REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE & POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR & DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Université Ibn Khaldoun- Tiaret
FACULTÉ DES MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUE
DÉPARTEMENT DES MATHEMATIQUES

MEMOIRE MASTER

Présenté par :

Makaci Yahia

Fatmia Ahmed

Spécialité : *Mathématiques*

Option : *Analyse fonctionnelle et applications*

Intitulé

Etude de l'existence de solutions pour une classe de problèmes aux limites en résonance d'ordre variable.

Soutenue le : 21/ 06 / 2022

Devant le jury composé de :

Président :	Mr. MAHROUZ Tayeb	MCB. Univ. Ibn Khaldoun Tiaret
Examinateur:	Mr. MAZOUZ Kadda	MCA. Univ. Ibn Khaldoun Tiaret
Encadreur :	**Mme**. BOUAZZA Zoubida	MAA. Univ. Ibn Khaldoun Tiaret

2021-2022

Dédicace

★ *Grace ALLAH. Je dédie ce modeste travail à mes trés chère au monde mes parents qui m'ont toujours soutenu, et ont été toujours présent pour moi et toujours m'encouragé durant mes études.*

★ *A mes chers frères et mes sœurs.*

★ *A toutes la famille Makaci.*

★ *A mes chers amis : Fatmia, Abd Al wahid, ilyes, Zakaria, tayeb,Mohamed , salmi, Laarbi, Nabil, Youcef, Brahmmi, Bouhenni.*

★ *A tout la promotion de l'analyse fonctionniele et application.*

★ *A tous ceux qui m'ont aidé lors de la réalisation de ce travail.*

★ *Merci à tous.*

*——————— *Makaci yahia* ———————*

★ *Je rend grâce à ALLAH m'avoir donner le courage et la volonté pour terminer mes études .*

★ *A mes trés chèrs parents : mon père **Saad** et ma mère **Fathma** .*

★ *A mes soeurs et frères pour leur soutien moral, et leur encouragement.*

★ *A toutes mes amies qui m'encouragent à tout moment et pour leur soutien tout au long de ma carrière universitaire : **Hadjer, Fatima, Sihem, Khaldia, Imane, Aya.***

★ *Je vous dis merci.*

*——————— *Fatmia ahmed* ———————*

Remerciements

En premier lieu, nous remercions ALLAH le tout Puissant pour la volonté et la santé qu'il nous a donné tout au long des années de nos études pour terminer ce mémoire.

Nous voudrions présenter nos sincères remerciements à notre encadreur **Mme. Bouazza Zoubida**, pour ses judicieux conseils, qui ont contribué à alimenter notre réflexion, et surtout pour sa disponibilité et sa gentillesse.

Nous exprimons notre gratitude et nos remerciements aux membres du jury **M. Maazouz Kadda** et **M. Mahrouz Tayeb**, qui nous ont honoré en acceptant d'évaluer ce travail.

Nous adressons nos sincères remerciements à tous les professeurs, intervenants et toutes les personnes qui par leurs paroles, leurs écrits, leurs conseils et leurs critiques ont guidé nos réflexions et ont accepté de nous rencontrer et de répondre à nos questions au cours de nos recherches. Et nous voudrions également exprimer notre gratitude à tous les chercheurs et spécialistes, trop nombreux pour les citer, qui ont pris le temps de discuter de notre sujet. Chacun de ces échanges nous a aidé à faire avancer .

Nous souhaitons remercier nos familles. Elles ont toujours cru en nous. Elles nous ont toujours soutenu au fil des années. Ce soutien sans faille est l'élément le plus précieux à nous yeux.

Enfin, nous tenons à exprimer notre reconnaissance envers les amis et collègues qui nous ont apporté leur soutien moral et intellectuel tout au long de nos démarche. A tous ces intervenants, nous présentons nos remerciements, notre respect et nos gratitude.

Table des matières

INTRODUCTION

Le calcul fractionnaire d'ordre variable est une généralisation d'ordre constant. Alors que plusieurs travaux de recherche ont été menées sur l'étude de l'existence de solutions aux problèmes fractionnaires d'ordre constant, l'existence de solutions aux problèmes d'ordre variable est rarement discutée dans la littérature.

L'objectif de ce mémoire est de présenter des résultats d'existence des solutions pour une classe de problème aux limites en résonance pour des équations différentielles non linéaires à dérivée fractionnaire d'ordre variable au sens de Caputo.

La technique utilisée consiste à transférer l'étude de notre problème aux limites des équations différentielles fractionnaires d'ordre variable à un problème équivalent d'ordre fractionnaire constant en utilisant des intervalles généralisés et la fonction constante par morceaux.

Les résultats de cet étude sont basés sur le théorème de continuation de Mawhin.

En 1972, Mawhin a développé une méthode pour résoudre cette équation dans son célèbre article (Problèmes de degrés topologiques et aux limites pour les équations différentielles non linéaires [12]), il a supposé que L est un opérateur de Fredholm d'indice zéro. Par conséquent, il a développé une nouvelle théorie du degré topologique connue sous le nom de degré de coincidence pour (L, N) ; qui est également connue sous le nom de théorie de degré de coincidence de Mahwin.

Le mémoire se compose de 3 chapitres.

Le premier chapitre introduit les notations, les définitions et les préliminaires qui sont utilisés dans les autres chapitres de cette thèse.

Dans **le deuxième chapitre** nous donnons un rappel sur la théorie de degré de coincidence de Mawhin.

Dans **le troisième chapitre** nous présentons une application pour illustrant l'existence des solutions pour une classe de problèmes aux limites résonnant pour les équations différentielles non linéaire à dérivée fractionnaire au sens de Caputo suivant :

$$\begin{cases} {}^cD_{a^+}^{u(t)}y(t) = f(t, y(t)),\ t \in J, \\ \\ y(a) = y(T), \end{cases} \tag{1}$$

où $J = [a, T]$, $0 \leq a < T < \infty$, $0 < u(t) < 1$, $f : J \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue et ${}^cD_{a^+}^{u(t)}$ la dérivée fractionnaire au sens de Caputo d'ordre variable $u(t)$. Enfin on termine ce mémoire par une conclusion du travail effectuée.

Mots clés : Problème aux limites, La dérivée fractionnaire au sens de caputo, Espace de Banach, Fonction constant par morceaux, La théoire de coincidence de Mawhin, Opérateur de Ferdhom, résonnance.

Chapitre 1

Preliminaires

1.1 Notations et Théorèmes

Dans ce chapitre nous présentons des notations, définitions et des théorèmes utilisés dans ce mémoire.

Soit $C(J := [0,T], \mathbb{R})$ l'espace de Banach des fonctions continues de J vers $\mathbb{R}$ muni de la norme :

$$\|y\| = \sup\{\|y(t)\| : t \in J\},$$

et $E_i = C(J_i := [T_{i-1}, T_i], \mathbb{R})$, $i = 1, \dots, n$, l'espace de Banach des fonctions continues de J_i vers $\mathbb{R}$ muni de la norme :

$$\|y\|_{E_i} = \sup\{\|y(t)\| : t \in J_i\}.$$

$L^1(J)$ désigne la classe des fonctions intégrable de Lebesgue sur l'intervalle J, muni de la norme :

$$\|u\|_{L_1} = \int_J |u(t)|dt.$$

Définition 1.1. *Soit E un espace de Banach et $H : E \to E$ un opérateur.*

1. *H est dit **continu** si pour toute suite $(x_n)_{n\in N}$ dans E tel que $(x_n)_{n\in N}$ converge vers x dans E, la suite $(Hx_n)_{n\in N}$ converge vers Hx.*

2. *H est dit* ***compact****, si pour tout borné B de E, $H(B)$ est relativement compact.*
3. *H est dit* ***complètement continu*** *si H est continue et si l'image de tout borné B de E est relativement compact.*

Définition 1.2. *Soit M un sous ensemble de $C(J, \mathbb{R})$.*

1. *M et dit* ***équicontinu*** *si et seulement si :*
   pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$, pour tout $t_1, t_2 \in J$ avec $t_1 < t_2$:
   $\|t_1 - t_2\| \leq \delta \Rightarrow \|f(t_1) - f(t_2)\| \leq \varepsilon,$ *pour tout $f \in M$.*
2. *M est dit* ***uniformément borné*** *si et seulement si :*
   il existe $c > 0 : \|f(t)\| \leq c$ pour tout $t \in J$ et pour tout $f \in M$.

