République Algérienne Démocratique & Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur & de la Recherche Scientifique

Université Ibn Khaldoun- Tiaret

FACULTÉ DES MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUE

DÉPARTEMENT DES MATHEMATIQUES

MEMOIRE MASTER

Présentée par :

KOUFI CHAHRAZAD

KHENFOUS FATMA-ZOHRA

Spécialité : *Mathématiques*

Option : *Analyse fonctionnelle*

Intitulée

Introduction à la dérivation fractionnaire d'ordrea variable et applications

Soutenu publiquement le 14 / 06/ 2022 à Tiaret devant le jury composé de :

Soutenue le 14/06/2022

Devant le jury composé de :

Président :	*Sabit Souhila*	*Pr.Univ.Ibn Khaldoun Tiaret*
Examinatrice :	*Bouaaza Zoubida*	*Pr.Univ. Ibn Khaldoun Tiaret*
Encadreur :	*Maazouz Kadda*	*Pr. Univ. Ibn Khaldoun Tiaret*

2021-2022

REMERCIMENTS

Tout d'abord nous remercions ALLAH le tout miséricordieux qui nous a donné la force et Le courage pour réaliser ce travail.

Merci à notre promoteur Mr :Maazouz kadda pour ses conseils et son aide qui a mis à notre disposition tous ce qui nécessaire pour réaliser ce mémoire.

Nous remercions en deuxième lieu les membres de jury Dr. Sabit Souhila pour le grand honneur qu'elle nous fait en présidant le jury de notre soutenance,Dr. Bouaazza Zoubida pour l'honneur qu'elle nous fait d'avoir accepter l'examination de notre travail.

Nous remercions également toute l'équipe pédagogique de l'Université Ibn Khaldoun -Tiaret-spécialement département de mathématiques pour leur encadrement durant notre cursus universitaires.

Enfin Nous tenons à remercier toutes les personnes qui nous ont conseillé lors de la rédaction de ce mémoire : Nos familles, nos amis, nos professeurs, et nos camarades de promotion.

DÉDICACES

Je dédie ce travaille

A ma mère, pour son amour, ses encouragements et ses sacrifices.

A mon père, l'école de mon enfance ,qui a été mon ombre durant toutes les années d'étude, que dieu le garde.

A mes chères frères et sœurs et a tous mes amis sans exception, Pour leur encouragement.

A tout ma famille pour leur soutiens tout au long de parcours universitaire.

KOUFI Chahrazed

Je dédie ce travaille

A mes chères parents ma mère et mon père pour leur patience, leur amour, leur soutient et leurs encouragements.

A mes chères frères Mohammed, Walid, et ma soeur Fadoua, pour leur encouragements.

A tout ma famille et ma deuxième famille (DJOUDI), mes amis, et ma promotion de mathématiques, pour leurs soutiens.

KHENFOUS Fatma-Zohra

NOTATIONS GÉNÉRALES

$\mathbb{N}$	Ensenble des nombres naturels.
$\mathbb{R}$	Ensenble des nombres réels.
$C[a,b]$	Espace des fonctions continues sur[a,b].
$AC[a,b]$	Espace des fonctions absolument continue sur [a,b].
$L^p[a,b]$	L'espace de Lebesgue L^p sur l'intervalle [a,b].
I_a^{α}	L'intégrale fractionnaire au sens de Reimann-Liouville d'ordre α.
$I_a^{p(t)}$	L'intégrale fractionnaire au sens de Reimann-Liouville d'ordre p(t).
${}^{RL}D_a^{\alpha}$	la dérivée fractionnaire au sens de Reimann-Liouville d'ordre α.
${}^{RL}D_a^{p(t)}$	la dérivée fractionnaire au sens de Reimann-Liouville d'ordre p(t).
${}^{c}D_a^{\alpha}$	la dérivée fractionnaire au sens de Caputo d'ordre α.
${}^{c}D_a^{p(t)}$	la dérivée fractionnaire au sens de Caputo d'ordre $p(t)$.

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION

Le calcul fractionnaire a été reconnu comme un outil extrêmement puissant pour décrire comportement et phénomènes complexes de problèmes pratiques dus à ses applications. Cependant, le calcul d'ordre fractionnaire constant n'est pas l'ultime outil pour modéliser les phénomènes naturelle. Un calcul fractionnaire d'ordre variable est proposé.

Ce travail s'intéresse à étudier l'existence de solution du problème fractionnaire d'ordre variable en utilisant le théorème d'Ascoli-Arzela et les théorèmes de point fixe. Notre mémoire est divisé en trois chapitres : Le premier chapitre est consacré à la définition des théorèmes fondamentaux utilisé dans ce travail comme le calcul fractionnaire (intégrale et dérivée), et leurs propriétés. Cette partie rassemble aussi les théorèmes des points fixes que nous utiliserons dans ce mémoire. Le deuxième chapitre nous intéressons à étudier l'existence de solution d'un problème fractionnaire d'ordre variable à condition initiale. Le troisième chapitre , nous intéressons à étudier L'existence de solution pour un problème aux limites d'équation différentielle d'ordre variable.

CHAPITRE 1

PRÉLIMINAIRES

Dans ce chapitre nous introduisons quelques notions, définitions et théorèmes qui seront utilisés dans ce mémoire.

1.1 Quelques définitions et théorèmes

Espaces L^p

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$

Définition 1.1.1. *[2] Soit $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq p < +\infty$. On note par $L^p(\Omega)$ l'espace de classes d'équivalences de fonctions de puissance p-intégrables sur Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$:*

$$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}; f \text{ mesurable et } ||f||_{L^p} < \infty\}$$

avec

$$||f||_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

Théorème d'Ascoli-Arzela

Définition 1.1.2. *[1] Soit $C(I, \mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues d'un intervalle compact I dans $\mathbb{R}$ de l'espace de Banach , M un sous ensemble de $C(I, \mathbb{R})$*

1. *M est dit **équicontinu** si est seulemnt si :*

   $\forall \varepsilon > 0, \forall t_1, t_2 \in I : \| t_1 - t_2 \| \leq \delta \Rightarrow \| f(t_1) - f(t_2) \| \leq \varepsilon, \forall f \in M$

2. *M est dit **uniformément borne** si et seulement si :*

   $\exists c > 0 : \| f(t) \| \leq c, \quad \forall t \in I \quad et \quad \forall f \in M.$

Théorème 1.1.1. *(**Ascoli-Arzela**) [1] un sous ensemble M de $C(I, \mathbb{R})$ est relativement compact si :*
- M est uniformement borné .
- M est équicontinue .

1.2 Calcul fractionnaire

1.2.1 Fonctions Gamma et Bêta

Ces deux fonction jouent un rôle très important dans le calcule fractionnaire.

Définition 1.2.1. *[3] (**Fonction Gamma**)*
L'une des fonctions de base du calcule fractionnaire est la fonction Gamma d'Euler $\Gamma(z)$.
La fonction Gamma $\Gamma(z)$ est définie par l'intégrale suivante :

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt \qquad où \ z \in \mathbb{C} \ et \ Re(z) > 0.$$

Propriétés [3] : nous avons les propriétés suivantes :

1. $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \quad z \in \mathbb{C}.$
2. $\Gamma(1) = 1$ et $\Gamma(-m) = \mp\infty$ pour tout $m \in \mathbb{N}$.
3. $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$. et $\Gamma(n + \frac{1}{2}) = \dfrac{(2n)!\sqrt{\pi}}{4^n n!}$.
4. Si $n \in \mathbb{N}$, on a :$\Gamma(n+1) = n!$.

Définition 1.2.2. *[3](**Fonction Bêta**)*
La fonction Bêta est un type d'intégrale d'Euler définie pour des nombres complexes de z et w par :

$$B(z, w) = \int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{w-1} dt \quad Re(w) > 0.$$

Propriétés([3]) Nous avons les propriétés suivantes :

1. B(z,w)=B(w,z)(symétrique).
2. zB(z,w+1)=wB(z+1,w).
3. $B(z,1) = \dfrac{1}{z} \quad z > 0.$
4. On peut prendre aussi la forme d'intégrale
$$B(z,w) = 2\int_0^1 (\sin\theta)^{2z-1}(\cos\theta)^{2w-1}d\theta.$$

Théorème 1.2.1. *[3] La relation entre la fonction Gamma et bêta donnée par :*

$$B(z,w) = \frac{\Gamma(z).\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}, \quad z,w \in \mathbb{C} \text{ avec } Re(z) > 0 \text{ et } Re(w) > 0.$$

1.2.2 Intégrale et dérivée fractionnaire

Définition 1.2.3. *(L'intégrale au sens de Riemann-Liouville d'ordre constant)*
L'intégrale fractionnaire d'ordre α au sens de Riemann-Liouville d'une fonction $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ est définie par : à gauche

$$I_{a+}^{\alpha} f(t) = \tfrac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} f(s)ds \quad t > a$$

à droite

$$I_{b-}^{\alpha} f(t) = \tfrac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^b (s-t)^{\alpha-1} f(s)ds \quad t < b$$

Proposition 1.2.1. *[5] L'égalité $I_{a+}^{\gamma} I_{a+}^{\delta} f(t) = I_{a+}^{\gamma+\delta} f(t), \gamma > 0$ et $\delta > 0$ est vrai pour $f \in L(a,b)$.*

Définition 1.2.4. *[5]**(Intégrale au sens de Riemann-Liouville d'ordre variable)***
L'intégrale fractionnaire au sens de Reimann-Liouville d'ordre variable p(t) est définie par :

$$I_{a+}^{p(t)} f(t) = \int_a^t \frac{(t-s)^{p(t)-1}}{\Gamma(p(t))} f(s)ds, \quad p(t) > 0, t > a.$$

Remarque. *En générale , la proposition 1.2.1 n'est pas vérifiée pour l'intégrale fractionnaire d'ordre variable*

$$I_{a+}^{p(t)} I_{a+}^{q(t)} f(t) \neq I_{a+}^{p(t)+q(t)} f(t), p(t) > 0 \text{ et } q(t) > 0, f \in L(a,b).$$

