REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEURE ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE IBN KHALDOUN - TIARET

MEMOIRE

Présenté à :

FACULTÉ DES MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUE
DÉPARTEMENT DES MATHEMATIQUES

Pour l'obtention du diplôme de :

MASTER

Spécialité : Analyse Fonctionnelle et Equation Différentielles.

Par :

LARBI ZAKARIA

SAAD KHALED SOFIANE

Sur le thème

Certaines généralisations des espaces de Gevrey

Soutenu publiquement le 21 / 06 / 2022 à Tiaret devant le jury composé de :

Mr Bendouma Bouharkat	MCB	Université Tiaret	Président
Mr Mahrouz Tayeb	MCB	Université Tiaret	Encadreur
Mme Bouazza Zoubida	MAA	Université Tiaret	Examinateur

2021-2022

Remerciements

Nous aimions en premier lieu remercier " **ALLAH** " qui nos adonné la volonté et le courage pour mener a terminer notre formation de Master et réaliser ce travail .

Nous tenons à présenter tout notre gratitude et mes remerciements à notre rapporteur de mémoire : **Mr . MAHROUZ TAYEB** prof à l'université Ibn Khaldoun de Tiaret , pour avoir accepté de nous encadrer , pour son enseignement , son support , ses encouragements , sa partience qu'il n'a cessé de nous apporter tout au long de ce travail.
Nous exprimons notre gratitude et nos remerciements aux mombre du jury **M. Bendouma Bouharkat** et **Mme. Bouazza Zoubida** , qui nous ont honoré en acceptant d'évaluer se travail.
Nous adressons également nos remerciement à tout messieurs les membres de jury pour le temps qu'il ont consacré pour apprécier ce travail . Tous os enseignant du département de mathématique , ont aussi le métrite d' 'etre remerciés pour leurs précieux aides et engagements pour nous donner les bases des sciences mathématiques .

Merci à nos camarades de **La promotion 2022** de mathématiques et nos amis pour leur aider et leur humour .

Aussi , nous adressons nos sincères remerciements à nos parents , et à tout la famille .
Finalement . Nous réservons une mention particulière à toutes les personnes qui nous ont apporté le soutien et l'aide attendu .

Merci à tous !

Dédicaces

Je dédie ce travail :

À mes chérs parents pour leur soutien, leur patience
et leurs encouragements durent mon parcours univercitaire.
À mes fréres, ainsi ma famille ♡ LARBI♡
À mes Amis
À tous professeurs
qu'il soient du primaire, du secondaire ou du supérieur .

ZAKARIA

Dédicaces

Je dédie ce travail :

À mes chérs parents pour leur soutien, leur patience
et leurs encouragements durent mon parcours univercitaire.
À mes fréres, ainsi ma famille ♡ SAAD ♡
À mes Amis
À tous professeurs
qu'il soient du primaire, du secondaire ou du supérieur

KHALED-SOFIANE

Table des matières

INTRODUCTION **1**

1 Notations et Préliminaires **4**

1.1 Notations et définitions de base 4

1.2 **Identités et inégalités** 5

1.3 **Quelques espaces fonctionnels** 10

2 Espace des fonctions de classe Gevrey **13**

2.1 Espaces de type Gevrey 13

2.2 Quelques propriétés des espaces Gevrey 17

2.3 Convolution 22

3 Espaces des fonctions ultra-différentiables **26**

3.1 **Suites** $(M_p)_{p\in\mathbb{Z}_+}$ 26

3.2 Espaces de Roumieu $R_M(\Omega)$ 36

3.3 Quelques propriétés des espaces de Roumieu 37

3.4 Inclusion entre les espaces de Roumieu 40

Bibliographie **42**

INTRODUCTION

Un problème important, parmi d'autres, dans la théorie des espaces fonctionnels est de trouver d'autres généralisation des espaces déjà connus .
Au début du 20^{ime} siécle, M. Gevrey [11] a introduit une nouvelle classe d'espaces de fonctions ultra-différentiables, appelés espaces de Gevrey, pour étudier la régualrité des équations aux dérivées partielles. Depuis, ces espaces ont pris une grande place dans le problème de la régularité des solutions des équations aux dérivées partielles, voir le livre de L. Rodino [9].
H . Komatsu [6] a donné une analyse générale de la classe de fonctions ultra-différentiables, notée $R_M(\Omega)$, généralisant les espaces de Gevrey classique. Cette étude se base sur travail antérieur fait par C.Rommieu [2] dans le début des années soixante du 20^{ime} siécle .
L'espace de Gevrey est un espace intermédiaire, entre les espaces de fonctions C^∞ et les fonctions analytiques réel en fait, le nom est donné en l'honneur de M. Gevrey, qui a donné le premier exemple de motivation voir [11], dans lequel les estimations de régularité du noyau de la chaleur sont déduites.
Les classes de Gevrey sont le cas le plus simple des classes de fonctions ultra-différentiables (cf.ou classes Denjoy-Carleman ,[10] et [6]). L'échelle des espaces G^s. Commence à partir des fonctions analytiques (pour $s = 1$) et se

termine dans la catégorie C^∞ (pour $s = +\infty$) .

Le dual topologique de l'espace $G_0^s = G^s(\Omega) \cap C^\infty(\Omega)$ est dit espace des ultra-distrebutions qui contient les distributions de Schwartz (cf. aussi les espaces de fonctions généralisées) .

Les classes de Gevrey joue un rôle important dans diverses branches d'équations aux dérivées partielles et ordinaire, à savoir. chaque fois que les propriétés de solutions de certains opérateurs différentiels diffèrent dans C^∞ et dans le classe analytique, il est naturel d'étudier leur comportement dans l'échelle des classes de Gevrey et, si possible, de trouver la valeur critique de s, c'est à dire ceux pour les quels un changement de comportement se produit. Par exemple l'équation de la chaleur dans $\mathbb{R}^n$, avec $n \geq 2$, $(\partial_t - \Delta)(E) = 0$ où $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + ... + \frac{\partial^2}{\partial x_{n-1}^2}$ dont la solution fondamentale est donnée par :

$$E(x,t) = \left(\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\right)^n H(t) exp\left(-\frac{|x|^2}{4t}\right)$$

où $x = (x_1, ..., x_{n-1})$ et $H(t)$ désigne la fonction de heaveside. La fonction $E(x,.)$ n'est pas analytique pour $t = 0$, cependant $E(.,.)$ appartient à $C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$. Dans l'échelle des espaces de Gevrey, le résultat est net, à savoir $E \in G^s(\mathbb{R}^n)$, pour $s = 2$ (et par conséquent pour tous $s \geq 2$), mais, en général. $E \notin G^s(\Omega)$ si $1 \leq s < 2$, Les classes de Gevrey G^s , $s > 1$, ont de nombreuses applications, ces espaces ont été étudier par plusieures auteurs, [3], [1] et [4] ont étudier les équations d'évolution aux dérivées partielles

La solvabilité dans [14], [15] et [12] et l'analyse micro-locale dans [7] et [9]. Ainsi que d'autre problèmes ont été étudier tel les systèmes dynamiques [11] et [7] .

Notre mémoire comprend trois chapitres.

Dans le premier chapitre on fait rappel aux notions générales utilisées dans ce mémoire et quelques théorèmes principaux d'analyse mathématique, puis les notions de bases recueillent des identités bien connues, les inégalités de la factorielle et les coefficients du binôme qui seront fréquemment utilisées dans la suite.

Dans le deuxième chapitre on va introduire l'espace des fonctions de Gevrey et quelques propriétés essentielles.

Le noyau de ce chapitre concernant l'espace de Gevrey est l'étude des quelques propriétés.

Au troisième chapitre, ont présente les espaces de fonctions ultra-différentiables $R_M(\Omega)$ caractérisé par les suites M_p .

Chapitre 1

Notations et Préliminaires

Dans ce chapitre, nous présentons les concepts de base liés à l'analyse fonctionnelle, puis nous rappelons les définitions et les propriétés et inégalités qui jouent un rôle important dans l'espace fonctionnel que nous avons utilisé dans ce travail .

