REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE&POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR & DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Université Ibn Khaldoun- Tiaret
FACULTÉ DES MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUE
DÉPARTEMENT DES MATHEMATIQUES

MEMOIRE MASTER

Présentée par :

MEHDI KHEIRA

MERATI AMINA

MISSAOUI SAIDA

Spécialité : *Mathématiques*

Option : *Analyse fonctionnelle et Applications*

Intitulée

Introduction a la mesure de non compacité et applications aux équations différentielles

Soutenue le 14 /06/2022.

Devant le jury composé de :

Président: *Pr. SABIT Souhila Univ. Ibn Khaldoun Tiaret*

Examinateurs: *Pr. BAGHDED Said Univ. Ibn Khaldoun Tiaret*

Encadreur: *Pr. MAAZOUZ Kadda Univ. Ibn Khaldoun Tiaret*

2021-2022

Remerciements

Nous tenons tout d'abord à remercier Dieu le tout puissant et miséricordieux, qui nous donné la force et la puissance d'accomplir ce modeste travail.

En second lieu nous voudrions présenter nos remerciement à notre encadreur "Mazouz Kadda".

Nous voudrions également lui témoigner nos gratitudes pour sa patience et son soutien qui ont été précieux afin de mener notre travail à bon port. Notre vifs remerciements vont également aux membres du jury pour l'intérêt qu'ils ont porte à notre recherche en acceptant d'examiner notre travail et de l'enrichir par leurs propositions. Enfin, nous tiens également à remercier toutes les personnes qui ont participé de prés ou de loin à la réalisation de ce travail.

Dédicace

Je dédie ce modeste travail :

A celui qui s'est changé la nuit en jour pour m'assurer les bonnes conditions, mon cher père "Nedjadi".

A la plus perle du monde, qui m'a donne l'amour, la patience,

et le soutien et le courage... ma tendre mère "Alia".

A mon cher frère :Ahmed.

A mes chères sœurs :Mebarka et Yasmine.

A toute ma famille.

Et a tout mes amis et mes collègues.

pour leur amour et soutien inconditionnel.

Leur patience et encouragements.

Kheira

Dédicace

Aux deux être les plus proche de mon cœur.

A la plus chéres des mères "Fatma"

Au plus chers du pères "Lazhari"

qu'ils trouvent ici l'expression d'un grand amour et d'une gratitude qui, si grande qu'elle puisse être, ne sera jamais à la hauteur de leur patience.

A ma famille qui m'a toujours soutenue, mes collègues et mes amis.

A tous ceux qui en crus en moi.

Je dédie ce modeste travail.

Saida

Dédicace

Tout d'abord je rends un grand hommage à le mémoire de mon père et je prie Dieu le tout puissant de l'accepteur dans son veste paradis.

Je dédie ce modeste travail :

A qui je m'élève et dont je dépends, ou cœur généreux "ma mère".

A ma sœur "Torkia" et ma chère nièce "Salsabil".

A mes meilleurs amies pour leur amour et leur soutien surtout "Houari" et mon très chéri "Rahim".

En fin je dédie ce mémoire à mes collègues et tous ceux qui me sont chéris.

Amina

Résumé

Nous avons étudier l'existence et l'unicité de solutions de quelques problèmes à conditions initiales et une équations d'ordre fractionnaire via la notion se la mesure de non compacité et l'approche de point fixe.

Abstract

In this work, we study the existence and uniquness of solutions of some problems of unitial values and intégral equation involving the measur of non compactness and the fixed point approache.

TABLE DES MATIÈRES

notations utilisées

$\mathbb{K}$: représente le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

Ω : ensemble non vide et borné.

$\mathbb{R}$: l'ensemble des nombres réels.

$\mathbb{R}_+$: l'ensemble des nombres réels positifs.

$\mathbb{N}$: l'ensemble des nombres naturels.

$\mathbb{C}$: l'ensemble des nombres complexes.

$\alpha(.), X(.)$:la mesure de non-compacité de Kuratowski ou Hausdorf.

$|.|$: valeur absolue ou module

MNC : mesure de non-compacité.

$diam(\Omega)$: diamètre de (Ω).

$c[a,b]$: l'espace des fonctions continues sur [a,b].

$L^1([a,b])$: l'espace des fonctions mesurables et intégrables sur [a,b].

$\overline{conv}\Omega$: l'enveloppe convexe fermé d'un ensemble Ω.

$Bc(\mathbb{R}_+)$: l'espace des fonctions continues par morceaux.

$AC^1[a,b]$: l'espace des fonctions absolument continues et dérivables.

$B(x_0, r)$: la boule ouverte de centre x_0 et de rayon r.

INTRODUCTION

La théorie de la mesure de non-compacité est une branche très importante de l'analyse non linéaire, elle a beaucoup d'applications dans la théorie plusieurs domaines. La mesure de non-compacité joue un rôle très important dans la théorie du point fixe et ont de nombreuses applications dans diverses branches d'analyse non linéaire, y compris les équations différentielles et intégrales.

En général, une mesure du non-compacité est une fonction définie sur famille de sous-ensembles non vide et bornés d'un certain espace métrique tel qu'il soit égale à zéro sur toute la famille des ensembles relativement compacts. Le concept de mesure de non-compacité a été introduit pour la première fois par Kuratowski en 1930. En 1955 le mathématicien italien Darbo a utilisé la mesure de Kuratowski pour étudier une classe d'opérateurs condensants.

L'objectif de ce travail est d'appliquer la technique de mesure de non-compacité en combinaison avec les théorèmes de point fixe pour obtenir l'existence des solutions à certaines équations différentielles et intégrales.
ce mémoire est réparti en quatre chapitres.
Le premier chapitre contient définitions et résultats qui nous seront utiles pour la suite

de cette étude.

Le deuxième chapitre est consacré à la notion de la mesure de non-compacité de Hausdorff et Kuratowski et quelques propriétés.

Dans le troisième chapitre, nous considérons l'existence de solutions d'un problème à valeurs initiales pour une équation différentielle non linéaire,

$$^cD^r y(t) = f(t, y), \text{ pour chaque } t \in J = [0, T], 1 < r < 2,$$

$$y(0) = y_0, y'(0) = y_1$$

Dans le quatrième chapitre, nous étudions l'existence de solution de l'équation intégrale suivante :

$$x(t) = f_1(t, x(t)) + \frac{f_2(t, x(t))}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{u(t, \tau, x(t))}{(t-\tau)^{1-\alpha}} d\tau$$

Avec

$t \in \mathbb{R}_+$, $\alpha \in [0, 1]$, $f_i : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x(t) = x : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ et $\mu : m_e \to \mathbb{R}_+$

CHAPITRE 1

PRÉLIMINAIRES

Introduction

Dans ce chapitre, nous rappelons quelques définitions préliminaires ainsi que certains théorèmes d'analyse pour une meilleure présentation des démonstrations des résultats de notre travail.

1.1 Espaces Banach

1.1.1 Espace métrique

Définition 1.1. *Une distance (métrique) sur un ensemble E est une application*
$d : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}_+$, *telle que :*

1- $\forall x, y \in E, d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ *(séparation).*

2- $\forall x, y \in E, d(x,y) = d(y,x)$ *(symétrie)*

3- $\forall x, y, z \in E, d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$,*(inégalité triangulaire)* .

Et on dit que (E,d) est un espace métrique, et on appelle d(x,y) la distance entre x et y.

Définition 1.2. *Soit (E,d) un espace métrique et A une partie de E. On dit que A est bornée si et seulement si :*

$$\exists M \in \mathbb{R}_+ \text{ tel que } \forall (x,y) \in A^2, \text{ on a } d(x,y) \leq M.$$

Définition 1.3. *Dans un espace métrique (E,d), on appelle boule ouverte (resp.boule fermée) de centre $a \in E$ et de rayon $r > 0$, le sous-ensemble*

$B(a,r) = \{x \in E, d(a,x) < r\}.(resp.B_f(a,r) = \{x \in E, d(a,x) \leq r\}).$

Définition 1.4. *Soit A une partie non vide et borné de E.*

On appelle diamètre de A le nombre $\delta(A)$ tel que :

$$\delta(A) = \sup_{(x,y)\in A^2} d(x,y).$$

Définition 1.5. *Soit (E,d) un espace métrique, A et B deux parties de E et $x \in E$. On définit la distance entre x et A par :*

$$d_A(x) = \inf_{y\in A} d(x;y).$$

On définit la distance entre A et B par :

$$d(A,B) = \inf_{x\in A, y\in B} d(x,y)$$

Les suites dans les espaces métriques

Définition 1.6. ***(La convergence simple)***

Soit (E,d) un espace métrique et soit $(x_n)_n \in E$ une suite deux points de E.

Soit $x \in E$ on dit que $(x_n)_n \in E$ converge vers x si l'on a :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in E, \forall n \in E : n \geq N \Rightarrow d(x_n - x) < \varepsilon.$$

Définition 1.7. ***(Suite de Cauchy) :***

Une suite $(x_n)_n \in E$ est de Cauchy si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n, m \in \mathbb{N} \; telque \; n,m \geq n_0 \Rightarrow d(x_n, x_m) \leq \varepsilon.$$

Proposition 1.1.

1- Toute suite convergente est une suite de Cauchy.

2- Toute suite de Cauchy est bornée.

Définition 1.8. ***(Espace métrique complet) :***

On dit que l'espace métrique (E,d) est complet si toute suite de Cauchy converge dans E.

La continuité dans l'espace métrique

Définition 1.9. *Soient (E,d) et (E',d') deux espaces métriques et*

$f : E \longrightarrow E$ est une application, on dit que f est continue en $a \in E$ si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \; \alpha > 0, \forall x \in E, d(x,a) < \alpha \Rightarrow d'(f(x), f(a)) < \varepsilon.$$

Remarque 1.1. *L'application f est continue sur E si et seulement si elle est continue en tout point a de E.*

Définition 1.10. ***(Application lipschitzienne) :***

Une application $f : (E, d_E) \longrightarrow (E', d_{E'})$ est dite lipschitzienne s'il existe une constante $K \geq 0$ telle que :

$$\forall (x,y) \in E^2, \; d_{E'}((f(x), f(y)) \leq K d_E(x,y).$$

Remarque 1.2. *Si la constante $0 \leq k < 1$, on dit que f est une contraction.*

1.1.2 Espace de Banach

Définition 1.11. ***(La norme)***

Un espace vectoriel normé $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel E sur $\mathbb{K}$ muni d'une application une norme sur E est une application de $\|.\| : E \times E \longrightarrow \mathbb{K}$, appelée norme, qui satisfait, pour tout x,y dans E et tout α dans K les propriétés suivantes :

a. $\|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$

b. $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$ *(homogénéité)*

c. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ *(inégalité triangulaire)*

1.1.3 Espace vectoriel normé

Définition 1.12. *Un espace E muni d'une norme $\|.\|$, notée $(E,\|.\|)$ est appelé un espace vectoriel normée.*

Définition 1.13. *Tout espace vectoriel normé complet est dit espace de Banach.*

Proposition 1.2. *Soit A une partie de E et x un élément de E alors x un élément de A si et seulement si x est une limite d'une suite $(X_n)_{n\in N}$ des éléments de $\bar{A}$.*

Définition 1.14. *Soient $(E,\|.\|_E)$ et $(É,\|.\|_É)$, deux espaces vectoriels normés et $f : E \to E$ est une application, on dit que f est continue en $a \in E$ si :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \sigma > 0, \forall x \in E, \|x - a\|_E < \sigma \Longrightarrow \|f(x) - f(a)\|_E < \varepsilon$$

Proposition 1.3. ([12]) *Une application linéaire v de E dans F est dite complètement continue s'il existe un voisinage V de 0 dans E tel que :*
v(V) soit relativement compacte dans F.

1.2 La compacité et la convexité

Définition 1.15. ***(La compacité)***
Un ensemble A de E est compact si de toute suite d'éléments de A, on peut extraire une sous-suite converge vers un élément de A.

Définition 1.16. *Soit A un ensemble d'un espace normé E, $J \in E$, A est dit compact si de tout recouvrement de A par des ouverts de A on peut extraire un sous-recouvrement fini, i.e,*

$$\forall V_j, j \in J(ouverts);\ U \subset \bigcup_{j\in J} Vj, \exists Vj(k), j(k) = 1, 2, ..., n \text{ tel que}$$
$$U \subset \bigcup_{k=1}^{n} Vj(k)$$

Proposition 1.4. *1- Si A est compact, alors A est fermé et borné.*

2- Si V est de dimension finie, alors A est compact si et seulement si A est fermé et borné.