Exemple 1. *Soit $p(t) = \frac{t}{4} + \frac{1}{4}, q(t) = \frac{3}{4} - \frac{t}{4}, f(t) = t, \quad 0 \leq t \leq 2$, maintenant on calculons $I_{0+}^{p(t)} I_{0+}^{q(t)} f(t)|_{t=1}, I_{0+}^{q(t)} I_{0+}^{p(t)} f(t)|_{t=1}$ et $I_{0+}^{p(t)+q(t)} f(t)|_{t=1}$*
Pour $1 \leq t \leq 2$, on a :

$$I_{0+}^{p(t)}I_{0+}^{q(t)}f(t)=\int_0^t\frac{(t-s)^{\frac{t}{4}+\frac{1}{4}-1}}{\Gamma(\frac{t}{4}+\frac{1}{4})}\int_0^s\frac{(s-\tau)^{\frac{3}{4}-\frac{s}{4}-1}\tau}{\Gamma(\frac{3}{4}-\frac{s}{4})}d\tau ds=\int_0^t\frac{(t-s)^{\frac{t}{4}-\frac{3}{4}}s^{\frac{7}{4}-\frac{s}{4}}}{\Gamma(\frac{t}{4}+\frac{1}{4})\Gamma(\frac{11}{4}-\frac{s}{4})}ds,$$

alors

$$I_{0+}^{p(t)}I_{0+}^{q(t)}f(t)|_{t=1}=\int_0^1\frac{(1-s)^{\frac{-1}{2}}s^{\frac{7}{4}-\frac{s}{4}}}{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{11}{4}-\frac{s}{4})}ds\approx 0.4757,$$

encore

$$I_{0+}^{q(t)}I_{0+}^{p(t)}f(t)=\int_0^t\frac{(t-s)^{\frac{3}{4}-\frac{t}{4}-1}}{\Gamma(\frac{3}{4}+\frac{t}{4})}\int_0^s\frac{(s-\tau)^{\frac{s}{4}+\frac{1}{4}-1}\tau}{\Gamma(\frac{s}{4}+\frac{1}{4})}d\tau ds=\int_0^t\frac{(t-s)^{\frac{-1}{4}-\frac{t}{4}}s^{\frac{s}{4}+\frac{5}{4}}}{\Gamma(\frac{3}{4}-\frac{t}{4})\Gamma(\frac{9}{4}+\frac{s}{4})}ds,$$

$$I_{0+}^{q(t)}I_{0+}^{p(t)}f(t)|_{t=1}=\int_0^1\frac{(1-s)^{\frac{-1}{2}}s^{\frac{s}{4}+\frac{5}{4}}}{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{9}{4}+\frac{s}{4})}ds\approx 0.5283,$$

et

$$I_{0+}^{p(t)+q(t)}f(t)|_{t=1}=I_{0+}^{1}f(t)|_{t=1}=\int_0^1 f(t)|_{t=1}=\int_0^1 sds=0.5.$$

Donc

$$\begin{aligned}I_{0+}^{p(t)}I_{0+}^{q(t)}f(t)|_{t=1}&\neq I_{0+}^{p(t)+q(t)}f(t)|_{t=1},\\ I_{0+}^{q(t)}I_{0+}^{p(t)}f(t)|_{t=1}&\neq I_{0+}^{p(t)+q(t)}f(t)|_{t=1}\ ,\\ I_{0+}^{p(t)}I_{0+}^{q(t)}f(t)|_{t=1}&\neq I_{0+}^{q(t)}I_{0+}^{p(t)}f(t)|_{t=1}.\end{aligned}$$

Définition 1.2.5. ***(Dérivée au sens de Reimann-Liouville d'ordre constant)***

La dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouvile à gauche d'ordre $\alpha>0$ d'une fonction f est définie par :

$$\begin{aligned}D_{a+}^{\alpha}f(t)&=D^nI_{a+}^{n-\alpha}f(t)\\&=\frac{d^n}{dt^n}I_{a+}^{n-\alpha}f(t)\\&=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^n}{dt^n}\int_a^t(t-s)^{n-\alpha-1}f(s)ds,t>a\end{aligned}$$

Avec $n=[\alpha]+1$

On a une autre définition de la dérivée fractionnaire à droite au sens de Reimann-Liouville $D_{b-}^{\alpha}f(t)$ qui donnée par la formule suivante

$$\begin{aligned}D_{b-}^{\alpha}f(t)&=(-1)^nD^nI_{b-}^{n-\alpha}f(t)\\&=(-1)^n\frac{d^n}{dt^n}I_{b-}^{n-\alpha}f(t)\\&=\frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^n}{dt^n}\int_t^b(s-t)^{n-\alpha-1}f(s)ds,t<b\end{aligned}$$

Si $0 < \alpha < 1$

Les dérivées fractionnaires à gauche et à droite d'ordre $0 < \alpha < 1$ *de la fonction* $f[a,b] \to \mathbb{R}$ *sont définie par :*

$$\begin{aligned} D^{\alpha}_{a+}f(t) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dt}\int_a^t (t-s)^{-\alpha}f(s)ds \\ &= \frac{d}{dt}I^{1-\alpha}_{a+}f(t), t \in [a,b] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D^{\alpha}_{b-}f(t) &= -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dt}\int_t^b (s-t)^{-\alpha}f(s)ds \\ &= -\frac{d}{dt}I^{1-\alpha}_{b-}f(t), t \in [a,b] \end{aligned}$$

Proposition 1.2.2. *[5] Légalité* $D^{\gamma}_{a+}I^{\delta}_{a+}f(t) = f(t)$ *est vrai pour* $f \in L^1(a,b)$.

Proposition 1.2.3. *[5] Soit* $\alpha > 0$ *alors l'equation différentielle*

$$D^{\alpha}_{a+}u = 0$$

a une solution unique

$$u(t) = c_1(t-a)^{\alpha-1} + c_2(t-a)^{\alpha-2} + ... + c_i(t-a)^{a-i} + ... + c_n(t-a)^{\alpha-n},$$

$c_i \in \mathbb{R}, i = 1,2,...,n, n-1 < \alpha \leq n.$

Proposition 1.2.4. *[5] Soit* $\alpha > 0, u \in L^1(a,b), D^{\alpha}_{a+}u \in L^1(a,b)$ *alors l'égalité suivant vérifier*

$$I^{\alpha}_{a+}D^{\alpha}_{a+}u(t) = c_1(t-a)^{\alpha-1} + c_2(t-a)^{\alpha-2} + ... + c_i(t-a)^{a-i} + ... + c_n(t-a)^{\alpha-n},$$

$c_i \in \mathbb{R}, i = 1,2,...,n, n-1 < \alpha \leq n.$

Définition 1.2.6. *[5]**Dérivée au sens de Reimann-Liouville d'ordre variable***

la dérivé fractionnaire au sens de Reimann-Liouville d'ordre variable $p(t)$ *est définie par :*

$$D^{p(t)}_{a+}f(t) = \frac{d^n}{dt^n}\int_a^t \frac{(t-s)^{n-1-p(t)}}{\Gamma(n-p(t))}f(s)ds, \quad t > a.$$

Remarque. *La proposition 1.2.2 n'est pas vérifiée pour la dérivée fractionnaire d'ordre variable*

$$D^{p(t)}_{a+}I^{q(t)}_{a+}f(t) \neq f(t), f \in L(a,b).$$

Exemple 2. *Soit* $0 < p(t) < 1, t > 0$ *par calcule on a*

$$I_{0+}^{p(t)}1 = \frac{1}{\Gamma(p(t))}\int_0^t (t-s)^{p(t)-1}ds = \frac{t^{p(t)}}{(p(t))\Gamma(p(t))}, t > 0,$$

$$D_{0+}^{p(t)}I_{0+}^{p(t)}1 = \frac{d}{dt}I_{0+}^{1-p(t)}I_{0+}^{p(t)}1 = \frac{d}{dt}\frac{1}{\Gamma(1-p(t))}\int_0^t \frac{(t-s)^{-p(t)}s^{p(s)}}{p(s)\Gamma(p(s))}ds \neq 1,$$

et

$$I_{0+}^{p(t)}D_{0+}^{p(t)}1 = I_{0+}^{p(t)}\frac{d}{dt}I_{0+}^{1-p(t)}1 = I_{0+}^{p(t)}(\frac{d}{dt}\frac{t^{1-p(t)}}{(1-p(t))\Gamma(1-p(t))}) \neq 1.$$

Définition 1.2.7. ***(Dérivée au sens de Caputo d'ordre constant)***
La dérivée fractionnaire d'ordre α *au sens de Caputo d'une fonction* $f \in AC([a,b],\mathbb{R})$ *est définie par*

$$\begin{aligned} {}^cD_{a+}^{\alpha}f(t) &= I_{a+}^{n-\alpha}D^n f(t) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1}f^n(s)ds \quad t > a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} {}^cD_{b-}^{\alpha}f(t) &= (-1)^n I_{b-}^{n-\alpha}D^n f(t) \\ &= \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)}\int_t^b (s-t)^{n-\alpha-1}f^n(s)ds \quad t > a \end{aligned}$$

Exemple 3. *Soit* $f(x) = (x-a)^{\beta}$ *pour certain* $\beta \geq 0$ *alors*

$${}^cD_{a+}^{\alpha}f(x) = \begin{cases} 0 & si\beta \in \{0,1,2....,n-1\} \\ \dfrac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-\alpha)}, & si\beta \notin \mathbb{N}et\beta \geq n \end{cases}$$

On a

$${}^cD_{a+}^{\alpha}C = 0$$

Où C *est une constante .*

Définition 1.2.8. *[5]**(Dérivée au sens de Caputo d'ordre variable)***
La dérivée fractionnaire d'ordre variable $p(t)$ *au sens de Caputo d'une fonction* $f \in AC([a,b],\mathbb{R})$ *est définie par*

$$\begin{aligned} {}^cD_{a+}^{p(t)}f(t) &= I_{a+}^{n-p(t)}D^n f(t) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-p(t))}\int_a^t (t-s)^{n-p(t)-1}f^n(s)ds \quad t > a \end{aligned}$$

1.3 Théorèmes de point fixe

Théorème 1.3.1. *[4](**Théorème du Point fixe de Banach.**)*
Soit (X, d) *un espace métrique complet. une application* $T : X \to X$ *est une contraction avec la constante Lipschitz* $K<1$*. Alors* T *a un point fixe unique* $x \in X$*.*

Théorème 1.3.2. *[4](**Théorème de point fixe de Schauder**)*
Soit X *un espace de Banach,* $K \subset X$ *un ensemble convexe, fermé, borné et non vide. Et soit* $T : K \to K$ *un opérateur complètement continue. Alors* T *admet au moins un point fixe.*

Théorème 1.3.3. *[4](**Théorème d'altèrnative non linéaire de Leray-Schauder.**)*
Soit K *un ouvert , borné d'un espace de Banach* X *et* $N : K \to X$ *une application continue et compacte. Alors*

- *N admet un point fixe dans K .*
- *Il existe $x \in K$, $t \in [0,1]$ telle que $x = tN(x)$.*

CHAPITRE 2

L'ÉTUDE D'UN PROBLÈME À CONDITION INITIALE

Dans ce chapitre ,on considère l'existence de solution pour un problème à condition initiale , au moyen de quelques techniques d'analyse et le théorème d'Ascoli-arzela.

