REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEURE ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE IBN KHALDOUN - TIARET

MÉMOIRE

Présenté à :

FACULTÉ MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUE
DÉPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

Pour l'obtention du diplôme de :

MASTER

Spécialité :[Mathématiques]

Par :

BOUKHORS. Khawla.

ZIANI. Zohra.

Sur le Thème

Généralisation d'inégalités intégrales de type de Hermite-Hadamard et l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville.

Soutenu publiquement le 08/06/2022 à Tiaret devant le jury composé de :

Mr.SENOUCIAbdelkader	Grade	Université Pr	Président
Mr.SOFRANIMohammed	Grade	Université MAA	Encadreur
Mr. BENDAOUDAbedsid ahmed	Grade	Université MCB	Examinateur

2021-2022

Remerciements

*Avant tout on remercie " **Allah**" tout puissant pour la volonté, la patience que nous a données d'accomplir ce travail.*

*Un grand remerciement à notre encadreur " **SOFRANI Mohammed** "; pour sa patience , ses remarques et ses conseils , sa disposibilité et sa bienveillance , les encouragements et les conseils qu'il nous a donné .*

Nous remercions égalements les membres du jury :

- ***Mr.SENOUCI Abdelkader***
- ***Mr.BENDAOUD Abed sid ahmed***

pour avoir accepté l'évaluation de ce travail et pour tous leurs commentaires et critiques .

*Nous remercions également toute l'équipe administrative du département de Mathématiques à l'université de Tiaret, et à toute la promotion Mathématiques de **Analyse Fonctionnelle Et Application 2021-2022.***

⋆ Dédicace ⋆

Je dédie cet humble travail...

Àu père le plus cher du monde.

À la plus douce du monde , maman.

Qu 'Allah me les garde,

Qui ont toujours été dévoués pour que je puisse réaliser ,

ce travail de recherche dans les meilleurs conditions .

À'Monsieur Sofrani Mohammed',

Et pour ma famille.

À mes soeurs :

'Asmaa, Noura, Dalila, Haouaria, Hakima, chaima, Aicha, Khawla'.

À mes chers professeurs.

En fin de compte, je demande, à Allah de faire en sorte

que ce travail profite à tous les étudiants, qui

sont sur le point d'obtenir leur diplôme.

♡♡♡

⋆ Zohra ⋆

⋆ Dédicace ⋆

Louange à ALLAH , Le tout puissant,

Le Miséricorieux

Que ce salut et le paix soient sur l' envoyé d'allah.

Je dédie cet évènement marquant de ma vie à :

Á mes chers parents mon père et ma mère ,

Pour leur patience, leur amour, et leur encouragement tout a long de mes études .

À mon encadreur ' Mr. Sofrani Mohammed '.

Je tiens à vous remercier pour votre grand effort, pour nous.

Á mes chers frères : 'Ibrahim, Oussama' ,

Et Á mes belles sœurs : ' Halima, Fouzia' ,

Á mes chers amis :

'Wissam, Noura, Chaima , Dalila, Haouaria,Hakima , Zohra',

Pour leur soutient tout au long de mon par cours universitaire .

Á tout ceux qui m'ont aidé et soutenu par moi ,

merci pour tout .

♡♡♡

⋆ Khawla ⋆

Résumé

Le mémoire est consacré à la preuve de quelques inégalités intégrales de type d'Hermite-Hadamard concernant les fonctions où les dérivées sont convexes , impliquant l'intégrale Fractionnaire de Riemann-Liouville . Aussi Nous donnons une identité intégrale fractionnaire importante , pour la fonction convexe différentiable.

Mots clés: inégalité intégrale d'Hermite-Hadamard , intégrale Fractionnaire de Riemann-Liouville , inégalité de Hölder .

Contents

Introduction

Le sujet du calcul fractionnaire (intégrales et dérivées) a acquis une popularité considérable à travers se applications démontrées dans de nombreux domaines de la sciences et de l'ingénierie .

L'intégrale Fractionnaire fournit en effet plusieurs outils potentiellement utiles pour divers problèmes impliquant des fonctions particulières des sciences mathématiques .

L'une des applications importantes des intégrales fractionnaires est l'inégalité intégrale classique plus célèbre pour la classe des fonctions convexes et dite inégalité intégrale d'Hermite-Hadamard (H-H) ; ainsi pour une fonction convexe $f : \mathbb{I} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie sur l'intervalle $\mathbb{I}$, des nombres réels et $a, b \in \mathbb{I}$ avec $a < b$. On a

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

Si la fonction f est concave , les doubles inégalités sont inversées .

L'inégalité d'Hermite-Hadamard peut être considérée comme un raffinement du concept de convexité de l'inégalité de **Jensen**.

Des nombreuses inégalités intégrales de type d'Hermite-Hadamard sont présentés pour les fonctions convexes , pour log-convexe , quasi-convexe et s-convexe et d'autre classes .

Récemment de nombreux chercheurs se sont intéresses à l'inégalité d'Hermite-Hadamard pour les fonctions convexes (voir , par exemple , [1, 2, 9, 10, 12, 16]) .

Dans ce mémoire , on s'intérèsse a l'étude des inégalités intégrales de type d'Hermite-Hadamard impliquant l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville .

*C*e mémoire se compose essentiellement de trois chapitres :

- Au **le premier chapitre** nous rappellons quelques notions de base du calcul fractionnaire ainsi que les propriétés des intégrals Fractionnaires , espaces fonctionnels , rappels sur la fonction convexe .
- Dans **le deuxième chapitre** , on étudie les inégalités intégrales de type d'Hermite-Hadamard pour les fonctions convexes .
- **Le troisième chapitre** est consacré a l'étude de quelques généralisations sur les inégalités intégrales de type d'Hermite-Hadamrd impliquant l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville.

A la fin du mémoire on trouve un conclusion générale et une bibliographie .

Chapitre 1

Préliminaires

Dans ce chapitre , on donne quelques définitions et propriétés que nous utilisons dans la suite de ce travail .

1.1 Espaces Fonctionnels

1.1.1 L'espace des fonctions continues

Définition 1.1. Soit $[a, b]$ un intervalle fermé borné dans $\mathbb{R}$, Notons

$$C([a, b]) = \{f : [a, b] \to \mathbb{R}, continue\},$$

$C([a, b])$ est un espace vectoriel .

Pour tout $f \in C([a, b])$, on note

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|.$$

1.1.2 L'espace des fonctions absolument continues

Définition 1.2. [13]

On note par $AC([a, b])$ l'espace des fonctions absolument continues sur $[a, b]$ constitué des fonctions f qui sont des primitives des fonctions Lebesgue sommables (i.e) :

$$f \in AC([a,b]) \Longleftrightarrow \exists \delta \in L^1([a,b]) \text{ telle que : } f(x) = c + \int_a^b \delta(t)dt.$$

Définition 1.3. [13]

pour $n \in \mathbb{N}$ on note par $AC^n[a,b]$ l'espace des fonctions à valeurs réelles $f(x)$ ayant des dérivées jusqu'à l'ordre $(n-1)$ continues sur [a,b] telle que $f^{(n-1)}(x) \in AC[a,b]$ c'est-à-dire :

$$AC^n[a,b] = \{f : [a,b] \to \mathbb{C} \text{ et } f^{(n-1)}(x) \in AC[a,b]\} \ ,$$

En particulier on a :

$$AC^1[a,b] = AC[a,b].$$

1.1.3 Espace des fonctions continues avec poids $C_\lambda([a,b])$

Définition 1.4. [13]

Soient $\Omega = [a,b]$ un intervalle finie et $\lambda \in \mathbb{C}; (0 \leq Re(\lambda) < 1)$. On désigne par $C_\lambda([a,b])$ l'espace des fonctions f définies sur $]a,b]$ telles que la fonction $(x-a)^\lambda f(x) \in C[a,b]$.

C'est à dire :

$$C_\lambda([a,b]) = \{f :]a,b] \to \mathbb{C}, (.-a)^\lambda f(.) \in C([a,b])\}.$$

$C_\lambda([a,b])$ muni de la norme

$$\|f\|_{C_\lambda} = \|(x-a)^\lambda f(x)\|_C = \max_{x\in\Omega} |(x-a)^\lambda f(x)|.$$

L'espace $C_\lambda([a,b])$ est appelé l'espace des fonctions continues avec poids .

En particulier :

$$C_0([a,b]) = C([a,b]).$$

1.1.4 Espace des fonctions intégrables

Définition 1.5. [13]. Soit $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq p \leq \ \infty$. On note par $L^p([a,b])$ l'espace des classes équivalences des fonctions de p définiées sur $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$:

$$L^p([a,b]) = \{f : [a,b] \to \mathbb{R} \text{ , f est mesurable et } \int_a^b |f(x)|^p dx < \infty\},$$

Pour $p = \infty$, l'espace $L^\infty([a,b])$ est l'espace des fonctions mesurables f bornées presque partout (p.p) sur $[a,b]$.

Théorème 1.1. [23]

1. Pour $1 \leq p < \infty$, l'espace $L^p([a,b])$ est un espace de Banach muni de la norme :

$$\|f\|_{L^p} = \left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

2. L'esapce $L^\infty([a,b])$ est un espace de Banach muni de la norme :

$$\|f\|_{L^\infty} = inf\{M \geq 0 : |f(x)| \leq M \ p.p \ sur[a,b]\}.$$

1.2 Fonctions Spéciales

Dans cette section , Nous présentons quelques fonctions spéciales comme la fonction Gamma et Bêta , qui seront utilisées dans le calcul fractionnaire .

1.2.1 La Fonction Gamma d'Euler

En mathématiques , la fonction Gamma est une fonction complexe elle prolonge la fonction fractionnelle à l'ensemble des nombres complexes .