1.1 Notations et définitions de base

Les ensembles des nombres réels et complexe sont notée respectivement $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ on note par $\mathbb{N}$ l'ensemble de nombre entiers $\{1, 2, ..., \}$ et $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \cup \{0\}$. L'espace euclidien réel de dimension $n \in \mathbb{N}$ est noté $\mathbb{R}^n$. La norme euclidienne de $\mathbb{R}^n$ est notée $\|.\|$, i.e .

$$|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2} \text{ , } x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$$

Le produit scalaire de deux éléments x, y de $\mathbb{R}^n$ est donné par

$$(x, y) = \sum_{j=1}^{j=n} x_j$$

Soient $\varepsilon > 0$ et A un ensemble de $\mathbb{R}^n$, notons par B_ϵ la boule ouvert de centre l'origine et de rayon ε , un ε-voisinage de A est par définition

$$A^\varepsilon = \bigcup_{x \in A} \{y \in \mathbb{R}^n : |x - y| < \varepsilon\} = A + B_\varepsilon$$

Soit Ω un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$; on écrit $\Omega \setminus$ S le complémentaire de S dans Ω . S $\Subset \Omega$ signifie $\bar{S}$ est compact inclue dans Ω

Un multi-indice est un n-uplet $\alpha = (\alpha_1 , \alpha_2 ,...,\alpha_n)$, ou $\mathbb{Z}_+$, $J = \overline{1, n}$. Soient α et β deux multi-indice, on définit :

$$\begin{aligned}
&\mid \alpha \mid = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n \text{ appelé la longueur de } \alpha \\
&\alpha! = \alpha_1! + \alpha_2! + ... + \alpha_n! \\
&\alpha + \beta = (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, ..., \alpha_n + \beta_n) \\
&\alpha \leq \beta \ \ ssi \ \ \alpha_j \leq \beta_j, \qquad j = \overline{1, n} \\
&\binom{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha - \beta)!} = \prod_{j=1}^{n} \frac{\alpha_j!}{\beta_j!(\alpha_j - \beta_j)!}, \beta \leq \alpha
\end{aligned}$$

La dérivation mixte dordre α est définit par :

$$\partial^\alpha = \partial_1^{\alpha_1} \partial_2^{\alpha_2} ......\partial_n^{\alpha_n} \text{ , ou } \partial_j = \tfrac{\partial}{\partial x_j} \text{ , j} = \overline{1, n}$$

Utilisant la notation $D_{x_j} = -i\frac{\partial}{\partial x_j}$ où i le complexe du module 1. On écrit alors :

$$D^\alpha = D^\alpha_{x_1} ....D^\alpha_{x_n}$$

Pour x $\in \mathbb{R}^n$, on note

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} ...x_n^{\alpha_n}$$

1.2 Identités et inégalités

Nous recueillons dans cette section des identités et des inégalités qui sont fréquemment utilisés dans l'étude dans la suite. Citons la formule de Newton généralisée :

$$(t_1 + t_2 + ... + t_n)^N = \sum_{|\alpha|=N} \frac{N!}{\alpha!} .t^\alpha \tag{1.1}$$

Où l'entier $N \geqslant 1, t = (t_1, t_2, ..., t_n)$ et $t_1, t_2, .., t_n$, n réel .

Fixons $t_1 = t_2 = ... = t_n = 1$ on a :

$$n^N = \sum_{|\alpha|=N} \frac{N!}{\alpha!} \tag{1.2}$$

Cela implique en partculier :

$$|\alpha|! \leq n^{|\alpha|}\alpha! \tag{1.3}$$

Dans le cas $n = 2$ on obtiens respectivement de (1.2) et (1.3)

$$2^N = \sum_{k+j=N} \frac{N!}{k!j!}$$

$$(k + j)! \leq 2^{k+j} \ k! \ j! \tag{1.4}$$

De l'équation **??** on aura

$$2^N = \sum_{k\leqslant N} \frac{N!}{k!(N-k)!} = \sum_{k\leqslant N} \binom{N}{k}$$

d'où :

$$2^{|\alpha|} = \sum_{\beta\leqslant\alpha} \binom{\alpha}{\beta} \tag{1.5}$$

Et en particulier : $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+, \beta \leqslant \alpha$:

$$\binom{\alpha}{\beta} \leqslant 2^{|\alpha|} \tag{1.6}$$

D'autre par on a

$$\alpha! \leq |\alpha|! \tag{1.7}$$

Pour cela il suffit de montrer

$$(n+m)! \geq n!\ m! \quad \forall m, n \in \mathbb{N}$$

On a

$$\begin{aligned}(n+m)! &= (n+m)(n+m-1)(n+m-2)...(n+1).n!\\ &\geq m(m-1)(m-2)...2.1.n!\\ &\geq m!n!\end{aligned}$$

La fonction Gamma

Nous présentons les définitions et quelques propriétés de bases des fonction Gamma. Cette fonctions jouent le rôle le plus important dans la théorie des opérateurs d'intérgations et de dérivations d'ordre non entier et dans la théorie des équations différentelles fractionnaires .

Définition 1.2.1. *Soit $z \in \mathbb{R}$ tel que $z > 0$. La fonction Gamma notée par Γ est définie par :*

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt$$

Proposition 1.1. *La fonction Gamma est bien définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$.*

Preuve 1.1. *On écrivons $\Gamma(z)$ sous la forme*

$$\Gamma(z) = \int_{0}^{+\infty} e^{-t}t^{z-1}dt = \int_{0}^{1} e^{-t}t^{z-1}dt + \int_{1}^{+\infty} e^{-t}t^{z-1}dt$$

En étudiant la convergence de la première intégrale. On a

$$I_1 = \int_{0}^{1} e^{-t}t^{z-1}dt < \int_{0}^{1} t^{z-1}dt = \frac{1}{z}$$

D'ou la première intégrale est convergent pour $0 < z < 1$.

Maintenant nous étudions la convergence de la seconde. On a

$$\int_{1}^{+\infty} e^{-t}t^{z-1}dt < \int_{1}^{+\infty} e^{-\frac{t}{2}}dt = 2e^{-\frac{1}{2}}$$

Par conséquent, la fonction Gamma est définie pour tout $z \in \mathbb{R}^+$.

Proposition 1.2. *Soit $z \in \mathbb{R}$ tel que $z > 0$, alors la fonction Gamma vérifie les propriétés suivantes :*

1 . $\Gamma(1) = 1$

2 . $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$

3 .$\Gamma(n+1) = n!, \forall n \in \mathbb{N}$

Preuve 1.2. .

1 . $\Gamma(1) = \int_{0}^{+\infty} e^{-t}dt = 1$

2 . Par une intégration par partie, on obtien

$$
\begin{aligned}
z\Gamma(z) &= \int_0^{+\infty} e^{-t} z t^z dt \\
&= -e^{-t}t^z|_0^{\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-t}t^z dt \\
&= \int_0^{+\infty} e^{-t}t^z dt \\
&= \Gamma(z+1)
\end{aligned}
$$

3. En utilisant la propriété (2), nous obtenons :

$$
\begin{aligned}
\Gamma(n+1) &= n\Gamma(n) \\
&= n(n-1)\Gamma(n-1) \\
&= n(n-1)(n-2)\Gamma(n-2) \\
&... \\
&... \\
&= n(n-1)(n-2)...\Gamma(1)
\end{aligned}
$$

où

$$\Gamma(1) = 1$$

Donc

$$\Gamma(n+1) = n!$$

Nous rappelons certaines outils mathématique trés utiles .

Formule de Taylor avec reste intégral :

Soit la fonction$f$ de classe C^k , on a :

$$f(x)=\sum_{|\alpha|\leq k}\frac{(x-x_0)^\alpha}{\alpha!}\partial^\alpha f(x_0)+\sum_{\alpha=k}\frac{k}{\alpha!}(x-x_0)^\alpha\int_0^1(1-t)^{k-1}\partial^\alpha f(x_0+t(x-x_0))dt$$

Formule de Leibniz :

Si les fonctions f et g sont de classes C^k et $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$, $\mid \alpha \mid \leq k$, on a

$$\partial^\alpha(fg)=\sum_{\beta\leq\alpha}\binom{\alpha}{\beta}\partial^\beta f\partial^{\alpha-\beta}g$$

Espace vectoriel :

On appelle espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ (où $\mathbb{K}$-espace vectoriel) un ensemble E muni de deux loi :

- Une loi interne notée $(+)$, telle que $(E,+)$ soit un groupe commutatif .
- Une loi externe notée $(.)$, qui est une application de $\mathbb{K}\times E$ dans E vérifiant :

$$*\forall(\alpha,\beta)\in\mathbb{K}^2,\forall x\in E,(\alpha+\beta).x=\alpha.x+\beta.x$$

$$*\forall(\alpha,\beta)\in\mathbb{K}^2,\forall x\in E,\alpha.(\beta.x)=(\alpha\beta).x$$

Les éléments de E sont appelés des vecteurs et les éléments de $\mathbb{K}$ sont appelés des scalaires

1.3 Quelques espaces fonctionnels

Définition 1.3.1. *Soit $f:\Omega\longrightarrow\mathbb{C}$ une fonction continue sur Ω , on définit le support de f, noté supp$f$ par la fermeture de l'ensemble $\{x\in\Omega : f(x)\neq 0\}$*

dans Ω*, i.e.*

$$suppf = \overline{\{x \in \Omega : f(x) \neq 0\}}$$

Remarque 1.3.1. *Si f est une fonction continu, alors supp f est caractérisé par*

$$\{x \in \Omega \text{ il n'existe pas de voisinage } \Omega \text{ de } x \text{ tel que } f \equiv 0 \text{ sur } \Omega\}$$

Ceci permet de généraliser cette définition au cas $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ *est une fonction mesurable,*

$$suppf := \left\{ \begin{array}{c} x \in \Omega \ : \ \text{il n'existe pas de voisinage } \Omega \text{ de } x \text{ où} \\ f = 0 \text{ presque partout sur } \Omega \end{array} \right\}$$

Définition 1.3.2. *L'espace des fonctions continues* $f : \Omega \to \mathbb{R}$ *est noté* $C(\Omega)$ *et*

$$\|f\|_{C(\Omega)} = \sup_{x\in\Omega} |f(x)|$$

Définition 1.3.3. *Soit* $n \in \mathbb{Z}_+$*, on note* $C^k(\Omega)$ *l'espace des fonctions n-fois continument différentiables sur* Ω *, et*

$$\|f\|_{C^k(\Omega)} = \sum_{k=0}^{n} \|f^k\|_{C(\Omega)}$$

Définition 1.3.4. *L'espace des fonctions indéfiniment dérivables sur* Ω *est noté* $C^\infty(\Omega)$*, i.e.*

$$C^\infty(\Omega) = \bigcap_{k\in\mathbb{Z}_+} C^k(\Omega)$$

L'espace $C_0^\infty(\Omega)$ *ou* $D(\Omega)$ *désigne l'espace des fonctions* $u \in C^\infty(\Omega)$ *telle que le support de u, noté suppu, est un compact contenu dans* Ω *.*

