



**FACULTÉ DES SCIENCES APPLIQUÉES**  
**DÉPARTEMENT DE GÉNIE CIVIL**

**Mémoire de fin d'études en vue de l'obtention du diplôme de Master**

Spécialité : Génie Civil

Option : Structures

Présenté par :

ABDELDJEBBAR MARWA

BELMESSABIH SARAH

*Sujet du mémoire*

***ANALYSE D'UN MODELE DE DEPLACEMENT DE CISAILLEMENT  
POUR L'ANALYSE DES POUTRES FONCTIONNELLEMENT  
GRADUEES AVEC DES POROSITEES***

*Soutenu publiquement le 30/06/2022 devant le jury composé de :*

Mr, Khiloun Mokhtar

Mr, Chikh Abdelbaki

Mr, Belmahi Samir

M<sup>me</sup> Kharroubi Lamia

Président

Rapporteur

Examinateur

Examinatrice

بِسْمِ اللّٰهِ الرَّحْمٰنِ الرَّحِیْمِ

# *Remerciement*

*Toute notre gratitude, grâce et remerciement vont à dieu le tout puissant qui nous a donné la force, la patience, le courage et la volonté pour élaborer ce travail.*

*C'est avec une profonde reconnaissance et considération particulière que nous remercions notre promoteur : **Mr, le Docteur CHIKH** pour la sollicitude avec laquelle il a suivi et guide ce travail.*

# *Dédicace*

*Travail, comme un geste de gratitude  
A celle qui m'a enfanté, mon symbole d'amour  
Ma très chère mère et Mon très cher père  
A mes frères et mes  
Sœurs ainsi que  
Toute ma famille ABDEL DJEBBAR  
A tous mes amis de près ou de loin.*

*Marwa*

# *Dédicace*

*Je dédie ce travail à :  
Ma très chère mère, Mon très cher père, Mes frères,  
Mes sœurs, et toute Ma famille,  
Ainsi qu'à tous mes amis sans exception.*

*Sarah*

# الملخص

يقدم هذا العمل تحليلاً للاهتزاز الحر لحزم الخزف المعدني المترجة وظيفياً (FG) مع مراعاة المسامات التي قد تحدث داخل المواد المترجة وظيفياً (FGMs) أثناء تصنيعها. لهذا الغرض، يتم تنفيذ مجال إزاحة بسيط يعتمد على نظرية تشوه القص الأعلى. تستند النظرية المقترحة إلى افتراض أن الإزاحات المستعرضة تتكون من مكونات الانحناء والقص حيث لا تساهم مكونات الانحناء في قوى القص، وبالمثل، لا تساهم مكونات القص في لحظات الانحناء. السمة الأكثر إثارة للاهتمام في هذه النظرية هي أنها تمثل تبايناً تربيعياً لسلاسل القص العرضي عبر السماكة، وتفي بشروط حدود الجر الصفري على الأسطح العلوية والسفلية للحزمة دون استخدام عوامل تصحيح القص. بالإضافة إلى ذلك، لديها أوجه تشابه قوية مع نظرية أويلر برنولي في بعض الجوانب مثل معادلات الحركة وظروف الحدود والتعبيرات الناتجة عن الإجهاد. يتم تعديل قاعدة المخلوط لوصف وتقريب خصائص المواد لحزم FG ذات مراحل المسامية. من خلال استخدام مبدأ هاميلتون، يتم تحديد المعادلات الحاكمة للحركة للاستجابة المحورية والمرنة. يتم التحقيق في صحة النظرية الحالية من خلال مقارنة بعض النتائج الحالية مع تلك الخاصة بالدرجة الأولى والنظريات العليا الأخرى الواردة في الأدبيات. يتم تقديم أمثلة توضيحية أيضاً لإظهار تأثيرات التدرجات المختلفة، وكسر حجم المسامية، ونسب الارتفاع، ونسب السمك إلى الطول على الاهتزاز الحر لحزم FG.

**الكلمات الرئيسية:** رافدة FG ؛ نظرية تشوه القص ؛ والاهتزاز ؛ المسامية

# *Abstract*

This work presents a free vibration analysis of functionally graded metal-ceramic (FG) beams with considering porosities that may possibly occur inside the functionally graded materials (FGMs) during their fabrication. For this purpose, a simple displacement field based on higher order shear deformation theory is implemented. The proposed theory is based on the assumption that the transverse displacements consist of bending and shear components in which the bending components do not contribute toward shear forces and, likewise, the shear components do not contribute toward bending moments. The most interesting feature of this theory is that it accounts for a quadratic variation of the transverse shear strains across the thickness, and satisfies the zero traction boundary conditions on the top and bottom surfaces of the beam without using shear correction factors. In addition, it has strong similarities with Euler-Bernoulli beam theory in some aspects such as equations of motion, boundary conditions, and stress resultant expressions. The rule of mixture is modified to describe and approximate material properties of the FG beams with porosity phases. By employing the Hamilton's principle, governing equations of motion for coupled axial-shear-flexural response are determined. The validity of the present theory is investigated by comparing some of the present results with those of the first-order and the other higher-order theories reported in the literature. Illustrative examples are given also to show the effects of varying gradients, porosity volume fraction, aspect ratios, and thickness to length ratios on the free vibration of the FG beams.

**Keywords:** FG beam; shear deformation theory; vibration; porosity

# Résumé :

Ce travail présente une analyse des vibrations libres des poutres métalliques-céramiques (FG) à gradation fonctionnelle en tenant compte des porosités qui peuvent éventuellement se produire à l'intérieur des matériaux à gradation fonctionnelle (FGM) au cours de leur fabrication. À cet effet, un champ de déplacement simple basé sur une théorie de déformation par cisaillement d'ordre supérieur est mis en œuvre. La théorie proposée est fondée sur l'hypothèse que les déplacements transversaux consistent en des composants de flexion et de cisaillement dans lesquels les composants de flexion ne contribuent pas aux forces de cisaillement et, de même, les composants de cisaillement ne contribuent pas aux moments de flexion. La caractéristique la plus intéressante de cette théorie est qu'elle tient compte d'une variation quadratique des contraintes de cisaillement transversales sur toute l'épaisseur et qu'elle satisfait aux conditions limites de traction nulle sur les surfaces supérieure et inférieure de la poutre sans utiliser de facteurs de correction du cisaillement. En outre, il a de fortes similitudes avec la théorie des poutres Euler-Bernoulli dans certains aspects tels que les équations du mouvement, les conditions aux limites et les expressions résultantes du stress. La règle de mélange est modifiée pour décrire et estimer les propriétés des matériaux des poutres FG avec des phases de porosité. En utilisant le principe de Hamilton, on détermine les équations de mouvement pour une réponse couplée de cisaillement axial et de flexion. La validité de la présente théorie est examinée en comparant certains des résultats actuels avec ceux de premier ordre et les autres théories d'ordre supérieur rapportés dans la littérature. Des exemples illustratifs sont également donnés pour montrer les effets des gradients variables, de la fraction volumique de porosité, des rapports d'aspect et des rapports épaisseur-longueur sur les vibrations libres des poutres FG.

**Mots-clés :** Poutre FG; théorie de la déformation par cisaillement; vibration; porosité



# ***LISTE DES FIGURES***

<b>Figure I.1</b> : Variation continue de la microstructure [Hirai T, 1996].....	09
<b>Figure I.2</b> : Schéma qui démontre la méthode le coulage en bande.....	14
<b>Figure I.3</b> : Disposition du Procédé Frittage Laser Différentiel ; (Yuki et al (1990)).....	16
<b>Figure I.4</b> : Fabrication d'une plaque FGM avec la projection plasma ; Steffens (1990).....	17
<b>Figure I.5</b> : Aluminium brut.....	18
<b>Figure I.6</b> : la céramique à l'état brut.....	20
<b>Figure II.1</b> : Poutre simple .....	24
<b>Figure II.2</b> : Poutre console .....	24
<b>Figure II.3</b> : Poutre avec porte-à-faux .....	25
<b>Figure II.2</b> : Poutre continue .....	26
<b>Figure II.4</b> : poutre à double encastrement .....	27
<b>Figure II.5</b> : Cinématique d'Euler Bernoulli .....	29
<b>Figure II.6</b> : Cinématique de Timoshenko.....	30
<b>Figure II.7</b> cinématique de la théorie d'ordre élevé .....	32
<b>Figure III.1</b> : Coordonnées et géométrie d'une poutre à gradient fonctionnel .....	36
<b>Figure IV.1</b> : Variation de la fréquence fondamentale des poutres FG avec $L/h$ rapport pour diverses valeurs de l'exposant de la loi de puissance.....	46
<b>Figure IV.2</b> : Variation de la fréquence fondamentale des poutres FG ( $k = 1$ ).....	46
<b>Figure VI.3</b> : Variation de la fréquence fondamentale des poutres FG ( $k = 1$ ).....	48
<b>Figure VI.4.</b> Variation de la fréquence fondamentale de FG imparfait poutres.....	48

# ***LISTE DES TABLEAUX***

<b>Tableau I.1</b> : Comparaison entre les caractéristiques de métal et céramique.....	08
<b>Tableau IV.1</b> : Comparaison des fréquences fondamentales adimensionnelles des Poutres homogènes.....	45
<b>Tableau IV.2</b> : Fréquence fondamentale adimensionnelle du poutre FG.....	45
<b>Tableau IV.3</b> : Six premières fréquences adimensionnelles de la poutre FG (L/H=5).....	47

# ***LISTE DES NOTATIONS***

**FGM** : Matériau fonctionnellement gradués.

$\epsilon$  : Facteur de la distribution de la porosité.

$\Lambda$  : Coefficient de porosité.

**E** : Le module de Yong.

**E(z)** : Module de Yong en fonction de (z)

$E_c$  : Module de Yong de la céramique.

$E_m$  : Module de Yong du métal.

**V** : Le coefficient de puissance matériel .

$\rho$  : La masse volumique.

$\rho_c$  : La masse volumique de la céramique.

$\rho_m$  : La masse volumique du métal.

**p** : Coefficient de puissance matériel.

**a** : Longueur de la plaque suivant la direction de **x**.

**b** : Longueur de la plaque suivant la direction de **y**.

**h** : Longueur de la plaque suivant la direction de **z**.

$E_0, V_0, W_0$  : Les composantes du champ de déplacement sur le plan moyen de la plaque.

**u, v, w** : Les déplacements dans les directions **x, y, z** .Tapez une équation ici.

**f(x)** : Fonction de cisaillement suivant l'épaisseur de la plaque .

$V_c$  Fraction volumique de la céramique.

$V_m$  Fraction volumique du métal.

$\sigma_x, \sigma_y$  : Ccontrainte normale.

$\tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz}$  : Ccontrainte de cisaillement.

$\epsilon_x, \epsilon_y$  : Déformation normale.

$\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}$  : Ddéformation de cisaillement.

$I_1, J_1, K_1$  : Des inerties de mase.

$\omega$  : La fréquence de propagation.

$\{ \}$  : Vecteur.

$[ ]$  : Matrice.

$[K]$  : Matrice de rigidité .

$[M]$  : Matrice de masse.

$\{\Delta\}$  : Vecteur déplacement.

$\epsilon_x$ :Déformation dans les directions x et z

$\delta_w, \delta_v, \delta_{w_0}$ :Champ virtuel de déplacement

# SOMMAIRE

المخلص.....	I
Abstract.....	II
Résumé.....	III
Liste des figures .....	IV
Liste des tableaux .....	VI
Liste des abréviations .....	VII
Introduction générale.....	01
<b>Chapitre I : Présentation des matériaux fonctionnellement gradués</b>	
I.1 Introduction ... ..	07
I.2 Définition des FGMs.....	07
I.3 Histoire de développement des matériaux à gradient de propriétés .....	09
I.4 Les types des GMS. ....	11
I.4.1. Gradient de composition chimique des Matériaux FGM .....	11
I.4.2. Gradient de porosité des Matériaux FGM .....	12
I.4.3. Gradient de la microstructure des Matériaux FGM.....	13
I.5 Procédés de fabrication des matériaux FGM .....	13
I.5.1. Coulage en bande (Tape Casting ou Doctor-Blade) .....	14
I.5.2. Compaction sèche des Poudres.....	15
I.5.3. Coulage Séquentiel en Barbotine (Slip Casting) .....	15
I.5.4. Frittage et Infiltration .....	16
I.5.5. Dépôt par électrophorèse.....	16
I.5.6. Projection plasma.....	17
I.5.7. Implantation ionique.....	18
I.6 Propriétés physiques et mécaniques des FGM.....	18
I.6.1. Propriétés physiques et mécaniques de l'aluminium.....	18
I.6.1.1. Définition.....	18

I.6.1.2. Propriétés physiques.....	18
I.6.1.3. Propriétés mécaniques.....	19
I.6.2. Propriété physique et mécanique de céramique.....	19
I.6.2.1. Définition de céramique .....	19
I.6.2.2. Propriété physique.....	20
I.6.2.3. Propriété mécanique.....	20
I.7. Domaines d'applications des matériaux à gradient évalué .....	20
I.8 Conclusion .....	21

## Chapitre II : Les différentes théories des poutres

II.1 Introduction .....	23
II.2 Définition d'une Poutre .....	23
II.3 Types de poutres .....	23
II.3.1. Poutre simple.....	23
II.3.2. Poutre console.....	24
II.3.3. Poutre avec porte-à-faux.....	25
II.3.4 Poutre continue.....	25
II.3.5. Poutre à double encastrement.....	26
II.4 Historique des théories des poutres.....	27
II.5 Les différentes théories des poutres.....	27
II.5.1 Modèle d'Euler Bernoulli (Classical Beam Theory- CBT) .....	28
II.5.2 Modèle de Timoshenko (FSDBT) .....	29
II.5.3 Théorie d'Ordre Elevé.....	31
II.6 Conclusion .....	33

## Chapitre III : Modèle de simulation mathématique

III.1 Introduction .....	35
III.2 Formulation théorique .....	35
III.2.1. Propriétés matérielles effectives des poutres céramo-métalliques fonctionnellement graduées .....	35
III.2.2. Hypothèses faites dans la formulation théorique.....	37
III.2.3. Cinématique et équations constitutives .....	38
III.2.4. Equations directrices et conditions aux limites.....	39

III.3 Solutions analytiques .....	41
III.4 Conclusion.....	42
<b>Chapitre IV : Résultats numériques et discussion :</b>	
IV .1 Introduction .....	44
IV.2 Résultats numériques et discussion .....	44
IV.3 Conclusion.....	49
Conclusion générale.....	51
Référence bibliographique.....	52

***Introduction  
Générale***



### Introduction Générale :

Les matériaux composites ne sont pas une nouveauté, ils ont tous temps été utilisé par l'homme, par exemple le bois, les premières utilisation de celui-ci remontent à la pré naissance par les premiers Egyptiens, Où ils ont utilisé un mélange de d'argile et de paille pour construire des bâtiments solides et durables, et continués à s'améliorer pour anciens produits composites, notamment la poterie et les bateaux, aussi il est utilisé pour améliorer les performance des certains armes par exemple : les arcs anciens mongol à utilisant un mélange de bois, d'os et de colle animale. Plus tard et avec les révolutions scientifiques, les matériaux composites ont été utilisés avec succès dans les industries du génie civil, de la mécanique, de l'aéronautique et d'autres applications technologiques. Dans les structures composites stratifiées classiques, des lames élastiques homogènes sont assemblées.

