REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE & POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR & DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Université Ibn Khaldoun- Tiaret
FACULTÉ DES MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUE
DÉPARTEMENT DES MATHEMATIQUES

MEMOIRE DE MASTER

Présentée par :

MLLE. HOUARI NACERA

MLLE. DJEBLI FATIHA

Spécialité : *Mathématiques*

Option : *Analyse fonctionnelle et équations différentielles*

Intitulé

Étude l'existence des solutions de l'équation des ondes non linéaires

Soutenue le : 22/ 06 / 2022

Devant le jury composé de :

PrésidenT : Mr. SOUID Mohammed Said	*Pr. Univ. Ibn Khaldoun Tiaret*
Examinateurs : Mr. BENAISSA Bouharket	*MCB. Univ. Ibn Khaldoun Tiaret*
Encadreur : Mr. BENGUESSOUM Aissa	*MCA. Univ. Ibn Khaldoun Tiaret*

2021-2022

Remerciement

Avant tous, je remercie Dieu le tout puissant qui m'a guidé tout Au long de ma vie, qui m'a permis de m'instruire et d'arriver Aussi loin dans les études, qui m'a donné courage et patience Pour traverser tous les moments difficiles, et qui m'a permis D'achever ce travail.

En premier lieu, c'est à mon encadreur, Mr. Benguessoum Aissa, que je dois respect et gratitude pour m'avoir guidé afin De mener à bien cette étude. Sa disponibilité durant toutes les Étapes de ce travail, ses remarques pertinentes et ses suggestions Ont sans cesse permis l'amélioration de la qualité de ce Document.

Je remercie également tous les autres membres du jury Mr.Bouharkrt Benaissa et Mr.Souid Mohammed Said qui ont Accepté de s'intéresser à mes travaux et m'ont apporté leur Jugement d'experts :

Je remercie également tout le personnel de la faculté de mathématique et informatique.

Dédicace

Je dédie ce travail à toutes les personnes que j'aime et en particulier :

A ma mère, l'amour qui a décoré ma vie de belles roses, qui a rempli mon cœur de joie et de tendresse. Ma mère, tu es toujours un exemple de patience et de sacrifice. Tu es vraiment la plus altruiste femme que j'ai connue. Que Allah les gardes.

A ma cher sœur : Fatima

A mon cher frère : Khalil

A mes grands parents

A mes tantes et oncles

A toute la famille Houari

Une dédicace à ma grande famille universitaire et mes meilleurs amis : H.Rahmani, H.Kadi, F. Manel,

A toute ma promotion de 5éme année Analyse Fonctionnelle et Equation Différentielle.

Nacera .

Dédicace :

Avant tout je remercie Allah,

A mon père, l'exemple par excellence, source de ma fierté, mon courage et mon Défi devant tous les obstacles que j'ai rencontrés.

A ma mère, l'amour qui a décoré ma vie de belles roses, qui a rempli mon cœur De joie et de tendresse. Ma mère, tu es toujours un exemple de patience et de sacrifice. Tu Es vraiment la plus altruiste femme que j'ai connue. Que Allah les gardes.

A ma cher soeur : Razika

A mes chers frères : Sahraoui, Lakhdar, Abd El Aziz.

A toute la famille : Djebli.

Une dédicace à mes chères amies : Aicha et Sabah

Une dédicace à ma grande famille universitaire.

Tous ceux qui ne sont pas cités, m'excusent, vous savez

que vous êtes toujours

Présents dans mes pensées.

A toute ma promotion de 5éme année mathématique sans

exception.

J'adresse en dernier une pensée particulière à nos collègues

des promotions 2021-2022 Analyse fonctionnelle et

équation différentielle. Fatiha

Table des matières

Introduction

Les équations des ondes sont des équations aux dérivées partielles qui expriment beaucoup de lois fondamentales de la nature et surgissent généralement dans l'analyse mathématique des problèmes en science et technologie. Bien que, les équations différentielles partielles non-linéaires aient subi de nouveaux développement remarquables pendant la dernière moitié du vingtième siècle, une des impulsions principales pour développer des équations partielles non-linéaires à été l'étude des problèmes non-linéaires de propagation des ondes.

Ces problèmes apparaissent dans différents domaines des mathématiques appliquées, de la physique, y compris la dynamique des fluides, le système optique, la mécanique des solides, la physique des plasmas et la physique non-linéaire de la matière condensée.

Les équations d'ondes non-linéaires en particulier ont fourni plusieurs exemples de nouvelles solutions qui sont remarquablement différentes de celles obtenues pour des problèmes d'ondes linéaires.

Dans ce travail, nous avons considéré des équations aux dérivées partielles de type hyperbolique, plus précisément on étude les équations des ondes non-linéaires dans un domaine borné de $\mathbb{R}^n$.

On s'intéresse à l'étude de l'existence et l'unicité de la solution ainsi que le comportement asymptotique de la solution de l'équation des ondes non-linéaires.

Notre mémoire se compose quatre chapitres :

Chapitre 1 :

Dans ce chapitre nous rappelons les principaux notions qui nous aurons besoins, commençons par les espaces L^p et l'espaces de Sobolev. Finalement nous présentons les inégalités nécessaires qui sont utilisées dans ce mémoire et aussi nous citons quelques théorèmes utiles.

Chapitre 2 :

Dans ce chapitre nous étudions l'existence globale de l'équation

$$u_{tt} - \Delta u + |u|^{p-2}u = f.$$

En utilisant l'approximation de Faedo-Galerkin et quelques estimations a priori, nous allons montrer que ce problème admet une solution globale unique u. Cette méthode consiste une approximation de la solution, ensuite on obtient une estimation a priori nécessaire pour garantir la convergence de la solution approchée vers la solution exacte.

Chapitre 3 :

Dans ce chapitre, nous allons étudier l'équation

$$u_{tt} - \Delta u + u_t|u_t|^{m-1} = u|u|^{p-1}.$$

Pour étudions l'existence de la solution globale de ce problème et l'unicité de cette solution, on transforme ce problème à un problème de Cauchy dans un espace convenable. On constitue une suite de Cauchy en va montrons que cette suite converge vers la solution de ce problème, par deux étapes démontrer que le problème possède une solution locale puis il admet une solution globale. On termine la prouve par montrons que cette solution est unique.

Chapitre 4 :

Dans ce chapitre, nous étudierons l'existence globale, le comportement asymptotique de l'équation

$$u_{tt} - \Delta u + a(1 + |u_t|^{m-2})u_t + bu|u|^{p-2} = 0,$$

et savoir la décroissance exponentiellement de l'énergie.

Chapitre 1

Préliminaire

Dans ce chapitre, on introduit les outils fonctionnels de base pour étudions l'existence et l'unicité de la solution des équations différentielle aux dérivées partielles.

1.1 L'espace $\mathbf{L}^p(\Omega)$

Définition 1.1.1. *[4] Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ et $p \in [1, \infty]$.*

Si $1 \leq p < \infty$, on a

$$L^p(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R}^n \, mesurable \, / \int_\Omega |u|^p < \infty\}$$

est muni de la norme

$$\|u\|_p = \|u\|_{L^p(\Omega)} = [\int_\Omega |u(x)|^p dx]^{\frac{1}{p}}.$$

Si $p = \infty$, on a

$L^\infty(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R} \, mesurable \, / \quad \exists C > 0, \quad |u(x)| \leq C \;\; p.p \; sur \; \Omega \}$

est muni de la norme

$$\|u\|_\infty = \|u\|_{L^\infty(\Omega)} = inf\{C \geq 0, \quad |u(x)| \leq C \quad p.p \quad sur \quad \Omega\},$$

on écrit

$$\|u\|_\infty = \sup_{x\in\Omega} ess|u(x)|.$$

Pour $p \in [1,\infty], L^p(\Omega)$ *est un espace de Banach.*

Pour $p=2$, *on note* $H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega)$.

L'espace $H^1(\Omega)$ *de Hilbert muni de la norme*

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} = (\int_\Omega |u(x)|^2 dx)^{\frac{1}{2}},$$

sa produit scalaire associé est

$$<u,v>_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega u(x)v(x)dx.$$

1.2 L'espace $\mathbf{L}^p(0,T;X)$

Définition 1.2.1. *[4] Soit* X *un espace de Banach, on définit*

Si $1 \leq p < \infty$

$$L^p(0,T;X) = \{u : [0,T] \to X \quad / \int_0^T \|u\|_X^p dt < \infty\}.$$

Si $p = \infty$

$$L^\infty(0,T;X) = \{u : [0,T] \to X \quad / \|u\|_X < \infty\},$$

telle que $T > 0$.

$L^p(0,T;X)$ *muni de la norme*

$$\|u\|_{L^p(0,T;X)} = \begin{cases} (\int_0^T \|u\|_X^p dt)^{\frac{1}{p}} & si \quad 1 \leq p < \infty, \\ \sup_{t\in]0,T[} ess\|u\|_X & si \quad p = \infty. \end{cases}$$

L'espace $L^p(0,T;X)$ *est un espace de Banach.*

Si $p=2$, *l'espace* $L^2(0,T;X)$ *est un Hilbert.*

1.3 Espaces de Sobolev

Définition 1.3.1. *[4] Soit* Ω *un ouvert borné de* $\mathbb{R}^n (n \in \mathbb{N}^*)$, $u \in L^1(\Omega)$ *une fonction a une i-ème dérivée faible dans* $L^1(\Omega)$, *il existe* $f_i \in L^1(\Omega)$ *telle que pour toute* $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, *on a*

$$\int_\Omega u(x)\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(x)dx = -\int_\Omega f_i(x)\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(x)dx, \qquad 1 \leq i \leq n.$$

Cela revient à dire que f_i est la i-ème dérivée de $u \in L^1(\Omega)$ au sens des distribution, on écrire

$$\partial_i u = \frac{\partial u}{\partial x_i} = f_i.$$

• Espace $\mathbf{W}^{1,p}(\Omega)$

Définition 1.3.2. *[4] Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n (n \in \mathbb{N}^*)$ et $p \in \mathbb{R}$, tel que $1 \leq p \leq +\infty$. L'espace $W^{1,p}(\Omega)$ est défini par*

$$W^{1,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega), \exists g \in L^p(\Omega) / \int_\Omega u\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} = -\int_\Omega g\varphi, \quad \forall\varphi \in C_c^1(\Omega), \quad 1 \leq i \leq n\}.$$

L'espace $W^{1,p}(\Omega)$ est muni de la norme

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \|u\|_p + \|u'\|_p.$$

On pose

$$H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega).$$

$H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert muni le produit scalaire

$$<u, v>_{H^1(\Omega)} = (u, v)_{L^2(\Omega)} + (u', v')_{L^2(\Omega)},$$

et sa norme associe est

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = (\|u\|)_2^2 + \|u'\|_2^2)^{\frac{1}{2}}.$$

