

**RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE**  
**MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE**  
**UNIVERSITÉ IBN KHALDOUN DE TIARET**

---



**FACULTÉ DES SCIENCES APPLIQUÉES**  
**DÉPARTEMENT DE GÉNIE CIVIL**

**HMémoire de fin d'études en vue de l'obtention du diplôme de Master**

**Spécialité : Génie civil**

**Option : Structures**

Présenté par :

GUETTITIR Benyagoub

*Sujet du mémoire*

**Vibration des poutres poreuses**

*Soutenu publiquement le ... /06/2022 devant le jury composé de :*

Mr. DRAICHE K.

Président

Mr. TLIDJI Y.

Rapporteur

Mme. KHELIFA Z.

Examinatrice

Mme. OUAZIR K.

Examinatrice

PROMOTION : 2021/2022

## Remerciement

*En premier lieu, nous tenons à remercier Allah le tout puissant, notre créateur qui  
Nous a donné la force pour accomplir ce modeste travail. Ce présent mémoire de  
Fin d'étude, n'aurait pu avoir le jour sans contribution de nombreuses personnes,  
Dont nous faisons aujourd'hui un plaisir et un devoir de les remercier. Avant tout,  
Nous tenons à remercier messieurs les membres du jury pour leurs collaborations  
Durant l'examen de ce travail et leurs participations à la soutenance. Nous  
Adressons tout particulièrement notre reconnaissance à notre encadreur  
Mr: **TLIDJI YUCEF** pour l'encadrement de ce mémoire, pour ses conseils  
Et son aide. Sans oublier les enseignants du département génie civile.  
Enfin nous remercions tous ceux qui ont contribués de près ou de loin  
À l'élaboration de ce présent mémoire, trouvent ici l'expression de notre  
Profondes gratitude et respect.*



## Résumé

Le cadre général de ce mémoire est l'analyse dynamique des poutres fonctionnellement gradués (FG). Le but de ce travail de recherche se fixe comme objectif principal, à une étude de la vibration libre de poutre à gradient de propriété, Nous avons proposé trois formes de distribution de la porosité, une distribution uniforme et deux autres non uniformes. Les équations gouvernantes dans la poutre FG sont obtenues en utilisant le principe d'Hamilton. Les solutions analytiques sont obtenues en résolvant un problème aux valeurs propres en utilisant la solution Navier. Une étude paramétrique a été faite afin de quantifier les facteurs régissant le comportement vibratoire de ce type de structures FGM, et de comparer les résultats obtenues à ceux disponibles dans la littérature.

**Mots clés:** Poutre, Fréquence, Vibrations libre, Porosité.

## **Abstract**

The general framework of this thesis is the dynamic analysis of functionally graded (FG) structures. The purpose of this research work is fixed as main objective, to a study of the free vibration of beam with gradient of porosity. We proposed three forms of distribution of the porosity, a uniform distribution and two others non-uniform. The governing equations in the FG beam are derived using Hamilton's principle. Analytical solutions are obtained by solving an eigenvalue problem using the Navier solution. A parametric study was made in order to quantify the factors governing the vibration behavior of this type of FGM structures and to compare the results obtained with those available in the literature.

**Keywords:** Beam, Frequency, Free vibrations, Porosity.

الإطار العام لهذه الأطروحة هو التحليل الديناميكي للهياكل المتدرجة وظيفياً (FG). تم تحديد الغرض من هذا العمل البحثي كهدف رئيسي ، لدراسة الاهتزاز الحر للمسند مع تدرج المسامية. اقترحنا ثلاثة أشكال لتوزيع المسامية، توزيع منتظم واثنين آخرين غير منتظمين. المعادلات الحاكمة في مسند FG مشتقة باستخدام مبدأ هاملتون. يتم الحصول على الحلول التحليلية من خلال حل مشكلة القيمة الذاتية باستخدام حل Navier. تم إجراء دراسة متغيرة المعايير من أجل تحديد العوامل التي تحكم سلوك الاهتزاز لهذا النوع من هياكل ومقارنة النتائج التي تم الحصول عليها مع تلك المتوفرة في الأدبيات