Théorème 1.1. ([16]) *La boule unité fermée de V est compacte si et seulement si V est de dimension finie.*

Définition 1.17. *Un ensemble A de E est faiblement compact si de toute suite d'élément de A, on peut extraire une sous-suite converge faiblement vers un élément de A.*

Définition 1.18. *On dit que une partie A de E est relativement compacte (faiblement relativement compacte) si $\bar{A}$ est compacte (faiblement compacte).*

Soient E,F deux espaces de Banach et Ω une partie non vide de E.

Définition 1.19. ***(L'application compacte)***

Une application $f : \Omega \subseteq E \longrightarrow F$ est dite compacte si et seulement si l'image de tout ensemble borné x de Ω est un ensemble relativement compact de F c'est-a-dire, $\bar{f}(x)$ est compacte.

Définition 1.20. ***(La convexité)***

Une sous-ensemble X d'un espace vectoriel normé E est dit convexe si et seulement si :

$$\forall (x,y) \in X, \forall \lambda \in [0,1], (1-\lambda)x + \lambda y \in X$$

Autrement dit, un ensemble est convexe s'il contient tout segment passent par deux de ses point.

Lemme 1.1. ***(Ascoli-Arzela)*** :([17])

Soient E, F deux espaces Banach. Une partie A de $C(E,F)$ est relativement compacte si et seulement si :

1- *L'ensemble A est borné, i.e, il existe une constante $K > 0$, tel que :*

$\|f(x)\| \leq K$ *pour tout* $x \in E$ *et tout* $f \in A$.

2- *A est équi continue, i.e, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que :*

$|(x_1) - (x_2)| < \delta \Rightarrow \|f(x_1) - f(x_2)\| \leq \varepsilon, \forall x_1, x_2 \in E$ *et* $f \in A$.

3- *pour tout $x \in E$, l'ensemble $A(x) = \{f(x); f \in A\}$ est relativement compact.*

1.3 Quelques notions de calcul fractionnaires

Dans cette section, nous rassemblons quelques définitions de la dérivation et intégration d'ordre fractionnaire. Dénoter par $C(J,E)$ l'espace de Banach des fonctions continues $y : J \longrightarrow E$, avec la norme supremum habituelle

$$\|y\|_\infty = \sup \|y(t)\|, t \in J$$

.

Soit $L^1(J,E)$ est l'espace de Banach des fonctions mesurables $y : J \longrightarrow E$ qui sont Bochner intégrables, muni de la norme

$$\|y\|_{L^1} = \int_J \|y(t)\| dt.$$

$AC^1(J,E)$ désigne l'espace des fonctions $y : J \longrightarrow E$, dont la dérivée première est absolument continue. De plus, pour un ensemble donné V de fonctions $v : J \longrightarrow E$, désignons par

$$V(t) = v(t) : v \in V, t \in J$$

et

$$V(J) = v(t) : v \in V, t \in J$$

Pour notre propositions, nous aurons besoin de la définition de la dérivée de Caputo d'ordre fractionnaire.

Définition 1.21. ([13]) *L'intégrale d'ordre fractionnaire de la fonction $h \in L^1([a,b])$ de commande $r \in \mathbb{R}_+$ est défini par :*

$$I^r{}_a h(t) = \frac{1}{\Gamma(r)} = \int_a^t \frac{h(s)}{(t-s)^{1-r}} dt$$

,

*où Γ est la fonction gamma, * produit de convolution. Lorsque on a $(a = 0)$,*
on écrit $I^r h(t) = h(t) * \varphi_r(t)$, où $\varphi_r(t) = \dfrac{t^{r-1}}{\Gamma(r)}$ pour $t > 0$, et $\varphi_r(t) = 0$ pour $t \leq 0$, et $\varphi_r \longrightarrow \delta(t)$ comme $r \longrightarrow 0$, où δ est la fonction delta.

Définition 1.22. ([2]) *Pour une fonction h définie sur l'intervalle [a,b], la dérivée d'ordre fractionnaire de Caputo de h, est définie par :*

$$^cD^r{}_{a^+} h(t) = \frac{1}{\Gamma(n-r)} = \int_a^t \frac{h^{(n)}(s)}{(t-s)^{1-n+r}} ds$$

ici n=⟦r⟧et ⟦r⟧désigne la partie entière de r.
A partir de la définition de la dérivée de Caputo, les résultats auxiliaires suivants ont été établis dans ([15]).

Lemme 1.2. *Soit r >0, puis l'équation différentielle*

$$^cD^r h(t) = 0$$

a des solutions $h(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + ... + c_n t^{n-1}$, $c_i \in E$, *i=0,1,...,n, n=*$[\![r]\!]$*+1.*

Lemme 1.3. *Laisser* $r > 0$*, en suite*

$$I^r\, {}^cD^r h(t) = h(t) + c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + ... + c_n t^{n-1}$$

pour certain $c_i \in E, i = 0, 1, ..., n$*, n=*$[\![r]\!]$*+1.*

Définition 1.23. *Une application* $f : J \times E \longrightarrow E$ *est dit Carathéodory si :*

(i) $t \longmapsto f(t,u)$ *est mesurable pour chaque* $u \in E$*.*

(ii) $u \longmapsto F(t,u)$ *est continue pour presque tout* $t \in J$*.*

Théorème 1.2. ([14]) *Soit D un sous-ensemble borné, fermé et convexe d'un espace de Banach tel que* $0 \in D$ *et soit N être une cartographie continue de D en lui même. Si l'implication :*

$$V = \overline{conv} N(V)$$

ou

$$V = N(V) \cup \{0\} \Rightarrow \alpha(V) = 0$$

vaut pour chaque sous-ensemble V de D, alors N a ou moins un point fixe.

Lemme 1.4. ([14]) *Soit D un sous-ensemble borné, fermé et convexe de l'espace de Banach C(J, E), G une fonction continue sur* $J \times J$ *et f une fonction de* $J \times E \longrightarrow E$ *qui satisfait les conditions de Carathéodory, supposons qu'il existe* $p \in L^1(J, \mathbb{R}_+)$ *telle que, pour chaque* $t \in J$ *et chaque ensemble borné* $B \subset E$*, on a :*

$\lim\limits_{h \to 0^+} \alpha(f(J_{t,h} \times B)) \leq p(t)\alpha(B)$*; ici* $J_{t,h} = [t-h, t] \cap J$*.*

Si V est un sous-ensemble équicontinu de D, en suite

$\alpha(\{\int_J G(s,t) f(s, y(s))ds : y \in V\}) \leq \int_J G\|(t,s)\| p(s)\alpha(V(s))ds.$

Théorème 1.3. ([10]) *Soit Ω un sous ensemble non vide, borné, fermé et convexe de l'espace E et soit :*

$\varphi : \Omega \longrightarrow \Omega$ est cartographie continue. Existe constant $k \in [0,1]$ tel que $\mu(\varphi X) \leq k\mu(X)$.

1.4 Quelques théorèmes de point fixe

Dans cette section, nous allons juste nous concentrer sur plusieurs théorèmes du point fixe que nous appliquerons dans l'étude de l'existence des solutions aux problèmes proposés.
Dans ce section on présente la théorème de Darbo et quelques ses généralisations qui étude l'existence du point fixe des applications continues sur un sous-ensemble non vides, bornées, fermées et convexes des espaces de Banach. Maintenant nous rappelons le théorème de point fixe classique théorème pour les applications lipschitziennes dans le contexte de la mesure de non compacité.

Théorème 1.4. *(**Brouwer**)*([5])

Soit A un sous-ensembles non vide, fermé, borné et convexe de $\mathbb{R}^n$ et $n \geq 1$. Si l'application $f : A \longrightarrow A$ est continue, alors, F admet au moins un point fixe dans A.

Théorème 1.5. *(**Schauder**)*([5])

Soit X un espace de Banach réel ; A une partie non vide, convexe, fermé et borné de X. Si l'application $f : A \longrightarrow A$ est compacte, alors f admet au moins un point fixe dans A.

Théorème 1.6. *(**Darbo**)* ([9])

Soient Ω un sous-ensemble non vide borné, fermé et convexe d'espace de Banach E et $T : \Omega \longrightarrow \Omega$ est une fonction continue et μ est une mesure de non-compacité définie sur E. Supposons qu'il existe une constante $K \in [0,1]$ telle que :

$$\mu(Tx) \leq K\mu(x).$$

Pour tout sous-ensemble non vide de Ω. Alors admet un point fixe dans Ω.

Théorème 1.7. ***(de Darbo généralisé) :*** ([1])

Soient Ω un sous-ensemble non vide, fermé, borné et convexe d'espace de Banach E et $T : \Omega \longrightarrow \Omega$ est un opérateur continu satisfait l'inégalité suivant :

$$\mu(Tx) \leq \varphi(\mu(Tx)).$$

Pour tout sous-ensemble non vide x de Ω, où $\varphi : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ est une fonction croissante telle que : $\lim_{n \longrightarrow +\infty} \varphi^n(t) = 0$ pour $t \geq 0$ alors T admet au moins un point fixe dans Ω.

Théorème 1.8. ([1])

Soient Ω un sous-ensemble non vide, borné, fermé et convexe d'espace de Banach E et $T : \Omega \longrightarrow \Omega$ est un opérateur continu tel que :

$$\|Tx - Ty\| \leq \varphi(\|x - y\|)$$

Pour tout $x, y \in \Omega$, ou $\varphi : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ est une fonction croissante avec, pour $t \geq 0$

Alors T admet un point fixe dans Ω.

preuve. Soit $\mu : M_E \longrightarrow \mathbb{R}_+$ est une définition définie par la formule :

$$\mu(x) = diam\ x$$

où

$$diam\ x = \sup\{\|x - y\| : x, y \in X\}.$$

Représente le diamètre de X.

On voit facilement que μ est une mesure de non-compacité dans espace E.

Plus de remarque que depuis la fonction φ est croissante, puis en vue de on a :

$$\begin{aligned}\sup_{x,y \in x} \|Tx - Ty\| &\leq \sup_{x,y \in x} \varphi(\|x - y\|) \\ &\leq \varphi(\sup_{x,y \in x} \|x - y\|)\end{aligned}$$

Cela donne :

$$\mu(Tx) \leq \varphi(\mu(x))$$

Après l'application de théorème, la preuve se termine dans ce qui suit, nous montrons que l'hypothèse en distant que :

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \varphi_n(t) = 0, t \geq 0.$$

Peut être remplacer par d'autre exigence pratique. $\square$

Lemme 1.5. ([1]) *Soit $\varphi : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ une fonctions croissante et semi-continue supérieurement alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

- ***i)*** $\lim_{n \longrightarrow +\infty} \varphi_n(t) = 0$*, pour tout* $t > 0$.

- ***ii)*** $\varphi(t) < t$*, pour tout* $t > 0$.

Théorème 1.9. *(**Sadovski**)* ([3])

Soit A un sous ensemble non vide, borné, fermé et convexe d'un espace de Banach X et soit $T : A \longrightarrow A$ une application continue. Si T est condensant, alors T admet au moins un point fixe.

Théorème 1.10. *(**Mönch**)*([4])

Nous présentons le théorème du point fixe de Mönch, qui a été particulièrement utile pour établir l'existence des solutions aux problèmes des limites non linéaires dans les espaces de Banach .

Théorème 1.11. ***(Mönch)***([7])

Soit Ω un sous-ensemble non vide, fermé, borné et convexe d'espace de Banach E telle que $0 \in \Omega$, et soit

$T : \Omega \longrightarrow \Omega$ une applications continue. Si l'application

$$V = convT(v)$$

où

$$V = T(v) \cup \{0\} \Rightarrow \alpha(v) = 0$$

est vérifie pour tout sous-ensemble V de Ω, où α est une mesure de Kuratowski, alors T admet un point fixe dans Ω.

CHAPITRE 2

LA MESURE DE NON COMPACITÉ

Introduction

Dans ce chapitre, nous considérons les notions de base liées aux mesures de non compacité et les opérateurs condensant. Nous définissons et étudier en détail des définitions principales de Kuratowski et de Hausdorff, on donne des certains exemples.