• Espace $\mathbf{W}_0^{1,p}(\Omega)$

Définition 1.3.3. *[4] Étant donné $1 \leq p < \infty$, on désigne par $W_0^{1,p}(\Omega)$ la fermeture de $C_c^1(\Omega)$ dans $W^{1,p}(\Omega)$.*

On note

$$H_0^1(\Omega) = W_0^{1,2}(\Omega).$$

• Espace $\mathbf{W}^{m,p}(\Omega)$

Définition 1.3.4. *[4] Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n (n \in \mathbb{N}^*)$, où $m \in \mathbb{N}^* \backslash \{1\}$ et p un nombre réel tel que $1 \leq p \leq +\infty$.*
On définit $W^{m,p}(\Omega)$ comme suit

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) / \quad D^\alpha u \in L^p(\Omega), \forall \alpha, |\alpha| \leq m\},$$

où $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ avec $\alpha_i \in \mathbb{N}$, on pose

$$|\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \quad et \quad D^\alpha u = \frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_n}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} ... \partial x_n^{\alpha_n}} u.$$

L'espace $W^{m,p}(\Omega)$ est muni de la norme

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \|u\|_p + \sum_{0<|\alpha|\leq m} \|D^\alpha u\|_p.$$

On pose

$$H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega).$$

Les espaces $H^m(\Omega)$ sont des espaces de Hilbert avec le produit scalaire

$$(u, v)_{H^m} = (u, v)_{L^2(\Omega)} + \sum_{0<|\alpha|\leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2(\Omega)}, \qquad \forall\, u, v \in H^m(\Omega).$$

• Espace $\mathbf{W}^{m,p}(0.T; X)$

Définition 1.3.5. *[4] Soit X un espace de Banach et $T > 0$.*
Pour $m \in \mathbb{N}$ et $p \in [1, \infty]$, on a

$$W^{m,p}(0, T; X) = \{u \in L^p(0, T; X) \quad / \quad \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^p(0, T; X)\}, \quad \forall i \leq m.$$

$W^{m,p}(0, T; X)$ est un espace de Banach avec la norme

$$\|u\|_{W^{m,p}(0,T;X)} = \sum_{i=0}^{m} (\|u\|^p_{L^p(0,T;X)})^{\frac{1}{p}}.$$

Si $1 \leq p \leq \infty$

$$W^{m,\infty}(0, T; X) = \sum_{i=0}^{m} \|u\|_{L^\infty(0,T;X)}.$$

L'espace $W^{m,2}(0,T;X)$ *est un Hilbert et noté* $H^m(0,T;X)$ *sa produit scalaire*

$$(u,v)_{H^m(0,T;X)} = \sum_{i=0}^{m} \int_0^T (\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i})_X dt.$$

1.4 Convergence faible et Convergence faible étoile

Soit $(E, \|.\|_E)$ un espace de Banach et $f \in E'$ (E' l'espace *dual de* E).

1.4.1 Convergence faible

Définition 1.4.1. *[4] Soit* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de* E *et* x *un élément de* E*.*
On dit que (x_n) *converge faiblement vers* x *dans* E *si*

$$f(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x), \quad \forall f \in E',$$

ou encore

$$<f, x_n>_{E',E} \xrightarrow[n\to+\infty]{} <f, x>_{E',E},$$

et on écrit

$$x_n \rightharpoonup x \quad dans \quad E.$$

La convergence forte (c-à-d, la convergence au sens de la norme $\|x_n - x\|_E \longrightarrow 0$ *) sera notée*

$$x_n \longrightarrow x \quad dans \quad E.$$

Proposition 1.4.2. *Si la limite faible d'une suite de* E *existe, elle est unique.*

1.4.2 Convergence faible étoile

Définition 1.4.3. *[4] Soient* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E'$ *et* $f \in E'$*. On dit que,* (f_n) *converge vers* f *dans* E' *faible étoile.*
Si

$$f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x), \quad \forall x \in E'',$$

ou encore

$$<f_n, x>_{E',E''} \xrightarrow[n\to+\infty]{} <f, x>_{E',E''},$$

et on écrit

$$f_n \rightharpoonup^* f \quad dans \quad E'.$$

Remarque 1.4.4. *Si la limite faible étoile d'une suite de E existe, elle est unique.*

Proposition 1.4.5. *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de E'. On a*

1. $f_n \rightharpoonup^* f$ *dans* $\sigma(E', E) \Leftrightarrow f_n(u) \to f(u), \forall u \in E$.
2. *Si* $f_n \to f$ *(fortement), alors* $f_n \rightharpoonup f$ *dans* $\sigma(E', E'')$.
3. *Si* $f_n \to f$ *dans* $\sigma(E', E'')$, *alors* $f_n \rightharpoonup^* f$ *dans* $\sigma(E', E)$.
4. *Si* $f_n \rightharpoonup^* f$ *dans* $\sigma(E', E)$, *alors* $\|f_n\|$ *est borné et* $\|f\| \leq \liminf \|f_n\|$.
5. *Si* $f_n \rightharpoonup^* f$ *dans* $\sigma(E', E)$ *et* $u_n \to u$ *(fortement) dans* E, *alors* $f_n(u_n) \to f(u)$.

Proposition 1.4.6. *Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de l'espace Hilbert H converge faiblement vers u dans H, si et seulement si*

$$\lim_{n\to\infty} <u_n, y>_H = <u, y>_H, \quad \forall y \in H.$$

Lemme 1.4.7. *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n (n \in \mathbb{N}^*)$, (u_m) une suite des fonctions de $L^p(\Omega)$ et u une fonction de $L^p(\Omega)$ avec $1 < p < \infty$.*
Si

$$\|u_m\|_{L^p(\Omega)} \leq C, \quad u_m \to u \qquad p.p \qquad dans \qquad \Omega.$$

Alors $u_m \rightharpoonup u$ dans $L^p(\Omega)$.

Lemme 1.4.8. *[7] Soit θ un ouvert borné de $\mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_t$, g_{m_i} et g des fonctions de $L^q(\theta)$, $1 < q < \infty$ telles que*

$$\|g_{m_i}\|_{L^q(\theta)} \leq C, \quad g_{m_i} \longrightarrow g \quad p.p \quad dans \quad \theta.$$

Alors

$$g_{m_i} \rightharpoonup g \quad dans \quad L^q(\theta).$$

1.5 Formule de Green

Soit Ω un ouvert borné de classe C^1 sa frontière Γ. Alors pour toutes fonctions $u \in C^2(\bar{\Omega})$ et $v \in C^1(\bar{\Omega})$, on a

$$\int_\Omega \Delta u(x)v(x)dx = \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial \eta}(x)v(x)d\Gamma - \int_\Omega \nabla u(x).\nabla v(x)dx,$$

où $\frac{\partial u}{\partial \eta} = \nabla u(x).\eta(x)$ est la dérivée normale de u tel que η le vecteur normale extérieure à Γ.

1.6 Quelques inégalités utiles

• **Inégalité de Young** [4]

Soient $u, v \geq 0$ tel que $1 \leq p, q \leq \infty$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, on a

$$uv \leq \frac{1}{p}u^p + \frac{1}{q}v^q.$$

• **Inégalité de Young avec** ε[4]

Soient $u, v \geq 0$ et p, q deux nombre positifs tels que $1 \leq p, q \leq \infty$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Pour tous $\varepsilon > 0$, on a

$$|uv| \leq \varepsilon |u|^p + c(\varepsilon)|v|^q,$$

où $c(\varepsilon) > 0$.

• **Inégalité de Cauchy-Schwarz** [4]

Soit $<u, v>_V$ un produit scalaire sur l'espace vectoriel réel V muni de la norme

$$\|v\|^2 = <v, v>,$$

alors

$$|<u, v>_V| \leq \|u\|_V \|v\|_V, \quad \forall u, v \in V.$$

• **Inégalité de Hölder** [4]

Soient $u \in L^p(\Omega)$ et $v \in L^{p'}(\Omega)$ tels que $1 \leq p \leq \infty$ et $1 \leq p' \leq \infty$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Alors

$$\int_\Omega |uv| dx \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} \|v\|_{L^{p'}(\Omega)}.$$

• **Inégalité de Poincaré** [4]

On suppose que Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^n (n \in \mathbb{N}^*)$. Alors il existe une constante C (dépendant de Ω et p). Pour $1 \leq p < \infty$, on a

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}, \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

En particulier l'expression $\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$ est une norme sur $W_0^{1,p}(\Omega)$ qui est équivalente à la norme $\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$.
Dans $H_0^1(\Omega)$ l'expression $\int_\Omega \nabla u \nabla v dx$ est un produit scalaire qui induit la norme $\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$ équivalente à la norme $\|u\|_{H^1(\Omega)}$.

1.7 Lemme de Gronwall

Lemme 1.7.1. *[4] Soit $a > 0, \Phi, h \in C([0,a]), h \geq 0$ et $g : [0,a] \to \mathbb{R}$ une fonction croissante.*
Si

$$\Phi(t) \leq g(t) + \int_0^t h(r)\Phi(r) dr, \qquad \forall t \in [0,a],$$

alors

$$\Phi(t) \leq g(t) \exp\left(\int_0^t h(r) dr\right), \qquad \forall t[0,a].$$

1.8 Théorème de Rellich-Kondrachov

Théorème 1.8.1. *[4] On suppose que Ω un ouvert borné de classe C^1.*
On a

Si $p < N$, *alors* $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega), \quad \forall q \in [1, p^*[, \quad$ *où* $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}$,

Si $p = N$, *alors* $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega), \quad \forall q \in [1, +\infty[$,

Si $p > N$, *alors* $W^{1,p}(\Omega) \subset C(\bar{\Omega})$,

avec injection compactes.

Chapitre 2

Existence globale et unicité de la solution d'équation $u_{tt} - \Delta u + |u|^{p-2}u = f$

Le but de ce chapitre est étudions l'existence et l'unicité du problème (P_1) suivant :

$$(\mathrm{P}_1)\begin{cases} u_{tt}(x,t) - \Delta u(x,t) + |u(x,t)|^{p-2}u(x,t) = f(x,t), & dans \quad \Omega\times]0,T[, \\ u(x,t) = 0, & sur \quad \partial\Omega\times]0,T[, \\ u(x,0) = u_0(x), & dans \quad x \in \Omega, \\ u_t(x,0) = u_1(x), & dans \quad x \in \Omega, \end{cases}$$

où Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n(n \in \mathbb{N}^*\backslash\{1\}), \partial\Omega$ sa frontière, $p \geq 2$, f $\in L^2(\Omega \times [0,T])$ et $T > 0$, telles que

$$u_t = \frac{\partial u}{\partial t},\ u_{tt} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad et \quad \Delta u = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} u.$$

Soit $Q = \Omega\times]0,T[$, de frontière $\Sigma = \partial\Omega\times]0,T[$.

