REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE & POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR & DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Université Ibn Khaldoun- Tiaret
FACULTÉ DES MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUE
DÉPARTEMENT DES MATHEMATIQUES

MEMOIRE DE MASTER

Présentée par **:**

BEKKAI Abdelwahid
SALMI Abdelhafid
BOUMEDINE Mohammed Amine

Spécialité : *Mathématiques*

Option : *Analyse fonctionnelle et application*

Intitulé

Equations différentielles hybrides d'orde fractionnaire

Soutenue le : 22/06/ 2022

Devant le jury composé de :

Président : Mr. ZIEN Mohamed	*MCA. Univ. Ibn Khaldoun Tiaret*
Examinateurs : Mr. ZENTAR Walid	*MAA. Univ. Ibn Khaldoun Tiaret*
Encadreur : Mr. BEN HABI Mohamed	*MAA. Univ. Ibn Khaldoun Tiaret*

2021-2022

Table des matières

RESUME

Dans cet travail, nous avons donné des définitions à la fois des solutions fortes et douces aux problèmes de valeurs limites hybrides fractionnaires dans deux types en utilisant la dérivée fractionnaire d'ordre de Caputo et Riemann-Liouville d'ordre $0 < \alpha < 1$. puis nous avons discuté de l'existence d'au moins une solution douce pour chaque type. Nous avons donné des exemples prouvant l'importance de prendre en compte les conditions initiales.

Phrases et mots clés équations différentielles fractionnaires, existence de solutions, point fixe, algèbre de Banach .

ABSTRACT

In this work, we have given definitions of both strong and soft solutions to fractional hybrid limit value problems in two types using the fractional derivative of order of Caputo and Riemann-Liouville of order $0 < \alpha < 1$. . We have given examples proving the importance of taking into account the initial conditions.

Key words and phrases : fractional differential equations, existence of solutions, fixed point,Banach algebra.

Remerciement

C'est avec un grand plaisir que nous rèservons cette page en signe de gratitude et de profonde reconnaissance à tous ceux qui nouls ont aidès de près ou de loin pour ca rèalisation de ce modeste travail.
Aux membres de notre jury, nous adresson nos vifs remerciments à notre encadreur Mr **ZENTAR WALID**, qui par ses conseils, ses recommandations, sa patience nous a permis de rèaliser ce mèmoire avec un très grand plaisir. Nos remerciements les plus chaleureux vont à Mr **ZIEN MOHAMED**.
Pour nous avoir honorè de prèsider le jury de notre mémoire.
Nous ègalment remercions beaucoup Mr **BEN HABI MOHAMED**, professeur au l'Universitè Ibn Khaldoune de Tiaret, pour l'honneur qu'il nous a fait en acceptant d'examiner ce mémoire.
A tous les enseignants qui ont participès à notre formation tout au long de notre cycle uniersitaire. Enfin, nous ne voulons pas oublier tous les professeurs que nous avons rencontrès tout au long de ces annèes de licence et tous ceux qui ont contribuè de près ou de loin à la rèalisation de ce travail, merci. Tout d'abord, je remercie Dieu le Tout Puissant de m'avoir donnée la patience, la volonté et l'énergie pour réaliser ce travail.

DEDICACE

Je dèdie ce travail :
A ma chère maman , source de vie , d'amour et d'affection.
A mon cher frère , sourse de joie et de bonheeur.
A l'ame de mon cher père.
A l'ame de mon cher oncle.
A toute ma famille , source d'espoir et motivation.
A tous mes amis.
A vous chers lecteurs.
Je vous dèdie ce travail avec tous mes vœux de bonheur , de santè et de rèussite.

BEKKAI Abdelwahid

DEDICACE

Je dèdie ce travail :
A ma chère maman , source de vie , d'amour et d'affection.
A mon cher frère , sourse de joie et de bonheeur.
A l'ame de mon cher père.
A l'ame de mon cher oncle.
A toute ma famille , source d'espoir et motivation.
A tous mes amis.
A vous chers lecteurs.
Je vous dèdie ce travail avec tous mes vœux de bonheur , de santè et de rèussite.

BOUMEDINE Mohammed Amine

DEDICACE

Je dèdie ce travail :
A ma chère maman , source de vie , d'amour et d'affection.
A mon cher frère , sourse de joie et de bonheeur.
A l'ame de mon cher père.
A l'ame de mon cher oncle.
A toute ma famille , source d'espoir et motivation.
A tous mes amis.
A vous chers lecteurs.
Je vous dèdie ce travail avec tous mes vœux de bonheur , de santè et de rèussite.

SALMI Abdelhafid

Introduction

L'objectif de ce travail est double : D'une part, une découverte puis une familiarisation avec la méthode de l'argument du point fixe dans l'étude de l'existence de solutions et de solutions extrémales de certaines équation hybrides fractionnaires.

D'autre part, une acquisition de connaissance autour des problèmes considérés concernant le type d'équations, les espaces sur les quels elles sont définies, la transformation du problème en un problème de point fixe, et enfin le type d'hypothèses imposées.

Ce travail est subdivisé en trois chapitres. Dans le premier chapitre nous rappelons quelques définitions et résulats d'analyse fonctionnelles que nous utilisons tout au long de ce mémoire. Nous rappelons aussi les théorèmes fondamentaux de point fixe intervenant dans les preuves des résultats d'existence de solutions.

Nous consacrons le deuxième et le troisième chapitres à la présentation de résultat d'existence de solutions pour les équations différentielle hybride fractionnaire du premier type et de deuxième type :

$$\begin{cases} {}^{c}D^{\alpha}\left[\dfrac{x(t)}{f(t,x(t))}\right] = g(t,x(t)) \quad p.p \;\; t\in J=[0,T] \\ x(0) = x_0\in\mathbb{R} \end{cases} \tag{1}$$

où $f\in C(J\times\mathbb{R},\mathbb{R}^*)$, $g\in C(J\times\mathbb{R},\mathbb{R})$ et T sont des constantes réelles.

$$\begin{cases} D^{\alpha}\left(\dfrac{x(t)}{f(t,x(t))}\right) = g(t,x(t)) \quad \text{p.p. } t\in J=[0,T] \\ a\dfrac{x(0)}{f(0,x(0))} + b\dfrac{x(T)}{f(T,x(T))} = c \end{cases} \tag{2}$$

où $f\in C(J\times\mathbb{R},\mathbb{R}^*)$, $g\in C(J\times\mathbb{R},\mathbb{R})$ et a,b,c sont des constantes réelles avec $a+b\neq 0$.

$$\begin{cases} {}^{RL}D^{\alpha}\left[\dfrac{x(t)}{f(t,x(t))}\right] = g(t,x(t)) \quad p.p \;\; t\in J=[0,T] \\ x(0) = 0\in\mathbb{R} \end{cases} \tag{3}$$

où $f\in C(J\times\mathbb{R},\mathbb{R}^*)$ et $g\in\mathscr{C}(J\times\mathbb{R},\mathbb{R})$,

$$\begin{cases} {}^{RL}D^{\alpha}_{0^+}\left[\dfrac{x(t)}{f(t,x(t))}\right] + g(t,x(t)) = 0 \quad p.p \;\; t\in J=[0,1] \\ x(0)=x(1) = 0 \end{cases} \tag{4}$$

où $f \in C(J \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^*)$, $g \in \mathscr{C}(J \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$, $1 < a \leqslant 2$ est un nombre réel et ${}^{RL}D^{\alpha}$ est la dérivée fractionnaire standard de Riemann-Liouville.

$$\begin{cases} {}^{RL}D^{\alpha}\left[x(t) - f(t, x(t))\right] &= g(t, x(t)) \qquad p.p \;\; t \in J = [t_0, t_0 + a] \\ x(t_0) &= x_0 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

sous certaines conditions (Lipscitz, Carathéodory,...) sur les fonctions f, g. Nous étudions aussi l'existence de solutions extrémales pour ces équations.

CHAPITRE 1 Préliminaires

On introduit dans ce chapitre les éléments de bases théoriques sur les opérateurs d'ordre fractionnaire nécessaires pour le développement des chapitres qui vont suivre.

1.1 Sur les espaces

Définition 1.1 (Espace de Banach)

On appelle espace de Banach tout espace vectoriel normé complet sur le corps $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$.

Exemple 1.1.1

Soient $J = [a,b]$ un intervalle fini et E un espace de Banach menu de la norme $\|\cdot\|$.

- *$C(J,E)$ l'espace de Banach des fonctions continues définies de $[a,b]$ dans E, muni de la norme*
$$\|y\|_c = \sup\{\|y(t)\|/t \in [a,b]\}.$$
- *$L^1(J,E)$ l'espace de Banach des fonctions $y: J \to E$ qui sont Bochner intégrables, muni de la norme*
$$\|y\|_{L^1} = \int_a^b \|y(t)\| dt.$$
- *$L^\infty(J,E)$ est l'espace de Banach des fonctions mésurables $y: J \to E$ qui sont bornées, muni de la norme :*
$$\|y\|_{L^\infty} = \inf\{c > 0, \|y(t)\| \le c \text{ p.p } t \in J\}.$$
- *$AC(J,E)$ L'espace des fonctions absolument continues*

Définition 1.2 (*Algèbre*)

Une algèbre A sur $\mathbb{R}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ muni d'une multiplication
$$u: A \times A \longrightarrow A$$
qui est :

1. *associative.*
2. *distributive par rapport à l'addition.*
3. *$\mathbb{R}$-bilinéaire.*

Définition 1.3 (*Algèbre de Banach*)

On dit que A est une algèbre de Banach si A est à la fois un espace de Banach et *une algèbre dont les lois sont compatibles avec la norme, et si en plus,*

$$\|ab\| \leq \|a\|\|b\| \quad \forall a, b \in A$$

Définition 1.4

Soit S un sous-ensemble d'un espace vectoriel X. On dit que S est convexe si :

$$xt + (1-t)y \in S \quad \forall x, y \in S, \ \forall t \in [0,1].$$

Exemple 1.1.2

1. *Tout sous espace vectoriel d'un espace vectoriel est convexe.*
2. *Toute boule (ouverte ou fermée) d'un espace vectoriel normé est une partie convexe.*

Théorème 1.1 (*l'inégalité de Young pour la convolution*)

Soient f dans l'espace L^p de Lebesgue et g dans L^q et

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r} \quad \textit{avec} \quad 1 \leq p, q, r \leq \infty.$$

Alors le produit de convolution $f * g$ appartient à L^r et

$$\|f * g\|_{L^r} \leq \|f\|_{L^p}\|g\|_{L^q}.$$

1.2 Sur les opérateurs

Définition 1.5

Soit A un opérateur linéaire défini d'un espace de Banach X dans lui même. A est dit borné s'il existe une constante $c > 0$ telle que

$$\|Ax\| \leq c\|x\| \quad \forall x \in X.$$

Définition 1.6 (*Opérateur continu*)

Un opérateur A défini d'un espace de Banach X dans lui même est dit continu si pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans X qui converge vers $x \in X$, la suite $(Ax_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers Ax.

Maintenant, soit $C(J, X)$ l'espace des fonctions continues d'un intervalle compact J de $\mathbb{R}$ dans l'espace de Banach X.

Définition 1.7 (*Ensemble équicontinu*)

Soit M un sous ensemble de $C(J, X)$. M est dit équicontinu si :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \forall t_1, t_2 \in J : \|t_1 - t_2\| \leq \delta \Rightarrow \left\| f(t_1) - f(t_2) \right\| \leq \varepsilon \quad \forall f \in M.$$

Définition 1.8 (*Ensemble uniformément borné*)

Soit M un sous ensemble de $C(J,X)$. M est dit uniformément borné si :

$$\exists\ c>0 : \left\| f(t) \right\| \leq c \quad \forall t \in J,\ et\, \forall f \in M.$$

Définition 1.9 (*Ensemble relativement compact*)

Soit M un sous ensemble de $C(J,X)$. M est dit relativement compact si $\overline{M}$ (adhérence de M) est compact.

Nous citons ci-après le théorème d'*Ascoli -Arzela* et le théorème de la convergence dominé de *Lebesgue* que nous utiliserons par la suite pour montrer qu'un opérateur est complètement continu.