2.1 Notions générales de la mesure de non compacité

2.1.1 Définitions et propriétés

Définition 2.1. *Soient E un espace de Banach et $(A, \leq)$ un ensemble partiellement ordonné. Une fonction $\Psi : P(E) \to A$, s'appelle une mesure de non compacité si pour tout Ω borné de E*

$$\Psi(\overline{conv}\Omega) = \Psi(\Omega)$$

2.1.2 Exemple de mesure de non compacité

Exemple 2.1. *Soient E un espace de Banach et Ψ_1, Ψ_2 deux fonctions telle que :*

$$\Psi_1(\Omega) = \begin{cases} 0, & si\ \Omega \text{ est totalement borné} \\ 1, & sinon \end{cases}$$

et

$$\Psi_2 = diam(\Omega)$$

Sont deux mesures de non compacité notons que si E est de dimension infini alors Ψ_1 n'est pas continue par rapport à la topologie usuelle sur l'ensemble où elle prend ses valeurs, (la droite réelle). Il est aussi clair que Ψ_2 n'est pas une mesure régulière de non compacité .
En effet, si $\Omega = \{x, y \in E,\ x \neq y\}$
alors : $diam\ (\Omega) \neq 0$ mais cet ensemble est totalement bornée (finie).

Exemple 2.2. *On considère un autre exemple de mesure de non compacité dans l'espace des fonctions continues $C([a,b],E)$. Pour $\Omega \subset C([a,b],E)$,*
on pose :

$$\varphi(\Omega) = \sup_{t\in[a,b]} x(\Omega(t))$$

Où x est la mesure de non compacité de Hausdorff dans E et $\Omega(t)$=$\{y(t),\ y \in \Omega,\ t \in [a,b]\}$, la on peut vérifier les propriétés habituelles des mesures de non compacité sauf la régularité .

2.1.3 La mesure de non compacité faible de De Blasi :

E un espace de Banach, M_E la famille de toutes les parties non vides bornées de E et Γ_E un sous ensemble de M_E, soit $\bar{B}_r$ la boule fermée dans E de centre 0 et se rayon r.
Dans([6]) De Blasi a introduit l'application suivante :
$V : M_E \to [0, +\infty[$ définie par :

$\varphi(X) = \inf\{r > 0$:il existe un ensemble $Y \in \Gamma_E$ tel que $X \subseteq Y + \bar{B}_r\}$.

Pour tout $X \in M_E$.

Définition 2.2. ([11]) *L'application V est appelée la mesure de non compacité faible de De Blasi .*

Théorème 2.1. *Soit E un espace métrique complet ,une partie $A \subset E$ est relativement compact si et seulement si elle est pré-compacte .*

Quelques propriétés

([13]) Soient $X_1, X_2 \in E$, ψ est MNC alors :

1- La monotonie : Si $X_1 \subseteq X_2$ alors $\psi(X_1) \leq \psi(X_2)$.

2- $\psi(X_1) = 0$ si et seulement si X_1 est relativement faiblement compact.

3- La semi-homogénéité : $\psi(\lambda X_1) = |\lambda|\psi(X_1)$, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.

4- L'invariance par enveloppe convexe : $\psi(conv X_1) = \psi(X_1)$.

5- La semi-additivité algébrique : $\psi(X_1 + X_2) \leqslant \psi(X_1) + \psi(X_2)$.

6- Si $(X_n)_{n\geq 1}$ est une suite décroissante des parties non vide, bornées, et faiblement fermées de E avec :

$\lim\limits_{n\to\infty} \psi(X_n) = 0$, alors $\bigcap_{n=1}^{\infty} X_n$ et $\psi(\bigcap_{n=1}^{\infty} X_N) = 0$

c'est à dire $\bigcap_{n=1}^{\infty} X_n$ est relativement compact.

Une caractérisation de la mesure de non compacité faible de De Blasi dans les espaces L^1 a été donnée par Appell et De Pascale dans([17]) sous une forme plus simple. comme suit

$\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \left\{ \sup_{x\in X} \{ \sup\{ \int_{\Omega_0} |x(t)| dt : \Omega \subseteq \Omega, \text{mes}(\Omega) \leq \varepsilon \}\} \right\}$ pour tout $X \in M_{L^1(\Omega)}$ où mes désigne la mesure de Lebesgue.

Preuve. **1-** Soit $\{x_1^2, \ldots x_n^2\}$ un recouvrement de X_1 tel que $diam(X_i^2) \leq d$ $i = 1, \ldots., n$, alors il est clair que c'est un recouvrement de X_1 et par suite $\psi(X_1) \leq \psi(X_2)$.

2- Supposons que X est relativement compact, alors d'après le théorème $\forall \varepsilon > 0$, il existe une famille finie $\{x_1, ..., x_{N_\varepsilon}\}$ d'élément de E telle que $x \subset \bigcup_{j=1}^{N_\varepsilon} B(x_i, \varepsilon)$ alors $\psi(X) = 0$ Réciproquement, si $\psi(X) = 0$, d'après le même théorème, on conclut que X est relativement compact.

3- Est trivial pour $\lambda = 0$, si $\lambda \neq 0$, alors :

$$\begin{aligned}
v(\lambda X) &= \inf\{d > 0, \lambda X \subset \bigcup_{m}^{i=1} X_i, diam(X) \leq d\} \\
&= \inf\{d > 0, X \subset \frac{1}{\lambda} \bigcup_{m}^{i=1} X_i, |\lambda| diam(\frac{1}{\lambda} X_i) \leq d\} \\
&= \inf\{d > 0, X \subset \frac{1}{\lambda} \bigcup_{m}^{i=1} X_i, |\lambda| diam(\frac{1}{|\lambda|} X_i) \leq d\} \\
&= \inf\{|\lambda| d' > 0, X \subset \frac{1}{\lambda} \bigcup_{m}^{i=1} X_i, |\lambda| diam(\frac{1}{|\lambda|} X_i) \leq d'\}, d' = \frac{1}{\lambda} d \\
&= |\lambda| \psi(X)
\end{aligned}$$

4- Soit $\{x_1^1, ..., X_m^1\}$ un recouvrement de X_1 *et* $\{X_1^2, ..., X_n^2\}$ un recouvrement de X_2, alors les ensembles $X_i^1 + X_j^2$ de plus $diam(X_1 + X2) \leq diam(X_1) + diam(X_2)$ et suite $\psi(X_1 + X_2) \leq \psi(X_1) + \psi(X_2)$(mention contraire) ; et Ω un sous-ensemble de E. $B(x, r)$ et $\bar{B}(x, r)$ désignent, respectivement la boule ouverte et la boule fermé dans E de centre x et de rayon r et $B_E = B(0, 1)$.

□

2.2 MNC de Kuratowski et Hausdorff

Dans cette section on définit la mesure de non compacité de Kuratowski et celle de Hausdorff et on donne leurs propriétés de base. Dans toute les suites, E désigne un espace de Banach, et Ω un sous-ensemble de E. $B(x, r)$ et $\bar{B}(x, r)$ désignent, respectivement la boule ouverte et la boule fermé dans E de centre x et de rayon r et $B_E = B(0, 1)$.

2.2.1 La mesure de Kuratowski

Définition 2.3. ([11]) *La mesure de non compacité de Kuratowski de l'ensemble Ω, notée $\alpha(\Omega)$ est l'inférieur des nombres $d > 0$ tel que Ω admet un recouvrement fini par des ensembles de diamètre inférieur à d, i.e.*

$$\alpha(\Omega) = \inf\{d > 0, \Omega = \bigcap_{i=1}^{n} \Omega_i, telque \delta(\Omega_i) \leq d\}$$

2.2.2 La mesure de Hausdorff

Définition 2.4. *Soit E un espace normé un ensemble $S \subset E$ est appelé un ε-réseau de Ω si :*

$$\Omega \subset S + \varepsilon \bar{B_E} = S + \varepsilon b, s \in S, b \in \bar{E}$$

.

Définition 2.5. *La mesure de non compacité de Hausdorff de l'ensemble Ω, notée $X(\Omega)$ est l'inférieur des nombres ε tel que Ω admet un ε-réseau finie dans E, i.e. $X(\Omega)$=*inf*$\{\varepsilon > 0$, tel que $\exists$ S fini de E, $\Omega \subset S + \varepsilon \bar{B_E}\}$*

Remarque 2.1. *Dans le cas où Ω est un sous-ensemble non vide et non borné, alors :*
$\alpha(\Omega) = X(\Omega) = \infty$ les deux mesures de non compacité de Kuratowski et de Hausdorff sont liées entre elles par le théorème suivant :

Théorème 2.2. *Soient α et X les mesures de non-compacité de Kuratowski et de Hausdorff et Ω un sous ensemble d'un espace de Banach E alors :*

$$X(\Omega) \leq \alpha(\Omega) \leq 2X(\Omega)$$

Preuve. Les inégalités elles-mêmes sont des conséquences des remarques évidentes suivantes :

1- Si $\{X_1, ...X_m\}$ est un ε-réseau de Ω alors$\{\Omega \cup (x_k + \varepsilon B)\}_{k=1}^{m}$, est une couverture de Ω par des ensembles de diamètre 2ε.

2- Si est un recouvrement de Ω avec $diam\Omega_k \leq d$ et si $X_k \in \Omega_k$, alors $\{X_1, ...X_k\}$ est un d-réseau de Ω.

La netteté de la deuxième inégalité découle du théorème l'exemple suivant montre que la première inégalité également nette : prenons pour E l'espace C_0 des suites des nombres qui convergent vers zéro, de norme $\|x\| = \sup|x_i|$ et $\Omega = \{c_k\}_{k=1}^{\infty}$, soit la base standard de C_0. Puisque le diamètre de tout ensemble contenant plus d'un élément est égal à 1, $\alpha(\Omega) = 1$.

D'autre part, $X(\Omega) = 1$ car la distance à tout ensemble infini un sous-ensemble de Ω à tout élément de C_2 n'est pas inférieur à 1.

Il faut mentionner ici que pour certains espaces E l'inégalité $X(\Omega) \leq \alpha(\Omega)$ peut être améliorer par exemple, on peut montrer que pour l'espace ℓ_p on a

$$^{n}\sqrt{2}X(\Omega) \leq \alpha(\Omega).$$

Démontrons une autre propriété importante des MNCs α et X.

□

2.2.3 Les propriétés élémentaires des mesures de non-compacité de Kuratowski et de Hausdorff

Soient $\Omega, \Omega_1, \Omega_2 \subset E$, on note par Ψ la mesure de non-compacité de Kuratowski ou de Hausdorff on a les propriétés suivantes :

a- Régularité : $\Psi(\Omega) = 0$ si est seulement si Ω est totalement borné.

b- Non singularité : si pour tout a $\in E$,

$$\Omega \in P(E), \Psi(a \cup \Omega) = \Omega$$

c- $\Omega_1 \subset \Omega_2 \Rightarrow \Psi(\Omega_1) \leq \Psi(\Omega_2)$

d- Semi-additivité :

$$\Psi(\Omega_1 \cup \Omega_2) = \max\{\Psi(\Omega_1), \Psi(\Omega_2)\}$$

e- Semi-additivité algébrique :

$$\Psi(\Omega_1 + \Omega_2) \leq \Psi(\Omega_1) + \Psi(\Omega_2)$$

f- Lipschitzité :

$$|\Psi(\Omega_1) - \Psi(\Omega_2)| \leq L_{\Psi p(\Omega_1, \Omega_2)}$$

où

$$L_\Psi = \begin{cases} 1 & si \ \Psi = x \\ \\ 2 & si \ \Psi = \alpha \end{cases}$$

g- Continuité : pour tout $\Omega \subset E$ et pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que pour tout Ω_1 satisfaisant $p(\Omega, \Omega_1) < \delta$ on a $|\Psi(\Omega) - \Psi_1| < \varepsilon$

h- Semi-homogénéité : $\Psi(t\Omega) = |t|\Psi(\Omega)$, pour tout réel t.

i- Invariance par translation :

$$\Psi(\Omega + x_0) = \Psi(\Omega)$$

pour tout $x_0 \in E$

Maintenant on donne une propriété importante vérifiée par les mesures de Kuratowski et Hausdorff cette propriété justifie en un sens la définition générale d'une mesure de non compacité introduire par Sadovski