On a le problème suivant :

$$\begin{cases} D_{0+}^{q(t,x(t))}x(t) = f(t,x), \quad 0 < t \leq T < +\infty \\ x(0) = 0, \end{cases} \tag{2.1}$$

D'où $D_{0+}^{q(t,x(t))}x(t)$ est la dérivée fractionnaire d'ordre variable , $0 < q(t,x(t)) \leq q^* < 1, 0 \leq t \leq T$, $x \in \mathbb{R}$ et $f; [0,T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue.

On transformé (2.1) en une équation intégrale équivalente

$$x(t) = I_{c+}^{q(t,x(t))} f(t,x(t)) = \int_c^t \frac{(t-s)^{q(s,x(s))-1}}{\Gamma(q(s,x(s)))} f(s,x(s))ds, c \leq t \leq T, \tag{2.2}$$

2.1 l'existence de résultat

Soient les hypothèses suivants :

(H_1) $q : [0,T] \times \mathbb{R} \to (0,q^*], 0 < q^* < 1$ est une fonction continue ;

(H_2) $f : [0,T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue.

Lemme 1. *Soit* (H_1) *est vérifiée* ,$x_n, x \in$ *C[0,T]* , *supposons que* $x_n(t) \to x(t), t \in [0,T]$ *lorsque* $n \to \infty$, *alors*

$$\int_0^{t-\delta} \frac{(t-s)^{-q(s,x_n(s))}}{\Gamma(1-q(s,x_n(s)))} x_n(s)ds \to \int_0^{t-\delta} \frac{(t-s)^{-q(s,x(s))}}{\Gamma(1-q(s,x(s)))} x(s)ds, t \in [\delta, T], \tag{2.3}$$

lorsque $n \to \infty$.

Preuve. *On voit que*

$$si \quad 0 < T \leq 1, \quad alors \quad T^{-q(s,x(t))} \leq T^{-q^*} \tag{2.4}$$

$$si \quad 1 < T < +\infty, \quad alors \quad T^{-q(s,x(s))} < 1. \tag{2.5}$$

donc, pour $0 < T < +\infty$, *on a*

$$T^* = max\{T^{-q^*}, 1\}. \tag{2.6}$$

on a

$M = \max\limits_{0 \leq t \leq T} \mid x(t) \mid +1, M_1 = \max\limits_{0 \leq t \leq T} |x_n(t)| + 1, L = \max\limits_{0 \leq t \leq T, \|x_n\| \leq M_1} \mid \dfrac{1}{\Gamma(1-q(t,x_n(t)))} \mid +1$.

par la convergence de x_n , *pour* $\dfrac{(1-q^*)\varepsilon}{3LT^*T}$, *il existe* $N_0 \in \mathbb{N}$ *tel que*

$$\mid x_n(t) - x(t) \mid < \frac{(1-q^*)\varepsilon}{3LT^*T}, t \in [0,T], n \geq N_0. \tag{2.7}$$

puisque $(t-s)^{-q(s,x(s))}, \delta \leq t-s \leq T$, *est continue par rapport á son exposant* $-q(s,x(s))$, *pour* $\dfrac{\varepsilon}{3MLT}$, *quand* $n \geq n_0$,

$$\mid (t-s)^{-q(s,x_n(s))} - (t-s)^{-q(s,x(s))} \mid < \frac{\varepsilon}{3MLT}, \delta \leq t-s \leq T, \tag{2.8}$$

aussi , par continuité de $\dfrac{1}{\Gamma(1-q(s,x(s)))}$, *pour* $\dfrac{(1-q^*)\varepsilon}{3MT^*T}$, *quand* $n \geq n_0$, *est vrai*

$$\mid \frac{1}{\Gamma(1-q(s,x_n(s)))} - \frac{1}{\Gamma(1-q(s,x(s)))} \mid < \frac{(1-q^*)\varepsilon}{3MT^*T}, 0 \leq s \leq T. \tag{2.9}$$

Ainsi , d'après (2.4) et (2.9) , on a

$$
\begin{aligned}
& \mid \int_0^{t-\delta} \frac{(t-s)^{-q(s,x_n(s))}}{\Gamma(1-q(s,x_n(s)))} x_n(s)ds - \int_0^{t-\delta} \frac{(t-s)^{-q(s,x(s))}}{\Gamma(1-q(s,x(s)))} x(s)ds \mid \\
\leq \quad & \int_0^{t-\delta} \mid \frac{(t-s)^{-q(s,x_n(s))}}{\Gamma(1-q(s,x_n(s)))} \mid\mid x_n(s) - x(s) \mid ds \\
& + \int_0^{t-\delta} \mid \frac{(t-s)^{-q(s,x_n(s))} - (t-s)^{-q(s,x(s))}}{\Gamma(1-q(s,x_n(s)))} \mid\mid x(s) \mid ds \\
& + \int_0^{t-\delta} \mid (t-s)^{-q(s,x(s))}) \mid\mid \frac{1}{\Gamma(1-q(s,x_n(s)))} - \frac{1}{\Gamma(1-q(s,x(s)))} \mid\mid x(s) \mid ds \\
\leq \quad & \frac{L(1-q^*)\varepsilon}{3LT^*T} \int_0^{t-\delta} (t-s)^{-q(s,x_n(s))} ds + \frac{ML\varepsilon}{3MLT} \int_0^{t-\delta} ds + \frac{M(1-q^*)\varepsilon}{3MT^*T} \int_0^{t-\delta} (t-s)^{-q(s,x(s))} ds \\
= \quad & \frac{(1-q^*)\varepsilon}{3T^*T} \int_0^{t-\delta} T^{-q(s,x_n(s))} (\frac{t-s}{T})^{-q(s,x_n(s))} ds + \frac{\varepsilon}{3T} \int_0^{t-\delta} ds \\
+ & \frac{(1-q^*)\varepsilon}{3T^*T} \int_0^{t-\delta} T^{-q(s,x(s))} (\frac{t-s}{T})^{-q(s,x(s))} ds \\
\leq \quad & \frac{(1-q^*)\varepsilon}{3T^*T} \int_0^{t-\delta} T^* (\frac{t-s}{T})^{-q^*} ds + \frac{\varepsilon}{3T} \int_0^{t-\delta} ds + \frac{(1-q^*)\varepsilon}{3T^*T} \int_0^{t-\delta} T^* (\frac{t-s}{T})^{-q^*} ds \\
= \quad & \frac{(1-q^*)\varepsilon}{3T^{1-q^*}} \int_0^{t-\delta} (t-s)^{-q^*} ds + \frac{\varepsilon}{3T} \int_0^{t-\delta} ds + \frac{(1-q^*)\varepsilon}{3T^{1-q^*}} \int_0^{t-\delta} (t-s)^{-q^*} ds \\
= \quad & \frac{\varepsilon}{3T^{1-q^*}} (t^{1-q^*}) + \frac{\varepsilon}{3T}(t-\delta) + \frac{\varepsilon}{3T^{1-q^*}} (t^{1-q^*} - \delta^{1-q^*}) \\
< \quad & \frac{\varepsilon T^{1-q^*}}{3T^{1-q^*}} + \frac{T\varepsilon}{3T} + \frac{\varepsilon T^{1-q^*}}{3T^{1-q^*}} \\
= \quad & \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon
\end{aligned}
$$

Ce qui implique que (2.3) est vérifié .

Lemme 2. *soit* (H_2) *est vérifiée,* $x_n, x \in C[0,T]$*, supposons que* $x_n(t) \to x(t), t \in [0,T]$*lorsque* $n \to \infty$*,alors*

$$\int_0^{t-\delta} f(s,x_n(s))ds \to \int_0^{t-\delta} f(s,x(s))ds, t \in [\delta, T], \tag{2.10}$$

lorsque $n \to \infty$

Preuve. *Par convergence de* x_n*, pour* $\zeta > 0$*, il existe* $N_0 \in \mathbb{N}$ *tel que*

$$| x_n(t) - x(t) |< \zeta, t \in [0,T], n \geq N_0,$$

par la continuité de f, pour $\frac{\varepsilon}{T}$*, lorsque* $n \geq N_0$ *, est vraie*

$$| f(s, x_n(s)) - f(s, x(s)) |< \frac{\varepsilon}{T}, s \in [0,T]$$

ainsi ,on a

$$\begin{aligned} & | \int_0^{t-\delta} (f(s, x_n(s)) - f(s, x(s)))ds | \\ \leq & \int_0^{t-\delta} | f(s, x_n(s)) - f(s, x(s)) | ds \\ < & \frac{\varepsilon}{T} \int_0^{t-\delta} ds \\ = & \frac{\varepsilon}{T}(T - \delta) \\ \leq & \frac{\varepsilon T}{T} = \varepsilon, \end{aligned}$$

ce qui implique que (2.10) est vérifiée .