Théorème 1.2 (*Ascoli Arzela*)

Soit M un sous ensemble de $C(J,X)$. M est relativement compact si et seulement si :

1. *M est uniformément borné.*
2. *M est équicontinu.*

Théorème 1.3 (*Convergence dominé de Lebesgue*)

Soit X un espace de Banach. Soit $\left(f_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de X dans X dont l'intégrale de la norme est fini (i.e. $f_n \in L^1(X,X)$) et soit $f : X \longrightarrow X$. On suppose que :

1. *La suite $(f_n(x))_n$ converge vers $f(x)$ pour presque tout $x \in X$.*
2. *Il existe une fonction $g \in L^1(X,\mathbb{R})$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\left\| f_n(x) \right\| \leq g(x)$ pour presque tout $x \in X$.*

Alors

$$f \in L^1(X,X), \quad et \quad \lim_{n\to\infty} \left\| f_n - f \right\|_{L^1} = 0.$$

Maintenant, soit A un opérateur défini d'un espace de Banach X dans lui- même.

Définition 1.10 (*Opérateur compact*)

L'opérateur A est dit compact si l'ensemble $A(X)$ est relativement compact.

Définition 1.11 (*Opérateur totalement borné*)

L'opérateur A est dit totalement borné si pour tout ensemble borné B de l'espace X, l'ensemble $A(B)$ est relativement compact.

Définition 1.12 (*Opérateur complètement continu*)

L'opérateur A est dit complètement continu s'il est continu et totalement borné.

Définition 1.13 (*Opérateur convexe*)

L'opérateur A est dit convexe si :

$$\forall t \in [0,1]\ \ et\, \forall x, y \in A : \quad A(tx+(1-t)y) \leq tA(x)+(1-t)A(y).$$

Définition 1.14 (*Contraction non linéaire*)

L'opérateur A est dit ψ-lipschitzien s'il existe une fonction $\psi : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ continue et croissante vérifiant

$$\forall x, y \in X : \left\| Ax - Ay \right\| \leq \psi\left(\left\| x - y \right\|\right).$$

avec $\psi(0) = 0$.

- *Si $\psi(r) = \alpha.r$, (où $\alpha > 0$), A est dit lipschitzien avec constante de Lipschitz α.*
- *En particulier, si $\alpha < 1$, A est dit contraction et si $\psi(r) < r$ (pour $r > 0$). A est dit contraction non linéaire.*
  Si $\psi(r) = r$, A est dit opérateur non expansif.

1.3 Sur les fonctions

L'une des fonctions de base du calcul fractionnaire est la fonction Gamma, qui permet de prolonger la factorielle aux valeurs non entières et la fonction Bêta d'Euler.

Définition 1.15 (*Fonction Gamma*)

Pour tout nombre réel $\alpha > 0$, on définit la fonction Gamma d'Euler Γ par l'intégrale suivante :

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-u} u^{\alpha-1} du, \quad \alpha > 0.$$

Proposition 1.1

Pour tout $\alpha > 0$, la fonction Gamma satisfait les propriétés suivantes :

1. $\Gamma(\alpha + 1) = \alpha\Gamma(\alpha)$.
2. $\Gamma(\alpha + n) = \alpha(\alpha + 1)(\alpha + 2)\ldots(\alpha + n - 1)\Gamma(\alpha)$.
3. $\Gamma(n) = (n - 1)!, \quad n \geq 1$.

Définition 1.16 (*Fonction Bêta*)

La fonction Bêta est un type d'intégrale d'Euler définie pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$ par :

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 (1 - u)^{\alpha-1} u^{\beta-1} du.$$

Remarque 1.1

La relation entre les fonctions Gamma et Bêta est donnée par l'expression :

$$B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)} = B(\beta, \alpha); \quad \textit{pour tout} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*.$$

Définition 1.17 (*Fonction de Carathéodory*)

Une fonction $f : J \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite Carathéodory si :

1. *la fonction $t \longmapsto f(t,x)$ est mesurable sur J, $\forall x \in \mathbb{R}$.*
2. *la fonction $x \longmapsto f(t,x)$ est continue pour presque tout $t \in J$.*
3. *Si de plus la fonction f vérifie la condition suivante :*

   $\forall r > 0\ \exists h \in L^1(J,\mathbb{R})$ *tel que* $\|f(t,x)\| \leq h(t) \quad \forall t \in J$ *et* $\forall x : \|x\| \leq r$,

   f est dite L^1-Carathéodory.

Définition 1.18 (*Fonction absolument continue*)

Une fonction $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite absolument continue sur $[a,b]$, si pour tout $\epsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que pour toute famille finie d'intervalles deux à deux disjoints, $]a_k, b_k[$, $k = 1,2,...,n$, dans la somme des longueurs est inférieure à δ i.e.

$$\sum_{k=1}^{n} |b_k - a_k| < \delta$$

on a l'inégalité

$$\sum_{k=1}^{n} |f(b_k) - f(a_k)| < \epsilon$$

.

1.4 Sur l'intégrale, Dérivée fractionnaire

Dans cette Section, nous donnons quelques définitions et résultats concernant le calcul Intégrale et Dérivées fractionnaire des types Caputo et Riemann-Liouville.

Définition 1.19 (*L'intégrale de Riemann-Liouville*)

L'intégrale d'ordre fractionnaire à droite (de Riemann-Liouville) de la fonction $f \in L^1([a,b])$ d'ordre $\alpha > 0$, est Défini par

$$I_{a^+}^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds.$$

où Γ est la fonction Gamma.

Remarque 1.2

Lorsque $a = 0$ nous écrivons $I^{\alpha} f(t) = f(t) * \varphi_{\alpha}(t)$, où

$$\varphi_{\alpha}(t) = \begin{cases} \dfrac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} & si\ t > 0 \\ 0 & si\ t \leqslant 0 \end{cases} \quad et \quad \varphi_{\alpha} \to \delta \quad quand \quad \alpha \to 0.$$

Définition 1.20 (*La dérivée de Riemann-Liouville*)

Soit une fonction $f \in L^1([a,b])$, la dérivée fractionnaire d'ordre $\alpha > 0$ au sens de

Riemann-Liouville de f est

$$
\begin{aligned}
{}^{RL}D^{\alpha}_{a^+} f(t) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} f(s)ds \\
&= D^n_{a^+} I^{n-\alpha}_{a^+} f(t)
\end{aligned}
$$

où $n \in \mathbb{N}^*$ telle que $n-1 < \alpha < n$ et $D = d/dt$,

Proposition 1.2

Soit $\alpha > \beta > 0$, si $f \in C([a,b])$, alors

$$
{}^{RL}D^{\beta}_{a^+} \left(I^{\alpha}_a f\right)(t) = I^{\alpha-\beta}_a f(t)
$$

En particulier, si $\alpha = \beta$, alors

$$
{}^{RL}D^{\alpha}_{a^+} \left(I^{\alpha}_a f\right)(t) = f(t).
$$

Proposition 1.3

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $n-1 \leq \alpha < n$, $f \in C([a,b])$. Alors

1. *${}^{RL}D^{\alpha}_{a^+}$ est un opérateur linéaire.*
2. *Si ${}^{RL}D^{\alpha}_{a^+} f(t) = 0$, alors $f(t) = \sum_{j=0}^{n-1} c_j (t-a)^{\alpha+j-n}$.*

Lemme 1.1

Soit $0 < \alpha < 1$ et $u \in L^1(0,T)$.

(H_1) *L'égalité ${}^{RL}D^{\alpha} I^{\alpha} u(x) = u(x)$ est vérifiée.*

(H_2) *L'égalité*

$$
I^{\alpha}\, {}^{RL}D^{\alpha} u(x) = u(x) - \frac{I^{1-\alpha} u(0)}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1}
$$

est vérifiée presque partout sur $J = [0,T]$.

Définition 1.21 (*La dérivée de Caputo*)

Soit $f \in AC^n([a,b])$. La dérivée fractionnaire d'ordre $\alpha \geq 0$ au sens de Caputo de la fonction f est définie comme suit :

$$
\begin{aligned}
{}^{C}D^{\alpha}_{a^+} f(t) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(s)ds \\
&= I^{n-\alpha}_a D^n_{a^+} f(t).
\end{aligned}
$$

où $n \in \mathbb{N}^*$ telle que $n-1 < \alpha < n$ et $D = d/ds$

Par exemple, pour $0 < \alpha < 1$ et $h : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction absolument continue, alors la dérivée d'ordre fractionnaire α de la fonction h existe.

Proposition 1.4

Soit $\alpha > \beta > 0$. Si $f \in C([a,b))$, alors

$$^{C}D_a^{\beta} I_a^{\alpha} f(t) = I_a^{\alpha-\beta} f(t).$$

En particulier, si $\alpha = \beta$, alors

$$^{C}D_a^{\alpha} I_a^{\alpha} f(t) = f(t).$$

1.5 Sur l'argument du point fixe

Les théorèmes de point fixe permettent d'assurer l'existence de solutions d'un problème donné en le transformant en un problème du point fixe, et en fournissant des conditions suffisantes pour lesquelles, une application donnée admet des points fixes.

Théorème 1.4 (*Dhage[3]*)

Soit X un espace de Banach et soit $T : X \longrightarrow X$ un opérateur complètement continu. Alors :

- *(i) Soit l'equation $Tx = x$ admet une solution.*
- *(ii) Soit l'ensemble $\xi = \{u \in X / \exists \lambda \in]0,1[: \lambda T u = u\}$ est non borné.*

Théorème 1.5 (*Dhage[4]*)

Soit X un espace de Banach et soit $T : X \longrightarrow X$ une contraction non linéaire. Alors T admet un point fixe unique.

Théorème 1.6 (*Dhage[5]*)

Soit $\overline{\mathbf{B}}(0,r)$ la boule fermée centrée en 0 et de rayon r, dans l'algèbre de Banach X. Soit $A, B : \overline{\mathbf{B}(0,r)} \longrightarrow X$ deux opérateurs tels que :

- *A est lipschitzien avec comme constante de Lipschitz α.*
- *B est complètement continu .*
- *$\alpha M < 1$ avec $M = \|B(\overline{\mathbf{B}}(0,r))\| = \sup\{\|Bx\| : x \in \overline{\mathbf{B}}(0,r)\}$.*

Alors :

1. *Soit l'équation $AxBx = x$ admet une solution dans $\overline{B}(0,r)$.*
2. *Soit $\exists x \in X$ et $\exists \lambda \in]0,1[$ tels que : $\|x\| = r$ et $\lambda AxBx = x$*

Théorème 1.7 (*[16]*)

Soit S un sous-ensemble non vide, fermé, convexe et borné de l'algèbre de Banach X, et soit $A : X \to X$ et $B : X \to X$ deux opérateurs tels que

1. *A est D-lipschitzien avec comme D-fonction la fonction ψ.*
2. *B est complètement continu.*

3. $x = AxBy \Rightarrow x \in S$ *pour tout* $y \in S$
4. $\exists r > 0$ *tel que :* $M\psi(r) < r$ *où* $M = \|B(X)\| = \sup\{\|Bx\|, x \in S\}$.

Alors : l'équation $AxBx = x$ *admet une solution dans* S.

Théorème 1.8 (*[16]*)

Soit S *un sous-ensemble fermé convexe et borné de l'espace de Banach* X *et soit* $A : X \to X$ *et* $B : S \to X$ *deux opérateurs tels que*

1. *A est une contraction non linéaire,*
2. *B est (complètement continu),*
3. *Pour tout* $Ax + By \in S$ *pour toute* $x \in S$.

Alors l'équation d'opérateur $Ax + Bx = x$ *admet une solution dans* S.

CHAPITRE 2 Sur des équations différentielles hybride impliquant la dérivée de Caputo

Dans ce chapitre nous présentons l'étude de l'existence de solutions pour un certain type d'équations différentielles fonctionnelles.

2.1 Un premier type de problème

Soit $J=[0,T]$. L'espace $X=C(J,\mathbb{R})$ est une algèbre de Banach des fonctions continues à valeurs définies sur l'intervalle J muni de la supremum, $\|x\|=\sup_{s\in J}|x(s)|$, et de multiplication définie par $(xy)(s)=x(s)y(s)$, pour $s\in J$.