**كلمات مفتاحية**: مسند ، توتر ، الاهتزاز الحر،

المسامية

## Table des matières

Résume.....	i
Abstract .....	ii
Liste des tableaux.....	vii
Liste des figures .....	viii
Liste des symboles .....	ix
Introduction générale .....	1
Chapitre 1. Généralités sur les matériaux FGM.....	<b>Erreur ! Signet non défini.</b>
1.1 Introduction : .....	3
1.2 Définition : .....	3
1.3 Historique : .....	4
1.4 Les éléments constituant d'un matériau composite.....	5
1.5 Domaines d'applications des matériaux fonctionnellement gradués : .....	7
1.6 Aérospatial : .....	7
1.7 Médecine : .....	7
1.8 Défense : .....	8
1.9 Énergie nucléaire : .....	8
1.10 Optoélectronique : .....	8
1.11 Génie civil : .....	8

1.12	Type des matériaux fonctionnellement gradués : .....	9
1.13	Gradient de la microstructure des Matériaux FGM : .....	10
1.14	Loi de mélange : .....	10
1.15	Propriétés matérielles des poutres FGM : .....	11
1.16	Fonction sigmoïde(S-FGM) : .....	13
1.17	Fonction exponentielle (E-FGM) : .....	14
1.1	Gradient de porosité des Matériaux FGM : .....	15
1.2	Lois des distributions de la porosité .....	18
1.3	Conclusion.....	20
Chapitre 2. Théories des poutres .....		<b>Erreur ! Signet non défini.</b>
2.1	Introduction : .....	21
2.2	Théories des poutres [Sellai 2011] .....	23
2.3	Les modèles des poutres pour les matériaux fonctionnellement gradués .....	23
2.4	Hypothèses cinématiques de la théorie des poutres : .....	24
2.5	Conclusion : .....	30
Chapitre 3. Formulation mathématique.....		<b>Erreur ! Signet non défini.</b>
3.1	Introduction : .....	31
3.2	Modèle mathématique : .....	31
3.3	Champ de déplacement : .....	32
3.4	Le champ des contraintes : .....	32



3.5	Équation du mouvement.....	35
3.6	Solution de Navier.....	37
3.7	Conclusion.....	39
	Chapitre 4. Résultats et discussions .....	<b>Erreur ! Signet non défini.</b>
4.1	Introduction .....	41
4.2	Résultats numériques et discussion .....	41
4.3	Conclusions .....	46
	Conclusion générales. ....	48
	Annexe .....	52