Théorème 1.1. *([16])**(Ascoli Arzela)** Soit $C(J, X)$ l'espace des fonctions continues d'un intervalle compact J dans $\mathbb{R}$ de l'espace de Banach X, M un sous ensemble de $C(J, X)$ est relativement compact si :*

- *M est uniformément borné.*
- *M est équicontinu.*

Théorème 1.2. *([16])* ***(Convergence dominée de Lebesgue)***
Soit (f_n) une suite de fonctions de L^1. On suppose que

i) $f_n(x) \to f(x)$ *p.p sur Ω.*
ii) Il existe une fonction $g \in L^1$ telle que pour chaque n,
$|f_n(x)| \leq g(x)$ *p.p. sur Ω.*

Alors

$$f \in L^1(\Omega) \text{ et } \|f_n - f\|_{L^1} \to 0.$$

Définition 1.3. *Soit (X, d) un espace métrique. Une application $T : X \to X$ est dite Lipschitzienne s'il existe une constante k (appelée constante de Lipschitz) telle que :*

$$d(T(x), T(y)) \leq kd(x, y) \quad \text{pour tout } x, y \in X.$$

Une application Lipschitzienne avec une constante de Lipschitz $0 < k < 1$ *est appelée contraction.*

1.2 Calcul fractionnaire

1.2.1 Calcul fractionnaire d'ordre constant

Définition 1.4. *([8, 17]). L'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville à gauche de la fonction* $h \in L^1([a,b],\mathbb{R}_+)$ *d'ordre* $\alpha \in \mathbb{R}_+$ *est définie par*

$$I_a^\alpha h(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} h(s)ds,$$

où $\Gamma(.)$ *est la fonction Gamma.*

Définition 1.5. *([8, 17]). La dérivée fractionnaire de Caputo à gauche d'ordre* $\alpha > 0$ *de la fonction* $h \in L^1([a,b],\mathbb{R}_+)$, *est donnée par*

$$^cD_{a+}^\alpha h(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} h^{(n)}(s)ds,$$

où $n = [\alpha] + 1$.

Lemme 1.1. *([8]). Soit* $\alpha > 0$, $a \geq 0$, $h \in L^1(a,b)$, $^cD_{a+}^\alpha h \in L^1(a,b)$, *alors l'équation différentielle :*

$$^cD_{a+}^\alpha h = 0$$

admet une solution

$$h(t) = \omega_0 + \omega_1(t-a) + \omega_2(t-a)^2 + ... + \omega_\ell(t-a)^\ell + ... + \omega_{n-1}(t-a)^{n-1},$$

où $n = [\alpha] + 1$, $\omega_\ell \in \mathbb{R}$, $\ell = 0, 1, ..., n-1$.

Lemme 1.2. *([8]). Soit* $\alpha > 0$, $a \geq 0$, $h \in L^1(a,b)$, ${}^cD^{\alpha}_{a^+}h \in L^1(a,b)$, *Alors*

$$I^{\alpha}_{a^+}\, {}^cD^{\alpha}_{a^+}h(t) = h(t)+\omega_0+\omega_1(t-a)+\omega_2(t-a)^2+...+\omega_\ell(t-a)^\ell+...+\omega_{n-1}(t-a)^{n-1},$$

où $n = [\alpha] + 1$, $\omega_\ell \in \mathbb{R}$, $\ell = 0, 1, ..., n-1$.

Lemme 1.3. *([8]). Soit* $\alpha > 0$, $a \geq 0$, $h \in L^1(a,b)$, ${}^cD^{\alpha}_{a^+}h \in L^1(a,b)$, *alors*

$${}^cD^{\alpha}_{a^+}I^{\alpha}_{a^+}h(t) = h(t).$$

1.2.2 Calcul fractionnaire d'ordre variable

Définition 1.6. *([19, 20]). Soit* $-\infty < a < b < +\infty$ *et* $u(t) : [a,b] \to (0,+\infty)$. *Alors, l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville à gauche d'ordre variable* $u(t)$ *pour la fonction* $h(t)$ *est définie par*

$$I^{u(t)}_{a^+}h(t) = \int_a^t \frac{(t-s)^{u(s)-1}}{\Gamma(u(s))}h(s)ds, \quad t > a, \tag{1.1}$$

où la fonction Gamma est désignée par $\Gamma(.)$.

Définition 1.7. *([19, 20]). Soit* $-\infty < a < b < +\infty$ *et* $v(t) : [a,b] \to (n-1,n)$. *Alors , la dérivée fractionnaire de Caputo à gauche d'ordre variable* $v(t)$ *pour la fonction* $h(t)$ *est définie par*

$${}^cD^{v(t)}_{a^+}h(t) = \int_a^t \frac{(t-s)^{n-v(t)-1}}{\Gamma(n-v(t))}h^{(n)}(s)ds, \quad t > a. \tag{1.2}$$

Dans le cas où $v(t)$ est constant, alors la dérivée fractionnaire de Caputo d'ordre variable coincide avec la dérivée fractionnaire de Caputo standard, voir par exemple [8, 19, 20].

Remarque ([22]). Généralement, pour les deux fonctions $u(t)$ et $v(t)$, la propriété du semigroupe n'est pas vérifie, c'est-à-dire,

$$I_{a^+}^{u(t)} I_{a^+}^{v(t)} h(t) \neq I_{a^+}^{u(t)+v(t)} h(t).$$

Exemple : Soit

$$u(t) = \begin{cases} 2, & t \in [0,1], \\ 1, & t \in]1,3], \end{cases} \qquad v(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0,1], \\ 2, & t \in]1,3]. \end{cases}$$

Et $\quad h(t) = t, \quad t \in [0,3].$

$$\begin{aligned} I_{0^+}^{u(t)} I_{0^+}^{v(t)} h(t) &= \int_0^1 \frac{(t-s)^{u(s)-1}}{\Gamma(u(s))} \int_0^s \frac{(s-\tau)^{v(\tau)-1}}{\Gamma(v(\tau))} h(\tau) d\tau ds \\ &+ \int_1^t \frac{(t-s)^{u(s)-1}}{\Gamma(u(s))} \int_0^s \frac{(s-\tau)^{v(\tau)-1}}{\Gamma(v(\tau))} h(\tau) d\tau ds, \\ &= \int_0^1 \frac{(t-s)^1}{\Gamma(2)} \int_0^s \frac{(s-\tau)^0}{\Gamma(1)} \tau d\tau ds \\ &+ \int_1^t \frac{(t-s)^0}{\Gamma(1)} [\int_0^1 \frac{(s-\tau)^0}{\Gamma(1)} \tau d\tau + \int_1^s \frac{(s-\tau)^1}{\Gamma(2)} \tau d\tau] ds, \\ &= \int_0^1 \frac{(t-s)s^2}{2\Gamma(2)} ds + \int_1^t \frac{s^3}{6} - \frac{s}{2} + \frac{5}{6} ds, \end{aligned}$$

$$I_{0^+}^{u(t)+v(t)} h(t) = \int_0^t \frac{(t-s)^{u(s)+v(s)-1}}{\Gamma(u(s)+v(s))} h(s) ds,$$

on sait que,

$$\begin{aligned} I_{0^+}^{u(t)} I_{a^+}^{v(t)} h(t)|_{t=2} &= \int_0^1 \frac{(2-s)s^2}{2\Gamma(2)} ds + \int_1^2 \frac{s^3}{6} - \frac{s}{2} + \frac{5}{6} ds, \\ &= \frac{5}{24} + \frac{17}{24} = \frac{22}{24}, \end{aligned}$$

$$I_{0^+}^{u(t)+v(t)}h(t)|_{t=2} = \int_0^1 \frac{(2-s)^{2+1-1}}{\Gamma(2+1)} sds + \int_1^2 \frac{(2-s)^{1+2-1}}{\Gamma(1+2)} sds = \frac{11}{24} + \frac{5}{24} = \frac{16}{24}.$$