Considérons maintenant l'équation différentielle hybride fractionnaire du premier type sous la forme

$$\begin{cases} {}^cD^\alpha\left[\dfrac{x(t)}{f(t,x(t))}\right] = g(t,x(t)) \quad p.p \ t\in J=[0,T] \\ x(0) = x_0\in\mathbb{R} \end{cases} \tag{2.1}$$

où $f\in C(J\times\mathbb{R},\mathbb{R}^*)$ et $g\in\mathscr{C}(J\times\mathbb{R},\mathbb{R})$,

Nous avons le lemme suivant.

Lemme 2.1

Toute fonction satisfait l'équation différentielle hybride sous la forme

$$\begin{cases} {}^cD^\alpha\left[\dfrac{x(t)}{f(t,x(t))}\right] = h(t) \quad p.p \ t\in J=[0,T] \\ x(0) = x_0\in\mathbb{R} \end{cases} \tag{2.2}$$

avec $h\in L^1\left(J,\mathbb{R}^+\right)$, satisfera également à l'équation intégrale

$$x(t)=f(t,x(t))\left(\frac{x_0}{f(0,x_0)}+\int_0^t\frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}h(s)ds\right),\quad t\in J. \tag{2.3}$$

De plus si la fonction $x\mapsto x/f(0,x)$ est injective, et $I^\alpha h(t)$ est une fonction absolument continue, alors la réciproque est vraie.

Démonstration : Supposons que $x(t)$ satisfasse 2.2. Alors, $x(t)/f(t,x(t))$ est absolument continu, que nous obtenons que $D^{\alpha}(x(t)/f(t,x(t)))$ existe et est Lebesgue intégrable sur J.
En appliquant l'intégration fractionnaire I^{α} aux deux côtés de 2.2, nous obtenons 2.3.

$$x(t) = f(t,x(t))\left(\frac{x_0}{f(0,x_0)} + \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} h(s)ds\right), \quad t \in J.$$

Inversement, supposons que $x(t)$ satisfait (2.3) avec $I^{\alpha}h(t)$ est absolument continu nous obtenons que

$$(x(t)/f(t,x(t))) = \left(x_0/f(0,x_0)\right) + \int_0^t \left((t-s)^{\alpha-1}/\Gamma(\alpha)\right) h(s)ds$$

est absolument continu.
Puis en différenciant les deux côtés et en opérant ensuite par l'intégration fractionnaire $I^{1-\alpha}$ on obtient

$$D^{\alpha}\left[\frac{x(t)}{f(t,x(t))}\right] = h(t),$$

et pour la condition initiale substituer par $t=0$ dans (2.3) on obtient

$$\frac{x(0)}{f(0,x(0))} = \frac{x_0}{f(0,x_0)},$$

et puisque $x \mapsto (x/f(0,x))$ est injective alors $x(0) = x_0$. ■

Définition 2.1

La fonction $x \in AC(J,\mathbb{R})$, est appelée solution forte de (2.1) si

(a) la fonction $t \mapsto (x/f(t,x))$ est absolument continue pour chaque $x \in \mathbb{R}$

(b) x satisfait l'équation (2.1).

2.1.1 Existence de solutions

L'objectif est de présenter le résultat, et sa preuve, sur l'existence d'une solution de (2.1) dans l'algèbre de Banach $X = C(J,\mathbb{R})$.

Théorème 2.1

Supposons que :

(H_1) *Il existe une constante $\gamma > 0$ telle que*

$$|f(t,x) - f(t,y)| \leq \gamma\,|x-y| \quad \textit{pour tout } t \in J \textit{ et } x,y \in \mathbb{R}.$$

(H_2) *Il existe une fonction $h \in L^1(J,\mathbb{R})$ telle que $|g(t,x)| \leq h(t)$ p.p. $t \in J$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.*

(H_3) $\left(\left|\frac{x_0}{f(0,x_0)}\right| + \frac{T^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\|h\|_{L^1}\right)\gamma < 1.$

(H_4) *Il existe $r > 0$ tel que*

$$r > \frac{F_0\left(\left|x_0/f(0,x_0)\right| + (T^{\alpha}/\Gamma(\alpha+1))\,\|h\|_{L^1}\right)}{1-\gamma\left(\left|x_0/f(0,x_0)\right| + (T^{\alpha}/\Gamma(\alpha+1))\,\|h\|_{L^1}\right)}$$

où $F_0 = \sup_{t\in J} |f(t,0)|$.

Alors (2.1) admet au moins une solution sur J.

Démonstration : :

Soit $\mathscr{B}_r(0)$ une boule ouverte centrée à l'origine et de rayon $r > 0$ dans l'algèbre de Banach $X = C(J,\mathbb{R})$.

D'après le lemme (2.1), on a l'équation (2.1) est équivalente à l'équation fonctionnelle intégrale suivante,

$$\begin{cases} x(t) = f(t,x(t))\left(\dfrac{x_0}{f(0,x_0)} + \displaystyle\int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} g(s,x(s))ds\right), & t \in J. \\ x(0) = x_0 \end{cases} \tag{2.4}$$

Nous prouvons l'existence d'une solution du problème (2.1) en discutant la solution de l'équation intégrale (2.4) qui est équivalente à l'équation de l'opérateur

$$Ax(t)Bx(t) = x(t), \quad t \in J,$$

où $A, B : \overline{\mathscr{B}_r(0)} \to X = C(J,\mathbb{R})$ sont définis par

$$Ax(t) = f(t,x(t)),$$

$$Bx(t) = \frac{x_0}{f(0,x_0)} + \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} g(s,x(s))ds.$$

On doit montrer que les opérateurs A et B vérifient les hypothèses du théorème 1.6. Nous divisons notre preuve en plusieurs étapes.

Étape 1 : Montrons que A est lipschitzien :

On a d'après l'hypothèse (H_1), pour tous $t \in J$

$$\begin{aligned} \left|Ax(t) - Ay(t)\right| &\leq \left|f(t,x(t)) - f(t,y(t))\right| \\ &\leq \gamma\left|x(t) - y(t)\right| \\ &\leq \gamma\left\|x - y\right\| \quad \forall t \in J. \end{aligned}$$

En passant au " sup " on obtient, pour tout $x, y \in X = C(J,\mathbb{R})$:

$$\left\|Ax - Ay\right\| \leq \gamma\left\|x - y\right\|.$$

Ainsi, A est lipschitzien sur $X = C(J,\mathbb{R})$ avec comme constante de Lipschitz γ.

Étape 2 : Montrons que l'opérateur B est continu sur $\overline{\mathscr{B}}_r(0)$.

Soit $\{x_n\}$ une suite convergente dans $\overline{\mathscr{B}_r(0)}$ vers $x \in \overline{\mathscr{B}}_r(0)$.

Nous allons vérifier que la suite $(Bx_n)_n$ converge vers Bx

Soit $t \in J$. Nous avons :

$$\begin{aligned}
|Bx_n(t) - Bx(t)| &\leq \left| \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} g(s, x_n(s)) ds - \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} g(s, x(s)) ds \right| \\
&\leq \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} |g(s, x_n(s)) - g(s, x(s))| ds \\
&\leq \frac{T^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \|g(., x_n(.)) - g(., x(.))\|_{L^1}
\end{aligned}$$

D'où :

$$\|Bx_n - Bx\| \leq \frac{T^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \|g(., x_n(.)) - g(., x(.))\|_{L^1}$$

d'après le théorème de la convergence dominée de Lebesgue, nous avons :

$$\|g(., x_n(.)) - g(., x(.))\|_{L^1} \longrightarrow_{n\to\infty} 0.$$

Ce qui prouve que l'opérateur B est continu.

Où

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} Bx_n(t) &= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{x_0}{f(0, x_0)} + \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} g(s, x_n(s)) \, ds \right) \\
&= \frac{x_0}{f(0, x_0)} + \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \lim_{n\to\infty} g(s, x_n(s)) \, ds \\
&= \frac{x_0}{f(0, x_0)} + \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} g(s, x(s)) ds \\
&= Bx(t),
\end{aligned}$$

pour tout $t \in J$ avec prouver la continuité de l'opérateur B.

Étape 3 : Montrons que l'opérateur B est un opérateur compact sur $\overline{\mathscr{B}_r(0)}$.

Soit x arbitraire dans $\overline{\mathscr{B}_r(0)}$. Par hypothèse (H_2) et en utilisant l'inégalité de Young pour les convolutions, nous obtenons

$$\begin{aligned}
|Bx(t)| &\leq \left| \frac{x_0}{f(0, x_0)} \right| + \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} |g(s, x(s))| ds \\
&\leq \left| \frac{x_0}{f(0, x_0)} \right| + \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} h(s) ds \\
&\leq \left| \frac{x_0}{f(0, x_0)} \right| + \frac{T^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \|h\|_{L^1},
\end{aligned}$$

ce qui en prenant le supremum sur t donne

$$\|Bx\| \leq \left| \frac{x_0}{f(0, x_0)} \right| + \frac{T^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \|h\|_{L^1}, \quad \forall x \in \overline{\mathscr{B}_r(0)}$$

ce qui prouve que $B\left(\overline{\mathscr{B}_r(0)}\right)$ est un ensemble uniformément borné dans X.

Maintenant, montrons que $B\left(\overline{\mathscr{B}_r(0)}\right)$ est un ensemble équicontinu dans X. Pour $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq T$ on a

$$\begin{aligned}
&| Bx(t_1) - Bx(t_2) | \\
&\quad = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left| \int_0^{t_1} (t_1 - s)^{\alpha-1} g(s, x(s)) ds - \int_0^{t_2} (t_2 - s)^{\alpha-1} g(s, x(s)) ds \right| \\
&\quad \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left| \int_0^{t_1} (t_1 - s)^{\alpha-1} g(s, x(s)) ds - \int_0^{t_1} (t_2 - s)^{\alpha-1} g(s, x(s)) ds \right| \\
&\quad\quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left| \int_0^{t_1} (t_2 - s)^{\alpha-1} g(s, x(s)) ds - \int_0^{t_2} (t_2 - s)^{\alpha-1} g(s, x(s)) ds \right| \\
&\quad = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_1} \left[(t_1 - s)^{\alpha-1} - (t_2 - s)^{\alpha-1} \right] |h(s)| ds \\
&\quad\quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_1}^{t_2} (t_2 - s)^{\alpha-1} |h(s)| ds \\
&\quad \leq \frac{\|h\|_{L^1}}{\Gamma(\alpha+1)} \left[\left| t_2^{\alpha} - t_1^{\alpha} - (t_2 - t_1)^{\alpha} \right| + (t_2 - t_1)^{\alpha} \right]
\end{aligned}$$

Donc, pour $\epsilon > 0$, il existe un $\delta > 0$ tel que

$$|t_1 - t_2| < \delta \Longrightarrow |Bx(t_1) - Bx(t_2)| < \epsilon, \quad \forall t_1, t_2 \in J, \quad x \in \overline{\mathscr{B}_r(0)}$$

Ce qui prouve que $B\left(\overline{\mathscr{B}_r(0)}\right)$ est un ensemble équicontinu dans X.

Par le théorème d'Arzela Ascoli nous obtenons que l'opérateur B est un opérateur compact.

Étape 4 : Montrons que $\gamma M < 1$.

En utilisant les résultats de l'étape 3, nous obtenons

$$M = \|B\left(\overline{\mathscr{B}_r(0)}\right)\| = \sup\left\{\|B(x)\| : x \in \overline{\mathscr{B}_r(0)}\right\} \leq \left|\frac{x_0}{f(0, x_0)}\right| + \frac{T^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} \|h\|_{L^1}$$

ce qui donne à partir de l'hypothèse (H3) que

$$\gamma M \leq \gamma \left(\left| \frac{x_0}{f(0, x_0)} \right| + \frac{T^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} \|h\|_{L^1} \right) < 1.$$

Il reste à prouver que la conclusion (ii) du théorème (1.6) n'est pas réalisable.