L'autre poutre bien connue est la théorie des poutres de Timoshenko ou la théorie des poutres de déformation par cisaillement du premier ordre (FSDBT) dans quelles droites perpendiculaires au plan médian avant pliage restent droites, mais non plus restent perpendiculaires au plan médian après pliage. Bresse (1859), Rayleigh (1880) et Timoshenko (1921) ont été les premiers chercheurs à inclure des effets raffinés tels que la rotation inertie et déformation de cisaillement dans la théorie des poutres. Timoshenko a montré que l'effet de cisaillement est beaucoup plus grand que celui de l'inertie rotatoire sur la réponse de vibration transversale de barres prismatiques. Dans FSDBT, la distribution de la contrainte de cisaillement transverse par rapport à lala coordonnée d'épaisseur est supposée constante. Ainsi, un facteur de correction de cisaillement est nécessaire pour compenser pour l'erreur en raison de cette hypothèse dans FSDBT. Cowper (1966) a donné des expressions raffinées pour le facteur de correction de cisaillement pour différentes sections transversales de la poutre. L'exactitude de la Théorie des poutres de Timoshenko pour les vibrations transversales d'une poutre simplement appuyée par rapport à la fréquence fondamentale est vérifiée par Cowper (1966) avec une solution d'élasticité exacte en contrainte plane. Pour supprimer les divergences dans la théorie classique et FSDBT, d'ordre supérieur ou équivalent raffiné des théories de déformation par cisaillement ont été développées et sont disponibles dans la littérature ouverte pour la statique et analyse vibratoire des poutres. Les théories des poutres de déformation de cisaillement d'ordre supérieur considèrent le gauchissement des sections et satisfont à la condition de contrainte de cisaillement transverse nulle de la partie supérieure et fibres inférieures de la section transversale sans facteur de correction de cisaillement. Dans la

littérature, divers les théories de déformation de cisaillement d'ordre supérieur qui satisfont aux conditions mentionnées ci-dessus sont proposé par plusieurs chercheurs. Les théories bien connues des Poutres d'ordre supérieur sont les suivantes : (i)théorie des poutres de déformation en cisaillement parabolique (PSDBT) (Reddy 1984) ; (ii) cisaillement trigonométrique théorie des poutres de déformation (TSDBT) (Touratier 1991) ; (iii) poutre de déformation en cisaillement exponentiel (ESDBT) (Karama et al. 2003). Récemment, les matériaux composites avancés connus sous le nom de matériaux à grades fonctionnels ont attiré beaucoup d'attention dans de nombreuses applications d'ingénierie en raison de leurs avantages de pouvoir résister à gradients de température élevés tout en maintenant l'intégrité structurelle (Koizumi 1997). Les matériaux à gradation fonctionnels (FGM) sont microscopiquement inhomogènes, dans lesquels les propriétés mécaniques varient en douceur et en continu d'une surface à l'autre. Ils sont généralement fabriqués à partir d'un mélange de céramiques et de métaux pour atteindre l'exigence importante de propriétés matérielles. En raison de la pertinence accrue des composants structurels des FGM dans la conception de l'ingénierie structures, leurs caractéristiques statiques et vibratoires ont attiré l'attention de nombreux scientifiques dans ces dernières années (Tounsi et al. 2013a, Boudera et al. 2013, Bachir Bouiadjra et al. 2013, Saidi et al. 2013, Hebali et al. 2014, Fekrar et al. 2014, Belabed et al. 2014, Ait Amar Meziane et al. 2014, Chakraverty et Pradhan 2014, Zidi et al. 2014, Bousahla et al. 2014, Khalfi et al. 2014, Swaminathan et Naveenkumar 2014, Najafov et al. 2014, Ait Yahia et al. 2015, Hamidi et al. 2015, Attia et al. 2015, Mahi et al. 2015, Duc et Thang 2015). On observe dans la littérature que la quantité de tels travaux effectués pour les Poutres isotropes est considérable, et limitée la littérature est disponible sur les poutres mixtes. Cependant, très peu de littératures sur l'analyse de Les Poutres de FGM existent. De plus, la littérature sur l'analyse statique et dynamique des poutres FG est encore limitée en nombre par rapport aux plaques et coques. Sankar (2001) a donné une solution d'élasticité basé sur la théorie des poutres d'Euler-Bernoulli pour les poutres graduées fonctionnellement soumises à des contraintes statique charges transversales en supposant que le module de Young de la poutre varie de façon exponentielle à travers l'épaisseur. Zhong et Yu (2007) ont présenté une solution analytique d'une poutre en porte-à-faux FG avec variations graduées arbitraires de la distribution des propriétés des matériaux basées sur l'élasticité bidimensionnelle théorie. Li (2008) a proposé une nouvelle approche unifiée pour étudier les vibrations statiques et libre comportement des poutres Euler-Bernoulli et Timoshenko. Kadoli et al. (2008) ont étudié la statique comportement d'une poutre FG en utilisant la théorie de la déformation par cisaillement d'ordre supérieur et la méthode des éléments finis. Benatta et al. (2008) ont proposé une solution analytique au problème de flexion

d'un FG symétrique poutre en incluant le gauchissement de la section transversale et l'effet de déformation de cisaillement. Salai et al. (2009) ont étudié les réponses statiques d'une Poutre épais sigmoïde FG en utilisant différentes théories de Poutre. Benatta et al. (2009) ont présenté une solution mathématique pour la flexion du composite hybride court poutres à espacement variable des fibres. Bedjilili et al. (2009) ont présenté des solutions exactes pour le cisaillement poutres composites symétriques flexibles avec une fraction volumique de fibre variable à travers l'épaisseur. Ould Larbi et al. (2013) ont présenté une théorie de poutre de déformation de cisaillement efficace basée sur une surface neutre position de flexion et de vibration libre des poutres FG. Yaghoobi et Torabi (2013a) ont enquêté le post-flambage et la vibration non linéaire des poutres FG imparfaites. Yaghoobi et Torabi (2013b) examiné analytiquement la vibration de grande amplitude et le post-flambage des poutres FG reposant sur fondations élastiques non linéaires. Yaghoobi et al. (2014) ont également étudié le post flambage et le non-linéaire réponse vibratoire libre des poutres FG reposant sur une fondation élastique non linéaire sous thermo-chargement mécanique par la méthode d'itération variationnelle (VIM). Un cisaillement simple et raffiné d'ordre  $n$ . La théorie de la déformation est présentée par Yaghoobi et Fereidoon (2014) pour discuter de la mécanique et comportement au flambement thermique des plaques FG supportées par une fondation élastique. Hadji et al. (2014) étudié les réponses de flexion et de vibration des poutres FG via une poutre à déformation de cisaillement plus élevée théorie. Bourada et al. (2015) ont utilisé le concept de la position de surface neutre pour développer une théorie trigonométrique de Poutre d'ordre supérieur affinée pour le comportement de flexion et de vibration de FG poutres. Al-Bayon et al. (2015) ont proposé une nouvelle formulation de Poutre unifié et une théorie des contraintes de couple pour la flexion et les comportements dynamiques de la micro-poutre FG. Récemment, Larbi Chaht et al. (2015) ont étudié les comportements de flexion et de flambement de nano poutres FG dépendantes de la taille  $y$  compris l'effet d'étirement de l'épaisseur. Dans ce travail, le nano Poutre FG dépendant de la taille est étudié sur la base du modèle de continuum non local (Heireche et al. 2008, Benzair et al. 2008, Amara et al. 2010, Tounsi et al. 2013b, c, d, Berrabah et al. 2013, Semmah et al. 2014, Benguediab et al. 2014). Cependant, dans la fabrication de FGM, des micro vides ou des porosités peuvent se produire dans les matériaux pendant le processus de frittage. Ceci est dû à la grande différence de températures de solidification entre les constituants matériels (Zhu et al. 2001). Wattanasakulpong et al. (2012) a également donné la discussion sur les porosités qui se produisent à l'intérieur d'échantillons de MGF fabriqués par une séquence séquentielle à plusieurs étapes technique d'infiltration. Par conséquent, il est important de prendre en compte l'effet de porosité lorsque conception de structures FGM soumises à des

chargements dynamiques. Récemment, Wattanasakulpong et Ungbhakorn (2014) a étudié les problèmes de vibrations linéaires et non linéaires des extrémités élastiquement. Poutres FG ayant des porosités. Dans cet article, une théorie de déformation de cisaillement cohérente de manière variationnelle est développée en utilisant un nouveau champ de déplacement pour les poutres FG épaisses ayant des porosités. Le champ de déplacement de la proposition La théorie est choisie sur la base des hypothèses suivantes : (1) les déplacements axiaux et transversaux se composent de composants de flexion et de cisaillement dans lesquels les composants de flexion ne contribuent pas vers les forces de cisaillement et, de même, les composants de cisaillement ne contribuent pas à la flexion des moments; (2) la composante de flexion du déplacement axial est similaire à celle donnée par le théorie des Poutres d'Euler-Bernoulli; et (3) la composante de cisaillement du déplacement axial donne lieu à la variation parabolique de la déformation de cisaillement et donc de la contrainte de cisaillement à travers l'épaisseur de la poutre dans de telle manière que la contrainte de cisaillement disparaisse sur les surfaces supérieure et inférieure de la poutre sans utiliser facteurs de correction de cisaillement. Le modèle est appliqué à une poutre FGM simplement supportée de forme rectangulaire section transversale pour l'analyse des vibrations statiques et libres. Une solution générale est obtenue. Les résultats obtenus sont comparés à ceux des théories élémentaires, raffinées et exactes des Poutres disponibles dans le Littérature.

***Chapitre I :***

***PRESENTATION DES MATERIAUX  
FONCTIONNELLEMENT GRADUEES***

### **I.1.Introduction :**

Les matériaux composites multicouches sont largement utilisés dans diverses structures d'ingénierie civile, mécanique et spatiale grâce à leur grande rigidité et résistance. Cependant, en raison d'une interface distincte entre les deux matériaux (céramique et métalliques), les propriétés matérielles à travers l'interface subissent un changement soudain, qui produit une concentration des contraintes dans cette interface, ce qui peut plus loin provoquer le décollement ou la rupture de l'interface.

Une solution envisageable pour ce problème est l'utilisation de matériaux FGM, une nouvelle génération de composites à hétérogénéité microscopique proposée au début des années 1980.

### **I.2. Définition des FGM :**

Un matériau fonctionnellement gradué est une nouvelle classe de matériau composite dans le quel à la microstructure des changements graduellement et continuellement des propriétés mécaniques de leur fraction de volume dans une direction donnée, en général c'est l'épaisseur de l'élément. Les matériaux à gradient fonctionnel (FGMs) sont des matériaux Appartienne dans la famille des composites d'ingénierie, ils sont fabriqués à partir de différents matériaux avec un changeant sans interruption les fractions de volume de continu de la composition, dans la morphologie et effectivement dans la structure cristalline. Les matériaux à gradient de fonction (FGM) sont des matériaux dont la composition chimique et les caractéristiques mécaniques et microstructures varient graduellement au cours de la fabrication d'une pièce avec des caractéristiques homogènes. L'intérêt est d'associer et de concentrer les avantages de plusieurs matériaux dans une seule pièce pour résister à la température, la corrosion, l'usure ou la fatigue. Les domaines d'applications des pièces FGM sont nombreux. Nous pouvons citer par exemple le domaine aéronautique où les pièces FGM recherchées doivent résister à de fortes sollicitations thermiques et mécaniques, mais également le domaine biomédical où une pièce FGM peut allier les propriétés mécaniques et la résistance à l'usure pour une prothèse articulaire de hanche. Dans la plupart des activités de recherches et d'autre applications structuraux ces matériaux FGMs sont généralement construit par un mélange de deux composante (le plus souvent en céramique et métal) , en considération des d'avantages Pour utiliser cette classe du FGMs, d'une coté si on doit faire une résistance plus élève aux températures ou dégradations en place le contenu en céramique et d'autre coté si on doit faire des propriétés mécaniques comme la dureté plus élève et haute force en place le contenu en

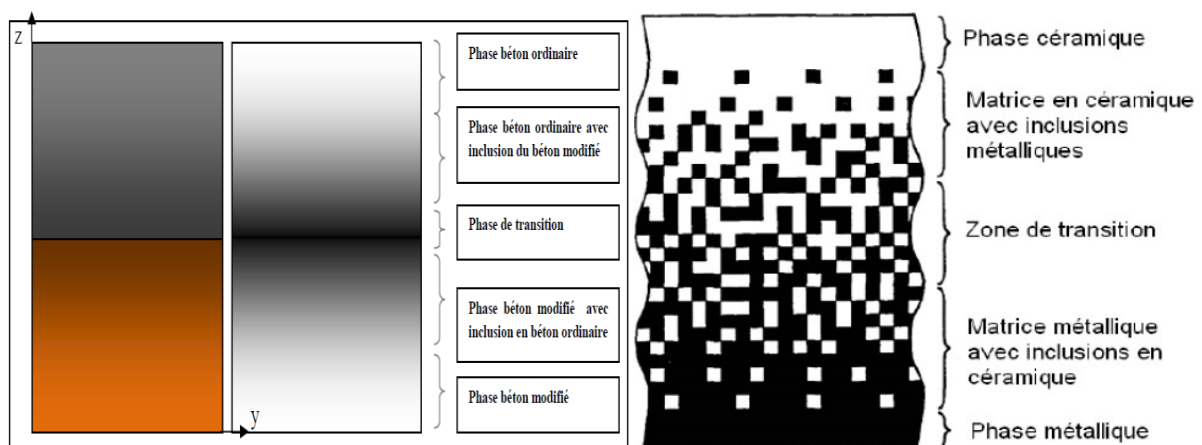
## Chapitre I : Présentation des matériaux fonctionnellement gradués

métal .Une comparaison entre les caractéristiques de métal et céramique sont donnée dans le tableau ci-dessous :

La face à haute température	Céramique	-Bonne résistance thermique ; - Bonne résistance à l'oxydation ; - Faible conductivité thermique.
Continuité du matériau d'un point à l'autre « couches intermédiaires »	Céramique-métal	-Elimination des problèmes de l'interface ; -Relaxer les contraintes thermiques.
La face à basse température	Méta	- Bonne résistance mécanique ; - Conductivité thermique élevée, - Très bonne ténacité.

**Tableau I-1** : Comparaison entre les caractéristiques de métal et céramique.

Le changement continu dans la composition et dans la microstructure d'un matériau « FGM » est illustré dans la (Figure II.1). Il en résulte un gradient qui déterminera les propriétés des « FGM ». Dans certains cas, on peut avoir un FGM constitué d'un même matériau mais de microstructure différente [Fekrar Abdelkader, 2015].



**Figure I-1** : Variation continue de la microstructure [Hirai T, 1996].

Les variations graduelles des fractions de volume des matériaux constitutifs et leurs propriétés matérielles montrent un changement minime et continu d'un point à un autre, ce qui permet

d'éviter les problèmes des concentrations de contraintes aux niveaux des interfaces (provoquant le délaminage) des constituants et grâce à l'association des matériaux.

Les propriétés mécaniques telles que le module d'élasticité de Young, coefficient de Poisson, le module d'élasticité de cisaillement, et la densité de la composition, varie de façon continue dans des directions préférées dans les FGMs.

Les FGM sont donc des matériaux composites à caractère non homogène macroscopiquement. Les changements continus dans leur microstructure distinguent les FGM par rapport aux matériaux composites classiques.

### **I.3. Histoire de développement des matériaux à gradient de propriétés :**

On peut trouver les matériaux fonctionnellement gradués (FGMs) dans la nature et divers domaines pour des usages structuraux et fonctionnels. On peut les trouver dans les tissus des plantes, des animaux et même dans notre corps en citant à titre d'exemple les os, les coquilles, les noix de coco et les feuilles de certaines graminées comme les bambous etc. [Bellifa Hichem, 2014] Le concept de FGM est né au milieu des années quatre-vingt dans le laboratoire national d'aérospatial au Japon, qui fût suivi par d'autres pays : l'Allemagne, la Suisse, Les Etats-Unis, la Chine et la Russie. En 1984 et dans une université Japonaise en laboratoire national d'aérospatial à Sendai, un groupe de scientifiques M. Nino et ses collègues ont développé le concept de FGM pour la première fois. L'idée est de réaliser des matériaux utilisés comme barrière thermique dans les structures spatiales et les réacteurs à fusion. Par ailleurs comme conséquence le groupe scientifique ont prend en considération le changement continu des compositions et les propriétés physiques (porosité) des matériaux fonctionnellement gradués (FGMs) de telle sorte que la résistance mécanique et la conductivité thermique sont déférente [Fekrar Abdelkader, 2015].

En 1987, le gouvernement Japonais a déclaré un projet d'étude pour le développement des FGMs qui intitulé "la recherche sur la technologie de base pour le développement de Matériaux à gradient de propriétés et l'étude de la relaxation des contraintes thermiques". C'est-à-dire que de chercher des matériaux pouvant travailler à des températures plus élève. A cet effet 17 laboratoires japonais de recherche, des universités et des entreprises ont été engagées dans ce projet [Fekrar Abdelkader, 2015]. Alors que ces matériaux constituant les parois des engins spatiaux pouvant travailler à des températures de surface de 1800°C et à un gradient de température de l'ordre de 1300°C.

Trois caractéristiques sont à considérer pour la conception de tels matériaux :



## **Chapitre I : Présentation des matériaux fonctionnellement gradués**

---

-Résistance thermique et résistance à l'oxydation à haute température de la couche superficielle du matériau ;

-Ténacité du matériau côté basse température ;

-Relaxation effective de la contrainte thermique le long du matériau.

En 1987-1989, pour les essais des petites pièces de (1-10 mm d'épaisseur et 30 mm de diamètre) ont été fabriqués par les chercheurs et soumis à une charge thermique. En conséquence ces pièces pouvant résister à des températures de surfaces maximales de 2000K et à un gradient de température de 1000K. Quatre techniques ont été utilisées pour fabriquer les matériaux présentant un gradient de composition et de structure ; les techniques utilisées dans la fabrication de tels matériaux sont les suivantes : le système SiC/C par C.V.D., le système PSZ/Mo par la technique de la compaction sèche des poudres, le système TiB<sub>2</sub>/Cu par synthèse par auto-propagation à haute température, et enfin le système (Ni-Cr-Al-Y)/(ZrO<sub>2</sub>-Y<sub>2</sub>O<sub>3</sub>) par projection plasma à double torches [H. Okamura, 1991] En 1990-1991, des pièces de tailles plus grandes et de forme plus complexes par rapport à celles réalisées dans la première étape. L'application des FGMs sont non seulement développées pour les matériaux de structure fonctionnant à haute température mais ils sont aussi élargis à d'autres applications : biomécaniques, technologie de capteur, optique [H. Okamura, 1991].

Le concept des matériaux à gradient de propriétés est de l'intérêt non seulement dans la conception des matériaux réfractaires performants pour des utilisations pour les futures navettes spatiales, mais également dans le développement de divers matériaux fonctionnels, tels que les matériaux optiques et électroniques. A cet effet, un deuxième projet a été lancé pour la recherche et développement des matériaux FGM en tant que matériaux fonctionnels « Recherche sur les matériaux de conservation d'énergie avec la structure à gradient de propriétés ». Ce programme vise à appliquer la technologie des FGM dans le but d'améliorer l'efficacité de la conservation de l'énergie comme l'énergie solaire, nucléaire, photovoltaïque et thermoélectrique.