Définition 1.6. [24]

On a $\mathbb{E} = \{z \in \mathbb{C}, Re(z) > 0\}$, la fonction gamma $\Gamma(z)$ est définir par

$$\Gamma : \mathbb{E} \to \mathbb{C}$$

$$z \to \Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt.$$

Cette intégrale converge absolement sur le demi plan complexe où la partie réelle est strictement positive $z \in \mathbb{C}$.

Exemple 1.1. 1. Pour $z = 1$, on a

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = [-e^{-t}]_0^{+\infty} = 1.$$

2. Pour $z = \frac{1}{2}$,

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = \int_0^{+\infty} t^{-\frac{1}{2}} e^{-t} dt,$$

Posons $t = x^2, dt = 2t^{\frac{1}{2}} dx$, donc

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = 2 \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx,$$

Pour calculer cette intégrale posons

$$A = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx,$$

prenons

$$\begin{aligned} A^2 &= \int_0^{+\infty} e^{-y^2} dy \int_0^{+\infty} e^{-x2} dx \\ &= \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy. \end{aligned}$$

Le calcul est plus simple a réaliser qu'on effectue les coordonnées polaires

$$\begin{aligned} A^2 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{+\infty} r e^{-r^2} dr d\theta \\ &= \frac{\pi}{4} \\ A &= \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \end{aligned}$$

Alors

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}.$$

3. pour $z = 0_+$, on a $\Gamma(0_+) = +\infty$.

1.2.2 Quelques Propriétés de la fonction Gamma

Lemme 1.1. [24]

la fonction Gamma vérifiée les propriétés suivantes :

1. $\Gamma(z)$ est une fonction strictement décroissante pour $0 < z \leq 1$.

2. pour $Re(z) > 0$, $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$.

3. En particulier $\Gamma(1) = 1$,

   on deduit $\forall n \in \mathbb{N}$, $\Gamma(n+1) = n!$.

4. On peut représenter $\Gamma(z)$ par la limite

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n!n^z}{(z+1)\cdots(z+n)}, Re(z) > 0.$$

Remarque 1.1. De $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ et $\Gamma(1) = 1$, on déduit :

$$\begin{aligned}
\Gamma(2) &= 1\Gamma(1) = 1! \\
\Gamma(3) &= 2\Gamma(2) = 2.\Gamma(1) = 2! \\
\Gamma(4) &= 3\Gamma(3) = 3.2.1.\Gamma(1) = 3! \\
&\vdots \\
\Gamma(n+1) &= n\Gamma(n) = n(n-1)\cdots 2.1 = n!.
\end{aligned}$$

1.2.3 La Fonction Bêta d'Euler

Définition 1.7. [27]

la fonction Bêta d'Euler notée par B est définie par :

Pour tout $(z, w) \in \mathbb{C}^2$ avec $Re(z) > 0, Re(w) > 0$, on a

$$B(z, w) = \int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{w-1}dt.$$

1.2.4 Quelques Propriétés de la fonction Bêta

1. Cette fonction est reliée à la fonction Gamma d'Euler par la relation suivante :

$$B(z, w) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}, (Re(z) > 0, Re(w) > 0).$$

2. $B(z, w) = B(w, z)$, la fonction Bêta symétrique .
3. $B(z, 1) = \dfrac{1}{z}$.

Démonstration.

1. Soit $D = [0, +\infty[\times[0, +\infty[$, On a

$$\begin{aligned}\Gamma(z)\Gamma(w) &= \int_0^{+\infty} e^{-x}x^{z-1}dx \int_0^{+\infty} e^{-y}y^{w-1}dy \\ &= \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-(x+y)}x^{z-1}y^{w-1}dxdy.\end{aligned}$$

On pose $y = u - x; dy = du$

$$\begin{aligned}\Gamma(z)\Gamma(w) &= \int_0^{+\infty}\int_0^{u} e^{-u}x^{z-1}(u-x)^{w-1}dxdu \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-u}\int_0^{u} x^{z-1}(u-1)^{w-1}dxdy,\end{aligned}$$

On pose $x = tu; dx = udt$

$$\begin{aligned}\Gamma(z)\Gamma(w) &= \int_0^{+\infty} e^{-u}\int_0^{1} t^{z-1}u(1-t)^{w-1}u^w dtdu \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-u}u^{z+w+1}du \int_0^{1} t^{z-1}(1-t)^{w-1}dt\end{aligned}$$

$$\Gamma(z)\Gamma(w) = \Gamma(z+w)B(z, w),$$

par conséquence

$$B(z,w)=\frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}.$$

Exemple :

Calculons $B(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$,

$$B(\frac{1}{2},\frac{1}{2})=\frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(1)}=\pi.$$

2. Nous avons

$$B(z,w)=\frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}=\frac{\Gamma(w)\Gamma(z)}{\Gamma(w+z)}=B(w,z).$$

3. On a

$$B(z,1)=\frac{\Gamma(z)\Gamma(1)}{\Gamma(z+1)}=\frac{\Gamma(z)}{z\Gamma(z)}=\frac{1}{z}.$$

□

1.3 Convexité d'une Fonction

Fonction Convexe

Définition 1.8. [26]

Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$, est dite convexe si

$$f(tx+(1-t)y)\leq tf(x)+(1-t)f(y),$$

pour tout $x, y \in I$ et $t \in [0,1]$.

Fonction Concave

Définition 1.9. Une fonction f est concave si $(-f)$ est convexe , C'est-á-dire si pour tout $x, y \in I$ et $t \in [0,1]$,

$$f(tx + (1-t)y) \geq tf(x) + (1-t)f(y).$$

Exemple :

1. la fonction carrée $x \mapsto x^2$ est convexe dans $\mathbb{R}$.
2. la fonction cube $x \mapsto x^3$ est concave sur $]-\infty, 0]$ et convexe sur $[0, +\infty[$.
3. la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est concave sur $]-\infty, 0[$ et convexe sur $]0, +\infty[$
4. la fonction racine carrée $x \mapsto \sqrt{x}$ est concave sur $[0, +\infty[$.
5. la fonction $x \mapsto e^x$ est convexe dans $\mathbb{R}$.

Définition 1.10. Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$, f différentiable sur $[a, b]$, on dit que $|f'|^q$ est convexe où $q \geq 1$ et $t \in [0, 1]$ si

$$|f'(tx + (1-t)y)|^q \leq t|f'(x)|^q + (1-t)|f'(y)|^q.$$

Remarque 1.2. si $q = 1$ on a

$$|f'(tx + (1-t)y)| \leq t|f'(x)| + (1-t)|f'(y)|.$$

1.4 Quelques Inégalités Importantes

1.4.1 Inégalité de Hölder

Si $f \in L^p(\Omega)$ et $g \in L^q(\Omega)$ avec $\Omega \subset \mathbb{R}$, $1 \leq p, q \leq \infty$,telles que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$,

on a l'inégalité :

$$\int_\Omega |f(x)g(x)|dx \leq \left[\int_\Omega |f(x)|^p dx\right]^{\frac{1}{p}} \times \left[\int_\Omega |g(x)|^q dx\right]^{\frac{1}{q}}.$$

1.4.2 Inégalité de Hölder Généralisée

L'inégalité se généralise en considérant les réels $p_j > 1$, telle que $\sum\limits_{j=1}^{n} \frac{1}{p_j} = 1$,

$$\forall f_j \in L^{pj}(\Omega), \int_\Omega |\Pi_{j=1}^n f_j(x)|dx \leq \Pi_{j=1}^n \left(\int_\Omega |f_j(x)|^{p_j} dx\right)^{\frac{1}{p_j}}.$$

1.4.3 Inégalité de Hermite-Hadamard (H-H)

L'inégalité de Hermite-Hadamard pour les fonctions convexes sur $[a,b] \to \mathbb{R}$ est donnée par :

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2} \tag{1.1}$$

Démonstration. On suppose que f est convexe sur $[a,b]$, Alors on a

$$\begin{aligned} f\left(\frac{a+b}{2}\right) &= f\left(\frac{a}{2}+\frac{b}{2}+\frac{x}{2}-\frac{x}{2}\right) \\ &= f\left(\frac{1}{2}(a+b-x)+\frac{1}{2}x\right) \\ &\leq \frac{1}{2}f(a+b-x)+\frac{1}{2}f(x). \end{aligned}$$

On pose $x = ta+(1-t)b$, avec $t \in [0,1]$,

On obtient

$$\begin{aligned} f(a+b-x)+f(x) &= f(a+b-ta-(1-t)b)+f(ta+(1-t)b) \\ &= f((1-t)a+tb)+f(ta+(1-t)b) \\ &\leq f(a)+f(b). \end{aligned}$$

On conclure que :

$$2f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq f(a)+f(b).$$

D'aprés la convexité de la fonction f , en intégrant l'inégalité suivante sur $[0, 1]$,

$$f(ta + (1-t)b) \leq tf(a) + (1-t)f(b),$$

On obtient :

$$\int_0^1 f(ta + (1-t)b)dt \leq f(a)\int_0^1 tdt + f(b)\int_0^1 (1-t)dt, \tag{1.2}$$

Puisque

$$\int_0^1 tdt = \int_0^1 (1-t)dt = \frac{1}{2}.$$

Et par le changement de variable $x = ta + (1-t)b$,

$$\int_0^1 f(ta + (1-t)b)dt = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx,$$

donc D'aprés (1.2), on obtient l'inégalité à droite de (1.1), par la convexité de f on a aussi

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}[f(ta + (1-t)b) + f((1-t)a + tb)] &\geq f\left[\frac{ta + (1-t)b + (1-t)a + tb}{2}\right] \\ &= f\left(\frac{a+b}{2}\right).\end{aligned}$$

en intégrant cette inégalité avec $t \in [0, 1]$,

On obtient l'inégalité à gouche de (1.1)

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{2}\left[\int_0^1 f(ta + (1-t)b)dt + \int_0^1 f((1-t)a + tb)dt\right] = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx.$$

Alors le double inégalité (1.1) vérifiée . $\square$

1.4.4 Inégalité de moyenne de puissance

Théorème 1.2. Soit $q \geq 1$, si f et w (fonction de poids) sont des applications réells définies sur $[a, b]$ et si $|w|$ et $|w|.|f|^q$ sont intégrables sur $[a, b]$ alors

$$\int_a^b \left|w(x)f(x)dx\right| \leq \left(\int_a^b |w(x)|dx\right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_a^b |w(x)|.|f(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}.$$

1.5 Calcul Fractionnaire

Dans cette section , on rappelle quelques notions de la théorie du calcul fractionnaire .