Soit $x \in X$ et $\lambda \in (0, 1)$ tels que $\|x\| = r$ et $x = \lambda AxBx$. Il s'ensuit que

$$
\begin{aligned}
|x(t)| &= \lambda \left| f(t,x(t)) \left(\frac{x_0}{f(0,x_0)} + \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} g(s,x(s))ds \right) \right| \\
&\le \lambda |f(t,x(t))| \left(\left| \frac{x_0}{f(0,x_0)} \right| + \left| \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} g(s,x(s))ds \right| \right) \\
&\le \lambda |f(t,x(t)) - f(t,0) + f(t,0)| \\
&\times \left(\left| \frac{x_0}{f(0,x_0)} \right| + \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} |g(s,x(s))| ds \right) \\
&\le \lambda \left(\gamma |x(t)| + F_0 \right) \left(\left| \frac{x_0}{f(0,x_0)} \right| + \frac{T^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \|h\|_{L^1} \right) \\
&\le \frac{F_0 \left(|x_0/f(0,x_0)| + (T^\alpha/\Gamma(\alpha+1)) \|h\|_{L^1} \right)}{1 - \lambda\gamma \left(|x_0/f(0,x_0)| + (T^\alpha/\Gamma(\alpha+1)) \|h\|_{L^1} \right)}.
\end{aligned}
$$

En prenant supremum sur t et en utilisant (H_4) et $\lambda \in (0,1)$ nous obtenons

$$
\begin{aligned}
\|x\| &\le \frac{F_0 \left(|x_0/f(0,x_0)| + (T^\alpha/\Gamma(\alpha+1)) \|h\|_{L^1} \right)}{1 - \lambda\gamma \left(|x_0/f(0,x_0)| + (T^\alpha/\Gamma(\alpha+1)) \|h\|_{L^1} \right)} \\
&< \frac{F_0 \left(|x_0/f(0,x_0)| + (T^\alpha/\Gamma(\alpha+1)) \|h\|_{L^1} \right)}{1 - \gamma \left(|x_0/f(0,x_0)| + (T^\alpha/\Gamma(\alpha+1)) \|h\|_{L^1} \right)} < r
\end{aligned}
$$

ce qui contredit $\|x\| = r$; ainsi la conclusion (ii) du théorème (1.6) n'est pas possible ; c'est la conclusion 1 qui l'est, i.e l'équation opérationelle $AxBx = x$ admet au moins une solution dans $\overline{\mathscr{B}_r}(0)$.

En conséquence, le problème (2.1) admet au moins une solution sur J, qui complète la preuve de notre théorème. ■

Nous terminons cette section par l'exemple suivant.

2.1.2 Exemple

Considérons l'équation différentielle hybride fractionnaire

$$
\begin{aligned}
& D^{0,5} \left(\frac{x(t)}{1 + (\sin(t)/16)|x(t)|} \right) = \frac{t x(t)}{1 + |x(t)|} \\
& x(0) = 1, \quad t \in J = [0,\pi].
\end{aligned}
\tag{2.5}
$$

Il est facile de voir que toutes les hypothèses du théorème (2.1) sont satisfaites avec

$$\gamma = \frac{1}{16}, \quad T = \pi, \quad h(t) = t, \quad F_0 = 1.$$

Nous concluons que

$$\frac{F_0 \left(|x_0/f(0,x_0)| + (T^\alpha/\Gamma(\alpha+1)) \|h\|_{L^1} \right)}{1 - \gamma \left(|x_0/f(0,x_0)| + (T^\alpha/\Gamma(\alpha+1)) \|h\|_{L^1} \right)} = \frac{1+\pi^2}{1 - (1/16)\left(1+\pi^2\right)} < 34$$

donc (2.5) admet au moins une solution dans $\overline{\mathscr{B}_{34}(0)}$.

2.2 Un deuxième type de problème

Dans ce paragraphe, nous prouvons les résultats d'existence pour les problèmes de valeurs aux limites pour les équations différentielles hybrides d'ordre fractionnaire (EDHF en abrégé) impliquant des opérateurs différentiels de Caputo d'ordre $0 < \alpha < 1$.

$$\begin{cases} D^{\alpha}\left(\dfrac{x(t)}{f(t,x(t))}\right) = g(t,x(t)) \quad \text{p.p. } t \in J = [0,T] \\ a\dfrac{x(0)}{f(0,x(0))} + b\dfrac{x(T)}{f(T,x(T))} = c \end{cases} \tag{2.6}$$

où $f \in C(J \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^*)$, $g \in C(J \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ et a, b, c sont des constantes réelles avec $a + b \neq 0$.

Définition 2.2

La fonction $x \in X = C(J, \mathbb{R})$, est une solution de (2.6) si

(a) *la fonction $t \mapsto \dfrac{x}{f(t,x)}$ est continue pour chaque $x \in \mathbb{R}$, et*

(b) *x satisfait les équations de (2.6).*

2.2.1 Existence de solutions

Lemme 2.2

Supposons que la fonction $x \mapsto \dfrac{x}{f(t,x)}$ est croissante en $\mathbb{R}$ presque partout pour $t \in J$ et que a, b, c soient des constantes réelles avec $a + b \neq 0$. Alors, pour tout $h \in L^1(J; \mathbb{R})$, la fonction $x \in C(J; \mathbb{R})$ est une solution du

$$\begin{cases} D^{\alpha}\left(\dfrac{x(t)}{f(t,x(t))}\right) = h(t) \quad \text{a.e. } t \in J = [0,T], \\ a\dfrac{x(0)}{f(0,x(0))} + b\dfrac{x(T)}{f(T,x(T))} = c \end{cases} \tag{2.7}$$

si et seulement si x satisfait l'équation intégrale hybride

$$\begin{aligned} x(t) = f(t,x(t)) \Bigg[& \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} h(s)\,ds \\ & - \frac{1}{a+b}\left(\frac{b}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} h(s)\,ds - c\right)\Bigg]. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Démonstration : .

Supposons que x soit une solution du problème (2.8).

Par définition, $\dfrac{x(t)}{f(t,x(t))}$ est continu. En appliquant l'opérateur fractionnaire de Caputo d'ordre α, on obtient la première équation de (2.7). Encore une fois, en substituant $t=0$ et $t=T$ dans (2.8) nous avons

$$\frac{x(0)}{f(0,x(0))}=\frac{-1}{a+b}\left(\frac{b}{\Gamma(\alpha)}\int_0^T(T-s)^{\alpha-1}h(s)ds-c\right)$$

$$\frac{x(T)}{f(T,x(T))}=\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^T(T-s)^{\alpha-1}h(s)ds-\frac{1}{a+b}\left(\frac{b}{\Gamma(\alpha)}\int_0^T(T-s)^{\alpha-1}h(s)ds-c\right)\right),$$

ensuite

$$\begin{aligned}a\frac{x(0)}{f(0,x(0))}+b\frac{x(T)}{f(T,x(T))}=&\frac{-ab}{(a+b)\Gamma(\alpha)}\int_0^T(T-s)^{\alpha-1}h(s)ds+\frac{ac}{a+b}\\&+\frac{b}{\Gamma(\alpha)}\int_0^T(T-s)^{\alpha-1}h(s)ds\\&-\frac{b^2}{(a+b)\Gamma(\alpha)}\int_0^T(T-s)^{\alpha-1}h(s)ds+\frac{bc}{a+b}\end{aligned}$$

Cela implique que

$$a\frac{x(0)}{f(0,x(0))}+b\frac{x(T)}{f(T,x(T))}=c$$

Inversement,

$D^\alpha\left(\frac{x(t)}{f(t,x(t))}\right)=h(t)$, donc on obtient $\frac{x(t)}{f(t,x(t))}=\frac{x(0)}{f(0,x(0))}+I^\alpha h(t)$.

Puis

$$b\frac{x(T)}{f(T,x(T))}=b\frac{x(0)}{f(0,x(0))}+\frac{b}{\Gamma(\alpha)}\int_0^T(T-s)^{\alpha-1}h(s)ds$$

Donc

$$a\frac{x(0)}{f(0,x(0))}+b\frac{x(T)}{f(T,x(T))}=(a+b)\frac{x(0)}{f(0,x(0))}+\frac{b}{\Gamma(\alpha)}\int_0^T(T-s)^{\alpha-1}h(s)ds$$

implique que

$$\frac{x(0)}{f(0,x(0))}=\frac{1}{a+b}\left(c-\frac{b}{\Gamma(\alpha)}\int_0^T(T-s)^{\alpha-1}h(s)ds\right)$$

Par conséquent,

$$x(t)=f(t,x(t))\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}h(s)ds-\frac{1}{a+b}\left(\frac{b}{\Gamma(\alpha)}\int_0^T(T-s)^{\alpha-1}h(s)ds-c\right)\right).$$ ■

Théorème 2.2

Supposons que :

(H_0) *La fonction* $x\mapsto\frac{x}{f(t,x)}$ *est croissante en* $\mathbb{R}$ *presque partout pour* $t\in J$.

(H_1) *Il existe une constante* $L>0$ *telle que*

$$|f(t,x)-f(t,y)|\leq L|x-y|$$

pour tout $t\in J$ *et* $x,y\in\mathbb{R}$.

(H_2) *Il existe une fonction $h \in L^1(J,\mathbb{R})$ telle que*

$$|g(t,x)| \leq h(t) \quad p.p.\ t \in J$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$.

De plus, si

$$L\left(\frac{T^{\alpha-1}\|h\|_{L^1}}{\Gamma(\alpha)}\left(1+\frac{|b|}{|a+b|}\right)+\frac{|c|}{|a+b|}\right)<1$$

Alors l'équation différentielle hybride d'ordre fractionnaire (2.6) admet au moins une solution sur J.

Démonstration : . On définit un sous-ensemble S de $X = C(J,\mathbb{R})$ par

$$S = \{x \in X \mid \|x\| \leq N\}$$

où $N = \dfrac{F_0\left(\frac{T^{\alpha-1}\|h\|_{L}1}{\Gamma(\alpha)}\left(1+\frac{|b|}{|a+b|}\right)+\frac{|c|}{|a+b|}\right)}{1-L\left(\frac{T^{\alpha-1}\|h\|}{\Gamma(\alpha)}\left(1+\frac{|b|}{|a+b|}\right)+\frac{|c|}{|a+b|}\right)}$ et $F_0 = \sup_{t\in J}|f(t,0)|$.

Il est clair que S satisfait l'hypothèse du théorème (1.7).

Par une application du lemme (2.2), l'équation (2.6) est équivalente à l'équation intégrale hybride non linéaire

$$\begin{aligned} x(t) = & f(t,x(t))\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}g(s,x(s))ds\right. \\ & \left.-\frac{1}{a+b}\left(\frac{b}{\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}g(s,x(s))ds-c\right)\right), \quad t\in J. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Définissez deux opérateurs $A : X \to X$ et $B : S \to X$ par

$$Ax(t) = f(t,x(t)), \quad t \in J$$

et

$$Bx(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}g(s,x(s))ds - \frac{1}{a+b}\left(\frac{b}{\Gamma(\alpha)}\int_0^T (Ts)^{\alpha-1}g(s,x(s))dsc\right)$$

Ensuite, l'équation intégrale hybride (2.9) est transformée en l'équation de l'opérateur comme

$$x(t) = Ax(t)Bx(t), \quad t \in J.$$

Nous montrerons que les opérateurs A et B satisfont à toutes les conditions du théorème (1.7).

Etape 1 : Montrons que A est lipschitzien :

Soit $x, y \in X$, puis par hypothèse (H_1),

$$|Ax(t) - Ay(t)| = |f(t,x(t)) - f(t,y(t))| \leq L|x(t)-y(t)| \leq \|x-y\|$$

pour tout $t \in J$. En prenant supremum sur t, on obtient

$$\|Ax - Ay\| \leq L\|x - y\|$$

pour tout $x, y \in X$.

Etape 2 : Montrons que B est continu dans S.

Soit (x_n) une suite dans S convergeant vers un point $x \in S$.

Nous allons vérifier que la suite $(Bx_n)_n$ converge vers Bx.