Preuve. On démontre cette proposition seulement pour la MNC α la preuve est similaire pour X

a- Supposons que Ω est relativement compact, alors d'après le théorème, $\forall > 0$, il existe une famille finie $\{X_1, ..., X_{N_\varepsilon}\}$ d'élément de E tel que $\Omega \subset \bigcup_{j=1}^{N_\varepsilon} B(x_j, \varepsilon)$ alors $\Psi(\Omega) = 0$, d'après le même théorème, on conclut que Ω est relativement compact.

b- Tout singleton est relativement compact.

c- Soit $\{\Omega_1^2,...,\Omega_n^2\}$ un recouvrement de Ω_2 tel que $diam(\Omega_i^2) \leq d$, $i = 1,...,n$, alors il est clair que c'est un recouvrement de Ω_1 et par suite $\Psi(\Omega_1) \leq \Psi(\Omega_2)$.

d- Posons $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ et $a = max\{\Psi(\Omega_1), \Psi(\Omega_2)\}$; comme $\Omega_i \subset \Omega$, $i = 1,2$, d'après la monotonie de Ψ on aura $\Psi(\Omega_i) \leq \Psi(\Omega)$, donc $a \leq \Psi(\Omega)$ réciproquement, montrons que $\Psi(\Omega) \leq a$ pour tout $\varepsilon > 0$, et pour tout Ω_1, Ω_2 il existe un recouvrement $\{\Omega_1^i,...,\Omega_{ni}^i\}$ de Ω_i tel que $diam(\Omega_j^i) \leq \Psi(\Omega_i) + \varepsilon \leq a + \varepsilon$, pour $i = 1,2$ et $j = 1,...,n_i$ remarquons que ces ensembles Ω_j^i forment un recouvrement de Ω, alors $\Psi(\Omega) \leq a + \varepsilon$, et par suite $\Psi(\Omega) \leq a$ puisque ε est arbitraire .

h- Est trivial pour $t = 0$, si $t \neq 0$, alors :

$$\begin{aligned}
\Psi(t\Omega) &= \inf\{d > 0 : t\Omega \subset \bigcup_{i=1}^{m} \Omega_i, diam(\Omega_i) \leq d\} \\
&= \inf\{d > 0 : \Omega \subset \bigcup_{i=1}^{m} \frac{1}{t}\Omega_i, |t| diam(\frac{1}{t}\Omega_i) \leq d\} \\
&= \inf\{d > 0 : \Omega \subset \bigcup_{i=1}^{m} \frac{1}{t}\Omega_i, diam(\frac{1}{t}\Omega_i) \leq \frac{1}{|t|} d\} \\
&= \inf\{|t| d' > 0 : \Omega \subset \bigcup_{i=1}^{m} \frac{1}{t}\Omega_i, diam(\frac{1}{t}\Omega_i) \leq d'\},
\end{aligned}$$

$$d' = \frac{1}{|t|} d$$

$$= |t|\Psi(\Omega)$$

e- Soit $\{\Omega_1^1,...\Omega_m^1\}$ un recouvrement de Ω_1 et $\{\Omega_1^1,...\Omega_n^1\}$ un recouvrement de Ω_2 alors les ensembles $\Omega_i^1 + \Omega_j^2$ forment un recouvrement de $\Omega_1 + \Omega_2$, de plus $diam(\Omega_1 + \Omega_2) \leq diam(\Omega_1) + diam(\Omega_2)$ et par suite $\Psi(\Omega_1 + \Omega_2) \leq \Psi(\Omega_1) + \Psi(\Omega_2)$.

i- La propriété se déduit du fait que $diam(\Omega + x_0) = diam(\Omega)$.

$\square$

Théorème 2.3. *Les mesures de non compacités de Kuratowski et de Hausdorff sont invariantes par passage à la fermeture et à l'enveloppe convexe, i.e,*

$$\Psi(\Omega) = \Psi(\bar{\Omega}) = \Psi(C_0\Omega)$$

Théorème 2.4. *Les mesures de non compacité de Kuratowski et de Hausdorff vérifient les inégalités suivants :*

$$X(\Omega) \leq \alpha(\Omega) \leq X(\Omega)$$

En dimensions infinie, ces inégalités sont strictes .

2.2.4 Expression de la mesure de Hausdorff dans un espace de Banach séparable

Théorème 2.5. *Soit E un espace de Banach séparable et $\{E_m\}_{m=1}^{\infty}$ une suite de sous espace de dimension finie de E tel que :*

$$E_m \subseteq E_{m+1}, m = 1, 2, ...$$

et

$$\bar{\bigcup_{m=1}^{\infty}} E_m = E$$

alors la mesure de non compacité de Hausdorff d'un ensemble borné $\Omega \subset E$ peut être calculée par :

$$X(\Omega) = \lim_{m \to \infty} d_*(\Omega, E_m)$$

où

$$d_*(\Omega, E_m) = \sup_{x \in \Omega} d(x, E_m)$$

est la déviation de l'ensemble Ω de sous espace E_m

2.2.5 La mesure de non compacité de Hausdorff dans les espaces ℓ_p, C_0, C, $L_p$et L_∞

La mesure de non compacité de Hausdorff dans L_p et C_0

Théorème 2.6. *Dans l'espace $\ell_p(resp.C_0)$ des suites de $p^{ème}$, puissance sommable (resp. des suites convergentes vers zéro), la mesure de non compacité X est donnée par la formule*

$$X(\Omega) = \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\Omega} \|(I - p_n)x\|$$

où p_n est la projection sur l'espace vectoriel engendré par les n premiers vecteurs de la base canonique de ℓ_p (resp.C_0)

La mesure de non compacité de Hausdorff dans C[a,b]

Théorème 2.7. *Dans l'espace $C[a,b]$ des fonctions continues à valeurs réelles définie sur $[a,b]$, la mesure de non compacité X d'un ensemble borné Ω peut être donnée par la formule :*

$$X(\Omega) = \frac{1}{2} \lim_{\delta\to 0} \sup\nolimits_{x\in\Omega} \max_{0\leq r\leq\delta} \|x - x_r\|$$

où x_r est la τ-translaté de la fonction x :

$$x_r(t) = \begin{cases} x(t+\tau), & si\ a \leq t \leq b-\tau \\ x(b), & si\ b-\tau \leq t \leq b \end{cases}$$

2.3 Application μ–contraction

Soient E et F deux espaces de Banach .

Définition 2.6. ([3][4]) *Soit $f : E \longrightarrow F$ une application continue et bornée sur chaque sous ensembles bornée de E on dit que f est :*

1- μ-lipschitzienne avec la constante $K \geq 0$, si :

$$\mu(f(\Omega)) \leq K\mu(\Omega), \forall \Omega \in M_E$$

.

2- *Complètement continue si elle est μ-lipschitzienne avec $K = 0$.*

3- *μ -contraction si elle est μ-lipschitzienne avec $K < 1$.*

4- *Condensante si elle est μ-lipschitzienne avec $K = 1$ et $\mu(f(\Omega)) < \mu(\Omega)$, pour tout Ω bornée et non relativement compact ($\mu(\Omega) > 0$).*

Remarque 2.2. *Tout application complètement continue est une application μ-contraction, ainsi toute application μ-contraction est une application condensant.*

Définition 2.7. *Supposons que M est un sous-ensemble non vide d'un espace de Banach E et $T : M \longrightarrow E$ est un opérateur continue, on dit que T satisfait la condition Darbo (avec une constante $K \geq 0$) par rapport à une mesure de non-compacité si, pour tout sous-ensemble borné X de M l'inégalité suivante est vraie :*

$$\mu(TX) \leq K\mu(X)$$

CHAPITRE 3

L'ÉTUDE D'UN PROBLÈME À CONDITIONS INITIALES

Introduction

Dans ce chapitre, on étude l'existence de solutions du problème à valeurs initiales suivant :

$$^cD^r y(t) = f(t,y), \text{ pour chaque } t \in J = [0,T], 1 < r < 2, \tag{3.1}$$

$$y(0) = y_0, y'(0) = y_1, \tag{3.2}$$

où

$^cD^r$ est la dérivée de Caputo, $f : J \times E \longrightarrow E$ est une fonction et E est une espace de Banach.

3.1 L'existence et l'unicité

Tout d'abord, nous définissons ce que nous entendons par une solution de problème (3.1) (3.2).

Définition 3.1. *Une fonction $y \in AC^1(J,E)$ est dite solution du problème (3.1) (3.2) si y satisfait l'équation ${}^cD^r y(t) = f(t, y(t))$ sur J, et les conditions $y(0) = y_0$ et $y'(0) = y_1$.*

Lemme 3.1. *Soit $1 < r < 2$ et soit $h : J \longrightarrow E$ est continue. Une fonction y est dite une solution de l'équation intégrale*

$$y(t) = y_0 + y_1(t) + \frac{1}{\Gamma(r)} \int_0^t (t-s)^{r-1} h(s) ds \tag{3.3}$$

si et seulement si y est une solution de problème Cauchy

$${}^cD^r y(t) = h(t), \quad t \in [0, T], \tag{3.4}$$

$$y(0) = y_0 \qquad y'(0) = y_1 \tag{3.5}$$

Preuve. D'après le lemme 1.3 on a c_0 et c_1 de E, nous réduisons (3.4)–(3.5) à une équation intégrale équivalente

$$y(t) = I^r h(t) + c_0 + c_1 t + \frac{1}{\Gamma(r)} \int_0^t (t-s)^{r-1} h(s) ds + c_0 + c_1 t$$

pour certaines constantes $c_0, c_1 \in E$. Les conditions (3.5) donnent $c_0 = y_0, c_1 = y_1$.
On obtient donc (3.3). Réciproquement, si y satisfait l'équation (3.3), les équations (3.4)–(3.5) sont vérifiées.

□

Pour établir le résultat concernant l'existence de solutions de (3.1)–(3.2), nous imposons des conditions appropriées sur les fonctions impliquées dans ce problème. A savoir, nous supposons que

Théorème 3.1. *On suppose les hypothèses H_1, H_2 et H_3 soient vérifies*

$(H1) f : J \times E \longrightarrow E$ satisfait aux conditions Carathéodory

(H2) Il existe $p \in L^1(J, \mathbb{R}_+) \cap C(J, \mathbb{R}_+)$, tel que :

$$\left\|f(t,y)\right\| \leq p(t)\left\|y\right\|, \text{ pour } t \in J \text{et chacun } y \in E;$$

(H3) Pour chaque $t \in J$ et chaque ensemble borné $B \subset E$, on a :

$$\lim_{h \to 0^+} \alpha(f(J_{t,h} \times B)) \leq p(t)\alpha(B); \text{ ici } J_{t,h} = [t-h,t] \cap J$$

Théorème 3.2. *Supposons que les conditions (H1)–(H3) sont vérifies et soit*

$p^* = \sup_{t \in J} p(t)$. tel que :

$$\frac{p^* T^r}{\Gamma(r+1)} < 1 \tag{3.6}$$

Alors le problème (3.1)-(3.2) a au moins une solution.

Preuve. On transforme le problème (3.1)-(3.2) en un problème de point fixe. Considérons l'opérateur N :C(J,E) défini par

$$N(y)(t) = y_0 + y_1(t) + \frac{1}{\Gamma(r)} \int_0^t (t-s)^{r-1} f(s, y(s)) ds$$

Clairement, les points fixes de l'opérateur N sont les solutions du problème (3.1)-(3.2). Soit

$$r_0 \geq \frac{\|y_0\| + \|y_1\| T}{1 - \frac{p^* T^r}{\Gamma(r+1)}} \tag{3.7}$$

et considérons

$$D_{r_0} = \{y \in C(J,E) : \|y\|_\infty \leq r_0\}.$$

Clairement, l'ensemble D_{r_0} est fermé, borné et convexe. Nous allons montrer que N satisfait les hypothèses du Théorème1.2. La preuve sera donnée en trois étapes.

Étape 1 : N est continue.