1.5.1 Intégrale Fractionnaire au sens de Riemann-Liouville (R-L)

Soit $f \in L^1([a, b])$, on considère l'intégrale

$$J_a^1 f(x) = \int_a^x f(t)dt,$$

donc la primitive seconde de f définit comme suit :

$$\begin{aligned} J_a^1(J_a^1)f(x) &= \int_a^x \int_a^t f(s)dsdt \\ &= \int_a^x \int_s^x f(s)dtds \\ &= \int_a^x (x-s)f(s)ds \\ &\equiv J_a^2 f(x). \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
J_a^1(J_a^2 f)(x) &= \int_a^x \int_a^t \int_a^s f(\tau)d\tau ds dt \\
&= \int_a^x \int_a^t \int_\tau^t f(\tau) ds d\tau dt \\
&= \int_a^x \int_a^t (t-\tau) f(\tau) dt d\tau \\
&= \int_a^x f(\tau) \int_a^x (x-\tau)^2 f(\tau) d\tau \\
&\equiv J_a^3 f(x).
\end{aligned}$$

le n^{ieme} itéré de l'opérateur J peut s'écrire

$$\begin{aligned}
J_a^n f(x) &= \int_a^x \int_a^{t_1} \cdots \int_a^{t_{n-1}} f(t_n) dt_n dt_2 dt_1 \\
&= \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-s)^{n-1} f(s) ds.
\end{aligned}$$

la dernière formule a un sens même quand n prend une valeur non-entier, en définit l'intégrale fractionnaire de la manière suivante .

Définition 1.11. Soit $f \in L^1([a,b])$, l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville de la fonction f d'ordre $\alpha > 0$ est définie par :

$$\begin{aligned}
&J_{a+}^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt, x > a, \alpha > 0, \\
&J_{b-}^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b (t-x)^{\alpha-1} f(t) dt, b > x, \alpha > 0, \\
&J_{a+}^0 f(x) = J_{b-}^0 f(x) = f(x), \alpha = 0.
\end{aligned}$$

Exemple 1.2. Considérons la fonction $f(x) = (x-a)^\beta$, on calcule l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville

$$J_a^\alpha (x-a)^\beta = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} (x-a)^\beta dt,$$

Pour évaluer cette intégrale on pose le changement $t = a + (x-a)z$,

alors $dt = (x-a)dz$, d'où

$$\begin{aligned} J_a^\alpha (x-a)^\beta &= \frac{(x-a)^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 z^\beta (1-z)^{\alpha-1} dz \\ &= \frac{(x-a)^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)} B(\beta+1,\alpha), \end{aligned}$$

Aprés on utilise la relation suivante :

$$B(z,w) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}, (Re(z) > 0, Re(w) > 0).$$

On obtient

$$J_a^\alpha (x-a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} (x-a)^{\alpha+\beta}.$$

Chapitre 2

Les inégalités intégrales de type de H-H pour les fonctions convexes

Dans ce chapitre , nous prouvons quelques nouvelles inégalités intégrales de type d'Hermite-Hadamard pour les fonctions convexes ([28],[29]) .

Lemme 2.1. [28]

Soit $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application différentiable sur I° telle que $a, b \in I$ avec $a < b$, Si $f' \in L[a, b]$, alors l'égalité suivante est vérifiée :

$$\begin{aligned} & f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \\ = & \frac{b-a}{4}\left[\int_0^1 tf'\left(t\frac{a+b}{2} + (1-t)a\right)dt + \int_0^1 (t-1)f'\left(tb + (1-t)\frac{a+b}{2}\right)dt\right]. \end{aligned}$$

Démonstration. par l'intégration par partie, on obtient :

$$\begin{aligned} & \int_0^1 tf'\left(\frac{t(a+b)}{2} + (1-t)a\right)dt \\ & = \frac{2}{b-a}tf\left(\frac{t(a+b)}{2} + (1-t)a\right)\Big|_0^1 - \frac{2}{b-a}\int_0^1 f\left(\frac{t(a+b)}{2} + (1-t)a\right)dt \\ & = \frac{2}{b-a}f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{2}{b-a}\int_0^1 f\left(\frac{t(a+b)}{2} + (1-t)a\right)dt. \end{aligned}$$

Par changement de variable on obtient

$$x = t\frac{a+b}{2} + (1-t)a \Rightarrow dx = \frac{(b-a)}{2}dt,$$

alors

$$\int_0^1 tf'\left(\frac{t(a+b)}{2} + (1-t)a\right)dt$$
$$= \frac{2}{(b-a)}f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{4}{(b-a)^2}\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x)dx,$$

on pose

$$I_1 = \frac{2}{(b-a)}f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{4}{(b-a)^2}\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x)dx.$$

De même manière on calcule l'intégrale

$$\int_0^1 (t-1)f'\left(tb + (1-t)\frac{a+b}{2}\right)dt$$
$$= \frac{2}{b-a}f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{4}{(b-a)^2}\int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x)dx,$$

on pose

$$I_2 = \frac{2}{b-a}f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{4}{(b-a)^2}\int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x)dx,$$

donc

$$I_1 + I_2 = \frac{4}{(b-a)}f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{4}{(b-a)^2}\int_a^b f(x)dx,$$

alors

$$\frac{b-a}{4}\left[I_1 + I_2\right] = \frac{b-a}{4}\left[\frac{4}{b-a}f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{4}{(b-a)^2}\int_a^b f(x)dx\right]$$
$$= f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx.$$

□

Théorème 2.1. [28]

Soit $f : I \subset [0,\infty) \to \mathbb{R}$ une application différentiable sur I°, telle que $f' \in L[a,b]$ où $a,b \in I$ avec $a<b$, Si $|f'|^q$ est convexe sur $[a,b]$ avec $q \geq 1$, alors l'inégalité suivante est vérifiée :

$$\begin{aligned}
&\left| f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \right| \\
&\leqslant \frac{b-a}{8}\left\{ \left(\frac{2\left|f'(a)\right|^q + \left|f'(b)\right|^q}{3}\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\frac{2\left|f'(b)\right|^q + \left|\, f'(a)\right|^q}{3}\right)^{\frac{1}{q}} \right\}.
\end{aligned} \tag{2.1}$$

Démonstration. Supposons que $q \geq 1$, D'aprés le lemme 2.1 et l'inégalité de moyenne de puissance alors :

$$\begin{aligned}
&\left| f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \right| \\
&\leq \frac{b-a}{4}\left[\int_0^1 t\left|f'\left(t\frac{a+b}{2}+(1-t)a\right)\right|dt + \int_0^1 (1-t)\left|\, f'\left(tb+(1-t)\frac{a+b}{2}\right)\right|dt\right] \\
&\leq \frac{b-a}{4}\left(\int_0^1 tdt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_0^1 t\left|f'\left(t\frac{a+b}{2}+(1-t)a\right)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}} \\
&+ \frac{b-a}{4}\left(\int_0^1 (1-t)dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_0^1 (1-t)\left|f'\left(tb+(1-t)\frac{a+b}{2}\right)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}.
\end{aligned}$$

Puisque $\left|f'\right|^q$ est convexe, alors

$$\begin{aligned}
\int_0^1 t\left|f'\left(\frac{t(a+b)}{2}+(1-t)a\right)\right|^q dt &\leq \int_0^1 \left[t^2\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q + t(1-t)\left|f'(a)\right|^q\right]dt \\
&= \frac{1}{3}\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q + \frac{1}{6}\left|f'(a)\right|^q.
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\int_0^1 (1-t)\left|f'\left(tb+(1-t)\frac{a+b}{2}\right)\right|^q dt &\leq \int_0^1 \left[(1-t)t\left|f'(b)\right|^q + (1-t)^2\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q\right]dt \\
&= \frac{1}{3}\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q + \frac{1}{6}\left|f'(b)\right|^q.
\end{aligned}$$

Par conséquent, on a

$$\left|f\left(\frac{a+b}{2}\right)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right| \leqslant \left(\frac{b-a}{8}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{q}}\left[\left(2\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q+|f'(a)|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right.$$
$$\left.+\left(|f'(b)|^q+2\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right]. \tag{2.2}$$

D'aprés (1.1) , nous avons

$$\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\quad\right|^q \leqslant \frac{|f'(a)|^q+|f'(b)|^q}{2}. \tag{2.3}$$

une combinaison de (2.2) et (2.3), on obtient

$$\begin{aligned}\left|f\left(\frac{a+b}{2}\right)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right| &\leqslant \left(\frac{b-a}{8}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{q}}\left[\left(2\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q+|f'(a)|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right.\\ &\left.+\left(|f'(b)|^q+2\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right]\\ &\leqslant \left(\frac{b-a}{8}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{q}}\left[\left(|f'(a)|^q+|f'(b)|^q+|f'(a)|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right.\\ &\left.+\left(|f'(b)|^q+|f'(a)|^q+|f'(b)|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right]\\ &=\frac{b-a}{8}\left[\left(\frac{2\,|\,f'(a)|^q+|f'(b)|^q}{3}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\frac{2\,|f'(b)|^q+|f'(a)|^q}{3}\right)^{\frac{1}{q}}\right].\end{aligned}$$

□

Théorème 2.2. [28]

Soit $f : I \subset [0,\infty) \to \mathbb{R}$ une application différentiable sur I° , telle que $f' \in L[a,b]$ où $a,b \in I$ avec $a<b$, Si $|f'|^{p/(p-1)}$ est convexe sur $[a,b]$ avec $p>1$, alors l'inégalité suivante est vérifiée :

$$\begin{aligned}&\left|f\left(\frac{a+b}{2}\right)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|\\ &\leq \left(\frac{b-a}{4(p+1)^{\frac{1}{p}}}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{q}}\left(\left(3\,|f'(a)|^q+|f'(b)|^q\right)^{\frac{1}{q}}+|f'(a)|^q+3\,|f'(b)|^q\right)^{\frac{1}{q}},\end{aligned} \tag{2.4}$$

où p est le conjugué de q , $q=\frac{p}{(p-1)}$.

