)$ n'existe pas.
La transition d'un intervalle à un autre $(-1, 0)(-2, -1)(-3, -2)$ etc... , peut être déterminée par la formule (2.3).
La fonction gamma n'existe pas pour les p négatifs entiers.

**Exemple 2.2.2.**

$$\Gamma(-\frac{4}{3}) = \frac{\Gamma(-\frac{1}{3})}{-\frac{4}{3}} = \frac{\Gamma(\frac{2}{3})}{(-\frac{4}{3})(-\frac{1}{3})} = \frac{9}{4}\Gamma(\frac{2}{3})$$

La valeur de $\Gamma(\frac{2}{3})$est trouvée à partir de la tableau.

**Propriété 2.2.2.**

$$\Gamma(p) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!n^p}{p(p+1)(p+2)...(p+n)}$$

Cette formule est utilisée pour le calcul approximatif de la fonction Gamma. Pour la démonstration, considérons la fonction :

$$f(n,p) = \int_0^n (1-\frac{x}{n})^n x^{p-1} dx$$

On peut facilement voir que :

$$\lim_n f(n,p) = \Gamma(p).$$

Evidemment :

$$\lim_{n\to\infty} f(n,p) = \lim_{n\to\infty} \int_0^n (1-\frac{x}{n})^n x^{p-1} dx =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int_0^n [(1+\frac{x}{-n})^{\frac{-n}{x}}]^{-x} x^{p-1} dx = \int_0^\infty e^{-x} x^{p-1} dx = \Gamma(p).$$

D'une autre part, en intégrant par parties, on obtient pour $f(n,p)$ une expression sous la forme :

$$f(n,p) = \int_0^n (1-\frac{x}{n})^n x^{p-1} dx = (1-\frac{x}{n})^n \frac{x^p}{p}|_0^n + \frac{1}{p} \int_0^n (1-\frac{x}{n})^{n-1} x^p dx,$$

Où

$$u = (1-\frac{x}{n})^n du = n(1-\frac{x}{n})^{n-1}(\frac{-1}{n})dx$$

$$dv = x^{p-1}dx, \ v = \frac{x^p}{p}$$

On obtient l'expression :

$$f(n,p) = \frac{1}{p} \int_0^n (1-\frac{x}{n})^{n-1} x^p dx$$

En l'intégrant par parties encore une fois en posant :

$$u = (1-\frac{x}{n})^{n-1}, \ dv = x^p dx$$

d'où $du = -\dfrac{n-1}{n}(1-\dfrac{x}{n})^{n-2}dx; v = \dfrac{x^{p+1}}{p+1}$

On obtient :

$$f(n,p) = \frac{1}{P}[(1-\frac{x}{n})^{n-1} \frac{x^{p+1}}{p+1}|_0^n \frac{n-1}{n(p+1)} \int_0^n (1-\frac{x}{n})^{n-2} x^{p+1} dx]$$

$$= \frac{n(n-1)}{n^2 p(p+1)} \int_0^n x(1-\frac{x}{n})^{n-2} x^{p+1} dx$$

Ou encore après intégration par parties $n$ fois, on obtient :

$$f(n,p) = \frac{n(n-1)(n-2)...[n-(n-1)]}{n^n p(p+1)(p+2)...[p+(n-1)]}\int_0^n (1-\frac{x}{n})^{n-n} x^{n+p-1}dx$$

$$\frac{n!}{n^n p(p+1)(p+2)...(p+n-1)}\frac{x^{n+p}}{n+p}|_0^n$$

$$= \frac{n^{n+p}n!}{n^n p(p+1)...(p+n)} = \frac{n^p n!}{p(p+1)...(p+n)}$$

Par conséquent :

$$\Gamma(p) = \lim_{n\to\infty}\frac{n^p n!}{p(p+1)...(p+n)}$$

**Propriété 2.2.3.**

Dérivée du logarithme de la fonction gamma. Trouvons la formule pour :

$$[\ln\Gamma(p+1)]' = \frac{\Gamma'(p+1)}{\Gamma(p+1)}$$

$$\Gamma(p+1) = p\Gamma(p) = p\lim_{n\to\infty}\frac{n^p n!}{p(p+1)...(p+n)}$$

$$\ln\Gamma(p+1) = \lim_{n\to\infty}[p\ln n + \ln n! - \ln(p+1) - ... - \ln(p+n)]$$

$$\frac{\Gamma'(p+1)}{\Gamma(p+1)} = \lim_{n\to\infty}[\ln n - \frac{1}{p+1} - ... - \frac{1}{p+n}]$$

En posant $p = 0$,

$$\frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)} = \lim_{n\to\infty}[\ln n - (1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n})]$$

La partie gauche de cette égalité est égale approximativement à $-0,57721...$ La grandeur $0,57721...$ s'appelle la constante $C$ d'Euler. Par conséquent :

$$\lim_{n\to\infty}[\ln n - (1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n})] = -C$$

Donc, on peut écrire :

$$\frac{\Gamma'(p+1)}{\Gamma(p+1)} = \lim_{n\to\infty}[\ln n - (1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}...+\frac{1}{p}+\frac{1}{p+n}+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}...+\frac{1}{p})]$$

$$\lim_{n\to\infty}[\ln n - (-1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{p+n})] + \sum_{m=1}^{p}\frac{1}{m} = -C + \sum_{m=1}^{p}\frac{1}{m}$$

Chapitre 3

# Fonctions de Bessel

## 3.1 Détermination de la fonction de Bessel de première espèce

L'équation différentielle de Bessel est :

$$\boldsymbol{Y'' + \frac{1}{x}Y' + (1 - \frac{v^2}{x^2})Y = 0}$$

La solution de cette équation s'appelle fonction de Bessel. L'équation différentielle de Bessel est une équation linéaire d'ordre deux. La solution générale a la forme :

$$\boldsymbol{Y = C_1 Y_1 + C_2 Y_2}$$

où $\boldsymbol{C_1}$ et $\boldsymbol{C_2}$ sont des constantes ; et $\boldsymbol{Y_1}$ et $\boldsymbol{Y_2}$ sont les solutions linéaires et indépendantes de l'équation. On va chercher la solution de l'équation sous la forme de la série :

$$\boldsymbol{Y = x^p(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_i x^i +)}$$

$$\boldsymbol{= \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^{i+p},}$$

En posant $\boldsymbol{a_0 \neq 0}$ Le problème sera de trouver les coefficients $\boldsymbol{a_i, i = 1, 2, ...}$ et le nombre $\boldsymbol{p}$. La fonction :

$\boldsymbol{Y = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^{i+p}}$ , sera introduite dans l'équation. Trouvons les dérivées :

$$\boldsymbol{Y' = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^{i+p-1}(p+1)}$$

$$\boldsymbol{Y'' = \sum_{i=0}^{\infty} a_i (i+p)(i+p-1) x^{i+p-2}}$$

En les remplaçant dans l'équation, on trouve :

$$\boldsymbol{\sum_{i=0}^{\infty} a_i (i+p)(i+p-1) x^{i+p-2} + \sum_{i=0}^{\infty} a_i (i+p) x^{i+p-2} + (1 - \frac{v^2}{x^2}) \sum_{i=1}^{\infty} a_i x^{i+p} = 0}$$

L'identité peut être écrite sous forme :

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i[(i+p)^2 - v^2]x^{i+p-2} \equiv -\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^{i+p}$$

On peut déduire que :

$$a_i = -\frac{a_{i-2}}{i(2p+i)}$$

En tenant compte que : $a_1 = 0, a_3 = 0, a_5 = 0, ...a_{2k+1} = 0$ c'est-à-dire que les coefficients ayant des indices impairs sont nuls. Sur la base de la formule de récurrence, on peut écrire :

$$a_2 = \frac{a_0}{2(2p+2)} = -\frac{a_0}{2^2(p+1)}$$

$$\frac{a_2}{4(2p+4)} = (-1)^2 \frac{a_0}{2^4 2(p+1)(p+2)}$$

$$-\frac{a_6}{6(2p+6)} = (-1)^3 \frac{a_0}{2^6 23(p+1)(p+2)(p+3)}$$

$$\vdots$$

$$a_{2k} = (-1)^k \frac{a_0}{2^{2k} k!(p+1)(p+2)...(p+k)}$$

On remarque que tous les coefficients pairs sont exprimés en fonction $a_0$, on peut écrire alors :

$$a_0 = \frac{1}{2^p \Gamma(p+1)}$$

En tenant compte de

$$\Gamma(p+1)(p+1) = \Gamma(p+2);$$

$$\Gamma(p+2)(p+2) = \Gamma(p+3), etc$$

$$\Gamma(p+1)(p+1)(p+2)...(p+k) = \Gamma(p+k+1),$$

on peut écrire pour simplifier que :

$$a_{2k} = (-1)^k \frac{1}{2^{2k+1} k! \Gamma(p+k+1)},$$

La solution de l'équation peut être représentée sous forme :

$$Y = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(x/2)^{2k+p}}{k! \Gamma(p+k+1)}$$

où $p = v$. La solution de l'équation pour $p = v$ est notée par $J_v(x)$ et elle est appelée équation de Bessel de premiére espèce d'ordre $v$ . La solution pour $p = -v$ est notée par $J_{-v}(x)$ et elle appelée équation de Bessel de première espèce d'ordre $-v$ . Par conséquent :

$$J_v(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{(\frac{x}{2})^{2k+v}}{k!\Gamma(k+v+1)}$$

$$J_{-v}(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{(\frac{x}{2})^{2k-v}}{k!\Gamma(k-v+1)}$$

Pour $v$ non entier $J_v(x), J_{-v}(x)$ sont des fonctions linéairement indépendantes et par conséquent :

$$Y = C_2 J_v(x) + C_2 J_{-v}(x)$$

est la solution générale de l'équation de Bessel.
Si $v$ est un entier égal à $n$ , $J_n(x)$ , $J_{-n}(x)$ seront linéairement dépendantes.
Pour confirmer celui-ci, considérons la série pour $J_{-n}(x)$ , et transformons la :

$$J_{-n}(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{(\frac{x}{2})^{2k-n}}{k!\Gamma(-n+k+1)}$$

On connaît que la fonction gamma pour les nombres entiers négatifs et nul elle est égale à l'infini. Par conséquent, pour $k \leq n1$ , $\Gamma(n+k+1) = \infty$ et la série sera nulle. La sommation peut être débutée de $k = n$ :

$$J_{-n}(x) = \sum_{k=n}^{\infty}(-1)^k \frac{(\frac{x}{2})^{2k-n}}{k!\Gamma(k-n+1)}$$

Si $m = k - n$, on aura :

$$J_{-n}(x) = \sum_{k=n}^{\infty}(-1)^{m+n} \frac{(\frac{x}{2})^{2m+n}}{(m+n)!\Gamma(m+1)}$$

$$= (-1)^m \frac{(\frac{x}{2})^{2m+n}}{m!\Gamma(m+n+1)}$$

[ étant donné que $\Gamma(m+1) = m!$, alors, $\Gamma(m+n+1) = (m+n!)$]. La dernière série détermine la fonction $J_{n(x)}$. Par conséquent :

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$$

Donc, $J_{n(x)}$ et $J_{-n(x)}$ sont linéairement dépendantes Considérons $J_0(x)$ et $J_1(x)$ :

$$J_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{(\frac{x}{2})^{2k}}{(k!\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{(\frac{x}{2})^{2k}}{(k!)^2}$$

$$= 1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^4 2!^2} - \frac{x^6}{2^6 3!^2} + \frac{x^8}{2^8 4!^2} - \frac{x^{10}}{2^{10} 5!^2} + ...$$