On définit l'espace V par

$$V = H_0^1(\Omega) \cap L^p(\Omega).$$

On supposer les hypothèses suivantes

(H1) : $f \in L^2(Q)$.

(H2) : $u_0 \in H_0^1(\Omega) \cap L^p(\Omega)$.

(H3) : $u_1 \in L^2(\Omega)$.

(H4) : $\begin{cases} 1 < p \leq \frac{2n-2}{n-2}, & si \quad n \geq 3, \\ p > 1, \quad si \quad n = 2. \end{cases}$

Théorème 2.0.1. *[7] Sous les hypothèses $(H1)-(H4)$, le problème (P_1) admet une solution globale unique u vérifiant*

$$u \in L^\infty(0,T; H_0^1(\Omega) \cap L^p(\Omega)), \quad u_t \in L^\infty(0,T; L^2(\Omega)).$$

2.1 Existence Globale :

Dans cette section, nous supposons $u_0 \in H_0^1(\Omega) \cap L^p(\Omega), u_1 \in L^2(\Omega)$ et $f \in L^2(Q)$. Nous utilisons la méthode de Faedo-Galerkin [7] pour trouver une solution globale. Soit $T > 0$ est fixe et V_m engendré par $\{w_1, w_2, ..., w_m\}$ où l'ensemble $\{w_i \in V, \forall i\}$ est une base de $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$.

On cherche alors une solution approché $u_m(t)$, sous la forme

$$u_m(t) = \sum_{i=1}^{m} g_{im}(t) w_i,$$

où $g_{im} (i = 1, 2, ..., m)$ sont déterminés par le système d'équation différentielle ordinaire suivant

$$(\mathrm{P}_m) \begin{cases} (u''_m(t), w_i) - (\Delta u_m(t), w_i) + (|u_m(t)|^{p-2} u_m(t), w_i) = (f(t), w_i), & \forall i = 1...m, \\ u_m(0) = u_{0m}, \quad u'_m(0) = u_{1m}, \end{cases}$$

associé aux conditions initiales

$$\forall u_0 \in V \Rightarrow \exists (u_{0m})_{m \in \mathbb{N}^*}, \quad u_{0m} = \sum_{i=1}^{m} g_{im} w_i \longrightarrow u_0 \, lorsque \, m \longrightarrow +\infty, \tag{2.1}$$

$$\forall u_1 \in L^2(\Omega) \Rightarrow \exists (u_{1m})_{m\in\mathbb{N}^*}, \quad u_{1m} = \sum_{i=1}^{m} g'_{im} w_i \longrightarrow u_1 \, lorsque \, m \longrightarrow +\infty. \tag{2.2}$$

Le problème (P_m) est un système d'équations différentielles ordinaires non linéaires et comme la famille $w_1, w_2, ..., w_m$ est linéairement indépendantes, alors le système composé de (P_m), (2.1) et (2.2) admet au moins une solution défini sur $[0, t_m]$. Les estimations a priori qui suivent montrons que t_m est indépendant de m (i.e. $t_m = T$).

Les estimations a priori :

On multiplie la première équation de (P_m) d'indice j par $g'_{jm}(t)$ et l'on somme en j, on obtient

$$(u''_m(t), u'_m(t)) - (\Delta u_m(t), u'_m(t)) + (|u_m(t)|^{p-2} u_m(t), u'_m(t)) = (f(t), u'_m(t)),$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} \int_\Omega u''_m(x,t) u'_m(x,t) dx - \int_\Omega \Delta u_m(x,t) u'_m(x,t) dx + \int_\Omega |u_m(x,t)|^{p-2} u_m(x,t) u'_m(x,t) dx \\ = \int_\Omega f(x,t) u'_m(x,t) dx. \end{aligned} \tag{2.3}$$

En utilisant le formule de Green, on déduit que

$$-(\Delta u_m(t), u'_m(t)) = (\nabla u_m(t), \nabla u'_m(t)) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\nabla u_m(t), \nabla u_m(t)\right),$$

c-à-d

$$-\left(\Delta u_m(t), u'_m(t)\right) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt} \|\nabla u_m(t)\|_2^2, \tag{2.4}$$

et, on peut écrire

$$(u''_m(t), u'_m(t)) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(u'_m(t), u'_m(t)\right) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u'_m(t)\|_2^2, \tag{2.5}$$

de plus, on a

$$\left(|u_m(t)|^{p-2}u_m(t), u'_m(t)\right) = \int_\Omega |u_m(t)|^{p-2}u_m(t)u'_m(t)dx = \frac{1}{p}\frac{d}{dt}\int_\Omega |u_m(t)|^p dx = \frac{1}{p}\|u_m(t)\|_p^p. \tag{2.6}$$

En remplaçent (2.4), (2.5) et (2.6) dans (2.3), on obtient

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\|u'_m(t)\|_2^2 + \frac{1}{2}\|\nabla u_m(t)\|_2^2 + \frac{1}{p}\|u_m(t)\|_p^p\right] = \int_\Omega f(t)u'_m(t)dx.$$

On applique l'inégalité de Young sur le seconde membre tel que $p = 2$, on obtient

$$\int_\Omega f(t)u'_m(t)dx \leq \int_\Omega |f(t)||u'_m(t)|dx \leq \frac{1}{2}\int_\Omega |f(t)|^2 dx + \frac{1}{2}\int_\Omega |u'_m(t)|dx,$$

implique que

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\|u'_m(t)\|_2^2 + \frac{1}{2}\|\nabla u_m(t)\|_2^2 + \frac{1}{p}\|u_m(t)\|_p^p\right] \leq \frac{1}{2}\|f(t)\|_2^2 + \frac{1}{2}\int_\Omega |u'_m(t)|_2^2 dx.$$

On intègre entre $0, t$, on déduit que

$$\int_0^t \left(\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\|u'_m(s)\|_2^2 + \frac{1}{2}\|\nabla u_m(s)\|_2^2 + \frac{1}{p}\|u_m(s)\|_p^p\right]\right) ds \leq \frac{1}{2}\int_0^t \|f(s)\|_2^2 ds + \frac{1}{2}\int_0^t \|u'_m(s)\|_2^2 ds,$$

on obtient

$$\frac{1}{2}\left(\|u'_m(t)\|_2^2 + \|\nabla u_m(t)\|_2^2\right) + \frac{1}{p}\|u_m(t)\|_p^p$$

$$\leq \frac{1}{2}\|u'_m(0)\|_2^2 + \frac{1}{2}\|\nabla u_m(0)\|_2^2 + \frac{1}{p}\|u_m(0)\|_p^p + \frac{1}{2}\int_0^t \|f(s)\|_2^2 ds + \frac{1}{2}\int_0^t \|u'_m(s)\|_2^2 ds.$$

Grâce à l'hypothèse $(H1)$, alors

$$\exists C > 0, \quad \int_0^t \|f(s)\|_2^2 ds \leq C,$$

et d'après (2.1) et (2.2), on déduit que

$$\frac{1}{2}\left(\|u'_m(t)\|_2^2 + \|\nabla u_m(t)\|_2^2\right) + \frac{1}{p}\|u_m(t)\|_p^p \leq \frac{1}{2}\|u_{1m}\|_2^2 + \frac{1}{2}\|\nabla u_{0m}\|_2^2 + \frac{1}{p}\|u_{0m}\|_p^p + C + \frac{1}{2}\int_0^t \|u'_m(s)\|_2^2 ds,$$

implique que

$$\frac{1}{2}\left(\|u'_m(t)\|_2^2 + \|\nabla u_m(t)\|_2^2\right) + \frac{1}{p}\|u_m(t)\|_p^p \leq \frac{1}{2}\|u_1\|_2^2 + \frac{1}{2}\|\nabla u_0\|_2^2 + \frac{1}{p}\|u_0\|_p^p + C + \frac{1}{2}\int_0^t \|u'_m(s)\|_2^2 ds,$$

donc

$$\frac{1}{2}\left(\|u'_m(t)\|_2^2 + \|\nabla u_m(t)\|_2^2\right) + \frac{1}{p}\|u_m(t)\|_p^p \leq C_1 + \frac{1}{2}\int_0^t \|u'_m(s)\|_2^2 ds.$$

Il résulte

$$\|u'_m(t)\|_2^2 + \|\nabla u_m(t)\|_2^2 + \|u_m(t)\|_p^p \leq C_1 + C_2\int_0^t \|u'_m(s)\|_2^2 ds, \tag{2.7}$$

telle que $C_1 = p(\frac{1}{2}\|u_1(m)\|_2^2 + \frac{1}{2}\|\nabla u_0(m)\|_2^2 + \frac{1}{p}\|u_0(m)\|_p^p + C)$ et $C_2 = \frac{p}{2}$.
D'après (2.7), on a

$$\|u'_m(t)\|_2^2 \leq C_1 + C_2\int_0^t \|u'_m(s)\|_2^2 ds,$$

en utilisant lemme de Gronwall, on obtient

$$\|u'_m(t)\|_2^2 \leq C_1 e^{C_2 T} \leq C_3, \tag{2.8}$$

et

$$\|u'_m(t)\|_2^2+\|\nabla u_m(t)\|_2^2+\|u_m(t)\|_p^p \leq C_1+C_2\int_0^t [\frac{1}{2}\|u'_m(s)\|_2^2+\frac{1}{2}\|\nabla u_m(s)\|_2^2+\frac{1}{p}\|u_m(s)\|_p^p]ds.$$

En applique lemme de Gronwall, on obtient

$$\|u'_m(t)\|_2^2+\|\nabla u_m(t)\|_2^2+\|u_m(t)\|_p^p \leq C_1 e^{C_2 T} < C_3, \tag{2.9}$$

(C_3 indépendante de m).