Soit $t \in J$. Nous avons, par le théorème de convergence dominée de Lebesgue,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} g(s, x_n(s))ds = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \lim_{n\to\infty} g(s, x_n(s))ds$$

et

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} g(s, x_n(s))\, ds = \frac{b}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} \lim_{n\to\infty} g(s, x_n(s))ds$$

Puis

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} Bx_n(t) = \lim_{n\to\infty} \Bigg[& \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} g(s, x_n(s))\, ds \\
& - \frac{1}{a+b} \left(\frac{b}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} g(s, x_n(s))ds - c \right) \Bigg] \\
= \lim_{n\to\infty} & \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} g(s, x_n(s))\, ds \\
& - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{a+b} \left(\frac{b}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} g(s, x(s))ds - c \right) \\
= & \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} g(s, x(s))ds \\
& - \frac{1}{a+b} \left(\frac{b}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} g(s, x(s))ds - c \right) \\
= & Bx(t)
\end{aligned}$$

pour tout $t \in J$. Cela montre que B est un opérateur continu sur S.

Etape 3 : Montrons que B est un opérateur compact sur S.

Premièrement, nous montrons que $B(S)$ est un ensemble uniformément borné dans X.

Soit $x \in S$. Alors, par hypothèse (H_2), pour tout $t \in J$,

$$\begin{aligned}
|Bx(t)| \leq & \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \left|(t-s)^{\alpha-1} g(s,x(s))\right| ds \\
& + \frac{1}{a+b}\left(\frac{b}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T \left|(T-s)^{\alpha-1} g(s,x(s))\right| ds + |c|\right) \\
\leq & \frac{T^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t |h(s)| ds + \frac{bT^{\alpha-1}}{|a+b|\Gamma(\alpha)} \int_0^T |h(s)| ds + \frac{|c|}{|a+b|} \\
\leq & \frac{T^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \|h\|_{L^1}\left(1+\frac{|b|}{|a+b|}\right) + \frac{|c|}{|a+b|}.
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\|Bx\| \leq \frac{T^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \|h\|_{L^1}\left(1+\left|\frac{b}{a+b}\right|\right) + \frac{|c|}{|a+b|} \quad \text{pour tout } x \in S.$$

Cela montre que B est uniformément borné sur S.

Ensuite, nous montrons que $B(S)$ est un ensemble équicontinu sur X.

On pose $p(t) = \int_0^t h(s) ds$.

Soit $t_1, t_2 \in J$, puis pour tout $x \in S$,

$$\begin{aligned}
|Bx(t_1) - Bx(t_2)| = & \left|\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_1} (t_1-s)^{\alpha-1} g(s,x(s)) ds \right. \\
& \left. - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_2} (t_2-s)^{\alpha-1} g(s,x(s)) ds\right| \\
\leq & \frac{T^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \left|\int_{t_1}^{t_2} |g(s,x(s))| ds\right| \\
\leq & \frac{T^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \left|p(t_1) - p(t_2)\right|
\end{aligned}$$

Puisque p est continu sur compact J, il est uniformément continu. D'où

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 : \quad |t_1 - t_2| < \eta \quad \Longrightarrow \quad |Bx(t_1) - Bx(t_2)| < \varepsilon$$

pour tout $t_1, t_2 \in J$ et pour tout $x \in X$.

Cela montre que $B(S)$ est un ensemble équicontinu dans X.

Alors, par le théorème d'Ascoli-Arzelá, B est un opérateur complètement continu sur S.

Etape 4 : Montrons que L'hypothèse (3) du théorème (1.7) est satisfaite.

Soit $x \in X$ et $y \in S$ arbitraires tels que $x = AxBy$. alors

$$\begin{aligned}|x(t)| &= |Ax(t)||By(t)| \\ &\leq |f(t,x(t))| \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} g(s,x(s))ds \right. \\ &\qquad \left. - \frac{1}{a+b} \left(\frac{b}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} g(s,x(s))ds - c \right) \right| \\ &\leq \left(|f(t,x(t)) - f(t,0)| + |f(t,0)| \right) \\ &\qquad \times \left(\frac{T^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T h(s)ds + \frac{|b|T^{\alpha-1}}{|a+b|\Gamma(\alpha)} \int_0^T h(s)ds + \frac{|c|}{|a+b|} \right) \\ &\leq (L|x(t)| + F_0) \left(\frac{T^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \|h\|_{L^1} \left(1 + \frac{|b|}{|a+b|} \right) + \frac{|c|}{|a+b|} \right)\end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned}|x(t)| - L \left(\frac{T^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \|h\|_{L^1} \left(1 + \frac{|b|}{|a+b|} \right) + \frac{|c|}{|a+b|} \right) |x(t)| \\ \leq F_0 \left(\frac{T^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \|h\|_{L^1} \left(1 + \frac{|b|}{|a+b|} \right) + \frac{|c|}{|a+b|} \right),\end{aligned}$$

ce qui implique

$$|x(t)| \leq \frac{F_0 \left(\frac{T^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \|h\|_{L^1} \left(1 + \frac{|b|}{|a+b|} \right) + \frac{|c|}{|a+b|} \right)}{1 - L \left(\frac{T^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \|h\|_{L^1} \left(1 + \frac{|b|}{|a+b|} \right) + \frac{|c|}{|a+b|} \right)}.$$

Prenant supremum sur t,

$$\|x\| \leq \frac{F_0 \left(\frac{T^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \|h\|_{L^1} \left(1 + \frac{|b|}{|a+b|} \right) + \frac{|c|}{|a+b|} \right)}{1 - L \left(\frac{T^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \|h\|_{L^1} \left(1 + \frac{|b|}{|a+b|} \right) + \frac{|c|}{|a+b|} \right)} = N.$$

Alors $x \in S$ et l'hypothèse (3) du théorème (1.7) est satisfaite.

Enfin, nous avons

$$M = \|B(S)\| = \sup\{\|Bx\| : x \in S\} \leq \frac{T^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \|h\|_{L^1} \left(1 + \left| \frac{b}{a+b} \right| \right) + \frac{|c|}{|a+b|},$$

et donc

$$\alpha M \leq \left(\frac{T^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \|h\|_{L^1} \left(1 + \left| \frac{b}{a+b} \right| \right) + \frac{|c|}{|a+b|} \right) < 1.$$

Ainsi, toutes les conditions du théorème (1.7) sont satisfaites et donc l'équation de l'opérateur $AxBx = x$ admet au moins une solution dans S.

En conséquence, EDHF (2.6) admet au moins une solution définie sur J. Ceci termine la preuve. ■

Nous terminons cette section par l'exemple suivant.

2.2.2 Exemple

Considérons l'équation différentielle hybride fractionnaire

$$D^{0,5}\left(\frac{x(t)}{1+(\sin(t)/16)|x(t)|}\right)=\frac{tx(t)}{1+|x(t)|} \tag{2.10}$$

$$x(0)=1, \quad t\in J=[0,\pi].$$

Il est facile de voir que toutes les hypothèses du théorème (2.1) sont satisfaites avec

$$\gamma=\frac{1}{16}, \quad T=\pi, \quad h(t)=t, \quad F_0=1.$$

Nous concluons que

$$\frac{F_0\left(\left|x_0/f(0,x_0)\right|+(T^\alpha/\Gamma(\alpha+1))\,\|h\|_{L^1}\right)}{1-\gamma\left(\left|x_0/f(0,x_0)\right|+(T^\alpha/\Gamma(\alpha+1))\,\|h\|_{L^1}\right)}=\frac{1+\pi^2}{1-(1/16)\left(1+\pi^2\right)}<34$$

donc (2.10) admet au moins une solution dans $\overline{\mathscr{B}_{34}(0)}$.

CHAPITRE 3 Sur des équations différentielles impliquant la dérivée de Riemann-Liouville

Dans ce chapitre, nous étudions des équations différentielles hybrides fractionnaires avec perturbations linéaires de second type impliquant des opérateurs différentiels de Riemann-Liouville d'ordre $0 < \alpha < 1$. Un théorème d'existence pour les équations différentielles hybrides fractionnaires est démontré sous la condition Ψ-Lipschitz.

3.1 Un premier type de problème

Soit $\mathbb{R}$ la droite réelle et $J = [0, T)$ un intervalle borné dans $\mathbb{R}$ pour un certain $T \in \mathbb{R}$. Soit $C(J\times\mathbb{R},\mathbb{R})$ la classe des fonctions continues $f : J\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $\mathscr{C}(J\times\mathbb{R},\mathbb{R})$ est la classe Carathéodory des fonctions sur $J \times \mathbb{R}$ qui sont intégrables de Lebesgue lorsqu'elles sont bornées par une fonction intégrable de Lebesgue sur J.

Nous considérons des équations différentielles hybrides fractionnaires (EDHF) impliquant des opérateurs différentiels d'ordre $0 < \alpha < 1$ de Riemann-Liouville

$$\begin{cases} {}^{RL}D^{\alpha}\left[\dfrac{x(t)}{f(t,x(t))}\right] = g(t,x(t)) \qquad p.p \;\; t \in J = [0,T] \\ x(0) = 0 \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{3.1}$$

où $f \in C(J \times \mathbb{R},\mathbb{R}^*)$ et $g \in \mathscr{C}(J \times \mathbb{R},\mathbb{R})$,

Définition 3.1

La fonction $x \in C(J,\mathbb{R})$, est appelée solution de EDHF (3.1) si

(i) la fonction $t \mapsto (x/f(t,x))$ est continue pour chaque $x \in \mathbb{R}$

(ii) x satisfait l'équation (3.1).

Nous prouvons l'existence d'une solution pour le EDHF (3.1) par un théorème de point fixe en algèbre de Banach dû à Dhage (1.6).

Lemme 3.1

la fonction $x \in C(J,\mathbb{R})$ satisfait le EDHF de la forme

$$\begin{cases} {}^{RL}D^{\alpha}\left[\dfrac{x(t)}{f(t,x(t))}\right] = h(t) \quad p.p \;\; t \in J = [0,T] \\ x(0) = 0 \end{cases} \tag{3.2}$$

avec $h \in L^1(J,\mathbb{R}^+)$, si et seulement si x satisfera également à l'équation intégrale hybride (EIH)

$$x(t) = \frac{f(t,x(t))}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}h(s)ds, \quad t \in J. \tag{3.3}$$

Démonstration : .

Soit x une solution du problème de Cauchy (3.2). Puisque l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville I^{α} est un opérateur monotone, nous appliquons donc I^{α} des deux côtés de (3.2), par le lemme 1.1, nous avons

$$I^{\alpha}\,{}^{RL}D^{\alpha}\left[\frac{x(t)}{f(t,x(t))}\right] = \frac{x(t)}{f(t,x(t))} - \frac{I^{1-\alpha}\frac{x(t)}{f(t,x(t))}\Big|_{t=0}}{\Gamma(\alpha)}t^{\alpha-1} = I^{\alpha}h(t),$$

alors par $x(0) = 0$, on obtient

$$\frac{x(t)}{f(t,x(t))} = I^{\alpha}h(t) + \frac{I^{1-\alpha}\dfrac{x(t)}{f(t,x(t))}\Big|_{t=0}}{\Gamma(\alpha)}t^{\alpha-1} = I^{\alpha}h(t),$$

i.e.,

$$x(t) = f(t,x(t))\cdot I^{\alpha}h(t) = \frac{f(t,x(t))}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}h(s)ds, \quad t \in J.$$

Ainsi, (3.3) est vrai.

Inversement, supposons que x satisfait EIH (3.3). Ensuite, en divisant par $f(t,x(t))$ et en appliquant D^{α} des deux côtés de (3.3), donc (3.1) est satisfait.

Encore une fois, la substitution de $t = 0$ dans (3.3) donne

$$\frac{x(0)}{f(0,x(0))} = 0 = \frac{0}{f(0,0)}$$

Puisque la fonction $x \mapsto \dfrac{x}{f(t,x)}$ croissante en $\mathbb{R}$ presque partout pour $t \in J$, la fonction $x \mapsto \dfrac{x}{f(0,x)}$ est injectif dans $\mathbb{R}$ et $x(0) = 0$. (La preuve est terminée.) ■

3.1.1 Résultant d'existence

Théorème 3.1

Supposons que :

(H_1) *La fonction* $x \mapsto \dfrac{x}{f(t,x)}$ *est croissante en* $\mathbb{R}$ *presque partout pour* $t \in J$.

(H_2) *Il existe une constante* $L > 0$ *telle que*

$$|f(t,x) - f(t,y)| \leq L|x-y|$$

pour tout $t \in J$ *et* $x, y \in \mathbb{R}$.

(H_3) *Il existe une fonction* $h \in L^1(J,\mathbb{R})$ *telle que*

$$|g(t,x)| \leq h(t) \quad p.p. t \in J$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$.