(avec $0! = 1$). Par conséquent :
$J_0(-x) = J_0(x)$ et la fonction est paire. Pour $x = 0$ , $J_0(x) = 1$ Si pour $J_0(x)$, on prend la somme des cinq membres de la série :

$$1-\frac{x^2}{2^2}+\frac{x^4}{2^4 2!^2}-\frac{x^6}{2^6 3!^2}+\frac{x^8}{2^8 4!^2}$$

l'erreur sera inférieure à, $\frac{x^{10}}{2^{10}5!}<\frac{x^{10}}{10^7}$ La série converge alors principalement pour $x<1$. Le graphe de la fonction $J_0(x)$ . Ce graphe peut être construit en relevant de la table une série des valeurs de $J_0(x)$ :

$$J_1(x)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(\frac{x}{2})^{2k+1}}{(k!\Gamma(k+2)}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(\frac{x}{2})^{2k+1}}{k!(k+1)}$$

$$=\frac{x}{2}-\frac{x^3}{2^3 3}+\frac{x^5}{2^5 2!3!}-\frac{x^7}{2^7 3!4!}+...$$

Pour $x=0$,$J_1(x)=0$ De plus, on a $J_1(-x)=-J_1(x)$ et par conséquent $J_1(x)$ est impaire. La relation $J_0(-x)=J_0(x)$ et $J_1(-x)=-J_1(x)$ permet de dresser la table pour $x>0$.

| x | J$_0(x)$ | J$_1(x)$ | x | J$_0(c)$ | J$_1(x)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0,0 | 1,0000 | 00,000 | 2,00 | 0,2239 | 0,5767 |
| 0,5 | 0,9385 | 0,2423 | 2,5 | -0,0484 | 0,4971 |
| 1,0 | 0,7652 | 0,4401 | 3,0 | -0,2601 | 0,3391 |
| 1,5 | 0,5118 | 0,5579 | | | |

## 3.2 Fonction de Bessel de deuxième espèce

En qualité de deuxième solution on prend :

$$Y_n(x)=\lim_{v\to n}\frac{\cos\pi v J_v(x)-J_{-v}(x)}{\sin\pi v}$$

Pour $v=n$ , on a : $\sin\pi v=0$,$cosn\pi=(-1)^n(-1)^n j_n(x)=j_{-n}(x)$et on obtient une indétermination $0/0$ .
Utilisons la règle de l'Hospital :

$$Y_n(x)=\lim_{v\to n}\frac{\frac{\partial}{\partial v}[\cos\pi v J_v(x)-J_{-v}(x)]}{\frac{\partial}{\partial v}\sin\pi v}$$

On obtient :

$$Y_n(x)=\frac{2}{\pi}J_n(x)[\ln\frac{x}{2}+C]-\frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\Gamma(n-k)}{\Gamma(k+1)}(\frac{x}{2})^{2k-n}$$

$$-\frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(\frac{x}{2})^{n+2k}}{\Gamma(k+1)\Gamma(n+k+1)}[\sum_{m=1}^{n+k}\frac{1}{m}+\sum_{m=1}^{k}\frac{1}{m}]$$

où $C$ est la constante d'Euler. La solution générale est :

$$C_1J_n(x)+C_2Y_n(x)$$

La fonction $Y_n(x)$ s'appelle équation de Bessel de deuxième espéce d'ordre $n$ ou fonction de Neumann. Ecrivons la série pour $Y_0(x)$

$$Y_0(x) = \frac{2}{\pi} J_0(x)[\ln \frac{x}{2} + C] - \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (\frac{x}{2})^{2k}}{(k!)^2} 2 \sum_{m=1}^{k} \frac{1}{m}$$

$$\frac{2}{m}[J_0(x)(\ln \frac{x}{2} + C) - 1 + \frac{x^2}{2^2} - \frac{x^4}{2^2 4^2}(1 + \frac{1}{2}) + \frac{x^6}{2^2 4^2 6^2}(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}) + ...]$$

donc : $Y_0(x) \to \infty$ pour $x \to 0$

## 3.3 Équation différentielle conduisant à l'équation de Bessel. Fonction de Bessel de troisième espèce

Soit l'équation :

$$Y'' + \frac{1}{x} Y' + (\lambda^2 + \frac{v^2}{x^2}) Y = 0 \tag{3.1}$$

Transformons cette équation en introduisant une nouvelle variable $t = \lambda x$. Exprimons la dérivée de y en fonction de $t$ :

$$Y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \lambda \frac{dy}{dt}$$

$$Y'' = \lambda \frac{dx}{dx} = \frac{d^2y}{dt^2}\frac{dt}{dx} = \lambda^2 \frac{d^2y}{dt^2}$$

Les expressions trouvées sont remplacées dans (3.1) :

$$\lambda^2 \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{\lambda}{t} \lambda \frac{dt}{dy} + (\lambda^2 - \frac{\lambda^2 v^2}{t^2}) y = 0$$

simplifions par $\lambda^2$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{1}{t}\frac{dy}{dt} + (1 - \frac{v^2}{t^2}) y = 0$$

C'est donc l'équation de Bessel. Ses solutions seront $J_v(t)$ et $J_{-v}$ ou $J_v(\lambda x)$ et $J_{-v}(\lambda x)$
Considérons l'équation.

$$Y'' + \frac{1}{x} Y' - (1 + \frac{v^2}{x^2}) Y \tag{3.2}$$

Si l'on introduit le signe $(-)$ sous la parenthèse et l'on pose $i^2 = -1$, l'équation (3.2) devient :$Y'' + \dfrac{1}{x} Y' + (i^2 - \dfrac{v^2}{x^2}) Y$ , qui est un cas particulier de l'équation (3.1), quand $\lambda = i$. La solution de l'équation (3.1) sera : $J_v(xi)$ et $J_v(xi)$

$$J_v(x_i) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(\frac{x}{2})^{2k+v} i^{2k+v}}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+v+1)}$$

$$i^v \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\frac{x}{2})^{2k+v}}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+v+1)}$$

$$J_{-v}(x_i) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{(\frac{x}{2})^{2k-v} i^{2k-v}}{\Gamma(k+1)\Gamma(k-v+1)}$$
$$= i^{-v} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\frac{x}{2})^{2k-v}}{\Gamma(k+1)\Gamma(k-v+1)}$$

[on a utilisé $i^{2k} = (-1)^k$ , $(-1)^{2k} = 1$]. Etant donné que l'équation différentielle est homogène, donc quelque soit $C_1$ et quelque soit $C_2$ les fonctions $C_1 J_v(xi)$ et $C_2 J_{-v}(xi)$ seront ses solutions. En posant $C_1 = i^{-v}$, et $C_2 = i^v$ on obtient la solution sous forme :

$$i^{-v} J_v(x_i) = i^{-v} i^v \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\frac{x}{2})^{2k+v}}{k!\Gamma(k+v+1)}$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\frac{x}{2})^{2k+v}}{k!\Gamma(k+v+1)}$$
$$= i^v J_{-v}(x_i) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\frac{x}{2})^{2k-v}}{k!\Gamma(k-v+1)}$$

Posons

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\frac{x}{2})^{2k+v}}{k!\Gamma(k+v+1)} = I_v(x)$$
$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\frac{x}{2})^{2k-v}}{k!\Gamma(k-v+1)} = I_{-v}(x)$$

Les fonctions $I_v(x)$ et $I_{-v}(x)$ sont les fonctions de Bessel du troisième espèce. Dans le cas de $v$ fractionnel,$I_v(x)$ et $I_{-v}(x)$ sont linéairement dépendants et $Y = C_1 I_v(x) + C_2 I_{-v}(x)$ sera la solution générale de (3.2). Dans le cas $v = n$(entier),$I_n(x) = I_n(x)$ Vérifions :

$$I_{-n}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\frac{x}{2})^{2k-n}}{k!\Gamma(k-n+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\frac{x}{2})^{2k-n}}{k!\Gamma(k-n+1)}$$

(étant donné que $k \leq n-1$, le nombre $kn + 10$ et par conséquent $\Gamma(kn+1) = \infty$, et les membres correspondants de la série sont nuls). Introduisons un nouveau indice de sommation m, en posant $k = m + n$. D'où :

$$I_{-n}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\frac{x}{2})^{2m+n}}{(m+n)!\Gamma(m+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\frac{x}{2})^{2m+n}}{m!\Gamma(m+n+1)} = I_n(x)$$

Dans le cas où $v$ est un entier, la nouvelle solution linéairement indépendante avec $I_n(x)$ :

$$K_n(x) = \frac{\pi}{2} \frac{I_{-n}(x) - I_n(x)}{\sin \pi n}$$

et la solution générale de (3.2) s'écrira sous forme :

$$Y = C_1 I_n + C_2 K_n(x)$$

## 3.4 Fonction génératrice de la fonction Bessel

Considérons la fonction $u(z,t) = e^{\frac{Z}{2}(t-\frac{1}{t})}$ qu'on décompose en série :

$$u(z,t) = e^{\frac{zt}{2}} e^{-\frac{z}{2t}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\frac{zt}{2})^k}{k!} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-\frac{z}{2t})^m}{m!}$$

On peut écrire, que

$$u(z,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (\frac{z}{2})^{k+m} t^{k-m}}{k!m!}$$

ou

$$u(z,t) = \sum_{-\infty}^{\infty} A_n t^n.$$

Le coefficient $A_n$ est :

$$A_n = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m = \frac{(\frac{z}{2})^{2m+n}}{(m+n)!m!} = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{(\frac{z}{2})^{2m+n}}{m!\Gamma(m+n+1)}$$

Pour $z = x$, le coefficient $A_n$ devient $J_n(x)$ et

$$u(x,t) = e^{\frac{x}{2}(t-\frac{1}{t})} = \sum_{-\infty}^{\infty} J_n(x) t^n$$

La fonction $u(x,t)$ s'appelle la fonction génératrice de la fonction de Bessel de première espèce d'ordre entier $n$.
Si l'on pose $z = ix$, on a :

$$A_n = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m =$$

et

$$u(ix,t) = e^{\frac{ix}{2}(t-\frac{1}{t})} = \sum_{-\infty}^{\infty} i^n I_n(x) t^n.$$

la fonction U(ix,t)s'appelle la fonction génératrice de la fonction de Bessel de troissième espèce.

### Propriétés de la fonction de Bessel de première et troisième espèces

1)formule de récurrence

$$J_{n+1}(x) = \frac{2n}{x} J_n(x) - J_{n-1}(x).$$

cette formule joue un role important dans la théorie des fonctions de Bessel . Elle permet de réduire le calcul des fonctions d'ordre supèrieure des fonctions de premièr et deuxième ordre ,c'est a dire $J_1(x)$ et $J_0(x)$ exemple :

$$J_4(x) = J_{3+1}(x) = \frac{6}{x}J_3(x) - J_2(x) =$$

$$= \frac{6}{x}[\frac{4}{x}J_2(x) - J_1(x)] - [\frac{2}{x}J_1(x) - J_0(x)] =$$

$$= \frac{24}{x^2}[\frac{2}{x}J_1(x) - J_0(x)] - \frac{6}{x}J_1(x) - \frac{2}{x}J_1(x) +$$

$$+ J_0(x) = \frac{48}{x^3}(x) - \frac{24}{x^2}J_0(x) - \frac{8}{x}J_1(x) + J_0(x) =$$

$$= [\frac{48}{x^2} - \frac{8}{x}]J_1(x) - [\frac{24}{x^2} - 1]J_0(x).$$

la formule de récurrence permet pour la fonction de Bessel d'ordre entier de se limiter a l'établissement des tables pour $J_0(x)$ et $J_1(x)$ .