Démonstration.

Supposons que $p > 1$.

D'aprés le lemme 2.1 et l'inégalité de Hölder , nous obtenons :

$$\begin{aligned}\left|f\left(\frac{a+b}{2}\right)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right| &\leq \frac{b-a}{4}\left[\int_0^1 t\left|f'\left(t\frac{a+b}{2}+(1-t)a\right)\right|dt\right.\\ &\left.+\int_0^1(1-t)\left|f'\left(tb+(1-t)\frac{a+b}{2}\right)\right|dt\right]\\ &\leq \frac{b-a}{4}\left(\int_0^1 t^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1\left|f'\left(t\frac{a+b}{2}+(1-t)a\right)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\\ &+\frac{b-a}{4}\left(\int_0^1(1-t)^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1\left|f'\left(tb+(1-t)\frac{a+b}{2}\right)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}.\end{aligned}$$

Puisque $|\ f'\ |^q$ est convexe, alors

$$\begin{aligned}\int_0^1\left|f'\left(t\frac{a+b}{2}+(1-t)a\right)\right|^q dt &\leqslant \int_0^1\left[t\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q+(1-t)\mid f'(a)\mid^q\right]dt\\ &=\frac{1}{2}\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q+\frac{1}{2}|f'(a)|^q\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\int_0^1\left|f'\left(tb+(1-t)\frac{a+b}{2}\right)\right|^q dt &\leqslant \int_0^1\left[t|f'(b)|^q+(1-t)\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q\right]dt\\ &=\frac{1}{2}|f'(b)|^q+\frac{1}{2}\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q.\end{aligned}$$

Par conséquent on a :

$$\begin{aligned}&\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx-f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|\\ &\leq\left(\frac{b-a}{4}\right)\left(\frac{1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{q}}\left[\left(\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q+\mid f'(a)\mid^q\right)^{\frac{1}{q}}\right.\\ &\left.+\left(|f'(b)|^q+\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right].\end{aligned}\tag{2.5}$$

Car $|\ f'\ |^q$ est convexe sur $[a,b]$, pour tout $t\in[0,1]$, d'aprés (1.1), alors nous avons :

$$\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|\leqslant\frac{|\ f'(a)|+|f'(b)\ |}{2}.\tag{2.6}$$

avec une combinaison de (2.5) et (2.6), on obtient :

$$\begin{aligned}
&\left|f\left(\frac{a+b}{2}\right)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right| \\
&\leqslant \left(\frac{b-a}{4}\right)\left(\frac{1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{q}} \times \left[\left(\frac{1}{2}(|f'(a)|^q+|f'(b)|^q)+|f'(a)|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right. \\
&\quad \left. +\left(|f'(b)|^q+\frac{1}{2}(|f'(a)|^q+|f'(b)|^q)\right)^{\frac{1}{q}}\right] \\
&\leq \left(\frac{b-a}{4}\right)\left(\frac{1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{q}} \times \left[(3|f'(a)|^q+|f'(b)|^q)^{\frac{1}{q}}+(|f'(a)|^q+3|f'(b)|^q)^{\frac{1}{q}}\right].
\end{aligned}$$

alors (2.4) est verifiée . □

Théorème 2.3. [28]

Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ une application différentiable sur $[a,b]$, avec $0\leq a<b$, Si $|f'|^q$ est convexe sur $[a,b]$ avec $q>1$, alors L'inégalité suivante est vérifiée :

$$\begin{aligned}
&\left|f\left(\frac{a+b}{2}\right)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right| \\
&\leqslant \frac{(b-a)}{4(p+1)^{\frac{1}{p}}}\left\{\left(\frac{\mid f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\mid^q+\mid f'(a)\mid^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\frac{\mid f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\mid^q+\mid f'(b)\mid^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}}\right\}.
\end{aligned}$$

où $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

Démonstration. On utilise le lemme 2.1 , la convexité de $\mid f' \mid^q$ et l'inégalité de Hölder, on obtient :

$$
\begin{aligned}
&\left| f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \right| \\
\leq &\frac{b-a}{4}\left\{ \left(\int_0^1 t^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 \mid f'(t\left(\frac{a+b}{2}\right) + (1-t)a) \mid^q dt\right)^{\frac{1}{q}} \right.\\
&\left. + \left(\int_0^1 (1-t)^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 \mid f'\left(tb + (1-t)\left(\frac{a+b}{2}\right)\right) \mid^q dt\right)^{\frac{1}{q}} \right\} \\
\leq &\frac{b-a}{4(p+1)^{\frac{1}{p}}}\left\{ \left(\int_0^1 [t \mid f'\left(\frac{a+b}{2}\right) \mid^q + (1-t) \mid f'(a) \mid^q]\right)^{\frac{1}{q}} \right.\\
&\left. + \left(\int_0^1 [t \mid f'(b) \mid^q + (1-t) \mid f'\left(\frac{a+b}{2}\right) \mid^q dt]\right)^{\frac{1}{q}} \right\} \\
\leqslant &\frac{(b-a)}{4(p+1)^{\frac{1}{p}}}\left\{ \left(\frac{\mid f'\left(\frac{a+b}{2}\right) \mid^q + \mid f'(a) \mid^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\frac{\mid f'\left(\frac{a+b}{2}\right) \mid^q + \mid f'(b) \mid^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}} \right\}.
\end{aligned}
$$

Ce qui complète la démonstration . □

2.1 Les inégalités intégrales de type d'Hermite-Hadamard pour l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville

Lemme 2.2. [29]

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une application différentiable sur (a, b) avec $a < b$,

Si $f' \in L[a, b]$, alors l'égalité suivante pour l'intégrale fractionnaires de Riemann-Liouville est vérifiée :

$$
f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2^{(1-\alpha)}(b-a)^\alpha}\left[J^\alpha_{\left(\frac{a+b}{2}\right)_-} f(a) + J^\alpha_{\left(\frac{a+b}{2}\right)_+} f(b)\right]
$$

$$
= \frac{b-a}{4}\left\{\int_0^1 t^\alpha f'\left(t\frac{a+b}{2} + (1-t)a\right) dt - \int_0^1 (1-t)^\alpha f'(tb + (1-t)\left(\frac{a+b}{2}\right) dt\right\}.
$$

où $a > 0$.

Démonstration. par l'intégration par partie :

on pose

$u = t^{\alpha}$ et $v' = \dfrac{2}{b-a} f'\left(\dfrac{t(a+b)}{2} + (1-t)a\right)\left(\dfrac{b-a}{2}\right)$

alors

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 t^{\alpha} f'\left[t\frac{a+b}{2} + (1-t)a\right] dt \\
=& \left.\frac{2t^{\alpha} f\left[t\frac{a+b}{2} + (1-t)a\right]}{b-a}\right|_0^1 \\
&- \frac{2\alpha}{b-a}\int_0^1 t^{\alpha-1} f\left[t\frac{a+b}{2} + (1-t)a\right] dt \\
=& \frac{2f\left(\frac{a+b}{2}\right)}{b-a} - \frac{2\alpha}{b-a}\int_0^1 t^{\alpha-1} f\left[t\frac{a+b}{2} + (1-t)a\right] dt \\
=& \frac{2f\left(\frac{a+b}{2}\right)}{b-a} - \frac{2^{\alpha+1}\alpha}{(b-a)^{\alpha+1}}\int_{\alpha}^{\frac{a+b}{2}} (x-a)^{\alpha-1} f(x)dx \\
=& \frac{2f\left(\frac{a+b}{2}\right)}{b-a} - \frac{2^{\alpha+1}\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^{\alpha+1}} J^{\alpha}_{\left(\frac{a+b}{2}\right)-} f(a),
\end{aligned}$$

C'est :

$$\int_0^1 t^{\alpha} f'\left[t\frac{a+b}{2} + (1-t)a\right] dt = \frac{2f\left(\frac{a+b}{2}\right)}{b-a} - \frac{2^{\alpha+1}\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^{\alpha+1}} J^{\alpha}_{\left(\frac{a+b}{2}\right)-} f(a), \tag{2.7}$$

et de même on obtient :

$$\begin{aligned}
&-\int_0^1 (1-t)^{\alpha} f'\left[tb + (1-t)\left(\frac{a+b}{2}\right)\right] dt \\
&= \frac{2f\left(\frac{a+b}{2}\right)}{b-a} - \frac{2^{\alpha+1}\alpha}{(b-a)^{\alpha+1}}\int_{\frac{a+b}{2}}^{b} (b-x)^{\alpha-1} f(x)dx \\
&= \frac{2f\left(\frac{a+b}{2}\right)}{b-a} - \frac{2^{\alpha+1}\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^{\alpha+1}} J^{\alpha}_{\left(\frac{a+b}{2}\right)+} f(b).
\end{aligned}$$

C'est à dire :

$$-\int_0^1 (1-t)^{\alpha} f'\left[tb + (1-t)\left(\frac{a+b}{2}\right)\right] dt = \frac{2f\left(\frac{a+b}{2}\right)}{b-a} - \frac{2^{\alpha+1}\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^{\alpha+1}} J^{\alpha}_{\left(\frac{a+b}{2}\right)+} f(b). \tag{2.8}$$

D'aprés (2.7) et (2.8), Ce qui complète la démonstration. □

Théorème 2.4. [29]

Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une application différentiable sur $[a, b]$ avec $0 \leqslant a < b$, $Si\, |f'|^q$ est convexe sur $[a, b]$ avec $q \geqslant 1$, alors l'inégalité suivante pour les intégrales fractionnaires de Riemann-Liouville est vérifiée :

$$\begin{aligned} &\left| f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2^{1-\alpha}(b-a)^{\alpha}}\left[J^{\alpha}_{\left(\frac{a+b}{2}\right)-}f(a) + J^{\alpha}_{\left(\frac{a+b}{2}\right)+}f(b)\right]\right| \\ &\leqslant \frac{(b-a)}{4(\alpha+1)}\left\{\left(\frac{(\alpha+1)\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q + |f'(a)|^q}{\alpha+2}\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\frac{(\alpha+1)\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q + |f'(b)|^q}{\alpha+2}\right)^{\frac{1}{q}}\right\}, \end{aligned} \tag{2.9}$$

avec $\alpha \geq 0$.