Lemme 3. *Supposons que* (H_1) *est vérifiée. Alors pour arbitraire fixé* $x \in C[0,T]$ *,telle que*

$$\lim_{\delta \to 0} \int_0^{t-\delta} \frac{(t-s)^{-q(s,x(s))}}{\Gamma(1-q(s,x(s)))} x(s)ds = \int_0^t \frac{(t-s)^{-q(s,x(s))}}{\Gamma(1-q(s,x(s)))} x(s)ds. \tag{2.11}$$

Preuve. *pour arbitraire fixé* $x \in C[0,T]$*, on pose*

$$M = \max_{0 \leq t \leq T} | x(t) | +1, L = \max_{0 \leq t \leq T, \|x\| \leq M} \frac{1}{\Gamma(1-q(t,x(t)))} + 1.$$

ainsi, pour $\forall \varepsilon > 0$*, prenons* $\delta_0 = (\frac{\varepsilon(1-q^*)}{MLT^*T^{q^*}})^{\dfrac{1}{1-q^*}}$ *, alors , quand* $0 < \delta < \delta_0$*, d'après* (2.5), (2.6), (2.7), *on a*

$$\begin{aligned}
& \mid \int_0^{T-\delta} \frac{(t-s)^{-q(s,x(s))}}{\Gamma(1-q(s,x(s)))} x(s)ds - \int_0^t \frac{(t-s)^{-q(s,x(s))}}{\Gamma(1-q(s,x(s)))} x(s)ds \mid \\
= & \mid \int_{t-\delta}^t \frac{(t-s)^{-q(s,x(s))}}{\Gamma(1-q(s,x(s)))} x(s)ds \mid \\
= & \mid \int_{t-\delta}^t \frac{T^{-q(s,x(s))}}{\Gamma(1-q(s,x(s)))} (\frac{t-s}{T})^{-q(s,x(s))} x(s)ds \mid \\
\leq & ML \int_{t-\delta}^t T^* (\frac{t-s}{T})^{-q^*} ds \\
= & \frac{MLT^* T^{q^*}}{1-q^*} \delta^{1-q^*} \\
< & \frac{MLT^* T^{q^*}}{1-q^*} \delta_0^{1-q^*} = \varepsilon,
\end{aligned}$$

Ce qui implique que (2.11) est vérifié.

Remarque. *Supposons que $(H_1), (H_2)$ sont vérifiés , alors on a*

$$\lim_{\delta \to 0} \int_0^{t-\delta} x(s)ds = \int_0^t x(s)ds, \lim_{\delta \to 0} \int_0^{t-\delta} f(s,x(s))ds = \int_0^t f(s,x(s))ds. \tag{2.12}$$

Lemme 4. *Soit $[a,b](-\infty < a < b < +\infty)$ un intervalle fini, il est sait que $AC[a,b]$ coïncide avec l'espace des primitives de Lebesgue sommable les fonctions :*

$$f(t) \in AC[a,b] \Leftrightarrow f(t) = c + \int_0^t \varphi(s)ds, \varphi \in L(a,b), c \in \mathbb{R}, \tag{2.13}$$

et donc une fonction absolument continue f(t) a une dèrivèe $f(t) = \varphi(t)$ presque partout sur $[a,b]$.

Par la définition de la dérivation fractionnaire, on voit que le problème (2.1) est équivalent à $x(0) = 0$ et l'expression suivante

$$\int_0^t \frac{(t-s)^{-q(s,x(s))}}{\Gamma(1-q(s,x(s)))} x(s)ds = c + \int_0^t f(s,x(s))ds, t \in [0,T], \tag{2.14}$$

où $c \in \mathbb{R}$.

Théorème 2.1.1. *supposons que $(H_1), (H_2)$ sont vérifiée. alors le problème (2.1) a au moins une solution $x^* \in C[0,T]$.*

Preuve. *afin d'obtenir le résultat d'existence de la solution du problème à condition initiale (2.1), nous avons d'abord que la suite suivante a une sous-suite convergente,*

$$x_k(t) = \begin{cases} 0, \quad 0 \leq t \leq \delta, \\ x_{k-1}(t) + \int_0^{t-\delta} \dfrac{(t-s)^{-q(s,x_{k-1}(s))}}{\Gamma(1-q(s,x_{k-1}(s)))} ds - \\ \int_0^{t-\delta} f(s, x_{k-1}(s))ds, \quad \delta < t < T, \end{cases} \tag{2.15}$$

$k = 1, 2, ...,$ *où* $x_0(t) = 0, t \in [\delta, T]$ *, (δ est un petit nombre arbitraire).*

Afin d'appliquer le théorème d'Ascoli-Arzela pour considérer l'existence de convergence sous-suite de la suite x_k *définie par (2.15) , premièrement, on prouve la borne uniforme de la suite* x_k *sur* $[0, T]$

On trouve que x_n *est uniformément bornée sur* $[0, \delta]$. *Maintenant , nous allons prouver que la suite* x_k *est uniformément bornée sur* $[\delta, T]$.

Soit $M = \max_{0 \leq t \leq T} \mid f(s, 0) \mid +1$. *Puisque* $x_0 = 0$ *est uniformément bornée sur* $[0, T]$*, alors, pour* $t \in [\delta, T]$,

on a

$$\begin{aligned} \mid x_1(t) \mid &= \mid x_0(t) \mid + \int_0^{t-\delta} \frac{(t-s)^{-q(s,x_0(s))}}{\Gamma(2-q(s,x_0(s)))} x_0(s)ds - \int_0^{t-\delta} f(s,0)ds \\ &= \mid \int_0^{t-\delta} f(s,0)ds \mid \\ &\leq M \int_0^{t-\delta} ds \\ &\leq MT = M_1, \end{aligned}$$

Ce qui implique que x_1 *est uniformément borné sur* $[\delta, T]$*, avec* $x_1(t) = 0$ *pour* $t \in [0, \delta]$*, on obtient que* x_1 *est uniformément bornée sur [0,T].*

Soit $M_f = \max\limits_{0 \leq t \leq T, \|x_1\| \leq M_1} \mid f(t, x_1) \mid +1, L = \max\limits_{0 \leq t \leq T, \|x_1\| \leq M_1} \mid \dfrac{1}{\Gamma(1-q(t,x_1(t)))} \mid +1$. *à partir de (2.4) , (2.5) , (2.6),* *Pour* $t \in [\delta, T]$*, on a que*

$$
\begin{aligned}
\mid x_2(t) \mid \leq & \quad \mid x_1(t) \mid + \int_0^{t-\delta} \mid \frac{(t-s)^{-q(s,x_1(s))}}{\Gamma(1-q(s,x_1(s)))} x_1(s) \mid ds + \int_0^{t-\delta} \mid f(s,x_1(s)) \mid ds \\
\leq & \quad M_1 + M_1 L \int_0^{t-\delta} T^{-q(s,x_1(s))} (\frac{t-s}{T})^{-q(s,x_1(s))} ds + M_f(T-\delta) \\
\leq & \quad M_1 + M_1 L \int_0^{t-\delta} T^* (\frac{t-s}{T})^{-q^*} ds + M_f T \\
= & \quad M_1 + \frac{M_1 L T^* T^{q^*}}{1-q^*} (t^{1-q^*} - \delta^{1-q^*}) + M_f T \\
\leq & \quad M_1 + \frac{M_1 L T^* T}{1-q^*} + M_f T \\
= & \quad M_2.
\end{aligned}
$$

Ce qui implique que x_2 *est uniformément borné sur* $[\delta, T]$ *avec* $x_2(t) = 0$ *pour* $t \in [0, \delta]$*, on obtient que* x_2 *est uniformément borné sur* $[0, T]$*. Alors la suite* x_k *est uniformément borné sur* $[0, T]$*.*
maintenant, on considère l'équicontinu de la suite $x_k sur [0, T]$*.Premièrement, nous pouvons savoir que la fonction* $k(t) = a^t - b^t, t \in (-1, 0), 0 < a < b$*, est décroissante. En effet, puisque* $\ln a < \ln b < 0$ *et* $a^t > b^t > 0$ *on a*

$$k^{'}(t) = a^t \ln a - b^t \ln b < b^t \ln a - b^t \ln b = b^t(\ln a - \ln b) < 0,$$

Ce qui implique que $k(t)$ *est décroissante .donc , pour* $l(s) = (\frac{t_1-s}{T})^{-q(s,x(s))} - (\frac{t_2-s}{T})^{-q(s,x(s))}$ *(où* $0 < \frac{t_1-s}{T} < \frac{t_2-s}{T} < 1$ *), nous pouvons considérer* $l(s)$ *comme étant du même type que* $k(s)$*, alors* $l(s)$ *est décroissante par rapport à son exposant* $-q(s, x(s))$*.*
Ainsi, dans la prochaine analyse, nous utiliserons l'inégalité de MINKOWSKI : pour a,b non négatif, et toute $R > 0$*, est vérifier*

$$(a+b)^R \leq c_R(a^R + b^R) \quad telque \quad c_R = max\{1, 2^{R-1}\} \tag{2.16}$$

Par conséquent, pour a,b non négatif, et toute $0 < R < 1$*, il résulte de (2.16) que*

$$(a+b)^R \leq c_R(a^R + b^R) = max\{1, 2^{R-1}\}(a^R + b^R) = a^R + b^R. \tag{2.17}$$

Soit $M = \max_{0 \leq t \leq T} \mid f(s, 0) \mid +1$ *. pour* $\forall \varepsilon > 0, \forall t_1, t_2 \in [0, T], t_1 < t_2$ *,*
On considère le résultat dans deux cas .