Définition 1.3.5. *Soit $p \in [1, +\infty]$, on définit $L^p(\Omega)$ l'ensemble des classes des fonctions $f : \Omega \to \mathbb{R}$ mésurable tel que*

$$\|f\|_p = \left(\int_\Omega |f|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} , \ p < +\infty$$

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in \Omega} |f(x)|.$$

Chapitre 2

Espace des fonctions de classe Gevrey

Dans ce chapitre , nous présentons quelques définitions et propriétés concenant, les fonctions Gevrey

2.1 Espaces de type Gevrey

Dans ce qui suit Ω un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$ et s un reél tel que $s \geq 1$

Définition 2.1.1. *On appelle espace de Gevrey d'indice s, noté $G^s(\Omega)$ l'ensemble des fonction $f \in C^\infty(\Omega)$ possédant la propriété suivante :*
$\forall K$ *compact de* $\Omega, \exists C > 0, \forall \alpha \in \mathbb{Z}_+^n$,

$$\sup_{x \in \mathbb{K}} |\partial^\alpha f(x)| \leq C^{|\alpha|+1}(\alpha!)^s \tag{2.1}$$

Les éléments de $G^s(\Omega)$ sont appelés fonctions ultra-différentiables .

Remarque 2.1. *Il est parfois utile d'utiliser l'estimation équivalente :*

$$\sup_{x\in\mathbb{K}} |\partial^{\alpha} f(x)| \leq RC^{|\alpha|}(\alpha!)^{s} \tag{2.2}$$

Tels que R et C deux constantes positifs indépendantes de α et x .

Proposition 2.1. *On peut remplacer dans* (2.1) *l'expression* $(\alpha!)^s$ *par*

i) $(|\ \alpha\ |!)^s$

ii) $|\alpha|^{s|\alpha|}$

iii) $\Gamma(s|\alpha|+1)$

Preuve 2.1. *D'après* (1.7) *on a* (2.1)

i) $\Longrightarrow$ $\sup |\ \partial^{\alpha} f(x)\ | \leq C^{|\alpha|+1}(\alpha!)^s$ *ceci est vraie en vertu de l'inégalité* (1.3)

i) $\Longrightarrow$ *ii) puisque* $N! \leq N^N$ *, alors* $(|\alpha!|)^s \leq |\alpha|^{s|\alpha|}$

ii) $\Longrightarrow$ *iii) puique* $t^t \leq e^t\Gamma(t+1)$ *, alors en posant* $t = s|\alpha|$ *, on obtien*

$$(s|\alpha|)^{s|\alpha|} \leq e^{s|\alpha|}\Gamma(s|\alpha|+1)$$

iii) $\Longrightarrow$ *i) On a*

$$\Gamma(s|\alpha|+1) \leq (s|\alpha|)^{s|\alpha|}$$

et

$$|\alpha|^{|\alpha|} \leq e^{|\alpha|}|\alpha!|$$

Remarque 2.2. *Nous observons en autre que dans l'estimation* (2.2)*, nous pouvons remplacer* $|\alpha|$ *par* $|\alpha| + S$ *, où* S*, est tout entier positif fixé en fait la condition est évidente, par contre la condition nécessaire est vrai du fait que*

$$(|\alpha| + S)! \leq 2^{|\alpha|+S} \; S! \; |\alpha!|$$

Définition 2.1.2. *Une fonction* f *est dite analytique réelle au point* $x_0 \in \Omega$ *s'il existe un voisinage de* x_0 *tell que* f *est développable en série entière , i.e*

$$\exists R > 0, \forall x \in \Omega, |x - x_0| < R, f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial^n f(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

$A(\Omega)$ *est l'ensemble des fonctions analytiques réelles sue* Ω *.*

Proposition 2.2. *Toute fonction de Gevrey d'ordre 1 est une fonction analytique réelle sur* Ω *.*

Preuve 2.2. *Pour simplifier nous ne détaillerons la démonstration que dans le cas* $n = 1$ *.*
a) Montrons que $G^1(\Omega) \subset A(\Omega)$ *: Soit* $x_0 \in \Omega$ *,* $\delta > 0$ *tel que* $\bar{B}(x_0, \delta) \subset \Omega$ *, on a*

$$|f^{(k)}(x)| \leq RC^k k!, \text{ pour } x \in \bar{B}$$

Soit $\varepsilon \in]0, \delta[$ *tel que* $\varepsilon C < 1$*, la formule de Taylor avec reste intégral permet d'écrire pour* $x \in B(x_0, \varepsilon)$ *,*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^k(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + R_n(x) \; .$$

Avec

$$R_n(x) = \frac{(x - x_0)^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1 - t)^n f^{n+1}(tx + (1 - t)x_0) dt$$

Si $x \in B(x_0, \varepsilon)$ *on a* $tx + (1 - t)x_0 \in B(x_0, \varepsilon)$ *de sorte que*

$$|R_n(x)| \leq \frac{|x - x_0|^{(n+1)}}{n!} \int_0^1 (1 - t)^n RC^{n+1}(n + 1)! dt \leq R(\epsilon C)^{n+1}$$

Comme $\varepsilon C \leq 1$ *le reste tend vers zéro lorsque* n *tend vers* $+\infty$ *d'où* f *est développable en série entière dans* $B(x_0, \varepsilon)$ *, ce qui montre que* $f \in A(\Omega)$ *.*

b) Montrons que $A(\Omega) \subset G^1(\Omega)$ *: la somme d'une série entière étant* C^∞ *a l'intérieur de son intervalle de convergence,* f *est* C^∞ *au voisinage de tout point donc dans* Ω *. Soit* $x_0 \in \Omega$ *et* $\varepsilon > 0$*, tel que la série entière* $\sum a_k(x-x_0)^k$ *converge absolument pour* $|x - x_0| \leq \varepsilon$ *, Alors* $|a_k|\varepsilon^k \longrightarrow 0$ *d'où* $|a_k| \leq \frac{C}{\varepsilon^k}$ *pour tout* k

soit $\rho < \varepsilon$ *, pour* $|x - x_0| < \rho$ *on a :*

$$f^{(j)}(x) = \sum_{k=j}^{+\infty} k(k-1)...(k-j+1)a_k(x-x_0)^{k-j}$$

De sorte que :

$$|f^{(j)}(x)| \leq \sum_{k=j}^{+\infty} \frac{k!C}{(k-j)\varepsilon^k}(\frac{\rho}{\varepsilon})^{k-j} = \frac{C}{\varepsilon^j}\sum_{k=j}^{+\infty} \frac{k!}{(k-j)!}(\frac{\rho}{\varepsilon})^{k-j}$$

Où de la formule

$$\sum_{k=0}^{+\infty} t^k = \frac{1}{1-t} \quad pour \quad | t |< 1$$

Que l'on dérive j *fois , on déduit*

$$\sum_{k=j}^{+\infty} \frac{k!}{(k-j)!}\ (t)^{k-j} = \frac{j!}{(1-t)^{j+1}}$$

Par conséquent

$$|f^{(j)}(x)| \leq \frac{C}{\varepsilon^j}\frac{1}{(1-\dfrac{\rho}{\varepsilon})^{j+1}}j! = \frac{C\varepsilon}{(\varepsilon-\rho)^{j+1}}j!$$

En résumé , pour $|x - x_0| < \rho$ *on a montré que :*

$$|f^{(j)}(x)| \leq RC^j\ j!,\ R = \frac{C\varepsilon}{\varepsilon-\rho},\ C = \frac{1}{\varepsilon-\rho} \qquad (2.3)$$

Soit K *un compact de* Ω *. Pour chaque* x_0 *de* K *il existe* ρ_{x_0}*,* R_{x_0}, C_{x_0}*, tel que l'équation* (2.3) *soit vérifiée dans* $B(x_0, \rho)$ *. La réunion des* $B(x_0, \rho)$ *lorsque* x_0 *vraie dans* K *est un recouvrement ouvert de* K *et donc il existe* $x_1...x_N \in K$ *tels que* $K \subset \bigcup_{i=1}^{N} B(x_i, \rho_i)$ *. Il suffi de poser*

$$R = maxR_{x_i}, C = maxC_{x_i}$$

Ce qui montre que $f \in G^1(\Omega)$

2.2 Quelques propriétés des espaces Gevrey

Dans cette section nous donnons quelques propriétés fundamental des espaces Gevrey

Inclusion entre les espaces de Gevrey

Proposition 2.3. *On a*

1) $\forall s \leq t : G^s(\Omega) \subset G^t(\Omega)$

2) $A(\Omega) \subset \bigcap_{s>1} G^s(\Omega) : \bigcup_{s\geq 1} G^s(\Omega) \subset C^\infty(\Omega)$

Preuve 2.3. *Soit* $s \leq t$ *, si* $f \in G^s(\Omega)$ *on à*

$$G^s(\Omega) = \sup_k \mid \partial^\alpha f(x) \mid \leq C^{|\alpha|+1}(\alpha!)^s \leq C^{|\alpha|+1}(\alpha!)^t,$$

donc $f \in G^t(\Omega)$*, alors* $G^s(\Omega) \subset G^t(\Omega)$ *.*

La stabilité par rapport à la dérivation et la multiplication

Proposition 2.4. *L'espace* $G^s(\Omega)$ *est une algèbre a l'égard du produit et la somme usuelle de fonction, en outre il est fermé en vertu de la différentiation .*