Démonstration.

Pour $q = 1$, On utilise le Lemme (2.2) et la convexité de $|f'|$, on trouve que :

$$\begin{aligned} &\left| f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2^{1-\alpha}(b-a)^{\alpha}}\left[J^{\alpha}_{\left(\frac{a+b}{2}\right)-}f(a) - J^{\alpha}_{\left(\frac{a+b}{2}\right)+}f(b)\right]\right| \\ &\leqslant \frac{b-a}{4}\left\{\int_0^1 t^{\alpha}\left|f'\left[\left(t\frac{a+b}{2} + (1-t)a\right)\right]\right|dt + \int_0^1 (1-t)^{\alpha} \mid f'\left(tb + (1-t)\left(\frac{a+b}{2}\right) \mid dt\right\} \\ &\leqslant \frac{b-a}{4}\left\{\int_0^1 t^{\alpha}\left[t\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right| + (1-t)\,|f'(a)|\right]dt + \int_0^1 (1-t)^{\alpha}\left[t\,|f'(b)| + (1-t)\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|\right]dt\right\} \\ &= \frac{b-a}{2(\alpha+2)}\left(\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right| + \frac{|f'(a)| + |f'(b)|}{2(\alpha+1)}\right). \end{aligned}$$

ceci implique que (2.9) est vrai pour le cas $q = 1$.

que $q > 1$, On utilise le lemme 2.2 et l'inégalité de Hölder, on obtient :

$$\begin{aligned} &\int_0^1 t^{\alpha} \mid f'\left[t\left(\frac{a+b}{2}\right) + (1-t)a\right)\Bigg] \mid dt \\ &+ \int_0^1 (1-t)^{\alpha}\left|f'\left[tb + (1-t)\left(\frac{a+b}{2}\right)\right]\right|dt \\ &\leqslant \left(\int_0^1 t^{\alpha}dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_0^1 t^{\alpha}\left|f'\left[t\left(\frac{a+b}{2}\right) + (1-t)a\right]\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}} \\ &+ \left(\int_0^1 (1-t)^{\alpha}dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_0^1 (1-t)^{\alpha}\left|f'\left[tb + (1-t)\left(\frac{a+b}{2}\right)\right]\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Par conséquent, en utilisant la convexité de $|f'|^q$ et le Lemme (2.2) on obtient :

$$\begin{aligned}
&\left|f\left(\frac{a+b}{2}\right)-\frac{\Gamma(\alpha+1)}{2^{1-\alpha}(b-a)^{\alpha}}\left[J^{\alpha}_{\left(\frac{a+b}{2}\right)+}f(b)+J^{\alpha}_{\left(\frac{a+b}{2}\right)-}f(a)\right]\right|\\
&\leqslant \frac{b-a}{4(\alpha+1)^{1-\frac{1}{q}}}\left\{\left(\int_0^1 t^{\alpha}\left[t\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q+(1-t)\left|f'(a)\right|^q\right]dt\right)^{\frac{1}{q}}\right.\\
&\left.+\left(\int_0^1 (1-t)^{\alpha}\left[t\mid f'(b)\mid^q+(1-t)\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q\right]dt\right)^{\frac{1}{q}}\right\}\\
&\leqslant \frac{b-a}{4(\alpha+1)^{1-\frac{1}{q}}}\left\{\left(\frac{(\alpha+1)\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q+|f'(a)|^q}{(\alpha+1)(\alpha+2)}\right)^{\frac{1}{q}}\right.\\
&\left.+\left(\frac{(\alpha+1)\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q+|f'(b)|^q}{(\alpha+1)(\alpha+2)}\right)^{\frac{1}{q}}\right\}.
\end{aligned}$$

Ce qui complète la démonstration . $\square$

Remarque 2.1. Si on prend $\alpha=1$ dans le théorème (2.4), alors l'inégalité (2.9) implique l'inégalité (2.1) du théorème (2.1).

Théorème 2.5. [29]

Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ une application différentiable sur (a,b) avec $0\leqslant a<b$. Si $|f'|^q$ est convexe sur $[a,b]$ pour $q>1$, alors l'inégalité suivante est vérifiée :

$$\left|f\left(\frac{a+b}{2}\right)-\frac{\Gamma(\alpha+1)}{2^{1-\alpha}(b-a)^{\alpha}}\left[J^{\alpha}_{\left(\frac{a+b}{2}\right)-}f(a)+J^{\alpha}_{\left(\frac{a+b}{2}\right)+}f(b)\right]\right|$$

$$\leqslant \frac{(b-a)}{4(\alpha p+1)^{\frac{1}{p}}}\left\{\left(\frac{\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q+|f'(a)|^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\frac{\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q+|f'(b)|^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}}\right\}.$$

où $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, et $\alpha\geqslant 0$, *Démonstration.* En utilisant le lemme 2.2, la convexité de $\mid f' \mid^q$ et l'inégalité de Hölder, on obtient

$$\begin{aligned}
&\left| f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2^{1-\alpha}(b-a)^\alpha}\left[J^\alpha_{\left(\frac{a+b}{2}\right)-}f(a) + J^\alpha_{\left(\frac{a+b}{2}\right)+}f(b)\right]\right| \\
&\leqslant \frac{(b-a)}{4}\left\{\left(\int_0^1 t^{\alpha p}dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1 \left| f'\left(t\frac{a+b}{2}\right)+(1-t)a\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\right. \\
&\left.+\left(\int_0^1 (1-t)^{\alpha p}dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1 \left| f'\left(tb+(1-t)\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\right\} \\
&\leqslant \frac{(b-a)}{4(\alpha p+1)^{\frac{1}{p}}}\left\{\left(\int_0^1 \left[t\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q + (1-t)\left|f'(a)\right|^q\right]dt\right)^{\frac{1}{q}}\right. \\
&\left.+\left(\int_0^1 \left[t\left|f'(b)\right|^q + (1-t)\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q\right]dt\right)^{\frac{1}{q}}\right\} \\
&= \frac{(b-a)}{4(\alpha p+1)^{\frac{1}{p}}}\left\{\left(\frac{\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q+\left|f'(a)\right|^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\frac{\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q+\left|f'(b)\right|^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}}\right\}.
\end{aligned}$$

Ce qui complète la démonstration . □

Remarque 2.2. Si $\alpha = 1$, le théorème (2.5) implique l'inégalité du théorème (2.3).

Théorème 2.6. [29]

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une application différentiable sur (a, b) avec $0 \leqslant a < b$, Si $|f'|^q$ est convexe sur $[a, b]$ pour $q \geq 1$, alors l'inégalité suivante est vérifiée :

$$\left| f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2^{1-\alpha}(b-a)^\alpha}\left[J^\alpha_{\left(\frac{a+b}{2}\right)-}f(a) + J^\alpha_{\left(\frac{a+b}{2}\right)+}f(b)\right]\right|$$

$$\leqslant \frac{(b-a)}{4}\left\{\left(\frac{(q\alpha+1)\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q+\left|f'(a)\right|^q}{(q\alpha+1)(q\alpha+2)}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\frac{(q\alpha+1)\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q+\left|f'(b)\right|^q}{(q\alpha+1)(q\alpha+2)}\right)^{\frac{1}{q}}\right\}.$$

Où $\alpha \geqslant 0$.

Démonstration.

Dans le cas $q > 1$, et pour $p > 1$,ona $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, en utilisant le lemme(2.2), la convexité de $\mid f' \mid^q$, et l'inégalité de Hölder, on obtient :

$$\begin{aligned}
&\left|f\left(\frac{a+b}{2}\right)-\frac{\Gamma(\alpha+1)}{2^{1-\alpha}(b-a)^{\alpha}}\left[J^{\alpha}_{\left(\frac{a+b}{2}\right)-}f(a)+J^{\alpha}_{\left(\frac{a+b}{2}\right)+}f(b)\right]\right| \\
&\leqslant \frac{(b-a)}{4}\left\{\left(\int_0^1 1^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1 t^{\alpha q}\left|f'\left(t\frac{a+b}{2}\right)+(1-t)a\right)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\right. \\
&\left.+\left(\int_0^1 1^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1 (1-t)^{\alpha q}\left|f'\left(tb+(1-t)\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\right\} \\
\leqslant &\frac{(b-a)}{4}\left\{\left(\int_0^1 t^{\alpha q}\left[t\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q+(1-t)\left|f'(a)\right|^q\right]dt\right)^{\frac{1}{q}}\right. \\
&\left.+\left(\int_0^1 (1-t)^{\alpha q}\left[t\left|f'(b)\right|^q+(1-t)\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q\right]dt\right)^{\frac{1}{q}}\right\} \\
&=\frac{(b-a)}{4}\left\{\left(\frac{(q\alpha+1)\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q+|f'(a)|^q}{(q\alpha+1)(q\alpha+2)}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\frac{(q\alpha+1)\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q+|f'(b)|^q}{(q\alpha+1)(q\alpha+2)}\right)^{\frac{1}{q}}\right\}.
\end{aligned}$$

Dans le cas de $q=1$, en utilisant la même méthode ci-dessus , alors on obtien l'inégalité suivante :

$$\left|f\left(\frac{a+b}{2}\right)-\frac{\Gamma(\alpha+1)}{2^{1-\alpha}(b-a)^{\alpha}}\left[J^{\alpha}_{\left(\frac{a+b}{2}\right)-}f(a)+J^{\alpha}_{\left(\frac{a+b}{2}\right)+}f(b)\right]\right|$$

$$\leqslant \frac{(b-a)}{4}\left\{\left(\frac{(\alpha+1)\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|+|f'(a)|}{(\alpha+1)(\alpha+2)}\right)+\left(\frac{(\alpha+1)\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|+|f'(b)|}{(\alpha+1)(\alpha+2)}\right)\right\}.$$

Où $\alpha \geqslant 0$. $\square$

Remarque 2.3. Si $\alpha=1$ et $q=1$ dans le théorème (2.6), on obtient l'inégalité (2.1) du théorème (2.1).