1er cas : $0 \leq t_1 \leq \delta < t_2 \leq T$ *on prend* $\eta_{1,I} = \frac{\varepsilon}{M}$ *, quand* $t_2 - t_1 < \eta_{1,I}$*, on a*

$$\begin{aligned} \mid x_1(t_2) - x_2(t_1) \mid = & \mid \int_0^{t_2-\delta} f(s,0)ds \mid \\ \leq & M \int_0^{t_2-\delta} ds \\ = & M(t_2 - \delta) \\ \leq & M(t_2 - t_1) \\ < & M\eta_{1,I} \\ = & \varepsilon. \end{aligned}$$

2eme cas : $\delta \leq t_1 < t_2 \leq T$*.on prend* $\eta_{1,II} = \frac{\varepsilon}{M}$*, lorsque* $t_2 - t_1 < \eta_{1,II}$*,on a*

$$\begin{aligned} \mid x_1(t_2) - x_1(t_1)) = & \mid \int_0^{t_1-\delta} f(s,0)ds - \int_0^{t_2-\delta} f(s,0)ds \mid \\ \leq & \int_{t_1-\delta}^{t_2-\delta} \mid f(s,0) \mid ds \\ \leq & M \int_{t_1-\delta}^{t_2-\delta} ds \\ = & M(t_2 - t_1) \\ < & M\eta_{1,II} \\ = & \varepsilon. \end{aligned}$$

Alors $x_1(t)$ *est équicontinu sur* $[0,T]$*, le même résultat peut être obtenu lorsque* $t_2 < t_1$
soit $M_f = \max\limits_{0 \leq t \leq T, \|x_1\| \leq M_1} |f(s,x_1) + 1, L = \max\limits_{0 \leq t \leq T, \|x_1\| \leq M_1} \mid \dfrac{1}{\Gamma(1-q(s,x_1(s)))} \mid +1$*. pour* $\forall \frac{3\varepsilon}{2} > 0$*,* $\forall t_1, t_2 \in [0,T], t_1 < t_2$ *on considère le résultat en deux cas.*
1er cas : $0 \leq t_1 \leq \delta < t_2 \leq T$*. on prend* $\eta_{2,I} = min\{\eta_{1,I}, (\dfrac{(1-q^*)\varepsilon}{4M_1LT^*T^{q^*}})^{\frac{1}{1-q^*}}, \frac{\varepsilon}{4M_f}\}$*, lorsque* $t_2 - t_1 < \eta_{2,I}$*, par (2.4) ,(2.5),(2.6),(2.17),*

on a

$$
\begin{aligned}
& |x_1(t_2) - x_1(t_1)| \\
= \quad & |x_1(t_2) + \int_0^{t_2-\delta} \frac{(t_2-s)^{-q(s,x_1(s))}}{\Gamma(1-q(s,x_1(s)))} x_1(s)ds - \int_0^{t_2-\delta} f(s,x_1)ds \mid \\
\leq & \mid x_1(t_2) \mid + M_1 L \int_0^{t_2-\delta} (t_2-s)^{-q(s,x_1(s))} ds + M_f \int_0^{t_2-\delta} ds \\
\leq \quad & \mid x_1(t_2) \mid + M_1 L \int_0^{t_2-\delta} T^{-q(s,x_1(s))} (\frac{t_2-s}{T})^{-q(s,x_1(s))} ds + M_f(t_2-\delta) \\
\leq \quad & \mid x_1(t_2) \mid + M_1 L \int_0^{t_2-\delta} T^* (\frac{t_2-s}{T})^{-q^*} ds + M_f(t_2-\delta) \\
\leq \quad & \mid x_1(t_2) \mid + \frac{M_1 L T^* T^{q^*}}{1-q^*} (t_2^{1-q^*} - \delta^{1-q^*}) + M_f(t_2-\delta) \\
\leq \quad & \mid x_1(t_2) - x_1(t_1) \mid + \frac{M_1 L T^* T^{q^*}}{1-q^*} ((t_2-\delta+\delta)^{1-q^*} - \delta^{1-q^*}) + M_f(t_2-\delta) \\
\leq \quad & \mid x_1(t_2) - x_1(t_1) \mid + \frac{M_1 L T^* T^{q^*}}{1-q^*} ((t_2-\delta)^{1-q^*} + \delta^{1-q^*} - \delta^{1-q^*}) + M_f(t_2-\delta) \\
\leq \quad & \mid x_1(t_2) - x_1(t_1) \mid + \frac{M_1 L T^* T^{q^*}}{1-q^*} (t_2-t_1)^{1-q^*} + M_f(t_2-t_1) \\
< \quad & \mid x_1(t_2) - x_1(t_1) \mid + \frac{M_1 L T^* T^{q^*}}{1-q^*} \eta_{2,I}^{1-q^*} + M_f \eta_{2,I} \\
< \quad & \varepsilon + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} \\
\leq \quad & \frac{3\varepsilon}{2}.
\end{aligned}
$$

2eme cas : $\delta \leq t_1 < t_2 \leq T$. *On prend* $\eta_{2,II} = \min\{\eta_{1,II}, (\frac{(1-q^*)\varepsilon}{8M_1 L T^* T^{q^*}})^{\frac{1}{1-q^*}}, \frac{\varepsilon}{4M_f}\}$, *lorsque* $t_2 - t_1 < \eta_{2,I}$, *par (2.4) ,(2.5),(2.6),(2.17) on a*

$$\begin{aligned}
&|x_1(t_2)-x_1(t_1)| \\
= \quad & |x_1(t_2)-x_1(t_1)+\int_0^{t_2-\delta}\frac{(t_2-s)^{-q(s,x_1(s))}}{\Gamma(1-q(s,x_1(s)))}x_1(s)ds \\
& -\int_0^{t_1-\delta}\frac{(t_1-s)^{-q(s,x_1(s))}}{\Gamma(1-q(s,x_1(s)))}x_1(s)ds-\int_0^{t_2-\delta}f(s,x_1)ds+\int_0^{t_1-\delta}f(s,x_1)ds\ | \\
\leq \quad & |\ x_1(t_2)-x_1(t_1)|+\int_{t_1-\delta}^{t_2-\delta}|\ \frac{(t_2-s)^{-q(s,x_1(s))}}{\Gamma(1-q(s,x_1(s)))}\ ||\ x_1(s)\ |\ ds \\
& +\int_0^{t_1-\delta}|\ \frac{1}{\Gamma(1-q(s,x_1(s)))}\ ||\ (t_2-s)^{-q(s,x_1(s))}-(t_1-s)^{-q(s,x_1(s))}\ ||\ x_1(s)\ |\ ds \\
& +\int_{t_1-\delta}^{t_2-\delta}|\ f(s,x_1(s))\ |\ ds \\
\leq \quad & |\ x_1(t_2)-x_1(t_1)|+M_1L\int_0^{t_1-\delta}((t_1-s)^{-q(s,x_1(s))}-(t_2-s)^{-q(s,x_1(s))})ds \\
& +M_1L\int_{t_1-\delta}^{t_2-\delta}(t_2-s)^{-q(s,x_1(s))}ds+M_f\int_{t_1-\delta}^{t_2-\delta}ds \\
= \quad & |\ x_1(t_2)-x_1(t_1)|+M_1L\int_0^{t_1-\delta}T^{-q(s,x_1(s))}((\frac{t_1-s}{T})^{-q(s,x_1(s))}-(\frac{t_2-s}{T})^{-q(s,x_1(s))})ds \\
& +M_1L\int_{t_1-\delta}^{t_2-\delta}T^{-q(s,x_1(s))}(\frac{t_2-s}{T})^{-q(s,x_1(s))}ds+M_f(t_2-t_1) \\
\leq \quad & |\ x_1(t_2)-x_1(t_1)|+M_1L\int_0^{t_1-\delta}T^*((\frac{t_1-s}{T})^{-q^*}-(\frac{t_2-s}{T})^{-q^*})ds \\
& +M_1L\int_{t_1-\delta}^{t_2-\delta}T^*((\frac{t_2-s}{T})^{-q^*}ds+M_f(t_2-t_1) \\
= \quad & |\ x_1(t_2)-x_1(t_1)|+\frac{M_1LT^*T^{q^*}}{1-q^*}(t_1^{1-q^*}-\delta^{1-q^*}+2(t_2-t_1+\delta)^{1-q^*}-t_2^{1-q^*}-\delta^{1-q^*}) \\
& +M_f(t_2-t_1) \\
= \quad & |\ x_1(t_2)-x_1(t_1)|+\frac{2M_1LT^*T^{q^*}}{1-q^*}(t_2-t_1)^{1-q^*}+M_f(t_2-t_1) \\
< \quad & |\ x_1(t_2)-x_1(t_1)|+\frac{2M_1LT^*T^{q^*}}{1-q^*}\eta_{2,II}^{1-q^*}+M_f\eta_{2,II} \\
< \quad & \varepsilon+\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{4} \\
= \quad & \frac{3\varepsilon}{2}
\end{aligned}$$

Ce qui implique que $x_2(t)$ est équicontinue sur $[0,T]$ le même résultat peut être obtenu lorsque $t_2 < t_1$ continuez ces processus, nous pouvons obtenir que $x_k, k=1,2...,$ est équicontinue sur $[0.T]$.

De plus, par les arguments d'équicontinuité de x_k, on peut savoir que $x_k \in C[0,T], k=1,2...$

Alors, par le théorème d'Ascoli-Arzela, la suite x_k existe une sous-suite convergente x_{m_k}. à partir de $(2.15), x_{m_k}$ *doit satisfaire*

$$x_{m_k} = \begin{cases} 0 \qquad 0 \leq t \leq \delta, \\ x_{m_{k-1}}(t) + \int_0^{t-\delta} \dfrac{(t-s)^{-q(s,x_{m_{k-1}})(s)}}{\Gamma(1-q(s,x_{m_{k-1}}(s)))} x_{m_{k-1}}(s)ds \\ -\int_0^{t-\delta} f(s, x_{m_{k-1}}(s))ds, \qquad \delta < t \leq T. \end{cases} \tag{2.18}$$

Maintenant, nous allons prouver que la limite continue de x_{m_k} , noté x^* est une solution du problème à condition initiale (2.1). soit $k \to +\infty$ dans (2.18), par les lemmes (1), (2) on a

$$x^*(t) = \begin{cases} 0, \qquad 0 \leq t \leq \delta, \\ x^*(t) + \int_0^{t-\delta} \dfrac{(t-s)^{-q(s,x^*(s))}}{\Gamma(1-q(s,x^*(s)))} x^*(s)ds \\ -\int_0^{t-\delta} f(s, x^*(s))ds, \qquad \delta < t \leq T. \end{cases} \tag{2.19}$$

donc, on trouve que

$$x^*(t) = 0, 0 \leq t \leq \delta; \int_0^{t-\delta} \frac{(t-s)^{-q(s,x^*(s))}}{\Gamma(1-q(s,x^*(s)))} x^*(s)ds - \int_0^{t-\delta} f(s, x^*(s))ds = 0, \tag{2.20}$$

pour vérifier x^* est une solution de problème (2.1), on pose $\delta \to 0$ dans (2.20) par (2.11), (2.12), on obtient

$$x^*(0) = 0; \int_0^t \frac{(t-s)^{-q(s,x^{*(s)})}}{\Gamma(1-q(s,x^{*(s)}))} x^*(s)ds = \int_0^t f(s, x^*(s))ds \in AC[0,T], \tag{2.21}$$

Il résulte de la continuité de f et le lemme (4) que $\displaystyle\int_0^t f(s, x^*(s))ds \in AC[0,T]$ par conséquent, à partir de(2.21), on obtient

$$\int_0^t f(s, x^*(s))ds = \int_0^t \frac{(t-s)^{-q(s,x^*(s))}}{\Gamma(1-q(s,x^*(s)))} x^*(s)ds \in AC[0,T].$$

par conséquent, différentiel de deux côtés de la deuxième expression dans(2.21), on obtient

$$D_{0+}^{q(t,x^*(t))} x(t) = f(t, x^*), 0 < t \leq T \tag{2.22}$$

avec $x^*(0) = 0$, alors x^* est une solution du problème (2.1).