Par concéquent, on obtient

$$I_{0^+}^{u(t)} I_{0^+}^{v(t)} h(t)|_{t=2} \neq I_{0^+}^{u(t)+v(t)} h(t)|_{t=2}.$$

Lemme 1.4. *([25]). Soit $u : J := [0,T] \to (1,2]$ est une fonction continue, alors pour $h \in C_\delta(J,X) = \{h(t) \in C(J,X),\ t^\delta h(t) \in C(J,X)\},\ (0 \leq \delta \leq \min_{t \in J} |u(t)|)$, l'intégrale fractionnaire d'ordre variable $I_{0^+}^{u(t)} h(t)$ existe pour tout point de J.*

Lemme 1.5. *([25]). Soit $u : J := [0,T] \to (1,2]$ est une fonction continue, alors $I_{0^+}^{u(t)} h(t) \in C(J,X)$ pour $h \in C(J,X)$.*

1.2.3 Répartition

Définition 1.8. *([23]). Un intervalle généralisé est un sous-ensemble I de $\mathbb{R}$ qui soit un intervalle (c'est-à-dire un ensemble de la forme $[a,b], (a,b), [a,b)$ ou $(a,b]$), soit un point $\{a\}$, soit l'ensemble vide $\emptyset$.*

Définition 1.9. *([23]). Si I est un intervalle généralisé. Une partition de I est un ensemble fini $\mathcal{P}$ des intervalles généralisés contenus dans I, tels que pour tout x dans I se trouve exactement dans l'un des intervalles généralisés J dans $\mathcal{P}$.*

Exemple : L'ensemble $\mathcal{P} = \{\{1\}, (1,6), [6,7), \{7\}, (7,8]\}$ des intervalles généralisés est une partition de $[1,8]$.

Définition 1.10. *([23]). Soit I un intervalle généralisé, soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction, et $\mathcal{P}$ une partition de I. On dit que f est constante par morceaux par rapport à $\mathcal{P}$ si pour chaque $J \in \mathcal{P}$, f est constante sur J.*

Exemple : La fonction $f : [1,6] \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} 3, & 1 \leq x < 3 \\ 4, & x = 3 \\ 5, & 3 < x < 6 \\ 2, & x = 6 \end{cases}$$

est constante par morceaux par rapport à la partition $\{[1,3), \{3\}, (3,6), \{6\}\}$ de $[1,6]$.

Définition 1.11. *([23]). Soit I un intervalle généralisé. La fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est appelée constante par morceaux sur I, s'il existe une partition $\mathcal{P}$ de I telle que f est constante par morceaux par rapport à $\mathcal{P}$.*

1.3 Fonction de Green

1.3.1 La fonction de Green

Soit $p, q, f \in C([a,b])$ où $p \in C^1[a,b], a < b$ et $(\alpha_i, \beta_i) \in (\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ tels que pour tout $i = 1, 2$:
$|\alpha_1| + |\alpha_2|, |\beta_1| + |\beta_2| \neq 0$. On considère les équation différentielles ordinaires :
(**H**) $(py')' + qy = 0$,
(**NH**) $(py')' + qy = f$,
ainsi que les conditions aux bords associées :

$$(CB)_h \begin{cases} \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = 0, \\ \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0, \end{cases}$$

$$(CB)_{nh} \begin{cases} \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = \gamma, \\ \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = \delta. \end{cases}$$

Définition 1.12. *On appelle fonction de* ***Green*** *associée au problème homogène* $(H)-(CB)_h$ *une fonction* $G:[a,b]\times[a,b]\to\mathbb{R}$ *vérifiant les propriétés :*

(a) G *est continue sur* $[a,b]\times[a,b]$.

(b) G *est symétrique :* $G(t,s)=G(s,t), \forall(t,s)\in[a,b]^2$.

(c) $\frac{\partial G}{\partial t}(t,s)$ *est continue pour tout* $t\neq s$.

(d) La fonction partielle $t\to G(t,s)$ *est solution de l'équation (H) pour tout* $t\neq s$.

(e) La fonction partielle $t\to G(t,s)$ *vérifie les condition* $(CB)_h$ *pour tout* $s\in[a,b]$.

1.3.2 L'existence et l'unicité de la fonction de Green

Théorème 1.3. *([6]) Supposons que le problème homogène* $(H)-(CB)_h$ ***n'admet pas de solution non triviale****. Alors, il existe une (et une seule) fonction* G *ne dépendant pas de* f*, et dite fonction de Green telle que, pour toute fonction* f*, la solution* y *de problème non homogène* $(NH)-(CB)_h$ *s'écrit de manière unique sous la forme :*

$$y(t)=\int_a^b G(t,s)f(s)ds.$$

Chapitre 2

Introduction à la théorie de coincidence de Mawhin

2.1 Quelques notions d'algèbre linéaire

2.1.1 Somme d'espaces vectoriels

Définition 2.1. *Soient E un espace vectoriel, F et G sous-espace vectoriel de E.*

- *On appelle somme F et G le sous-espace vectoriel de E noté $E+F$ défini par la relation suivante :*

$$x \in F + G \Longleftrightarrow \exists x_1 \in F, \exists x_2 \in G \text{ tel que } x = x_1 + x_2.$$

- *Si de plus $F \cap G = \{0_E\}$, on dit que la somme est direct et on la note par $E \oplus G$.*
- *Si de plus $E = F \oplus G$, on dit que les sous-espaces vectoriel de F et G sont supplémentaire dans E, et dans ce cas*

$$\forall x \in E, \exists\,! x_1 \in F \text{ et } \exists\,! x_2 \in G \text{ tel que } x = x_1 + x_2.$$

Théorème 2.1. *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, F et G deux sous-espace vectoriel de E tels que $F \cap G = \{0_E\}$, alors :*

$$\dim_{\mathbb{K}}(F \oplus G) = \dim_{\mathbb{K}}(F) + \dim_{\mathbb{K}}(G)$$

Corollaire 2.1. *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, F et G deux sous-espace vectoriel de E supplémenttaire alors :*

$$\dim_{\mathbb{K}}(G) = \dim_{\mathbb{K}}(E) - \dim_{\mathbb{K}}(F).$$

Corollaire 2.2. *Soient F et G deux sous-espace vectoriel d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie alors :*

$$\dim_{\mathbb{K}}(F + G) = \dim_{\mathbb{K}}(F) + \dim_{\mathbb{K}}(G) - \dim_{\mathbb{K}}(F \cap G).$$

2.1.2 Rappels sur les applications linéaires

Définition 2.2. *[3] Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$. On dit que W, application de E dans F est **linéaire** si*

$$\begin{cases} \forall x, y \in E & W(x+y) = W(x) + W(y). \\ \forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in E & W(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot W(x). \end{cases}$$