Chapitre 3

Généralisation des inégalités intégrales de type de H-H impliquant l'intégrale fractionnaire de R-L

Nous présentons quelques généralisation intégrales de type d'Hermite-Hadamard pour l'intégrale fractionnaires de Riemann-Liouville , quelques corrollaires et remarques.

Lemme 3.1. [29]. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une application différentiable sur (a,b) avec $0 \leq a < b$, Si $f' \in L\,[a, b]$ alors l'égalité suivante est vérifiée :

$$\begin{aligned}
&\lambda^{\alpha}(1-\lambda)^{\alpha} f(\lambda a+(1-\lambda) b) \\
&-\frac{\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^{\alpha}}[\lambda^{\alpha+1} \mathrm{J}_{(\lambda a+(1-\lambda) b)-}^{\alpha} f(a)+(1-\lambda)^{\alpha+1} \mathrm{J}_{(\lambda a+(1-\lambda) b)+}^{\alpha} f(b)] \\
&=\lambda^{\alpha+1}(1-\lambda)^{\alpha+1}(b-a)\left\{\int_{0}^{1} t^{\alpha} f'[t(\lambda a+(1-\lambda) b)+(1-t) a] dt\right. \\
&\left.-\int_{0}^{1}(1-t)^{\alpha} f'[t b+(1-t)(\lambda a+(1-\lambda) b)] dt\right\}.
\end{aligned} \tag{3.1}$$

où $\lambda \in (0,1)$ et $\alpha \geq 0$.

Démonstration. Intégration par partie :

$$\int_0^1 t^\alpha f'[t(\lambda a+(1-\lambda)b)+(1-t)a)]dt$$

$$= \left.\frac{t^\alpha f[t(\lambda a+(1-\lambda)b)+(1-t)a)]}{(1-\lambda)(b-a)}\right|_1^0$$

$$- \frac{\alpha}{(1-\lambda)(b-a)}\int_0^1 t^{\alpha-1}f[t(\lambda a+(1-\lambda)b)+(1-t)a)]dt$$

$$= \frac{f(\lambda a+(1-\lambda)b)}{(1-\lambda)(b-a)} - \frac{\alpha}{(1-\lambda)(b-a)}\int_0^1 t^{\alpha-1}f[t(\lambda a+(1-\lambda)b)+(1-t)a)]dt$$

$$= \frac{f(\lambda a+(1-\lambda)b)}{(1-\lambda)(b-a)} - \frac{\alpha}{(1-\lambda)^{\alpha+1}(b-a)^{\alpha+1}}\int_a^{\lambda a+(1-\lambda)b}(x-a)^{\alpha-1}f(x)dx$$

$$= \frac{f(\lambda a+(1-\lambda)b)}{(1-\lambda)(b-a)} - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(1-\lambda)^{\alpha+1}(b-a)^{\alpha+1}}\mathrm{J}^\alpha_{(\lambda a+(1-\lambda)b)-}f(a).$$

c'est :

$$\int_0^1 t^\alpha f'[t(\lambda a+(1-\lambda)b)+(1-t)a)]dt$$
$$= \frac{f(\lambda a+(1-\lambda)b)}{(1-\lambda)(b-a)} - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(1-\lambda)^{\alpha+1}(b-a)^{\alpha+1}}\mathrm{J}^\alpha_{(\lambda a+(1-\lambda)b)-}f(a). \tag{3.2}$$

et de même on obtient :

$$- \int_0^1 (1-t)^\alpha f'[tb+(1-t)(\lambda a+(1-\lambda)b)]dt$$

$$= \frac{f(\lambda a+(1-\lambda)b)}{\lambda(b-a)} - \frac{\alpha}{\lambda^{\alpha+1}(b-a)^{\alpha+1}}\int_{\lambda a(1-\lambda)b}^b (b-x)^{\alpha-1}f(x)dx$$

$$= \frac{f(\lambda a+(1-\lambda)b)}{\lambda(b-a)} - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\lambda^{\alpha+1}(b-a)^{\alpha+1}}\mathrm{J}^\alpha_{(\lambda a+(1-\lambda)b)+}f(b).$$

C'est à dire :

$$\begin{aligned} &- \int_0^1 (1-t)^\alpha [f'[tb+(1-t)(\lambda a+(1-\lambda)b)]dt \\ &= \frac{f(\lambda a+(1-\lambda)b)}{\lambda(b-a)} - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\lambda^{\alpha+1}(b-a)^{\alpha+1}} \mathrm{J}^\alpha_{(\lambda a+(1-\lambda)b)+} f(b). \end{aligned} \tag{3.3}$$

d'aprés (3.2) et (3.3) , on obtient (3.1) ,

Ce qui complète la démonstration . □

Remarque 3.1. si $\alpha = 1$, l'égalité (3.1) implique l'égalité du lemme 2.1 :

$$\begin{aligned} &f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \\ &= \frac{(b-a)}{4}\left\{\int_0^1 tf'\left(t\frac{a+b}{2}+(1-t)a\right)dt - \int_0^1 (1-t)f'\left(tb+(1-t)\frac{a+b}{2}\right)dt\right\}. \end{aligned}$$

Théorème 3.1. [29]. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une application différentiable sur (a,b) avec $0 \leq a < b$,

Si $|f'|^q$ est convexe sur $[a,b]$ avec $q \geq 1$, alors l'inégalité suivante est vérifiée :

$$\begin{aligned} &\left|\lambda^\alpha(1-\lambda)^\alpha f\big(\lambda a+(1-\lambda)b\big) - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^\alpha}\left[\lambda^{\alpha+1}\mathrm{J}^\alpha_{(\lambda a+(1-\lambda)b)-}f(a) + (1-\lambda)^{\alpha+1}\mathrm{J}^\alpha_{(\lambda a+(1-\lambda)b)+}f(b)\right]\right| \\ &\leq \frac{\lambda^{\alpha+1}(1-\lambda)^{\alpha+1}(b-a)}{\alpha+1}\left\{\left(\frac{(\alpha+1)|f'(\lambda a+(1-\lambda)b)|^q+|f'(a)|^q}{\alpha+2}\right)^{\frac{1}{q}}\right. \\ &\left. + \left(\frac{(\alpha+1)|f'(\lambda a+(1-\lambda b)|^q+|f'(b)|^q}{\alpha+2}\right)^{\frac{1}{q}}\right\}. \end{aligned} \tag{3.4}$$

où $\lambda \in (0,1)$ et $\alpha \geq 0$.

Remarque 3.2. Nous avons $\left(\frac{(\alpha+1)\left|f'(\lambda a+(1-\lambda)b)\right|^q+\left|f'(a)\right|^q}{\alpha+2}\right)^{\frac{1}{q}}$, désigne la moyenne de puissance q de $|f'(\lambda a+(1-\lambda)b)|$ et $|f'(a)|$.

Démonstration. nous supposons que $q=1$,

En utilisant le Lemme 3.1 et la convexité de $|f'|$, on trouve que :

$$\begin{aligned}
&\Big|\lambda^{\alpha}(1-\lambda)^{\alpha}f(\lambda a+(1-\lambda)b) \\
&-\frac{\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^{\alpha}}\left[\lambda^{\alpha+1}\mathrm{J}^{\alpha}_{(\lambda a+(1-\lambda)b)-}f(a)+(1-\lambda)^{\alpha+1}\mathrm{J}^{\alpha}_{(\lambda a+(1-\lambda)b)+}f(b)\right]\Big| \\
&\leq \lambda^{\alpha+1}(1-\lambda)^{\alpha+1}(b-a)\left\{\int_0^1 t^{\alpha}|f'[t(\lambda a+(1-\lambda)b)+(1-t)a)]|dt\right. \\
&\left.+\int_0^1(1-t)^{\alpha}|f'[tb+(1-t)(\lambda a+(1-\lambda)b)]|dt\right\} \\
&\leq \lambda^{\alpha+1}(1-\lambda^{\alpha+1})(b-a)\left\{\int_0^1 t^{\alpha}[t|f'(\lambda a+(1-\lambda)b)|+(1-t)|f'(a)|]dt\right. \\
&\left.+\int_0^1(1-t)^{\alpha}[t|f'(b)|+(1-t)|f'(\lambda a+(1-\lambda)b)|]dt\right\} \\
&=\frac{2\lambda^{\alpha+1}(1-\lambda)^{\alpha+1}(b-a)}{(\alpha+2)}\left(|f'(\lambda a+(1-\lambda)b)|+\frac{|f'(a)|+|f'(b)|}{2(\alpha+1)}\right).
\end{aligned}$$

Cela signifie que (3.4) est vérifiée .