### **I.4. Types de matériaux fonctionnellement gradués :**

Au début du développement des matériaux FGM, le concept était d'éliminer l'interface nette qui existait dans le matériau composite traditionnel et de la remplacer par une interface progressivement variable, qui s'expliquait par la composition chimique changeante de ce composite dans cette région d'interface. L'intérêt progressif pour ce type de matériaux a conduit à la mise au point de différents types de FGM. Le type d'application étudiée

détermine généralement le type de FGM à utiliser. Les différents types des matériaux FGM en cours de production comprennent à présent le gradient de composition chimique, le gradient de porosité et le gradient de la microstructure. Chacun de ces types des matériaux FGM est décrit en détail dans les sections suivantes :

### **I.4.1. Gradient de composition chimique des Matériaux FGM :**

Il s'agit d'un type des matériaux FGM, dans lesquels la composition chimique varie progressivement en fonction de la position spatiale dans le matériau. Cela pourrait être sous la forme d'une seule phase, ou dans un matériau multi phase. Une FGM monphasée est produite lorsque le composite est fabriqué à partir d'une seule phase, en raison de la solubilité des éléments chimiques d'une phase dans l'autre phase. Cela se produit généralement lors du processus de frittage [Bharti, I. et al. 2013]. Le changement graduel de la répartition des éléments chimiques dans la phase unique entraîne la formation du matériau fonctionnellement gradué. Selon le diagramme de phase et les limitations thermodynamiques, lorsque certains matériaux sont ajoutés à un autre matériau, le matériau qui a été ajoutée à l'autre matériau serait soluble dans ce matériau sur une gamme de composition et des conditions de mélange. Ce matériau deviendrait ce qu'on appelle un matériau monphasé mais de composition chimique variable en raison de la solubilité. Ce type de FGM est moins habituel.

Les matériaux FGM les plus couramment conçus et les plus habituellement utilisés sont ceux qui ont une composition chimique multi phase [Mahmoud, R.M. et al. 2012,2015]. Les phases et la composition chimique on fait varier à travers le volume apparent du matériau. Comme la composition du matériau varie d'un matériau à l'autre, il en résultera différentes phases avec différentes compositions chimiques qui permettraient de réaliser l'application souhaitée, pour laquelle la FGM a été conçue. Les différentes phases produites dépendent de la quantité de composition du matériau de renforcement et des conditions de fabrication, telles que la vitesse de refroidissement et le traitement thermique appliqué à ce matériau. Dans la métallurgie des poudres, le procédé de production de FGM est en plaçant la couche par couche de composition de poudre requise, et cela est suivi par le compactage et le frittage de la poudre par la suite. Au cours du processus de frittage, certaines poudres métalliques vont réagir pour former différents composés et phases chimiques. Celles-ci varieraient en fonction de la position spatiale dans le matériau fonctionnellement gradué.

### **I.4.2. Gradient de porosité des Matériaux FGM :**

Le Gradient de porosité des matériaux fonctionnellement gradués est un autre type de FGM, dans lequel la porosité dans le matériau est amenée à changer avec le changement de la position spatiale dans le matériau composite. Le diagramme schématique du gradient de porosité typique d'un matériau fonctionnellement gradué est représenté sur la Figure I.5. Ce type de matériau à gradation fonctionnelle est très important pour les applications biomédicales, car le matériau naturel qu'elles entendent remplacer consiste en une porosité à gradation fonctionnelle, laquelle faciliterait également l'intégration de l'implant et des tissus environnants. La porosité est importante pour le processus de guérison de cet implant et contribue également à la circulation sanguine vers les tissus intégrés. La porosité graduée contribue également à réduire le poids total de l'implant et à améliorer le module d'élasticité du matériau de l'implant pour correspondre à celui du tissu humain. La porosité graduée contribue à réduire la densité du bio-implant. Cela est nécessaire pour éviter la protection contre les contraintes qui se produit lorsque le module d'élasticité de l'implant est supérieur à celui de l'os humain.

Les matériaux à gradient de porosité sont produits par dépôt de poudre avec un mélange varié de formes et de tailles de particules différentes, ce qui aiderait à produire la porosité variable nécessaire en fonction de la forme et de la taille des pores. Les matériaux à gradient de porosité peuvent être un gradient de densité de porosité ou un gradient de taille de pores. La densité de porosité est produite lorsque la densité de porosité change en fonction de la position spatiale à travers le volume du matériau.

### **I.4.3. Gradient de la microstructure des Matériaux FGM :**

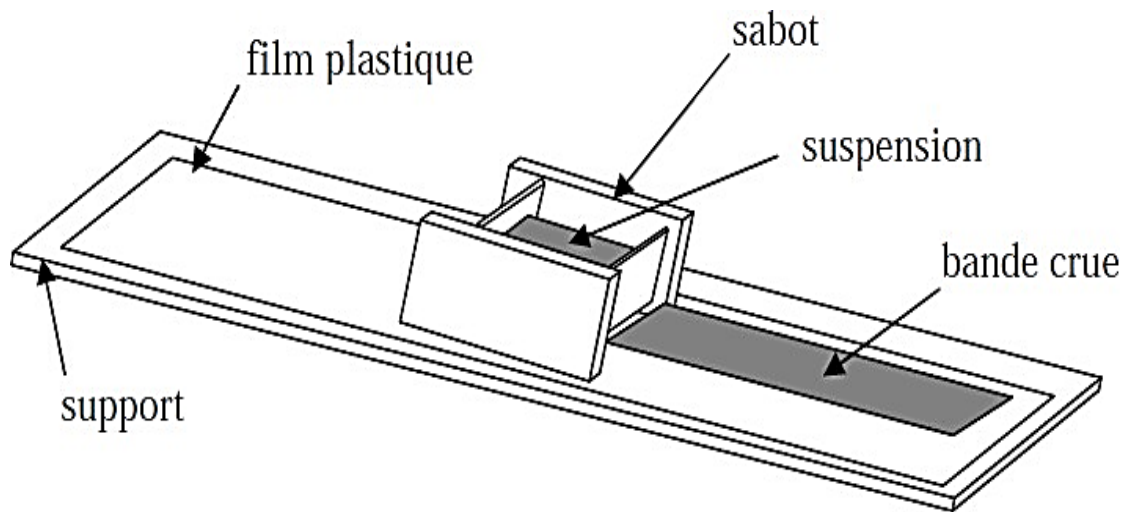
Un matériau fonctionnellement gradué de gradient microstructural est un autre type de FGM, dans lequel la microstructure est conçue de manière à produire différentes microstructures dans le matériau, qui sont amenées à changer progressivement, de manière à obtenir les propriétés requises du matériau. La gradation microstructurale peut être obtenue pendant le processus de solidification, de sorte que la surface du matériau est trempée, par exemple lors de la production d'une propriété de surface très dure du matériau. Le noyau du même matériau est laissé refroidir lentement, ce qui aiderait à produire des microstructures différentes de celles situées à la surface du matériau et à la partie la plus interne. De plus, la gradation microstructurale peut être obtenue par un processus de traitement thermique contrôlé.

### **I.5. Procédés de fabrication des matériaux FGMs :**

Les procédés de fabrication d'un matériau à gradient évalué peuvent habituellement être divisés en construisant la structure dans un espace hétérogène (mélange graduel) et transformation de cette structure en un seul matériau (solidification). Les processus de mélange graduel peuvent être classés dans les constituants, l'homogénéisation et la ségrégation. Les procédés élémentaires sont basés sur la fabrication par étape de structure en matériaux graduels précurseurs ou poudres. Les avancés en technologie d'automatisation pendant les dernières décennies ont rendu des processus élémentaires de progression technologiquement et économiquement durable. Dans la procédure d'homogénéisation qui traite une interface pointue entre deux matériaux est convertie dans un gradient par transport matériel. Les procédés d'homogénéisation et de ségrégation produit un gradient continu, mais ont des limitations au sujet des types de gradients qui peuvent être produits. Habituellement le séchage et la solidification suivent les étapes du mélange graduel. Le besoin de ces processus de consolidation doit être adapté aux FGM. Une attention particulière doit être également prêtée au rétrécissement inégal de FGM pendant la consolidation [Kieback 2003].

#### **I.5.1. Coulage en bande (Tape Casting ou Doctor-Blade) :**

Le coulage en bande est une technique de mise en forme par voie liquide qui consiste à étaler une barbotine de poudres fines en suspension sur une surface plane en couches minces et régulières. L'étalement de la bande est obtenu par le mouvement relatif d'un réservoir ou sabot. La suspension est ainsi laminée par son passage entre la lame du réservoir et le support ce qui confère à la bande déposée une épaisseur uniforme sur toute sa longueur. Les produits obtenus sont des feuillets avec des épaisseurs contrôlées (25-1000  $\mu\text{m}$ ). Après un raffermissement de la pâte, les feuillets sont démoulés et ensuite découpés.



**Figure I.2:** Schéma qui démontre la méthode le coulage en bande.

Le solvant doit avoir un point d'ébullition très bas et une viscosité faible. Il doit être soluble avec le liant, le plastifiant et les autres ajouts mais ne doit être ni soluble ni réactif avec la poudre céramique. Le liant donne une grande résistance mécanique au produit cru en permettant son maniement. Généralement un plastifiant est ajouté au liant pour baisser sa viscosité. Le liant, le plastifiant et le dé flocculant doivent être totalement dégagés pendant le délainage.

Le procédé de coulage en bande est largement utilisé pour réaliser des matériaux composites laminaires suivant deux méthodes : soit par réalisation directe de bandes multicouches grâce à un système de lame multiple, c'est le cas des tri-couches élaborés par Mistler [Mist.R 73] ; soit par empilage de couches élaborées séparément, dont la cohésion est ensuite assurée par une étape de thermo compression [Boch.P 86], [Boch.P 87].

### **I.5.2. Compaction sèche des Poudres :**

Dans cette technique les poudres sont successivement versées dans un moule en acier. Chaque fois qu'une poudre est versée, une faible compression est exercée. Ensuite, la compaction de l'ensemble des couches sera effectuée. Ce procédé est suivi, généralement, par une pression isostatique et un délainage. La densification sera enfin l'étape finale [Bish 93] [Senouci .H et Maghrar .M, 2017]. Cette transformation est accompagnée d'un dégagement de chaleur important. Si une particule de céramique se trouve dans cet environnement, elle se fond totalement ou superficiellement, ce qui permet de la situer sur un substrat. La projection plasma des particules des divers matériaux est devenue une méthode très utilisée pour

fabriquer des FGM. Cette transformation est accompagnée d'un dégagement de chaleur important. Si une particule de céramique se trouve dans cet environnement, elle se fond totalement ou superficiellement, ce qui permet de la situer sur un substrat. La projection plasma des particules des divers matériaux est devenue une méthode très utilisée pour fabriquer des FGM.

### **I.5.3. Coulage Séquentiel en Barbotine (Slip Casting) :**

Le coulage en Barbotine (Slip Casting) consiste à couler une suspension dans un moule poreux qui va drainer le liquide grâce aux forces capillaires, laissant un tesson (couche de poudre compacte) sur la surface du moule. Après séchage, on obtient le corps en cru. Donc le coulage s'effectue en deux étapes essentielles :

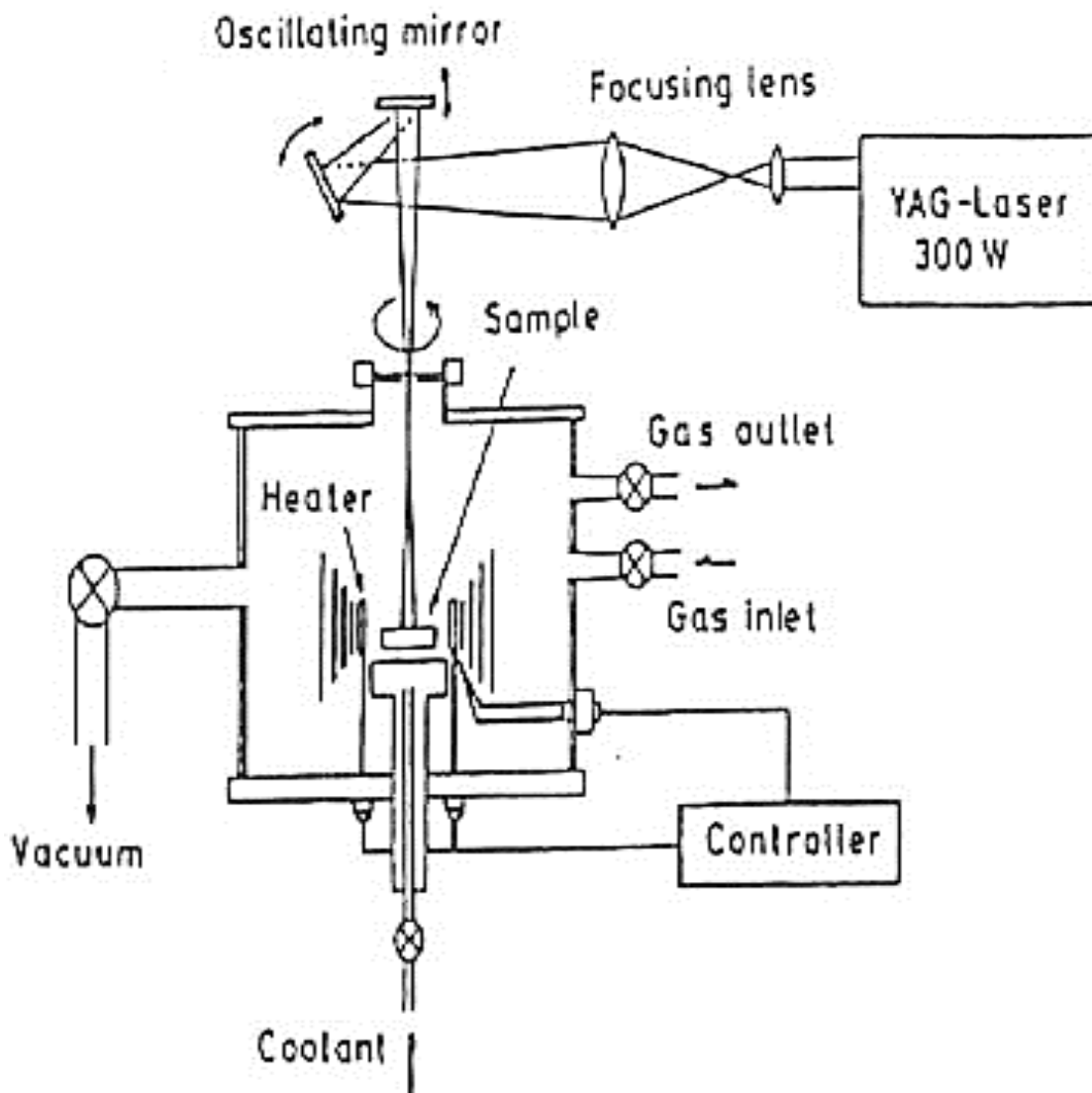
- Formation du tesson ou « prise ».
- Consolidation du tesson ou « raffermissement ».

La filtration, c'est à dire la formation du tesson lors du coulage, peut être considéré comme un processus d'élimination d'une partie de l'eau de la barbotine ; Cette eau migre à travers la couche de tesson déjà formée, sous l'effet :

- Du pouvoir de succion du plâtre (coulage classique) ; [Moya.J 92].
- Ou d'une pression appliquée sur la barbotine (coulage sous pression).

### **I.5.4. Frittage et Infiltration :**

Cette technique est constituée de deux étapes et convient à la fabrication d'un composite à gradient de fonction composé de deux matériaux dont les températures de fusion sont très différentes. La première étape est de fabriquer une matrice frittée du matériau à haute température de fusion avec un gradient de porosité. La seconde est de remplir ces porosités avec le deuxième matériau fondu par infiltration. Le résultat est excellent pour la diminution de la contrainte thermique [Teka.M 90].



**Figure I.3 :** Disposition du Procédé Frittage Laser Différentiel ; (Yuki et al (1990)).

### **I.5.5. Dépôt par électrophorèse :**

Le dépôt par électrophorèse est un procédé dans lequel une suspension colloïdale stable est placée dans une cellule contenant deux électrodes, le dépôt se fait par le mouvement des particules chargées au sein de la solution vers la cathode ou l'anode selon le signe de la charge des particules due à un champ électrique [Sark.P 96]. L'élaboration des FGMs peut se faire donc par le dépôt séquentiel des matériaux [Abdi.H 97].

### **I.5.6. Projection plasma :**

Un gaz soumis à une forte température (par exemple celle d'un arc électrique), se transforme en un état ionisé (plasma). Cette transformation est accompagnée d'un dégagement de chaleur

## Chapitre I : Présentation des matériaux fonctionnellement gradués

important. Si une particule de céramique se trouve dans cet environnement, elle se fond totalement ou superficiellement, ce qui permet de la situer sur un substrat. La projection plasma des particules des divers matériaux est devenue une méthode très utilisée pour fabriquer des FGMs l'équipement relativement simple, le rendement élevé du dépôt des particules sur des substrats à géométrie compliquée, les performances des surfaces en fonctionnement et la compatibilité des céramiques avec les métaux sont les avantages essentiels de cette technique [Stef.H 90].