CHAPITRE 3

L'EXISTENCE DE RÉSULTAT POUR UN PROBLÈME AUX LIMITES

Dans ce chapitre, nous considérons l'existence de solution d'un problème aux limite suivant pour l'équation différentielle d'ordre variable

$$\begin{cases} D_{0+}^{q(t)}x(t) + f(t,x) = 0, 0 < t < T, \\ x(0) = 0, \quad x(T) = 0, \end{cases} \tag{3.1}$$

D'où $0 < T < +\infty$, $D_{0+}^{q(t)}$ désigne la dérivée fractionnaire d'ordre variable

$$D_{0+}^{q(t)}x(t) = \frac{d^2}{dt^2}\int_0^t \frac{(t-s)^{1-q(s)}}{\Gamma(2-q(s))}x(s)ds, \quad t > 0, \tag{3.2}$$

Et

$$I_{0+}^{2-q(t)}x(t) = \int_0^t \frac{(t-s)^{1-q(s)}}{\Gamma(2-q(s))}x(s)ds, \quad t > 0, \tag{3.3}$$

Désigne intégrale d'ordre variable $2 - q(t), 1 < q(t) \leq 2, 0 \leq t \leq T$.

$f : (0, T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est donné une fonction continue satisfaisant certaines conditions d'hypothèse.

3.1 L'existence de Résultat

Nous avons besoin des hypothèses suivantes :

(H_1') : soit $n^* \in N$ soit un nombre entier, $P = \{[0,T_1],(T_1,T_2],(T_2,T_3],...,(T_{n^*-1},T]\}$une partition de l'intervalle $[0,T]$, et que $q(t):[0,T]\to(1,2]$une fonction constante par morceaux par rapport à P,

$$q(t)=\sum_{k=1}^{N}q_kI_k(t)=\begin{cases}q_1, & 0\le t\le T_1,\\ q_2, & T_1<t\le T_2,\\ ...,..., & \\ q_{n^*}, & T_{n^*-1}<t\le T_{n^*}=T,\end{cases} \tag{3.4}$$

où $1<q_k\le 2(k=1,2,...,n^*)$ sont des constantes , et I_k est l'indicateur de l'intervalle $[T_{k-1},T_k], k = 1,2,...,n^*(Ici\ T_0=0,T_{n^*}=T)$, qui est , $I_k(t)=1$ pour $t\in[t_{k-1},T_k]$ et $I_k(t)=0$ ailleurs .

(H_2') : soit t^rf : $[0,T]\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ soit une fonction continue $(0\le r<1)$, il existe des constantes $c_1>0,c_2>0,0<\gamma<1$ tel que

$$t^r\mid f(t,x(t))\mid\le c_1+c_2\mid x(t)\mid^{\gamma},0\le t\le T,\quad x(t)\in\mathbb{R}.$$

Afin d'obtenir nos principaux résultats , nous procédons d'abord à l'analyse essentielle du problème aux limites (3.1).

par(3.2), l'équation du problème aux limites (3.1)peut être écrite comme

$$\frac{d^2}{dt^2}\int_0^t\frac{(t-s)^{1-q(s)}}{\Gamma(2-q(s))}x(s)ds+f(t,x)=0,0<t<T, \tag{3.5}$$

D'après (H_1), l'équation (3.5)dans l'intervalle $(0,T_1]$ peut s'écrire par

$$D_{0+}^{q_1}x(t)+f(t,x)=0,\quad 0<t\le T_1. \tag{3.6}$$

L'équation (3.5) dans l'intervalle $(T_1,T_2]$ peut être écrite par

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(\int_0^{T_1}\frac{(t-s)^{1-q_1}}{\Gamma(2-q_1)}x(s)ds+\int_{T_1}^{t}\frac{(t-s)^{1-q_2}}{\Gamma(2-q_2)}x(s)ds\right)+f(t,x)=0. \tag{3.7}$$

Et l'équation (3.5)dans l'intervalle $(T_2, T_3]$ peut être écrit par

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(\int_0^{T_1}\frac{(t-s)^{1-q_1}}{\Gamma(2-q_1)}x(s)ds+\int_{T_1}^{T_2}\frac{(t-s)^{1-q_2}}{\Gamma(2-q_2)}x(s)ds+\int_{T_2}^{t}\frac{(t-s)^{1-q_3}}{\Gamma(2-q_3)}x(s)ds\right)+f(t,x)=0. \quad (3.8)$$

De même l'équation (3.5) dans l'intervalle $(T_{i-1}, T_i], i = 4, 5, ..., n^* - 1$ peut être écrit par

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(\int_0^{T_1}\frac{(t-s)^{1-q_1}}{\Gamma(2-q_1)}x(s)ds+...+\int_{T_{i-1}}^{t}\frac{(t-s)^{1-q_i}}{\Gamma(2-q_i)}x(s)ds\right)+f(t,x)=0. \quad (3.9)$$

Comme pour le dernier intervalle (T_{n^*-1}, T),similaire à l'argument ci-dessus , l'équation (3.5)peut être écrit par

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(\int_0^{T_1}\frac{(t-s)^{1-q_1}}{\Gamma(2-q_1)}x(s)ds+...+\int_{T_n^*-1}^{t}\frac{(t-s)^{1-q_{n^*}}}{\Gamma(2-q_{n^*})}x(s)ds\right)+f(t,x)=0. \quad (3.10)$$

Remarque. *D'après les arguments ci-dessus , nous constatons que , selon la condition (H_1'), dans les différents intervalle ,le problème aux limites (3.1) doit être représentée par une expression différente . Par exemple , dans l'intervalle $(0, T_1]$, le problème aux limites (3.1) est représenté par (3.6); dans l'intervalle $(T_1, T_2]$, le probléme aux limite (3.1) est représenté par (3.8) , ect . Mais ,pour autant que nous le savons , dans les différents intervalles , l'équation de l'ordre entier ou d'une constante problèmes d'ordre peuvent être représentés par la même expression .Sur la base de ces faits , différents que entier ordre ou des problèmes d'ordre fractionnaire constante , afin d'examiner les résultats de l'existence d'une solution à le problème aux limite (3.1) , nous devons considérer le problème pertinent défini dans les différents intervalles , respectivement.*

Maintenant , sur la base des arguments précédent , nous avons la définition actuelle de la solution du problème (3.1) , ce qui est fondamental dans notre travail .

Définition 3.1.1. *Nous disons que le problème aux limites (3.1) a une solution , s'il existe des fonctions $x_i(t), i = 1, 2, ..., n^*$ telle que $x_1 \in C[0, T_1]$ satisfaisant l'équation (3.6) et $x_1(0) = 0 = x_1(T_1); x_2 \in C[0, T_2]$ répondant à l'équation (3.7) et $x_2(0) = 0 = x_2(T_2); x_3 \in C[0, T_3]$ satisfaisant l'équation (3.8) et $x_3(0) = 0 = x_3(T_3); x_i \in C[0, T_i]$ satisfaisant l'équation (3.9) et $x_i(0) = 0 = x_i(T_i)(i = 4, 5, ..., n^* - 1); x_{n^*} \in C[0, T]$ satisfaisant l'équation (3.10) et $x_{n^*}(0) = x_{n^*}(T) = 0$.*

Théorème 3.1.1. *Supposons que les conditions (H_1') et (H_2') sont vérifiés , le problème aux limite (3.1) a une solution .*

Preuve. *Selon l'analyse ci-dessus , l'équation du problème aux limites (3.1)peut s'écrire comme l'équation (3.5)dans l'intervalle $(0, T_1]$ peut être écrite comme*

$$D_{0+}^{q_1} x(t) + f(t,x) = 0, \quad 0 < t \leq T_1.$$

Maintenant , nous considérons le problème aux limites en deux points suivant

$$\begin{cases} D_{0+}^{q_1} x(t) + f(t,x) = 0, \quad 0 < t < T_1, \\ x(0) = 0, x(T_1) = 0, \end{cases} \tag{3.11}$$

Soit $x \in C[0, T_1]$ une solution du problème aux limites (3.11). Maintenant , l'application de l'opérateur $I_{0+}^{q_1}$ pour les deux côtés de l'équation ci-dessus.Par la proposition (1.2.4), nous avons

$$x(t) = d_1 t^{q_1 - 1} + d_2 t^{q_1 - 2} - \frac{1}{\Gamma(q_1)} \int_0^t (t-s)^{q_1 - 1} f(s, x(s)) ds, 0 < t \leq T_1 \ .$$

par x(0)=0 , nous pourrions obtenir $d_2 = 0$. Soit x(t) satisfaisant $x(T_1) = 0$, ainsi nous pouvons obtenir $d_1 = I_{0+}^{q_1} f(T_1, x) T_1^{1-q_1}$. Ensuite nous avons

$$x(t) = I_{0+}^{q_1} f(T_1, x) T_1^{1-q_1} t^{q_1 - 1} - I_{0+}^{q_1} f(t, x), 0 \leq t \leq T_1 \tag{3.12}$$

Inversement ,soit $x \in C[0, T_1]$ soit solution de l'équation intégrale (3.12), puis ,par la continuité de la fonction $t^r f$ et la proposition 1.2.2, on peut facilement obtenir que x est la solution de problème aux limites (3.11).