- ∗ *Si W est une application linéaire de E dans E alors on dit que W est un **endomorphisme** de E.*
- ∗ *Si W est une application linéaire bijective de E dans F alors on dit que W est un **isomorphisme** de E.*
- ∗ *Si W est une application linéaire bijective de E dans E alors on dit que W est un **automorphisme** de E.*
- ∗ *Si W est une application linéaire de E dans $\mathbb{K}$ alors on dit que W est une **forme linéaire** de E dans $\mathbb{K}$.*

Exemple 2.1.1.
- *La dérivation et l'intégration sont des applications linéires (attention au choix des ensembles de départ et d'arrivée).*
- *En géométrie vectorielle de dimension 2 ou 3, les rotations, symétries, homothéties et projection sont des applications linéaires.*

Définition 2.3. *Soit W une application linéaire de E dans F, on définit les deux espaces vectoriels suivants :*

$\ker(W) = \{u \in E \ tq \ , W(u) = 0_F, \}$ $\ker(W)$, *s.e.v de E est appelé* ***Noyau*** *de W.*

$\mathrm{Img}(W) = \{W(u) \ tq \ , u \in E\}$ $\mathrm{Img}(W)$, *s.e.v de F est appelé* ***Image*** *de W.*

Propriété 2.1. *[3] Soit W une application linéaire de E dans F. On a les propriétés suivantes :*

$$\begin{aligned} W \text{ est injective} &\iff \ker(W) = \{0_E\}. \\ W \text{ est surjective} &\iff \mathrm{Img}(W) = F. \\ W \text{ est bijective} &\iff W \text{ est injective et surjective.} \end{aligned}$$

Théorème 2.2. *[3] Soient E et F deux espaces vectoriels de dimensions finies. Soit W une application linéaire de E dans F, alors :*

$$\dim \ker(W) + \dim \mathrm{Img}(W) = \dim E.$$

Corollaire 2.3. *Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie. Soit W une application linéaire de E dans F.*
Si $\dim E \neq \dim F$, alors W n'est pas bijective.
Si $\dim E = \dim F$, alors les conditions suivantes sont équivalentes :

(*i*) *W est bijective.*

(*ii*) *W est injective (c'est-à-dire $\ker(W) = \{0_F\}$).*

(*iii*) *W est surjective (c'est-à-dire $\mathrm{rg}(W) = \dim(F)$).*

Remarque 2.1. *Notons que l'on a toujours* $\mathrm{Img}(W) \subset F$ *et que* Img *est un sous-espace vectoriel de* F. *Donc si* F *est de dimension finie,*
$\dim(\mathrm{Img}(W)) = \dim(F) \Rightarrow \mathrm{Img}(W) = F$.

2.1.3 Projection

Définition 2.4. *Si* $E = F \oplus G$, *on rappelle que* $\forall x \in E, \exists x_1 \in F$ *et* $\exists x_2 \in G$ *tel que* $x = x_1 + x_2$.

- x_1 *s'appelle la projection de* x *sur* F *parallélement à* G *et se note* $p_{F//G}(x)$.
- x_2 *s'appelle la projection de* x *sur* G *parallélement à* F *et se note* $p_{G//F}(x)$.

Proposition 2.1. *Avec les notations précédentes l'application :*

$$\begin{array}{rcl} p = p_{F//G} : E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & x_1 = p_{F//G}(x) \end{array}$$

est linéaire vérifiant les propriétés suivantes :

1. $p^2 = p$.
2. $\mathrm{Img}\, p = F$, $\ker p = G$ *en particulier* $E = \mathrm{Img}\, p \oplus \ker p$.

Définition 2.5. *Soit* X *un espace vectoriel. On dit que l'opérateur linéaire* $P : X \to X$ *est une projection si pour tout* $x \in X$, *on a* $P(P(x)) = P^2x = P(x)$.

Proposition 2.2. *Soit* X *un espace vectoriel. Un opérateur linéaire* $P : X \to X$ *est une projection si et seulement si* $(I - P)$ *est une projection. De plus si l'espace* X *est normé, alors* P *est continu si et seulement si* $(I - P)$ *est continu.*

Proposition 2.3. *Si* P *est une projection dans* X, *alors* $\ker P = \mathrm{Img}(I - P)$ *et* $\mathrm{Img}(P) = \ker(I - P)$.

2.2 Quelques concepts sur La théorie de coincidence de Mawhin

2.2.1 Opérateur de Fredholm

Définition 2.6. *Soient X et Y deux espaces vectoriels normés, on dit que l'opérateur linéaire $L : D(L) \subset X \to Y$ est de Fredholm s'il vérifie les deux conditions suivantes :*

1. $\ker(L) = L^{-1}(0)$ *est de dimension finie.*
2. $\mathrm{Img}(L) = L(D(L))$ *est fermée et de codimension finie.*

Définition 2.7. *L'indice d'un opérateur de Fredholm L est l'entier :*

$$ind(L) = \dim(\ker(L)) - \mathrm{codim}(\mathrm{img(L)}).$$

Exemple 2.2.1. 1. *Si X et Y sont des dimensions finies, alors pour tout opérateur linéaire $L : X \to Y$ est de Fredholm avec*

$$ind(L) = \dim(X) - \dim(Y).$$

Si X et Y deux espaces de Banach et $L : X \to Y$ est une tronsformation linéaire bijective, alors L est opérateur de Fredholm d'indice 0, en effet

$$\dim(\ker(L)) = \mathrm{codim}(\mathrm{img}(L)) = 0.$$

2. *l'identité est un opérateur de Fredholm d'indice 0.*

Lemme 2.1. *Si L est un opérateur de Fredholm et u est une application linéaire compact ; donc $L + u$ est de Fredholm et :*

$$ind(L + u) = ind(L).$$

en particulier, tout identité compact pertubration est opérateur d'indice 0.

Proposition 2.4. *Si L est un opérateur de Fredholm, alors L est surjective si et seulement si L est injective.*

Définition 2.8. Soit X et Y des espaces normés. A un opérateur linéaire $L : \operatorname{dom} L \subset X \to Y$ est dit un opérateur de Fredholm d'indice zéro s'il vérifie les deux conditions suivantes :

(1) $\operatorname{img} L$ est un sous-ensemble fermé de Y ;

(2) $\dim \ker L = \operatorname{codim} \operatorname{img} L < +\infty$.

D'après la définition (2.8) qu'il existe deux projections continues $P : X \to X$ et $Q : Y \to Y$ tel que

$$\operatorname{img} P = \ker L, \quad \ker Q = \operatorname{img} L, \quad X = \ker L \oplus \ker P, \quad Y = \operatorname{img} L \oplus \operatorname{img} Q.$$

Cela implique que la restriction de L à $\operatorname{dom} L \cap \ker P$, que nous désignons par L_P, est un isomorphisme sur son image.

Définition 2.9. Soit L un opérateur de Fredholm d'indice zéro et soit $\Omega \subseteq X$ un ensemble borné avec $\operatorname{dom} L \cap \Omega \neq \emptyset$. L'opérateur $N : \overline{\Omega} \to Y$ est L-compact dans $\overline{\Omega}$ si :

(1) la composition $QN : \overline{\Omega} \to Y$ est continue et $QN(\overline{\Omega}) \subseteq Y$ est bornée.

(2) la composition $(L_P)^{-1}(I - Q)N : \overline{\Omega} \to X$ est completement continue.