De plus, si

$$\frac{LT^\alpha \|h\|_{L^1}}{\Gamma(\alpha+1)} < 1,$$

alors le EDHF (3.1) admet au moins une solution sur J.

Démonstration : Définir $X = C(J,\mathbb{R})$ et définir un sous-ensemble S de X par

$$S = \{x \in X \mid \|x\| \leq N\},$$

où $N = \dfrac{F_0 T^\alpha \|h\|_1^1}{\Gamma(\alpha+1) - LT^\alpha \|h\|_L^1}$ et $F_0 = \sup\limits_{t\in J} |f(t,0)|$.

Il est clair que S est un sous-ensemble fermé, convexe et borné de l'espace de Banach X.

D'après le lemme (3.1), EDHF (3.1) est équivalent au EIH non linéaire

$$x(t) = \frac{f(t,x(t))}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} g(s,x(s))ds, \quad t \in J. \tag{3.4}$$

On définit les deux opérateurs $A : X \to X$ et $B : S \to X$ par

$$Ax(t) = f(t,x(t)), \quad t \in J,$$

et

$$Bx(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} g(s,x(s))ds, \quad t \in J.$$

Ensuite, le EIH (3.4) est transformé en l'équation de l'opérateur

$$Ax(t)Bx(t) = x(t), \quad t \in J.$$

Nous montrerons que les opérateurs A et B satisfont à toutes les conditions du théorème (1.6).

Étape 1 : Montrons que A est lipschitzien sur X :

Soit $x, y \in X$. Puis par hypothèse (H_1),

$$|Ax(t) - Ay(t)| = |f(t,x(t)) - f(t,y(t))| \leq L|x(t) - y(t)| \leq L\|x-y\|,$$

pour tout $t \in J$. En prenant supremum sur t, on obtient

$$\|Ax - Ay\| \leq L\|x - y\|,$$

pour tout $x, y \in X$.

Étape 2 : montrons que B est un opérateur complètement continu sur S dans X.

1) Montrons que B est continu sur S.

Soit $\{x_n\}$ une suite dans S convergeant vers un point $x \in S$. Nous allons vérifier que la suite $(Bx_n)_n$ converge vers Bx.
Ensuite, par le théorème de convergence dominée de Lebesgue,

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} Bx_n(t) &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} g(s, x_n(s))\, ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \lim_{n\to\infty} g(s, x_n(s))\, ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} g(s, x(s)) ds \\
&= Bx(t)
\end{aligned}$$

pour tout $t \in J$. Cela montre que B est un opérateur continu sur S.

2) Montrons que B est un opérateur compact sur S.

(c-à-d, B transforme tout borné en un relativement compact.)

Pour montrer que $B(S)$ est relativement compact, nous allons utiliser le théorème d'Ascoli-Arzela. Ce qui revient à montrer que :

$2-a$), $B(S)$ est un ensemble uniformément borné dans X.

Soit $x \in S$. Alors par hypothèse (H_2),

$$\begin{aligned}
|Bx(t)| &= \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} g(s, x(s)) ds \right| \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} |g(s, x(s))| ds \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} h(s) ds \\
&\leq \frac{T^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \|h\|_{L^1}
\end{aligned}$$

pour tout $t \in J$. Prenant supremum sur t,

$$\|Bx\| \leq \frac{T^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \|h\|_{L^1}, \quad \text{pour tout } \ x \in S.$$

Cela montre que B est uniformément borné sur S.

$2-b$) $B(S)$ est un ensemble équicontinu.

Soit $t_1, t_2 \in J$, avec $t_1 < t_2$. Alors pour tout $x \in S$, on a

$$\begin{aligned}
|Bx(t_1) - Bx(t_2)| &= \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_1} (t_1 - s)^{\alpha-1} g(s, x(s)) ds - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_2} (t_2 - s)^{\alpha-1} g(s, x(s)) ds \right| \\
&\leq \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_1} (t_1 - s)^{\alpha-1} g(s, x(s)) ds - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_1} (t_2 - s)^{\alpha-1} g(s, x(s)) ds \right| \\
&\quad + \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_1}^{t_2} (t_2 - s)^{\alpha-1} g(s, x(s)) ds \right| \\
&\leq \frac{\|h\|_{L^1}}{\Gamma(\alpha+1)} \left[\left| t_2^{\alpha} - t_1^{\alpha} - (t_2 - t_1)^{\alpha} \right| + (t_2 - t_1)^{\alpha} \right].
\end{aligned}$$

Donc, pour $\varepsilon > 0$, il existe un $\delta > 0$ tel que

$$|t_1 - t_2| < \delta \Rightarrow |Bx(t_1) - Bx(t_2)| < \varepsilon,$$

pour tout $t_1, t_2 \in J$ et pour tout $x \in S$.

Cela montre que $B(S)$ est un ensemble équicontinu dans X.

Maintenant, l'ensemble $B(S)$ est uniformément borné et équicontinu dans X, il est donc compact par le théorème d'Arzela-Ascoli. Par conséquent, B est un opérateur complètement continu sur S.

Étape 3 : montrons que la conclusion (i) du théorème (1.6) est satisfaite.

Soit $x \in X$ et $y \in S$ arbitraires tels que $x = AxBy$. Alors, par hypothèse (H_1), on a

$$\begin{aligned}
|x(t)| &= |Ax(t)||By(t)| \\
&= |f(t, x(t))| \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - s)^{\alpha-1} g(s, y(s)) ds \right| \\
&\leq [|f(t, x(t)) - f(t, 0)| + |f(t, 0)|] \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - s)^{\alpha-1} |g(s, y(s))| ds \right) \\
&\leq [L|x(t)| + F_0] \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - s)^{\alpha-1} h(s) ds \right) \\
&\leq [L|x(t)| + F_0] \left(\frac{T^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} \|h\|_{L^1} \right)
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$|x(t)| \leq \frac{F_0 T^{\alpha} \|h\|_{L^1}}{\Gamma(\alpha+1) - LT^{\alpha} \|h\|_{L^1}}.$$

Prenant supremum sur t,

$$\|x\| \leq \frac{F_0 T^{\alpha} \|h\|_{L^1}}{\Gamma(\alpha+1) - LT^{\alpha} \|h\|_{L^1}} = N.$$

Ceci montre que la conclusion (i) du théorème (1.6) est satisfaite. Enfin, nous avons

$$M = \|B(S)\| = \sup\{\|Bx\| : x \in S\} \leq \frac{T^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} \|h\|_{L^1}$$

et donc,

$$\alpha M \leq L\left(\frac{T^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\|h\|_{L^1}\right) < 1.$$

Ainsi, toutes les conditions du théorème (1.6) sont satisfaites et donc l'équation d'opérateur
$AxBx = x$ admet au moins une solution dans S.

En conséquence, le EDHF (3.1) admet au moins une solution sur J. Ceci termine la preuve. ■

3.1.2 Exemple

Considérons l'équation différentielle hybride fractionnaire

$$^{RL}D^{0,5}\left(\frac{x(t)}{1+(\sin(t)/16)|x(t)|}\right) = \frac{tx(t)}{1+|x(t)|} \tag{3.5}$$

$$x(0) = 0, \quad t \in J = [0, \pi].$$

Il est facile de voir que toutes les hypothèses du théorème (3.1) sont satisfaites avec

$$L = \frac{1}{16}, \quad T = \pi, \quad h(t) = t.$$

Nous concluons que

$$\frac{LT^{\alpha}\|h\|_{L^1}}{\Gamma(\alpha+1)} =< 1$$

donc (3.5) admet au moins une solution dans S.

3.2 Un deuxième type de problème

Nous considérons ce qui suit l'existence de solutions pour le problème de la valeur aux limites des équations différentielles hybrides fractionnaires

$$\begin{cases} {}^{RL}D^{\alpha}_{0^+}\left[\dfrac{x(t)}{f(t,x(t))}\right]+g(t,x(t)) & = & 0 \qquad p.p \ \ t\in J=[0,1] \\ x(0)=x(1) & = & 0 \end{cases} \tag{3.6}$$

où $f \in C(J\times\mathbb{R},\mathbb{R}^*)$, $g\in\mathscr{C}(J\times\mathbb{R},\mathbb{R})$, $1<a\leqslant 2$ est un nombre réel et ${}^{RL}D^{\alpha}$ est la dérivée fractionnaire standard de Riemann-Liouville.

Lemme 3.2

Soit $y\in C[0,1]$ et $1<\alpha\leqslant 2$. La solution unique du problème

$$D^{\alpha}_{0^+}\left[\frac{x(t)}{f(t,x(t))}\right]+y(t)=0, \quad 0<t<1, \tag{3.7}$$

$$x(0)=x(1)=0 \tag{3.8}$$

est

$$x(t)=f(t,x(t))\int_0^1 G(t,s)y(s)ds,$$

où

$$G(t,s)=\begin{cases} \dfrac{[t(1-s)]^{\alpha-1}-(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, & 0\leqslant s\leqslant t\leqslant 1, \\ \dfrac{[t(1-s)]^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, & 0\leqslant t\leqslant s\leqslant 1. \end{cases} \tag{3.9}$$

Ici, $G(t,s)$ est appelé fonction de Green du problème des valeurs limites (3.7) et (3.8).

Démonstration : .

On peut appliquer le proposition (1.3) pour réduire (3.7) à une équation intégrale équivalente

$$\frac{x(t)}{f(t,x(t))}=-I^{\alpha}_{0^+}y(t)+c_1t^{\alpha-1}+c_2t^{\alpha-2},$$

pour certains $c_1,c_2\in\mathbb{R}$. Par conséquent, la solution générale de (3.7) est

$$x(t)=f(t,x(t))\left(-\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}y(s)ds+c_1t^{\alpha-1}+c_2t^{\alpha-2}\right)$$

Par (3.8), on obtient $c_2=0$ et

$$c_1=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1(1-s)^{\alpha-1}y(s)ds$$

Par conséquent, l'unique solution des problèmes (3.7) et (3.8) est

$$\begin{aligned}
x(t) &= f(t,x(t))\left(-\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}y(s)ds + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 [t(1-s)]^{\alpha-1}y(s)ds\right) \\
&= f(t,x(t))\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t \left\{[t(1-s)]^{\alpha-1} - (t-s)^{\alpha-1}\right\} y(s)ds \right. \\
&\qquad\qquad\qquad \left. + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_t^1 [t(1-s)]^{\alpha-1}y(s)ds\right) \\
&= f(t,x(t))\int_0^1 G(t,s)y(s)ds
\end{aligned}$$

La preuve est complète. ■

Lemme 3.3 ([14])

La fonction $G(t,s)$ définie par (3.9) satisfait les conditions suivantes :

1. *$G(t,s) > 0$, pour $t,s \in (0,1)$;*
2. *$\max_{t\in[0,1]} G(t,s) = G(s,s)$, pour $s \in (0,1)$.*

3.2.1 Résultat d'existence

Nous considérons les hypothèses suivantes dans ce qui suit.

(H_1) Il existe une constante $L > 0$ telle que

$$|f(t,x) - f(t,y)| \leqslant L|x-y|$$

pour tout $t \in J$ et $x, y \in \mathbb{R}$.

(H_2) Il existe une fonction $h \in L^1(J, \mathbb{R}^+)$ telle que

$$|g(t,x)| \leqslant h(t), \quad t \in J$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Théorème 3.2

Supposons que les hypothèses (H_1) et (H_2) soient vérifiées. De plus, si

$$LT\|h\|_{L^1} < 1, \tag{3.10}$$

alors les problèmes aux limites (3.6) ont une solution définie sur J.

Démonstration : .

Soit $X = C(J,\mathbb{R})$ et définissons un sous-ensemble S de X défini par

$$S = \{x \in X \mid \|x\| \leqslant N\}, \tag{3.11}$$

où $N = \dfrac{F_0 T\|h\|_{L^1}}{1 - LT\|h\|_{L^1}}$ et $F_0 = \sup_{t\in J}|f(t,0)|$.

Il est clair que S est un sous-ensemble fermé, convexe et borné de l'espace de Banach X.