Proposition 2.5. *L'espace de Gevrey est stable par rapport à la somme.*

$$\forall f, g \in G^s(\Omega) : f + g \in G^s(\Omega)$$

Preuve 2.4. *Soient $f, g \in G^s(\Omega)$ on a pour $K \subset \Omega$:*

$$|\partial^\alpha f(x)| \leq C_1^{|\alpha|+1}|\alpha|^{s|\alpha|}, |\partial^\alpha g(x)| \leq C_2^{|\alpha|+1}|\alpha|^{s|\alpha|}, \forall x \in K$$

d'où

$$\begin{aligned} |\partial^\alpha (f+g)(x)| &\leq |\partial^\alpha f(x)| + |\partial^\alpha g(x)| \\ &\leq (C_1 + C_2)^{|\alpha|+1}|\alpha|^{s|\alpha|} \end{aligned}$$

Ce qui montre que $f + g \in G^s(\Omega)$.

$$\begin{aligned} |\partial^\alpha (\lambda f(x))| &= |\lambda| \ |\partial^\alpha f(x)| \\ &\leq |\lambda| C_1^{|\alpha|+1}(|\alpha|!)^s \\ &\leq RC^{|\alpha|}(|\alpha|!)^s \quad \textit{en utilisant l'estimation équivalent} \ \ (2.2) \end{aligned}$$

Ce qui montre que $\lambda f \in G^s(\Omega)$.

Proposition 2.6. *L'espace de Gevrey est stable par rapport la multiplication i.e*

$$\forall f, g \in G^s(\Omega) : fg \in G^s(\Omega)$$

Preuve 2.5.

$$\begin{aligned} |\partial^\alpha (fg)(x)| &= \left| \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \partial^{\alpha-\beta} f(x) \partial^\beta g(x) \right| \\ &\leq \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} |\partial^{\alpha-\beta} f(x)| |\partial^\beta g(x)| \\ &\leq \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} C_1^{|\alpha-\beta|+1}|\alpha-\beta|^{s|\alpha-\beta|} C_2^{|\beta|+1}|\beta|^{s|\beta|} \\ &\leq 2^{|\alpha|}C^{|\alpha|+2}|\alpha|^{s|\alpha|} \quad \textit{en utilisant} \ \ (1.6) \ \ \textit{avec} \ C = max(C_1, C_2) \end{aligned}$$

Proposition 2.7. *L'espace de Gevrey est stable par rapport la dérivation i.e*

$$\forall \beta \in \mathbb{Z}_+^n, \forall f \in G^s(\Omega) : \partial^\beta f \in G^s(\Omega)$$

Preuve 2.6. *Soit $f \in G^s(\Omega)$, et $\beta \in \mathbb{Z}_+^n$, K un compact de Ω alors : pour tout $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ on à :*

$$\begin{aligned}
|\partial^\alpha(\partial^\beta f(x))| &= |\partial^{\alpha+\beta} f(x)| \\
&\leq C_1^{|\alpha+\beta|+1} |\alpha+\beta|^{s|\alpha+\beta|} \\
&\leq C_1^{|\alpha|+|\beta|+1} (|\alpha|+|\beta|)^{s(|\alpha|+|\beta|)} \\
&\leq C_1^{|\beta|} C_1^{|\alpha|+1} (|\alpha|+|\beta|)^{s(|\alpha|+|\beta|)}
\end{aligned}$$

en utilisant la remarque (2.2)

$$\leq RC^{|\alpha|+1} |\alpha|^{s|\alpha|}$$

Ce qui montre que $\partial^\beta f \in G^s(\Omega)$.

Proposition 2.8. *Si $\chi : \Omega \to A$ est une fonction analytique tel que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ et $A \subset \mathbb{R}^m$ deux ouvert est $f \in G^s(A)$ alors la composition $g = f \circ \chi \in G^s(\Omega)$*

Preuve 2.7. *Soit le domaine $\mid z - x \mid < r$ avec z complexe, x réel et r positif assez petit .*
On définit :

$$F(z) = \sum_{|\beta| \leq k} \frac{\partial^\beta f(\chi(x))}{\beta!} (\chi(z) - \chi(x))^\beta$$

On a alors

$$\begin{aligned}|F(z)| &\leq \sum_{|\beta|\leq k} \frac{C^{|\beta|+1}(\beta!)r^{|\beta|}}{\beta!} \\ &\leq \sum_{|\beta|\leq k} C^{|\beta|+1}\ r^{|\beta|}\ (\beta!)^{s-1}\end{aligned}$$

Ce qui donne d'après (1.7)

$$|F(z)| \leq C_1^{k+1}(k!)^{s-1}$$

En utilisant l'estimation de Cauchy :

$$|F^n(z_0)| \leq \frac{M(r).n!}{r^n}\ ,\ où\ M(r) = sup\{|F(z)| : |z - z_0| \leq r\}$$

D'où

$$|\partial^\alpha F(z)| \leq \frac{C_1^{k+1}(k!)^{s-1}}{r^k}\alpha!$$

On note que si $|\alpha| = k$*, alors les fonction* $\partial^\alpha g$ *et* $\partial^\alpha F$ *sont égales sur* $z = x$*, ce qui donne :*

$$|\partial^\alpha g(x)| = |\partial^\alpha F(z)|_{z=x} \leq C_1(C_1|r)^k(k!)^s$$

Ce qui montre que $g \in G^s(\Omega)$.

Proposition 2.9. *Si* $s > 1$ *, la fonction* f *définie par :*

$$f(x) = \begin{cases} exp\left(-x^{-\dfrac{1}{s-1}}\right) & : \ x > 0 \\ \\ 0 & : \ x \leq 0 \end{cases}$$

appartient à $G^s(\mathbb{R})$

Preuve 2.8. *Appliquons la formule de l'intégral de Cauchy pour* $x > 0$

$$f^{(n)}(x) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{|z-x|=kx} \frac{exp(-z^{-\frac{1}{s-1}})}{(z-x)^{n+1}} dz$$

Où k est un nombre positif et z le nombre complexe tel que $z = x + iy$, alors d'après l'estimation de Cauchy, on a

$$\left| \frac{f^{(n)}(x)}{n!} \right| \leq \frac{\sup\limits_{|z-x|=kx} |exp(-z^{-\frac{1}{s-1}})|}{|kx|^n}$$

D'où

$$|f^{(n)}(x)| \leq n! \ |kx|^{-n} \sup_{|z-x|=kx} |exp(-z^{-\frac{1}{s-1}})|$$

On a $| z - x |=| y |= kx$, posons $q = s - 1$, on a alors

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + k^2 x^2} = \sqrt{x^2(1 + k^2)} \leq x(1 + k)$$

Utilisant la formule d'Euler, on a alors :

$$\begin{aligned} exp\left(-z^{-\frac{1}{q}}\right) &= exp\left(-(re^{i\theta})^{-\frac{1}{q}}\right) \\ &= exp\left(-(-r^{-\frac{1}{q}})\right) e^{i(-\frac{\theta}{q})} \\ &= exp\left((-r^{-\frac{1}{q}}) \cos\left(\frac{\theta}{q}\right)\right) exp\left(r^{-\frac{1}{q}} i \sin\left(\frac{\theta}{q}\right)\right) \end{aligned}$$

Et on a

$$\left| exp\left(-z^{-\frac{1}{q}}\right) \right| \leq exp\left((-kx)^{-\frac{1}{q}} \cos q^{-1} \arcsin k\right)$$

En posant $t = kx$ et $l = \cos q^{-1} \arcsin k$, on a

$$\sup_x |f^{(n)}(x)| \leq n! \left(\frac{s-1}{le}\right)^{(s-1)n} (n)^{(s-1)n} \leq n! \ \left(\frac{s-1}{l}\right)^{(s-1)n} (n!)^{s-1}$$

Alors

$$\sup_x |f^n(x)| \leq C^{n+1} \ (n!)^s \ \text{où} \ \ C = \left(\frac{s-1}{l}\right)^{(s-1)n}$$

Donc f appartient à $G^s(\mathbb{R})$

Remarque 2.3. *La fonction f est non analytique .*

Définition 2.2.1. *Si* $s > 1$ *, on désigne par* $G_0^s(\Omega)$ *l'espace de fonction Gevrey à support compact i.e*

$$G_0^s(\Omega) = \{u \in G_0^s(\Omega) \text{ : suppu est un compact de } \Omega\} = G^s(\Omega) \cap C_0^\infty(\Omega)$$

Notation 1. *L'espace* $G_0^s(\Omega)$ *sera noté par* $D_s(\Omega)$

Exemple 2.1. *On définit sur* $\mathbb{R}^n$ *la fonction g par*

$$g(x) = f(1 - |x|^2)$$

Où f est définie dans la proposition (2.9) *alors*

$$g \in G^s(\mathbb{R}^n) \text{ est } suppg = \{x \in \mathbb{R}^n, |x| \leq 1\}$$

2.3 Convolution

On rappèle la définition de la convolution, et puis quelques propriétés élémentaires de la convolution .