Maintenant, nous introduisons le théorème de continuation de Mawhin comme suit :

Théorème 2.3. *.[16] **(Théorème de continuation de Mawhin).***
Soit X et Y deux espaces de Banach et soit $\Omega \subset X$ un ensemble symétrique ouvert borné avec $0 \in \Omega$. Soit $L : \operatorname{dom} L \subset X \to Y$ un opérateur de Fredholm d'indice zéro avec $\operatorname{dom} L \cap \overline{\Omega} \neq \emptyset$ et $N : X \to Y$ un L-opérateur compact sur $\overline{\Omega}$. Supposons que :

$$Lx - Nx \neq -\lambda(Lx + N(-x))$$

pour tout $x \in \operatorname{dom} L \cap \partial\Omega$ *et chaque* $\lambda \in (0,1]$*, où* $\partial\Omega$ *est le bord de* Ω *en ce qui concerne* X*. Alors l'équation* $Lx = Nx$ *admet au moins une solution sur* $\operatorname{dom} L \cap \overline{\Omega}$.

Chapitre 3

Application

3.1 Introduction

Le but de ce chapitre est de présenter une application pour illustant l'existence des solutions de problème aux limites pour les équations différentielles non linéaires à dérivée fractionnaire au sens de caputo d'ordre variable de la forme :

$$\begin{cases} {}^{c}D_{a^+}^{u(t)} y(t) = f(t, y(t)),\ t \in J, \\ y(a) = y(T), \end{cases} \tag{3.1}$$

où $J = [a, T]$, $0 \leq a < T < \infty$, $0 < u(t) < 1$, $f : J \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue et ${}^{c}D_{a^+}^{u(t)}$ est la dérivée fractionnaire au sens Caputo d'ordre variable $u(t)$.

L'analyse essentielle aux problème (3.1), basé sur la différence essentielle entre la dérivée fractionnaire d'ordre variable et la dérivée fractionnaire d'ordre constant et le théorème de continuation de Mawhin.

3.2 Existence de solutions

Supposons les hypothèses suivantes :

(H1) Soit $n \in \mathbb{N}$ et la suite finie de points $\{T_k\}_{k=0}^{n}$ telle que $a = T_0 < T_k < T_n = T$, $k = 1, ..., n-1$.
On note $J_k := (T_{k-1}, T_k]$, $k = 1, 2, ..., n$. Alors $\mathcal{P} = \bigcup_{k=1}^{n} J_k$ est une partition de l'intervalle J.
Soit $u(t) : J \to (0, 1]$ est une fonction constante par morceaux par rapport à $\mathcal{P}$ définie comme suit :

$$u(t) = \sum_{i=1}^{n} u_i I_i(t) = \begin{cases} u_1, si \quad t \in J_1, \\ u_2, si \quad t \in J_2, \\ \quad . \\ \quad . \\ \quad . \\ u_n, si \quad t \in J_n, \end{cases}$$

où $0 < u_i \leq 1$ sont des constantes et I_i est un indicateur de l'intervalle $J_i, i = 1, 2, ..., n$:

$$I_i(t) = \begin{cases} 1, pour \quad t \in J_1, \\ 0, sinon. \end{cases}$$

(H2) Soit $t^{\delta} f : J_i \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue $(0 \leq \delta < 1)$, il existe un constant K avec $0 < K < \min\left\{1, \frac{T_{i-1}^{\delta}\Gamma(u_i+1)}{(T_i - T_{i-1})^{u_i}}\right\}$, tel que
$t^{\delta}|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq K|y_1 - y_2|$, pour tout $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ et $t \in J_i$.

La dérivée fractionnaire de Caputo à gauche d'ordre variable $u(t)$ pour $y(t) \in C(J, \mathbb{R})$, peut être formuler comme une somme des dérivées fractionnaires de Caputo à gauche d'ordres constants $u_k \in \mathbb{R}$ qui prend la forme

$$^{c}D_{a^+}^{u(t)} y(t) = \sum_{k=1}^{i-1} \int_{T_{k-1}}^{T_k} \frac{(t-s)^{-u_k}}{\Gamma(1-u_k)} y'(s) ds + \int_{T_{i-1}}^{t} \frac{(t-s)^{-u_i}}{\Gamma(1-u_i)} y'(s) ds. \quad (3.2)$$

Ainsi, l'équation différentielle fractionnelle de Caputo d'ordre variable(3.1) peut être reformuler pour chaque $t \in J_i, i = 1, 2, ..., n$ dans la forme suivante

$$\sum_{k=1}^{i-1} \int_{T_{k-1}}^{T_k} \frac{(t-s)^{-u_k}}{\Gamma(1-u_k)} y'(s)ds + \int_{T_{i-1}}^{t} \frac{(t-s)^{-u_i}}{\Gamma(1-u_i)} y'(s)ds = f(t, y(t)). \quad (3.3)$$

Soit la fonction $\tilde{y} \in E_i$ telle que $\tilde{y}(t) \equiv 0$ sur $t \in [a, T_{i-1}]$ et qu'elle satisfasse l'équation différentielle fractionnaire suivante

$$^cD^{u_i}_{T^+_{i-1}} \tilde{y}(t) = f(t, \tilde{y}(t)), \quad t \in J_i.$$

Conformément à l'équation ci-dessus, pour chaque $i = 1, 2, ..., n$, nous avons le problème aux limites suivant

$$\begin{cases} ^cD^{u_i}_{T^+_{i-1}} y(t) = f(t, y(t)), & t \in J_i, \\ y(T_{i-1}) = y(T_i). \end{cases} \quad (3.4)$$

Un problème de résonance est un problème aux limites dans lequel le BVP homogène correspondant admet une solution non triviale.

Par conséquent, nous considérons la version homogène du problème d'ordre constant équivalent par

$$\begin{cases} ^cD^{u_i}_{T^+_{i-1}} y(t) = 0, & t \in J_i, \\ y(T_{i-1}) = y(T_i). \end{cases} \quad (3.5)$$

Le problème homogène d'ordre constant (3.5) admet une solution non triviale $y(t) = c$ qui convertit le problème d'ordre constant équivalent (3.4) en un problème fractionnaire aux limites de résonance.

Soit $X = \{y \in E_i : y(t) = I^{u_i}_{T^+_{i-1}} v(t) : v \in E_i, t \in J_i\}$ avec la norme :

$$\|y\|_X = \|y\|_{E_i}.$$

Définissons l'opérateur linéaire $L : Dom(L) \subseteq X \to E_i$ et $N : X \to E_i$ par :

$$L[y(t)] := {}^cD^{u_i}_{T^+_{i-1}} y(t), \tag{3.6}$$

et

$$N[y(t)] := f(t, y(t)), \quad t \in J_i, \tag{3.7}$$

où

$$Dom(L) = \{y \in X : {}^cD^{u_i}_{T^+_{i-1}} y \in E_i \quad \text{and} \quad y(T_{i-1}) = y(T_i)\}.$$

Alors problème (3.4) peut être réécrit de manière équivalente $Ly = Ny$.

Théorème 3.1. *Si la condition* (H2) *est vérifiée, alors la résonance équivalente d'ordre constant problème (3.4) possède au moins une solution.*

Preuve

La preuve sera suivie d'une séquence d'étapes.