nous supposons que $q>1$, en utilisant le Lemme 3.1 et l'inégalité de Hölder , on obtient :

$$
\begin{aligned}
&\int_0^1 t^\alpha |f'[t(\lambda a+(1-\lambda)b)+(1-t)a)]|dt \\
&+\int_0^1 (1-t)^\alpha |f'[tb+(1-t)(\lambda a+(1-\lambda)b)]|dt \\
&\leq \left(\int_0^1 t^\alpha dt\right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_0^1 t^\alpha |f'[t(\lambda a+(1-\lambda)b)+(1-t)a)]|^q dt\right)^{\frac{1}{q}} \\
&+\left(\int_0^1 (1-t)^\alpha dt\right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_0^1 (1-t)^\alpha |f'[tb+(1-t)(\lambda b+(1-\lambda)a)]|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}.
\end{aligned}
\tag{3.5}
$$

Par conséquent , en utilisant la convexité de $|f'|^q$ on obtient :

$$
\begin{aligned}
&\Big|\lambda^\alpha (1-\lambda)^\alpha f(\lambda a+(1-\lambda)b) \\
&-\frac{\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^\alpha}\left[\lambda^{\alpha+1} \mathrm{J}^\alpha_{(\lambda a+(1-\lambda)b)-} f(a)+(1-\lambda)^{\alpha+1} \mathrm{J}^\alpha_{(\lambda a+(1-\lambda)b)+} f(b)\right]\Big| \\
&\leq \frac{\lambda^{\alpha+1}(1-\lambda)^{\alpha+1}(b-a)}{(\alpha+1)^{1-\frac{1}{q}}}\left\{\left(\int_0^1 t^\alpha [t|f'(\lambda a+(1-\lambda)b)|^q+(1-t)|f'(a)|^q]dt\right)^{\frac{1}{q}}\right. \\
&\left.+\left(\int_0^1 (1-t)^\alpha [t|f'(b)|^q+(1-t)|f'(\lambda a+(1-\lambda)b)|^q]dt\right)^{\frac{1}{q}}\right\} \\
&\leq \frac{\lambda^{\alpha+1}(1-\lambda)^{\alpha+1}(b-a)}{(\alpha+1)^{1-\frac{1}{q}}}\left\{\left(\frac{(\alpha+1)|f'(\lambda a+(1-\lambda)b)|^q+|f'(a)|^q}{(\alpha+1)(\alpha+2)}\right)^{\frac{1}{q}}\right. \\
&\left.+\left(\frac{(\alpha+1)|f'(\lambda a+(1-\lambda)b)|^q+|f'(b)|^q}{(\alpha+1)(\alpha+2)}\right)^{\frac{1}{q}}\right\}.
\end{aligned}
$$

Ceci complète la démonstration . $\square$

Corollaire 3.1. Sous l'hypothèse du théorème 3.1 avec $\lambda = \frac{1}{2}$, on obtient :

$$\begin{aligned} &\left| f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2^{1-\alpha}(b-a)^{\alpha}} \left[J^{\alpha}_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^-} f(a) + J^{\alpha}_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^+} f(b) \right] \right| \\ &\leqslant \frac{(b-a)}{4(\alpha+1)} \left\{ \left(\frac{(\alpha+1)\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q + |f'(a)|^q}{\alpha+2} \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\frac{(\alpha+1)\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q + |f'(b)|^q}{\alpha+2} \right)^{\frac{1}{q}} \right\}. \end{aligned} \tag{3.6}$$

où $q \geq 1$.

Remarque 3.3. Si $\alpha = 1$, l'inégalité (3.6) implique l'inégalité suivante :

$$\begin{aligned} &\left| f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \right| \\ &\leqslant \frac{(b-a)}{8} \left\{ \left(\frac{2\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q + |f'(a)|^q}{3} \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\frac{2\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q + |f'(b)|^q}{3} \right)^{\frac{1}{q}} \right\}. \end{aligned}$$

Où $q \geq 1$.

si $q = 1$ on obtient l'inégalité suivante :

$$\left| f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \right| \leqslant \frac{(b-a)}{12} \left(2\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right| + \frac{|f'(a)| + |f'(b)|}{2} \right).$$

avec $2\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right| = \dfrac{|f'(a)| + |f'(b)|}{2}$,

alors on obtient l'inégalité suivante :

$$\left| f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \right| \leqslant \frac{b-a}{12}(|f'(a)| + |f'(b)|).$$

Théorème 3.2. [29]

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une application différentiable sur (a,b) avec $0 \leq a < b$, Si $|f'|^q$ est convexe sur $[a,b]$

avec $q > 1$, alors l'inégalité suivante est vérifiée :

$$\left|\lambda^{\alpha}(1-\lambda)^{\alpha} f(\lambda a+(1-\lambda)b) - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^{\alpha}}\left[\lambda^{\alpha+1} \mathrm{J}^{\alpha}_{(\lambda a+(1-\lambda)b)-} f(a) + (1-\lambda)^{\alpha+1} \mathrm{J}^{\alpha}_{(\lambda a+(1-\lambda)b)+} f(b)\right]\right|$$

$$\leq \frac{\lambda^{\alpha+1}(1-\lambda)^{\alpha+1}(b-a)}{(\alpha p+1)^{\frac{1}{p}}}\left\{\left(\frac{|f'(\lambda a+(1-\lambda)b)|^q + |f'(a)|^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}}\right.$$

$$\left. + \left(\frac{|f'(\lambda a+(1-\lambda)b)|^q + |f'(b)|^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}}\right\},$$

où $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $\lambda \in (0,1)$ et $\alpha \geq 0$.

Démonstration. En utilisant le lemme 3.1, la convexité de $|f'|^q$ et l'inégalité de Hölder, on obtient :

$$\left|\lambda^{\alpha}(1-\lambda)^{\alpha} f(\lambda a+(1-\lambda)b)\right.$$

$$\left. - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^{\alpha}}\left[\lambda^{\alpha+1} \mathrm{J}^{\alpha}_{(\lambda a+(1-\lambda)b)-} f(a) + (1-\lambda)^{\alpha+1} \mathrm{J}^{\alpha}_{(\lambda a+(1-\lambda)b)+} f(b)\right]\right|$$

$$\leqslant \lambda^{\alpha+1}(1-\lambda)^{\alpha+1}(b-a)\left\{\left(\int_0^1 t^{\alpha p} dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1 |f'(t(\lambda a+(1-t)b)+(1-t)a)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\right.$$

$$\left. + \left(\int_0^1 (1-t)^{\alpha p} dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1 |f'(tb+(1-t)(\lambda a+(1-\lambda)b))|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\right\}$$

$$\leqslant \frac{\lambda^{\alpha+1}(1-\lambda)^{\alpha+1}(b-a)}{(\alpha p+1)^{\frac{1}{p}}}\left\{\left(\int_0^1 \left[t|f'(\lambda a+(1-\lambda)b)|^q + (1-t)|f'(a)|^q\right] dt\right)^{\frac{1}{q}}\right.$$

$$\left. + \left(\int_0^1 \left[t|f'(b)|^q| + (1-t)|f'(\lambda a+(1-\lambda)b)|^q\right] dt\right)^{\frac{1}{q}}\right\}$$

$$\leqslant \frac{\lambda^{\alpha+1}(1-\lambda)^{\alpha+1}(b-a)}{(\alpha p+1)^{\frac{1}{p}}}\left\{\left(\frac{|f'(\lambda a+(1-\lambda)b)|^q + |f'(a)|^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}}\right.$$

$$\left. + \left(\frac{|f'(\lambda a+(1-\lambda)b)|^q + |f'(b)|^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}}\right\}.$$

Ce qui copmlète la démonstration. □

Corollaire 3.2. Sous l'hypothèse du théorème 3.2 avec $\lambda = \frac{1}{2}$, On obtient :

$$\left| f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2^{1-\alpha}(b-a)^{\alpha}} \left[J^{\alpha}_{\left(\frac{a+b}{2}\right)-} f(a) + J^{\alpha}_{\left(\frac{a+b}{2}\right)+} f(b) \right] \right|$$
$$\leq \frac{b-a}{4(\alpha p+1)^{\frac{1}{p}}} \left\{ \left(\frac{\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q + |f'(a)|^q}{2} \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\frac{\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q + |f'(b)|^q}{2} \right)^{\frac{1}{q}} \right\}.$$

Remarque 3.4. Si $\alpha = 1$, l'inégalité de corollaire 3.2 implique l'inégalité suivante :

$$\left| f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \right|$$
$$\leq \frac{b-a}{4(p+1)^{\frac{1}{p}}} \left\{ \left(\frac{\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q + |f'(a)|^q}{2} \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\frac{\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q + |f'(b)|^q}{2} \right)^{\frac{1}{q}} \right\}.$$

Théorème 3.3. [29]

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une application différentiable sur (a,b) avec $0 \leq a < b$, Si $|f'|^q$ est convexe sur $[a,b]$

pour $q \geq 1$, alors l'inégalité suivante est vérifiée :

$$\left| \lambda^{\alpha}(1-\lambda)^{\alpha} f(\lambda a + (1-\lambda)b) - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^{\alpha}} \left[\lambda^{\alpha+1} \mathrm{J}^{\alpha}_{(\lambda a+(1-\lambda)b)-} f(a) + (1-\lambda)^{\alpha+1} \mathrm{J}^{\alpha}_{(\lambda a+(1-\lambda)b)+} f(b) \right] \right|$$
$$\leq \lambda^{\alpha+1}(1-\lambda)^{\alpha+1}(b-a) \left\{ \left(\frac{(\alpha q+1)|f'(\lambda a+(1-\lambda)b)|^q + |f'(a)|^q}{(\alpha q+1)(\alpha q+2)} \right)^{\frac{1}{q}} \right.$$
$$\left. + \left(\frac{(\alpha q+1)|f'(\lambda a+(1-\lambda)b)|^q + |f'(b)|^q}{(\alpha q+1)(\alpha q+2)} \right)^{\frac{1}{q}} \right\},$$

où $\lambda \in (0,1)$ et $\alpha \geq 0$.