Définition 2.3.1. *Soient f et g deux fonctions continues sur* $\mathbb{R}^n$ *dont une est à support compact ,*
La convolution de f avec g notée $f * g$ *, est une fonction définie sur tout* $\mathbb{R}^n$ *par*

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\ g(x - y)dy \tag{2.4}$$

Proposition 2.10. *Soient f et g tels que* $f * g$ *soit définit alors ,* *i)* $f * g = g * f$

ii) $f * g$ *est continue sur tout* $\mathbb{R}^n$

iii) $supp(f * g) \subset suppf + suppg$

iiii) si $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ *et* $g \in C^0(\mathbb{R}^n)$ *alors*

$$f * g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \text{ et } \partial^\alpha(f * g) = (\partial^\alpha f) * g, \ , \forall \alpha \in \mathbb{Z}_+^n$$

Preuve 2.9. *i)*

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)dy$$

On fait un changement de variable z = x - y alors dy = -dz

$$\begin{aligned} f * g(x) &= -\int_{\mathbb{R}^n} f(z)g(x-z)dz \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(z)g(x-z)dz = g * f \end{aligned}$$

iii)- Si $x \notin suppf + suppg$ *alors* $(x - suppf) \bigcap suppg = \emptyset$
ainsi $g(x-y)f(y) = 0, \forall y$ *d'ou* $f * g(x) = 0$

Proposition 2.11. *le produit de convolution de deux fonction* $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ *et* $\varphi \in G_0^s(\mathbb{R}^n)$ *est bien définie*

Preuve 2.10. *la fonction* $f * g$ *est bien définie, car la fonction* $y \to f(y)\varphi(x-y)$ *appartient à* $L^1(\mathbb{R}^n)$ *en effet*

$\forall x \in \mathbb{R}^n, x + supp\varphi$ *est un compact, d'où*

$$\begin{aligned} f * g &= \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\varphi(x-y)dy \\ &= \int_{y \in x+supp\varphi} f(y)\varphi(x-y)dy + \int_{y \notin x+supp\varphi} f(y)\varphi(x-y)dy \\ &= \int_{y \in x+supp\varphi} f(y)\varphi(x-y)dy \end{aligned}$$

d'où

$$|f * \varphi(x)| \leq \sup_{x+supp\varphi} |\varphi(x-y)| \int_{y \in x+supp\varphi} |f(y)|dy < +\infty$$

Proposition 2.12. *la fonction $f * \varphi$ appartient à $G^s(\Omega)$.*

Preuve 2.11. *de la formule $\partial^\alpha (f * \varphi) = f * (\partial^\alpha \varphi)$, on déduit que $f * \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.*

Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ montrons que $f * \varphi \in C^s(\mathbb{R}^n)$: Nous allons utiliser le théorème de dérivation de Lebèsgue $\forall x \in \mathbb{R}^n,\ x + supp\varphi$ est un compact d'on ,

$$\begin{aligned} \partial_x^\alpha f * \varphi(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\partial_x^\alpha \varphi(x-y)dy \\ &= \int_{y \in x+supp\varphi} f(y)\partial_x^\alpha \varphi(x-y)dy + \int_{y \notin x+supp\varphi} f(y)\partial_x^\alpha \varphi(x-y)dy \\ &= \int_{y \in x+supp\varphi} f(y)\partial_x^\alpha \varphi(x-y)dy \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} |\partial_x^\alpha f * \varphi(x)| &\leq \sup_{\mathbb{R}^n} |\partial^\alpha \varphi| \int_{y \in x+supp\varphi} |f(y)dy| \\ &\leq C^{|\alpha|+1} \ (\alpha!)^s \int_{y \in x+supp\varphi} |f(y)|dy \\ &\leq RC^{|\alpha|}(\alpha!)^s \ \ en\ utilisant\ l'estimation\ (2.2) \end{aligned}$$

Corollaire 2.3.1. *si* $\varphi \in G_0^s(\mathbb{R}^n)$ *et* $f \in C_0^k(\mathbb{R}^n), k \in \mathbb{N}$, *alors*

$$f * \varphi \in G_0^s(\mathbb{R}^n) \text{ et } \partial^\alpha(\varphi * f) = (\partial^\alpha \varphi) * f.$$

Chapitre 3

Espaces des fonctions ultra-différentiables

3.1 Suites $(M_p)_{p\in\mathbb{Z}_+}$

Soit $(M_p)_{p\in\mathbb{Z}_+}$ une suites des nombres réels positifs, on définit les propriètes suivantes, Convexité logarithmique :

$$M_p^2 \leq M_{p-1}M_{p+1},\ p = 1, 2, ... \tag{3.1}$$

Stabilité par rapport à l'ultradérivation :

$$\exists A > 0\ ,\ \exists H > 0\ ,\ M_p \leq AH^p \min_{0\leq j\leq p} M_j M_{p-j}\ ,\ p = 1, 2, ..., \tag{3.2}$$

Stabilité par rapport à la dérivation :

$$\exists H > 0\ ,\ \exists A > 0\ \ , M_{p+1} \leq AH^p M_p\ ,\ p = 0, 1, 2, ... \tag{3.3}$$

Non quasi-analyticité forte :

$$\exists A>0 \ \ , \sum_{j=k+1}^{\infty}\frac{M_{j-1}}{M_j}\leq A\frac{pM_p}{M_{p+1}}, \ \ k=1,2,.... \tag{3.4}$$

Non quasi-analyticité :

$$\sum_{p=1}^{\infty}\frac{M_{p-1}}{M_p}<+\infty \tag{3.5}$$

Remarque 3.1. (3.2) $\Rightarrow$ (3.3) *et* (3.4) $\Rightarrow$ (3.5) .

Remarque 3.2. *La condition* (3.2) *s'écrit*

$$\exists A>0 \ , \exists H>0 \ , M_{p+j}\leq AH^{p+j}M_pM_j \ p,j=0,1,2,...$$

Remarque 3.3. *La condition* (3.1) *implique*

$$(M_pM_j)\leq M_0M_{p+j} \ \ p,j=0,1,2,... \tag{3.6}$$

En effet , on a d'aprés (3.1)

$$\frac{M_p}{M_{p+1}}\leq\frac{M_{p-1}}{M_p}\leq...\frac{M_0}{M_1}$$

Alors

$$\frac{M_p}{M_{p+j}}=\frac{M_p}{M_{p+1}}.\frac{M_{p+1}}{M_{p+2}}...\frac{M_{p+j-1}}{M_{p+j}}\leq\frac{M_0}{M_1}.\frac{M_1}{M_2}...\frac{M_{j-1}}{M_j}=\frac{M_0}{M_j}$$

d'ou le résultat .

Exemple 3.1. .

i)- $M_p=p!^s$, $s>1$ *vérifie toutes les conditions précédentes mais ne vérifie pas* (3.4) .

ii)- $M_p=p!\left(log(p+e)\right)^{sp}$,$s>1$, *vérifie* (3.6) .

iii) Soit $q>1$, *alors* $M_p=p!q^{p^2}$, *vérifie* (3.4) .

Définition 3.1.1. *La fonction M associée à la suite* $(M_p)_{p\in\mathbb{Z}_+}$ *est définie par*

$$M(\rho) = \sup_p log \frac{\rho^p M_0}{M_p} \ , \ 0 < \rho < +\infty$$

Exemple 3.2. *Soit* $M_p = p!^s$, *alors* $M(\rho) = \sup_p log \frac{\rho^p}{p!^s}$ *est équivalente à* $\rho^{\frac{1}{s}}$.

Proposition 3.1. *La suite* $(M_p)_{p\in\mathbb{Z}_+}$ *vérifie* (3.1) *si est seulement si*

$$M_p = \sup_{\rho>0} \frac{\rho^p M_0}{\exp M(\rho)}, \ p = 0,1,2,.....$$

Preuve 3.1. $\Rightarrow \alpha)$ *supposons que* (3.1) *est satisfait alors on à* (3.6) , *i.e*

$$M_p M_j \leq M_0 M_{p+j} \ , \forall p, j = 0, 1, 2, ...,$$

d'ou

$$\sup_p log \rho^p \frac{M_0}{M_p} \geq log \rho^p \frac{M_j}{Mp + j} \ , \forall p, j = 0, 1, 2, ..., \forall \rho > 0$$

et

$$\exp M(\rho) \geq \rho^p \frac{M_j}{M_{p+j}} \quad , \forall p, j = 0, 1, 2, ..., \ \ \forall \rho > 0. \tag{3.7}$$

Donc pour j = 0 , on a

$$\exp M(\rho) \geq \rho^p \frac{M_0}{M_p} \ , \forall \rho > 0 \ , \forall p = 0, 1, 2, ...$$

Ce qui donne

$$M_p \geq \sup_{\rho>0} \rho^p \frac{M_0}{\exp M(\rho)}$$

$\beta)$ *Pour l'autre inégalité , on pose* $\rho_0 = \dfrac{M_p}{M_{p+1}}$, $p = 0, 1, 2, ...,$

1)- Si $p \geq k$ *, on a*

$$\frac{M_p}{M_k} = \frac{M_p}{M_{p-1}} \frac{M_{p-1}}{M_{p-2}} ... \frac{M_{k+1}}{M_k}$$

$$\frac{M_p}{M_k} \geq \left(\frac{M_k}{M_{k-1}}\right)^{p-k} = \rho_0^{p-k} \tag{3.8}$$

Alors

$$\frac{\rho_0^k}{M_k} \geq \frac{\rho_0^p}{M_p}$$

d'où

$$\rho_0^k M_0 M_k \geq \frac{\rho_0^p M_0}{M_p}$$

2) Si $p < k$

$$\frac{M_k}{M_p} = \frac{M_k}{M_{k-1}}\frac{M_{k-1}}{M_{k-2}}...\frac{M_{p+1}}{M_p}$$

$$\frac{M_k}{M_p} \leq \left(\frac{M_k}{M_{k-1}}\right)^{k-p} \tag{3.9}$$

$$\leq \rho_0^{k-p}$$

Alors

$$\frac{\rho_0^p M_0}{M_p} \leq \tfrac{\rho_0^k M_0}{M_k}$$

ainsi on a $\forall p = 0, 1, ...,$

$$\frac{\rho_0^p M_0}{M_p} \leq \tfrac{\rho_0^k M_0}{M_k}$$

d'où

$$log\frac{\rho_0^k M_0}{M_k} \geq \sup_p \frac{\rho_0^p M_0}{M_p} = M(\rho_0)$$

i.e $\exp M(\rho_0) \leq \frac{\rho_0^k M_0}{M_k}$ *, et par conséquent*

$$M_k \leq \frac{\rho_0^k M_0}{\exp M(\rho_0)} \leq \sup_p \frac{\rho^k M_0}{\exp M(\rho)}$$

D'où le résultat .