D'où l'indépendance de t_m par rapport à m. De (2.8) et (2.9) on conclut :

$$(u_m) \quad borné \quad dans \quad L^\infty(0,T;V), \tag{2.10}$$

$$(u'_m) \quad borné \quad dans \quad L^\infty(0,T;L^2(\Omega)), \tag{2.11}$$

$$(u_m) \quad borné \quad dans \quad L^\infty(0,T;L^p(\Omega)). \tag{2.12}$$

Passage à la limite :

De (2.10) et (2.11); on déduit qu'on peut extraire un sous-suite (u_{m_k}), de (u_m) telle que

$$u_{m_k} \rightharpoonup^* u \quad dans \quad L^\infty(0,T;V), \tag{2.13}$$

$$u'_{m_k} \rightharpoonup^* u' \quad dans \quad L^\infty(0,T;L^2(\Omega)). \tag{2.14}$$

Par ailleurs, il résulte, en particulier, de (2.10), (2.11) que

$$\begin{cases} (\mathrm{u}_{m_k}) \text{ est borné dans } L^2(0,T;H_0^1(\Omega)), \\ (\mathrm{u}'_{m_k}) \text{ est borné dans } L^2(0,T;L^2(\Omega)) = L^2(Q). \end{cases}$$

On sait que d'après le théorème de Rellich-Kondrachov, l'injection suivante est compacte

$$H^1(Q) \hookrightarrow\hookrightarrow L^2(Q).$$

Donc

$$u_{m_i} \to u \quad dans \quad L^2(0,T;L^2(\Omega)) \quad fort \quad et \quad p.p \quad dans\, Q. \tag{2.15}$$

$$u'_{m_i} \to u \quad dans \quad L^2(0,T;L^2(\Omega)) \quad fort \quad et \quad p.p \quad dans\, Q. \tag{2.16}$$

Comme

$$(|u_m|^{p-2}u_m) \quad est \quad borné \quad dans \quad L^{\frac{p}{p-1}}(0,T,L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega)),$$

et par conséquent

$$|u_{m_i}|^{p-2}u_{m_i} \rightharpoonup^* W \quad dans \quad L^\infty(0,T;L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega)). \tag{2.17}$$

On doit montrer que

$$W = |u|^{p-2}u. \tag{2.18}$$

D'après (2.15), (2.17) et le lemme (1.4.8), on déduit

$$u_{m_i}|u_{m_i}|^{p-2} \to u|u|^{p-2} \quad p.p \quad dans \quad Q \quad et \quad dans \quad L^{\frac{p}{p-1}}(Q), \tag{2.19}$$

Puisque la limite est unique, donc

$$u|u|^{p-2} = W.$$

On montre que cette solution vérifie l'équation (P_m) donc quand on pose $m = m_i$ et on fixe j tel que $m_i > j$, alors

$$(u''_{m_i}(t), w_j) - (\Delta u_{m_i}(t), w_j) + (|u_{m_i}(t)|^{p-2} u_{m_i}(t)), w_j) = (f(t), w_j), \tag{2.20}$$

d'après (2.13), on a

$$(u''_{m_i}, w_j) = \frac{d}{dt}(u'_{m_i}, w_j) \rightharpoonup^* \frac{d}{dt}(u', w_j) = (u'', w_j).$$

De (2.18) et la convergence faible, on déduit

$$\frac{d^2}{dt^2}(u(t), w_j) - (\Delta u(t), w_j) + (|u(t)|^{p-2} u(t), w_j) = (f(t), w_j),$$

comme V_m est dense dans V on obtient pour tout $v \in V$

$$\frac{d^2}{dt^2}(u(t), v) - (\Delta u(t), v) + (|u(t)|^{p-2} u(t), v) = (f(t), v), \forall v \in V.$$

Alors la solution u satisfait de première équation de (P_1).

Reste à montrer que la solution u vérifie les conditions initiales (P_m)

$$u(0) = u_0 \quad et \quad u_t(0) = u_1.$$

D'après (2.13) et (2.14), on a

$$u_{m_i} \rightharpoonup u \quad dans \quad L^\infty(0, T; V) \quad et \quad dans \quad L^\infty(0, T; L^2(\Omega)),$$

$$u'_{m_i} \rightharpoonup u' \quad dans \quad L^\infty(0, T; L^2(\Omega)).$$

Donc (u_{m_i}) est continue sur $[0, T]$ alors continue en 0, implique que

$$u_{0m_i} = u_{m_i}(0) \longrightarrow u(0) = u_0 \quad dans \quad V.$$

D'où $(H2)$.

Par le même technique on vérifie que

$$u_t(0) = u_1.$$

Puisque

$$(u'_{m_i}, w_j) \rightharpoonup (u', w_j) \quad dans \quad L^\infty(0,T),$$

$$(u''_{m_i}, w_j) \rightharpoonup (u'', w_j) \quad dans \quad L^\infty(0,T).$$

Alors

$$(u'_{m_i}(0), w_j) \rightharpoonup (u', w_j)_{t=0} = (u'(0), w_j),$$

et d'après (2.2)

$$(u'_{m_i}(0), w_j) \rightharpoonup (u_1, w_j).$$

On a

$$(u_t(0), w_j) = (u_1, w_j), \forall j.$$

Alors

$$u_t(0) = u_1.$$

D'où $(H3)$.

2.2 Unicité de la solution :

Dans cette section, on démontre l'unicité de la solution en basant sur les hypothèses et théorème président [7].

Soient u, v deux solution de (P_1), on suppose $w = u - v$, vérifie $w \in L^\infty(0,T;V), w' \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$, donc on obtient

$$\begin{cases} u'' - \Delta u + u|u|^{p-2} = f, \\ v'' - \Delta v + v|v|^{p-2} = f. \end{cases}$$

Alors

$$w'' - \Delta w + |u|^{p-2}u - |v|^{p-2}v = 0 \qquad dans \quad \Omega \times (0, T), \tag{2.21}$$

$$w(x,t) = 0 \qquad dans \quad \partial\Omega \times (0, T), \tag{2.22}$$

$$w(x,0) = 0 \qquad dans \quad \Omega, \tag{2.23}$$

$$w'(x,0) = 0 \qquad dans \quad \Omega. \tag{2.24}$$

Multiplient (2.21) par w', on résulte

$$(w''(t), w'(t)) - (\Delta w(t), w'(t)) = (|v|^{p-2}v) - (|u|^{p-2}u, w'(t)),$$

encore sous la forme

$$(w''(t), w'(t)) + (\nabla w'(t), \nabla w(t)) = (|v|^{p-2}v) - (|u|^{p-2}u, w'(t)), \tag{2.25}$$

d'où il vient

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w'(t)\|_2^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla w(t)\|_2^2 = \int_\Omega (|v|^{p-2}v) - (|u|^{p-2}u)w'(t)dx. \tag{2.26}$$

On majorons le second membre de(2.26), on obtient

$$\int_\Omega sup(|u|^{p-2}, |v|^{p-2})|w||w'|dx.$$

D'après l'inégalité de Hölder

$$\int_{\Omega}(|v|^{p-2}v) - (|u|^{p-2}u)w'(t)dx \leq c(\||u|^{p-2}\|_{L^n(\Omega)} + \||v|^{p-2}\|_{L^n(\Omega)})\|w(t)\|_{L^q(\Omega)}\|w'(t)\|_{L^2(\Omega)},$$

où

$$\frac{1}{q} + \frac{1}{n} + \frac{1}{2} = 1. \tag{2.27}$$

Mais d'après $(H4)$, $\quad (p-2)n \leq q$ et d'après (2.27), on a donc

$$|\int_{\Omega}(|v|^{p-2})v - |u|^{p-2}u)w'dx| \leq c(\|u(t)\|_2^{p-2} + \|v(t)\|_2^{p-2})\|w(t)\|_2\|w'(t)\|_2,$$

et comme $u, v \in L^{\infty}(0,T;H_0^1(\Omega))$ on a finalement

$$|\int_{\Omega}(|v|^{p-2})v - |u|^{p-2}u)w'dx| \leq c\|w(t)\|_2\|w'(t)\|_2.$$

Alors (2.26), donne

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w'(t)\|_2^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla w(t)\|_2^2 \leq c\|w(t)\|_2\|w'(t)\|_2.$$

On intégrant de 0 à t, on trouve

$$\frac{1}{2}\|w'(t)\|_2^2 + \frac{1}{2}\|\nabla w(t)\|_2^2 \leq c\int_0^t \|w(s)\|_2\|w'(s)\|_2 ds.$$

Grâce à l'inégalité de Young, on a

$$\|w'(t)\|_2^2 + \|\nabla w(t)\|_2^2 \leq \frac{c}{2}\int_0^t (\|w'(s)\|_2^2 + \|w(s)\|_2^2)ds,$$

$$\|w'(t)\|_2^2 + \|\nabla w(t)\|_2^2 \leq c\int_0^t (\|w(s)\|_2^2 + \|w'(s)\|_2^2)ds.$$

D'après l'inégalité de Poincaré, on déduit que

$$\|w'(t)\|_2^2 + \|\nabla w(t)\|_2^2 \leq C'\int_0^t (\|w'(s)\|_2^2 + \|\nabla w(s)\|_2^2)ds.$$

En utilisant lemme de Gronwall, on obtient

$$\|w'(t)\|_2^2 + \|\nabla w(t)\|_2^2 \leq 0.$$

Donc $w = 0$, c-à-d $u = v \quad$ p.p.

Puisque $u, v \in H_0^1(\Omega)$,

d'où $u = v$.

Chapitre 3

Existence globale de la solution d'équation $\mathbf{u}_{tt} - \Delta u + u_t|u_t|^{m-1} = u|u|^{p-1}$

On étudiant l'existence et unicité du problème (P_2) suivant :

$$
(\mathrm{P}_2)\begin{cases}
u_{tt}(x,t) - \Delta u(x,t) + u_t(x,t)|u_t(x,t)|^{m-1} = u(x,t)|u(x,t)|^{p-1}, & dans \quad \Omega \times [0,T], \\
u(x,t) = 0, & sur \quad \partial\Omega \times [0,T], \\
u(x,0) = \varphi(x), & dans \quad x \in \Omega, \\
u_t(x,0) = \psi(x), & dans \quad x \in \Omega,
\end{cases}
$$

où Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n, n \geq 1, \partial\Omega$ sa frontière et $p, m > 1$.

On supposer les hypothèses suivantes :

$$
(\mathrm{H1}) : \begin{cases}
1<p \leq \frac{n}{n-2}, \quad pour \quad n \geq 3, \\
p>1, \qquad pour \qquad n \leq 2.
\end{cases}
$$

(H2) : $1 <$p $\leq m$.

Nous définissons la fonctionnelle de l'énergie de (P_2)

$$E(t) = \frac{1}{2}\|u_t(t)\|_2^2 + \frac{1}{2}\|\nabla u(t)\|_2^2 - \frac{1}{p+1}\|u(t)\|_{p+1}^{p+1}.$$

Remarque 3.0.1. *Ici les données initiales suffisamment grandes signifient que l'énergie est suffisamment négative.*

On commençons par le lemme suivant

Lemme 3.0.2.

$$E'(t) = -\|u_t(x,t)\|_{m+1}^{m+1} \leq 0, \quad \forall t \geq 0.$$

Preuve :

Multiplier la première équation en (P_2) par $u_t(x,t)$, et intégrer le résultat sur Ω, on obtient

$$\int_\Omega u_{tt}(x,t)u_t(x,t)dx - \int_\Omega \Delta u(x,t)u_t(x,t)dx + \int_\Omega |u_t(x,t)|^{m-1}u_t(x,t)u_t(x,t)dx = \int_\Omega u|u|^{p-1}u_t(x,t)dx,$$

implique

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |u_t(x,t)|^2dx + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |\nabla u(x,t)|^2dx + \int_\Omega |u_t(x,t)|^{m+1}dx = \frac{1}{p+1}\frac{d}{dt}\int_\Omega |u(x,t)|^{p+1}dx,$$

alors

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_t(x,t)\|_2^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla u(x,t)\|_2^2 - \frac{1}{p+1}\frac{d}{dt}\|u(x,t)\|_{p+1}^{p+1} = -\int_\Omega |u_t(x,t)|^{m+1}dx,$$

c-à-d

$$\frac{d}{dt}[\frac{1}{2}\|u_t(x,t)\|_2^2 + \frac{1}{2}\|\nabla u(x,t)\|_2^2 - \frac{1}{p+1}\|u(x,t)\|_{p+1}^{p+1}] = -\int_\Omega |u_t(x,t)|^{m+1}dx,$$

donc

$$E'(t) = -\|u_t(x,t)\|_{m+1}^{m+1}.$$

Ainsi, $E(t)$ est décroissante.