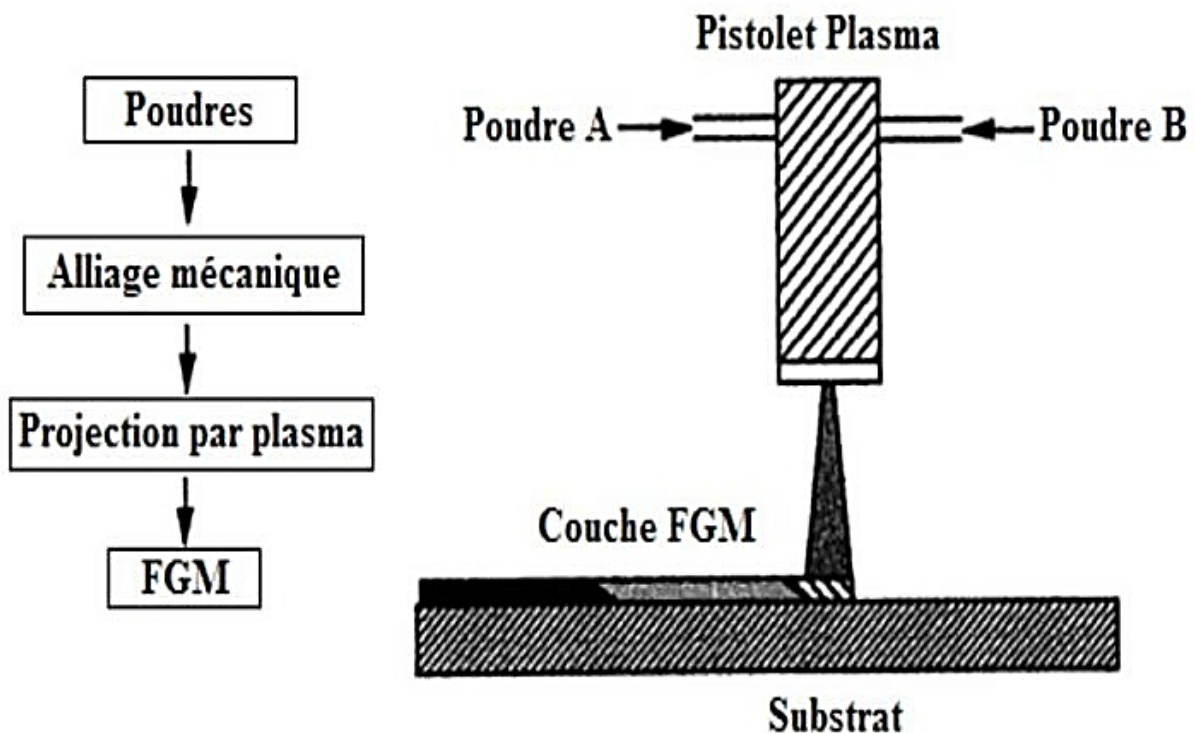


Figure I.4. : Fabrication d'une plaque FGM avec la projection plasma ; Steffens (1990).

### I.5.7. Implantation ionique :8

C'est une technique avancée pour la fabrication des FGMs permettant de réaliser seulement des épaisseurs fines ( $<1\mu\text{m}$ ) sur différents substrats (plastique, céramique, et métaux). Le traitement d'effectue par les faisceaux énergétiques d'ions eu via de gaz réactifs. Les couches fabriquées présenteront un gradient de composition qui peut être très finement contrôlé [Abdi.H 97].



### **I.6. Propriétés physiques et mécaniques des FGM :**

Pour ce travail le matériau FGM choisi est (Aluminium-Céramique).

#### **I.6.1. Propriétés physiques et mécaniques de l'aluminium :**

**I.6.1.1. Définition :** L'Aluminium est un métal blanc gris, très léger qui après polissage peut devenir réfléchissant.



**Figure I.5.** Aluminium brut.

#### **I.6.1.2. Propriétés physiques :**

L'Aluminium a une température de fusion relativement basse d'environ  $660^{\circ}$ . Il en résulte une facilité de fusion qui présente un avantage certain pour les opérations de fonderie. L'Aluminium est très ductile, on peut aisément le mettre en forme. La masse volumique de l'Aluminium est de  $2700 \text{ kg/m}^3$ . L'utilisation de l'Aluminium s'impose donc dans les domaines aéronautiques et du transport.

#### **I.6.1.3. Propriétés mécaniques :**

Les propriétés mécaniques des métaux présentent un grand intérêt dans la vie quotidienne, elles peuvent être classées en deux groupes :

- Celles qui se rapportent à la résistance mécanique du métal :
  - Résistance à la traction.
  - Résistance à la pénétration (dureté).
- Celles qui concernent les modifications de forme que le métal peut subir sans se briser
  - La malléabilité (mise en feuilles).
  - La ductilité (mise en fils).

## **Chapitre I : Présentation des matériaux fonctionnellement gradués**

---

- Propriétés des alliages d'aluminium : L'Aluminium a pour propriétés une :
- Température de travail élevée.
- Très bonne résistance à la corrosion.
- Légèreté.
- Très bonnes solidités, dureté et rigidité.
- Bon rapport force/poids.
- Bonnes propriétés de protection contre les interférences électromagnétiques.
- Bonne conductivité thermique.
- Conductivité électrique élevée.
- Bonnes caractéristiques de finition.
- Entièrement recyclable.

Résistance à la corrosion : Grâce à la couche d'oxyde qui se forme en surface, les alliages d'Aluminium résistent à la corrosion. On peut rendre cette couche protectrice d'oxyde plus épaisse par galvanisation. L'Aluminium et ses alliages peuvent être utilisés sans protection supplémentaire comme revêtement extérieur de bâtiments. Par contre dans les milieux corrosifs, les alliages d'Aluminium peuvent subir les effets de la corrosion. Des piqures, de la corrosion sous contrainte, de la fatigue corrosion, voire de la corrosion généralisée peuvent se développer. Pour des conditions données, la sévérité de l'attaque dépend de l'alliage utilisé et de son état.

### **I.6.2. Propriété physique et mécanique de céramique :**

#### **I.6.2.1. Définition de céramique :**

Céramique est un matériau manufacturé qui n'est ni un métal ni un produit organique.



**Figure I.6.** la céramique à l'état brut.

### **I.6.2.2. Propriété physique :**

La céramique résulte des terres et des roches broyées (matériaux géologiques) ou bien d'une argile qui sera modelée puis cuite sous haute température (transformation irréversible) ce qui fait perdre au matériau sa plasticité donc il ne peut plus se réhydrater [Nora. Kassimi 2011] La céramique a une facilité de fusion qui présente un avantage certain pour les opérations de fonderie. La masse volumique de la céramique est de 3800 kg/m<sup>3</sup>. L'utilisation de la céramique s'impose dans les domaines de l'habitat et du design, l'industrie céramique et métallurgique, aéronautique et spatial, médicale et dans les revêtements [Lazreg. Hadji 2012].

### **I.6.2.3. Propriété mécanique :**

Les propriétés mécaniques de la céramique dépendent des :

- Matières première employées.
- Méthodes de fabrication qui fixent les microstructures finales et déterminent la répartition des différentes phases en présence.

La céramique se caractérise par :

- Un module de YOUNG élevé (Liaisons, covalente, ioniques).
- Une dureté élevée (Abrasif, outils de coupe, surfaces de frottement qui doivent résister à l'usure, résistance mécanique élevée, bonne tenue à chaud, rigidité élevée).
- Une très bonne résistance à la compression non à la traction (Résistance à la compression = 200 MPA).

### **I.7. Domaines d'applications des matériaux à gradient évalué :**

Les principaux domaines d'application des FGM sont :

- **Génie civil** : ponts à poutres en caisson, les cheminées, les fondations élastique (ces structures de plaque peuvent être trouvées dans différents types d'applications industrielles telles que radiers), réservoir de stockage, les piscines.
- **Aéronautique** : composant de moteur-fusée, corps des avions spatiaux.
- **Chimique** : l'échangeur de chaleur, tube de chaleur, récipient de réaction.
- **Ingénierie** : outils de coupe, éléments de moteur.
- **L'énergie nucléaire** : composante des réacteurs nucléaires, pastilles de combustible.
- **Electronique** : semi-conducteur à bande graduée, capteurs.
- **Optique** : fibres optiques, lentilles.

## **Chapitre I : Présentation des matériaux fonctionnellement gradués**

---

- **Conversion d'énergie** : générateur thermo électrique, convertisseur thermoïonique, pile à combustible. Matières biologiques : implants, peau artificielle,
- Produits en générale : matériaux de construction, corps de voiture, verres de fenêtre

### **I.8. Conclusion :**

Le développement des matériaux utilisés dans les différents domaines d'ingénierie a suscité l'intérêt des humains depuis la découverte des premières matières de base pour les rendre plus résistant moins coûteux et avec des temps de réalisation inférieure, d'où l'apparition des matériaux avancés.

Ce chapitre présente nous a permis d'avoir une vision d'ensemble sur les travaux existants concernant les matériaux composites et les matériaux fonctionnellement gradués (FGM).

***CHAPITRE II :***  
***Les différentes Théories***  
***Des Poutres***

**II.1. Introduction :**

Ce chapitre présente une revue de quelques travaux scientifiques portant sur les matériaux à gradient de propriétés « FGM » en mettant l'accent sur les travaux publiés récemment. Divers espaces pour les différents aspects des FGM sont reflétés dans ce chapitre. La revue est consacrée à des modèles théoriques qui ont été développés pour prédire les réponses globales des poutres à gradient fonctionnel sous chargement mécanique et thermique. Cette revue se concentre principalement sur les théories de la couche unique équivalente (ESL), y compris la théorie classique de la poutre (CPT), la théorie de la déformation de cisaillement de premier ordre (FSDT), les théories d'ordre élevé de la déformation de cisaillement (HSDTs), des théories simplifiées et théories mixtes puisqu'elles ont été largement utilisées dans la modélisation des plaques et coques à gradient fonctionnel. En outre, un examen approfondi de la littérature liée au développement des solutions d'élasticité en trois dimensions (3D) et une formulation unifiée est également présentée.

**II.2. Définition de poutre :**

Le terme « poutre » désigne un élément porteur horizontal et linéaire faisant partie de l'ossature d'un plancher de bâtiment ou d'un tablier de pont. Une poutre reçoit des actions mécaniques, et les transmet sur des appuis. Plus généralement, au sens de la résistance des matériaux, une poutre est un élément de forme élancée, de section constante.

**II.3. Types de poutres :****II.3.1. Poutre simple :**

C'est une poutre reposant sur deux supports ; un appui double et appui simple. Les points d'appui sont articulés de façon à ce que les extrémités puissent se mouvoir librement pendant la flexion.



Figure II.1 : Poutre simple

### II.3.2. Poutre console :

C'est une poutre encastée a une extrémité. Cette extrémité ne bouge pas pendant la flexion, tandis que l'autre extrémité est entièrement libre. Cette poutre est appelée aussi porte-à-faux ou poutre encastée a une extrémité.

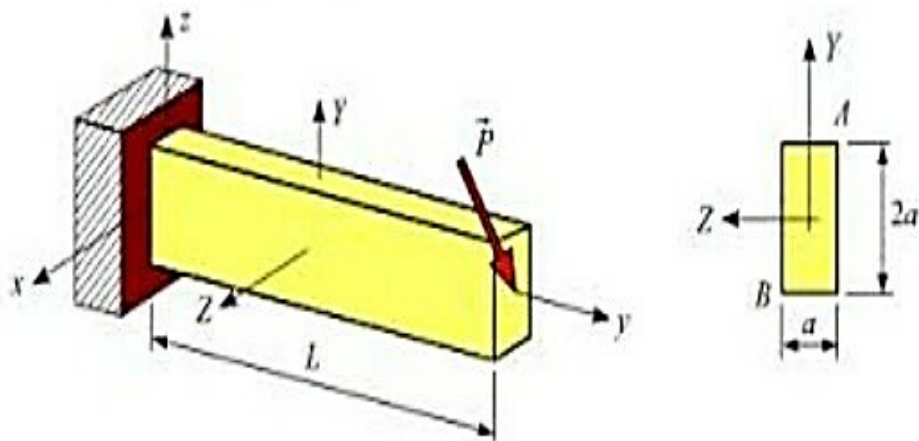


Figure II.2 : Poutre console

### II.3.3. Poutre avec porte-à-faux :

C'est une poutre sur deux appuis (un simple et l'autre double), elle a une ou deux extrémités qui dépassent de façon appréciable les appuis (porte-à-faux). Les poutres sont classées suivant leurs appuis. Ces trois précédents types de poutres entrent dans la catégorie des poutres statiquement déterminées (poutres isostatiques), parce qu'elles possèdent trois inconnues reliées aux trois degrés de liberté et par le fait même des équations d'équilibre.

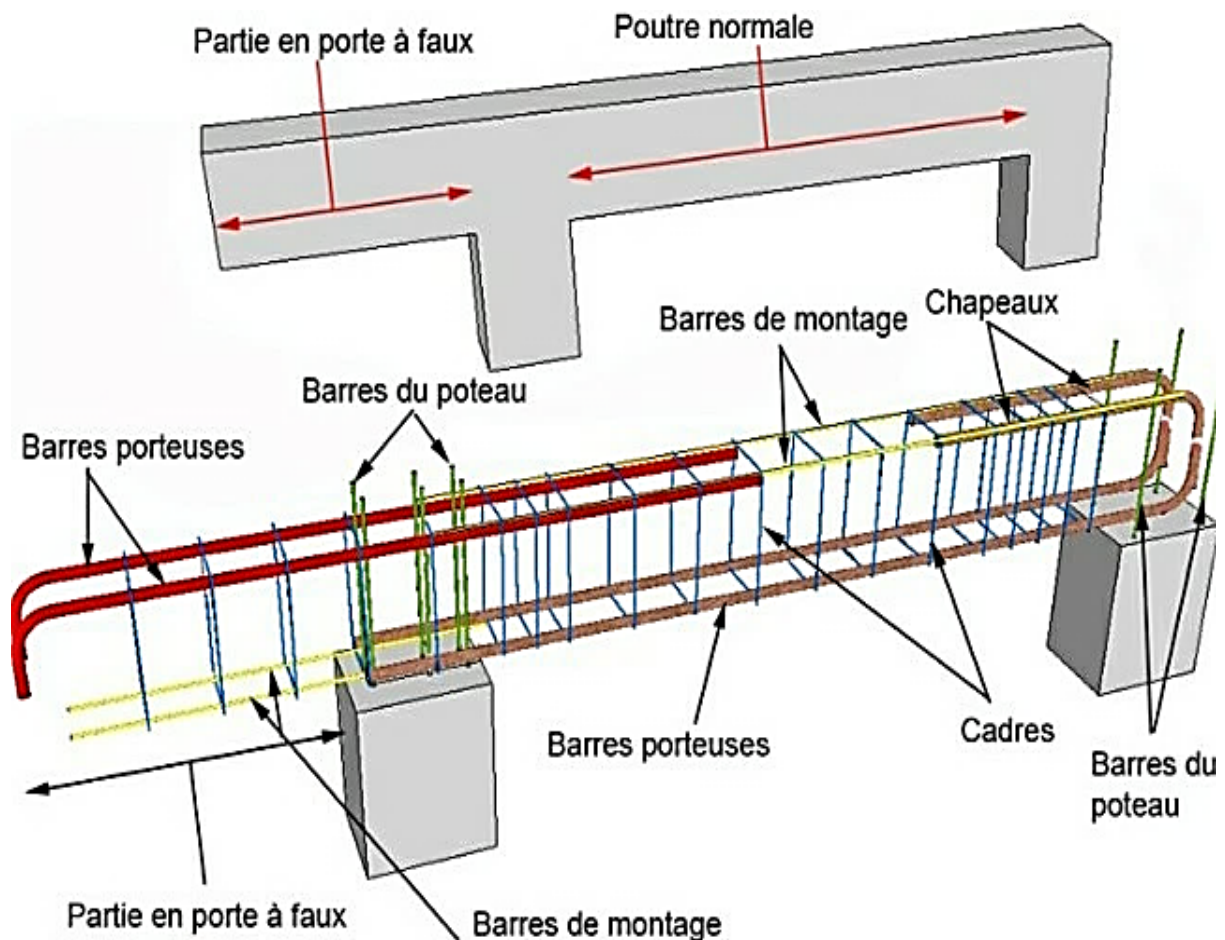
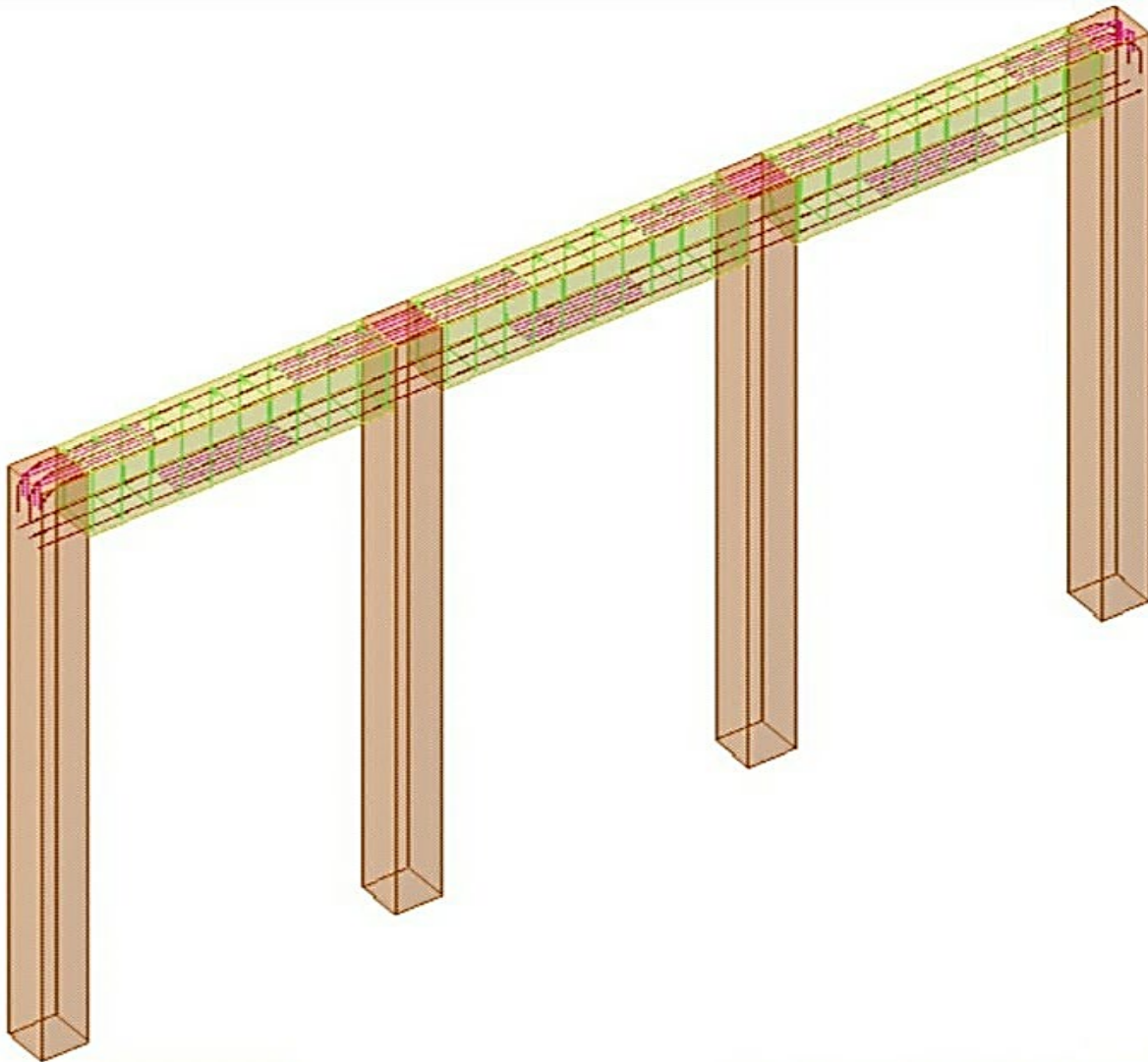


Figure II.3 : Poutre avec porte-à-faux

### II.3.4. Poutre continue :

C'est une poutre sur plusieurs appuis, elle est statiquement indéterminée (hyperstatique), elle est traitée généralement par la méthode de trois moments (Clapeyron).