**Liste des tableaux**

**Tableau (4.1)** Fréquences adimensionnelles des poutres poreuses simplement appuyées  
(CBT,  $l/h=10$ ) .....42

**Tableau (4.2)** Fréquences adimensionnelles des poutres poreuses simplement appuyées  
(FBT,  $l/h=10$ ). .....42

**Tableau (4.3)** Fréquences adimensionnelles des poutres poreuses simplement appuyées  
(HBT,  $l/h=10$ ). .....42

**Tableau (4.4)** Variation des fréquences de vibration en mode axiale  $\bar{w}_a$  .....46

**Tableau (4.5)** Variation des fréquences de vibration en mode de cisaillement  $\bar{w}_s$  .....46

## Liste des figures

<b>Figure (1.1)</b>	Fibre de verre .....	5
<b>Figure (1.2)</b>	Modèle analytique pour une couche de matériau à gradient fonctionnel. ....	11
<b>Figure (1.3)</b>	Géométrie d'une poutre FGM. ....	12
<b>Figure (1.4)</b>	Lois de puissance (P-FGM).....	13
<b>Figure (1.5)</b>	Fonction sigmoïde S-FGM.....	13
<b>Figure (1.6)</b>	Variation du module de Young en fonction de l'épaisseur (E-FGM).....	14
<b>Figure (1.7)</b>	Lois de puissance symétrique (SP-FGM).....	15
<b>Figure (1.8)</b>	(a) Micrographie MEB des porosités étudiées, (b) Schématisation des différents types de pores (c) et (d) Nomenclatures relatives à la taille des pores. ....	16
<b>Figure (1.9)</b>	Matériau FGM poreux.....	18
<b>Figure (2.1)</b>	Schéma d'un élément de poutre .....	24
<b>Figure 2.2.</b>	Cisaillement et flexion d'une poutre	25
<b>Figure (2.3)</b>	cinématique de la poutre d'Euler Bernoulli .....	26
<b>Figure (2.4)</b>	Cinématique de la poutre de Timoshenko.....	27
<b>Figure (2.5)</b>	Cinématique de la poutre d'ordre élevé. ....	29
<b>Figure (3.1)</b>	Géométrie des poutres poreuses.....	31
<b>Figure (4.1)</b>	Variation des fréquences de vibration adimensionnelles en fonction du rapport L/h .....	43
<b>Figure (4.2)</b>	Variation des fréquences de vibration adimensionnelles en fonction du rapport L/h .....	44
<b>Figure (4.3)</b>	Variation des fréquences de vibration adimensionnelles en fonction de l'indice de porosité .....	45

**Figure (4.4)**      Variation des fréquences de vibration adimensionnelles en fonction de  
l'indice de porosité .....46

## Liste des symboles

$V(z)$	Fraction volumique
$E(z)$	Module de Young en fonction de l'épaisseur
$E_m$	Module Young (Métal)
$E_c$	Module Young (Céramique)
$p, p_i$	Indice de puissance, Paramètre de puissance
$\rho_z$	Masse volumique en fonction de l'épaisseur
$\rho_m$	Masse volumique (Métal)
$\rho_c$	La masse volumique (Céramique)
$h$	Épaisseur de la p outre
$\ell$	Longueur de la p outre
$\sigma_x, \tau_{xz}$	Composantes des contraintes
$\varepsilon_x, \gamma_{xz}$	Composantes des déformations
$n$	Nombre naturel
$Q_{ij}$	Coefficients de rigidité réduite
$\nu$	Coefficient de Poisson
$u$	Déplacement suivant x
$w$	Déplacement suivant z

$u_0, w_0$	Déplacements au niveau du plan moyen ( $z = 0$ )
$f(z)$	La fonction de forme (Fonction de gauchissement)
$\varphi$	Rotation de la normale
$( )'$	Dérivée par rapport à $x$
$f'(z)$	La première dérivée de la fonction de forme
$\delta$	Variationnel
$U$	Énergie de déformation
$T$	Énergie cinétique
$N_x$	Effort normal
$M_x$	Moments de flexion
$S_x$	Moment supplémentaire du au cisaillement transverse
$Q_{xz}$	Effort de cisaillement
$\partial$	Dérivée partielle
$A_{11}, B_{11}, D_{11}$	Coefficients de rigidité d'extension
$A_{11}^s, B_{11}^s, F_{11}^s$	Coefficients de rigidité de flexion
$A_{55}^s$	Coefficients de rigidité de cisaillement transverse
$I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, I_6$	Compassant de moment d'inertie
$m$	Nombre de mode
$\omega$	Fréquence de vibration
$\varpi$	Fréquence de vibration adimensionnelle en mode flexion

$\varpi_a$	Fréquence de vibration adimensionnelle en mode axial
$\varpi_s$	Fréquence de vibration adimensionnelle en mode de cisaillement
$[K]$	Matrice de rigidité
det	Déterminant
$[ ]$	Matrice
$\{ \}$	Vecteur
$[M]$	Matrice de masse

## Introduction générale

Le développement de la technologie moderne nécessite l'utilisation de matériaux possédant des propriétés mécaniques élevées propres à son domaine d'utilisation. Le but principal est de réduire la masse de la structure. Les composites sont des matériaux qui répondent aux exigences précédentes. En raison de leur faible densité, de leur haute résistance, de leur grande rigidité et de leur excellente durabilité, les matériaux composites ont d'abord été utilisés dans de nombreux composants structurels, en particulier dans l'aviation. Aujourd'hui, la réduction des coûts de production permet l'utilisation de ces matériaux dans des applications de plus en plus diverses (automobile, navigation, construction, etc.).