Théorème 3.0.3. *[6] Suppose Sous les hypothèses $(H1)-(H2)$ et pour tous*

$$\varphi \in H_0^1(\Omega), \quad \psi \in L^2(\Omega), \tag{3.1}$$

le problème (P_2) admet une solution globale unique $u(x,t)$, telle que

$$u(x,t) \in C([0,T]; H_0^1(\Omega)),$$

$$u_t(x,t) \in C([0,T]; L^2(\Omega)) \cap L^{m+1}([0,T] \times \Omega),$$

pour tout $T > 0$.

Pour étudier l'existence et l'unicité du problème (P_2) on commençons par :

3.1 Existence Locale :

Dans cette section, nous avons montrons que le problème (P_2) admet une solution unique par le théorème et la proposition suivante.

On définit l'espace H par

$$H = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega).$$

Théorème 3.1.1. *[6] Sous les hypothèse $(H1) - (H2), m > 1$ et pour tout :*

$$\begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix} \in H,$$

il existe une solution unique $u(x,t)$ du (P_2) telle que :

$$U = \begin{pmatrix} u \\ u_t \end{pmatrix} \in Y_T = \left\{ U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}; U \in C([0,T]; H), u_2 \in L^{m+1}([0,T] \times \Omega) \right\},$$

pour T assez petit.

Soit $U = \begin{pmatrix} u \\ u_t \end{pmatrix} \in H$ on suppose $v = u_t$, puis $U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ donc la première équation du problème (P_2) équivalant à

$$\begin{cases} u_t = v, \\ v_t - \Delta u + v|v|^{m-1} = u|u|^{p-1}, \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} u_t \\ v_t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v \\ -\Delta u \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ v|v|^{m-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ u|u|^{p-1} \end{pmatrix},$$

alors

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & I \\ -\Delta & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ v|v|^{m-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ u|u|^{p-1} \end{pmatrix},$$

$$\frac{d}{dt}U - AU + g(U) = f(U), \quad U(x,0) = \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix}, \tag{3.2}$$

telles que

$$A = \begin{pmatrix} 0 & I \\ \Delta & 0 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} u \\ u_t \end{pmatrix},$$

$$g\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ u_2|u_2|^{m-1} \end{pmatrix} \quad et \quad f\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ u_1|u_1|^{p-1} \end{pmatrix}.$$

Pour montrons d'abord qu'il existe une solution unique de l'équation :

$$\partial_t V - AV + g(V) = f(U), \quad V(x,0) = \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix}. \tag{3.3}$$

On commençons par la proposition suivante :

Proposition 3.1.2. *[6] Suppose les hypothèses $(H1)-(H2)$ et pour tout $U \in C([0,T];H)$, il existe une solution unique $V \in Y_T$ de (3.3) et de l'énergie*

$$\frac{1}{2}\|V(.,t)\|_H^2 - \frac{1}{2}\|V(.,s)\|_H^2 + \int_s^t (g(V),V)_H d\tau = \int_s^t (f(U),V)_H d\tau, \quad pour\, t \geq s \geq 0.$$

On définie le produit scalaire $(U,V)_H$ dans H, par

$$(U,V)_H = (\nabla u_1, \nabla v_1)_{L^2(\Omega)} + (u_2, v_2)_{L^2(\Omega)},$$

pour tous $U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ de H.

Preuve de proposition :

L'espace de l'énergie et la fermeture de l'espace de fonctions $U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ avec $u_1, u_2 \in C_0^\infty(\Omega)$ pour la norme de H.

La condition initiale $\begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix}$ de (3.2) est approximeté par l'élément $\begin{pmatrix} \varphi^\nu \\ \psi^\nu \end{pmatrix}$ avec $\varphi^\nu, \psi^\nu \in C_0^\infty(\Omega)$. De plus pour tout $U \in C([0,T]; H)$ approximeté par $U^\nu \in C([0,T]; C_0^\infty(\Omega) \times C_0^\infty(\Omega))$, en déduit que

$$V^\nu = \begin{pmatrix} v^\nu \\ v_t^\nu \end{pmatrix}$$

est solution de problème de Cauchy

$$\partial_t V^\nu - AV^\nu + g(V^\nu) = f(U^\nu), \quad V^\nu(x,0) = \begin{pmatrix} \varphi^\nu \\ \psi^\nu \end{pmatrix},$$

telle que

$$v^\nu \in L^\infty([0,T]; H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)), v_t^\nu \in L^\infty([0,T], H_0^1(\Omega)), v_{tt}^\nu \in L^\infty([0,T], L^2(\Omega)), v_t^\nu \in L^{m+1}([0,T] \times \Omega).$$

On démontrer que $\{V^\nu\}$ est une suite de Cauchy in Y_T. On prend la norme en Y_T est

$$\|U\|_{Y_T} = sup_{t\in[0,T]} \|U(.,t)\|_H + \|u_2\|_{L^{m+1}([0,T]\times\Omega)},$$

pour tout $U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \in Y_T$.
Nous commençons la preuve que $\{V^\nu\}$ est une suite de Cauchy dans $C([0,T]; H)$.
Posons $W = V^\nu - V^\mu$ et ν, μ donné. Alors W est une solution du problème de Cauchy

$$\partial_t W - AW + g(V^\nu) - g(V^\mu) = f(U^\nu) - f(U^\mu), \quad W(x,0) = \begin{pmatrix} \varphi^\nu - \varphi^\mu \\ \psi^\nu - \psi^\mu \end{pmatrix}.$$

Maintenant multiplie cette équation par W, on obtient

$$<\partial_t W, W>_H - <AW, W>_H + <g(V^\nu) - g(V^\mu), W>_H = <f(U^\nu) - f(U^\mu), W>_H . (3.4)$$

Puisque

$$<AV,V> = < \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \Delta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} >_H,$$

$$= < \begin{pmatrix} v_2 \\ \Delta v_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} >_H = <\nabla v_2, \nabla v_1>_{L^2(\Omega)} + <\Delta v_1, v_2>_{L^2(\Omega)},$$

$$= <\nabla v_1, \nabla v_2>_{L^2(\Omega)} - <\nabla v_1, \nabla v_2>_{L^2(\Omega)} = 0,$$

donc l'égalité d'énergie est

$$\frac{1}{2}\|W(.,t)\|_H^2 - \frac{1}{2}\|W(.,0)\|_H^2 + \int_0^t (g(V^\nu) - g(V^\mu), W)_H d\tau = \int_0^t (f(U^\nu) - f(U^\mu), W)_H d\tau. \tag{3.5}$$

Puis $\|W(.,0)\|_H^2$ est petit pour ν, μ assez grand et puisque $\begin{pmatrix} \varphi^\nu \\ \psi^\nu \end{pmatrix}$ est une suite de Cauchy dans H.

Le terme

$$<(g(V^\nu) - g(V^\mu), V^\nu - V^\mu)_H> = < \begin{pmatrix} 0 \\ v_t^\nu |v_t^\nu|^{m-1} - v_t^\mu |v_t^\mu|^{m-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v^\nu - v^\mu \\ v_t^\nu - v_t^\mu \end{pmatrix} >_H,$$

$$= <v_t^\nu |v_t^\nu|^{m-1} - v_t^\mu |v_t^\mu|^{m-1}, v_t^\nu - v_t^\mu>_{L^2(\Omega)}.$$

D'où

$$<(g(V^\nu) - g(V^\mu), V^\nu - V^\mu)_H> = <v_t^\nu |v_t^\nu|^{m-1} - v_t^\mu |v_t^\mu|^{m-1}, v_t^\nu - v_t^\mu>_{L^2(\Omega)}$$

est positive, car g est monotone.

Pour le terme droite de (3.1), nous besoins démontrer que

$$|(f(U) - f(\bar{U}), V - \bar{V})_H| \leq C(\|U\|_H + \|\bar{U}\|_H)^{p-1}\|U - \bar{U}\|_H \|V - \bar{V}\|_H. \tag{3.6}$$

Pour $U, \bar{U}, V, \bar{V} \in H$ et $C = C(\Omega, T)$ est une constante dépendent de Ω et T.

Soient

$$U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \bar{U} = \begin{pmatrix} \bar{u_1} \\ \bar{u_2} \end{pmatrix}, V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \bar{V} = \begin{pmatrix} \bar{v_1} \\ \bar{v_2} \end{pmatrix},$$

donc on déduit que

$$<(f(U)-f(\bar{U}),V-\bar{V})>_H=<\begin{pmatrix}0\\ u_1|u_1|^{p-1}-\bar{u}_1|\bar{u}_1|^{p-1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}v_1\\ v_2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\bar{v}_1\\ \bar{v}_2\end{pmatrix}>_H,$$

$$=<\begin{pmatrix}0\\ u_1|u_1|^{p-1}-\bar{u}_1|\bar{u}_1|^{p-1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}v_1-\bar{v}_1\\ v_2-\bar{v}_2\end{pmatrix}>_H=<u_1|u_1|^{p-1}-\bar{u}_1|\bar{u}_1|^{p-1},v_2-\bar{v}_2>_{L^2(\Omega)},$$

implique que

$$|<f(U)-f(\bar{U}),V-\bar{V}>_H|\leq\int_\Omega|u_1|u_1|^{p-1}-\bar{u}_1|\bar{u}_1|^{p-1}||v_2-\bar{v}_2|dx,$$

$$|<f(U)-f(\bar{U}),V-\bar{V}>_H|\leq\int_\Omega\sup(|u_1|^{p-1}|,|\bar{u}_1|^{p-1})\|u_1-\bar{u_1}\|_2\|v_2-\bar{v_2}\|_2,$$

$$\leq C(\|u_1\|_2^{p-1}+\|\bar{u}_1\|_2^{p-1})\|U-\bar{U}\|_H\|V-\bar{V}\|_H,$$

$$\leq C(\|\nabla u_1\|_2^{p-1}+\|\nabla\bar{u}_1\|_2^{p-1})\|U-\bar{U}\|_H\|V-\bar{V}\|_H,$$

$$\leq C(\|U\|_H+\|\bar{U}\|_H)^{p-1}\|U-\bar{U}\|_H\|V-\bar{V}\|_H.$$

On a

$$|(f(U)-f(\bar{U}),V-\bar{V})_H|\leq\int_\Omega(|u_1|^{p-1}+|\bar{u_1}|^{p-1})|u_1-\bar{u_1}||v_2-\bar{v_2}|dx,$$

$$\leq C\|u_1-\bar{u_1}\|_{\frac{2n}{(n-2)}}\|v_2-\bar{v_2}\|_2(\|u_1\|_{n(p-1)}^{p-1}+\|\bar{u_1}\|_{n(p-1)}^{p-1}),$$

$$|(f(U)-f(\bar{U}),V-\bar{V})_H|=|(u_1|u_1|^{p-1}-\bar{u_1}|\bar{u_1}|^{p-1},v_2-\bar{v_2})|. \tag{3.7}$$