D'après le lemme 3.2, le problème aux limites (3.6) est équivalent à l'équation

$$x(t) = f(t, x(t)) \int_0^1 G(t,s) g(s, x(s)) ds, \quad t \in J. \tag{3.12}$$

Définissez deux opérateurs $A : X \to X$ et $B : S \to X$ par

$$Ax(t) = f(t, x(t)), \quad t \in J \tag{3.13}$$

et

$$Bx(t) = \int_0^1 G(t,s) g(s, x(s)) ds, \quad t \in J \tag{3.14}$$

Puis Éq. (3.12) est transformé en l'équation de l'opérateur comme

$$Ax(t)Bx(t) = x(t), \quad t \in J \tag{3.15}$$

Nous allons montrer que les opérateurs A et B vérifient toutes les conditions du théorème 1.7.

Étape 1 , nous montrons que A est un opérateur de Lipschitz sur X avec la constante de Lipschitz L.
Soit $x, y \in X$. Alors par hypothèse (H_1),

$$|Ax(t) - Ay(t)| = |f(t, x(t)) - f(t, y(t))| \leqslant L|x(t) - y(t)| \leqslant L\|x - y\|$$

pour tout $t \in J$. En prenant le supremum sur t, on obtient

$$\|Ax - Ay\| \leqslant L\|x - y\|$$

pour tout $x, y \in X$.

Étape 2, nous montrons que B est un opérateur compact et continu sur S dans X.

1)– Montrons d'abord que B est continue sur S.

Soit $\{x_n\}$ une suite dans S convergeant vers un point $x \in S$. Puis par le théorème de convergence dominé de Lebesgue,

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} Bx_n(t) &= \lim_{n\to\infty} \int_0^1 G(t,s) g(s, x_n(s))\, ds = \int_0^1 G(t,s) \lim_{n\to\infty} g(s, x_n(s))\, ds \\ &= \int_0^1 G(t,s) g(s, x(s)) ds = Bx(t) \end{aligned}$$

pour tout $t \in J$. Cela montre que B est un opérateur continu sur S.

2)– On montre ensuite que B est un opérateur compact sur S.

Il suffit de montrer que $B(S)$ est un ensemble uniformément borné et équicontinu dans X.

D'une part, soit $x \in S$ arbitraire. D'après le lemme 3.3, on a

$$|Bx(t)| = \left| \int_0^1 G(t,s) g(s, x(s)) ds \right| \leqslant \int_0^1 G(s,s) h(s) rés \leqslant T\|h\|_{L^1}$$

pour tout $t \in J$. Prenant le dessus sur t,

$$\|Bx\| \leqslant T\|h\|_{L^1}$$

pour tout $x \in S$. Cela montre que B est uniformément borné sur S.

D'autre part, étant donné $\epsilon > 0$, soit

$$\delta < \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{\Gamma(\alpha+1)\epsilon}{6\|h\|_{L^1}}\right\}.$$

Alors, pour tout $x \in S$, $t_1, t_2 \in [0,1]$ avec $t_1 < t_2, 0 < t_2 - t_1 < \delta$, on a

$$\begin{aligned}
|Bx(t_2) - Bx(t_1)| &= \left|\int_0^1 G(t_2,s)\,g(s,x(s))ds - \int_0^1 G(t_1,s)\,g(s,x(s))ds\right| \\
&\leqslant \|h\|_{L^1}\left|\int_0^{t_2} \frac{[t_2(1-s)]^{\alpha-1}\,ds - (t_2-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + \int_{t_2}^1 \frac{[t_2(1-s)]^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}ds\right. \\
&\qquad \left. - \int_0^{t_1} \frac{[t_1(1-s)]^{\alpha-1} - (t_1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}ds - \int_{t_1}^1 \frac{[t_1(1-s)]^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}ds\right| \\
&\leqslant \|h\|_{L^1}\int_0^1 \frac{\left[t_2^{\alpha-1} - t_1^{\alpha-1}\right](1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}ds \\
&\qquad + \|h\|_{L^1}\int_0^{t_1} \frac{(t_2-s)^{\alpha-1} - (t_1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}ds + \|h\|_{L^1}\int_{t_1}^{t_2} \frac{(t_2-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}ds \\
&\leqslant \frac{\|h\|_{L^1}}{\Gamma(\alpha+1)}\left(t_2^{\alpha-1} - t_1^{\alpha-1} + t_2^{\alpha} - t_1^{\alpha}\right).
\end{aligned}$$

Afin d'estimer $t_2^{\alpha-1} - t_1^{\alpha-1}$ et $t_2^{\alpha} - t_1^{\alpha}$, nous divisons la preuve en trois cas.

Cas 1 : $0 \leqslant t_1 < \delta, t_2 < 2\delta$.

$$t_2^{\alpha-1} - t_1^{\alpha-1} \leqslant t_2^{\alpha-1} < (2\delta)^{\alpha-1} \leqslant 2^{\alpha-1}\delta \leqslant 2\delta, \quad t_2^{\alpha} - t_1^{\alpha} \leqslant t_2^{\alpha} < (2\delta)^{\alpha} \leqslant 2^{\alpha}\delta \leqslant 4\delta.$$

Case 2 : $0 < t_1 < t_2 \leqslant \delta$.

$$t_2^{\alpha-1} - t_1^{\alpha-1} \leqslant t_2^{\alpha-1} < \delta^{\alpha-1} \leqslant (\alpha-1)\delta < 2\delta, \quad t_2^{\alpha} - t_1^{\alpha} \leqslant t_2^{\alpha} < \delta^{\alpha} \leqslant \alpha\delta < 4\delta.$$

Case 3 : $\delta \leqslant t_1 < t_2 \leqslant 1$.

$$t_2^{\alpha-1} - t_1^{\alpha-1} \leqslant (\alpha-1)\delta < 2\delta, \quad t_2^{\alpha} - t_1^{\alpha} \leqslant \alpha\delta < 4\delta.$$

Ainsi, on obtient

$$|Bx(t_2) - Bx(t_1)| < \epsilon$$

pour tout $t_1, t_2 \in J$ et pour tout $x \in S$.

Cela montre que $B(S)$ est un ensemble équicontinu dans X. Or l'ensemble $B(S)$ est uniformément borné et équicontinu dans X, il est donc compact par le théorème d'Arzela-Ascoli.

Par conséquent, B est un opérateur continu complet sur S.

Étape 3, nous montrons que l'hypothèse (c) du théorème 1.7 est satisfaite.

Soient $x \in X$ et $y \in S$ arbitraires tels que $x = AxBy$. Alors, par hypothèse (H_1), on a

$$\begin{aligned}
|x(t)| = |Ax(t)||By(t)| &= |f(t,x(t))| \left| \int_0^1 G(t,s)g(s,y(s))ds \right| \\
&\leqslant \Big[|f(t,x(t)) - f(t,0)| + |f(t,0)| \Big] \left(\int_0^1 G(s,s)g(s,y(s))ds \right) \\
&\leqslant \Big[L|x(t)| + F_0 \Big] T\|h\|_{L^1}
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$|x(t)| \leqslant \frac{F_0 T\|h\|_{L^1}}{1 - LT\|h\|_{L^1}}.$$

Prenant le supremum sur t,

$$\|x\| \leqslant \frac{F_0 T\|h\|_{L^1}}{1 - LT\|h\|_{L^1}} = N.$$

Ceci montre que l'hypothèse (c) du théorème 1.7 est satisfaite.

Enfin, nous avons

$$M = \|B(S)\| = \sup\{\|Bx\| : x \in S\} \leqslant T\|h\|_{L^1}$$

et donc,

$$\alpha M \leqslant LT\|h\|_{L^1} < 1.$$

Ainsi, toutes les conditions du théorème 1.7 sont satisfaites et donc l'équation d'opérateur $AxBx = x$ admet une solution dans S.

Par conséquent, le problème aux limites 3.6 a une solution définie sur J. Ceci achève la preuve. ■

3.2.2 Exemple

Dans cette section, nous présenterons deux exemples pour illustrer les principaux résultats.

Exemple 1. Considérons le problème de la valeur limite

$$D_{0^+}^{\frac{3}{2}} x(t) + \sin x = 0, \quad 0 < t < 1 \tag{3.16}$$

$$x(0) = x(1) = 0 \tag{3.17}$$

où $\alpha = \frac{3}{2}$.

Soit $f(t,x) \equiv 1, g(t,x) = \sin x, h(t) \equiv 1$. Alors les hypothèses (H_1) et (H_2) sont vérifiées. Depuis

$$T = \int_0^1 G(s,s)ds = \int_0^1 \frac{[s(1-s)]^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} ds = \int_0^1 \frac{[s(1-s)]^{\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} ds = \frac{\sqrt{\pi}}{4},$$

en choisissant $L = 1$, alors
$$LT\|h\|_{L^1} = \sqrt{\pi}/4 < 1.$$
Par conséquent, le problème aux limites (3.16) et (3.17) a une solution.

Exemple 2. Considérons le problème de la valeur limite

$$D_{0^+}^{\frac{3}{2}}\left[\frac{x(t)}{\sin x + 2}\right] + \cos x = 0, \quad 0 < t < 1, \tag{3.18}$$

$$x(0) = x(1) = 0, \tag{3.19}$$

où $\alpha = \frac{3}{2}$.

Soit $f(t,x) = \sin x + 2$, $g(t,x) = \cos x$, $h(t) \equiv 1$. Alors les hypothèses (H_1) et (H_2) sont vérifiées.
Puisque $T = \sqrt{\pi}/4$, en choisissant $L = 1$, alors

$$LT\|h\|_{L^1} = \sqrt{\pi}/4 < 1.$$

Par conséquent, le problème aux limites (3.18) et (3.19) a une solution.

3.3 troisième type de problème

Soit $\mathbb{R}$ une droite réelle et $J = [t_0, t_0 + a]$ un intervalle borné dans $\mathbb{R}$ pour un certain $t_0, a \in \mathbb{R}$ avec $a > 0$. Soit $C(J \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ désignent la classe des fonctions continues $f : J \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

On considère des équations différentielles hybrides fractionnaires (en abrégé EDHF) impliquant des opérateurs différentiels de Riemann-Liouville d'ordre $0 < \alpha < 1$,

$$\begin{cases} {}^{RL}D^{\alpha}\left[x(t) - f(t, x(t))\right] &= g(t, x(t)) \qquad p.p \;\; t \in J \\ x(t_0) &= x_0 \end{cases} \tag{3.20}$$

où $f \in C(J \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $g \in C(J \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Définition 3.2

Par solution de EDHF (3.20), on entend une fonction $x \in C(J, \mathbb{R})$ telle que

(a) *la fonction $t \mapsto (x/f(t, x))$ est continue pour chaque $x \in \mathbb{R}$ et*

(b) *x satisfait l'équation (3.20).*

3.3.1 Résultant d'existence

On place EDHF (3.20) dans l'algèbre de Banach $C(J, \mathbb{R})$ et on considère les hypothèses suivantes dans ce qui suit.

(A_0) La fonction $x \longmapsto x - f(t, x)$ est croissante dans $\mathbb{R}$ pour tout $t \in J$.

(A_1) Il existe des constantes $M \geqslant L > 0$ telles que

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leqslant \frac{L|x - y|}{M + |x - y|}$$

pour tout $t \in J$ et $x, y \in \mathbb{R}$.

(A_2) Il existe une fonction continue $h \in C(J, \mathbb{R})$ telle que

$$|g(t, x)| \leqslant h(t), \qquad t \in J,$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Nous avons le lemme suivant.

Lemme 3.4

Supposons que l'hypothèse (A_0) soit vérifiée. Alors, pour tout $h \in C(J, \mathbb{R})$ et $0 < \alpha < 1$, la fonction $x \in C(J, \mathbb{R})$ est une solution de la EDHF

$$ {}^{RL}D^{\alpha}\left[x(t) - f(t, x(t))\right] = h(t), \qquad p.p \; t \in J \tag{3.21}$$

et

$$x(t_0) = x_0 \tag{3.22}$$

si et seulement si x satisfait l'équation intégrale hybride(EIH)

$$x(t) = x_0 - f(t_0, x_0) + f(t, x(t)) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^{t} (t-s)^{\alpha-1} h(s) ds, \quad t \in J. \tag{3.23}$$

Démonstration : .