**Figure II.4 :** Poutre continue

### **II.3.5. Poutre à double encastrement :**

C'est une poutre encastree sur les deux extremités, elle est donc en équilibre hyperstatique, plusieurs méthodes sont disponibles pour son analyse, telles que la méthode des paramètres initiaux.

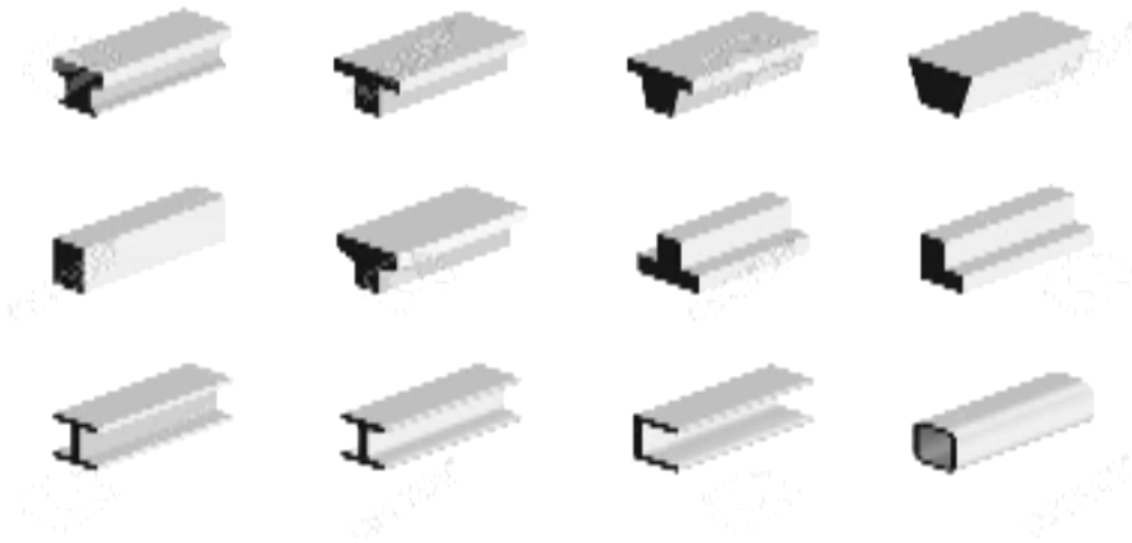


Figure II.5 : poutre à double encastrement

#### II.4. Historique des théories des poutres :

L'origine de la théorie des poutres est attribuée De Vinci qui avait supposé que la déformation varie de manière linéaire ne cartant la surface neutre ,mais il ne put finaliser ses calculs car il ne connaissait pas la loi de Hooke .En 1750 Leonard Euler et Jacques Bernoulli émirent la première théorie utile , alors que Daniel Bernoulli , écrivit l'équation différentielle pour l'analyse vibratoire .A cette époque, le génie mécanique n'était pas reconnu comme nescience ,et on ne considérait pas que les travaux d'une académie des mathématiques puissent avoir des applications pratiques .

Continuant bâtir les ponts et les bâtiments de manière empirique. Ce n'est qu'au XIX<sup>e</sup> siècles avec la Tour Eiffel et les grandes roues, qu'on démontra la validité de la théorie à grande échelle.

#### II.5 Les différentes théories des poutres :

La théorie des poutres s'applique sur des solides élancés (typiquement les prismes dont la longueur vaut 10 fois la plus grande dimension transversale). Là où la détermination de la solution exacte pour les champs de contrainte et de déformation n'est pas possible, elle permet d'obtenir une solution approchée, qui donne une bonne idée sur les efforts et les déplacements

**II.5.1 Modèle d'Euler Bernoulli (Classical Beam Theory- CBT) :**

Il est bien connu que la théorie d'Euler-Bernoulli est basée sur la théorie élémentaire de flexion des poutres qui ne tient pas compte des effets de la déformation de cisaillement. Il est également connu qu'elle n'est applicable qu'aux poutres fines.

Dans cette approche, le nombre d'équations ne dépend pas du nombre de couches puisque la poutre multicouche est homogénéisée, donc considérée comme une seule couche.

Comme hypothèse de cette théorie, les déformations dues au cisaillement transversal sont négligées (pas de cisaillement sur la hauteur de la poutre),

La section reste perpendiculaire à la ligne moyenne de la poutre et la section reste plane.

La fonction qui décrit la répartition de déplacement suivant l'épaisseur de la poutre est

$$\emptyset(z) = \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad (\text{II.1})$$

Pour le cas des poutres élancées et d'après la théorie classique des poutres, le déplacement d'un point M est donné par les deux composantes suivantes :

$$U(M) = \begin{cases} u(x, z) = u^0(x) - zW_x^0(x) \\ w(x, z) = w^0(x) \end{cases} \quad (\text{II.2})$$

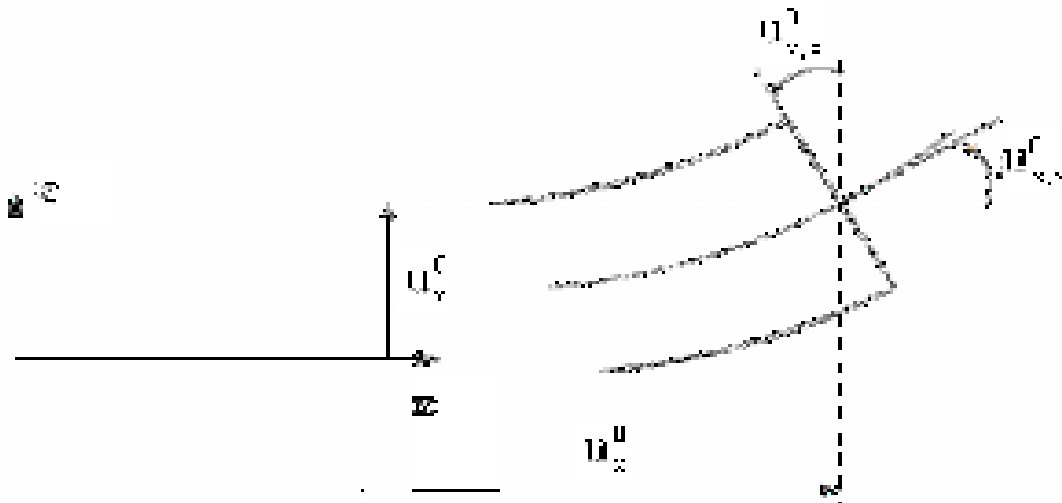


Figure II.5: Cinématique d'Euler Bernoulli

$u(x, z)$  : C'est le déplacement suivant X et  $w(x, z)$  est le déplacement dans la direction de Z ou bien la flèche.

La rotation autour de l'axe Y, provoquée par la flexion est tel que :

$$W_x^0(x) = \frac{\partial w^0}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad (\text{II.3})$$

$u^0(x)$  et  $w^0(x)$  sont les composantes de déplacement au milieu de la section et sur la ligne moyenne de la poutre, respectivement le long des axes X et Z.

Lorsque cette théorie est utilisée pour l'analyse des fréquences naturelles des poutres, les flèches sont sous-estimées. Ceci est la conséquence de négliger la déformation de transversal.

### II.5.2 Modèle de Timoshenko (FSDBT) :

La théorie de Timoshenko est plus riche et plus générale que la théorie élémentaire des poutres au prix d'une fonction supplémentaire. Cette solution permet d'affiner les solutions analytiques issues de la théorie classique.

Toutefois ces solutions sont entachées d'erreurs au voisinage des appuis et de la zone indentation ou nous pouvons avoir des concentrations de contrainte et des champs de déplacement non homogènes.

Elle s'applique sur des poutres courtes, elle est basée sur le principe ; qu'après déformation, la section plane reste plane mais elle perd sa perpendicularité par rapport à la ligne moyenne de

la poutre (Figure II.2). Ceci est dû au cisaillement transversal, découvert par Timoshenko, sur l'épaisseur de la poutre.

Cette théorie est analogue à la théorie de "Reissner-Mindlin" dans le cas des plaques épaisses. Dans le cas où nous avons un élancement faible, l'effet du cisaillement devient plus important sur la déformée. Dans ce cas, la fonction  $\varnothing(z)$  est égale à  $Z$ .

Il existe un cisaillement uniforme et les déformations dues au cisaillement transversal ne sont pas négligées. C'est la théorie de premier ordre (FSDBT)

Le déplacement d'après Timoshenko s'écrit comme suit :

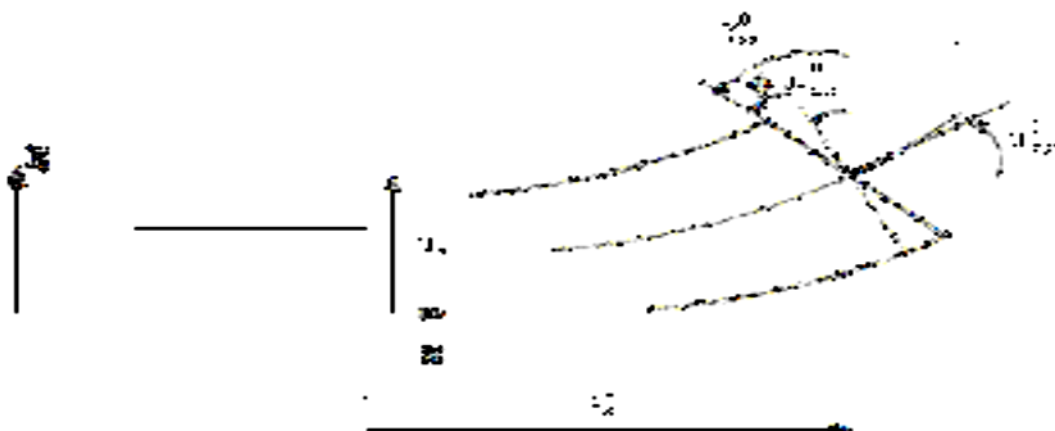
$$U(M) = \begin{cases} u(x, z) = u^0 - zw'_x(x) + z\gamma_{xz}^0(X) \\ w(x, z) = w^0(x) \end{cases} \quad (II.4)$$

$\gamma_{xz}^0(x)$  : C'est la déformation angulaire mesurée sur la ligne moyenne de la poutre.

Tel que :

$$\gamma_{xz}^0(x) = w'_x(x) - \varnothing^0(x) \quad (II.5)$$

$\varnothing^0(x)$  Etant la rotation totale de la section mesurée sur la ligne moyenne de la poutre.



**Figure II.6 :** Cinématique de Timoshenko.

Par définition, la distorsion est donnée par la relation suivante

$$\gamma_{xz}(x) = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = -w'_x + \gamma_{xz}^0(X) + w'_x(x) \quad (II.6)$$

Sachant que la contrainte de cisaillement est égale :

$$\tau_{xz} = G_{XZ}\gamma_{XZ} = G_{XZ}\gamma_{XZ}^0 \quad (\text{II.7})$$

$G_{XZ}$  : est le module de cisaillement transversal qui est supposé constant.

Avec cette théorie, les contraintes tangentielles de cisaillement sont constantes et uniforme sur toute l'épaisseur de la poutre ; cela veut dire qu'elles existent même sur les bords supérieurs et inférieurs de la poutre et pourtant il n'y a aucun chargement qui induit le cisaillement.

Cette contradiction menée à introduire des coefficients pour corriger et maintenir les contraintes et les déformations du cisaillement transversal constantes à travers l'épaisseur de la poutre. Ce facteur a été calculé pour la variété de sections de poutres par [Mind lin et Deresiewicz]. Cowper et Murtyont donne de nouvelles expressions de ce coefficient pour différentes sections de la poutre. La théorie de Timoshenko est plus riche et plus générale que la théorie élémentaire des poutres au prix d'une fonction supplémentaire. Cette solution permet d'affiner les solutions analytiques.

Bien qu'issues de la théorie classique, ces solutions sont toutefois entachées d'erreurs au voisinage des appuis et de la zone indentation ou nous pouvons avoir des concentrations de contrainte et des champs de déplacement non homogènes.

Les non nullité des contraintes tangentielles sur les bords extrêmes de la poutre et l'introduction des coefficients de correction de cisaillement ont menés d'autres chercheurs à essayer de trouver une autre théorie pouvant tenir compte de ces facteurs ; c'est "la théorie d'ordre élevé".

### II.5.3 Théorie d'Ordre Elevé :

Dans cette théorie la distribution des champs de déplacement est non linéaire selon l'épaisseur de la poutre. Elle est plus précise que la théorie du premier ordre puisqu'elle introduit une fonction qui tient compte du phénomène de "gauchissement". Ce phénomène apparait lorsque la section transversale de la poutre perd sa planéité (figure. II.3).

La fonction représente le gauchissement et sa dérivée  $\psi'(z)$  représente le cisaillement.

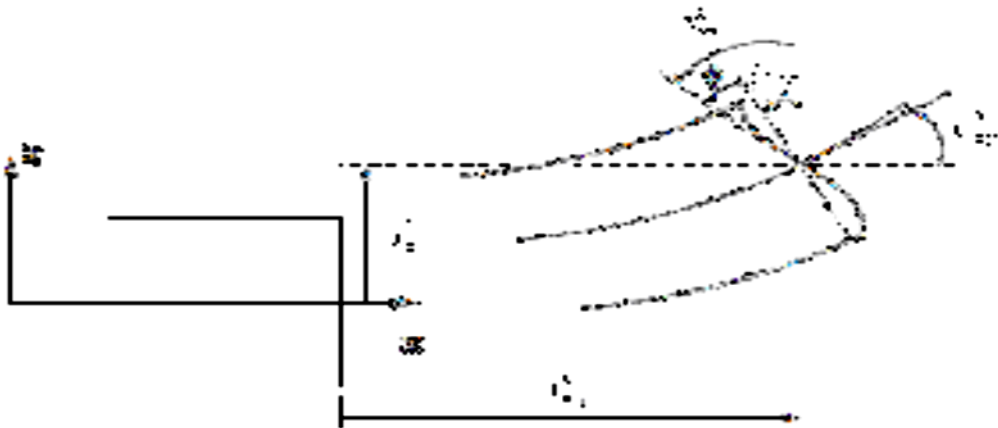


Figure II.7: cinématique de la théorie d'ordre élevé

Dans ce cas, le champ de déplacement devient :

$$U(M) = \begin{cases} u(x, z) = u^0(x) - zw_x^0(x) + \Phi(z)\gamma_{xz}^0(x) & \text{(II. 8)} \\ w(x, z) = w^0(x) & \text{(II. 9)} \end{cases}$$

$$\gamma_{xz}(x) = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = -w_x^0 + \Phi'(z)\gamma_{xz}^0(x) + w_x^0(x) \quad \text{(II.10)}$$

$$\gamma_{xz}(x) = \Phi'(z)\gamma_{xz}^0(x)$$

Pour que les contraintes tangentielles soient nulles sur les bords extrêmes de la poutre, on doit avoir :

$$\Phi'(z)|_{z = \pm h/2} = 0 \quad \text{(II.11)}$$

C'est la condition qui nous permet d'avoir une répartition parabolique des contraintes de cisaillement sur l'épaisseur de la poutre d'une part et de choisir correctement des fonctions cubiques qui répondent à la condition.

Selon l'expression de la fonction de gauchissement quel que  $\psi(z)$  modèles sont présentes dans la littérature des poutres en FGM :

Le modèle Euler-Bernoulli (la théorie des poutres classiques) (CBT) :

$$\Psi(z)=0 \quad \text{(II.12.a)}$$

Le modèle de Timoshenko ou bien la théorie du premier ordre (FSDBT) :

$$\Psi(z)= 0 \quad \text{(II.12.b)}$$

Le modèle de puissance avec l'approche de (PSDBT) :

$$\Psi(z) = z \left( 1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right) \quad (\text{II.12.c})$$

Le modèle exponentiel propose par (ESDBT) :

$$\Psi(z) = ze^{-2\left(\frac{z}{h}\right)^2} \quad (\text{II.12.d})$$

Le modèle trigonométrique :

$$\Psi(z) = \frac{h}{\pi} \sin \frac{\pi z}{h} \quad (\text{II.12.e})$$

Avec :  $h$  : épaisseur de la poutre.