Puisque

$$\frac{1}{\frac{2n}{n-2}}+\frac{1}{2}+\frac{1}{q}=1\Rightarrow\frac{1}{q}=1-\frac{n-2}{2n}-\frac{1}{2}=\frac{2n-n+2-n}{2n}=\frac{1}{n}\Rightarrow q=n.$$

D'après l'inégalité de Hölder, on a

$$|<u_1|u_1|^{p-1} - \bar{u_1}|\bar{u_1}|^{p-1}, v_2 - \bar{v_2}>_{L^2(\Omega)}| \leq \|u_1 - \bar{u_1}\|_{\frac{2n}{n-2}} \|v_2 - \bar{v_2}\|_2 (\|u_1\|_n^{p-1} + \|\bar{u}_1\|_n^{p-1}),$$

comme

$$\|u_1\|_n^{p-1} = \int_\Omega (|u_1|^{n(p-1)})^{\frac{1}{n}} dx = \int_\Omega (|u_1|^{n(p-1)})^{\frac{p-1}{n(p-1)}}) dx = \|u_1\|_{n(p-1)}^{p-1},$$

donc

$$|(u_1|u_1|^{p-1} - \bar{u_1}|\bar{u_1}|^{p-1}, v_2 - \bar{v_2})|_{L^2(\Omega)} \leq \|u_1 - \bar{u_1}\|_{\frac{2n}{n-2}} \|v_2 - \bar{v_2}\|_2 + (\|u_1\|_{n(p-1)}^{p-1} + \|\bar{u}_1\|_{n(p-1)}^{p-1}).$$

Le plongement de Sobolev donne

$$\|u_1 - \bar{u_1}\|_{\frac{2n}{(n-2)}} \leq C \|\nabla(u_1 - \bar{u_1})\|_2 \leq C \|U - \bar{U}\|_H.$$

Grâce à $(H1)$, implique que

$$n(p-1) \leq \frac{2n}{n-2}, \quad alors \quad \|u_1\|_{n(p-1)} \leq C \|u_1\|_{\frac{2n}{n-2}}.$$

Et d'après le plongement de Sobolev $L^{2n/(n-2)} \subset H^1$ implique

$$\|u\|_{n(p-1)}^{p-1} \leq C \|U\|_H^{p-1},$$

donc de $(H1)$, on arrive à (3.6). est vérifié, on dérive de (3.5)

$$\|W(.,t)\|_H^2 \leq \|W(.,0)\|_H^2 + C \int_0^t \|U^\nu - U^\mu\|_H \|W(.,\tau)\|_H d\tau.$$

D'après lemme de Gronwall, on a

$$\begin{aligned} \|W(.,t)\|_H &= \|V^\nu(.,t) - V^\mu(.,t)\|_H, \\ &\leq \|W(.,0)\|_H^2 + C \|U^\nu - U^\mu\|_H \int_0^t \|W(.,\tau)\|_H d\tau, \\ &\leq C \|V^\nu(.,0) - V^\mu(.,0)\|_H + CT \|U^\nu - U^\mu\|_{C([0,T];H)}. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Alors $\{V^\nu\}$ est une suite de Cauchy dans $C([0,T];H)$, puisque $\{U^\nu\}$ et $\{V^\nu(.,0)\}$ sont des suites de Cauchy dans $C([0,T];H)$ et H, respectivement.On vérifie la norme $\|v_t^\nu - v_t^\mu\|_{L^{m+1}([0,T]\times\Omega)}$, par l'inégalité

$$<g(V^\nu) - g(V^\mu), W>_H \geq C\|v_t^\nu - v_t^\mu\|_{L^{m+1}([0,T]\times\Omega)}^{m+1},$$

on a

$$(\alpha|\alpha|^{m-1} - \beta|\beta|^{m-1})(\alpha - \beta) \geq c|\alpha - \beta|^{m+1}, \quad \textit{pour} \quad \textit{tous} \quad \alpha, \beta \quad \textit{des} \quad \textit{réels}.$$

Cette estimation combinée avec (3.5) et (3.6), on obtient

$$\begin{aligned} \|v_t^\nu - v_t^\mu\|_{L^{m+1}([0,T]\times\Omega)}^{m+1} &\leq C\|V^\nu(.,0) - V^\mu(.,0)\|_H^2 \\ +C_R \int_0^T \|U^\nu(.,\tau) - U^\mu(.,\tau)\|_H &\|V^\nu(.,\tau) - V^\mu(.,\tau)\|_H d\tau. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Alors $\{v_t^\nu\}$ est une suite de Cauchy dans $L^{m+1}([0,T]\times\Omega)$. Par conséquent $\{V^\nu\}$ est une suite de Cauchy dans Y_T. Soit $V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ sa limite dans Y_T. Nous verrons que V est une solution faible de (3.3) au sens suivante. Pour toute $k \in H_0^1 \cap L^{m+1}(\Omega)$ l'équation

$$\frac{d}{dt}(v_t, k) + (\nabla v, \nabla k) + (v_t|v_t|^{m-1}, k) = (u|u|^{p-1}, k), \quad \forall t \in [0,T]. \tag{3.10}$$

En multiplier l'équation

$$v_{tt}^\nu - \Delta v^\nu + v_t^\nu|v_t^\nu|^{m-1} = u^\nu|u^\nu|^{p-1}$$

par $k \in H_0^1(\Omega) \cap L^{m+1}(\Omega)$, on a

$$\frac{d}{dt}(v_t^\nu, k) + (\nabla v^\nu, \nabla k) + (v_t^\nu|v_t^\nu|^{m-1}, k) = (u^\nu|u^\nu|^{p-1}, k). \tag{3.11}$$

Lorsque $\nu \to \infty$, on a

$$(\nabla v^\nu, \nabla k) \to (\nabla v, \nabla k),$$

$$(v_t^\nu |v_t^\nu|^{m-1}, k) \to (v_t|v_t|^{m-1}, k),$$

$$(u_t^\nu |u_t^\nu|^{p-1}, k) \to (u_t|u_t|^{p-1}, k),$$

dans $C([0,T])$.

Nous avons ainsi $\lim_{\nu\to\infty}(v_t^\nu, k) = (v_t, k)$ est une fonction absolument continue, donc (3.10) est valable pour presque tout $t \in [0,T]$. Pour l'égalité d'énergie (3.5), on part l'égalité d'énergie pour $\{v^\nu\}$ et procéder de la même manière pour l'établir pour v. Pour prouver l'unicité du la solution de (3.3) on prend $U, \bar{U}$ dans $C([0,T]; H)$ et soit $V, \bar{V}$ les solutions correspondantes de (3.1). Il clair que $W = V - \bar{V}$.

On a

$$\frac{1}{2}\|W(.,t)\|_H^2 + \int_0^t (g(V) - g(\bar{V}), W)_H d\tau = \int_0^t (f(U) - f(\bar{U}), W)_H d\tau. \tag{3.12}$$

Si $U = \bar{U}$, alors cette identité implique $W = 0$ et la solution est unique.

Preuve de Théorème 3.1.1 :

Pour $U \in C([0,T]; H)$ nous définissons $V = \phi(U)$ pour V est une solution de (3.3). D'après (3.1.2) montre que ϕ est bien défini et ça correspond

$$X_T = X(T, \varphi, \psi) = \{U \in C([0,T]; H); U(x,0) = \begin{pmatrix}\varphi\\ \psi\end{pmatrix}\}$$

dans Y_T nous prouvons que

i) ϕ une application de la boule B_R de rayon R dans X_T sur lui-même,

ii) ϕ est une contraction dans B_R.

Maintenant vérifies les deux propriétés.

première propriété nous choisissons

$$U \in B_R = \{U \in X_T; sup_{0\leq t\leq T} \|U(.,t)\|_H \leq R\}.$$

Alors $V = \phi(U)$ résout

$$\partial_t V - AV + g(V) = f(U).$$

En utilisant l'égalité d'énergie de (3.1.2), on obtient

$$\frac{1}{2}\|V(.,t)\|_H^2 - \frac{1}{2}\|V(.,0)\|_H^2 + \int_0^t (g(V),V)_H d\tau = \int_0^t (f(U),V)_H d\tau.$$

Puisque

$$(g(V),V)_H = (v_2|v_2|^{m-1}, v_2)_{L^2} \geq 0,$$

donc

$$\frac{1}{2}\|V(.,t)\|_H^2 - \frac{1}{2}\|V(.,0)\|_H^2 \leq \int_0^t |(f(U),V)_H| d\tau.$$

La preuve de (3.6), on obtient

$$|(f(U),V)_H| \leq C\|U\|_H^p \|V\|_H.$$

Ainsi, nous dérivons l'estimation

$$\|V(.,t)\|_H^2 - \|V(.,0)\|_H^2 \leq CR^p \int_0^t \|V(.,\tau)\|_H d\tau.$$

Avec un autre constant C indépendant de t, T et R, on a

$$\|V(.,t)\|_H \leq C\|V(.,0)\|_H + CR^p T.$$

Choisir R suffisamment grande et T suffisamment petit, on obtient

$$\sup_{0\leq t\leq T} \|V(.,t)\|_H \leq R,$$

alors $V \in B_R$ et ***i)*** est vérifie.

Maintenant vérifier deuxième propriété nous prenons $U, \bar{U} \in X_T$.