## Démonstration :

prenons la relation de la fonction $u(x,t)$ et calculons $\frac{\partial u}{\partial t}$ par deux méthodes :

$$a)\ \frac{\partial u}{\partial t}e^{\frac{x}{2}(t-\frac{1}{t})}\frac{x}{2}(1 + \frac{1}{t^2} = \frac{x}{2}\sum_{-\infty}^{\infty} J_n(x)t^n + \frac{x}{2}\sum_{-\infty}^{\infty} J_n(x)t^{n-2};$$

$$b)\ \frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{-\infty}^{\infty} J_n(x)nt^{n-1}.$$

les deux parties droites des deux différents expressions doivent être égales pour $\frac{\partial u}{\partial t}$ .
Egalisons les coefficients pour $t^{n-1}$. On obtient :

$$nJ_n(x) = \frac{x}{2}J_{n-1}(x) + \frac{x}{2}J_{n+1}(x)$$

D'où :

$$J_{n+1}(x) = \frac{2n}{x}J_n(x) = \frac{2n}{x}J_n(x) - J_{n-1}(x), etc...$$

2. Formule pour la dérivée

$$J_n'(x) = 2[J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x)].$$

Pour la Démonstration calculons par deux méthodes

$$a)\ \frac{\partial u}{\partial x}e^{\frac{x}{2}(t-\frac{1}{t})}\frac{1}{2}(1 - \frac{1}{t}) = \frac{1}{2}[\sum_{-\infty}^{\infty} J_n(x)t^{n+1} - \sum_{-\infty}^{\infty} J_n(x)t^{n-1}];$$

$$b)\ \frac{\partial u}{\partial x} = \sum_{-\infty}^{\infty} J_n'(x)t^n.$$

Égalisons les coefficients pour $t^n$.On obtient :

$$J'_n(x) = \frac{1}{2}[J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x)],\ etc.$$

la formule montre ,que par les tables $J_0(x)$ et $J_{n-1}(x)$,on peut calculer $J'_n(x)$ . Dans le cas particulier pour $n = 0$,on obtient :

$$J'_n(x) = \frac{1}{2}[J_{-1}(x) - J_1(x)] = \frac{1}{2}[-J_1(x) - J_1(x)] = -J_1(x).$$

3.Prenons la formule (3.3).Dérivons par rapport a $t$ comme fonction exponentielle d'abord puis comme série :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{xi}{2} e^{(t-\frac{1}{t})}(1 + \frac{1}{t^2}) = [\sum_{-\infty}^{\infty} i^n I_n(x) t^n +$$

$$+ \sum_{-\infty}^{\infty} i^n I_n(x) t^{n-2}] \frac{xi}{2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{-\infty}^{\infty} i^n I_n(x) n t^{n-1}$$

Egalisons les coefficients pour $t^{n-1}$.on obtient

$$i^n I_n(x) n = \frac{xi}{2}[i^{n-1} I_{n-1}(x) + i^{n+1} I_{n+1}(x)] =$$

$$= \frac{xi^n}{2}[I_{n-1}(x) + i^2 I_{n+1}(x)]$$

Ou :

$$I_n(x) n = \frac{x}{2}[I_{n-1}(x) - I_{n+1}(x)]$$

d'où :

$$I_{n+1}(x) = -\frac{2n}{x} I_n(x) + I_{n-1}(x)$$

la formule récurrente pour la fonction de Bessel de troisième espèce.

4).Si l'on calcule $\frac{\partial u}{\partial x}$ de la formule (3.3) par deux méthodes et on égalise les coefficients dans les deux expressions trouvées pour $t^n$ , on obtiendra la dérivée de la fonction de Bessel du troisième espèce :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^{\frac{xi}{2}(t-\frac{1}{t})} \frac{i}{2}(t - \frac{1}{t}) = \frac{i}{2}[\sum_{-\infty}^{\infty} i^n I_n(x) t^{n+1} - \sum_{-\infty}^{\infty} i^n I_n(x) t^{n-1}].$$

D'une autre part,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \sum_{-\infty}^{\infty} i^n I'_n(x) t^n;$$

$$i^n I'_n(x) = \frac{1}{2}[i^{n-1} I_{n-1}(x) - i^{n+1} I_{n+1}(x)] =$$

$$= \frac{i^n}{2}[I_{n-1}(x) - i^2 I_{n+1}(x)]$$

où :

$$I'_n(x) = \frac{1}{2}[I'_n(x) = I_{n+1}(x)]\, etc$$

pour $n = 0$

$$I'_0(x) = \frac{1}{2}[I_{-1}(x) + I_1(x)] = I_1(x)$$

avec :

$$I_{-n}(x) = I_n(x)$$

Des formules analogues peuvent être obtenues pour $Y_n(x)$ et $K_n(x)$.

## Formules intégrales de la fonction de Bessel de première et troisième espèces

Afin de déduire les formules pour $J_n(x)$, on prend la relation :

$$e^{\frac{x}{2}(t-\frac{1}{t})} = \sum_{-\infty}^{\infty} J_k(x) t^k \tag{3.4}$$

et on pose $t = e^{i\varphi}$. D'où.

$$\frac{t - \frac{1}{t}}{2} = \frac{e^{i\varphi} - \frac{1}{e^{i\varphi}}}{2} = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2} = i \sin\varphi; t^k = e^{ik\varphi}$$

et la relation (3.4)devient :

$$e^{ix\sin\varphi} = \sum_{-\infty}^{\infty} J_k(x) e^{ik\varphi} \tag{3.5}$$

la fonction $e^{ik\varphi}$ a la propriété telle que, $\int_0^{2k} e^{ik\varphi} d\varphi = 0$ pour $k \neq 0$, donc :

$$\int_0^{2\pi} e^{iK\varphi} d\varphi = \frac{e^{iK\varphi}}{iK}|_0^{2\pi} = \frac{1}{iK}[e^{2\pi Ki} - e^0] = 0,$$

avec
$e^o = 1$ et $e^{2\pi k} = \cos 2\pi k + i \sin 2\pi k = 1.$
Pour $k = 0$, on a :

$$\int_0^{2\pi} e^{ik\varphi} d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi.$$

Donc , pour trouver les fonctions pour $J_n(x)$,il faut multiplier l'égalité (3.5) par $e^{-in\varphi}$ et intégrer par rapport a $\varphi$ sur l'intervalle $0 \to 2\pi$.

$$\int_0^{2\pi} e^{-x\sin\varphi - n\varphi i} d\varphi = \sum_{-\infty}^{\infty} J_k(x) \int_0^{2\pi} e^{i(k-n)\varphi} d\varphi.$$

on obtient enfin :

$$J_n(x) \int_0^{2\pi} e^0 d\varphi = 2\pi J_n(x).$$

En transformant la partie gauche par la formule d'Euler, on obtient :

$$\int_0^{2\pi} [(x \sin\varphi - n\varphi) + i \sin(x \sin\varphi - n\varphi)] d\varphi = 2\pi J_n(x).$$

pour les valeurs réeles de de la fonction $J_n(x)$ prendra des valeurs réeles et l'égalité sera possible si :

$$\int_0^{2\pi} \sin(x \sin\varphi - n\varphi) d\varphi = 0.$$

par conséquent :

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(x \sin\varphi - n\varphi) d\varphi.$$

Dans le cas particulier pour $n = 0$ , on a

$$J_0(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(x \sin\varphi) d\varphi = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(x \sin\varphi) d\varphi = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x \sin\varphi) d\varphi. \tag{3.6}$$

Afin de trouver la formule intégrale pour $J_n(x)$,prenons la fonction génératrice pour la fonction de Bessel de troisième espèce :

$$e^{\frac{ix}{2}(t-\frac{1}{t})} = \sum_{-\infty}^{\infty} i^k I^k(x) t^k$$

et effectuons les mêmes transformations en posant $t = e^{i\varphi}$,d'où

$$\frac{xi}{2}(t - \frac{1}{t}) = xi \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2} = x \sin\varphi i = -x \sin\varphi; t^k = e^{ik\varphi}.$$

et

$$e^{-x \sin\varphi} = \sum_{-\infty}^{\infty} i^k I_k(x) e^{ik\varphi}.$$

multiplions par $e^{-in\varphi}$ et intégrons de $0$ a $2\pi$ :

$$\int_0^{2\pi} e^{-x \sin\varphi - in\varphi} d\varphi = \sum_{-\infty}^{\infty} i^k I_k(x) \int_0^{2\pi} e^{i(k-n)\varphi} d\varphi.$$

une seule intégrale est $\neq 0$ pour $k = n$ dans la partie droite ,d'oú :

$$\int_0^{2\pi} e^{-x \sin\varphi - in\varphi} d\varphi = i^n I_n(x) 2\pi.$$

pour $n = 0$,on a :

$$\int_0^{2\pi} e^{-x \sin\varphi} d\varphi = 2\pi I_0(x).$$

## Intégrale de Weber-Lipchitz

on rencontre souvent géophisique les intégrales de Weber -lipchitz :

$$\int_0^\infty e^{-zx} J_0(rx)dx = \frac{1}{\sqrt{z^2+r^2}}$$

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty K_0(rx)\cos(zx)dx = \frac{1}{\sqrt{z^2+r^2}}$$

Montrons la première formule. Pour $J_0(rx)$ prenons la formule intégrale (3.6) :

$$J_0(rx) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(rx\sin\varphi)d\varphi.$$

En remplaçant cette expression dans la partie gauche de cette équation, on obtient :

$$\int_0^\infty e^{-zx} J_0(rx)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-zx}\int_0^{\frac{2}{\pi}} \cos(rx\sin\varphi)d\varphi dx.$$

l'éxpression $\cos(rx\sin j)$ est égale à :

$$\frac{e^{irx\sin\varphi} + e^{-irx\sin\varphi}}{2}$$

D'où :

$$\int_0^\infty e^{-zx} J_0(rx)dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^\infty [e^{-zx+irx\sin\varphi} + e^{-zx-irx\sin\varphi}]dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi[\frac{e^{-zx+irx\sin\varphi}}{-z+ir\sin\varphi} - \frac{e^{-zx-irx\sin\varphi}}{z+ir\sin\varphi}]_0^\infty$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} [\frac{1}{z-ir\sin\varphi} + \frac{1}{z+ir\sin\varphi}]d\varphi$$

En réduisant en un même dénominateur, on a :

$$\int_0^\infty e^{-zx} J_0(rx)dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2z}{z^2+r^2\sin^2\varphi}d\varphi = \frac{2z}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{z^2+r^2\sin^2\varphi} = \frac{2z}{\Pi}\int_0^{\Pi/2} \frac{d\varphi}{z_2+r^2\sin^2$$

Posons $tg\varphi = t$ ; $dt = \sec^2\varphi d\varphi$ ;

$$d\varphi = \frac{dt}{\sec^2\varphi} = \frac{dt}{1+tg^2\varphi} = \frac{dt}{1+t^2};$$

$$\sin^2\varphi = \frac{tg^2\varphi}{\sec^2\varphi} = \frac{t^2}{1+t^2}.$$

l'intégrale sera cherchée :

$$\frac{2z}{\pi}\int_0^\infty \frac{dt}{(1+t^2)[z^2+r^2\frac{t^2}{1+t^2}]} =$$

$$\frac{2z}{\pi}\int_0^\infty \frac{dt}{z^2}+(z^2+r^2)t^2 =$$

$$= \frac{2z}{\Pi(z^2+r^2)}\int_0^\infty \frac{dt}{\frac{z^2}{z^2+r^2+t^2}} = \frac{2z}{\pi(z^2+r^2)}\frac{\sqrt{z^2+r^2}}{z}$$

$$\times\frac{t\sqrt{z^2+r^2}}{z}|_0^\infty = \frac{2}{\pi\sqrt{z^2+r^2}}\frac{\pi}{2} = \frac{1}{\sqrt{z^2+r^2}}$$