## II.7. Conclusion :

Dans ce chapitre, nous sommes attachés à présenter l'historique des théories des poutres. En premier temps, nous avons présenté le comportement des poutres composites qui est plus complexe que celui d'une poutre en matériaux traditionnels, métalliques par exemple, et nous l'avons terminé par une démonstration des différentes théories des poutres telles que la théorie classique (CBT), la théorie de cisaillement de premier ordre (FSDBT) et les théories d'ordre élevé HSDBT. (PSDBT, SSDBT, ESDBT).



***CHAPITRE III :***  
***Modèle De Simulation***  
***Mathématique***

**III.1. Introduction :**

Dans le présent chapitre, une étude analytique du comportement statique et vibratoire des structures FGM a été présentée.

D'abord une nouvelle approche analytique utilisant une théorie de la déformation par cisaillement hyperbolique d'ordre élevé (HSST) pour étudier la flexion et la vibration libre des poutres de matériau fonctionnellement gradué (FGM).

Ensuite, une étude analytique de l'effet de la porosité sur la propagation des ondes dans les poutres FGM poreux en utilisant une nouvelle forme de distribution de la porosité.

**III.2. Formulation théorique :**

La formulation théorique d'une poutre épaisse FG uniforme ayant des porosités basées sur certaines hypothèses cinématiques et physiques sont présentées. Les formes variationnellement correctes de la différentielle les équations et les conditions aux limites, basées sur le champ de déplacement supposé sont obtenues en utilisant le principe du travail virtuel. Comme on le voit sur la (figure III.1), la poutre considérée occupe la Région :

$$0 \leq x \leq L; -\frac{b}{2} \leq y \leq \frac{b}{2}; -\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2} \quad (\text{III.1})$$

Où  $x, y, z$  sont des coordonnées cartésiennes,  $L$  est la longueur,  $b$  est la largeur et  $h$  est la profondeur totale de faisceau. La poutre est soumise à une charge transversale d'intensité  $q(x)$  par unité de longueur de la poutre. Le faisceau peut avoir toutes les conditions aux limites significatives.

**III.2.1. Propriétés matérielles effectives des poutres céramo-métalliques fonctionnellement graduées :**

Un faisceau FG constitué d'un mélange de deux phases matérielles, par exemple, un métal et une céramique. Les propriétés matérielles des poutres FG sont supposées varier de manière continue à travers l'épaisseur du rayon. Dans cette étude, le faisceau imparfait est supposé avoir des porosités s'étendant dans l'épaisseur due au défaut pendant la production. Considérons une FGM imparfaite avec un volume de porosité fraction,  $\alpha$  ( $\alpha \ll 1$ ), répartie

uniformément entre le métal et la céramique, la règle de mélange modifiée proposé par Wattanasakulpong et Ungbhakorn (2014) est utilisé comme :

$$P = P_m \left( V_m - \frac{\alpha}{2} \right) + P_c \left( V_c - \frac{\alpha}{2} \right) \quad (\text{III.2})$$

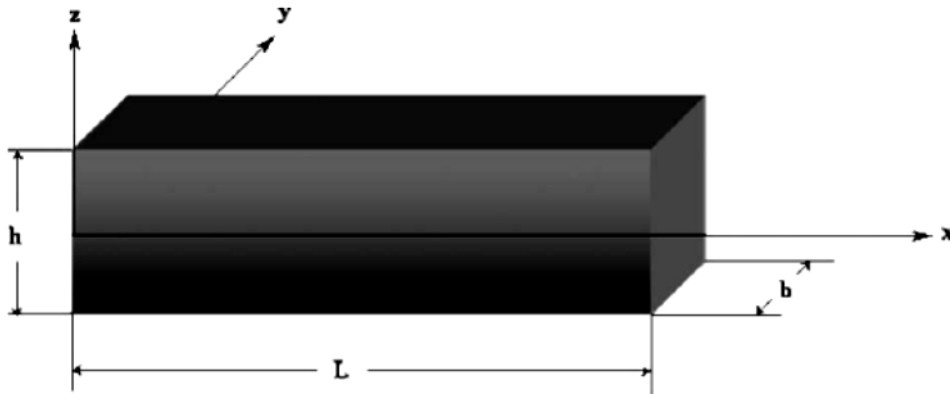


Figure III.1 : Coordonnées et géométrie d'une poutre à gradient fonctionnel

Maintenant, la fraction volumique totale du métal et de la céramique est :  $V_m + V_c = 1$ , et la loi de puissance de la fraction volumique de la céramique est décrite comme :

$$V_c = \left( \frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^k \quad (\text{III.3})$$

Par conséquent, toutes les propriétés de la FGM imparfaite peuvent être écrites comme :

$$P = (P_c - P_m) \left( \frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^k + P_m - (P_c + P_m) \frac{\alpha}{2} \quad (\text{III.4})$$

On note que le nombre réel positif  $k$  ( $0 \leq k \leq \infty$ ) est la loi de puissance ou indice de fraction volumique, et  $z$  est la distance depuis le plan médian de la plaque FG. Le faisceau FG devient entièrement céramique plaque lorsque  $k$  est mis à zéro et entièrement métallique pour une grande valeur de  $k$ .

Ainsi, les équations du module de Young ( $E$ ) et de la densité du matériau ( $\rho$ ) du faisceau FGM imparfait peut être exprimé comme :

$$E(z) = (E_c - E_m) \left( \frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^k + E_m - (E_c + E_m) \frac{\alpha}{2} \quad (\text{III.5})$$

$$\rho(z) = (\rho_c - \rho_m) \left( \frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^k + \rho_m - (\rho_c + \rho_m) \frac{\alpha}{2} \quad (\text{III.6})$$

Cependant, le coefficient de Poisson ( $\nu$ ) est supposé constant. Les propriétés matérielles d'une poutre FG parfait peut être obtenu lorsque  $\alpha$  est mis à zéro.

De plus, pour un autre scénario de distribution de porosité, il est possible d'obtenir des FGM imparfaits échantillons qui ont presque des porosités s'étendant autour de la zone médiane de la section et la quantité de porosité semble diminuer jusqu'à zéro en haut et en bas de la Coupe transversale. Basé sur le principe de la technique d'infiltration séquentielle multi-étapes qui peut être utilisé pour fabriquer des échantillons de FGM (Wattanasakulpong et al. 2012), les porosités se produisent principalement la zone médiane. Dans cette zone, il est difficile d'infiltrer complètement les matériaux, alors qu'en haut et les zones inférieures, le processus d'infiltration du matériau peut être effectué plus facilement et laisse moins porosité. Considérons ce scénario, les équations du module de

Young ( $E$ ) et de la densité du matériau ( $\rho$ ) dans Éqs. (III.5) -(III.6) sont remplacés par les formulaires suivants

$$E(z) = (E_c - E_m) \left( \frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^k + E_m - (E_c + E_m) \frac{\alpha}{2} \left( 1 - \frac{2|z|}{h} \right) \quad (\text{III.7})$$

$$\rho(z) = (\rho_c - \rho_m) \left( \frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^k + \rho_m - (\rho_c + \rho_m) \frac{\alpha}{2} \left( 1 - \frac{2|z|}{h} \right) \quad (\text{III.8})$$

### III.2.2. Hypothèses faites dans la formulation théorique :

- Les déplacements sont faibles par rapport à l'épaisseur de la poutre et donc aux déformations impliquées sont infinitésimaux.
- Le déplacement transversal  $w$  comprend deux composantes de flexion  $w_b$  et de cisaillement  $w_s$ . Ces composants sont des fonctions de coordonnée  $x$  uniquement.

$$w(x, z) = w_b(x) + w_s(x) \quad (\text{III.9})$$

- La contrainte normale transversale  $\sigma_z$  est négligeable par rapport à la contrainte dans le plan  $\sigma_x$ .
- Le déplacement axial  $u$  se compose des composantes d'extension, de flexion et de cisaillement.

$$u = u_0 + u_b + u_s \quad (\text{III.10})$$

Les composantes de flexion  $v_b$  et  $u_b$  sont supposées similaires aux déplacements donnés par les théories classiques des poutres (ETB). Par conséquent, l'expression pour  $u_b$  peut être donnée comme :

$$u_b = -z \frac{\partial w_b}{\partial x} \quad (\text{III.11})$$

La composante de cisaillement  $u_s$  donne lieu, conjointement avec  $w_s$ , aux variations, paraboliques de déformation en cisaillement  $\gamma_{xz}$  et la contrainte de cisaillement  $\tau_{xz}$  varie à travers l'épaisseur de la poutre de telle manière que la contrainte de cisaillement  $\tau_{xz}$  est nulle sur les faces supérieure et inférieure de la poutre. Par conséquent, l'expression pour  $u_s$  peut être donnée comme (Shimpi et Patel 2006a, b, Tounsi et al. 2013b)

$$u_s = z \left[ \frac{1}{4} - \frac{5}{3} \left( \frac{z}{h} \right)^2 \right] \frac{\partial w_s}{\partial x} \quad (\text{III.12})$$

### III.2.3. Cinématique et équations constitutives :

Sur la base des hypothèses mentionnées ci-dessus, le champ de déplacement de la théorie actuelle des poutres est donné par :

$$\begin{cases} u(x, z, t) = u_0(x, t) - z \frac{\partial w_b}{\partial x} + z \left[ \frac{1}{4} - \frac{5}{3} \left( \frac{z}{h} \right)^2 \right] \frac{\partial w_s}{\partial x} \\ w(x, z, t) = w_b(x, t) + w_s(x, t) \end{cases} \quad (\text{III.13})$$

Les déformations associées aux déplacements dans l'Eq. (III.13) sont

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \varepsilon_x^0 + zk_x^b + fk_x^s \\ \gamma_{xz} = g\gamma_{xz}^s \end{cases} \quad (\text{III.14})$$

Où :

$$\varepsilon_x^0 = \frac{\partial u_0}{\partial x}, \quad k_x^b = \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2}, \quad k_x^s = \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2}, \quad \gamma_{xz}^s = \frac{\partial u_s}{\partial x},$$

$$f = \frac{-1}{4}z + \frac{5}{3}z\left(\frac{z}{h}\right)^2, \quad g = \frac{5}{4} - 5\left(\frac{z}{h}\right)^2 \quad (\text{III.15})$$

En supposant que le matériau de la poutre FGM obéit à la loi de Hooke, les contraintes dans la poutre devenir

$$\sigma_x = E(z)\varepsilon_x \text{ et } \tau_{xz} = G(z)\gamma_{xz} \quad (\text{III.16})$$

#### III.2.4. Equations directrices et conditions aux limites :

En utilisant les équations. (III.14) -(III.16) pour les déformations et contraintes et version dynamique du principe du travail virtuel (Draiche et al .2014, Nedriet al. 2014), équations différentielles gouvernant la cohérence variation elle et les conditions aux limites pour la poutre considérée sont obtenues. Le principe du travail virtuel lorsqu'il est appliqué à la poutre conduit à

$$\int_0^L \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \tau_{zx} \delta \gamma_{zx}) dz dx - \int_0^L \int_{-h/2}^{h/2} \rho [\ddot{u}_0 \delta u_0 + \ddot{v}_0 \delta v_0 + (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) \delta (w_b + w_s)] dz dx = 0 \quad (\text{III.17}),$$

La collecte des coefficients  $\delta u_0$ ,  $\delta w_b$  et  $\delta w_s$  dans l'Eq. (III.17), les équations du mouvement sont obtenues comme suit :

$$\delta u_0: \frac{dN}{dx} = I_0 \ddot{u}_0 \quad (\text{III.18a})$$

$$\delta w_b: \frac{d^2 M_b}{dx^2} = I_0 (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) - I_2 \frac{d^2 \ddot{w}_b}{dx^2} \quad (\text{III.18b})$$

$$\delta w_s: \frac{d^2 M_s}{dx^2} + \frac{dQ}{dx} = I_0 (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) - \frac{I_2}{84} \frac{d^2 \ddot{w}_s}{dx^2} \quad (\text{III.18c})$$

Où  $N, M_b, M_s$  et  $Q$  sont les résultantes des contraintes définies comme

$$(N, M_b, M_s) = \int_{-h/2}^{h/2} (1, z, f) \sigma_x dz \text{ et } Q = \int_{-h/2}^{h/2} g \tau_{xz} dz \quad (\text{III.19a})$$

Et  $(I_0, I_2)$  sont des inerties de masse définies comme

$$(I_0, I_2) = \int_{-h/2}^{h/2} (1, z^2) \rho_x dz \quad (\text{III.19b})$$

Éq. (III.18) peut être exprimé en termes de déplacements  $(u_0, w_b, w_s)$  en utilisant les équations. (III.13), (III.14), (III.15) et (III.19) comme suit

$$A_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} - B_{11} \frac{\partial^3 w_b}{\partial x^3} - B_{11}^s \frac{\partial^3 w_s}{\partial x^3} = I_0 \ddot{u}_0 \quad (\text{III.20a})$$

$$B_{11} \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} - D_{11} \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^4} - D_{11}^s \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^4} = I_0 (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) I_2 \frac{\partial^2 \ddot{u}_b}{\partial x^2} \quad (\text{III.20b})$$

$$B_{11}^s \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} - D_{11}^s \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^4} - H_{11}^s \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^4} + A_{55}^s \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} = I_0 (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) \frac{I_2}{84} \frac{\partial^2 \ddot{u}_b}{\partial x^2} \quad (\text{III.20c})$$

Où les composantes de rigidité et les inerties sont données comme

$$\{A_{11}, B_{11}, D_{11}, E_{11}, F_{11}, H_{11}\} = \int_{-h/2}^{h/2} \{1, z, z^2, z^3, z^4, z^6\} E(z) dz \quad (\text{III.21})$$

$$B_{11}^s = -\frac{1}{4} B_{11} + \frac{5}{3h^2} E_{11},$$

$$B_{11}^s = -\frac{1}{4} D_{11} + \frac{5}{3h^2} F_{11},$$

$$H_{11}^s = \frac{1}{16} D_{11} - \frac{5}{6h^2} F_{11} + \frac{25}{9h^4} H_{11},$$

$$\{A_{55}, D_{55}, F_{55}\} = \int_{-h/2}^{h/2} \{1, z^2, z^4\} G(z) dz,$$

$$A_{55}^s = \frac{25}{16} A_{55} - \frac{25}{2h^2} D_{55} + \frac{25}{h^4} F_{55},$$

### III.3. Solution analytique :

Les équations du mouvement admettent les solutions de Navier pour les poutres simplement appuyées. Les variables,  $u_0, w_b, w_s$  peut s'écrire en supposant les variations suivantes.

$$\begin{Bmatrix} u_0 \\ w_b \\ w_s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} U_m \cos(x) e^{i \omega t} \\ W_{bm} \sin(x) e^{i \omega t} \\ W_{sm} \sin(x) e^{i \omega t} \end{Bmatrix} \quad (\text{III.22})$$

Où  $U_m, W_{bm}$ , et  $W_{sm}$  sont des paramètres arbitraires à déterminer,  $\omega$  est la fréquence propre associé même au mode propre, et  $\lambda = m\pi/L$

En remplaçant les équations. (III.21) et (III.22) en équations de mouvement (III.20) permet de descendre en dessous de la valeur propre pour toute valeur fixe de  $m$ , pour le problème de vibration libre

$$([K] - \omega^2[M])\{\Delta\} = \{0\} \quad (\text{III.23})$$

Où  $\{\Delta\}$  désigne la colonne

$$\{\Delta\}^T = \{U_m, W_{bm}, W_{sm}\} \quad (\text{III.24})$$

Et

$$[K] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{12} & k_{22} & k_{23} \\ k_{13} & k_{23} & k_{33} \end{bmatrix}, [M] = \begin{bmatrix} m_{11} & 0 & 0 \\ 0 & m_{22} & m_{23} \\ 0 & m_{23} & m_{33} \end{bmatrix} \quad (\text{III.25})$$

Dans lequel



$$\begin{aligned}k_{11} &= A_{11} \cdot \alpha^2 \\k_{12} &= -B_{11} \cdot \alpha^3 \\k_{13} &= -B_{11}^s \cdot \alpha^3 \\k_{22} &= D_{11} \cdot \alpha^4 \\k_{23} &= -B_{11}^s \cdot \alpha^4 \\k_{33} &= H_{11}^s \cdot \alpha^4 + A_{11}^s \cdot \alpha^2 \\m_{11} &= m_{23} = I_0 \\m_{22} &= I_0 + I_2 \cdot \alpha^2 \\m_{33} &= I_0 + \frac{I_2}{84} \alpha^2\end{aligned} \tag{III. 21}$$

#### III.4. Conclusion :

Dans ce chapitre une approche analytique a été développée pour l'étude de la stabilité des poutres en FGM simplement appuyée ou nous avons utilisé des formulations ci-dessus pour étudier l'effet des paramètres du matériau sur le comportement de la poutre FG vis-à-vis la flexion et la vibration libre.

**Chapitre 4 :**  
**Résultats**  
**Numériques et**  
**discussion**

**IV.1. Introduction :**

Le but de ce chapitre est de présenter et de discuter d'une part les résultats de l'analyse de la vibration libre des poutres FGM avec la pris en compte de l'effet de la déformation normale (l'effet de stretching), et d'autre part l'analyse des résultats de l'effet de la porosité sur leur comportement.