On a

$$V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \phi(U) \quad et \quad \bar{v} = \begin{pmatrix} \bar{v_1} \\ \bar{v_2} \end{pmatrix} = \phi(\bar{U}).$$

Alors $W = V - \bar{V}$ résout l'équation :

$$\partial_t W - AW + g(V) - g(\bar{V}) = f(U) - f(\bar{U}).$$

Maintenant on applique l'identité énergétique (3.12), alors la monotonie de g et l'estimation (3.6) donnent

$$\|W(.,t)\|_H^2 \leq C \int_0^t (\|U\|_H + \|\bar{U}\|_H)^{p-1} \|W(.,\tau)\|_H \|U(.,\tau) - \bar{U}(.,\tau)\|_H d\tau, \tag{3.13}$$

$$\|W(.,t)\|_H^2 \leq CR^{p-1} \|U(.,\tau) - \bar{U}(.,\tau)\|_{C([0,T];H)} \int_0^t \|W(.,\tau)\|_H d\tau.$$

Donc

$$\|W\|_{C([0,T];H)} \leq C(\|U\|_{C([0,T];H)} + \|\bar{U}\|_{C([0,T];H)})^{p-1} \|U - \bar{U}\|_{C([0,T];H)}. \tag{3.14}$$

Quand $U, \bar{U} \in B_R$, nous choisissons T si petit que $CR^{p-1}T < 1$. Donc, de (3.14) on conclut que ϕ est une contraction dans B_R. Le théorème d'application de la contraction garantit alors l'existence d'un unique U satisfaisant $U = \phi(U)$. C'est une solution de (P_2). Pour prouver l'unicité de cette solution nous utilisons (3.13) avec $V = U$ et $\bar{U} = \bar{V}$ et obtenir

$$\|U(.,t) - \bar{U}(.,t)\|_H^2 \leq C \int_0^t (\|U\|_H + \|\bar{U}\|_H)^{p-1} \|U(.,\tau) - \bar{U}(.,\tau)\|_H^2 d\tau.$$

Alors lemme de Gronwall donne

$$\|U(.,t) - \bar{U}(.,t)\|_H = 0.$$

D'où $U = \bar{U}$.

3.2 Existence Globale :

Dans cette partie, d'après l'existence locale on étude principalement l'existence globale d'une solution du problème (P_2)[6].

On pose l'énergie usuelle

$$e(t) = \frac{1}{2}\|u_t(.,t)\|_2^2 + \frac{1}{2}\|\nabla u(.,t)\|_2^2.$$

Donc l'énergie est modifier

$$E(t) = e(t) - \frac{1}{p+1}\|u(t)\|_{p+1}^{p+1}.$$

De l'identité énergétique de (3.1.2), on obtient

$$e'(t) = -\|u_t(.,t)\|_{m+1}^{m+1} + \int_\Omega uu_t|u|^{p-1}dx, \tag{3.15}$$

d'autre part, nous avons

$$\frac{1}{p+1}\frac{d}{dt}\|u(t)\|_{p+1}^{p+1} = \int_\Omega uu_t|u|^{p-1}dx. \tag{3.16}$$

Donc l'inégalité (3.15) et la définition du modificateur énergie impliquent :

$$E'(t) = -\|u_t(.,t)\|_{m+1}^{m+1} + 2\int_\Omega uu_t|u|^{p-1}dx. \tag{3.17}$$

D'après l'inégalité de Hölder, on a

$$|\int_\Omega uu_t|u|^{p-1}dx| \leq \int_\Omega |u||u_t|^p dx \leq (\int_\Omega |u|^{p+1}dx)^{\frac{p}{p+1}}(\int_\Omega |u_t|^{p+1}dx)^{\frac{1}{p+1}} \leq \|u\|_{p+1}^p\|u_t\|_{p+1}.$$

Maintenant on applique l'inégalité de Young

$$|\int_\Omega uu_t|u|^{p-1}dx| \leq C(\varepsilon)\|u\|_{p+1}^{p+1} + \varepsilon\|u_t\|_{p+1}^{p+1}.$$

Alors

$$E'(t) \leq -\|u_t(.,t)\|_{m+1}^{m+1} + 2C(\varepsilon)\|u\|_{p+1}^{p+1} + 2\varepsilon\|u_t\|_{p+1}^{p+1}. \tag{3.18}$$

En notant que

$$m+1 \geq p+1 \Rightarrow \|u_t\|_{m+1} \geq \|u_t\|_{p+1},$$

$$\Rightarrow \|u_t\|_{m+1}^{m+1} \geq \|u_t\|_{p+1}^{p+1},$$

$$\Rightarrow -\|u_t\|_{m+1}^{m+1} \leq -\|u_t\|_{p+1}^{p+1}.$$

Donc

$$E'(t) \leq -\|u_t\|_{p+1}^{p+1} + 2C(\varepsilon)\|u\|_{p+1}^{p+1} + 2\varepsilon\|u_t\|_{p+1}^{p+1} \leq C(e(t) - \frac{1}{p+1}\|u_t\|_{p+1}^{p+1},$$

$$p > 1 \Rightarrow p+1 > 2 \Rightarrow \|u_t\|_{p+1}^{p+1} \geq \|u_t\|_2^{p+1} \geq \|u_t\|_2^2 \Rightarrow -\|u_t\|_{p+1}^{p+1} \leq -\|u_t\|_2^2,$$

$$E'(t) \leq -C\|u_t\|_2^2 + 2C(\varepsilon)\|u\|_{p+1}^{p+1} + 2\varepsilon\|u_t\|_{p+1}^{p+1},$$

$$E'(t) \leq -C(\|u_t\|_2^2 + \|u\|_{p+1}^{p+1}) + 2\varepsilon\|u_t\|_{p+1}^{p+1}.$$

On choisie ε suffisamment petit, on obtient

$$E'(t) \leq CE(t). \tag{3.19}$$

D'après lemme de Gronwall, on a

$$E(t) \leq E(0)e^{Ct}. \tag{3.20}$$

Chapitre 4

Existence globale de la solution d'équation $u_{tt} - \Delta u + a(1 + |u_t|^{m-2})u_t + bu|u|^{p-2} = 0$

Dans ce travail, on étudions l'existence de la solution globale et la décroissance d'énergie du problème (P_3) suivant

$$
(\mathrm{P}_3)\begin{cases}
u_{tt}(x,t) - \Delta u(x,t) + a(1 + |u_t(x,t)|^{m-2})u_t(x,t) + bu(x,t)|u(x,t)|^{p-2} = 0, & dans \quad \Omega \times [0,T], \\
u(x,t) = 0, & sur \quad \partial\Omega \times [0,T], \\
u(x,0) = u_0(x), & dans \quad x \in \Omega, \\
u_t(x,0) = u_1(x), & dans \quad x \in \Omega,
\end{cases}
$$

où Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n (n \in \mathbb{N}^*)$ et $\partial\Omega$ sa frontière, $a, b > 0$ et $m, p > 2$.

On supposer l'hypothèse suivante
(H1) : p $\leq 2\frac{n-1}{n-2}$, $\quad pour \quad n \geq 3$.

Théorème 4.0.1. *[8] Sous l'hypothèse $(H1), m > 2, p > 2,$ et pour tout*

$$(u_0, u_1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega),$$

alors le problème (P_3) admet une solution globale unique telle que

$$u \in C\left([0,\infty]; H_0^1(\Omega)\right), \quad u_t \in C\left([0,\infty]; L^2(\Omega) \cap L^m(\Omega \times [0,\infty]\right). \tag{4.1}$$

Théorème 4.0.2. *[8] Sous l'hypothèse $(H1)$ et $2 \leq m \leq p$, alors il existe deux constantes positives K et α telles que toute solution de (P_3) dans la classe (4.1) satisfait*

$$E(t) \leq K \exp(-\alpha t), \quad \forall t \geq 0. \tag{4.2}$$

4.1 Existence Globale :

Dans cette section, nous montrons que l'énergie de la solution, définie par

$$E(t) = \frac{1}{2}\|u_t(x,t)\|_2^2 + \frac{1}{2}\|\nabla u(x,t)\|_2^2 + \frac{b}{p}\|u(x,t)\|_p^p, \tag{4.3}$$

et décroissante exponentiellement si $2 \leq m \leq p$. A cet effet, nous avons à partir de l'inégalité de Poincaré et des théorèmes de plongement de Sobolev, qu'il existe $\beta > 1$ dépendent de Ω seulement telle que

$$\|u\|_2 \leq \beta\|\nabla u\|_2; \quad \|u\|_m \leq \beta\|u\|_p, \quad m \leq p, \quad \|u\|_m \leq \beta\|\nabla u\|_2. \tag{4.4}$$

Preuve :

Multiplier la première équation en (P_3) par $u_t(x,t)$, et intégrer le résultat sur Ω, obtenir

$$\int_\Omega u_{tt}(x,t)u_t(x,t)dx - \int_\Omega \Delta u(x,t)u_t(x,t)dx + a\int_\Omega (1 + |u_t(x,t)|^{m-2})u_t(x,t)u_t(x,t)dx$$

$$+b\int_\Omega u(x,t)|u(x,t)|^{p-2}u_t(x,t)dx = 0,$$

on a

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |u_t(x,t)|^2dx+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |\nabla u(x,t)|^2dx+a\int_\Omega (u_t^2(x,t)+|u_t(x,t)|^m)dx+\frac{b}{p}\frac{d}{dt}\int_\Omega |u(x,t)|^pdx = 0,$$

implique

$$\frac{d}{dt}[\frac{1}{2}\|u_t(x,t)\|_2^2+\frac{1}{2}\|\nabla u(x,t)\|_2^2+\frac{b}{p}\|u(x,t)\|_p^p] = -a\int_\Omega (u_t^2(x,t)+|u_t(x,t)|^m)dx,$$

$$E(t) = \frac{1}{2}\|u_t(x,t)\|_2^2+\frac{1}{2}\|\nabla u(x,t)\|_2^2+\frac{b}{p}\|u(x,t)\|_p^p,$$

d'après (4.3), on déduit que

$$E'(t) = -a\left[\int_\Omega |u_t(x,t)|^2dx+\int_\Omega |u_t(x,t)|^mdx\right] \leq 0. \tag{4.5}$$

Ainsi, $E'(t)$ est décroissante.

On définit la fonction H comme suite

$$H(t) := E(t)+\varepsilon\int_\Omega u(x,t)u_t(x,t)dx, \tag{4.6}$$

tell que $\varepsilon > 0$ et $u(t) \in H_0^1(\Omega)$.