Dans le cas particulier pour $z=0$ : $\int_0^\infty J_0(rx)dx = \frac{1}{t}$

## Orthogonalité de la fonction de Bessel

La valeur $\lambda$ est la racine de $J_v(x)$ ,si $J_v(\lambda)=0$. Montrons que si $\lambda$ et $\mu$ deux racines différentes de la fonction $J_v(x)$ , on aura :

$$\int_0^1 xJ_v(\lambda x)J_v(\mu x)dx = 0.$$

l'égalité à zéro de l'intégrale est une propriété d'orthogonalité de la fonction de Bessel. Pour la démonstration, posons $J_v(\lambda x)=Y_1$ et $J_v(\mu x)=Y_1$, donc conformément à (3.2), on a :

$$Y_1'' + \frac{1}{x}Y_1' + (\lambda^2 - \frac{v^2}{x^2})Y_1 = 0,$$

$$Y_2'' + \frac{1}{x}Y_2' + (\mu^2 - \frac{v^2}{x^2})Y_2 = 0$$

Afin de trouver la fonction sous intégrale $xY_1Y_2$ , multiplions la première équation par $xY_2$ et la deuxième par $xY_1$ et retranchons la deuxième égalité de la première. On obtient :

$$x(Y_1''Y_2 - y_2''Y_1) + (Y_1'Y_2 - Y_2'Y_1) + (\lambda^2-\mu^2)xY_1Y_2 = 0$$

qu'on peut écrire sous forme :

$$\frac{d}{dx}[x(Y_1'Y_2 - Y_2'Y_1)] + (\lambda^2+\mu^2)xY_1Y_2 = 0$$

L'intégrale de $0$ à $1$ donne :

$$[x(x(Y_1'Y_2 - y_2'Y_1))]|_0^1 + (\lambda^2-\mu^2)\int_0^1 xY_1Y_2dx = 0$$

En considérant que $\mu$ est une variable :

$$Y_1 = J_v(\lambda x), Y_1|_{x=1} = J_v(\lambda) = 0;$$

$$Y_2 = J_v(\mu x), Y_2|_{x=1} = J_v(\mu) \neq 0;$$

$$Y_1' = \frac{dJ_v(\lambda x)}{dx} = \frac{dJ_v\lambda x}{d(\lambda x)} = \frac{d(\lambda x)}{dx} = J_v'(\lambda x)\lambda; Y_1'|_{x=1} = J_v'(\lambda)\lambda.$$

En remplaçant l'expression trouvée, on trouve :

$$[x(Y_1'Y_2 - Y_2'Y_1)]_0^1 = J_v'(\lambda)\lambda J_v'(\mu).$$

D'où

$$\int_0^1 J_v^2(\lambda x)dx = \lim_{\mu\to\lambda}\frac{[x(Y_1'Y_2 - Y_2'Y_1)]}{\mu^2-\lambda^2} = \lim\frac{\lambda J_v'(\lambda)J_v(\mu)}{\mu^2-\lambda^2}$$

En appliquant le théorème d'Hôspital à la partie droite, on a :

$$\int_0^1 xJ_v^2(\lambda x)dx = \lim_{\mu\to\lambda}\frac{\lambda J_v'(\lambda)J_v'(\mu)}{2\mu} = \frac{[J_v'(\lambda)]^2}{2}.$$

D'où :

$$\int_0^1 xJ_v^2(\lambda x)dx = \frac{[J_v'(\lambda)]^2}{2}$$

### Décomposition de la fonction $f(x)$ en série par la fonction de Bessel

Les fonctions $J_v(x)$ possédent une infinité de solutions$\lambda_1, ..., \lambda_2, ..., \lambda_k, ...$ . Représentons $f(x)$ par :

$$f(x) = C_1J_v(\lambda x) + C_2j_v(\lambda_2 x) + ... + C_kJ_v(\lambda_k x) + ...$$

Afin de trouver les constantes $C_1$ ,$C_2$ ,$C_k$ utilisons la propriètè d'orthogonalité

$$\int_0^1 xf(x)J_v(\lambda_k x)dx = C_1\int_0^1 xJ_v(\lambda_1 x)J_v(\lambda_k x)dx + ... + C_k\int_0^1 xJ_v^2(\lambda_k x)dx + ...$$

on obtient

$$\int_0^1 xf(x)J_v(\lambda_k x)dx = c_k\int xJ_v^2(\lambda_k x)dx.$$

D'où

$$c_k = \frac{\int_0^1 xf(x)J_v(\lambda_k x)dx}{\int_0^1 xJ_v^2(\lambda_v x)dx} = \frac{2}{[J_v'(\lambda_k x)]^2}\int_0^1 xf(x)J_v(\lambda_k x)dx. \tag{3.7}$$

## 3.5 Équation différentielle de Bessel et sa solution

### 3.5.1 Résolution de l'équation d'Helmholtz en coordonnées cylindriques

Parmi les fonctions spéciales, les fonctions cylindriques sont peut-être les plus répandues. On les rencontre trés souvent dans les problèmes liés à la résolution de l'équation d'Helmholts

$$\Delta v + \lambda v = 0$$

en coordonnées cylindriques. Pour simplifier les choses, supposons que la fonction $v$ soit indépendante des distances mesurées parallèlement à l'axe du cylindre. On a alors $v = v(r, \varphi)$ et

$$\Delta v + \lambda v = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\delta v}{\partial r}) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} + \lambda v \tag{3.8}$$

Pour être univoque, la fonction $v$ doit vérifier la condition de périodicité $v(r, \varphi + 2\pi) = v(r, \varphi)$. Développons-la en série de Fourier :

$$v(r, \varphi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} v_n(r) e^{in\varphi},$$

où

$$v_n(r) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} v(r, \varphi) e^{-in\varphi} d\varphi. \tag{3.9}$$

L'équation différentielle pour la fonction $v_n(r)$ s'obtient sans difficulté en intégrant l'équation (3.8) sur l'intervalle $]-\pi, \pi[$ avec un poids $e^{in\varphi}$ et en simplifiant le terme en $\partial^2 v \backslash \partial\varphi^2$ par double intégration par parties. Puisque la fonction $v(r, \varphi)$ est périodique relativement à la variable $\varphi$, les termes hors intégrale s'annulent, et nous obtenons l'équation différentielle pour la fonction $u(z) = v_n(r)$, où $z = \sqrt{\lambda r}$ :

$$z^2 u'' + z u' + (z^2 - n^2) u = 0.$$

Dans le texte qui suit, nous discuterons une équation plus générale :

$$z^2 u'' + z u' + (z^2 - v^2) u = 0 \tag{3.10}$$

dans laquelle est une variable complexe et $v$ un paramètre susceptible de prendre toute valeur réelle ou complexe. Les solutions arbitraires de (3.10) sont appelées fonctions cylindriques d'ordre $v$ ou fonctions de Bessel, et l'équation (3.10), équation de Bessel. Par changement de variables dans l'équation de Bessel, on obtient une série d'autres équations différentielles, en particulier l'équation de Lommel largement utilisée dans les applications :

$$v'' + \frac{1 - 2\alpha}{\xi} v' + [(\beta\gamma\xi^{\gamma-1})^2 + \frac{\alpha^2 - v^2\gamma^2}{\xi^2}] v = 0 \tag{3.11}$$

dont la solution s'écrit

$$v(\xi) = \xi^{\alpha} u_v(\beta\xi^{\gamma})$$

Ici $u_v(z)$ est une fonction cylindrique d'ordre $v$, tandis que $\alpha$,$\beta$ et $\gamma$ sont des constantes.

### 3.5.2 Définition des fonctions de Bessel de première espèce et des fonctions de Hankel.

L'équation généralisée du type hypergéométrique (3.8) du § 1 comporte comme cas particulier l'équation de Bessel (3.10) avec $\sigma(z) = z$,$\tilde{\tau}(z) = 1$,$\tilde{\sigma}(z) = z^2 - v^2$. En ramenant (3.10) à une équation du type hypergéométrique, la fonction $\pi(z)$ peut prendre, et au choix des valeurs à donner à $\kappa$, des valeurs égales à $z^{\pm v} e^{\pm iz}$. Soit par exemple $u(z) = \varphi(z)y(z)$. En posant $u(z) == q(2)y(3)$. on obtient une équation du type hypergéométrique

$$\sigma(z)y'' + \tau(z)y' + \lambda y = 0 \tag{3.12}$$

où

$$\sigma(z) = z, \tau(z) = 2iz + 2v + 1, \lambda = i(2v + 1).$$

l'équation (3.12) admet une solution particulière de la forme

$$y(z) = \frac{C_\mu}{\rho(z)} \int_C \frac{\sigma^\mu(s)\rho(s)}{(s-z)^{\mu+1}} ds,$$

où $C_\mu$ est une constante de normalisation et la fonction $\rho(z)$ est solution de l'équation différentielle

$$[\sigma(z)\rho(z)]' = \tau(z)\rho(z);$$

$\mu$ est racine de l'équation

$$\lambda + \mu\tau' + \frac{1}{2}\mu(\mu - 1)\sigma'' = 0$$

afin d'éviter toute confusion, nous avons changé $v$ en $\mu$, car la notation $v$ a déja été employée dans l'équation de Bessel initiale.
le contour $C$ est choisi de façon a satisfaire a la condition

$$\frac{\sigma^{\mu+1}(s)\rho(s)}{(s-z)^{\mu+2}}|_{s_1,s_2} = 0$$

dans le cas considéré on a

$$\mu = -v - \frac{1}{2}, \rho(z) = z^{2v}e^{2iz}.$$

aussi la solution particulière de l'équation de Bessel admet elle l'écriture

$$u_v(z) = \varphi(z)y(z) = a_v z^{-v} e^{-iz} \int_C [s(z-s)]^{v-1/2} e^{2is} ds, \tag{3.13}$$

où $a_v$ est une constante de normalisation et le contour $C$ satisfait a la condition

$$s^{v+1/2}(z-s)^{v-3/2}e^{2is}|_{s_1,s_2} = 0.$$

soit $z > 0$ et Re $v > 3/2$, On pourra choisir alors comme exterémités du contour $C$ les points $s_1 = 0$ et $s_2 = z$. Le contour $C$ pourra en entre s'éloigner a l'infini de telle sorte que $\lim\limits_{s\to+\infty}$. Comme $C$, nous choisirons des contours $C_0$, $C_1$, $C_2$ . ils nous donneront alors les trois solutions suivantes de l'équation de Bessel :

$$u_v^{(0)} = \alpha_v z^{-v} e^{-iz} \int_{c0} [s(z-s)]^{v-1/2} e^{2is} ds \tag{3.14}$$

$$u_v^{(1)} = a_v^{(1)} z^{-v} e^{-iz} \int_{c1} [s(z-s)]^{v-1/2} e^{2is} ds \tag{3.15}$$

$$u_v^{(2)} = a_v^{(2)} z^{-v} e^{-iz} \int_{c_2} [s(z-s)]^{v-1/2} e^{2is} ds \qquad (3.16)$$

Pour s'établir sans ambiguïté sur une branche déterminée de la fonction $[s(z-s)]^{v-\frac{1}{2}}$ , on posera $|arg\ s(z-s)| < \pi$ . Il est commode de donner aux contours $C_0$,$C_1$,$C_2$ la représentation paramétrique

$$s = z(1+t)/2 \quad (-1 \leq t \leqslant 1),$$

$$s = z(1+it/2) \quad (0 \leq t < \infty),$$

$$s = izt/2 \quad (0 \leq t < \infty)$$

.