Soit (y_n) une suite telle que $y_n \longrightarrow y$ dans C(J, E). Ensuite pour chaque $t \in J$,

$$\begin{aligned}\left\|N(y_n(t)-N(y)(t)\right\| &= \left\|\frac{1}{\Gamma(r)}\int_0^t (t-s)^{r-1}[f(s,y_n(s))-f(s,y(s))]ds\right\| \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(r)}\int_0^t (t-s)^{r-1}\left\|f(s,y_n(s))-f(s,y(s))ds\right\|\end{aligned}$$

Depuis F est de type Carathéodory, alors par le théorème de convergence dominée de Lebesgue on a

$\|N(y_n)-N(y)\|_\infty \longrightarrow 0$ comme $n \longrightarrow \infty$

Étape 2 : $N(D_{r_0}) \subset D_{r_0}$.

Pour chaque $y \in D_{r_0}$, par (H2) et (3.7), on a, pour chaque $t \in J$,

$$\begin{aligned}\left\|N(y)(t)\right\| &\leq \left\|y_0+y_1 t\right\| + \frac{1}{\Gamma(r)}\int_0^t (t-s)^{r-1}\left\|f(s,y(s))\right\|ds \\ &\leq \left\|y_0\right\| + \left\|y_1\right\|T + \frac{1}{\Gamma(r)}\int_0^t (t-s)^{r-1}P(s)\left\|y(s)\right\|ds \\ &\leq \left\|y_0\right\| + \left\|y_1\right\|T + \frac{r_0}{\Gamma(r)}\int_0^t (t-s)^{r-1}P(s)ds \\ &\leq \left\|y_0\right\| + \left\|y_1\right\|T + \frac{r_0 p^* T^r}{\Gamma(r+1)} \\ &\leq r_0.\end{aligned}$$

Étape 3 : $N(D_{r_0})$ est borné et équicontinu.

D'après l'étape 2, il est évident que $N(D_{r_0}) \subset D_{r_0}$, qui est borné. Montrons l'équicontinuité de $N(D_{r_0})$, Soient

$t_1, t_2 \in J, t_1 < t_2$ et $y \in D_{r_0}$. Alors

$$\begin{aligned}
\left\|N(y)(t_2)-N(y)(t_1)\right\| &\leq \left\|y_1t_2-y_1t_1\right\| \\
&+\frac{1}{\Gamma(r)}\left\|\int_0^{t_2}(t_2-s)^{r-1}f(s,y(s))\right. \\
&\left.-\int_0^{t_1}(t_1-s)^{r-1}f(s,y(s))\right\|ds \\
&\leq \left\|y_1\right\|(t_2-t_1) \\
&+\frac{1}{\Gamma(r)}\int_0^{t_1}[(t_2-s)^{r-1}-(t_1-s)^{r-1})]\left\|f(s,y(s))\right\|ds \\
&+\frac{1}{\Gamma(r)}\int_{t_1}^{t_2}(t_2-s)^{r-1}\left\|f(s,y(s))\right\|ds \\
&\leq \left\|y_1\right\|(t_2-t_1) \\
&+\frac{r_0}{\Gamma(r)}\int_0^{t_1}\left[(t_2-s)^{r-1}-(t_1-s)^{r-1}\right]p(s)ds \\
&+\frac{r_0}{\Gamma(r)}\int_{t_1}^{t_2}(t_2-s)^{r-1}p(s)ds.
\end{aligned}$$

comme $t_1 \longrightarrow t_2$, le second nombre de l'inégalité ci-dessus tend vers zéro.

Maintenant, soit V être un sous-ensemble de D_{r_0} tel que $V \subset \overline{conv}(N(v)\cup 0)$. A partir de l'étape 3, le sous-ensemble V est bornée et équicontinue et donc la fonction $v \longrightarrow v(t) = \alpha(V(t))$ est continue sur J. Depuis la fonction $t \longrightarrow y_0 + y_1 t$ est continu sur J, l'ensemble $\overline{y_0 + y_1 t, t \in J} \subset E$ est compacte. En utilisant ce fait, (H3), le lemme 1.4 et les propriétés de la mesure α, on a, pour chaque $t \in J$,

$$\begin{aligned}
v(t) &\leqslant \alpha\left(N(V)(t) \cup \{0\}\right) \\
&\leqslant \alpha(N(V)(t)) \\
&\leqslant \frac{1}{\Gamma(r)} \int_0^t (t-s)^{r-1} p(s) \alpha(V(s)) ds \\
&\leqslant \frac{1}{\Gamma(r)} \int_0^t (t-s)^{r-1} p(s) v(s) ds \\
&\leqslant \|v\|_\infty \frac{1}{\Gamma(r)} \int_0^t (t-s)^{r-1} p(s) ds \\
&\leqslant \|v\|_\infty \frac{P^* T^r}{\Gamma(r+1)}
\end{aligned}$$

Cela signifie que :

$$\|v\|_\infty \leqslant \|v\|_\infty \frac{P^* T^r}{\Gamma(r+1)}$$

D'après 3.6 il s'ensuit que $\|v\|_\infty$, c'est-à-dire $v(t) = 0$ pour chaque $t \in J$, et alors V(t) est relativement compacte dans E. Compte tenu du théorème d'Ascoli-Arzelà, V est relativement compacte dans D_{r_0}.

En appliquant maintenant le théorème 1.2, nous concluons que N a un point fixe solution du problème (3.1)-(3.2). □

CHAPITRE 4

L'ÉTUDE D'UN ÉQUATION INTÉGRALE À CONDITION NON LOCALE

Introduction

Dans ce chapitre on étude l'existence et l'unicité des solution d'un problème à condition non locale.

$$x(t) = f_1(t, x(t)) + \frac{f_2(t, x(t))}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{u(t, \tau, x(t))}{(t-\tau)^{1-\alpha}} d\tau \tag{4.1}$$

$$\mu(x) = \omega_0 + \beta(x) \tag{4.2}$$

Avec

$t \in \mathbb{R}_+$, $\alpha \in [0, 1]$, $f_i : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x(t) = x : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ et $\mu : m_e \to \mathbb{R}_+$

4.1 L'existence

Dans cette section, nous traiterons de l'équation intégrale fonctionnelle de l'ordre fractionnaire (4.1). Cette équation sera étudiée selon les hypothèses suivantes :

(i) La fonction $f_i : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue et il existe une fonction $K_i : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ tel que $|f_i(t,x) - f_i(t,y)| \leq K_i(r)|x-y|$ $(i = 1,2)$

pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ et pour tous x, y où $r \geq 0$ est un nombre arbitrairement fixe. De plus, la fonction $t \to f_i(t,0)$ est un membre de l'espace $BC(\mathbb{R}_+)(i = 1,2)$.

(ii) Pour tout $r > 0$. l'égalité suivante est :

$$\lim_{T\to\infty} \{\sup\{|f_1(t,x) - f_1(s,x)| : t,s \geq T, |x| \leq r\}\} = 0$$

(iii) La fonction $u(t,\tau,x) = u : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue. De plus, il existe une fonction $n(t,\tau) = n : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ étant continue et une fonction $\phi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ continue et non décroissante sur $\mathbb{R}_+$ avec $\phi(0) = 0$ tel que :

$\left|u(t,\tau,x) - u(t,\tau,y)\right| \leq n(t,\tau)\phi(\left|x-y\right|)$

pour tout $t, \tau \in \mathbb{R}_+$ tel que $\tau \leq t$ et pour tout $x, y \in \mathbb{R}_+$.

Dans ce qui suit, on notera $\bar{F}_i$, la constante suivante

$$\bar{F}_i = sup\{|f_i(t,0)| : t \in \mathbb{R}_+\}(i = 1,2)$$

évidemment $\bar{F}_i < \infty$ (i=1,2), compte tenue de l'hypothèse (i)

De plus, notons $\bar{n}(t)$ et $\bar{u}(t)$ les fonction définies sur $\mathbb{R}_+$, de la manière suivante :

$$\bar{n}(t) = \int_0^t \frac{n(t,\tau)}{(t-\tau)^{1-\alpha}} d\tau$$

$$\bar{u}(t) = \int_0^t \frac{|u(t,\tau,0)|}{(t-\tau)^{1-\alpha}} d\tau$$

On a alors le lemme suivant :

Lemme 4.1. *Les fonctions $\bar{n}(t)$ et $\bar{n}(t)$ sont continues sur l'intervalle $\mathbb{R}_+$.*

Preuve. Évidemment, il suffit de prouver notre lemme pour la fonction $n\bar{(}t)$. À cette fin, observons d'abord que cette fonction est bien définie sur $\mathbb{R}_+$.

En effet, si nous fixons arbitrairement $t > 0$, alors la fonction $\tau \longrightarrow n(t,\tau)$ est continue sur l'intervalle [0,t] Par conséquent, la constante $n_t = \sup n(t,\tau) : \tau \in [0,t]$ est finie. Alors nous obtenons

$$\int_0^t \frac{n(t,\tau)}{(t-\tau)^{1-\alpha}} d\tau \leqslant n_t \int_0^t \frac{d\tau}{(t-\tau)^{1-\alpha}} = n_t \frac{t^\alpha}{\alpha} < \infty$$

.

Notre affirmation découle donc des faits bien connus concernant l'intégral incorrecte de Riemann.

Maintenant, fixer arbitrairement $T > 0, \varepsilon > 0$ et $t, s \in [0,T]$ tel que $|t-s| \leq \varepsilon$ sans perte de généralité, nous pouvons supposer que $t < s$.

Ensuite, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
|\bar{n}(s) - \bar{n}(t)| &\leq \left| \int_0^s \frac{n(s,\tau)}{(s-\tau)^{1-\alpha}} d\tau - \int_0^t \frac{n(s,\tau)}{(s-\tau)^{1-\alpha}} d\tau \right| + \left| \int_0^t \frac{n(s,\tau)}{(s-\tau)^{1-\alpha}} d\tau - \int_0^t \frac{n(t,\tau)}{(t-\tau)^{1-\alpha}} d\tau \right| \\
&\leq \int_t^s \frac{n(s,\tau)}{(s-t)^{1-\alpha}} d\tau + \left| \int_0^t \frac{n(s,\tau)}{(s-\tau)^{1-\alpha}} d\tau - \int_0^t \frac{n(t,\tau)}{(s-\tau)^{1-\alpha}} d\tau \right| \\
&+ \left| \int_0^t \frac{n(s,\tau)}{(s-\tau)^{1-\alpha}} d\tau - \int_0^t \frac{n(t,\tau)}{(t-\tau)^{1-\alpha}} \right| \\
&\leq n_s \int_t^s \frac{d\tau}{(s-\tau)^{1-\alpha}} + \int_0^t \frac{|n(s,\tau) - n(t,\tau)|}{(s-\tau)^{1-\alpha}} d\tau + \int_0^t n(t,\tau) \left| \frac{1}{(s-\tau)^{1-\alpha}} - \frac{1}{(t-\tau)^{1-\alpha}} \right| d\tau \\
&\leq n_s \frac{(s-\tau)^\alpha}{\alpha} + \int_0^t \frac{\omega_1^T(n,\varepsilon)}{(s-\tau)^{1-\alpha}} d\tau + n_t \int_0^t \left[\frac{1}{(t-\tau)^{1-\alpha}} - \frac{1}{(s-\tau)^{1-\alpha}} \right] d\tau \\
&\leq n_T \frac{\varepsilon^\alpha}{\alpha} + \omega_1^T(n,\varepsilon) \frac{s^\alpha - (s-t)^\alpha}{\alpha} + n_T \frac{t^\alpha - s^\alpha + (s-t)^\alpha}{\alpha} \\
&\leq n_T \frac{\varepsilon^\alpha}{\alpha} + \frac{T^\alpha}{\alpha} \omega_1^T(n,\varepsilon) + n_T \frac{2(s-t)^\alpha}{\alpha} \\
&\leq 3 n_T \frac{\varepsilon^\alpha}{\alpha} + T^\alpha \frac{\omega_1^T(n,\varepsilon)}{\alpha}
\end{aligned} \tag{4.3}$$

où nous avons défini

$\omega_1^T(n,\varepsilon) = \sup\{|n(s,\tau)| - |n(t,\tau)| : t, s, \tau \in [0,T], \tau \leq t, \tau \leqslant s, |t-s| \leqslant \varepsilon$.

De toute évidence $\omega_1^T(n,\varepsilon) \longrightarrow 0$ comme $\varepsilon \longrightarrow 0$ ce qui est une conséquence de la continuité uniforme de la fonction $n(t,\tau)$ sur l'ensemble

$\Delta_T = \{(t,\tau) : t,\tau \in [0,T], \tau \leqslant t\}$.