Toutes les analyses basées sur le présent modèle sont effectuées en utilisant Logiciel Maple18

**IV.2. Résultats numériques et discussion :**

En analyse numérique, les fréquences fondamentales de FG simplement supportées parfaites et imparfaites les poutres sont requises. Les poutres FG sont en aluminium ( $Al$  ;  $E_m = 70$  GPa,  $\rho_m = 2700$  kg/m<sup>3</sup>,  $V_m = 0,23$ ) et de l'alumine ( $Al_2O_3$  ;  $E_c = 380$  GPa,  $\rho_c = 3800$  kg / m<sup>3</sup>,  $V_c = 0,23$ ) et leurs propriétés changer à travers l'épaisseur de la poutre selon la loi de puissance. Les surfaces inférieures du FG les poutres sont riches en aluminium, tandis que les surfaces supérieures des poutres FG sont riches en alumine.

Pour valider l'exactitude de la théorie proposée, les comparaisons entre les résultats actuels et les résultats disponibles par Koochaki (2011) et Sina et al. (2009) sont présentés dans les tableaux 1.

Tableau IV.1 : Comparaison des fréquences fondamentales adimensionnelles des Poutres homogènes.

$$\bar{\omega} = (\omega L^2/h) \sqrt{I_0 / \int_{-h/2}^{h/2} E(z) dz}$$

$h/L$	Présente	ETB (Reddy 1999)	FSDBT (Koochaki 2011)	PSDBT (Koochaki 2011)
0.01	<b>2.9861344</b>	2.9855260	2.9861370	2.9861380
0.0125	<b>2.9858287</b>	2.9852320	2.9858270	2.9858280
0.0142	<b>2.9855821</b>	2.9843400	2.9855560	2.9855680
0.0166	<b>2.9851807</b>	2.9848650	2.9851550	2.9851680
0.02	<b>2.9845054</b>	2.9837010	2.9845050	2.9845054
0.025	<b>2.9832858</b>	2.9825880	2.9832850	2.9832858
0.033	<b>2.9807765</b>	2.9796680	2.9806570	2.9806572
0.04	<b>2.9780222</b>	2.9765700	2.9780200	2.9780220
0.05	<b>2.9731941</b>	2.9716880	2.9731930	2.9731941
0.066	<b>2.9633287</b>	2.9628580	2.9628580	2.9628610
0.1	<b>2.9340576</b>	2.9315680	2.9340440	2.9340570

Tableau IV.2 : Fréquence fondamentale adimensionnelle du poutre FG

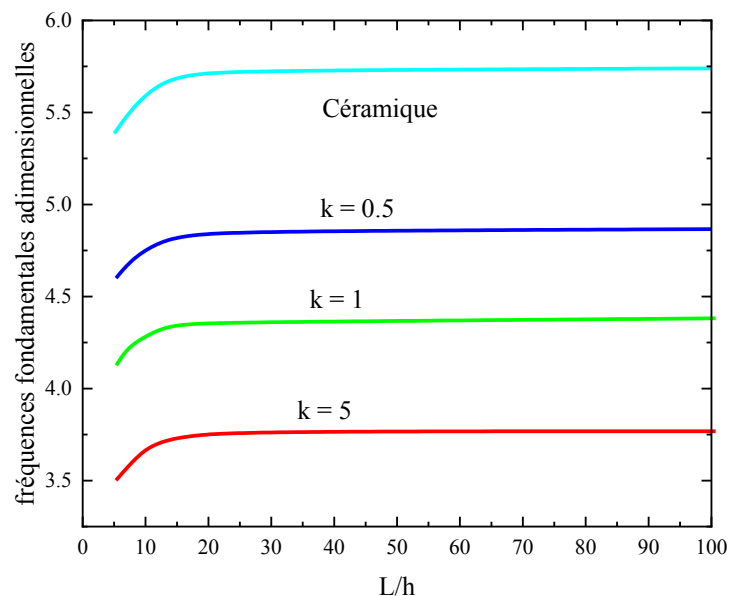
$$\bar{\omega} = (\omega L^2/h) \sqrt{I_0 / \int_{-h/2}^{h/2} E(z) dz}$$

L/h	k	Présente	Sina et al. (2009)
10	0	<b>2.879551</b>	2.879
	0.3	<b>2.774811</b>	2.774
30	0	<b>2.92208</b>	2.922
	0.3	<b>2.813328</b>	2.813
100	0	<b>2.927100</b>	2.927
	0.3	<b>2.817838</b>	2.817

Et 2. En effet, dans le tableau 1, la fréquence naturelle adimensionnelle d'un simple appui poutre homogène ( $k = 0$ ) obtenu à partir de la présente nouvelle théorie des poutres sont comparés à d'autres résultats des théories des poutres (Koochaki 2011) pour trois valeurs différentes du rapport épaisseur/longueur. Comme On peut voir que les résultats de trois théories de déformation par cisaillement sont en bon accord avec les Résultats de la théorie des poutres d'Euler-Bernoulli. De plus, les fréquences prédites par la théorie actuelle des poutres et les deux autres théories de déformation par cisaillement sont très proches l'une de l'autre.

Le tableau 2 montre les fréquences naturelles non dimensionnelles pour la poutre FG parfait avec  $k = 0$  et 0,3 pour différents rapports longueur/hauteur. Les résultats de la présente formulation sont comparés à ceux de Sina et al. (2009) et l'accord est très satisfaisant.

La figure 2 montre la fréquence naturelle fondamentale non dimensionnelle en fonction du rapport longueur / hauteur pour un poutre FG parfait simplement supporté basé sur PSDBT et la théorie actuelle des poutres. Comme il peut.



**Figure IV.1. Variation de la fréquence fondamentale ( $\bar{\omega} = (\omega L^2 / h)(\rho_M / E_M)$ ) des poutres FG avec  $L / h$  rapport pour diverses valeurs de l'exposant de la loi de puissance**

Comme on le voit, l'exposant de la loi de puissance joue un rôle important sur la fréquence fondamentale de la poutre FG parfait et les fréquences sont augmentées lorsque la valeur de  $L / h$  est augmentée. En outre, les comparaisons montrent que l'accord entre les résultats actuels et ceux obtenus en utilisant le PSDBT est satisfaisant.

Tableau IV. 3 : Six premières fréquences adimensionnelles  $\bar{\omega} = (\omega L^2/h) \sqrt{\frac{I_0}{\int_{-h/2}^{h/2} E(z) dz}}$  du poutre FG (L/H=5)

k	$\alpha$	$\omega_1$	$\omega_2$	$\omega_3$	$\omega_4$	$\omega_5$	$\omega_6$
0.5	0	2.652071106	9.227581431	17.69478543	26.959368	36.5699708	46.35346951
	0.1	2.629935615	9.163948853	17.59574226	26.83563397	36.43006594	46.20291888
	0.2	2.601215142	9.080767423	17.46517379	26.671102	36.24244879	45.99940418
1	0	2.581070224	8.998837152	17.29734773	26.41699106	35.91550139	45.61898733
	0.1	2.527515127	8.838878481	17.03790125	26.08073189	35.52391636	45.18878939
	0.2	2.45008422	8.60478355	16.65295765	25.57471517	34.92630325	44.5232621
2	0	2.586406159	8.950808821	17.11088871	26.04796748	35.35579761	44.88145525
	0.1	2.487791307	8.651090665	16.6150766	25.3945498	34.58585936	44.03039853
	0.2	2.31654114	8.123771581	15.7285302	24.20495086	33.15759214	42.42204192
5	0	2.792915979	9.395559685	17.55065355	26.27845939	35.25569424	44.39249113
	0.1	2.694743432	9.069598562	16.96555175	25.44949237	34.21042237	43.15861543
	0.2	2.450980911	8.307099364	15.65914662	23.66287326	32.02232974	40.64091433

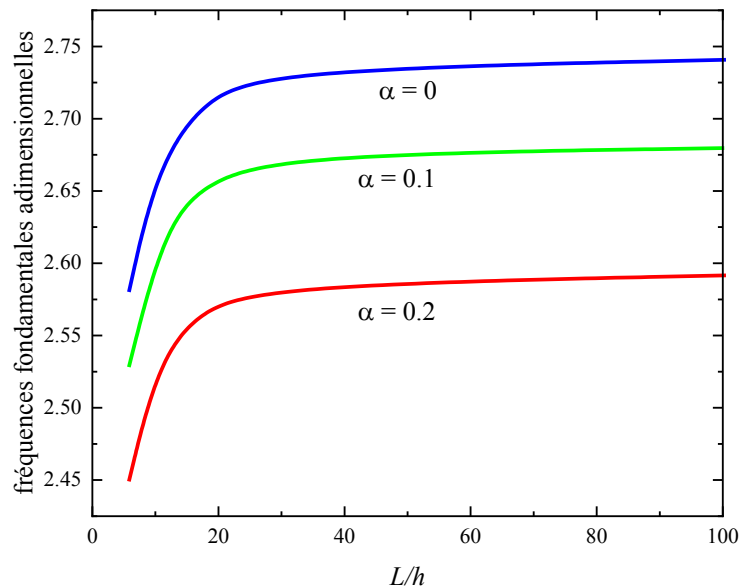
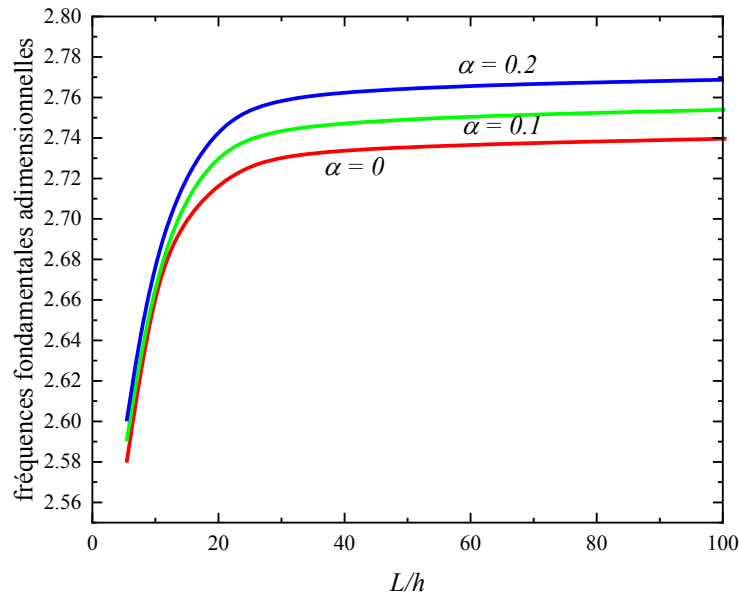


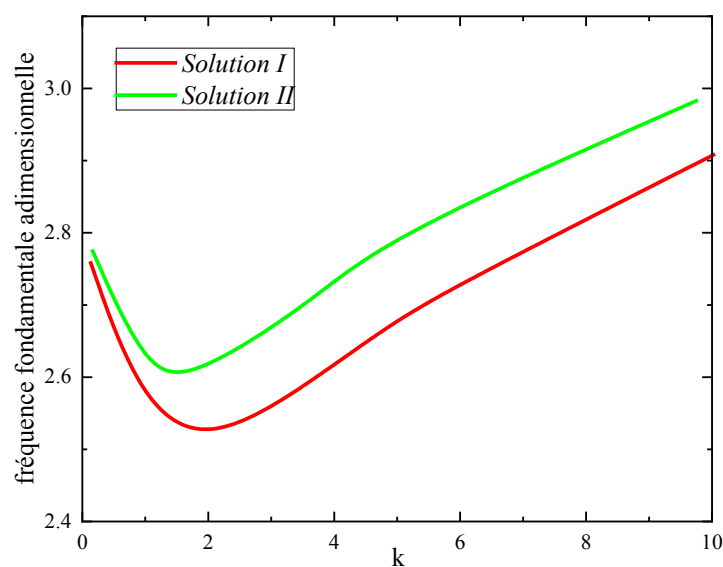
Figure VI.2. Variation de la fréquence fondamentale  $\bar{\omega} = (\omega L^2/h) \sqrt{\frac{I_0}{\int_{-h/2}^{h/2} E(z) dz}}$  des poutres FG (k = 1)

Avec le rapport  $L/h$  pour différentes valeurs de la fraction volumique de porosité en considérant la première Solution.



**Figure VI.3. Variation de la fréquence fondamentale  $\bar{\omega} = (\omega L^2/h) \sqrt{\frac{I_0}{\int_{-h/2}^{h/2} E(z) dz}}$  de poutres FG ( $k = 1$ )**

Avec le rapport  $L/h$  pour différentes valeurs de la fraction volumique de porosité en considérant la deuxième Solution.



**Figure VI.4. Variation de la fréquence fondamentale  $\bar{\omega} = (\omega L^2/h) \sqrt{\frac{I_0}{\int_{-h/2}^{h/2} E(z) dz}}$  de FG**

**imparfait poutres**

Avec exposant de loi de puissance k. (L/h = 5,  $\alpha = 0,1$ )

Les six premières fréquences sans dimension des poutres FG parfaits et imparfaits sont fournies dans Tableau 3. Il convient de noter que les propriétés des matériaux sont prédites à l'aide des équations. (4) -(5). Les résultats révèlent que les résultats de fréquence diminuent à mesure que la fraction volumique de porosité ( $\alpha$ ) augmente.

Dans les Fig. 1 et 2, l'effet de la porosité sur les fréquences fondamentales des poutres FG avec deux différents types de distribution de porosité sont illustrés. On note que la solution I fait référence au résultat de poutres FG imparfaites avec des porosités uniformément réparties en utilisant les équations. (4) -(5), tandis que la solution II est pour les poutres avec un autre type de distribution de porosité en utilisant les Eqs. (6) -(7). On peut le voir sur la figure 1 que la porosité entraîne une augmentation de fréquence et donc ce type de distribution de porosité (Solution I) rend la poutre plus rigide. Cependant, l'effet de la porosité sur les fréquences fondamentales (Fig. 2) en utilisant la Solution II est inversée et ce type de distribution de porosité rend la poutre flexible.

Il est intéressant de comparer les résultats de vibration libre obtenus à partir de différents types de porosité Distribution. Ainsi, les exemples numériques suivants sont donnés à cet effet. Dans la figure 3, les fréquences fondamentales de poutres FG imparfaits avec deux types différents de distribution de porosité sont tracés en fonction de l'exposant de la loi de puissance (k). Comme observé, la solution II fournit des fréquences que celles de la solution I ; de plus, les fréquences augmentent avec l'augmentation de l'exposant de la loi de puissance (k) lorsque ce dernier prend des valeurs supérieures à 2.

### I.V.3.Conclusion :

Dans ce chapitre, nous avons présenté les résultats numériques de l'analyse dynamique des poutres fonctionnellement graduées en utilisant la présente théorie d'ordre élevé. Cette théorie, n'exigent pas d'utiliser un facteur de correction de cisaillement, et donnent une description (HSDT) de la contrainte de cisaillement à travers l'épaisseur tout en remplissant la condition de contrainte de cisaillement nulle sur les bords libres des poutres FGM.



***Conclusion  
Générale***

### V. Conclusion Générale :

Une nouvelle théorie de la poutre de déformation par cisaillement est proposée pour la libre vibration des poutres FG parfaits et imparfaits. La théorie tient compte d'une variation quadratique des contraintes de cisaillement à travers l'épaisseur, et satisfait aux conditions limites de traction nulle sur les surfaces supérieure et inférieure de la poutre sans utiliser le facteur de correction de cisaillement. La règle modifiée du mélange couvrant les phases de porosité est utilisée pour décrire et estimer les propriétés des matériaux des poutres FG imparfaites. Des exemples numériques montrent que la théorie proposée donne des solutions presque identiques à celles obtenues en utilisant d'autres théories de déformation par cisaillement. L'influence des porosités sur les fréquences naturelles est ensuite discutée. La formulation se prête particulièrement bien à la propagation des vagues en milieu orthotrope non homogène (Mahmoud et al. 2014), qui sera envisagée dans un proche avenir.

*Références  
Bibliographiques*

## Références Bibliographiques

---

- ABDIZADEH, H, (1997), « Elaboration Et Caractérisation De Composites Duplex :« Composites Laminaires Tri-Couches à Base D'Alumine », Thèse de Doctorat d'Etat, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon et l'Université Claude Bernard Lyon, France, 212p
- Ait Amar Meziane, M., Abdelaziz, HH et Tounsi, A. (2014), « Une méthode efficace et simple théorie pour flambage et vibration libre de façon exponentielle plaques sandwich graduées sous divers frontière conditions », J. Sandw. Structure. Mat., 16(3), 293-318.
- Ait Yahia, S., Ait Atmane, H., Houari, MSA et Tounsi, A. (2015), « La propagation des ondes dans plaques graduées avec porosités en utilisant divers ordres supérieurs tondre théories des plaques de déformation », Struct. Ing. Méca, Int. J., 53(6), 1143-1165.
- Amara, K., Tounsi, A., Mechab, I. et Adda Bedia, EA (2010), « Nonlocal élasticité effet sur la colonne flambement de multi parois nanotubes de carbone sous Température champ », Appl. Math. Modèle., 34(12), 3933 -3942.
- Attia, A, Tounsi, A., Adda Bedia, EA et Mahmoud, SR (2015), « Analyse vibratoire libre des plaques graduées avec dépendant de la température Propriétés en utilisant diverses théories de plaques raffinées à quatre variables », Steel Compos. Structure, Int. J., 18(1), 187-212.
- Bachir Bouiadjra, R., Adda Bedia, EA et Tounsi, A. (2013), « Flambement thermique non linéaire comportement de fonctionnellement plaques graduées à l'aide d'une sinusoïdale efficace tondre déformation théorie », Struct. Ing. Méca, Int. J., 48(4), 547-567.
- Bedjilili, Y., Tounsi, A., Berrabah, HM, Mechab, I., Adda Bedia, EA et Benaissa, S. (2009), « Fréquences propres des poutres composites à fraction volumique de fibres variable incluant l'inertie de rotation et le cisaillement déformation », Appl. Math. Méca. - Angl. Éd., 30(6), 1-10.
- Belabed, Z., Houari, MSA, Tounsi, A., Mahmoud, SR et Anwar Bég, O. (2014), « Une plus haute commande cisaillement et déformation normale théorie fonctionnelle \_ noté plaques de matériau (FGM) », Compos. : Part B, 60, 274-283.
- Bellifa Hichem, (2014), « Application de la théorie du gradient de déformation à l'étude de la réponse des structures multi échelles ». Thèse de doctorat université de SIDI BEL ABBES.
- Benatta, MA, Mechab, I., Tounsi, A. et Adda Bedia, EA (2008), « Static analyse fonctionnelle \_ classé courtes poutres y compris déformation et cisaillement déformation effets », Comput. Mater. Sci., 44(2), 765-773.