Les formules **(3.14)** à **(3.16)** s'écriront alors

$$u_v^{(0)}(z) = \frac{a_v}{2^{2v}} z^v \int_{-1}^{1} (1-t^2)^{v-\frac{1}{2}} e^{izt} dt = \frac{a_v}{2^{2v}} z^v \int_{-1}^{1} (1-t^2)^{v-\frac{1}{2}} cos\ zt\ dt, \qquad (3.17)$$

$$u_v^{(1)}(z) = -\frac{a_v^{(1)}}{\sqrt{2}} (\frac{z}{2})^v e^{i(z-\frac{\pi v}{2}-\frac{\pi}{4})} \int_0^{\infty} e^{-zt} t^{v-\frac{1}{2}} (1+\frac{it}{2})^{v-\frac{1}{2}}\ dt, \qquad (3.18)$$

$$u_v^{(2)}(z) = -\frac{a_v^{(2)}}{\sqrt{2}} (\frac{z}{2})^v e^{-i(z-\frac{\pi v}{2}-\frac{\pi}{4})} \int_0^{\infty} e^{-zt} t^{v-\frac{1}{2}} (1-\frac{it}{2})^{v-\frac{1}{2}}\ dt, \qquad (3.19)$$

Conformément à la condition $|arg\ s(z-s)| < \pi$, la valeur de $arg\ (1 \pm it\backslash 2)$ dans (3.18) et (3.19) sera choisie la plus petite en module. Si l'on prend, dans (3.18) et (3.19), les constantes de normalisation. réelles, avec par ailleurs $a_v^{(2)} = -a_v^{(1)}$, alors pour des z et v réels les fonctions $u_v^{(1)}(z)$et $u_v^{(2)}(z)$ seront conjuguées complexes. Introduisons une fonction qui prenne des valeurs réelles pour des z et des v réels :

$$u_v(z) = \frac{1}{2}[u_v^{(1)}(z) + u_v^{(2)}(z)]. \qquad (3.20)$$

Montrons que cette fonction se confondra avec $u_v^{(0)}(z)$ si l'on pose

$$a_v^{(2)} = -a_v^{(1)} = 2a_v. \qquad (3.21)$$

Pour la démonstration, il suffit d'appliquer le théorème de Cauchy à un contour $C$ qui réunit $C_0$,$C_1$ , et $C_5$ de la figure. Supposons que ce contour se ferme à l'infini. On a alors en vertu du théorème de Cauchy

$$\int_c [s(z-s)]^{v-\frac{1}{2}} e^{2is} ds = -\int_{c_2} [s(z-s)]^{v-\frac{1}{2}} e^{2is} ds + \int_{c_0} [s(z-s)]^{v-\frac{1}{2}} e^{2is} ds + \int_{c_1} [s(z-s)]^{v-\frac{1}{2}} e^{2is} ds$$

(l'intégrale prise suivant la partie à l'infini du contour s'annule). Cette relation nous conduit, compte tenu de l'égalité (3.21) et des formules (3.14) à (3.16), à l'égalité

$$u_v^{(0)}(z) = \frac{1}{2}[u_v^{(1)}(z) + u_v^{(2)}(z)]. \qquad (3.22)$$

ce qu'il fallait démontrer. Avec un choix approprié de la constante de normalisation $a_v$, la fonction $u_v^0(z)$ est une fonction de Bessel de première espèce et se note $J_v(z)$. Les fonctions $u_v^1(z)$et $u_v^2(z)$ sont appelées, avec la normalisation (3.21). fonctions de Hankel de première et de deuxième espèce et se notent $H_v^{(1)}(z)$ et $H_v^{(2)}(z)$. On a d'après (3.22) :

$$J_v(z) = \frac{1}{2}[H_v^{(1)}(z) + H_v^{(2)}(z)]. \tag{3.23}$$

Les représentations intégrales (3.17) à (3.19) facilitent grandement l'étude des différentes propriétés des fonctions cylindriques. Par exemple, la représentation intégrale de $J_v(z)$ permet de développer très facilement cette fonction en série suivant les puissances de z ; de même, les représentations intégrales des fonctions de Hankel permettent de cerner le comportement asymptotique de ces fonctions pour $z \to \infty$.
Pour développer $J_v(z)$ en série de puissances, portons dans (3.17) le développement de $\cos zt$ en série suivant les puissances de zt et permutons la sommation et l'intégration. Il vient alors

$$J_v(z) = \frac{a_v}{2^{2v}} z^v \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k)} \int_{-1}^{1} (1-t^2)^{v-\frac{1}{2}} t^{2k} dt.$$

Simplifions l'expression des coefficients de la série en mettant en service la parité de l'intégrande, la liaison des fonctions bêta et gamma et la formule de duplication de la fonction gamma :

$$\int_{-1}^{1} (1-t^2)^{v-\frac{1}{2}} t^{2k} dt = 2\int_{0}^{1} (1-t^2)^{v-\frac{1}{2}} t^{2k} dt =$$

$$\int_{0}^{1} (1-t)^{v-\frac{1}{2}} t^{k-\frac{1}{2}} dt = \frac{\Gamma(v+\frac{1}{2})\Gamma(k+\frac{1}{2})}{\Gamma(v+k+1)} = \frac{\Gamma(v+\frac{1}{2})\sqrt{\pi}(2k)}{2^2 k\Gamma(v+k+1)}.$$

On a donc

$$J_v(z) = \frac{a_v}{2^v}\sqrt{\pi}\Gamma(v+\frac{1}{2}) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (z/2)^{v+2k}}{k\Gamma(v+k+1)}.$$

Pour donner une forme plus simple au développement de $J_v(z)$ , choisissons la constante de normalisation $a_v$ de telle sorte que

$$\frac{a_v}{2^v}\sqrt{\pi}\Gamma(v+\frac{1}{2}) = 1. \tag{3.24}$$

On obtient alors

$$J_v(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (z/2)^{v+2k}}{k\Gamma(v+k+1)}. \tag{3.25}$$

En tirant l'expression de $a_v$ de la formule (3.24), récrivons les relations (3.17) à (3.19) sous la forme

$$J_v(z) = \frac{(z/2)^v}{\sqrt{\pi}\Gamma(v+1/2)} \int_{-1}^{1} (1-t^2)^{v-\frac{1}{2}} e^{izt} dt = \frac{a_v}{2^{2v}} z^v \int_{-1}^{1} (1-t^2)^{v-\frac{1}{2}} \cos zt \, dt, \tag{3.26}$$

$$H_v^{(1)}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{z^v exp\{i(z - \frac{\pi v}{2} - \frac{\pi}{4})\}}{\Gamma(v+1/2)} \int_0^\infty e^{-zt} t^{v-1/2} (1 + \frac{it}{2})^{v-1/2} dt, \qquad (3.27)$$

$$H_v^{(2)}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{z^v exp\{-i(z - \frac{\pi v}{2} - \frac{\pi}{4})\}}{\Gamma(v+1/2)} \int_0^\infty e^{-zt} t^{v-1/2} (1 - \frac{it}{2})^{v-1/2} dt. \qquad (3.28)$$

Les représentations intégrales obtenues pour les fonctions cylindriques sont appelées représentations de Poisson. A côté des représentations intégrales (3.27) et (3.28), on donne quel quefois aussi aux fonctions de Hankel des représentations intégrales déduites de (3.27) et de (3.28) en changeant $t$ en $t/z$ :

$$H_v^{(1)}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \frac{z^v exp\{i(z - \frac{\pi v}{2} - \frac{\pi}{4})\}}{\Gamma(v+1/2)} \int_0^\infty e^{-t} t^{v-1/2} (1 + \frac{it}{2z})^{v-1/2} dt, \qquad (3.29)$$

$$H_v^{(2)}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \frac{z^v exp\{-i(z - \frac{\pi v}{2} - \frac{\pi}{4})\}}{\Gamma(v+1/2)} \int_0^\infty e^{-t} t^{v-1/2} (1 - \frac{it}{2z})^{v-1/2} dt, \qquad (3.30)$$

## 3.6 Propriétés principales des fonctions cylindriques

### 3.6.1 1. Relations de récurrence et formules de dérivation.

Pour les fonctions cylindriques, les relations de récurrence . en utilisant la représentation intégrale initiale de ces fonctions :

$$u_v(z) = a_v z^{-v} e^{-iz} \int_C [s(z-s)]^{v-1/2} e^{2is} dt,$$

A titre d'exemple, nous déduirons une relation de la forme

$$A_1(z)u_v'(z) + A_2(z)u_v(z) + A_3(z)u_{v-1}(z) = 0 \qquad (3.31)$$

dans laquelle les coefficients $A_i(z)$ sont des fonctions rationnelles de $z$. On a

$$A_1(z)u_v'(z)+A_2(z)u_v(z)+A_3(z)u_{v-1}(z) = e^{-iz}z^{-v-1} \int_C P(s)[s(z-s)]^{v-3/2} e^{2is} ds,$$

où

$$P(s) = A_1 a_v[(-v - iz)s(z-s)(v - \frac{1}{2})zs] + A_2 a_v zs(z-s) + A_3 z^2 a_{v-1}.$$

Pour que l'égalité (3.31) soit satisfaite, on doit choisir les coefficients $A_1(z)$ , $A_2(z)$ et $A_3(z)$ de telle sorte qu'il y ait

$$P(s)[s(z-s)]^{v-3/2} e^{2is} = \frac{d}{ds} Q(s)[s(z-s)]^{v-1/2} e^{2iz},$$

Où $Q(s)$ est un polynôme. que l'un des coefficients du polynôme $Q(s)$ peut être choisi arbitrairement. Dans notre cas le polynôme $Q(s)$ est de degré $0$, si bien qu'on peut poser $Q(s) = a_v$. Substituant dans la dernière égalité les expressions de $P(s)$ et de $Q(s)$, nous aboutissons à l'égalité suivante :

$$A_1[(-v-iz)s(z-s)+(v-1/2)zs]+A_2zs(z-s)+A_3z^2a_{v-1}/a_v = 2is(z-s)+(v-1/2)(z-2s).$$

En faisant intervenir les expressions des constantes de normalisation $a_v$ correspondant aux fonctions $J_v(z)$ et $H_v^{(1,2)}(z)$, on obtient $a_{v-1}/a_v = (v-1/2)/2$. L'égalité définissant les coefficients $A_i$ reste vraie pour s quelconque. Il est donc légitime de chercher$A_i$ en posant s égal à certaines valeurs particulières. Posons par exemple s=0 : il vient $A_3 = 2/z$. Pour s= z, on a $A_1 = -2/z$ Pour obtenir le coefficient $A_2$ il suffit d'identifier les coefficients affectant le terme de plus haut degré de s, ce qui donne $A_2 = -2v/z^2$. En désignant par $u_v(z)$ l'une des fonctions $J_v(z)$ ou $H_v^{(1,2)}$, on obtient définitivement

$$\frac{v}{z}u_v(z) + u'_v(z) = u_{v-1}(z) \tag{3.32}$$

La relation de récurrence liant les fonctions $u_v(z)$, $u_{v-1}(z)$ et $u_{v-2}(z)$ pourrait être déduite par la même méthode. Or, il est plus facile de le faire en dérivant (3.32) et en éliminant de l'égalité obtenue les fonctions $u''_v(z)$,$u'_v(z)$,$u'_{v-1}(z)$ à l'aide de l'équation de Bessel et de la relation (3.32). On obtient ainsi

$$u_v(z) - \frac{2(v-1)}{z}u_{v-1}(z) + u_{v-2}(z) = 0 \tag{3.33}$$

Aux relations (3.32), (3.33) on peut substituer des relations équivalentes

$$\frac{1}{z}\frac{d}{dz}[z^v u_z] = z^{v-1}u_{v-1}(z),$$
$$-\frac{1}{z}\frac{d}{dz}[z^{-v}u_v(z)] = z^{-(v+1)}u_{v+1}(z).$$

D'où

$$(\frac{1}{z}\frac{d}{dz})^n[z^z u_v(z)] = z^{v-n}u_{v-n}(z), (-\frac{1}{z}\frac{d}{dz})^n[z^{-v}u_v(z)] = z^{-(v+n)}u_{v+n}(z) \tag{3.34}$$

# Relations fonctionnelles

L'équation de Bessel ne change pas lorsqu'on change $v$ en $-v$. Elle admet donc comme solutions non seulement $H_v^{(1)}(z)$ et $H_v^{(2)}(z)$ mais aussi $H_{-v}^{(1)}(z)$ et $H_{-v}^{(2)}(z)$. pour établir la relation entre les fonctions $H_v^{(1,2)}(z)$ et $H_{-v}^{(1,2)}(z)$, supposons provisoirement que $|Rev| < 1/2$. Alors les fonctions de Hankel $H_{\pm v}^{(1,2)}(z)$ admettront les représentation asymptotiques .
Ces derniéres montrent que les fonctions $H_v^{(1,2)}(z)$ présentent un comportement asymptotique différent pour $z \to \infty$ et sont a ce titre des solutions linéarement indépendantes de l'équation de Bessel. on a donc

$$H_{-v}^{(1)}(z) = A_v H_v^{(1)}(z) + B_v H_v^{(2)}(z), \tag{3.35}$$

Où $A_v$ et $B_v$ sont des constantes.
En confrontant le comportement asymptotique du premier et du second membre de (3.35) pour $z \to \infty$,
on obtient $A_v = e^{i\pi v}$, $B_v = 0$, i.e.