On définit l'opérateur $P : C[0, T_1] \to C[0, T_1]$de

$$Px(t) = I_{0+}^{q_1} f(T_1, x) T_1^{1-q_1} t^{q_1 - 1} - I_{0+}^{q_1} f(t, x(t)), 0 \leq t \leq T_1$$

D'après les propriétés d'intégration et les hypothèses sur la fonction f , l'opérateur P est bien définie , nous montrons que P est complètement continue .

Dans l'analyse suivante , on prend

$$M(r,q) = \max \left\{ \frac{2}{(1-r)\Gamma(q_1)}, \frac{2}{(1-r)\Gamma(q_2)}, ..., \frac{2}{(1-r)\Gamma(q_{n^*})}, \right\} \ .$$

Soit $\Omega_i = x \in C[0,T_1] :\| x \| \leq R$ *un sous-ensemble convexe fermé borné de* $C[0,T_1]$ *, où*

$$R = \max\left\{2c_1 M(r,q)(T+1)^2, (2c_2 M(r,q)(T+1)^2)^{\frac{1}{1-\gamma}}\right\}.$$

pour $x \in \Omega_i$ et d'après (H_2'), on a

$$\begin{aligned}
\mid P(x(t)) \mid &\leq \frac{T_1^{1-q_1} t^{q_1-1}}{\Gamma(q_1)} \int_0^{T_1} (T_1 - s)^{q_1-1} \mid f(s,x(s)) \mid ds + \frac{1}{\Gamma(q_1)} \int_0^t (t-s)^{q_1-1} \mid f(s,x(s)) \mid ds \\
&\leq \frac{2}{\Gamma(q_1)} \int_0^{T_1} (T_1 - s)^{q_1-1} \mid f(s,x(s)) \mid ds \\
&\leq \frac{2}{\Gamma(q_1)} \int_0^{T_1} (T_1 - s)^{q_1-1} s^{-r} (c_1 + c_2 \mid x(s) \mid^{\gamma}) ds \\
&\leq \frac{2T_1^{q_1-1} T_1^{1-r}}{(1-r)\Gamma(q_1)} (c_1 + c_2 R^{\gamma}) \\
&\leq M(r,q) T_1^{q_1-r} (c_1 + c_2 R^{\gamma}) \\
&\leq M(r,q)(T+1)^2 (c_1 + c_2 R R^{\gamma-1}) \\
&\leq \frac{R}{2} + \frac{R}{2} = R,
\end{aligned}$$

Ce qui signifie que $P(\Omega_i) \subseteq \Omega_i$ .Alors le théorème du point fixe de Schauder assure que l'opérateur P a un point fixe $x_1 \in \Omega_i$, qui est une solution du problème aux limites (3.11).
Aussi , nous avons obtenu que l'équation (3.5)dans l'intervalle $(T_1, T_2]$ peut être écrite par (3.7). Considérons le résultat d'existence de la solution à (3.7), nous récrivons (3.7) comme suit

$$\frac{d^2}{dt^2} \int_0^{T_1} \frac{(t-s)^{1-q_2}}{\Gamma(2-q_2)} x(s) ds + \frac{d^2}{dt^2} \int_{T_1}^t \frac{(t-s)^{1-q_2}}{\Gamma(2-q_2)} x(s) ds = f(t,x).T_1 < t \leq T_2,$$

Pour $0 \leq s \leq T_1$, on prend $x(s) \equiv 0$, puis , par l'équation ci-dessus , on obtient

$$D_{T_1}^{q_2} x(t) + f(t,x) = 0, T_1 < t < T_2.$$

Maintenant , nous considérons le problème aux limites suivant

$$\begin{cases} D_{T_1}^{q_2} x(t) + f(t,x) = 0, T_1 < t < T_2, \\ x(T_1) = 0, x(T_2) = 0, \end{cases} \tag{3.13}$$

Soit $x \in C[T_1, T_2]$ une solution du problème aux limites (3.13). Maintenant , l'application de l'opérateur

$I_{T_1+}^{q_2}$ sur les deux côtés de l'équation de problème aux limites (3.13) et par la proposition 1.2.4 , nous avons

$$x(t) = d_1(t - T_1)^{q_2-1} + d_2(t - T_1)^{q_2-2} - \frac{1}{\Gamma(q_2)} \int_{T_1}^{t} (t - s)^{q_2-1} f(s, x(s))ds, \quad T_1 < t \leq T_2.$$

Par $x(T_1) = 0, x(T_2) = 0$,on a $d_2 = 0$ et $d_1 = I_{T_1+}^{q_2} f(T_2, x)(T_2 - T_1)^{1-q_2}$. Puis , on a

$$x(t) = I_{0+}^{q_2} f(T_2, x)(T_2 - T_1)^{1-q_2}(t - T_1)^{q_2-1} - \frac{1}{\Gamma(q_2)} \int_{T_1}^{t} (t - s)^{q_2-1} f(s, x(s))ds, T_1 \leq t \leq T_2$$

Inversement , soit $x \in C[T_1, T_2]$ solution de l'équation intégrale ci-dessus , alors , par la continuité d'hypothèse de la fonction $t^r f$ et la proposition (1.2.2), on peut obtenir que x est une solution du problème aux limites (3.13).

Définir l'opérateur $P : C[T_1, T_2] \to C[T_1, , T_2]$ par

$$Px(t) = I_{0+}^{q_2} f(T_2, x)(T_2 - T_1)^{1-q_2}(t - T_1)^{q_2-1} - \frac{1}{\Gamma(q_2)} \int_{T_1}^{t} (t - s)^{q_2-1} f(s, x(s))ds.$$

Il résulte de la continuité de la fonction $t^r f$ que l'opérateur $P : C[T_1, T_2] \to [T_1, T_2]$ est bien définie . nous savons que P est un opérateur complètement continue.

Pour $x \in \Omega$ et par (H_2') , on obtient

$$\begin{aligned}
\mid P(x(t)) \mid \leq & \frac{(T_2 - T_1)^{1-q_2}(t - T_1)^{q_2-1}}{\Gamma(q_2)} \int_{T_1}^{T_2} (T_2 - s)^{q_2-1} \mid f(s, x(s)) \mid ds + \frac{1}{\Gamma(q_2)} \int_{T_1}^{t} (t - s)^{q_2-1} \mid f(s, x(s)) \mid ds \\
\leq & \frac{2}{\Gamma(q_2)} \int_{T_1}^{T_2} (T_2 - s)^{q_2-1} \mid f(s, x(s)) \mid ds \\
\leq & \frac{2}{\Gamma(q_2)} \int_{T_1}^{T_2} (T_2 - s)^{q_2-1} s^{-r}(c_1 + c_2 \mid x(s) \mid^{\gamma})ds \\
\leq & \frac{2T_2^{q_2-1}}{\Gamma(q_2)} \int_{T_1}^{T_2} s^{-r}(c_1 + c_2 R^{\gamma})ds \\
= & \frac{2T_2^{q_2-1}(T_2^{1-r} - T_1^{(1-r)})}{(1 - r)\Gamma(q_2)}(c_1 + c_2 R^{\gamma}) \\
\leq & \frac{2T_2^{q_2-1}}{(1 - r)\Gamma(q_2)}(c_1 + c_2 R^{\gamma}) \\
\leq & M(r, q)(T + 1)^2(c_1 + c_2 R R^{\gamma-1}) \\
\leq & \frac{R}{2} + \frac{R}{2} = R,
\end{aligned}$$

Ce qui signifie que $P(\Omega_i) \subseteq \Omega_i$ .Ensuite, le théorème de point fixe de Schauder assure que l'opérateur P a un point fixe, qui est une solution de l'intégration suivante :

$$\tilde{x}_2(t) = I_{0+}^{q_2} f(T_2, \tilde{x}_2)(T_2 - T_1)^{1-q_2}(t - T_1)^{q_2-1} - \frac{1}{\Gamma(q_2)} \int_{T_1}^{t} (t-s)^{q_2-1} f(s, \tilde{x}_2(s))ds, T_1 \leq t \leq T_2. \quad (3.14)$$

Application de l'opérateur $D_{T_1+}^{q_2}$ de part et d'autre de (3.13), par la proposition (1.2.2) ,on peut obtenir que

$$D_{T_1+}^{q_2} \tilde{x}_2(t) + f(t, \tilde{x}_2) = 0, T_1 < t \leq T_2.$$

qui est , $X_2(t)$ satisfait à l'équation suivante

$$\frac{d^2}{dt^2} \frac{1}{\Gamma(2-q_2)} \int_{T_1}^{t} (t-s)^{1-q_2} \tilde{x}_2(s)ds + f(t, \tilde{x}_2) = 0, \quad T_1 < t \leq T_2. \quad (3.15)$$

On obtient

$$x_2(t) = \begin{cases} 0, 0 \leq t \leq T_1, \\ \tilde{x}_2(t), T_1 < t \leq T_2 \end{cases} \quad (3.16)$$

Donc , d'après (3.15), nous savons que $x_2 \in C[0, T_2]$ défini par (3.16)satisfait l'équation

$$\frac{d^2}{dt^2} \left(\int_{0}^{T_1} \frac{(t-s)^{1-q_1}}{\Gamma(2-q_1)} x_2(s)ds + \int_{T_1}^{t} \frac{(t-s)^{1-q_2}}{\Gamma(2-q_2)} x_2(s)ds \right) + f(t, x_2) = 0,$$

Ce qui signifie que $x_2 \in C[0, T_2]$ est une solution de (3.7)avec $x_2(0) = 0, x_2(T_2) = \tilde{x}_2(T_2) = 0$. Encore une fois ,nous savons que l'équation (3.5)dans l'intervalle $(T_2, T_3]$ peut être écrite par (3.8). Considérons le résultat d'existence de la solution à l'équation (3.8), pour $0 \leq s \leq T_2$, on prend $x(s) \equiv 0$, alors, par(3.8) on a

$$D_{T_2+}^{q_3} x(t) + f(t, x) = 0, \quad T_2 < t < T_3.$$

Maintenant ,nous considérons le problème aux limites suivant

$$\begin{cases} D_{T_2+}^{q_3} x(t) + f(t, x) = 0, T_2 < t < T_3, \\ x(T_2) = 0, \quad x(T_3)) = 0. \end{cases} \quad (3.17)$$