On a $\Leftarrow$

$$M_k = \sup_p \frac{M_0\rho^k}{\exp M(\rho)} \Longrightarrow M_k^2 = \left(\sup_p \frac{M_0\rho^k}{\exp M(\rho)}\right)^2 = \sup_p \left(\frac{\rho^{k+1}M_0}{\exp M(\rho)}\frac{\rho^{k-1}M_0}{\exp M(\rho)}\right)$$
$$\leq \sup_p \frac{\rho^{k+1}M_0}{\exp M(\rho)} \sup_p \frac{\rho^{k-1}M_0}{\exp M(\rho)} = M_{k+1}M_{k-1}$$

Notation 2. *On note* $m_k = \dfrac{M_k}{M_{k-1}}$ *,* $k \geq 1$ *. la condition* (3.1) *signifie que la suite* m_k *est coroissant*

Définition 3.1.2. *La fonction* m *est définie par* $m(\lambda)$ *est égal au nombre des* $m_k \leq \lambda$ *.*

Proposition 3.2. *Soit* M *la fonction associée à la suite* $(M_k)_{k\geq 0}$ *satisfaisant* (3.1) *alors*

$$M(\rho) = \int_0^\rho \frac{m(\rho)}{\lambda} d\lambda \tag{3.10}$$

Preuve 3.2. *On a* $M(\rho) = \sup_k \sum_{q=1}^{k} log \frac{\rho M_{q-1}}{M_q} = \sup_k \sum_{q=1}^{k} log \frac{\rho}{m_q}$ *. Puisque* $\dfrac{\rho}{m_k}$ *est définie pour* $(m_k \neq 0)$ *et* $(m_k)_{k\in\mathbb{Z}_+}$ *est croissante et non nulle , alors le sup est atteint pour tous les* m_q *tels que* $\dfrac{\rho}{m_q} \geq 1$ *, d'où*

$$M(\rho) = \sum_{m_k\leq\rho} log \frac{\rho}{m_k} = \int_0^\rho log \frac{\rho}{\lambda} dm(\lambda) = \int_0^\rho \frac{m(\lambda)}{\lambda} d\lambda$$

Proposition 3.3. *Soit la suite* $(M_k)_{k\geq 0}$ *vérifiant* (3.1) *, alors* (3.3) *est satisfaite si et seulement s'il existe deux constantrs* $A > 0$ *et* $H > 1$ *tels que*

$$m(\lambda) \geq \frac{log(\lambda/A)}{logH}, \quad \forall \lambda > 0 \tag{3.11}$$

Preuve 3.3. (3.3) *signifie :* $\exists A > 0$, $H > 0$

$$m_{k+1} \leq AH^k \quad , \quad \forall k = 0, 1, 2, ... \tag{3.12}$$

Pour $k = m(\lambda)$ *on a* $\lambda < m_{k+1}$, *alors de* (3.12) *on a* $\lambda < m_{k+1} \leq AH^k$, *donc en faisant entrer le log , on a*

$$k = m(\lambda) \geq \frac{log\left(\frac{\lambda}{A}\right)}{logH}, \qquad\qquad \lambda > 0$$

Inversement supposons que (3.11) *est satisfaite , soit* $m_{k_0} < m_{k_0+1} = ... = m_{k+1}$ *et en prenant* $\lambda \to m_{k+1}$ *dans* (3.11) , *on a*

$$k_0 \geq \frac{log\left(\frac{m_{k+1}}{A}\right)}{logH} \Rightarrow m_{k+1} \leq AH^{k_0}$$

D'où on a (3.12)

Lemme 1. *Supposons que* $(M_k)_{k\geq 0}$ *et* $(M'_k)_{k\geq 0}$ *sont deux suites de nombres positives vérifiant* (3.1), *alors*

$$N_k = \min_{0\leq q\leq k} M_q M'_{k-q} \tag{3.13}$$

Est aussi une suite de nombres positives satisfaisant (3.1) *et on a*

$$n(\lambda) = m(\lambda) + m'(\lambda) \tag{3.14}$$

$$N(\rho) = M(\rho) + M'(\rho) \tag{3.15}$$

Proposition 3.4. *Si la suite* $(M_k)_{k\geq 0}$, *satisfait* (3.1) *alors* (3.2) *est vérifiée* *si et seulement s'il existe A > 0 , H > 0 tels que* $\forall\rho > 0$,

$$2M(\rho) \leq M(H_\rho) + log(AM_0) \tag{3.16}$$

Preuve 3.4. *En vertu du lemme* 1, $2M(\rho)$ *est la fonction associée de la suite* $N_k = \min\limits_{0\leq q\leq k} M_q M_{k-q}$. *Alors si* (M_k) *satisfait* (3.2) , *on a alors*

$$\begin{aligned} 2M(\rho) &= \sup_k log\left(\frac{\rho^k M_0^2}{\min\limits_{0\leq q\leq k} M_k M_{k-q}}\right) \\ &\leq \sup_k log\left(\frac{A(H_\rho)^k M_0^2}{M_k}\right) = M(H_\rho) + log(AM_0) \end{aligned}$$

Inversement si $M(\rho)$ *satisfait l'inégalité* (3.16) , *on a*

$$N_k \quad = \sup_{\rho>0}\left(log\frac{\rho^k N_0}{\exp(2M(\rho))}\right) \geq \sup_{\rho>0}\left(log\frac{\rho^k M_0^2}{\exp(M(H\rho) + logAM_0}\right) \tag{3.17}$$

$$\geq \sup_{\rho>0} log\left(\tfrac{\rho^k M_0^2}{AM_0 \exp(M(H\rho))}\right) .$$

Posons $\tilde{M}_k = \dfrac{M_k}{AH^k}$, *alors on a* $\tilde{M}(\rho) = M(H\rho)$, *et alors*

$$\sup_{\rho>0} \log\frac{\rho^k M_0}{A\exp(M(H_\rho))} = \tilde{M}_k = \frac{M_k}{AH^k}$$

et de (3.4) , *on obtient* $N_k > \dfrac{M_k}{AH^k}$

Proposition 3.5. *Soit* $(M_k)_{k\in\mathbb{Z}_+}$ *une suite de nombres positifs vérifiant* (3.1) , *alors les conditions suivantes sont équivalentes*

i) La suite $(M_k)_{k\in\mathbb{Z}_+}$ *vérifie* (3.5)

ii) $\int\limits_0^\infty \frac{m(\lambda)}{\lambda^2} d\lambda < \infty$

iii) $\int\limits_0^\infty \frac{M(\rho)}{\rho^2}d\rho < \infty$

iv) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{M_k^{\frac{1}{k}}} < \infty$

Preuve 3.5. *i)* $\Rightarrow$ *ii) Nous avons vu la condition* (3.1) (*i.e* $(m_k)_k$ *croissante*) $\sum\limits_{m_k\leq\rho} \frac{1}{m_k} = \int\limits_0^\rho \frac{dm(\lambda)}{\lambda}$ *et en intégrant par parties , on à*

$$\sum_{m_k\leq\rho}\frac{1}{m_k} = \frac{m(\rho)}{\rho} + \int\limits_0^\rho \frac{m(\lambda)}{\lambda^2}d\lambda \tag{3.18}$$

Par passage à la limite $\rho\to\infty$ *on aura*

$$\int\limits_0^\infty \frac{m(\lambda)}{\lambda^2}d\lambda \leq \sum_{k=1}^{\infty}\frac{M_{k-1}}{M_k} < \infty$$

d'où ii) .

ii) $\Rightarrow$ *i) On montre que* $\int\limits_0^\infty \dfrac{m(\lambda)}{\lambda^2}d\lambda < +\infty$ *, alors* $\lim\limits_{\rho\longrightarrow\infty}\dfrac{m(\rho)}{\rho} = 0$ *. En effet , supposons le contraire , alors* $\exists\epsilon_0 > 0 et une suite \lambda_1 < \lambda_2 < ... tel que \frac{m(\lambda_j}{\lambda_j} > \epsilon_0 et \epsilon_{j+1} > 2\lambda_j$ *, et donc*

$$\begin{aligned}
\int\limits_0^\infty \frac{m(\lambda)}{\lambda^2}d\lambda &\geq \sum_{j=1}^{\infty}\int\limits_{\lambda_j}^{2\lambda_j}\frac{m(\lambda_j)}{\lambda^2}d\lambda \text{ , car } m(\lambda)\geq m(\lambda_j) \\
&= m(\lambda_1)\int\limits_{\lambda_1}^{2\lambda_1}\frac{d\lambda}{\lambda_2} + m(\lambda_2)\int\limits_{\lambda_2}^{2\lambda_2}\frac{d\lambda}{\lambda_2} + ... + m(\lambda_j)\int\limits_{\lambda_j}^{2\lambda_j}\frac{d\lambda}{\lambda_2} + ... \\
&= \sum_{j=1}^{\infty}\frac{m(\lambda_j)}{2\lambda_j} > \epsilon_0\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{2} = +\infty \text{ ,}
\end{aligned}$$

d'où une contradiction , donc (3.18) *implique quand* $\rho\to+\infty$ *,*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{m^k} = \lim_{\rho\longrightarrow\infty}\left(\frac{m(\rho)}{\rho}\right) + \int\limits_0^\infty \frac{m(\lambda)}{\lambda^2}d\lambda < +\infty$$