## Références Bibliographiques

---

- Benatta, MA, Tounsi, A., Mechab, I. et Bachir Bouiadjra, M. (2009), « Solution mathématique pour la flexion de poutres composites hybrides courtes à fibres variables espacement », *Appl. Math. Comput.*, 212(2), 337-348.
- Benguediab, S., Tounsi, A., Zidour, M. et Semmah, A. (2014), « Chiralité et échelle effets sur la mécanique flambage propriétés du zigzag à double paroi nanotubes de carbone », *Compos. Partie B*, 57, 21-24.
- Benzair, A., Tounsi, A., Besseghier, A., Heireche, H., Moulay, N. et Boumia, L. (2008), « The thermal effect on vibration of single-walled nanotubes de carbone utilisant faisceau de Timoshenko non local théorie », *J. Phys. RÉ : Appl. Phys.*, 41(22), 225404.
- Berrabah, HM, Tounsi, A., Semmah, A. et Adda Bedia, EA (2013), « Comparaison de divers raffiné non local faisceau théories de la flexion, des vibrations et du flambage analyse de nano poutres », *Struct. Ing. Méca, Int. J.*, 48(3), 351-365.
- Bharti, H. ; Kumar, R. ; Dubovikoff, D. A. (2013), « Une nouvelle espèce du genre *Tapinoma* Foerster, 1850 (Hymenoptera : Formicidae) d'Inde. Bulletin entomologique du Caucase 9 (2) :303-304
- Boch.P, Chartier. T, Huttepain, M. (1986), « Tapa casting of AL2O3/ZrO2 laminated composites » ;69 (8) ,191-192.
- Boudierba, B., Houari, MSA et Tounsi, A. (2013), « Thermomécanique pliant réponse des plaques épaisses FGM reposant sur l'élastique de Winkler-Pasternak fondations », *Steel Compos. Structure., Int. J.*, 14(1), 85-104.
- Bourada, M., Kaci, A., Houari, MSA et Tounsi, A. (2015), « Un nouveau cisaillement simple et déformations normales théorie fonctionnelle \_ noté poutres », *Steel Compos. Structure., Int. J.*, 18(2), 409-423.
- Bousahla, AA, Houari, MSA, Tounsi, A. et Adda Bedia, EA (2014), « Un roman plus haute commande cisaillement et déformation normale théorie basée sur la position de la surface neutre pour le pliage analyse avancée \_ plaques composites », *Int. J. Comput. Méthode.*, 11(6), 1350082.
- Bichop.A, Lin.C. Y ; Navaratnam. M. Rawlings.R. D MC. (1993), « Matériau à gradient fonctionnel produit par une métallurgie des poudres processus, journal des lettres de science des matériaux » vol 12 ; 1516-1518.
- Bresse, JAC (1859), *Cours de Mécanique Appliquée*, Mallet-Bachelier, Paris, France.
- Cowper, GR (1966), "Les coefficients de cisaillement dans le faisceau Timoshenko théorie », *ASME, J. Appl. Mech.*, 33(2), 335 -340.

## Références Bibliographiques

---

- Chakraverty, S. et Pradhan, KK (2014), "Free vibration of exponential fonctionnellement noté plaques rectangulaires en ambiance thermique avec général conditions aux limites », *Aerosp. Sci. Technol.*, 36, 132-156.
- Duc, ND et Thang, PT (2015), « Non- linéaire dynamique réponse et vibration de cisaillement déformable imparfait excentriquement circulaire S-FGM raidie cylindrique coquilles entourées d'élastique fondations », *Aerosp. Sci. Technol.*, 40, 115-127.
- Draiche, K., Tounsi, A. et Khalfi, Y. (2014), « Une théorie trigonométrique à quatre plaques variables pour la vibration libre de plaques composites rectangulaires à masse patchée », *Steel Compos. Structure., Int. J.*, 17(1), 69-81.
- Fekrar ABDELKADER (2015), « Analyse du flambement des plaques composites en utilisant la théorie à ordre élevé », thèse de doctorat université de SIDI BEL ABBES.
- H. Okamura (1991), « État de l'art des projets de conception de matériaux pour les applications de service », *Mater. Sci. Eng : A ; 143 (1-2) : 3-9,1991.*
- Hadji, L., Daouadji, TH, Tounsi, A. et Adda Bedia, EA (2014), « Une commande tondre déformation théorie des vibrations statiques et libres de la poutre FGM », *Steel Compos. Structure., Int. J.*, 16(5), 507-519.
- Hamidi, A., Houari, MSA, Mahmoud, SR et Tounsi, A. (2015), « Une théorie des plaques sinusoïdales avec 5 inconnues et effet d'étirement pour la thermomécanique flexion de fonctionnellement plaques sandwich graduées », *Steel Compos. Structure., Int. J.*, 18(1), 235-253.
- Hebali, H., Tounsi, A., Houari, MSA, Bessaim, A. et Adda Bedia, EA (2014), « New quasi- 3D hyperbolic tondre déformation théorie pour l'analyse des vibrations statiques et libres des plaques graduées », *J. Eng. Mech., ASCE*, 140(2), 374-383.
- Heireche, H., Tounsi, A., Benzair, A., Maachou, M. et Adda Bedia, EA (2008), « Sound wave propagation en simple paroi nanotubes de carbone utilisant non local élasticité », *Physica E.*, 40(8), 2791-2799.
- Hirai, T., (1996), "Matériaux à gradient fonctionnel", *Traitement de la céramique—Partie 2*, Weinheim, Allemagne : Éditeurs VCH VerlagsgesellschaftmbH, p. 293–341.
- Kadoli, R., Akhtar, K. et Ganesan, N. (2008), « Static analyse fonctionnelle \_ noté poutres en utilisant plus haute commande tondre déformation théorie », *Appl. Math. Modèle.*, 32(12), 2509-2525.
- Karama, M., Afaq, KS et Mistou, S. (2003), « Mécanique comportement de la poutre mixte laminée par le nouveau multicouche modèle de structures composites stratifiées avec

## Références Bibliographiques

---

- continuité de contrainte de cisaillement transverse », *Int. J. Solide. Structure.*, 40(6), 1525-1546.
- Khalfi, Y., Houari, MSA et Tounsi, A. (2014), « Un cisaillement raffiné et simple déformation théorie pour thermique flambage du solaire fonctionnellement plaques graduées sur élastique fondation », *Int. J. Comput. Méthode.*, 11(5), 135007.
  - kiebackb., neubrand, A. fiedel, H. Riedel, (2003), « processing techniques for functionally graded materials », *materials science and engineering A36281-105*; (2003)
  - Koizumi, M. (1997), « Les activités des MGF au Japon », *Compos. Partie B*, 28(1-2), 1-4.
  - Koochaki, GR (2011), « Analyse vibratoire gratuite des noté poutres », *World Acad. Sci., Ing. Technol.*, 74, 366-369.
  - Larbi Chaht, F., Kaci, A., Houari, MSA, Tounsi, A., Anwar Bég, O. et Mahmoud, SR (2015), analyses de flambement fonctionnellement noté matériau (FGM) en fonction de la taille à l'échelle nanométrique poutres y compris l'effet d'étirement de l'épaisseur », *Steel Compos. Structure., Int. J.*, 18(2), 425-442.
  - Li, XF (2008), « Une approche pour analyser statique et dynamique comportements fonctionnels \_ poutres graduées Timoshenko et Euler-Bernoulli », *J. Sound Vib.*, 318(4-5), 1210-1229.
  - Mohamoud, R.M., Akinlabi, E.T., Shukla M., Pityana, S. (2012), Functionally graded material: An overview. In: *Proceedings of the world congress on engineering WCE 2012*, vol. 3, pp. 1593– 1597
  - Mohamoud RM, Akinlabi ET (2015) Effect of laser power and powder flow rate on the wear resistance behavior of laser metal deposited TiC/Ti6Al4V composites. *Mater Today Proc* 2:2679–2686.
  - Mahi, A., Adda Bedia, EA et Tounsi, A. (2015), « Une nouvelle tondre déformation théorie de la flexion et de l'analyse des vibrations libres isotopes, fonctionnellement plaques composites graduées, sandwiches et stratifiées », *Appl. Math. Modèle.*, 39(9), 2489-2508.
  - Mahmoud, SR, Abd -Alla, AM, Tounsi, A. et Marin, M. (2014), « Le problème de la propagation des ondes en magnéto -rotation milieu non homogène orthotrope », *J. Vib. Contrôle*, 1077546314521443.
  - Mistler, R.E., (1973) « Substrats d'alumine à haute résistance produits par une multicouche technique de moulage », *Am. Ceram. Soc. Bull* ; 52 (11) : 850-854.

## Références Bibliographiques

---

- Moya, J. S., Sanchez-Herencia, A. J., Requena, J. & Moreno, R. (1992), « Fonctionnellement Gradient Ceramics by Sequential Slip Casting », *Materials Letters*, Volume14,333-335.
- Najafov, AM, Sofivev, AH, Hui, D., Karaca, Z., Kalpakci, V. et Ozcelik, M. (2014), « Stabilité de l'EG cylindrique coquilles avec contraintes de cisaillement sur une fondation Pasternak », *Steel Compos. Structure., Int. J.*, 17(4), 453 -470.
- Nedri, K., El Meiche, N. et Tounsi, A. (2014), « Analyse des vibrations libres de plaques composites stratifiées reposant sur des fondations à l'aide d'un raffiné hyperbolique tondre déformation théorie », *Mech. Compos. Mat.*, 49(6), 641-650.
- Ould Larbi, L., Kaci, A., Houari, MSA et Tounsi, A. (2013), « théorie de déformation en cisaillement basé sur la position de surface neutre pour la flexion et la vibration libre de fonctionnellement noter poutres », *Mech. Basé Des. Structure. Mach.*, 41(4), 421-433.
- Rayleigh, JWS (1880), *The Theory of Sound*, Macmillan Publishers, Londres, Royaume-Uni.
- Reddy, JN (1984), "Un simple ordre supérieur théorie des plaques composites stratifiées », *ASME, J. Appl. Mech.*51(4), 745-752.
- Reddy, JN (1999), *Théorie et analyse des plaques élastiques*, Taylor & Francis Publication, PA, USA.
- Saidi, H., Houari, MSA, Tounsi, A. et Adda Bedia, EA (2013), « Thermo- mécanique pliant réponse avec effet d'étirement de fonctionnellement assiettes sandwich graduées à l'aide d'un roman tondre déformation théorie », *Steel Compos. Structure., Int. J.*, 15(2), 221-245.
- Sallai, BO, Tounsi, A., Mechab, I., Bachir, BM, Meradjah, M. et Adda, BEA (2009), « Une analyse de la flexion de Al/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> S-FGM épais poutres », *Comput. Mater. Sci.*, 44(4), 1344-1350.
- Sankar, BV (2001), "Une solution d'élasticité pour noter poutres », *Compos. Sci. Technol.*, 61(5), 689 -696.
- Semmah, A., Tounsi, A., Zidour, M., Heireche, H. et Naceri, M. (2014), « Effet de la chiralité sur flambage température d'une paroi simple en zigzag nanotubes de carbone utilisant théorie du continuum non local », *Fuller. Nanotube. Auto. N.*, 23(6), 518-522.
- Shimpi, RP et Patel, HG (2006a), "Une théorie de plaque raffinée à deux variables pour l'analyse de plaque orthotrope ", *Int. J. Solide. Structu.*, 43(22), 6783-6799.



## Références Bibliographiques

---

- Shimpi, RP et Patel, HG (2006b), « Free vibrations of plate using théorie des plaques raffinées à deux variables », *J. Sound Vib.*, 296(4-5), 979-999.
- Sina, SA, Navazi, HM et Haddadpour H. (2009), « Une analyse méthode d'analyse vibratoire libre de fonction noté poutres », *Mater. Des.*, 30(3), 741-747.
- Stefens, M. Dvorak, M. Wewel, (1990) « Plasma sprayed Functionally gradient materials-processing and applications, dans le cadre du premier symposium international sur les matériaux à gradient fonctionnel-FGM'90-Sendi, Japon ; 139-43.
- Swaminathan, K. et Naveenkumar, DT (2014), « Higher commande raffiné informatique modèles de stabilité \_ analyse des plaques FGM – Solutions analytiques », *Eur. J. Mech. \_ A/ Solids*, 47, 349-361.
- Takahashi I.M. ITOH.Y KASHIWAYA, (1990), « fabrication et évaluation de w/cu matériau à gradient par technique de frittage et d'infiltration », en procédant du premier symposium international sur les matériaux à gradient fonctionnel Japon.
- Timoshenko, SP (1921), Sur la correction pour le cisaillement du différentiel equation for transverse vibrations of prismatic bars, *Philosophical Magazine, Series 6*, pp. 742-746.
- Tounsi, A., Houari, MSA, Benyoucef, S. et Adda Bedia, EA (2013a), « Une trigonométrique tondre déformation théorie du thermoélastique flexion de fonctionnellement plaques sandwich graduées », *Aerosp. Sci. Technol.*, 24(1), 209-220.
- Tounsi, A., Semmah, A. et Bousahla, AA (2013b), « Flambage thermique comportement du nano poutre en utilisant un efficace ordre supérieur non local faisceau théorie », *J. Nanomech. Micromech.*, ASCE, 3(3), 37-42.
- Tounsi, A., Benguediab, S., Adda Bedia, EA, Semmah, A. et Zidour, M. (2013c), « Nonlocal effets sur le flambage thermique propriétés de la double paroi nanotubes de carbone », *Adv. Nano Res., Int. J.*, 1(1), 1-11.
- Tounsi, A., Benguediab, S., Houari, MSA et Semmah, A. (2013d), « Une nouvelle faisceau théorie avec effet d'étirement d'épaisseur pour les nano poutre », *Int. J. Nanosci.*, 12(4), 1350025.
- Al- Basyouni, KS, Tounsi, A. et Mahmoud, SR (2015), « Size analyse de flexion et de vibration de micro poutres graduées basé sur la théorie des contraintes de couple modifiées et la position de la surface neutre », *Compos. Structu.*, 125, 621-630.
- Touratier, M. (1991), « Une théorie standard des plaques efficace », *Int. J. Eng. Sci.*, 29(8), 901-916.

## Références Bibliographiques

---

- Wattanasakulpong, N. et Ungbhakorn, V. (2014), « Analyse des vibrations linéaires et non linéaires extrémités retenues poutres FGM avec porosités », *Aerosp. Sci. Technol.*, 32(1), 111-120.
- Wattanasakulpong, N., Prusty, BG, Kelly, DW et Hoffman, M. (2012), " Analyse gratuite des vibrations de couches fonctionnellement noté poutres avec validation expérimentale », *Mater. Des.*, 36, 182-190.
- Yaghoobi, H. et Torabi, M. (2013a), " Analyse des vibrations libres post- flambage et non linéaire d'imparfait fonctionnellement noté poutres reposant sur non linéaire élastique fondation », *Appl. Math. Modèle.*, 37(18-19), 8324-8340.
- Yaghoobi, H. et Fereidoon, A. (2014), « Flambement mécanique et thermique analyse fonctionnelle \_ plaques graduées reposant sur un élastique fondations : Un bilan d'un simple affiné nième ordre tondre déformation théorie », *Compos. Partie B*, 62, 54-64
- Yaghoobi, H. et Torabi, M. (2013b), « Une analyse approche des vibrations de grande amplitude et du post - flambage des fonctions noté poutres repose sur non- linéaire élastique fondation », *J. Theor. Appl. Méc.*, 51 (1), 39-52.
- Yaghoobi, H., Valipour, MS, Fereidoon, A. et Khoshnevisrad, P. (2014), « Analytical étude sur l'analyse post - flambage et vibration libre non linéaire des poutres FG reposant sur non linéaire élastique fondation sous thermomécanique \_ Chargement en cours avec VIM », *Steel Compos. Structure., Int. J.*, 17(5), 753-776.
- Zhong, Z. et Yu, T. (2007), " Solution analytique d'un cantilever fonctionnellement noté poutre », *Compos. Sci.Technol.*, 67(3-4), 481-488.
- Zhu, J., Lai, Z., Yin, Z., Jeon, J. et Lee, S. (2001), « Fabrication de ZrO<sub>2</sub>- NiCr fonctionnellement noté matériel par poudre métallurgie », *Mater. Chim. Phys.*, 68(1-3), 130-135.
- Zidi, M., Tounsi, A., Houari, MSA, Adda Bedia, EA et Anwar Bég, O. (2014), « analyse des plaques FGM sous hygro-thermo- mécanique Chargement en cours en utilisant une théorie de plaque raffinée à quatre variables », *Aerosp.Sci. Technol.*, 34, 24-34.