Soit x une solution du problème de Cauchy (3.21) et (3.22). Comme l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville I^α est un opérateur monotone, on applique donc l'intégrale fractionnaire I^α de part et d'autre de (3.21). D'après le lemme 1.1, on a

$$I^\alpha D^\alpha [x(t) - f(t, x(t))] = x(t) - f(t, x(t)) - \frac{I^{1-\alpha}[x(t) - f(t, x(t))]\big|_{t=t_0}}{\Gamma(\alpha)} (t-t_0)^{\alpha-1} = I^\alpha h(t)$$

puis par (3.22), on obtient

$$x(t) - f(t, x(t)) = I^\alpha h(t) + \frac{I^{1-\alpha}[x(t) - f(t, x(t))]\big|_{t=t_0}}{\Gamma(\alpha)} (t-t_0)^{\alpha-1} = x_0 - f(t_0, x_0) + I^\alpha h(t),$$

c-à-d.,

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 - f(t_0, x_0) + f(t, x(t)) + I^\alpha h(t) \\ &= x_0 - f(t_0, x_0) + f(t, x(t)) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^{t} (t-s)^{\alpha-1} h(s) ds, \quad t \in J. \end{aligned}$$

Ainsi, (3.23) vérifiée.

Inversement, supposons que x satisfait EIH (3.23). Alors l'application de D^α de part et d'autre de (3.23), (3.21) est satisfaite. Encore une fois, remplacer $t = t_0$ dans (3.23) donne

$$x(t_0) - f(t_0, x(t_0)) = x_0 - f(t_0, x_0).$$

l'application $x \mapsto x - f(t, x)$ est croissante en $\mathbb{R}$ pour tout $t \in J$, l'application $x \mapsto x - f(t_0, x)$ est injective en $\mathbb{R}$, donc $x(t_0) = x_0$.

La preuve est terminée. ■

Maintenant, nous sommes en mesure de prouver le théorème d'existence suivant pour EDHF (3.20).

Théorème 3.3

Supposons que les hypothèses (A_0) (A_2) vérifiée. Alors EDHF (3.20) admit une solution définie sur J.

Démonstration : .

Soit $X = C(J, \mathbb{R})$ et définissons un sous-ensemble S de X défini par

$$S = \{x \in X \mid \|x\| \leq N\}, \tag{3.24}$$

Où $N = \left|x_0 - f(t_0, x_0)\right| + L + F_0 + \frac{a^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \|h\|_{L^1}$ and $F_0 = \sup_{t \in J} |f(t, 0)|$.

Clairement, S est un sous-ensemble fermé, convexe et borné de l'algèbre de Banach X.

Maintenant, en utilisant les hypothèses $(A_0)-(A_2)$, cela peut être montré par une application du lemme 3.4, EDHF (3.20) est équivalent au EIH non linéaire

$$x(t) = x_0 - f(t_0, x_0) + f(t, x(t)) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^{t} (t-s)^{\alpha-1} g(s, x(s)) ds, \quad t \in J. \tag{3.25}$$

Définissez deux opérateurs $A : X \to X$ et $B : S \to X$ par

$$Ax(t) = f(t, x(t)), \quad t \in J, \tag{3.26}$$

et

$$Bx(t) = x_0 - f(t_0, x_0) + \frac{1}{\Gamma(q)} \int_{t_0}^{t} (t-s)^{q-1} g(s, x(s)) ds, \quad t \in J \tag{3.27}$$

Ensuite, EIH (3.25) est transformé en l'équation de l'opérateur comme

$$Ax(t) + Bx(t) = x(t), \quad t \in J \tag{3.28}$$

Nous allons montrer que les opérateurs A et B vérifient toutes les conditions du théorème 1.8.

Nous divisons la preuve en une séquence d'étapes.

Etape 1 : on montre que A est un opérateur de Lipschitz sur X, avec la constante de Lipschitz L.

Soit $x, y \in X$. Alors par hypothèse (A_1),

$$|Ax(t) - Ay(t)| = |f(t, x(t)) - f(t, y(t))| \leq \frac{L|x(t) - y(t)|}{M + |x(t) - y(t)|} \leq \frac{L\|x - y\|}{M + \|x - y\|}$$

pour tout $t \in J$. En prenant le supremum sur t, on obtient

$$\|Ax - Ay\| \leq \frac{L\|x - y\|}{M + \|x - y\|}$$

pour tout $x, y \in X$. Cela montre que A est une contraction non linéaire sur X avec une fonction de contrôle φ définie par $\varphi = \frac{Lr}{M+r}$.

Etape 2 : Nous montrons que B est un opérateur compact et continu sur S dans X.

Premièrement, nous montrons que B est continue sur S.

Soit $\{x_n\}$ une suite dans S convergeant vers un point $x \in S$. Ensuite, par le théorème de convergence dominée de Lebesgue,

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} Bx_n(t) &= x_0 - f(t_0, x_0) + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^{t} (t-s)^{\alpha-1} g(s, x_n(s))\, ds \\
&= x_0 - f(t_0, x_0) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^{t} (t-s)^{\alpha-1} \lim_{n\to\infty} g(s, x_n(s))\, ds \\
&= x_0 - f(t_0, x_0) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^{t} (t-s)^{\alpha-1} g(s, x(s)) ds \\
&= Bx(t)
\end{aligned}$$

pour tout $t \in J$. Cela montre que B est un opérateur continu sur S.

Deuxiemement, Montrons que B est un opérateur compact sur S.

Il suffit de montrer que $B(S)$ est un ensemble uniformément borné et équicontinu dans X.

D'une part, soit $x \in S$ arbitraire. Alors par hypothèse (A_2),

$$\begin{aligned}
|Bx(t)| &= \left|x_0 - f(t_0, x_0)\right| + \left|\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^{t} (t-s)^{\alpha-1} g(s, x(s)) ds\right| \\
&\le \left|x_0 - f(t_0, x_0)\right| + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^{t} (t-s)^{\alpha-1} |g(s, x(s))| ds \\
&\le \left|x_0 - f(t_0, x_0)\right| + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^{t} (t-s)^{\alpha-1} h(s) ds \\
&\le \left|x_0 - f(t_0, x_0)\right| + \frac{a^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \|h\|_{L^1}
\end{aligned}$$

pour tout $t \in J$. Prenant le supremum sur t,

$$\|Bx\| \le \left|x_0 - f(t_0, x_0)\right| + \frac{a^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \|h\|_{L^1}$$

pour tout $x \in S$. Cela montre que B est uniformément borné sur S.

D'autre part, soient $t_1, t_2 \in J$ avec $t_1 < t_2$. Alors, pour tout $x \in S$, on a

$$\begin{aligned}
|Bx(t_1) - Bx(t_2)| &= \left|\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^{t_1} (t_1-s)^{\alpha-1} g(s, x(s)) ds - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^{t_2} (t_2-s)^{\alpha-1} g(s, x(s)) ds\right| \\
&\le \left|\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^{t_1} (t_1-s)^{\alpha-1} g(s, x(s)) ds - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^{t_1} (t_2-s)^{\alpha-1} g(s, x(s)) ds\right| \\
&\quad + \left|\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^{t_1} (t_2-s)^{\alpha-1} g(s, x(s)) ds - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^{t_2} (t_2-s)^{\alpha-1} g(s, x(s)) ds\right| \\
&\le \frac{\|h\|_{L^1}}{\Gamma(\alpha+1)} \left[\left|(t_2-t_0)^\alpha - (t_1-t_0)^\alpha - (t_2-t_1)^\alpha\right| + (t_2-t_1)^\alpha\right].
\end{aligned}$$

Ainsi, pour $\varepsilon > 0$, il existe un $\delta > 0$ tel que

$$|t_1 - t_2| < \delta \quad \Rightarrow \quad |Bx(t_1) - Bx(t_2)| < \varepsilon,$$

pour tout $t_1, t_2 \in J$ et pour tout $x \in S$. Cela montre que $B(S)$ est un ensemble équicontinu dans X.

Comme, l'ensemble $B(S)$ est un ensemble uniformément borné et équicontinu dans X, il est donc compact par le théorème d'Arzela-Ascoli.

Par conséquent, B est un opérateur continu complet sur S.

Etape 2 :, nous montrons que l'hypothèse (c) du théorème 1.8 est satisfaite.

Soit $x \in S$. Alors, par hypothèse (A_1), on a

$$\begin{aligned}
|Ax(t)+Bx(t)| \leq & |Ax(t)|+|Bx(t)| \\
\leq & \left|x_0 - f(t_0,x_0)\right| + |f(t,x(t))| + \left|\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{t_0}^{t}(t-s)^{\alpha-1}g(s,y(s))ds\right| \\
\leq & \left|x_0 - f(t_0,x_0)\right| + [|f(t,x(t)) - f(t,0)| + |f(t,0)|] \\
& + \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{t_0}^{t}(t-s)^{\alpha-1}|g(s,x(s))|ds\right) \\
\leq & \left|x_0 - f(t_0,x_0)\right| + L + F_0 + \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{t_0}^{t}(t-s)^{\alpha-1}h(s)ds\right) \\
\leq & \left|x_0 - f(t_0,x_0)\right| + L + F_0 + \frac{T^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\|h\|_{L^1}
\end{aligned}$$

Prenant supremum sur t,

$$\|x\| \leq \left|x_0 - f(t_0,x_0)\right| + L + F_0 + \frac{T^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\|h\|_{L^1} = N$$

Ainsi, toutes les conditions du théorème 1.8 sont satisfaites et donc l'équation d'opérateur $Ax+Bx=x$ admet une solution dans S.

Par conséquent, EDHF (3.20) a une solution définie sur J. Ceci achève la preuve. ■

Bibliographie

[1] B.C.Dhage,S.N Salunkhe, Ravi P. Agrwal and W.Zhang-A Functional differntial equation in Bannach algebras, *Math.Inequal. and Appl*, N0 1 (2005) 89-99.

[2] B.C.Dhage-Fixed point théorèmes in ordered Banach Algebras and applications, *Panamer. Math*, J.94 :(1999), n 93-102.

[3] B.C.Dhage- Existence theory for functional initial value problems of ordinary differential equations, *EJQTDE*, (2004), N0 15.

[4] F.E Browder- Nonlinear operators and nonlinear equations of evolution in Banach spaces, *Porc.Symp.Pure Math.Amer.Math.Soc.Providence,Rhde Island*, (1976).

[5] B.C.Dhage-Nonlinear functional boundary value problems in Banachalgebrasinvolving Carathéodories, *Kyungpook Math*, J.46 :(2006), N 00-00.

[6] B.C.Dhage, J.Henderson and S.K. Ntouyas-Periodic Boundary value problemes of first order ordinary differential equations in Banach Alegebras,(1991).

[7] B.C.Dhage-On some variants of schauders fixed point principale and applications to non linear integral equations,*J.Math.Phys.*25(1988), n 603-611.

[8] B.C.Dhage-On some nonlinear alternatives of Leary-Schauder type and functional integral equations, *Archivum Mathematicum (Brno)*, Tomus 42 (2006),11-23.

[9] B.C.Dhage-Some non linear alternatives in Banach algebras with applications, nonlinear studies (accepted).

[10] Christain Leruste-Calcul différentiel. *Masson*.

[11] Laurent Schwartz-topologie générale et analyse fonctionnelle. *Hermann édition des sciences et des arts*.

[12] Yige Zhao, Shurong Sun, Zhenlai Han, Qiuping Li, Theory of fractional hybrid differential equations. Computers and Mathematics with Applications 62 (2011).

[13] Mohamed A. E. Herzallah, Dumitru Baleanu , On Fractional Order Hybrid Differential Equations. Hindawi Publishing Corporation, Abstract and Applied Analysis, Volume 2014, Article ID 389386, 7 pages.

[14] Bai Z, Lü H. Positive solutions for boundary value problem of nonlinear fractional differential equation. J Math Anal Appl 2005 ;311 :495 - 505.

[15] LU, Hongling, SUN, Shurong, YANG, Dianwu, et al. Theory of fractional hybrid differential equations with linear perturbations of second type. Boundary Value Problems, 2013, vol. 2013, no 1, p. 1-16.

[16] Dhage BC. On a fixed point theorem in Banach algebras with applications. Appl Math Lett 2005 ;18 :273,80.