D'où i)

ii) $\Leftrightarrow$ *iii) On a d'aprés* (3.10)

$$M(\rho) = \int_0^\rho \frac{m(\lambda)}{\lambda^2} d\lambda$$

d'où

$$\int_0^\infty \frac{M()\rho}{\rho^2} d\rho = \int_0^\infty \frac{m(\lambda)}{\lambda} d\lambda \int_\lambda^\infty \frac{d\rho}{\rho^2} = \int_0^\infty \frac{m(\lambda)}{\lambda^2} d\lambda$$

i) $\Leftrightarrow$ *iv) Ceci revient à montrer que*

$$\sum_{k=0}^\infty \frac{M_k}{M_{k+1}} < \infty \Leftrightarrow \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{M_k^{\frac{1}{k}}} < \infty,$$

Pour cela montrons que

$$\left(\frac{M_k}{M_{k+1}}\right)^k \leq \frac{M_0}{M_k}$$

i.e

$$\frac{1}{m_k} \leq \left(\frac{M_0}{M_k}\right)^{\frac{1}{k}}$$

En effet , on à

$$\frac{M_k}{M_0} = \frac{M_k}{M_{k-1}} \times \frac{M_{k-1}}{M_{k-2}} \times ... \times \frac{M_1}{M_0} \leq \frac{M_k}{M_{k-1}} \times \frac{M_k}{M_{k-1}} \times ... \times \frac{M_k}{M_{k-1}}$$

Car $(m_k)_k$ *est croissent , d'où*

$$\frac{M_k}{M_0} \leq (m_k)^k$$

Ainsi i) $\Rightarrow$ iv) .

Pour l'inverse , on fait appel à l'inégalité de Carleman , si $a_k > 0, k = 1, 2, ...,$

$$\sum_{k=1}^{\infty}(a_1 a_2 ... a_k)^{\frac{1}{k}} \leq e \sum_{k=1}^{\infty} a_k \tag{3.19}$$

Si on prend $a_k = \frac{M_{k-1}}{M_k}$ *, alors*

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{M_0}{M_1}\frac{M_1}{M_2}...\frac{M_{k-1}}{M_k}\right)^{\frac{1}{k}} \leq e \sum_{k=0}^{\infty}\frac{M_{k-1}}{M_k},$$

i.e

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{M_0}{M_k}\right)^{\frac{1}{k}} \leq e \sum_{n=1}^{\infty}\frac{M_{k-1}}{M_k}$$

D'ou iv) $\Rightarrow$ i)

Enfin on a les équivalences i) $\Leftrightarrow$ ii) , ii) $\Leftrightarrow$ iii) et i) $\Leftrightarrow$ iv) , alors iii)$\Leftrightarrow$ iv) .

Proposition 3.6. *Supposons que* $(M_k)_{k\geq 0}$ *satisfait* (3.1) *, alors les assertions suivantes sont équivalentes*

i) $(M_k)_{k\geq 0}$ *vérifie* (3.4)

ii) $\exists A > 0, \forall \rho \geq m_1$,

$$\int_{\rho}^{\infty}\frac{m(\lambda)}{\lambda^2}d\lambda \leq (A+1)\frac{m(\rho)}{\rho} \tag{3.20}$$

Preuve 3.6. *i) $\Rightarrow$ ii) Si* (3.4) *est satisfaite , alors* (3.5) *est vrai et d'aprés la* *proposition , on a* $\lim\limits_{\rho\to+\infty}\frac{m(\rho)}{\rho}=0$. *En posant* $k=m(\rho)\geq 1$, *on obtient alors*

$$\int_\rho^\infty \frac{m(\lambda)}{\lambda^2}d\lambda = \frac{m(\rho)}{\rho}+\int_\rho^\infty \frac{dm(\lambda)}{\lambda} = \frac{m(\rho)}{\rho}+\sum_{q=k+1}^{\infty}\frac{1}{m_q}$$
$$\leq \frac{m(\rho)}{\rho}+A\frac{k}{m_{k+1}}\leq (A+1)\frac{m(\rho)}{\rho}$$

ii) $\Rightarrow$ *i) supposons* (3.20) *satisfaite , soit* $m_{k_0}<m_{k_0+1}=...=\leq m_k\leq m_{k+1}$ *, alors si* $m_{k_0}<\rho<m_k$ *on à*

$$\sum_{q=k}^{\infty}\frac{1}{m_q}\leq\sum_{q=k_0+1}^{\infty}\frac{1}{m_q}=\int_\rho^\infty\frac{dm(\lambda)}{\lambda}=\int_\rho^\infty\frac{m(\lambda)}{\lambda^2}d\lambda-\frac{m(\rho)}{\rho}\leq\frac{Am(\rho)}{\rho}$$

On a $(m_k)_{k\in\mathbb{Z}_+}$ *croissante et en faisant tendre* ρ *vers* m_k *alors d'aprés toujours* (3.20) *on a*

$$\sum_{q=k}^{\infty}\frac{1}{m_q}\leq\frac{Ak_0}{m_k}\leq A\frac{k-1}{m_k}$$

Ce qui donne (3.4) *pour les k tel que* $m_{k+1}>m_1$. *Si on choisit A assez grand* (3.4) *est aussi satisfaite pour tout* $k\geq 1$

3.2 Espaces de Roumieu $R_M(\Omega)$

Définition 3.2.1. *Soit* $(M_k)_{k\geq 1}$ *une suite de nombres positifs,* Ω *un ouvert de* $\mathbb{R}^n(\Omega)$, *l'espace* $R_M(\Omega)$ *est l'ensemble des fonctions* $\varphi\in C^\infty(\Omega)$ *possèdant la propriété* $\forall K$ *compact de* Ω, $\exists C>0$, $\forall\alpha\in\mathbb{Z}_+^n$

$$\sup_{x\in K}\mid\partial^\alpha\varphi(x)\mid\leq C^{|\alpha|+1}M_{|\alpha|} \tag{3.21}$$

Les éléments de $R_M(\Omega)$ *sont appelés ultradifférentiables de classe* $(M_k)_{k\in\mathbb{Z}_+}$.

Exemple 3.3. *Si* $M_k = k!^s$, $(s \geq 1)$ *on obtient l'espace de Gevrey isotrope classique*

3.3 Quelques propriétés des espaces de Roumieu

Théorème 3.3.1. *(Denjoy-Carleman-Mandelbrojt)*

Si la suiteM_p *vérifié* (3.2) *alors pour chaque boule* B_ϵ *de rayon* ϵ *dans* Ω *il existe* $\rho_\epsilon \in R_M(\Omega)$ *vérifié la condition*

$$\rho_\epsilon \geq 0, supp\rho_\epsilon(x) \subset B_\epsilon \ et \ \int \rho_\epsilon(x)dx = 1$$

Proposition 3.7. *L'espace* $R_K(\Omega)$ *n'est pas réduit à* $\{0\}$. *D'aprés le théorème de (Denjoy-Carleman-Mandelbrojt)*

Proposition 3.8. *Si la suite* $(M_k)_{k\in\mathbb{Z}_+}$ *vérifie* (3.6) , *alors l'espace* $R_M(\Omega)$ *est stable par rapport à la multiplication i.e*

$$\forall\varphi, \psi \in R_M(\Omega) : \varphi\psi \in R_M(\Omega)$$

Preuve 3.7. *Soient* φ *et* Ψ *deux fonctions ultradifférentiables de classe* $(M_k)_{k\in\mathbb{Z}_+}$, *elles vérifient sur un compact* K *pour certaines constantes positives* C , C' *les inégalités :* $\forall\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$,

$$\sup_{x\in K} \mid \partial^\alpha\varphi(x) \mid\leq C^{|\alpha|+1}M_{|\alpha|} \ et \ \sup_{x\in K} \mid \partial^\alpha\Psi(x) \mid\leq C'^{|\alpha|+1}M_{|\alpha|}$$

On a alors , pour $x \in K$, *en utilisant la formule de Leibniz*

$$\mid \partial^\alpha(\varphi\Psi)(x) \mid\leq CC' \sum_{\beta\leq\alpha} \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!} C^{|\alpha|}C'^{|\alpha|-|\beta|}M_{|\beta|}M_{|\alpha-\beta|}$$

Et en utilisat (3.6) *, on a*

$$\begin{aligned}
| \partial^{\alpha}(\varphi\Psi)(x) | &\leq CC'M_{|\alpha|}M_0 \sum_{\beta\leq\alpha} \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!} C^{|\beta|}C^{|\alpha|-|\beta|} \\
&\leq CC'(C+C')^{|\alpha|}M_{|\alpha|}M_0 = C''^{|\alpha|+1}M_{|\alpha|}
\end{aligned}$$

Ce qui montre que $\varphi\Psi \in R_M(\Omega)$.