$$H_{-v}^{(1)}(z) = e^{i\pi v} H_v^1(z) \tag{3.36}$$

On déduit par un procédé analogue la relation

$$H_{-v}^{(2)}(v) = e^{-i\pi v} H_v^{(2)}(z) \tag{3.37}$$

A l'aide des formules (3.36) et (3.37), on s'assure aisément que les représentations asymptotiques et partant restent valables pour $v$ quelconque.
Cherchons la relation entre les fonctions $H_v^1(z)$, $H_v^2(z)$ et les fonctions $J_v(z)$, $J_{-v}(z)$.
Puisque

$$J_v(z) = \frac{1}{2}[H_v^{(1)}(z) + H_v^{(2)}], J_{-v}(z) = \frac{1}{2}[H_{-v}^{(1)}(z) + H_{-v}^{(2)}], \tag{3.38}$$

on a en vertu de (3.36) et de (3.37)

$$H_v^{(1)}(z) = \frac{J_{-v}(z) - e^{-i\pi v} J_v(z)}{isin\pi v}, H_v^{(2)}(z) = \frac{e^{i\pi v} J_v(z) - J_{-v}(z)}{isin\pi v}. \tag{3.39}$$

## 3.7 Développements en séries de puissances.

nous avons obtenu plus haut un développement en série de la fonction $J_v(z)$ suivant les puissances de z pour des z réels, $z > 0$, et Re $v > 33/2$ :

$$J_v(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (\frac{z}{2})^{v+2k}}{k!\Gamma(v+k+1)}. \tag{3.40}$$

pour montrer que ce développement reste valable pour toutes les valeurs de $v$ et de $z$, nous allons étudier le domaine d'analyticité de la série (3.40) a l'aide du théorème de Weierstrass

**Théorème 3.7.1.**

supposons que les fonctions $f_k(z)$ soient analytiques dans un domaine D et que la série $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(z)$ soit uniformément convergente, dans toute partie fermée $\bar{D}_1 \subset D$, vers une fonction $f(z)$.
on a alors dans D :
1 la fonction $f(z)$ est analytique ;
2 $f^{(n)}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k^{(n)}(z)$ ;
3 la série $\sum_{k=0}^{\infty} f_k^{(n)}(z)$ converge uniformément dans toute partie fermée $\bar{D}_1 \subset D$.

**Remarque 3.7.1.**

la série fonctionnelle $\sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k(z)$ est unformément convergente dans D s'il existe un m tel que pour tout $z \in D$ et pour $k > m$ on a :

$$|\frac{f_k(z)}{f_{k-1}(z)}| \leq q < 1;$$

dans cette inégalité q est indépendant de z et on a $|f_m(z)| \leq C$ pour $z \in D$ ($C =$ const).
Ce critère de convergence uniforme d'une série est appelé critère de d'Alembert.
Montrons que la série (3.40) converge uniformément en z et en v dans le domaine $0 < \delta \leq |z| \leq R$, $|v| \leq N$, où $R$ et $N$ sont des nombres arbitraires fixes suffisamment élevés.
Pour la démonstration, il suffit d'appliquer l'évaluation suivante du rapport de deux termes voisins de la série :

$$|\frac{u_k(z)}{u_{k-1}(z)}| = \frac{|z|^2}{4k|k+v|} \leq \frac{R^2}{4k(k-N)} \leq \frac{1}{4}$$

pour $k \geq max(R^2, N+1)$. Puisque les termes de la sériesont des fonctions analytiques des variables z et v dans le domaine $\delta \leq |z| \leq R$, $|argz| < \pi$. $|v| \leq N$, la série (3.40) sera une fonction analytique des variables z et v pour des valeurs quelconques de v et $|argz| < \pi$.
Ainsi donc, chacun des deux membres de l'égalité (3.40) est une fonction analytique de chacune des variable $z$ et $v$ pour des valeurs quelconques des $v$ et $|argz| < \pi$.
En vertu du principe du prolongement analytique, la relation (3.40) reste valable dans tout le domaine indiqué de variation des variables $z$ et $v$.
Si $v \neq 0, 1, 2, ...$, les fonctions $J_v(z)$ et $J_{-v}(z)$ sont linéairement indépendantes, car elles présentent pour $z \to 0$ un comportement différent :

$$J_v(z) \approx \frac{(z/2)^v}{\Gamma(v+1)}, J_{-v}(z) \approx \frac{(z/2)^{-v}}{\Gamma(-v+1)}.$$

Il en découle que pour $v \neq n (n = 0, 1, 2, ...)$ l'équation de Bessel admet une solution générale sous la forme

$$u(z) = C_1 J_v(z) + C_2 J_{-v}(z).$$

A l'aide de la série (3.40) et des formules (3.39), on obtient les développements en séries des fonctions $H_v^{(1,2)}(z)$ suivant les puissances de $z$.
Aucune difficulténe surgit pour $v \neq n.$
Concentrons nous sur le cas de $v = n$.
Les valeurs de $v = n$ dans les seconds membres des relations (3.39) sont des points singuliers inessentiels, car les premières membres sont des fonctions analytiques du paramètre $v$ et admettent a ce titre une limite pour $v \to n$.
Le dénominateur dans (3.39) s'annule pour $v = n$ ; pour que (3.39) admette une limite finie, il faut donc que le numérateur s'annule lui aussi pour $v = n$, i.e.

$$J_{-n}(z) = (-1)^n J_n(z),$$

d'où il ressort que pour $v = n$ les solutions de l'équation de Bessel $J_n(z)$ et $J_{-n}(z)$ seront linéarement dépendantes.

En passant a la limite pour $v \to n$ et en calculant les limites par la règle de l'Hospital, on obtient

$$H_n^{(1,2)}(z) = J_n(z) \pm \frac{i}{\pi}[a_n(z) + (-1)^n a_{-n}(z)], \tag{3.41}$$

où $a_v(z) = \partial J_v(z)/\partial v$ (le signe positif correspond a $\mathrm{H}_n^{(1)}(z)$.
Puisque, dans le domaine considéré plus haut, la fonction $J_v(z)$ se développe en une série uniformément convergente composée de fonctions analytiques de la valable $v$, en peut calculer $a_v(z)$ d'aprés le théorème de Weierstrass en dérivant terme a terme le développement de $J_v(z)$. Il vient

$$a_v(z) = J_v(z) ln\frac{z}{2} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (z/2)^{v+2k}}{k!\Gamma(k+v+1)} \psi(k+v+1),$$

où $\psi(z)$ est la dérivée logarithmique de la fonction gamma
Puisque

$$\frac{\psi(z)}{\Gamma(z)} \to_{z\to -n} (-1)^{n+1} n!$$

On a

$$(-1)^n a_{-a}(z) = (-1)^n J_{-n}(z) ln\frac{z}{2} -$$

$$-(-1)^n \{\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k (z/2)^{-n+2k}}{k!} (-1)^{n-k}(n-k-1)! +$$

$$+\sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k (z/2)^{-n+2k} \psi(k-n+1)}{k!\Gamma(k-n+1)}\} =$$

$$= J_n(z) ln\frac{z}{2} -$$

$$-\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-k-1)!}{k!} (\frac{z}{2})^{2k-n} -$$

$$-\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (z/2)^{n+2k}}{k!(n+k)!} \psi(k+1).$$

Aussi

$$H_n^{(1,2)}(z) = J_n(z) \pm \frac{i}{\pi}\{2J_n(z) \ \ln\frac{z}{2} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-k-1)!}{k!} (\frac{z}{2})^{2k-n} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (z/2)^{n+2k}}{k!(n+k)!} [\psi(n+k+ \tag{3.42}$$

Pour $n = 0$, on admet que la paremière somme s'annule.
Les valeurs de $\psi(x)$ pour x entier se calculent d'aprés la formule (3.24).
Les formules (3.39) et (3.42) montrent que les fonctions $H_v^{(1,2)}(z)$ admettent pour $z = 0$ une singularité du type puissance $z^{\pm v}$ si Re $v \neq 0$ et une singularité logarithmique si $v = 0$.

## 3.8 Représentation intégrale de sommerfeld des fonctions de Bessel.

En étudiant les propriétès des solutions de l'équation de Bessel pour les fonctions $J_v(z)$ et $H_v^{(1,2)}(z)$, on s'est servi utilement des représentations intgrales de poisson.
Les fonctions de Bessel admettent également une autre représentation intégrale, qui s'avère fort utile dans les problèmes liés a la diffraction. on a vu que la fonction
Pour établir cette représentation, nous nous baserons sur les considérations suivantes,

$$u_n(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} v(r,\varphi)e^{-in\varphi}d\varphi$$

est pour $z = \sqrt{\lambda r}$ une fonction de Bessel d'ordre n si la fonction v vérifie l'équation $\Delta v + \lambda v = 0$.
La solution élémentaire de l'équation $\Delta v + \lambda v = 0$ pour $\lambda = k^2 > 0$ est une onde plane $v = e^{ikr}$, où k est le vecteur onde.
Si l'axe des y est parallèle a k, on a

$$v(r,\varphi) = e^{ikrsin\varphi}.$$

On aboutit a la représentation intégrale suivante de la fonction Bessel $u_n(z)$ :

$$u_n(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{izsin\varphi - in\varphi}d\varphi. \tag{3.43}$$

Des représentations intégrales analogues peuvent etre déduites pour des fonctions de Bessel d'ordre $v$ arbitraire.
A cet effet, il est naturel de chercher la solution de l'équation de Bessel pour $v$ quelconque sous forme d'une intégrale de contour :

$$u_v(v) = \int_C e^{is\sin\varphi - iv\varphi}d\varphi.$$

Montrons que la fonction $u_v(z)$ vérifie toujours l'équation de Bessel, a condition de choisir convenablement le contour $C$.
Pour cela, la meme que pour la représentation (3.43), nous partirons du fait que la fonction $v(r,\varphi) = e^{ikrsin\varphi}$ est solution de l'équation d'Helmholtz

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial v}{\partial r}) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} + k^2 v = 0. \tag{3.44}$$

On s'assure sans peine que l'égalité (3.44) reste vraie pour toute valeur complexe donnée a r et $\varphi$.
Etablissons l'équation pour la fonction $v_v(r) = \int_C v(r,\varphi)e^{-iv\varphi}d\varphi$ a l'aide de l'équation (3.44), en intégrant les deux membres de cette dernière le long du contour $C$ avec le poids $e^{-iv\varphi}$ et en simplifiant le terme en $\partial^2 v/\partial\varphi^2$ au moyen d'une double intégration par parties.
En demandant que s'annule l'expression qui y apparait

$$e^{-iv\varphi}(\frac{\partial v}{\partial \varphi} + ivv)|_{\varphi_2}^{\varphi_1} = ie^{ikrsin\varphi - iv\varphi}(krcos\varphi + v)|_{\varphi_2}^{\varphi_1}$$

($\varphi_1$ et $\varphi_2$ sont les extémités du contour $C$ ), on aboutit a l'équation de Bessel pour $u_v(z) = v_v(r)$ avec $z = kr$.
Ainsi donc, on vient de montrer que la fonction

$$u_v(z) = \int_C e^{izsin\varphi - iv\varphi} d\varphi \tag{3.45}$$

est bien solution de l'équation de Bessel, a condition qu'il y ait

$$e^{izsin\varphi - iv\varphi}(zcos\varphi + v)|_{\varphi_2}^{\varphi_1} = 0 \tag{3.46}$$

Puisque $cos\varphi = \frac{1}{2}(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi})$, la condition (4.46) sera évidemment remplie chaque fois que l'on aura pour $v$ quelconque

$$e^{izsin\varphi - iv\varphi}|_{\varphi=\varphi_1}\varphi_2 = 0 \tag{3.47}$$

les représentations du type (3.45) sont dites représentations de sommerfeld

## 3.9 Représentations intégrales de Sommerfeld pour les fonctions de Hankel et les fonctions de Bessel de première espèce,