L'étape 1 : On montre que

$$ker(L) = \{c : c \in \mathbb{R}\},$$

et

$$img(L) = \Big\{y \in E_i : \int_{T_{i-1}}^{T_i} (T_i - s)^{u_i - 1} y(s) ds = 0\Big\}.$$

Soit L défini par (3.6) tel que pour $t \in J_i$ et par le lemme 1.1, l'équation $L[y(t)] = {}^cD^{u_i}_{T^+_{i-1}} y(t) = 0$ ademt une solution $y(t) = c, \ c \in \mathbb{R}$. Alors,

$$ker(L) = \{y(t) = c : c \in \mathbb{R}\}.$$

Pour $v \in img(L)$, il existe $y \in Dom(L)$ tel que $v = Ly \in E_i$. D'après le lemme 1.2, pour tout $t \in J_i$, on a :

$$y(t) = y(T_{i-1}) + \frac{1}{\Gamma(u_i)} \int_{T_{i-1}}^{t} (t-s)^{u_i-1} v(s) ds.$$

Puisque $y \in Dom(L)$, v satisfaits

$$\frac{1}{\Gamma(u_i)} \int_{T_{i-1}}^{T_i} (T_i - s)^{u_i-1} v(s) ds = 0.$$

D'autre part, on suppose $v \in E_i$ satisfait

$$\int_{T_{i-1}}^{T_i} (T_i - s)^{u_i-1} v(s) ds = 0.$$

Soit $y(t) = I^{u_i}_{T^+_{i-1}} v(t)$, alors $v(t) = {}^c D^{u_i}_{T^+_{i-1}} y(t)$ et donc $y \in Dom(L)$. Par conséquent, $v \in img(L)$, donc

$$img(L) = \Big\{ y \in E_i : \int_{T_{i-1}}^{T_i} (T_i - s)^{u_i-1} y(s) ds = 0 \Big\}.$$

L'étape 2 : Soit L défini par (3.6). alors L est un opérateur de Fredholm d'indice zéro, et les opérateurs de projecteurs linéaires continus $P : X \to X$ et $Q : E_i \to E_i$ peut être défini comme

$$Py = y(T_{i-1}), \quad Qv = \frac{u_i}{(T_i - T_{i-1})^{u_i}} \int_{T_{i-1}}^{T_i} (T_i - s)^{u_i-1} v(s) ds.$$

Clairement, $\operatorname{img} P = \ker L$ et $P^2 = P$. Il s'ensuit que pour chaque $y \in X$, $y = (y - Py) + Py$, C'est $X = \ker P + \ker L$.
Un simple calcul montre que $\ker P \cap \ker L = 0$.
Par conséquent, $X = \ker P \oplus \ker L$. Un argument similaire montre que pour chaque $v \in E_i$, $Q^2 v = Qv$ et $v = (v - Q(v)) + Q(v)$, où $(v - Q(v)) \in \ker Q = \operatorname{img} L$.
Par suit de $\operatorname{img} L = \ker Q$ et $Q^2 = Q$ que $\operatorname{img} Q \cap \operatorname{img} L = 0$, alors, on a $E_i =$

$\operatorname{img} L \oplus \operatorname{img} Q$. Ainsi ,

$$\dim \ker L = \dim \operatorname{img} Q = \operatorname{codim} \operatorname{img} L.$$

Cela signifie que L est un opérateur Fredholm d'indice zéro.

L'étape 3 : On prouve que L_P^{-1} est l'inverse de $L|_{\operatorname{dom} L \cap \ker P}$, soit $v \in \operatorname{img} L$. alors

$$LL_P^{-1}(v) = {}^cD^\alpha(I^\alpha v) = v. \tag{3.8}$$

De plus, pour $y \in \operatorname{dom} L \cap \ker P$, on obtient que

$$L_P^{-1}(L(y(t))) = I^{u_i}_{T^+_{i-1}}({}^cD^{u_i}_{T^+_{i-1}} y(t)) = y(t) - y(T_{i-1}).$$

Puisque $y \in \operatorname{dom} L \cap \ker P$, on sait que $y(T_{i-1}) = 0$.
Par conséquent

$$L_P^{-1}(L(y(t))) = y(t). \tag{3.9}$$

On combine (3.8) et (3.9) montre que $L_P^{-1} = (L|_{\operatorname{dom} L \cap \ker P})^{-1}$.

L'étape 4 : Pour tout ensemble borné et ouvert $\Omega \subset X$, N est L-compact.

Définissons l'ensemble ouvert borné $\Omega = \{y \in X : \|y\|_X < M\}$, où M est une constante positive. La preuve sera donnée par trois étapes.

1. QN est continu.

La continuité de QN suit des conditions sur f et le théorème de convergence dominé de Lebesgue.

2. $QN(\overline{\Omega})$ est borné. Pour chaque $y \in \overline{\Omega}$ et $t \in J_i$, on a :

$$\begin{aligned}
|QN(y)(t)| &\leq \frac{u_i}{(T_i - T_{i-1})^{u_i}} \int_{T_{i-1}}^{T_i} (T_i - s)^{u_i - 1} |f(s, y(s))| ds \\
&\leq \frac{u_i}{(T_i - T_{i-1})^{u_i}} \int_{T_{i-1}}^{T_i} (T_i - s)^{u_i - 1} |f(s, y(s)) - f(s, 0)| ds \\
&\quad + \frac{u_i}{(T_i - T_{i-1})^{u_i}} \int_{T_{i-1}}^{T_i} (T_i - s)^{u_i - 1} |f(s, 0)| ds \\
&\leq f^* + \frac{u_i}{(T_i - T_{i-1})^{u_i}} \int_{T_{i-1}}^{T_i} (T_i - s)^{u_i - 1} s^{-\delta} (K|y(s)|) ds \\
&\leq f^* + MKT_{i-1}^{-\delta},
\end{aligned}$$

où $f^* = \sup_{t \in J_i} |f(t, 0)|$. ainsi,

$$\|QN(y)\|_{E_i} \leq f^* + MKT_{i-1}^{-\delta} := R > 0.$$

Cela montre que $QN(\overline{\Omega}) \subseteq Y$ est borné.

3. $L_P^{-1}(I - Q)N : \overline{\Omega} \to X$ est complètement continue. D'après le théorème d'Ascoli-Arzel, nous devons prouver que $L_P^{-1}(I - Q)N(\overline{\Omega}) \subset X$ est équicontinu et borné.

D'abord, pour chaque $y \in \overline{\Omega}$ et $t \in J_i$, on a :

$$\begin{aligned}
L_P^{-1}(I-Q)Ny(t) &= L_P^{-1}(Ny(t) - QNy(t)) \\
&= I_{T_{i-1}^+}^{u_i}\Big[f(t,y(t)) - \frac{u_i}{(T_i - T_{i-1})_i^u}\int_{T_{i-1}}^{T_i}(T_i - s)^{u_i-1}f(s,y(s))\Big]ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(u_i)}\int_{T_{i-1}}^{t}(t-s)^{u_i-1}f(s,y(s))ds \\
&\quad - \frac{t^{u_i}}{(T_i - T_{i-1})^{u_i}\Gamma(u_i)}\int_{T_{i-1}}^{T_i}(T_i - s)^{u_i-1}f(s,y(s))ds.
\end{aligned}$$

D'autre part, pour chaque $y \in \overline{\Omega}$ et $t \in J_i$, on a :

$$\begin{aligned}
|L_P^{-1}(I-Q)Ny(t)| &\leq \frac{2}{\Gamma(u_i)}\int_{T_{i-1}}^{T_i}(T_i - s)^{u_i-1}|f(s,y(s)) - f(s,0)|ds \\
&\quad + \frac{2}{\Gamma(u_i)}\int_{T_{i-1}}^{T_i}(T_i - s)^{u_i-1}|f(s,0)|ds \\
&\leq [f^* + MKT_{i-1}^{-\delta}]\frac{2(T_i - T_{i-1})^{u_i}}{\Gamma(u_i+1)} := B.
\end{aligned}$$

donc

$$\|L_P^{-1}(I-Q)Ny\|_\infty \leq B. \tag{3.10}$$

Ce qui montre que $L_P^{-1}(I-Q)N(\overline{\Omega})$ est uniformément borné dans X.