En combinaison avec (4.3) , nous concluons que la fonction $\bar{n}$. est continue sur l'intervalle [0,T].

□

Maintenant, nous pouvons formuler notre prochaine hypothèse :

(iv) Les fonctions $\bar{n}(t)$ et $\bar{u}(t)$ disparaissent à l'infini, c'est-à-dire

$\lim_{t\to\infty} \bar{n}(t) = \lim_{t\to\infty} \bar{u}(t) = 0$

Observons que la lumière de Lemme 4.1 et de l'hypothèse (iv) les constantes $\bar{N}$ et $\bar{U}$ sont définies comme suit

$\bar{N} = sup\{\bar{n} : t \in \mathbb{R}_+\}, \bar{U} = sup\{\bar{u} : t \in \mathbb{R}_+\}$ sont finis.

Maintenant, nous sommes prêts à présenter la dernière hypothèse :

(v) Il existe une solution r_0 positive de l'inégalité

$$rk1(r) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}[\bar{N}rk_2(r)\phi(r) + \bar{U}rk_2(r) + \bar{F}_2\bar{N}\phi(r) + \bar{F}_2\bar{U}] + \bar{F}_1 \leqslant r$$

de telle sorte que

$$k_1(r_0) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}(\bar{N}\phi(r_0) + \bar{U})k_2(r_0) < 1.$$

Remarque 4.1. *Observons que si r_0 est une solution positive de la première inégalité à partir de l'hypothèse (v) alors nous pouvons écrire.*

$$k_1(r_0) + \frac{r_0}{\Gamma(\alpha)}[\bar{N}k_2(r_0)\phi(r_0) + \bar{U}k_2(r_0)] \leq r_0 - \frac{1}{\Gamma(\alpha)}[\bar{F}_2\bar{N}\phi(r_0) + \bar{F}_2\bar{U}] - \bar{F}_1.$$

cela implique

$$k_1(r_0) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}(\bar{N}\phi(r_0) + \bar{U})k_2(r_0) \leq 1 - \frac{\bar{F}_2\bar{N}\phi(r_0) + \bar{F}_2\bar{U}}{r_0\Gamma(\alpha)} - \frac{\bar{F}_1}{r_0}$$

Par conséquent, nous obtenons

$$k_1(r_0)+\frac{r_0}{\Gamma(\alpha)}[\bar{N}k_2(r_0)\phi(r_0)+\bar{U}k_2(r_0)]\leq 1$$

En dehors de cela, si nous supposons en outre que l'un des termes $\bar{F}_2\bar{N}\phi(r_0)$, $\bar{F}_2\bar{U}$, $\bar{F}_1$ ne disparaît pas, alors la deuxième inégalité de l'hypothès (V) est automatiquement satisfaite.

Le principal résultat de l'article est contenu dans le théorème suivant.

Théorème 4.1. *Sous les hypothèses $(i)-(v)$, Eq. (4.1) a au moins une solution $x=x(t)$ qui appartient à l'espace $BC(R_+)$ et tend vers une limite à l'infini.*

Preuve. Considérons l'opérateur v défini dans l'espace $BC(R_+)$ par la formule
$(Vx)(t)$=$f_1(t,x(t))+\dfrac{f_2(t,x(t))}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t\dfrac{u(t,\tau,x(t))}{(t-\tau)^{1-\alpha}}d\tau$,$t\in R_+$.
A fin de simplifier nos considérations, nous représentons l'exploitant V dans le formulaire

$$(Vx)(t)=(F_x)(t)+(F_2x)(t)(Ux)(t) \tag{4.4}$$

où F_1 et F_2 sont des opérateurs de superposition générés par les fonctions $F_1(t,x)$ et $F_2(t,x)$ respectivement, alors que U est défini par la formule.

$$(Ux)(t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t\frac{u(t,\tau,x(\tau))}{(t-\tau)^{1-\alpha}}d\tau$$

Observons que, compte tenu de nos hypothèses, pour toute fonction $x\in BC(\mathbb{R}_+)$ les fonctions F_1x et F_2x sont continues sur $\mathbb{R}_+$. Nous montrons que la même assertion vaut également pour la fonction Ux Pour faire ce correctif $T>0$, $\varepsilon>0$. Ensuite, supposons que t, $s\in[0,T]$ sont tels que $|t-s|\leq\varepsilon$. Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que $t<s$. Puis, en vertu des hypothèses imposées, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
|(Ux)(s)-(Ux)(t)| &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left|\int_0^t \frac{u(s,\tau,x(\tau))}{(s-\tau)^{1-\alpha}}d\tau + \int_t^s \frac{u(s,\tau,x(\tau))}{(s-\tau)^{1-\alpha}}d\tau - \int_0^t \frac{u(t,\tau,x(\tau))}{(t-\tau)^{1-\alpha}}\right| \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t \frac{|u(s,\tau,x(\tau))-u(t,\tau,x(\tau))|}{(s-\tau)^{1-\alpha}}d\tau \\
&+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t \left|\frac{u(t,\tau,x(\tau))}{(s-t)^{1-\alpha}} - \frac{u(t,\tau,x(\tau))}{(t-\tau)^{1-\alpha}}\right|d\tau + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_t^s \frac{|u(s,\tau,x(\tau))|}{(s-\tau)^{1-\alpha}}d\tau \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t \omega_1^T(u,\varepsilon,\|X\|)\frac{1}{(s-\tau)^{1-\alpha}}d\tau \\
&+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t [|u(t,\tau,x(\tau))-u(t,\tau,0)|+|u(t,\tau,0)|]\left[\frac{1}{(t-\tau)^{1-\alpha}} - \frac{1}{(s-\tau)^{1-\alpha}}\right]d\tau \\
&+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_t^s \frac{|u(s,\tau,x(t))-u(s,\tau,0)|+|u(s,\tau,0)|}{(s-\tau)^{1-\alpha}}d\tau \\
&\leq \frac{\omega_1^T(u,\varepsilon,\|X\|)}{\Gamma(\alpha)}\frac{s^\alpha-(s-t)^\alpha}{\alpha} \\
&+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t [n(t,\tau)\phi(|x(t)|)+|u(t,\tau,0)|]\left[\frac{1}{(t-\tau)^{1-\alpha}} - \frac{1}{(s-t)^{1-\alpha}}\right]d\tau \\
&+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_t^s \frac{n(s,\tau)\phi(|x(\tau)|)+|u(s,\tau,0)|}{(s-\tau)^{1-\alpha}}d\tau \\
&\leq \frac{\omega_1^T(u,\varepsilon,\|X\|)}{\Gamma(\alpha+1)}t^\alpha + \frac{n_T\phi(\|x\|)+u_T}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t\left[\frac{1}{(t-\tau)^{1-\alpha}} - \frac{1}{(s-t)^{1-\alpha}}\right]d\tau \\
&+ \frac{n_T\phi(\|x\|)+u_T}{\Gamma(\alpha)}\int_t^s \frac{d\tau}{(s-\tau)^{1-\alpha}} \\
&\leq \frac{\omega_1^T(u,\varepsilon,\|X\|)}{\Gamma(\alpha+1)}T^\alpha + \frac{n_T\phi(\|x\|)+u_T}{\Gamma(\alpha+1)}[t^\alpha - s^\alpha + (s-t)^\alpha] + \frac{n_T\phi(\|x\|)+u_T}{\Gamma(\alpha+1)}(s-t)^\alpha \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\left[T^\alpha\omega_1^T(u,\varepsilon,\|X\|)\right] + (s-t)^\alpha[n_T\phi(\|x\|)+u_T] + (s-t)^\alpha[n_T\phi(\|x\|)+u_T]
\end{aligned} \tag{4.5}$$

où nous avons défini

$u_T = sup\{|(t,\tau,0)|\ t,\tau\in[0,T],\tau\leq t\}$,

$\omega_1^T(u,\varepsilon;\alpha) = sup\{\left|u(s,\tau,y)-u(t,\tau,y)\right| : s,t,\tau\in[0,T],\tau\leq t\leq s,|s-t|\leq\varepsilon,\left|y\right|\leq\alpha\}$.

De plus, rappelons que le symbole n_T a été introduit dans la preuve de Lemme 4.1

Observer que l'invocation de la continuité uniforme de la fonction u(t, s, y) sur le jeu $[0,T]\times[0,T]\times[-\|x\|,\|x\|]$ nous avons qui $\omega_1^T(u,\varepsilon;\|x\|)\longrightarrow 0$ comme $\varepsilon\longrightarrow 0$

De plus, en gardant à l'esprit l'estimation (4.5), nous obtenons

$$\omega_1^T(U,\varepsilon) \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\{T^\alpha \omega_1^T(u,\varepsilon;\|X\|) + 2\varepsilon^\alpha\,[n_T\phi(\|x\|) + u_T]\}. \tag{4.6}$$

En liant l'inégalité(4.6) au fait établi ci-dessus, nous concluons que la fonction U_x est continue sur l'intervalle [0, T] pour tout $T > 0$

Cela donne la continuité de U_x on $\mathbb{R}_+$.

Enfin, en combinant la continuité des fonctions F_1x, F_2x et U_x nous en déduisons que la fonction $V_x$est continue sur $\mathbb{R}_+$.

Maintenant, l'ensemble d'une fonction $x \in BC(\mathbb{R}_+)$, pour une réparation arbitraire $t \in \mathbb{R}_+$ nous obtenons :

$$\begin{aligned}
|(Vx)(t)| &\leq |f_1(t,x(t)) - f_1(t,0)| + |f_1(t,0)| \\
&+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)}[|(Vx)(t)||f_2(t,x(t)) - f_2(t,0)| + |f_2(t,0)|]\int_0^t \frac{|u(t,\tau,x(t)) - u(t,\tau,0)| + |u(t,\tau,0)|}{(t-\tau)^{1-\alpha}}d\tau \\
&\leq k_1(\|x\|)|x(t)| + |f_1(t,0)| + \frac{k_2(\|x\|)|x(t)| + |f_2(t,0)|}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t \frac{n(t,\tau)\phi(|x(\tau)|) + |u(t,\tau,0)|}{(t-\tau)^{1-\alpha}}d\tau \\
&\leq \|x\|k_1(\|x\|) + \bar{F}_1 + \frac{\|x\|k_2(\|x\|)\phi(\|x\|)}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t \frac{n(t,\tau)}{(t-\tau)^{1-\alpha}}d\tau + \frac{\|x\|k_2(\|x\|)}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t \frac{|u(t,\tau,0)|}{(t-\tau)^{1-\alpha}}d\tau \\
&+ \frac{\bar{F}_2\phi(\|x\|)}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t \frac{n(t,\tau)}{(t-\tau)^{1-\alpha}}d\tau + \frac{\bar{F}_2}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t \frac{|u(t,\tau,0)|}{(t-\tau)^{1-\alpha}}d\tau \leq \|x\|k_1(\|x\|) \\
&+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\Big[\|x\|k_2(\|x\|)\phi(\|x\|)\bar{n}(t) + \|x\|k_2(\|x\|)\bar{u}(t) + \bar{F}_2\phi(\|x\|)\bar{n}(t) + \bar{F}_2\bar{u}(t)\Big] + \bar{F}_1
\end{aligned} \tag{4.7}$$

où les fonctions $\bar{n}(t)$ et $\bar{u}(t)$ ont été définies précédemment.

Maintenant, en gardant à l'esprit les hypothèses (iii) et (iv), l'estimation (4.7) nous permet d'obtenir que la fonction Vx est limitée à $\mathbb{R}_+$.

Établir un lien entre ce fait et la continuité prouvée de la fonction Vx sur $\mathbb{R}_+$ nous en déduisons que Vx est un membre de l'espace $BC(\mathbb{R}_+)$. Simultanément cela montre que l'opérateur V transforme l'espace $BC(\mathbb{R}_+)$ en lui-même.

En dehors de cela, observer que les rendements estimés (4.7)

$$\|Vx\| \leq \|x\|k_1(\|x\|) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\Big[\|x\|k_2(\|x\|)\phi(\|x\|)\bar{N} + \|x\|k_2(\|x\|)\bar{U} + \bar{F}_2\phi(\|x\|)\bar{N} + \bar{F}_2\bar{U}\Big] + \bar{F}_1.$$

En combinant cette estimation avec l'hypothèse (V), nous en déduisons qu'il existe un numéro $r_0 > 0$, de sorte que l'opérateur V transforme la balle Br_0 en elle-même et la deuxième inégalité de l'hypothèse (V) est satisfaite.