Dans la représentation intégrale de $u_v(z)$, on peut prendre comme $C$ par exemple un contour ayant ses extrémités a l'infini, tel que

$$Re(izsin\varphi - iv\varphi) = Re[\frac{1}{2}|z|e^{i\theta}(e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}) - iv\varphi] \rightarrow_{\varphi\rightarrow\infty} -\infty. \tag{3.48}$$

Ici $\theta = argz$
Considérons le contour $C$ ($\varphi = \chi + i\psi$).
Cherchons les restrictions qu'on doit imposer a $\alpha$ et $\beta$ pour que les conditions aux exterémités du contour soient remplies.
Soient $\chi = \alpha$, $\psi \rightarrow +\infty$.
Dans ce cas $\varphi$ et $e^{i\varphi}$ dans (3.48) sont négligeables devant $e^{-i\varphi}$.
La condition (3.48) s'écrit alors

$$\Re e^{i(\theta-\varphi)} \rightarrow_{\psi\rightarrow+\infty} +\infty.$$

Elle est remplie si cos$(\theta - \alpha) > 0$. On peut admettre que

$$\theta - \pi/2 < \alpha < \theta + \pi/2. \tag{3.49}$$

Soient maintenant $\chi = \beta$, $\psi \rightarrow -\infty$. Dans ce cas tout ce ramène a l'énégalité $(\theta + \beta) < 0$ qui sera satisfaite si l'on pose $\beta = -\alpha \pm \pi$.
Les contours correspondants seront désignés par $C_+$ et $C_-$
Remarquons que le choix des contours comporte un certain degré d'rbitraire.
Soit un contour $C'$ défini par la donnée de deux quantités $\alpha'$ et $\beta'$ telles que

$$cos(\theta - \alpha') > 0, cos(\theta + \beta') < 0.$$

A l'aide du théorème de Cauchy, on montre sans difficulté que le contour $C'$ peut etre remplacé par tout autre contour,$C''$, défini par la donnée de deux nombres $\alpha''$ , $\beta''$ , a condition que pour tout $\alpha \in [\alpha', \alpha'']$ et tout $\beta \in [\beta', \beta'']$ il y ait cos $(\theta - \alpha) > 0$ et cos $(\theta + \beta) < 0$.
On comprend alors que, dans la représentation de Sommerfeld, il est possible de prendre au lieu de $C$ un contour tel que son décalage d'une valeur inférieure a $\pi$ laisse inchangée la valeur de l'intégrale de Sommerfeld.
Puisque la fonction $u_v(z)$ vérifie l'équation de Bessel, elle peut s'écrire comme suit :

$$u_v(z) = C_v H_v^{(1)}(z) + D_v(z) H_v^{(2)}(z). \tag{3.50}$$

Cherchons les coefficients $C_v$ et $D_v$ en utilisant le comportement asymptotique déja connu des fonctions $H_v^{(1,2)}(z)$.
Palaçons nous d'abord dans le cas où l'on adopte comme $C$ le contour $C_+$. Soient $|z| \to \infty$ et arg $z = \pi/2$. On peut alors choisir $\alpha = \beta = \pi/2$ ; autrement dit, on peut, dans l'expression de $u_v(z)$, poser $\varphi = \pi/2 + i\psi$, où $-\infty < \psi < \infty$. Cela nous donne

$$v_v = ie^{-i\pi v/2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|z|ch\psi} e^{v\psi} d\psi = 2ie^{-i\pi v/2} \int_0^{\infty} e^{-|z|ch\psi} chv\psi d\psi.$$

Afin de cerner le comportement asymptotique de la fonction $u_v(z)$ pour $z \to \infty$, on peut faire intervenir le lemme de Watson aprés avoir fait le changement $ch\psi = 1 + t$. On a, en effet :

$$u_v(z) = 2iexp(-\frac{i\pi v}{2} - |z|) \int_0^{\infty} e^{-|z|t} f(t) dt,$$

où

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{t(2+t)}} ch[vln(1 + t + \sqrt{t(2+t)})].$$

Puisque $f(t) = \dfrac{1}{\sqrt{2t}}[1 + O(t)]$ pour $t \to 0$, il vient pour $z \to 0$ en vertu du lemme de Watson

$$u_v(z) = 2iexp(-i\frac{\pi v}{2} - |z|) \frac{\Gamma(1/2)}{\sqrt{2|z|}} [1 + O(\frac{1}{z})] = i\sqrt{\frac{2\pi}{|z|}} exp(-i\frac{\pi v}{2} - |z|)[1 + O(\frac{1}{z})].$$

En identifiant les termes dominants de la représentation asymptotique du première et du second membre de (3.50) on obtient $D_v = 0$, $C_v = -\pi$.
Ainsi donc,

$$H_v^{(1)}(z) = -\frac{1}{\pi} \int_{c_+} e^{izsin\varphi - iv\varphi} d\varphi. \tag{3.51}$$

Par un procédé analogue, on obtient pour le contour $C_-$

$$H_v^{(2)}(z) = \frac{1}{\pi} \int_{c_-} e^{izsin\varphi - iv\varphi} d\varphi, \tag{3.52}$$

D'où

$$J_v(z) = \frac{1}{2}[H_v^{(1)}(z) + H_v^{(2)}(z)] = \frac{1}{2\pi} \int_{c_1} e^{izsin\varphi - iv\varphi} d\varphi, \tag{3.53}$$

où le contour $C_1$ est tel qu'on le voit sur la figure
Pour $v = n$, en vertu de la périodicité de la fonction a intégrer, l'intégration suivant le contour $C_1$ se réduit a l'intégration sur l'intervalle $]-\alpha-\pi, -\alpha+\pi[$.
On sait que l'intégrale d'une fonction périodique puise suivant un segment de longueur égale a sa période est indépendante de la position du segment.
Pour cette raison

$$J_n(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{izsin\varphi - in\varphi} d\varphi, \tag{3.54}$$

i.e. la fonction $J_n(z)$ figure comme coefficient dans le développement de la fonction $e^{izsin\varphi}$ en série de fourier suivant les fonctions $e^{in\varphi}$.
Il vient donc

$$e^{izsin\varphi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z)e^{in\varphi}. \tag{3.55}$$

En vertu du principe du prolongement analytique, on montre que la relation (3.55) reste vraie pour toute valeur complexe de $\varphi$.
La représentation intégrale (3.54) peut etre simplifiée en utilisant la formule

$$e^{izsin\varphi - in\varphi} = cos(zsin\varphi - n\varphi) + isin(zsin\varphi - n\varphi)$$

et la parité des fonctions $cos(zsin\varphi - n\varphi)$, $sin(zsin\varphi - n\varphi)$ par rapport a la variable $\varphi$.
On obtient alors une représentation de la fonction $J_n(z)$ qui s'appelle représentation intégrale de sonine Bessel

$$J_n(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} cos(zsin\varphi - n\varphi)d\varphi.$$

# 3.10 Classes spéciales de fonctions de Bessel

## 3.10.1 Fonction de Bessel de deuxième espèce

On rencontre souvent dans la pratique des solutions de équation de Bessel qui correspondent à des valeurs réelles de $v$ et a des valeurs positives de $z$.
En pareils cas les fonctions de Hankel ne sont pas toujours faciles a manipules, car elles prennent des valeurs complexes, Dans le cas considéré on a $H_v^{(2)}(z) = H_v^{(\bar{1})}(z)$

$$J_v(z) = \frac{1}{2}[H_v^{(1)}(z) + H_v^{(2)}(z)] = ReH_v^{(1)}(z).$$

il est donc naturel d'adopter comme seconde solution réele linéairement indépendante de l'équation de Bessel la fonction $ImH_v^{(1)}(z)$,
i.e. la fonction

$$Y_v(z) = \frac{1}{2i}[H_v^{(1)}(z) + H_v^{(2)}(z)]. \tag{3.56}$$

La fonction $Y_v(z)$ est appelée fonction de Bessel de deuxième espèce.
La fonction $Y_v(z)$ définie par (3.56) a un sens pour toute valeur complexe de $v$ et de $z$.
Elle reste fonction analytique de v dans tout le plan complexe, $Y$ compris pour $v = n(n = 0, \pm 1, \pm 2, ...)$, et fonction analytique de $z$ pour $z \neq 0$, $|argz| < \pi$.

Citons quelques propriétés principales de la fonction $Y_v(z)$ qui résultent des propriétés correspondantes des fonctions de Hankel.
a) Expression de $Y_v(z)$ en fonction de $J_v(z)$ et de $Y_{-v}(z)$ :

$$Y_v(z) = \frac{cos\pi v J_v(z) - J_{-v}(z)}{sin\pi v}(v \neq n).$$

b) Développement en série de $Y_v(z)$ pour $v = n$ :

$$Y_n(z) = \frac{1}{\pi}\{2J_n(z)ln\frac{z}{2} - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n-k-1)!}{k!}(\frac{z}{2})^{2k-n} - \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(\frac{z}{2})^{n+2k}}{k!(n+k)!}[\psi(n+k+1)+\psi(k+1)]\}.$$

c) Comportement asymptotique de $Y_n(z)$ pour $z \to \infty$ :

$$Y_n(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}[sin(z - \frac{\pi v}{2} - \frac{\pi}{4}) + O(\frac{e^{|Imz|})}{z})].$$

d) Relations de récurrence et formules de dérivation :

$$Y_{v-1}(z) + Y_{v+1}(z) = \frac{2v}{z}Y_v(z),$$

$$Y_{v-1}(z) - Y_{v+1}(z) = 2Y_v'(z).$$

Les courbes représentatives des fonctions de Bessel $J_v(x)$ et $Y_v(x)$ pour certaines valeurs entières de $v$ et pour $x > 0$.

## 3.11 Application de la fonction de Bessel à la solution des problèmes de physique mathématique

**Propriété 3.11.1.**

Propagation de la chaleur dans un cylindre infini de rayon $R$. Il faut déterminer la température à l'intérieure du cylindre, si on a la distribution de la température au moment initial et sur la surface du cylindre. On prend que la température $U$ dépend de la distance $\rho$ . Soit la condition initiale :
On va considèrer que la température $U$ à la surface est nulle, d'où $U|_{\rho=R} = 0$ (Condition initiale). L'équation de conductibilité thermique est :

$$\frac{\partial U}{\partial t} = a^2\Delta U.$$

L'opérateur de Laplace $\Delta$ est plus simple à prendre en coordonnées cylindriques :

$$\Delta U = \frac{1}{\rho}[\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho\frac{\partial U}{\partial\rho}) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 U}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}]$$

Des conditions du problème, on a $U$ qui ne dépend pas de $\varphi$ et de $z$, d'où :

$$\frac{\partial^2 U}{\partial\varphi^2} = 0$$

et

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0$$

L'équation de conductibilité thermique prend la forme :

$$\frac{\partial U}{\partial t} = a^2 \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho}(\rho \frac{\partial U}{\partial \rho}) = a^2 \frac{1}{\rho}[\rho \frac{\partial^2 U}{\partial \rho^2} + \frac{\partial U}{\partial \rho}]$$

Ou

$$\frac{\partial U}{\partial t} = a^2 [\frac{\partial^2 U}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial U}{\partial \rho}] \tag{3.57}$$

Ainsi, il faut résoudre l'équation si $U|_{\rho=R} = 0$ et $U|_{t=0} = f(\rho)$ . On va utiliser alors la méthode de Fourier pour la résolution sous forme :

$$U(\rho, t) = \omega(\rho) T(t)$$

Donc

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \omega(\rho) T'(t),$$

$$\frac{\partial U}{\partial \rho} = \omega'(\rho) T(t),$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \rho^2} = \omega''(\rho) T(t).$$