Pour prouver que $L_P^{-1}(I-Q)N(\overline{\Omega})$ est équicontinu, on remarque que pour $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq T$ et $y \in \overline{\Omega}$, on a :

$$\begin{aligned}
&|L_P^{-1}(I-Q)Ny(t_2) - L_P^{-1}(I-Q)Ny(t_1)| \\
&\leq \frac{f^* + M(K+\overline{K})}{\Gamma(\alpha)}\Big[\int_{t_1}^{t_2}(t_2 - s)^{\alpha-1}ds + \int_0^{t_1}|(t_2-s)^{\alpha-1} - (t_1-s)^{\alpha-1}|ds\Big]
\end{aligned}$$

$$+\Big[\frac{M(K+\overline{K})+f^*}{\Gamma(\alpha+1)}\Big](t_2^\alpha - t_1^\alpha).$$

Comme $t_1 \to t_2$ le côté droit de l'inégalite ci-dessus tend vers zéro. Ainsi,

$L_P^{-1}(I-Q)N(\overline{\Omega})$ est équicontinu dans X. D'après le théorème Ascoli Arzela, $L_P^{-1}(I-Q)N(\overline{\Omega})$ est relativement compact.

En conséquence de l'étape 1 à 3, on peut conclure que l'opérateur N est L-compact dans $\overline{\Omega}$, et ceci complète la preuve.

Étape 5 : Il existe un nombre positif A, ne dépendant pas à λ, tel que, si :

$$L(y) - N(y) = -\lambda[L(y) + N(-y)], \quad \lambda \in (0,1], \tag{3.11}$$

alors $\|y\|_X \leq A$.

Supposons que (H2) est vérifiée et que $y \in X$ satisfait (3.11). On a

$$L(y) - N(y) = -\lambda L(y) - \lambda N(-y),$$

donc

$$L(y) = \frac{1}{1+\lambda}N(y) - \frac{\lambda}{1+\lambda}N(-y). \tag{3.12}$$

D'après (3.12), pour chaque $t \in J_i$, on a :

$$y(t) = \frac{1}{1+\lambda}L_P^{-1}Ny(t) - \frac{\lambda}{1+\lambda}L_P^{-1}N(-y(t)).$$

Utilisation les définitions des opérateurs L et N (voir (3.6) et (3.7)), pour chaque $t \in J_i$, on obtient

$$\begin{aligned}
|y(t)| &\le \frac{1}{(1+\lambda)\Gamma(u_i)} \int_{T_{i-1}}^{t} (t-s)^{u_i-1} \left| f(s,y(s)) - f(s,0) \right| ds \\
&\quad + \frac{\lambda}{(1+\lambda)\Gamma(u_i)} \int_{T_{i-1}}^{t} (t-s)^{u_i-1} \left| f(s,-y(s)) - f(s,0) \right| ds \\
&\quad + \frac{f^*(T_i - T_{i-1})^{u_i}}{(1+\lambda)\Gamma(u_i+1)} + \frac{\lambda f^*(T_i - T_{i-1})^{u_i}}{(1+\lambda)\Gamma(u_i+1)} \\
&\le \left(\frac{1}{1+\lambda} + \frac{\lambda}{1+\lambda}\right) \frac{T_{i-1}^{-\delta}(T_i - T_{i-1})^{u_i}}{\Gamma(u_i+1)} (K\|y\|_{E_i}) + \left(\frac{1}{1+\lambda} + \frac{\lambda}{1+\lambda}\right) \frac{f^*(T_i - T_{i-1})^{u_i}}{\Gamma(u_i+1)} \\
&= \frac{KT_{i-1}^{-\delta}(T_i - T_{i-1})^{u_i}}{\Gamma(u_i+1)} \|y\|_{E_i} + \frac{f^*(T_i - T_{i-1})^{u_i}}{\Gamma(u_i+1)},
\end{aligned}$$

ce qui implique

$$\|y\|_{E_i} \le \left(f^* + KT_{i-1}^{-\delta}\|y\|_{E_i}\right) \frac{(T_i - T_{i-1})^{u_i}}{\Gamma(u_i+1)}, \tag{3.13}$$

donc

$$\|y\|_X \le \frac{f^*}{\frac{\Gamma(u_i+1)}{(T_i - T_{i-1})^{u_i}} - KT_{i-1}^{-\delta}} := A.$$

L'étape 6 : Il existe un ensemble ouvert et borné $\Omega \subset X$ tel que

$$L(y) - N(y) \neq -\lambda[L(y) + N(-y)], \tag{3.14}$$

pour tout $y \in \partial\Omega$ et tout $\lambda \in (0,1]$.

D'après (H2) et l'étape 5, il existe une constante positive A ne dépend pas de λ tel que, si y satisfait $L(y) - N(y) = -\lambda[L(y) + N(-y)],\ \lambda \in (0,1]$, alors $\|y\|_X \le A$. Donc, si

$$\Omega = \{y \in X : \|y\|_X < B\} \tag{3.15}$$

où $B > A$, on a :

$$L(y) - N(y) \neq -\lambda[L(y) - N(-y)]$$

pour chaque $y \in \partial\Omega = \{y \in X : \|y\|_X = B\}$ et $\lambda \in (0, 1]$.

D'après le théorème de continuation de Mawhin problème (3.4) admet au moins une solution, et ceci complète la preuve.
Maintenant, nous complétons notre déduction sur la propriété d'existence pour les solutions de la problème de Caputo donnée d'ordre variable (3.1).

Théorème 3.2. *Si les conditions* (H1) *et* (H2) *sont satisfaites pour tout* $i \in \{1, 2, ..., n\}$. *Alors, le problème (3.1) admet au moins une solution dans* $C(J, \mathbb{R})$.

Preuve : Pour tout $i \in \{1, 2, ..., n\}$, d'après le théorème 3.1, le problème équivalent à résonance d'ordre constant (3.4) possède au moins une solution $\widetilde{y}_i \in E_i$. Pour tout $i \in \{1, 2, ..., n\}$, nous définissons la fonction

$$y_i = \begin{cases} 0, & t \in [a, T_{i-1}], \\ \widetilde{y}_i, & t \in J_i. \end{cases}$$

Ainsi, la fonction $y_i \in C([a, T_i], \mathbb{R})$ résout l'équation d'intégrale (3.3) pour $t \in J_i$, ce qui signifie que $y_i(a) = 0, y_i(T_i) = \widetilde{y}_i(T_i) = 0$ et résout (3.3) pour $t \in J_i$,
$i \in \{1, 2, ..., n\}$. Alors la fonction ,

$$y(t) = \begin{cases} y_1(t), & t \in J_1, \\ y_2(t) = \begin{cases} 0, & t \in J_1, \\ \widetilde{y}_2, & t \in J_2, \end{cases} & . \\ . \\ . \\ . \\ y_n(t) = \begin{cases} 0, & t \in [a, T_{n-1}], \\ \widetilde{y}_n, & t \in J_n, \end{cases} \end{cases}$$

est une solution de l'équation différentielle fractionnelle de Caputo d'ordre variable (3.1) dans $C(J,\mathbb{R})$, et ceci complète la preuve.