Dans ce qui suit, nous montrons que l'opérateur V est continu sur la boule Br_0 Pour ce faire, fixons un nombre $\varepsilon > 0$ et prenez $x, y \in Br_0$ avec $\|x-y\| \leq \varepsilon$. Puis, en gardant à l'esprit nos hypothèses, pour un fixé arbitrairement $t \in \mathbb{R}_+$ nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\left|(Vx)(t)-(Vy)(t)\right| \leq & \left|f_1(t,x(t))-f_1(t,y(t))\right| \\
& + \left|\frac{f_2(t,x(t))}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t \frac{u(t,\tau,x(\tau))}{(t-\tau)^{1-\alpha}}d\tau - \frac{f_2(t,y(t))}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t \frac{u(t,\tau,x(\tau))}{(t-\tau)^{1-\alpha}}d\tau\right| \\
& + \left|\frac{f_2(t,y(t))}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t \frac{u(t,\tau,x(t))}{(t-\tau)^{1-\alpha}}d\tau - \frac{f_2(t,y(t))}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t \frac{u(t,\tau,y(\tau))}{(t-\tau)^{1-\alpha}}d\tau\right| \\
& \leq k_1(r_0)\left|x(t)-y(t)\right| + \frac{\left|f_2(t,x(t))-f_2(t,y(t))\right|}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t \frac{|u(t,\tau,x(\tau))|}{(t-\tau)^{1-\alpha}}d\tau \\
& + \frac{\left|f_2(t,y(t))-f_2(t,0)\right|+|f_2(t,0)|}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t \frac{|u(t,\tau,x(\tau))-u(t,\tau,0)|}{(t-\tau)^{1-\alpha}}d\tau \\
& \leq k_1(r_0)\varepsilon + \frac{k_2(r_0\varepsilon)}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t \frac{|u(t,\tau,x(\tau))-u(t,\tau,0)|+|u(t,\tau,0)|}{(t-\tau)^{1-\alpha}}d\tau \\
& + \frac{k_2(r_0)\left|y(t)\right|+|f_2(t,0)|}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t \frac{n(t,\tau)\phi(\left|x(\tau)-y(\tau)\right|)}{(t-\tau)^{1-\alpha}}d\tau \\
& \leq k_1(r_0)\varepsilon + \frac{k_2(r_0)\varepsilon}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t \frac{n(t,\tau)\phi(|x(\tau)|)+|u(t,\tau,0)|}{(t-\tau)^{1-\alpha}}d\tau \\
& + \frac{r_0k_2(r_0)+\bar{F}_2}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t \frac{n(t,\tau)\phi(\varepsilon)}{(t-\tau)^{1-\alpha}}d\tau \\
& \leq \varepsilon k_1(r_0) + \frac{\varepsilon k_2(r_0)}{\Gamma(\alpha)}\left[\phi(r_0)\int_0^t \frac{n(t,\tau)}{(t-\tau)^{1-\alpha}}d\tau + \frac{|u(t,\tau,0)|}{(t-\tau)^{1-\alpha}}d\tau\right] \\
& + \frac{r_0k_2(r_0)+\bar{F}_2}{\Gamma(\alpha)}\phi(\varepsilon)\int_0^t \frac{n(t,\tau)}{(t-\tau)^{1-\alpha}}d\tau \\
& \leq \varepsilon k_1(r_0) + \frac{\varepsilon k_2(r0)}{\Gamma(\alpha)}(\bar{N}\phi(r_0)+\bar{U}) + \frac{r_0k_2(r_0)+\bar{F}_2}{\Gamma(\alpha)}\phi(\varepsilon)\bar{U}.
\end{aligned}$$

Dans ce qui suit, nous étudierons le comportement de l'opérateur V.

Dans ce qui suit, nous allons étudier le comportement de l'opérateur V vis-à-vis de la mesure de non-compacité μ définie par la formule 4.2.

À cette fin, prenons un sous-ensemble non vide X de la boule Br_0 Fixons arbitrairement $\varepsilon > 0, T > 0$ et $x \in X$ Ensuite, prenons des numéros arbitraires $t, s \in [0, T]$ tel que $|t-s| \leq \varepsilon$ Ensuite, en utilisant la représentation (4.4) et en gardant à l'esprit les estimations (4.5) et (4.6), nous obtenons :

$$\begin{aligned}
|(Vx)(s)-(Vx)(t)| &\leq |(F_1x)(s)-(F_1)(t)| \\
&+|(F_2x)(s)(Ux)(s)-(F_2x)(t)(Ux)(s)|+|(F_2x)(t)(Ux)(s)-(F_2x)(t)(Ux)(t)| \\
&\leq |f_1(s,x(s))-f_1(s,x(t))|+|f_1(s,x(t))-f_1(t,x(t))| \\
&+|(Ux)(s)|[|f_2(s,x(s))-f_2(s,x(t))|+|f_2(s,x(t))-f_2(t,x(t))|] \\
&+[|f_2(t,x(t))-f_2(t,0)|+|f_2(t,0)|]|(Ux)(s)-(Ux)(t)| \\
&\leq k_1(r_0)|x(s)-x(t)|+\omega_1^T(f_1,\varepsilon;r_0) \\
&+\frac{k_2(r_0|x(s)-x(t)|\omega_1^T(f_1,\varepsilon;r_0)}{\Gamma(\alpha)}\int_0^s\frac{|u(s,\tau,x(\tau))-u(s,\tau,0)|+|u(s,\tau,0)|}{(s-\tau)^{1-\alpha}}d\tau \\
&+\frac{r_0k_2(r_0)+\bar{F}_2}{\Gamma(\alpha+1)}\{T^\alpha\omega_1^T(u,\varepsilon;r_0)+2\varepsilon^\alpha(n_T\phi(r_0)+u_T)\} \\
&\leq k_1(r_0)\omega^T(x,\varepsilon)+\omega_1^T(f_1,\varepsilon;r_0)+\frac{k_2(r_0\omega^T(x,\varepsilon)+\omega_1^T(f_2,\varepsilon;r_0))}{\Gamma(\alpha)}(\phi(r_0\bar{N}+\bar{U}) \\
&+\frac{r_0k_2(r_0)+\bar{F}_2}{\Gamma(\alpha+1)}\left\{T^\alpha\omega_1^T(u,\varepsilon;r_0)+2\varepsilon^\alpha(\eta_T\phi(r_0)+u_T)\right\}
\end{aligned} \tag{4.8}$$

Où les quantités $\bar{N}$, $\bar{U}$, η_T, u_T et $\omega_1^T(u,\varepsilon;r_0)$ ont été introduites plus tôt et où nous avons défini $\omega_1^T(f_i,\varepsilon;r_0)=\sup\{|f_i(s,x)-f_i(t,x)|:t,s\in[0,T],|t-s|\leq\varepsilon,|x|\leq r_0\}$

pour i=1,2

Maintenant, en utilisant la continuité uniforme de la fonction $f_i(t,x)$ sur l'ensemble $[0,T]\times[-r_0,r_0](i=1,2)$ et la continuité uniforme de la fonction $u(t,\tau,x)$ sur l'ensemble $[0,T]\times[0,T]\times[-r_0,r_0]$ nous en déduisons que $\omega_1^T(f_i,\varepsilon;r_0)\to 0(i=1,2)$ et $\omega_1^T(u,\varepsilon;r_0)\to 0$ comme $\varepsilon\to 0$, Par conséquent, et à partir de l'estimation (4.6), nous en déduisons l'inégalité suivante :

$\omega_0^T(VX)\leq k_1(r_0)\omega_0^T(X)+\dfrac{k_2(r_0)(\phi(r_0)\bar{N}+\bar{U})}{\Gamma(\alpha)}\omega_0^T(X).$

cela donne

$$\omega_0(VX)\leq\left[k_1(r_0)+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}(\phi(r_0)\bar{N}+\bar{U})k_2(r_0)\right]\omega_0(X). \tag{4.9}$$

À l'étape suivante de notre preuve, de la même façon qu'auparavant, prenons une nonempty $X \subset B_{r_0}$ et un nombre $T > 0$ Ensuite, pour une fonction fixée arbitrairement $x \in X$ et pour les nombres arbitraires t,s nous obtenons $t \geq T, s \geq T$, on obtient

$$\begin{aligned}
|(Vx)(s)-(Vx)(t)| &\leq |f_1(s,x(s))-f_1(s,x(t))|+|f_1(s,x(t))-f_1(t,x(t))| \\
&+\left|f_2(s,x(s))\int_0^s \frac{u(s,\tau,x(\tau))}{(s-\tau)^{1-\alpha}}d\tau - f_2(t,x(t))\int_0^t \frac{u(t,\tau,x(\tau))}{(t-\tau)^{1-\alpha}}d\tau\right| \\
&\leq k_1(r_0)|x(s)-x(t)|+|f_1(s,x(t))-f_1(t,x(t))| \\
&+[|f_2(s,x(s))-f_2(s,0)|+|f_2(s,0)|]\int_0^s \frac{|u(s,\tau,x(\tau))-u(s,\tau,0)|+|u(s,\tau,0)|}{(s-\tau)^{1-\alpha}}d\tau \\
&+[|f_2(t,x(t))-f_2(t,0)|+|f_2(t,0)|]\int_0^t \frac{|u(t,\tau,x(\tau))-u(t,\tau,0)|+|u(t,\tau,0)|}{(t-\tau)^{1-\alpha}}d\tau \\
&\leq k_1(r_0)|x(s)-x(t)|+|f_1(s,x(t))-f_1(t,x(t))| \\
&+(r_0k_2(r_0)+\bar{F}_2)\left\{\phi(r_0)\int_0^s \frac{n(s,\tau)}{(s-\tau)^{1-\alpha}}d\tau+\int_0^s \frac{|u(s,\tau,0)|}{(s-\tau)^{1-\alpha}}d\tau\right\} \\
&+(r_0k_2(r_0)+\bar{F}_2)\left\{\phi(r_0)\int_0^t \frac{n(t,\tau)}{(t-\tau)^{1-\alpha}}d\tau+\int_0^t \frac{|u(t,\tau,0)|}{(t-\tau)^{1-\alpha}}d\tau\right\} \\
&\leq k_1(r_0)|x(s)-x(t)|+|f_1(s,x(t))-f_1(t,x(t))| \\
&+(r_0k_2(r_0)+\bar{F}_2)\{\phi(r_0(\bar{n}(s)+\bar{n}(t))+(\bar{u}(s)+\bar{u}(t))\}
\end{aligned}$$

Par conséquent, nous obtenons l'estimation suivante :

$$\begin{aligned}
\beta_T(Vx) &\leq k_1(r_0)\beta_T(x)+sup\{|f_1(s,x)-f_1(t,x)| : t \geq T, s \geq T, |x| \leq r_0\} \\
&+(r_0k_2(r_0)+\bar{F}_2)\{2\phi(r_0)\sup[(\bar{n}(t)) : t \geq T]+2\sup[(\bar{u}(t)) : t \geq T]\}.
\end{aligned}$$

où la quantité β_T a été introduite dans 2.

Maintenant, à la lumière des hypothèses (ii) et (iv), à partir de l'estimation ci-dessus, nous obtenons

$$\beta(VX) \leq k_1(r_0)\beta(X). \tag{4.10}$$

En outre, la liaison (4.9) et (4.10) nous obtenons

$$u(VX) \leq \left[k_1(r_0+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}(\phi(r_0)\bar{N}+\bar{U})k_2(r_0)\right]\mu(X). \tag{4.11}$$

Enfin, en tenant compte de l'estimation (4.11) et de la deuxième inégalité apparaissant dans l'hypothèse (v) et en appliquant le théorème 1.3, nous inférons que l'opérateur V a au moins un point fixe dans la boule Br_0 étant une solution de équation (4.1).
Évidemment, en vertu de la description du noyau $ker\mu$ de la mesure de non-compacité μ donnée à la section 2, nous concluons que toutes les solutions d'éq. (4.1) appartenant à la boule Br_0 , ont des limites finies à l'infini. Ceci complète la preuve.

□

Un exemple

Dans cette section, nous donnons un exemple illustratif le résultat principal contenu dans le théorème 4.1.