L'équation (3.57) prend la forme :

$$T'(t)\omega(\rho) = a^2 T(t)[\omega''(\rho) + \frac{1}{\rho}\omega'(\rho)]$$

qu'on peut écrire sous forme :

$$\frac{T'(t)}{a^2 T(t)} = \frac{\omega''(\rho) + \frac{1}{\rho}\omega'(\rho)}{\omega(\rho)} = -\lambda^2$$

Pour que $U$ soit solution de (3.57), il faut :

$$T'(t) = -a^2 \lambda^2 T(t); \tag{3.58}$$

$$\omega''(\rho) + \frac{1}{\rho}\omega'(\rho) + \lambda^2 \omega(\rho) = 0. \tag{3.59}$$

L'équation (3.58) peut s'écrire sous forme :

$$\frac{dT}{T} = -a^2 \lambda^2 dt$$

En l'intégrant, on obtient :

$$\ln T = a^2 \lambda^2 t + \ln C$$

ou

$$\boldsymbol{T = e^{-a^2\lambda^2 t}C.}$$

L'équation (3.59) est l'équation de Bessel d'ordre $\boldsymbol{0}$ et d'argument $\boldsymbol{\lambda\rho}$. Sa solution sera la fonction :

$$\boldsymbol{\omega(\rho) = J_0(\lambda\rho)}$$

La fonction :

$$\boldsymbol{U(\rho, t) = Ce^{-a^2\lambda^2 t}J_0(\lambda\rho)}$$

sera la solution de l'équation différentielle (3.57) $\forall\boldsymbol{\lambda}$ Cependant la fonction $\boldsymbol{U(\rho, t)}$ doit satisfaire la condition aux limites. Par conséquent :

$$\boldsymbol{Ce^{-a^2\lambda^2 t}J_0(\lambda R) = 0,}$$

d'où :

$$\boldsymbol{J_0(\lambda R) = 0.}$$

Les valeurs $\boldsymbol{\lambda R}$ sont les racines de la fonction $\boldsymbol{J_0(x)}$.
Si les racines sont désignées par $\boldsymbol{\mu_1, \mu_2, ..., \mu_k, ...,}$ donc pour $\boldsymbol{\lambda}$ , on a :

$$\boldsymbol{\lambda_1 = \frac{\mu_1}{R}, \lambda_2 = \frac{\mu_2}{R}, ..., \lambda_k = \frac{\mu_k}{R}, ...}$$

Pour les $\boldsymbol{\lambda}$ données on a :

$$\boldsymbol{U_k(\rho, t) = C_k e^{-\lambda^2 k a^2 t}J_0(\lambda_k\rho), k = 1, 2, 3...}$$

qui est une solution de (3.57)
$\boldsymbol{\lambda_k}$ sont les nombres caractéristiques du problème.
$\boldsymbol{J_0(\lambda_k\rho)}$ sont les fonctions caractéristiques ou propres du problème. Aucune fonction $\boldsymbol{U_k = (p, t)}$ ne satisfait les conditions aux limites, étant donné que pour $\boldsymbol{t = 0}$ :
$\boldsymbol{U_k = C_k J_0(\lambda_k\rho)}$, et non $\boldsymbol{f(\rho)}$.
Afin de trouver la solution, prenons :

$$\boldsymbol{U(\rho, t) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k e^{-\lambda^2} K^{a^2 t} J(\lambda_k\rho)}$$

pour $\boldsymbol{t = 0}$, $\boldsymbol{U = f(\rho)}$ et par conséquent :

$$\boldsymbol{f(\rho) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k J_0(\mu_k \frac{\rho}{R})}$$

La dernière série est la décomposition de $\boldsymbol{f(\rho)}$ par la fonction de Bessel d'ordre $\boldsymbol{0}$ :

$$\boldsymbol{C_k = \frac{2}{[J_0'(\mu_k)]^2} \int_0^1 \frac{\rho}{R} f(\rho) J_0(\mu_k \frac{\rho}{R}) d(\frac{\rho}{R})}$$

donc :

$$\boldsymbol{C_k = \frac{2}{[J_0'(\mu_k)]^2} \frac{1}{R^2} \int_0^1 \rho f(\rho) J_0(\lambda_k\rho) d\rho}$$

La fonction :

$$U(\rho, t) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k e^{-\lambda_k^2 a^2 t} J_0(\lambda_k \rho)$$

est la solution du problème posé.

## Problème 2.

Problème de Dirichlet pour un cylindre Soit un cylindre $z = 0$,$z = H$ , $R = 1$. Trouver la fonction harmonique à l'intérieure du cylindre, si l'on connaît ses valeurs sur la surface. Il faut résoudre le problème $\Delta U = 0$, avec les conditions aux limites :

$$U|_{z=H} = 0,$$

$$U|_{\rho=1} = 0,$$

$$U|_{z=0} = f(\rho).$$

Puisque $U$ ne dépend pas de $\varphi$ , $\dfrac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} = 0$ et l'équation devient :

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial U}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0$$

Posons $U(\rho, z) = \omega(\rho)Z(z)$ . D'où :

$$\frac{\partial U}{\partial \rho} = \omega'(\rho)Z(z); \frac{\partial^2 U}{\partial \rho^2} = \omega''(\rho)Z(z); \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = \omega(\rho)Z''(z).$$

En les remplaçant dans l'équation, on obtient :

$$[\omega''(\rho) + \frac{1}{\rho}\omega'(\rho)]Z(z) + \omega(\rho)Z''(z) = 0.$$

Décomposons les variables :

$$\frac{\omega''(\rho) + \frac{1}{\rho}\omega'(\rho)}{\omega(\rho)} = -\frac{Z''(z)}{Z(z)} = -\lambda^2$$

Pour trouver $\omega(\rho)$ et $Z(z)$, obtenons les équations :

$$Z''(z) - \lambda^2 Z(z) = 0 \tag{3.60}$$

$$\omega''(\rho) + \frac{1}{\rho}\omega'(\rho) + \lambda^2\omega(\rho) = 0 \tag{3.61}$$

L'équation (3.60) est une équation linéaire et homogéne du deuxième ordre. Pour sa résolution, établissons l'équation caractéristique :

$$K^2 - \lambda^2 = 0, K = \pm\lambda.$$

Sa solution générale sera :

$$Z(z) = C_1 e^{\lambda z} + C_2 e^{-\lambda z}$$

L'équation (3.61) est une équation de Bessel dont la solution est $DJ_0(\lambda\rho)$. La fonction :

$$U(z,\rho) = D(C_1 e^{\lambda z} + C_2 e^{-\lambda z}) J_0(\lambda\rho)$$

sera la solution de l'équation de Laplace.
Afin que pour $z = H$, on a $U = 0$, il faut que :

$$C_1 e^{\lambda H} + C_2 e^{-\lambda H} = 0$$

L'égalité sera satisfaite si :

$$C_1 = -\frac{e^{-\lambda H}}{2}, C_2 = \frac{e^{\lambda H}}{2}$$

D'où :

$$C_1 e^{\lambda z} + C_2 e^{-\lambda z} = \frac{-e^{-\lambda(H-z)} + e^{\lambda(H-z)}}{2} = sh\lambda(H-z),$$

et la fonction $U(z,\rho) = Dsh\lambda(H-z)J_0(\lambda\rho)$ satisfera la première condition aux limites.
Afin de satisfaire la deuxième condition aux limites, il faut que :

$$\rho = 1, J_0(\lambda\rho) = 0,$$

C'est-à-dire : $J_0(\lambda) = 0$ Si $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k, ...$ sont les racines de $J_0(\lambda)$, donc $\forall k = 1, 2, ...,$ on a :

$$U_k = D_k sh\lambda_k(H-z)J_0(\lambda_k\rho)$$

qui satisfera les deux premières conditions aux limites. En qualité d'une nouvelle solution, prenons la fonction :

$$U(\rho, z) = \sum_{k=1}^{\infty} D_k sh\lambda_k(H-z)J_0(\lambda\rho).$$

Choisissons les coefficients de façon que pour $z = 0$, on a :

$$f(\rho) = \sum_{k=1}^{\infty} D_k sh(\lambda_k H)J_0(\lambda_k\rho)$$

Les conditions de la série sont déterminées par la formule (3.7). Par conséquent :

$$D_k sh(\lambda_k H) = \frac{2}{[J_0(\lambda_k)]^2} \int_0^1 \rho f(\rho) J_0(\lambda_k\rho) d\rho.$$

La fonction :

$$\sum_{k=1}^{\infty} D_k sh\lambda_k(H-z)J_0(\lambda\rho).$$

sera la solution du problème posé.

## Problème 3.

Considérons le problème de Dirichlet avec les conditions suivantes :

$$U(\rho, z)|_{z=0} = 0,$$
$$U(\rho, z)|_{z=H} = 0,$$
$$U(\rho, z)|_{\rho=1} = f(z).$$

Posons :

$$U(\rho, z) = \omega(\rho)Z(z),$$

On trouve :

$$\frac{\omega''(\rho) + \frac{1}{\rho}\omega'(\rho)}{\omega(\rho)} = \frac{Z''(z)}{Z'(z)}$$

ou encore :

$$\omega''(\rho) + \frac{1}{\rho}\omega'(\rho) - \lambda^2\omega(\rho) = 0$$

et

$$Z''(z) + \lambda^2 Z(z) = 0$$

La première équation est une équation différentielle pour la fonction de Bessel du troisième espèce d'ordre $0$ et d'argument $\lambda\rho$ . Sa solution sera la fonction :

$$\omega(\rho) = I_0(\lambda\rho).$$

La deuxième équation est linéaire à coefficients constants. Les racines de l'équation caractéristique $K^2 + \lambda^2 = 0$ sont $\pm\lambda.$ La solution générale de cette équation sera :

$$C\cos\lambda z + D\sin\lambda z.$$

La fonction :

$$U(\rho, z) = (C\cos\lambda z + D\sin\lambda z)I_0(\lambda\rho)$$

sera la solution de l'équation de Laplace.
Pour que $z = 0$, $\Longrightarrow$ on $U = 0$, il faut que :

$$C\cos 0 + D\sin 0 = 0$$

chose possible que pour $C = 0$. Pour que pour $z = H$, on a $U = 0$, il faut que $D\sin\lambda H = 0$ , chose possible que pour :

$$\lambda H = \pi K,$$

Par conséquent $\lambda_k = \dfrac{\pi K}{H}, ok = 1, 2, 3, ...$ La fonction :

$$U_k(\rho, z) = D_k I_0(\frac{\pi k}{H}\rho)\sin\frac{\pi K z}{H}$$

Satisfait les deux conditions aux limites. Afin de trouver la fonction $f(z)$ satisfaisant la troisième condition aux limites, prenons :

$$\sum_{k=1}^{\infty} D_k I_0(\frac{\pi k}{H}\rho)\sin\frac{\pi K}{H\rho}z$$

et considérons que :

$$\sum_{k=1}^{\infty} D_k I_0(\frac{\pi k}{H})\sin\frac{\pi K z}{H} = f(z).$$

Cette série est la série de Fourier pour la fonction $f(z)$ . Par les formules de Fourier, on trouve :

$$D_k I_0(\frac{\pi k}{H}) = \frac{2}{\pi}\int_0^H f(z)\sin\frac{\pi K z}{H}dz$$

La fonction :

$$U(\rho, z) = \sum D_k I_0(\frac{\pi K}{H}\rho)\sin\frac{\pi K z}{H}$$

sera la solution du problème posé. $\lambda_k = \dfrac{\pi K}{H}$ sont les valeurs propres et $\sin\dfrac{\pi K z}{H}$ sont les fonctions propres.

# Bibliographie

1- Smirnov V. Cours de mathématiques supérieures, T2. Mir, Moscou, 1970.
2- Coulomb J., Jobert G. Traité de géophysique interne. Masson et scie, Paris 1975.
3- A.,OUVAROV V.Eléments de théorie des fonctions spéciales. M.,((Mir)) , 1976.
4- Murray Y., Spiegel R. Analyse de Fourier et application aux problèmes de valeurs aux limites. Série Schaum, Ediscience, 1980.