3.3 Exemple

Considérons le problème aux limites fractionnaire suivant :

$$\begin{cases} {}^{c}D_{0.5^+}^{u(t)}y(t) = \dfrac{\sin y(t) - (y(t)+2)\cos t}{5\sqrt{1+t}}, \quad t \in J := [0.5, 2], \\ y(0.5) = y(2). \end{cases} \tag{3.16}$$

Soit :

$$f(t,y) = \frac{\sin y - (y+2)\cos t}{5\sqrt{1+t}},\ (t,y) \in [0.5,2] \times [0,+\infty),$$

et

$$u(t) = \begin{cases} \dfrac{5}{7}, \quad t \in J_1 := [0.5, 1], \\ \dfrac{2}{3}, \quad t \in J_2 :=]1, 2]. \end{cases} \tag{3.17}$$

Pour chaque y_1, $y_2 \in [0,+\infty)$ et $t \in [0.5, 2]$, on a :

$$\begin{aligned} t^{\frac{1}{2}}|f(t,y_1) - f(t,y_2)| &= \left| \frac{t^{\frac{1}{2}}(\sin y_1 - (y_1+2)\cos t)}{5\sqrt{1+t}} - \frac{t^{\frac{1}{2}}(\sin y_2 - (y_2+2)\cos t)}{5\sqrt{1+t}} \right| \\ &\leq \frac{1}{5}\sqrt{\frac{t}{1+t}}\Big(|\sin y_1 - \sin y_2| + |\cos t||y_1 - y_2|\Big) \\ &\leq \frac{2}{5}|y_1 - y_2|. \end{aligned}$$

Par (3.17), l'équation du problème (3.16) est divisée en deux expressions comme suit :

$$\begin{cases} {}^cD_{0.5^+}^{\frac{5}{7}}y(t) = \dfrac{\sin y(t) - (y(t)+2)\cos t}{5\sqrt{1+t}}, \quad t \in J_1, \\ y(0.5) = y(1), \end{cases} \tag{3.18}$$

et

$$\begin{cases} {}^cD_{1^+}^{\frac{2}{3}}y(t) = \dfrac{\sin y(t) - (y(t)+2)\cos t}{5\sqrt{1+t}}, \quad t \in J_2, \\ y(1) = y(2). \end{cases} \tag{3.19}$$

La condition (H2) est satisfaite pour $i = 1$ avec $\delta = \dfrac{1}{2}$ et $K = \dfrac{2}{5}$,

$$0 < K = \frac{2}{5} < \min\left\{1, \frac{T_0^\delta \Gamma(u_1+1)}{(T_1 - T_0)^{u_1}}\right\} = 1.$$

D'après le Théorème 3.1, la résonance d'ordre constant problème (3.18) admet une solution $\widetilde{y}_1 \in E_1$.
Ensuite, la condition (H2) est satisfaite pour $i = 2$ avec $\delta = \dfrac{1}{2}$ et $K = \dfrac{2}{5}$, et

$$0 < K = \frac{2}{5} < \min\left\{1, \frac{T_1^\delta \Gamma(u_2+1)}{(T_2 - T_1)^{u_2}}\right\} = \Gamma(\frac{5}{3}) \simeq 0.9027.$$

D'après le Théorème 3.1, la résonance d'ordre constant problème (3.19) admet une solution $\widetilde{y}_2 \in E_2$. Alors, par le théorème 3.2, le problème de Caputo d'ordre variable (3.16) admet une solution défini par :

$$y(t) = \begin{cases} \widetilde{y}_1(t), \quad t \in J_1, \\ y_2(t), \quad t \in J_2, \end{cases}$$

où

$$y_2(t) = \begin{cases} 0, \quad t \in J_1, \\ \widetilde{y}_2(t), \quad t \in J_2. \end{cases}$$

CONCLUSION

Dans ce mémoire, nous avons considéré une classe d'équations différentielles non linéaires à dérivée fractionaire au sens de Caputo sur un intervalle borné avec conditions aux limites en résonance.

Premièrement, nous avons montré que la propriété du semi-groupe n'est pas valable pour les intégrales d'ordre variable.

Ensuite, en définissant une partition basée sur les intervalles généralisés, nous avons introduit une fonction constante par morceaux, et nous avons converti le problème fractionnaire d'ordre variable en un problème équivalent d'ordre constant.

Les résultats obtenus sont établis en utilisant le théorème de continuation de Mawhin dans le dernier chapitre.

Un exemple est donné à la fin pour illustrer les résultats principaux .

Bibliographie

[1] G. F. J. Aguilar, Analytical and numerical solutions of a nonlinear alcoholism model via variable-order fractional differential equations, Physica A. **494**(2018), 52-75.

[2] R. Almeida, D. Tavares and D. F. M. Torres, The variable-order fractional calculus of variations, Springer International Publishing, (2019).

[3] B. hamed, K. Benhabib, Rappells de cours et exercices avec solutions Office des puplications universitaires 5 (2012).

[4] M. Benchohra, S. Bouriah and J. R. Graef, Nonlinear implicit differential equations of fractional order at resonance, Electron. J. Differential Equations. **324**(2016), 1-10.

[5] Z. Bouazza, S. Etemad, M. S. Souid, S. Rezapour, F. Martinez and M. K. A. Kaabar, A study on the solutions of a multiterm FBVP of variable order, Journal of Function Spaces, **2021**(2021), 1-9.

[6] S. Djebali, Problèmes aux limites non linéaire associés aux EDO du second ordre, Cours de magister, Département de Mathématiques, ENS-Kouba, Alger, (2001-2002).

[7] R. E. Gaines and J. L. Mawhin, Coincidence degree and nonlinear differential equations, Springer. **568**(2006).

[8] A. A. Kilbas, H. M. Srivastava, and J. J. Trujillo, Theory and applications of fractional differential equations, North-Holland Mathematics Studies, **204**, Elsevier, Amsterdam, (2006).

[9] R. Ma, Multiplicity results for a third order value problem at resonance, Nonlinear Anal. **32**(1998), 493-499.

[10] J. Mawhin, Equivalence theorems for nonlinear operator equations and coincidence degree theory for some mappings in locally convex topological vector spaces, J. Differential Equations, **12**(1972), 610-636.

[11] J. Mawhin, Topological degree methods in nonlinear boundary value problems, CBMS Regional Conference Series in Mathematics, vol. **40**, American Mathematical Society, (1979).

[12] J. Mawhin, Topological degree and boundary value problems for nonlinear differential equations. In Topological Methods for ordinary differential equations. Springer, Berlin, Heidelberg, (1993), 74-142.

[13] J. Mawhin, Leray-Schauder continuation theorems in the absence of a priori bounds, Topological Methods in Nonlinear Analysis, **9**(1997), 179-200.

[14] J. Mawhin, Leray-Schauder degree : A half century of extensions and applications, Topological Methods in Nonlinear Analysis, **14**(1999),195-228.

[15] J. Mawhin and J. R. Ward, Periodic solutions of some forced Lienard differential equations at resonance, Archiv der Mathematik, **41**(1983), 337-351.

[16] D. O'Regan, Y. J. Cho, and Y. Q. Chen, Topological degree theory and application, vol. **10**, Chapman and Hall/CRC, (2006).

[17] I. Podlubny, Fractional differential equations, Academic Press, New York, USA, (1999).

[18] A. Refice, M. S. Souid and I. Stamova. On the boundary value problems of Hadamard fractional differential equations of variable order via Kuratowski MNC technique. *Mathematics*, **9**(2021), 1134-1150.

[19] S. G. Samko, Fractional integration and differentiation of variable order, Analysis Mathematica, **21**(1995), 213-236.

[20] S. G. Samko and B. Boss, Integration and differentiation to a variable fractional order, Integral Transforms and Special Functions, **1**(1993), 277-300.

[21] J. V. D. C. Sousa and E. C. de Oliveira, Two new fractional derivatives of variable order with non-singular kernel and fractional differential equation, Computational and Applied Mathematics, **37**(2018), 5375-5394.

[22] S. Zhang, Existence of solutions for two-point boundary-value problems with singular differential equations of variable order, Electronic Journal of Differential Equations, **2013**(2013), 1-16.

[23] S. Zhang, The uniqueness result of solutions to initial value problems of differential equations of variable-order, Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fs. Nat. Ser. A Math, **112**(2018), 407-423.

[24] S. Zhang, L. Hu, Unique existence result of approximate solution to initial value problem for fractional differential equation of variable order involving the derivative arguments on the half-axis, Mathematics , **7**(2019), 286.

[25] S. Zhang, S. Sun and L. Hu, Approximate solutions to initial value problem for differential equation of variable order, Journal of Fractional Calculus and Applications, **9**(2018), 93-112.