Exemple 4.1. *Considérer l'équation fonctionnelle intégrale suivante d'ordre fractionnaire*

$$x(t) = \gamma \arctan(t + \sin t + x^2(t)) + \frac{t^p e^{-pt} x^2(t)}{\Gamma(1/3)} \int_0^t \frac{\sqrt[3]{[(t-\tau)x(\tau)]^2 + e^{\tau - t}}}{(1 + t^2 + \tau^2)\sqrt[3]{(t-\tau)^2}} \tag{4.12}$$

où $t \in \mathbb{R}_+$ et γ est une constante positive. de plus, p est un nombre naturel fixe .

observons que l'équation ci-dessus est un cas particulier de l'équation (4.12) si on pose $\alpha = 1/3$ et

$f_1(t,x) = \gamma \arctan(t + \sin t + x^2)$,

$f_2 = t^{pt} e^{-pt} x^2$,

$u(t,\tau,x) = \dfrac{\sqrt[3]{[(t-\tau)x]^2 + e^{\tau - t}}}{1 + t^2 + \tau^2}$.

Dans ce qui suit, nous montrons que les fonctions impliquées dans l'équation(4.12) satisfont aux hypothèses du théorème 4.1, à condition que les valeurs des nombres γ et p sont dûment choisis.

En effet, observer d'abord que l'utilisation de méthodes standard de calcul différentiel, nous pouvons facilement prouver que

$$|f_1(t,x) - f_1(t,y)| \leq \frac{3\gamma}{2\sqrt[4]{3}}|x-y|$$

pour tous $t \in \mathbb{R}_+$ *et* $x, y \in \mathbb{R}$. *Ainsi la fonction* $f_1(t,x)$ *satisfait l'état de Lipschitz de l'hypothèse (i) avec* $K_1(r) = 3\gamma/2\sqrt[4]{3}$. *De plus que,* $f_1(t,0) = \gamma \arctan(t+\sin t)$. *Cela signifie que la fonction* $t \to f_1(t,0)$ *est un membre de l'espace* $BC(\mathbb{R}_+)$ *et* $\bar{F_1} = \gamma\Pi/2$.

De plus, notons que pour tout fixe $x \in \mathbb{R}$ *nous avons*

$$\lim_{t\to\infty} f_1(t,x) = \gamma\frac{\pi}{2}$$

Considérons en suite $\gamma = \{f_1(.,x) : x \in \mathbb{R}\}$. *Utilisation de l'inégalité élémentaire*
$\frac{\pi}{2} - \arctan y \leq \frac{1}{y}$
pour tout $y > 0$, $\gamma\frac{\pi}{2} - \gamma \arctan(t + \sin t + x^2) \leq \frac{\gamma}{t + \sin t + x^2} \leq \frac{\gamma}{t + \sin t}$
pour tout $t > 0$ *et pour chaque* $x \in \mathbb{R}$ *Cette estimation montre que toutes les fonctions de l'ensemble* γ *tendent à leur limite uniformément en ce qui concerne* γ. *Ainsi, à partir des faits indiqués à la section 2 nous concluons que la fonction* f_1 *satisfais l'hypothèse (ii). Plus précisément, nous avons*

$\lim_{T\to\infty} \{\sup\{|f_1(t,x) - f_1(s,x)| : t \geq T, s \geq T, x \in \mathbb{R}\}\} = 0.$

Maintenant, on montre que la fonction $f_2(t,x)$ *satisfait l'hypothèse (i) pour ce faire, prenons des nombres arbitraire* $x, y \in [-r, r]$, *où* $r > 0$ *est réparé. En suite, pour tout* $t \in \mathbb{R}_+$ *nous obtenons*

$$\begin{aligned}\left|f_2(t,x) - f_2(t,y)\right| &\leq t^p e^{-pt}\left|x^2 - y^2\right| \leq e^{-p}\left|x+y\right|\left|x-y\right| \\ &\leq 2e^{-p} r\left|x-y\right|\end{aligned}$$

Ainsi, la fonction f_1 *satisfait à la condition de Lipschitz de l'hypothèse (i) avec* $K_2(r) = 2e^{-p}r$. *En dehors de cela* $f_2(t,0) = 0$ *Cela signifie que la fonction* $t \to f_2(t,0)$ *appartient à l'espace* $BC(\mathbb{R}_+)$ *avec* $\bar{F_2} = 0$

Dans ce qui suit, nous appliquerons l'inégalité élémentaire suivante

$$|\sqrt[3]{x^2+a}-\sqrt[3]{y^2+a}| \leq \sqrt[3]{(x-y)^2}. \tag{4.13}$$

qui est satisfait pour tous $x,y \in \mathbb{R}$ et pour tout fixe $a, a \leq 0$. À savoir, fixer arbitrairement $t,\tau \in \mathbb{R}_+ (\tau \leq t)$ et appliquer l'inégalité (4.13) nous obtenons :

$$\begin{aligned} \left|u(t,\tau,x)-u(t,\tau,y)\right| &\leq \frac{1}{1+t^2+\tau^2}\left|\sqrt[3]{[(t-\tau)x]^2+e^{\tau-t}}-\sqrt[3]{[(t-\tau)y]^2+e^2}\right| \\ &\leq \frac{\sqrt[3]{[(t-\tau)x-(t-\tau)y]^2}}{1+t^2+\tau^2} = \frac{\sqrt[3]{(t-\tau)^2}\ \sqrt[3]{(x-y)^2}}{1+t^2+\tau^2}. \end{aligned} \tag{4.14}$$

Ainsi la fonction $u(t,\tau,x)$ satisfait l'hypothèse (iii)

$$n(t,\tau) = \frac{\sqrt[3]{(t-\tau)^2}}{1+t^2+\tau^2}$$

et $\phi(r) = {}^3\sqrt{r^2}$. De toute évidence, la fonction $u(t,\tau,x)$ est continue sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ En outre, nous obtenons :

$$\bar{n}(t) = \int_0^t \frac{n(t,\tau)}{\sqrt[3]{(t-\tau)^2}}d\tau = \int_0^t \frac{d\tau}{1+t^2+\tau^2} = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\arctan\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}.$$

Par conséquent, nous voyons que $\lim_{t\to\infty} \bar{n(t)} = 0$. De plus, nous avons $\bar{N} = \sup\{\bar{n}(t) : t \in \mathbb{R}_+\} \leq \frac{\pi}{4}$
De même, nous obtenons :

$$\bar{u(t)} = \int_0^t \frac{|u(t,\tau,0)|}{\sqrt[3]{(t-\tau)^2}}d\tau \leq \int_0^t \frac{d\tau}{(1+t^2+\tau^2)\sqrt[3]{(t-\tau)^2}} \leq \frac{1}{1+t^2}\int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt[3]{(t-\tau)^2}} = \frac{3\sqrt[3]{t}}{1+t^2}.$$

Nous en déduisons donc que $\lim_{t\to\infty} \bar{u(t)} = 0$ et

$$\bar{U} = \sup\{\bar{u}(t) : t \in \mathbb{R}_+\} \leq \sup\left\{\frac{3\sqrt[3]{t}}{1+t^2} : t \in \mathbb{R}_+\right\} = \frac{5}{2\sqrt[6]{5}} = 1.91181....$$

Les calculs ci-dessus montrent que l'hypothèse (iv) est satisfaite.

Enfin il reste à vérifier que l'hypothèse (v)est satisfaite. En invoquant les formules ci-dessus obtenues exprimant $K_i(r)(i = 1,2), \phi(r)$ et les estimations des constantes $\bar{F_1}(i = 1,2), \bar{N}$ et $\bar{U}$

nous voyons que la première inégalité de l'hypothèse (v) est satisfaite à condition que l'inégalité suivante soit satisfaite :

$$\frac{3\gamma}{2\sqrt[4]{3}}r + \frac{2}{5}\left[\frac{\pi}{2}e^{-p}r^2\sqrt[3]{r^2} + \frac{5}{\sqrt[6]{5}e^{-p}r^2}\right] + \frac{\gamma\pi}{2} \leq r. \tag{4.15}$$

Mentionnons que dans l'inégalité ci-dessus nous avons utilisé l'estimation $\Gamma(1/3) = 3\Gamma(4/3) \geq 5/2$ *Il est facile de voir que le nombre* $r_0 = 1$ *est une solution de l'inégalité* (4.15) *si nous prenons* $\gamma = 1/4$ *et* $p = 2$ *(ou, un nombre naturel p tel que* $p \geq 2$ *). De toute évidence, la deuxième inégalité de l'hypothèse (v) est automatiquement satisfaite dans notre situation (Remarque 4.1).*

Ainsi, sur la base du théorème 4.1, nous concluons que(4.12) *a au moins une solution dans l'espace* $BC(R)$ *appartenant à la boule* B_1 *pourvu que* $\gamma = 1/4$ *etp* ≥ 2 *Évidemment, toutes les solutions de* (4.12) *de la boule* B_1 *ont des limites à l'infini.*

Notons également que la conclusion ci-dessus demeure valide si nous prenons $\gamma = 1/3$ *et* $p \geq 4$*, par exemple.*

CONCLUSION

L'objet de ce travail a été d'introduire la notion de la mesure de non compacité au sens de Hausdorff et Kuratowski en citant et montrant quelques propriétés et de l'applique aux équations différentielles d'ordre fractionnaire à conditions initiales locales ou non locales pour étude l'existence et l'unicité des solutions.

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. Aghajani, J. Banas and N. Sabzali, *Some generalizations of Darbo fixed point theorem and applications*, Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin 20(2013), no. 2, pp. 345-358.

[2] AA Kilbas, HM Srivastava et JJ Trijullo, Théorie et applications des équations différentielles fractionnaires, Études de mathématiques de la Hollande du Nord, 204, Elsevier Science BV, Amesterdam, 2006.

[3] B. Bojareski, *Dissertationes Mathematicae*, Panstwowe Wydawnictwo Naukowe-Polish Scientific Publishers, Warszawa 1988.

[4] D. Guo, V. Lakshmikantham and X. Liu, *Nonlinear integral equations in abstract spaces*, Kluwer Acad. Publishers, Dardrecht, 1996.

[5] E.Zeidler, Nonlinear Functional Analysis and its Applications.Vol.I : Fixed point theorems, Springer-Verlag, New York, 1986.

[6] F. S. De Blasi, *On a property of the unit sphere in Banach spaces*, Bull. Math. Soc. Sci. Math. R. S. Roumanie. 21(1977) 259-262.

[7] H. *Mönch*, *Boundary value problems for nonlinear ordinary differential equations of second order in Banach spaces*, Nonlinear Analysis : Theory, Methods and Applications,

1980, vol. 4, no. 5, pp. 985-999.

[8] J. Appel, E. De Pascale, *Su alcuni parametri connesi can la mesura di non compatezza di Hausdorff in spazi funzioni misarubili*, Boll. Unione. Mat. Ital.(6) 313(1984) 497-515.

[9] J. Banas, k. Goebel, Measures of Noncompactness in Banach spaces, Lect. Notes Pure Appl. Math. Dekker, New York, 1980, vol. 60.

[10] J. Banaś, K. Goebel, Measures of Noncompactness in Banach Spaces, in : Lect. Notes in Pure and Appl. Math, vol. 60, Dekker, New York, 1980.

[11] K. Kuratowski, *Sur les espaces complets*, Fund, Math, 1930, vol. 15, pp. 301-309.

[12] Leray, cf. Acta Sci. Math. Szeged, 12(1950), p.117-186.

[13] N. Redjal, *Quelques résultats de points fixes et applications*, Mémoire de doctorat, Univ. Mentouri constantine 1, 2016.

[14] S, Szufla, Sur l'application de la mesure de non-compacité aux théorèmes d'existences, Déchirer. Sem. Tapis. Univ. Padoue 75 (1986), 1-14.

[15] S, Zhang, Solutions positives pour les problèmes aux limites des équations différentielles fractionnaires non linéaires, Électron. J. Équations différentielles 2006, N 36, 12 pp. (électronique).

[16] V. Millot, Analyse et calcul différentiel École Normale Supérieure 2015-2016.

[17] Y. Zhou, X. H. Shen, L. Zhang, Cauchy problem for fractional evolution equations with Caputo derivative, Eur. Phys. J. Special Topics 222, 1749-1765(2013).