Démonstration. Dans le cas $q > 1$ et pour $p > 1$, ona $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, en utilisant le lemme 3.1,la convexité de $|f'|^q$ et l'inégalité de Hölder, on obtien :

$$\Big| \lambda^{\alpha}(1-\lambda)^{\alpha} f(\lambda a + (1-\lambda)b)$$

$$- \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^{\alpha}} \left[\lambda^{\alpha+1} \mathrm{J}^{\alpha}_{(\lambda a+(1-\lambda)b)-} f(a) + (1-\lambda)^{\alpha+1} \mathrm{J}^{\alpha}_{(\lambda a+(1-\lambda)b)+} f(b) \right] \Big|$$

$$\leqslant \lambda^{\alpha+1}(1-\lambda)^{\alpha+1}(b-a) \Bigg\{ \left(\int_0^1 1^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 t^{\alpha q} |f'(t(\lambda a + (1-t)b) + (1-t)a)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}}$$

$$+ \left(\int_0^1 1^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 (1-t)^{\alpha p} |f'(tb + (1-t)(\lambda a + (1-\lambda)b))|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \Bigg\}$$

$$\leqslant \lambda^{\alpha+1}(1-\lambda)^{\alpha+1}(b-a) \Bigg\{ \left(\int_0^1 t^{\alpha q} \left[t|f'(\lambda a + (1-\lambda)b)|^q + (1-t)|f'(a)|^q \right] dt \right)^{\frac{1}{q}}$$

$$+ \left(\int_0^1 (1-t)^{\alpha q} \left[t|f'(b)|^q| + (1-t)|f'(\lambda a + (1-\lambda)b)|^q \right] dt \right)^{\frac{1}{q}} \Bigg\}$$

$$= \lambda^{\alpha+1}(1-\lambda)^{\alpha+1}(b-a) \Bigg\{ \left(\frac{(\alpha q+1)|f'(\lambda a + (1-\lambda)b)|^q + |f'(a)|^q}{(\alpha q+1)(\alpha q+2)} \right)^{\frac{1}{q}}$$

$$+ \left(\frac{(\alpha q+1)|f'(\lambda a + (1-\lambda)b)|^q + |f'(b)|^q}{(\alpha q+1)(\alpha q+2)} \right)^{\frac{1}{q}} \Bigg\}.$$

Dans le cas de $q = 1$, en utilisant la même méthode ci-dessus, Alors on obtient l'inégalité :

$$\left| \lambda^{\alpha}(1-\lambda)^{\alpha} f(\lambda a + (1-\lambda)b) - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^{\alpha}} \left[\lambda^{\alpha+1} \mathrm{J}^{\alpha}_{(\lambda a+(1-\lambda)b)-} f(a) + (1-\lambda)^{\alpha+1} \mathrm{J}^{\alpha}_{(\lambda a+(1-\lambda)b)+} f(b) \right] \right|$$

$$\leq \lambda^{\alpha+1}(1-\lambda)^{\alpha+1}(b-a) \Bigg\{ \left(\frac{(\alpha+1)|f'(\lambda a + (1-\lambda)b)| + |f'(a)|}{(\alpha+1)(\alpha+2)} \right)$$

$$+ \left(\frac{(\alpha+1)|f'(\lambda a + (1-\lambda)b)| + |f'(b)|}{(\alpha+1)(\alpha+2)} \right) \Bigg\},$$

où $\lambda \in (0,1)$ et $\alpha \geq 0$. $\square$

Corollaire 3.3. Sous l'hypothèse du théorème 3.3 avec $\lambda = \frac{1}{2}$, on obtient l'inégalité du théorème 2.6 :

$$\begin{aligned}&\left|f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2^{1-\alpha}(b-a)^{\alpha}}\left[J^{\alpha}_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^-}f(a) + J^{\alpha}_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^+}f(b)\right]\right| \\ &\leq \frac{b-a}{4}\left\{\left(\frac{(q\alpha+1)\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q + |f'(a)|^q}{(q\alpha+1)(q\alpha+2)}\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\frac{(q\alpha+1)\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q + |f'(b)|^q}{(q\alpha+1)(q\alpha+2)}\right)^{\frac{1}{q}}\right\}.\end{aligned}$$

Remarque 3.5. Si $\alpha = 1$ au corollaire 3.3 , on obtient :

$$\begin{aligned}&\left|f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right| \\ &\leq \frac{b-a}{4}\left\{\left(\frac{(q+1)|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)|^q + |f'(a)|^q}{(q+1)(q+2)}\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\frac{(q+1)|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)|^q + |f'(b)|^q}{(q+1)(q+2)}\right)^{\frac{1}{q}}\right\}.\end{aligned}$$

Conclusion

Le but de ce travail est généralisée les inégalités intégrales de type d'Hermite-Hadamard

pour l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville .

Bibliographie

[1] A.G.Azpeitia, Convex functions and the Hadamard inequality,Rev. Colom-biana Math.28 (1994),7-12.

[2] M.K. Bakula and J.Pečarić Note on some Hadamard-type inequalities, JI-PAM.J.Inequal. Pure Appl. Math. 5 (2004), Article 74.

[3] S.Belarbi and Z.Dahmani, On some new fractional integral inequalities, JI-PAM.J.Inequal. Pure Appl. Math. 10 (2009), Article 86.

[4] Z. Dahmani, New inequalities in fractional integrals,Int.J.Nonlinear Sci. 9 (2010),493-497.

[5] Z. Dahmani, On Minkowski and Hermite-Hadamard integral inequalities via fractional integration,Ann,Funct,Anal, 1 (2010), 51-58.

[6] Z. Dahmani, L.Tabhartit and S.Taf, Some fractional integral inequalities,Nonl. Sci. 1Lett.A 1 (2010), 155-160.

[7] Z. Dahmani,L. Tabharit and S. Taf, New generalizations of Gruss inequality using Riemann-

Liouville fractional integrals, Bull. Math. Anal. Appl. 2 (2010), 93-99.

[8] J.Deng and J.Wang,Fractional Hermite-Hadamard inequalities for (α.m)-logarithmically convex functions, J. Inequal. Appl. 2013, Art. ID 364.

[9] S. S. Dragomir and C. E. M. Pearce, Selected Topics on Hermite-Hadamard Inequalities and Applications, RGMIA Monographs, Victoria University, 2000.

[10] S.S.Dragomir and R. P. Agarwal,Two inequalities for differentiable mappings and applications to special means of real numbers and to trapezoidal formula, Appl. Math. Lett. 11 (1998) ,91-95.

[11] R. Gorenflo and F. Mainardi. Fractional calculus in continuum mechan-ics(Udine,1996), 223-276, CISM Courses and Lectures 378, Springer, Vienna, 1997.

[12] U. S. Kırmacı, Inequalities for differentiable mappings and applications to spe-cial means of real numbers and to midpoint formula, Appl. Math. Comp. 147(2004), 137-146.

[13] A. A. Kilbas,H. M. Srivastava and J. J. Trujillo, Theory and Applications of Fractional Differential Equations,North-Holland Mathematics Studies 204,Elsevier Sci . B.V., Amsterdam,2006.

[14] M. A. Latif, S. S. Dragomir and A. E. Matouk, New inequalities of Ostrowski type for co-ordinated convex functions via fractional integrals,J. Fract. Calc. Appl. 2(2012), 1-15.

[15] S. Miller and B. Ross, An introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations,John Wiley & Sons , USA, 1993

[16] J. E.Pečarić, F.Proschan and Y. L. Tong, Convex Functions, Partial Orderings and Statistical Applications, Academie Press, Boston, 1992.

[17] C. E. M. Pearce and J.Pečarić, Inequalities for differentiable mappings with application to special means and quadrature formulae, Appl. Math. Lett. 13(2000), 51-55.

[18] M. Z. Sarikaya and H. Yildirim, On Hermite-Hadamard type inequalities for Riemann-Liouville fractional integrals, submitted (2013).

[19] M. Z. Sarikaya and H. Ogunmez, On new inequalities via Riemann-Liouville fractional integration, Abst. Anal. 2012, Art. ID 428983.

[20] M.Z. Sarikaya,E. Set,H. Yaldiz and N., Basak, Hermite-Hadamard's inequa-lities for fractional integrals and related fractional inequalities, Math. Com-put. Modelling 57 (2013), 2403-2407.

[21] M. Tunc, On new inequalities for h-convex functions via Riemann-Liouville fractional integration, Filomat 27 (2013), 559-565.

[22] Y.Zhang and J. Wang, On some new Hermite-Hadamard inequalities involving Riemann-Liouville fractional integrals, J . Inequal. Appl. 2013, Art. ID 220.

[23] H. Brizes : Analyse Fonctionnelle théorie et application, Masson , Paris 1983 .

[24] A . A . Kilbas , H . M ,Srivastava anq J . J . Trujillo , Theory and applications of fractional differential Equations , North-Holland Matematical Studies 204 , Ed Van mill , Amesterdam,(2006)

.

[25] O . L . Mangasariam , Nonlinear programming . McGram-Hille Book Co ., New York-London-Sudney 19969 .

[26] J. E . Pečarić , F. Proschan and Y . L . Tong , Convex function , rartiel orderings , and statistical application. Mathematics in Science and Engineering , 187. Academic Press, Inc., Bosten, MA, 1992 .

[27] Abdelghanie Ouhab,Calcule fractionnaire Laboratoire de Mathématiques, Université de Sidi-Bel-Abbés B.P. 89,22000 Sidi-Bel-Abbés,Algéri.

[28] Alomani M, Darus M. Ostrowski type inequalities for functions whose derivatives are s-convex in the second sense .Appl Math Lett , 2010, (23) : 1071-1076.

[29] M.Zeki Sarikaya, H.Yaldiz. On Generalized Hermite-Hadamard type Integral inequalities Involving Riemann-liouville Fractional integrals, Nihonkai Math.J, Vol.25(2014), 93-104.