De manière standard, nous savons que le problème aux limites (3.17) a une solution $\tilde{x}_3 \in \Omega_i$ puisque $\tilde{x}_3$ satisfait l'équation

$$D_{T_2+}^{q_3} x_3(t) + f(t, x_3) = 0, T_2 < t \leq T_3,$$

C'est-à-dire que $\tilde{x}_3(t)$ satisfait l'équation suivante

$$\frac{d^2}{dt^2}\frac{1}{\Gamma(2-q_3)}\int_{T_2}^{t}(t-s)^{1-q_3}\tilde{x}_3(s)ds+f(t,\tilde{x}_3)=0, T_2<t\leq T_3. \tag{3.18}$$

On obtient

$$x_3(t)=\begin{cases}0, \quad 0\leq t\leq T_2,\\ \tilde{x}_3(t), \quad T_2<t\leq T_3,\end{cases} \tag{3.19}$$

Donc , d'après (3.18), nous savons que $x_3\in C[0,T_3]$ défini par (3.19) satisfait l'équation

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(\int_0^{T_1}\frac{(t-s)^{1-q_1}}{\Gamma(2-q_1)}x_3(s)ds+\int_{T_1}^{T_2}\frac{(t-s)^{1-q_2}}{\Gamma(2-q_2)}x_3(s)ds+\int_{T_2}^{t}\frac{(t-s)^{1-q_3}}{\Gamma(2-q_3)}x_3(s)ds\right)+f(t,x_3)=0,$$

Ce qui signifie que $x_3\in C[0,T_3]$ est une solution de (3.8) avec $x_3(0)=0, x(T_3)=\tilde{x}_3(T_3)=0$.

Par la même manière, afin d'examiner l'existence d'une solution à l'équation (3.9)définie sur $[T_{i-1},T_i]$de (3.5), nous pouvons étudier le problème aux limite à deux points suivants

$$\begin{cases}D^{q_i}_{T_{i-1}^+}x(t)+f(t,x)=0, T_{i-1}<t<T_i,\\ x(T_{i-1})=0, x(T_i)=0.\end{cases} \tag{3.20}$$

Par les mêmes arguments précédents, on obtient que l'équation (3.9)définie sur $[T_{i-1},T_i]$de (3.5) a une solution

$$x_i(t)=\begin{cases}0, \quad 0\leq t\leq T_{i-1},\\ \widetilde{x}_i(t), \quad T_{i-1}<t\leq T_i,\end{cases} \tag{3.21}$$

où $\widetilde{x}_i\in\Omega$ avec $\widetilde{x}_i(T_{i-1})=0=\widetilde{x}_i(T_i), i=4,5,...,n^*-1$.

Semblable à l'argument ci-dessus , afin de considérer le résultat d'existence de la solution à l'équation (3.10),nous peut considérer le problème aux limites suivant

$$\begin{cases}D^{q_{n^*}}_{T_{n^*-1}^+}x(t)+f(t,x)=0, T_{n^*-1}<t<T_{n^*}=T,\\ x(T_{n^*-1})=0, x(T)=0.\end{cases} \tag{3.22}$$

Donc par la même considération, pour $T_{n^*-1}\leq t\leq T$ on obtient

$$x(t)=(T-T_{n^*-1})^{1-q_{n^*}}(t-T_{n^*-1})^{q_{n^*-1}}I^{q_{n^*}}_{T_{n^*-1}^+}f(T,x)-I^{q_{n^*}}_{T_{n^*-1}^+}f(t,x).$$

Définir l'opérateur $P : C[T_{n^*-1}, T] \to C[T_{n^*-1}, T]$ par

$$Px(t) = (T - T_{n^*-1})^{1-q_{n^*}}(t - T_{n^*-1})^{q_{n^*-1}} I^{q_{n^*}}_{T_{n^*-1}+} f(T, x) - \frac{1}{\Gamma(q_{n^*})}\int_{T_{n^*-1}}^{t}(t-s)^{q_{n^*-1}} f(s, x(s))ds,$$

$T_{n^*-1} \leq t \leq T$. Il résulte de l'hypothèse de la continuité de la fonction $t^r f$ que l'opérateur $P : C[T_{n^*-1}, T] \to C[T_{n^*-1}, T]$ est bien définie, nous notons que $P : C[T_{n^*-1}, T] \to C[T_{n^*-1}, T]$ est un opérateur complètement continue.

Pour $x \in \omega$ et par (H_2'), on obtient

$$\begin{aligned}
\mid Px(t) \mid &\leq \frac{(T - T_{n^*-1})^{1-q_{n^*}}(t - T_{n^*-1})^{q_{n^*-1}}}{\Gamma(q_{n^*})}\int_{T_{n^*-1}}^{T}(T-s)^{q_{n^*-1}} \mid f(s, x(s)) \mid ds\\
&+ \frac{1}{\Gamma(q_{n^*})}\int_{T_{n^*-1}}^{t}(t-s)^{q_{n^*-1}} \mid f(s, x(s)) \mid ds\\
&\leq \frac{2}{\Gamma(q_{n^*})}\int_{T_{n^*-1}}^{T}(T-s)^{q_{n^*-1}} \mid f(s, x(s)) \mid ds\\
&\leq \frac{2}{\Gamma(q_{n^*})}\int_{T_{n^*-1}}^{T}(T-s)^{q_{n^*-1}} s^{-r}(c_1 + c_2 \mid x(s) \mid^{\gamma})ds\\
&\leq \frac{2(T)^{q_{n^*-1}}}{\Gamma(q_{n^*})}\int_{T_{n^*-1}}^{T} s^{-r}(c_1 + c_2 R^{\gamma})ds\\
&\leq \frac{2T^{q^{n^*-1}}(T^{1-r} - T^{1-r}_{n^*-1})}{(1-r)\Gamma(q_{n^*})}(c_1 + c_2 R^{\gamma})\\
&\leq \frac{2(T+1)^2}{(1-r)\Gamma(q_{n^*})}(c_1 + c_2 R^{\gamma})\\
&\leq M(r, q)(T+1)^2(c_1 + c_2 R R^{\gamma-1})\\
&\leq \frac{R}{2} + \frac{R}{2} = R,
\end{aligned}$$

Ce qui signifie que $P(\Omega_i) \subseteq \Omega_i$. Alors le théorème du point fixe de Schauder assure que l'opérateur P a un point fixe $\tilde{x}_{n^*} \in \Omega$, qui est une solution de l'équation intégrale suivante, c'est-à-dire,

$$\begin{aligned}
\tilde{x}_{n^*}(t) &= (T - T_{n^*-1})^{1-q_{n^*}}(t - T_{n^*-1})^{q_{n^*-1}} I^{q_{n^*}}_{T_{n^*-1}+} f(T, \tilde{x}_{n^*})\\
&- \frac{1}{\Gamma(q_{n^*})}\int_{T_{n^*-1}}^{t}(t-s)^{q_{n^*-1}} f(s, \tilde{x}_{n^*}(s))ds, \qquad T_{n^*-1} \leq t \leq T.
\end{aligned} \tag{3.23}$$

Application de l'opérateur $D^{q_{n^*}}_{T_{n^*-1}+}$ de part et d'autre de (3.23), on peut obtenir que

$$D^{q_{n^*}}_{T_{n^*-1}+}\tilde{x}_{n^*}(t) + f(t, \tilde{x}_{n^*}) = 0, \qquad T_{n^*-1} < t \leq T,$$

C'est-à-dire que $\tilde{x}_T(t)$ satisfait l'équation suivante

$$\frac{d^2}{dt^2}\frac{1}{\Gamma(2-q_{n^*})}\int_{T_{n^*-1}}^{t}(t-s)^{1-q_{n^*}}\tilde{x}_{n^*}(s)ds+f(t,\tilde{x}_{n^*})=0, \qquad T_{n^*-1}<t\leq T. \tag{3.24}$$

On obtient

$$x_{n^*}(t)=\begin{cases}0, & 0\leq t\leq T_{n^*-1},\\ \tilde{x}_{n^*}(t), & T_{n^*-1}<t\leq T,\end{cases} \tag{3.25}$$

Donc, d'après (3.24), on sait que $x_{n^*}\in C[0,T]$ défiée par(3.25) vérifie l'équation

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(\int_0^{T_1}\frac{(t-s)^{1-q_1}}{\Gamma(2-q_1)}x_{n^*}(s)ds+...+\int_{T_{n^*-1}}^{t}\frac{(t-s)^{1-q_{n^*}}}{\Gamma(2-q_{n^*})}x_{n^*}(s)ds\right)+f(t,x_{n^*})=0.$$

Pour $T_{n^*-1}<t<T$, ce qui signifie que $x_{n^*}\in[0,T]$ est une solution de (3.10)avec $x_{n^*}(0)=0, x_{n^*}(T)=\tilde{x}_{n^*}(T)=0$.

Par conséquent, nous savons que le problème aux limites (3.1) a une solution.

Remarque. *Pour la condition (H_2'), si $\gamma\geq 1$, alors de manière similaire, on peut obtenir le résultat d'existence de solution au problème aux limites (3.1) à condition d'imposer des conditions supplémentaires à c_1, c_2.*

CONCLUSION

L'objectif de ce mémoire était d'étudier la notion de la dérivation et l'intégration d'ordre variable, en donnant quelques applications, en étudiant l'existence de certains équations et théorèmes via l'approche de point fixe.

BIBLIOGRAPHIE

[1] **D.O'Regan, Y.Je Cho, and Yu-Qing Chen**,Topological Degree Theory and Applications, Volume 10, by Taylor et Francis Group,LLC, (2006).

[2] **H.Brezis**, Analyse Fonctionnelle Théorie et Application, Masson, Paris, (1983à).

[3] **I. Podlubny**,Fractional Differential Equation, Academic Press, 198 (1999).

[4] **S. Djebali**,Degré topologique : théorie et application aux EDO-EDP, Cours Policopié, Département de Mathématiquesn ENS-Kouba, Alger, (2006).

[5] **SHUQIN ZHANG** ,Existence and uniqueness result of solution to initial value problem of fractional differential equations of variable-order.

[6] **SHUQIN Zhang, LEI Hu**, The existence of solutions and generalized Lyapunov-type inequalities to boundary value problems of differential equations of variable order.