Proposition 3.9. *Si* (3.3) *est satisfaite , alors* $R_M(\Omega)$ *est stable par rapport à la dérivation . i.e*

$$\forall\beta \in \mathbb{Z}_+^n, \forall f \in R_M(\Omega) : \partial^{\beta} f \in R_M(\Omega)$$

Preuve 3.8. *Soient* Ω *un ouvert de* $\mathbb{R}^n$ *et* $f \in R_M(\Omega)$ *, on montre que* $\partial^{\beta} f \in R_M(\Omega)$ *. En effet soit* K *compact de* Ω

$$\exists C > 0, \forall\alpha \in \mathbb{Z}_+^n, \text{ on } \sup_{x\in K} | \partial^{\alpha}(\partial^{\beta} f(x)) | \leq C^{|\alpha|+|\beta|+1}M_{|\alpha|+|\beta|}$$

D'aprés (3.3) *, on a*

$$\begin{aligned}
\sup_{x\in K} | \partial^{\alpha+\beta} f | &\leq C^{|\alpha|+|\beta|+1}H^{|\alpha|+|\beta|+1}M_{|\alpha|}M_{|\beta|} \\
&\leq (CH)^{|\beta|+1}M_{|\beta|}(CH)^{|\alpha|}M_{|\alpha|} \\
&\leq \tilde{C}^{|\alpha|+1}M_{|\alpha|},
\end{aligned}$$

où $\tilde{C} = max\left((CH)^{|\beta|+1}M_{|\beta|}, CH\right)$ *donc* $(\partial^{\beta} f) \in R_M(\Omega)$ *.*

Corollaire 3.3.1. *Si* $(M_k)_{k\in\mathbb{Z}_+^n}$ *vérifie* (3.6) *et* (3.3) *, alors* $R_M(\Omega)$ *est un sous-algèbre différentielle de* $C^{\infty}(\Omega)$ *.*

Lemme 2. *Si la suite* $(M_k)_{k\in\mathbb{Z}_+}$ *, vérifie* (3.20) *, alors il exsite un élément* φ

de $R_M(\Omega)$ *tel que ,* $\forall j \geq 1$,

$$| \partial^j \varphi(0) | \geq M_j \tag{3.22}$$

Preuve 3.9. *Soit la fonction* φ *définie par*

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{M_k}{(2m_k)^k} e^{2mi_k x} \ , \ ou \ m_k = \frac{M_{k+1}}{M_k}$$

Montrons d'abord que $\varphi \in R_M(\mathbb{R})$ *, en effet*

$$\begin{aligned} | \partial^j \varphi(x) | &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{M_k}{(2m_k)^k} e^{2im_k x} (2im_k)^j \ | \\ &\leq \sum_{k=0}^{\infty} M_k 2^{j-k} m_k^{j-k} \end{aligned}$$

Puisque $(M_k)_{k\in\mathbb{Z}_+}$ *, vérifie* (3.1) *, alors* $(m_k)_{k\in\mathbb{Z}_+}$ *est croissante et en vertu de* (3.9) *et* (3.8) *, on à l'estimation suivante*

$$m_k^{j-k} \leq \frac{M_j}{M_k} \ , \quad \forall (j,k) \in \mathbb{Z}_+^2$$

Et donc

$$\begin{aligned} | \partial^j \varphi(x) | &\leq \sum_{k=0}^{\infty} 2^{j-k} M_j \leq 2^j M_j \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} \\ &\leq 2^j M_j C \end{aligned}$$

Donc $\varphi \in R^M(\mathbb{R})$ *.*

La fonction φ *vérifie la condition* (3.22) *, car*

$$| \partial^j \varphi(0) | = 2^j \sum_{k=0}^{\infty} \frac{M_k m_k^{j-k}}{2^k} \geq M_j$$

3.4 Inclusion entre les espaces de Roumieu

Définition 3.4.1. *Soient* $(M_k)_{k\in\mathbb{Z}_+}$ *et* $(N_k)_{k\in\mathbb{Z}_+}$ *deux suites positives , on dit que* $M \subset N$ *s'il existe* $L > 0$ *et* $C > 0$ *tels que*

$$M_k \leq CL^k N_k \ , \ k = 0, 1, 2, ..., \tag{3.23}$$

Lemme 3. *Supposons que les suites* (M_k) *et* (N_k) *vérifient* (3.1) *, alors* $M \subset N$ *si et seulement s'ils existent deux constantes* $L > 0$ *et* $C > 0$ *tels que*

$$N(\rho) \leq M(L_\rho) + \log C, \quad 0 < \rho < \infty \tag{3.24}$$

Preuve 3.10. *Si* (3.23) *est véeifiée , alors*

$$\begin{aligned} N(\rho) &= \sup_k \log \frac{\rho^k}{N_k} \\ &\leq \sup_k \log \frac{(L_\rho)^k}{M_k} + \log C = M(L_\rho) + \log(C) \end{aligned}$$

Inversement si (3.24) *est satisfaite , d'après la proposition on à*

$$\begin{aligned} M_k &= M_0 \sup_\rho \frac{\rho^k}{\exp M(\rho)} \\ &\leq M_0 C \sup_\rho \frac{\rho^k}{\exp N(\rho/L)} \leq C' \sup_\rho \frac{\rho^k}{\exp\left(\sup\limits_k \log \frac{(\rho/L)^k}{N_k}\right)} = \frac{M_0 C}{N_0} L_k N_k \\ &= C' L^k N_k \end{aligned}$$

Remarque 3.4.1. *Si on pose pour* $N_k = M_{k+1}$ *, alors* (3.3) *signifie* $N \subset M$

Proposition 3.10. *Soient* $(M_k)_{k\in\mathbb{Z}_+}$ *et* $(N_k)_{k\in\mathbb{Z}_+}$ *vérifiant* (3.1) *, alors* $R_M(\Omega) \subset R_N(\Omega)$ *si est seulement si* $M \subset N$ *.*

Preuve 3.11. $M \subset N \Rightarrow R_M \subset R_N$ *, trivial . On montre* $R_M \subset R_N \Rightarrow M \subset$

N , pour cela , raisonnons par l'absude , supposons que $M \subsetneq N$ *, alors*

$$\forall L > 0 \ , \ \forall C > 0 \ , \ \exists K \in \mathbb{Z}_+ \ , \ M_k > CL^k N_k \quad (k = 0, 1, 2, ...)$$

On fait appel au lemme 2*, alors*

$$\exists \varphi \in R_M(\mathbb{R}) \ , \ \forall L > 0 \ , \ \forall C > 0 \ , \ \exists k \in \mathbb{Z}_+ \ : \mid \partial^k \varphi(0) \mid \geq M_k > CL^k N_k$$

D'où $\varphi \notin R_N(\mathbb{R}^n)$ *, on a une contradiction .*

Bibliographie

[1] A.Ferrari, E.Titi , " la régularité Gevrey pour non linéaires analytique des équations paraboliques" commun. Partielle Diff. Eq.,23,1-16, (1998)

[2] C . Roumieu , Sur quelques extentions de la notion de distrbutions , Ann , Sc , Ec , Norm , 3^{eme} serie , Tome , 77 , $n°$, 1 . p . 41-121 , (1960) .

[3] C.Foias, R.Temam, " la régularité de classe Gevrey pour les solutions des équations de Navier-stokes" J.Funct. Anal. , 87,359-369,(1989)

[4] C.D, Levermore, M.Olivrre, "Analyticité de solution pour une équation d'Euler généralisée" J.Diff. Eq. , 133,321-339, (1997)

[5] H. Brezis , Analyse fonctionnelle, Dunod, (1999) .

[6] H . Komatsu , Ultradistributions I , Structure theorems and characterisation , J. Fac , Sci , Univ , Tokyo Sect, I.A , Math , 20,25-105 , (1973) .

[7] H. chen, L. Rodino " Théorie générale des classes PDF et Gevrey " , la théorie générale des équations aux dérivées partielles et analyse microlocale (Trieste, 1995), Res Pitman, Notes de mathématiques , 349,6-81, (1996).

[8] L . Hormander , The analysis of Linear partial differential operators , I , Distributions theory and Fourier analysis , Springer-Verlag , (1983) .

[9] L . Rodino , Linear partial differential operators in Gevrey spaces , World Scientifie , (1993) .

[10] L. Hormander. Distribution theory and Fourier analysis, Springer, (1983).

[11] M.Gevrey, sur la nature analytique des solutions des equations aux dérivées partielles, Ann, Sc, Ec, Norm, Sup, 35, 129-190 (1918).

[12] M. Mascarello, L. Rodino, " équations aux dérivées partielles qui présentent des caractéristiques multiples " , Math, Sujets, 13, Akad, (1997).

[13] J.P. Ramis, " série divergentes et Théorie asymptotiques " Bull, Sci, Math , France, 121 (1993) (Panoramas ET synthèses, suppl.).

[14] T.Gramachev, G.Popov, " estimations de type Nekhoroshev pour boule de billard cartes " Ann.Inst.Fourier (Grenoble), 45 : 3, 859-895, (1995).

[15] T.Gramachev, L.Rodino , " solvabilité Gevrey pour des équations différentielles partielles semi-linéaires avec characteritics multiples " Boll, Un, Mat, Ital.Sez, B (8), 2 : 1, 65-120, (1999).

.