C-à-d

$$H(t)-E(t) = \varepsilon\int_\Omega uu_t(x,t)dx,$$

en utilisant l'inégalité de Cauchy Schwarz et Young, on obtient

$$|H(t)-E(t)| \leq \varepsilon\int_\Omega |u||u_t(x,t)|dx \leq \varepsilon\|u\|_2\|u_t(x,t)\|_2dx,$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2}\|u\|_2^2 dx + \frac{\varepsilon}{2}\|u_t(x,t)\|_2^2 dx \leq \frac{\varepsilon}{2}\|u\|_2^2 + \varepsilon\|u_t(x,t)\|_2^2 \leq \frac{\varepsilon}{2}\|u\|_2^2 + \varepsilon E(t),$$

grâce à (4.4), de sorte que

$$|H(t) - E(t)| \leq \frac{\varepsilon}{2}\beta^2\|\nabla u\|_2^2 + \varepsilon E(t) \leq \varepsilon\beta^2 E(t) + \varepsilon E(t),$$

d'où

$$|H(t) - E(t)| \leq \varepsilon(1+\beta^2)E(t). \tag{4.7}$$

Dérivons par rapport à t la fonction H définie par (4.6), on a

$$H'(t) = E'(t) + \varepsilon\int_\Omega u^2(x,t)dx + \varepsilon\int_\Omega u(x,t)u_{tt}(x,t)dx,$$

en utilisons la première équation du problème (P_3), d'après l'intégration par partie, on obtient

$$H'(t) = -a[\int_\Omega u_t^2(x,t)dx + \int_\Omega |u_t(x,t)|^m dx] + \varepsilon\int_\Omega u^2(x,t)dx$$

$$+\varepsilon\int_\Omega u(x,t)[\Delta u(x,t) - a(1+|u_t(x,t)|^{m-2})u_t(x,t) - bu(x,t)|u(x,t)|^{p-2}]dx,$$

$$\begin{aligned} H'(t) = -a\int_\Omega |u_t(x,t)|^2 dx - a\int_\Omega |u_t(x,t)|^m dx + \varepsilon\int_\Omega [u_t^2 - |\nabla u|^2](x,t)dx \\ -a\varepsilon\int_\Omega u_t u(x,t)dx - a\varepsilon\int_\Omega |u_t|^{m-2}u_t u(x,t)dx - \varepsilon b\int_\Omega |u(x,t)|^p dx, \end{aligned} \tag{4.8}$$

$$= -a\int_\Omega |u_t(x,t)|^2 dx - a\int_\Omega |u_t(x,t)|^m dx + \frac{3}{2}\varepsilon\int_\Omega u_t^2(x,t)dx - \frac{1}{2}\varepsilon\int_\Omega |\nabla u(x,t)|^2 dx$$

$$-a\varepsilon\int_\Omega u_t u(x,t)dx - a\varepsilon\int_\Omega |u_t|^{m-2}u_t u(x,t)dx - b(1-\frac{1}{p})\varepsilon\int_\Omega |u(x,t)|^p dx - \varepsilon E(t).$$

$$\le -a\int_\Omega |u_t(x,t)|^2dx - a\int_\Omega |u_t(x,t)|^m dx + \frac{3}{2}\varepsilon\int_\Omega u_t^2(x,t)dx$$
$$-\frac{1}{2}\varepsilon\int_\Omega |\nabla u(x,t)|^2dx - a\varepsilon\int_\Omega u_t u(x,t)dx - a\varepsilon\int_\Omega |u_t|^{m-2}u_t u(x,t)dx - \varepsilon E(t).$$

Puisque

$$a|\int_\Omega u_t u(x,t)dx| \le \frac{1}{4}\int_\Omega |\nabla u(x,t)|^2dx + a^2\beta\int_\Omega |u_t(x,t)|^2dx,$$

et d'après l'inégalité (4.3), on déduit que

$$\begin{aligned} H'(t) \le -a\int_\Omega |u_t(x,t)|^2dx - a\int_\Omega |u_t(x,t)|^m dx + (\frac{3}{2}+a^2\beta)\varepsilon\int_\Omega u_t^2(x,t)dx \\ -\frac{1}{4}\varepsilon\int_\Omega |\nabla u(x,t)|^2dx - a\varepsilon\int_\Omega |u_t|^{m-2}u_t u(x,t)dx - \varepsilon E(t). \end{aligned} \tag{4.9}$$

On applique l'inégalité de Young

$$XY \le \delta X^p + c(\delta)Y^q, \quad X,Y\ge 0, \quad \delta, c(\delta)>0, \quad \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1,$$

avec $p=m$ et $q=\frac{m}{m-1}$, on obtient

$$|\int_\Omega |u_t|^{m-2}u_t u(x,t)dx| \le \delta\|u\|_m^m + c(\delta)\|u_t\|_m^m, \quad \forall\varepsilon>0.$$

Donc (4.1) devient

$$H'(t) \le -a\int_\Omega |u_t(x,t)|^2dx - a\int_\Omega |u_t(x,t)|^m dx + (\frac{3}{2}+a^2\beta)\varepsilon\int_\Omega u_t^2(x,t)dx$$

$$-\frac{1}{4}\varepsilon\int_\Omega |\nabla u(x,t)|^2dx - a[\delta\|u\|_m^m + c(\delta)\|u_t\|_m^m] - \varepsilon E(t), \quad \delta>0,$$

qui donne

$$\begin{aligned} H'(t) \le -\varepsilon E(t) - \frac{1}{4}\varepsilon\|\nabla u\|_2^2 + a\varepsilon\delta\|u\|_m^m - \left[a - (\frac{3}{2}+a^2\beta)\varepsilon\right]\int_\Omega u_t^2(x,t)dx \\ -a[1-\varepsilon c(\delta)]\|u_t\|_m^m, \quad \forall\delta>0. \end{aligned} \tag{4.10}$$

Jusque là, on distingue deux cas

•*Pour* $\|u\|_m \leq 1$. Dans ce cas nous avons $\|u\|_m^m \leq \|u\|_m^2$; Par conséquent

$$\frac{1}{4}\|\nabla u\|_2^2 + a\delta\|u\|_m^m \geq \frac{1}{4}\|\nabla u\|_2^2 + a\delta\|u\|_m^2 \geq 0, \tag{4.11}$$

si $\delta \leq \delta_1 = \frac{1}{4a\beta^2}$(β est un constant).

•*Pour* $\|u\|_m \geq 1$. Dans ce cas nous avons $\|u\|_m^m \leq \|u\|_m^p \leq \beta^p\|u\|_p^p$. Cela implique que

$$\frac{1}{2}E(t) - a\delta\|u\|_m^m \geq \frac{b}{2p}\|u\|_p^p - a\delta\|u\|_m^m \geq \left(\frac{b}{2p} - a\delta\beta^p\right)\|u\|_p^p \geq 0, \tag{4.12}$$

si $\delta \leq \delta_2 = \frac{b}{2ap\beta^2}$. Donc en prenant $\delta \leq \min\{\delta_1, \delta_2\}$ et en combinant (4.2) $-$ (4.6), on arrive à

$$H'(t) \leq -\frac{\varepsilon}{2}E(t) - a[1 - \varepsilon c(\delta)]\|u_t\|_m^m - \left[a - (\frac{3}{2} + a^2\beta)\varepsilon\right]\int_\Omega u_t^2(x,t)dx. \tag{4.13}$$

On choisit $\varepsilon < \min\{\frac{1}{c(\delta)}, \frac{a}{(\frac{3}{2}+a^2\beta)}\}$, d'après (4.6), on a

$$H'(t) \leq -\frac{\varepsilon}{2}E(t). \tag{4.14}$$

On combine alors H pour obtenir

$$H'(t) \leq -\frac{\varepsilon(1 + \varepsilon(1 + \beta^2))}{2}H(t). \tag{4.15}$$

D'après l'intégration de H, alors

$$H(t) \leq H(0)\exp(-\alpha t), \quad \forall t \geq 0. \tag{4.16}$$

Où $\alpha = \frac{\varepsilon(1+\varepsilon(1+\beta^2))}{2}$. Encore, en utilisant H et $\varepsilon > 0$ telle que $1 - \varepsilon(1+\beta^2) > 0$, on obtient

$$E(t) \leq \frac{1}{1-\varepsilon(1+\beta^2)} H(t) \leq \frac{H(0)}{1-\varepsilon(1+\beta^2)} \exp(-\alpha t), \quad \forall t \geq 0. \tag{4.17}$$

Ainsi , (4.2) est établie.

Conclusion

Nous avons pu étudier l'existence des solutions des équations différentielles aux dérivées partielles de type hyperbolique (équation des ondes) non linéaire dans un cadre fonctionnel convenable d'espaces de Sobolev sous des conditions appropriées, en utilisant des inégalités, des théorèmes et des outils différentes d'analyse fonctionnelle.

Nous avons également pu étudier l'unicité de ces solutions avec ces conditions appropriées ou en ajoutant des conditions supplémentaires qui nous permettent d'atteindre l'objectif.

Bibliographie

[1] R.A.Adams, J Fournier,*Sobolev Spaces Academic Press*, New York 41, 1975.

[2] A.Benaissa, SalimA Messaoudi, A.Benguessoum ,*Energy decay of solutions for a wave equation with a constant weak delay and a weak internal feedback* , Electronic Journal of Qualitative Theory of differential equations 2014(11), 1-13, 2014.

[3] Abbes Benaissa and Salim A. Messaoudi , *Exponential decay of solution of a non-linearly damped wave equation* , Nonlinear Differential Equations and Applications NoDEA 12(4) , 391-399 , 2006 .

[4] H. Brézis , *Analyse fonctionnelle théorie et application* , Dunod , Belgique , 2005 .

[5] Elliott H. Lieb and Michael Loss, *Analysis* , American Mathemetical Society , 2001.

[6] Grozdena Todorova ,*Existence of a solution of the wave equation with nonlinear damping and source terms* , Journal of differential equations 109(2) ,295-308 , 1994.

[7] J. L. Lions , *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*, Dunod, Paris 1969.

[8] Salim A. Messaoudi , *Decay of the solution energy for a nonlinearly damped wave equation* ,Arabian Journal for Science and Engineering 26 (1 ; Part A) , 63-68 , 2001.

ملخص:

في هذا العمل، درسنا وجود و وحدانية حل بعض المسائل لمعادلة كوشي للمعادلات التفاضلية ذات مشتقات الجزئية الزائدية (معادلة الأمواج) غير خطية في مجال محدود من $\mathbb{R}^n$.

في ظل ظروف مناسبة و في فضاءات سوبوليف، نثبت وجود حل عالمي من خلال طرق التراص و باستخدام طريقة المضاعف.

Résumé :

Dans ce travail, nous avons étudié l'existence et l'unicité de la solution de certains problèmes de l'équation de Cauchy pour des équations différentielles aux dérivées partielles de type hyperboliques (équation des ondes) non linéaires dans un domaine borné de $\mathbb{R}^n$.

Sous des conditions appropriées dans des espaces de Sobolev, nous prouvons l'existence de la solution globale par des méthodes de compacité et on utilisant la méthode du multiplicateur.

Abstract:

In this work, we have studied the existence and the uniqueness of the solution of certain problems of the Cauchy equation for nonlinear partial differential equations of the hyperbolic type (wave equation) in a bounded domain of $\mathbb{R}^n$.

Under appropriate conditions in Sobolev spaces, we prove the existence of the global solution by compactness methods and use the multiplier method.