Ces dernières années, les matériaux à gradients de propriétés ont véritablement envahi le champ de la recherche académique dans le domaine le plus diversifié de la science des matériaux. Les chercheurs touchent à plusieurs axes, se concentrant principalement sur le développement de la théorie et l'élaboration de méthodes analytiques pour analyser la structure des FGM.

Des pores peuvent apparaître dans les matériaux fonctionnellement gradués (FGM) lors de la fabrication en raison des problèmes techniques qui entraînent des micro-vides dans ces matériaux. Les structures poreuses FG présentent des nombreuses combinaisons intéressantes de propriétés mécaniques.

L'effet de la porosité sur le comportement statique et dynamique des structures FGM ont été étudié par les chercheurs, en incorporant la porosité dans les lois régissant la variation des propriétés matérielles des structures FGM (Loi de puissance, par exemple). La porosité dans ces cas, a plusieurs formes de distribution.

L'objectif du présent travail est d'utiliser trois lois de distribution de la porosité, la première forme de distribution du porosité est uniforme (Poutre 1) et deux distribution non uniforme (Poutre 2 et 3), pour analyser l'effet de la porosité sur le comportement vibratoire d'une poutre en FGM.

Pour atteindre cet objectif, notre mémoire s'articule sur quatre chapitres. Le premier chapitre présente les matériaux fonctionnellement gradués, leurs propriétés, leurs principales méthodes de fabrication et leurs domaines d'application. Le deuxième



chapitre est consacré pour la présentation des différentes théories de déformation des poutres, en commençant par les théories les plus anciennes telles que la théorie classique et la théorie du premier ordre, puis les plus utilisées et enfin les plus récentes.

Dans le troisième chapitre une formulation mathématique du problème de vibration libre des poutres FG en utilisant une théorie d'ordre élevée été développe. Trois lois de distribution décrivent la variation de la porosité de la poutre à travers l'épaisseur. Les équations de mouvement sont obtenues selon le principe d'Hamilton. Ces équations sont résolues par la solution de Navier.

Le quatrième chapitre détail les résultats obtenus pour l'analyse de vibrations libre des poutres rectangulaires simplement appuyées a gradient de porosité. Ce travail s'achèvera par une conclusion générale qui résumera l'ensemble des travaux et permet aussi de revenir sur les résultats importants mis en avant ainsi que des perspectives.

## 1.1 Introduction :

Le développement des matériaux composites a permis de combiner les propriétés spécifiques de différents matériaux au sein d'une même pièce. L'optimisation locale de ces propriétés, par exemple en associant un matériau de haute dureté à la surface d'un matériau tenace, pose alors la question de l'interface. Cette transition compositionnelle abrupte crée des concentrations de contraintes élevées localisées.

La solution d'une transition continue des propriétés recherchées, par un gradient de composition, permet d'atténuer cette singularité par l'utilisation des matériaux à gradient de propriétés (en anglais : Functionally Graded Material " F.G.M ").

Les matériaux FGM sont des matériaux fonctionnellement gradués, microscopiquement non-homogènes. Ils sont fabriqués généralement à partir d'un mélange de métal et de céramique. Ces types de matériaux, ont suscité beaucoup d'attention récemment en raison des avantages de diminuer la disparité dans les propriétés matérielles et de réduire les contraintes thermiques.

## 1.2 Définition :

Un matériau FGM représente une combinaison de deux matériaux ou plus (généralement métal +céramique). Un FGM produit en changeant sans interruption les fractions volumiques dans la direction de l'épaisseur pour l'obtention d'un volume bien déterminé.

Généralement, les FGM sont fabriqués à partir des matériaux isotropes tels que les céramiques et les métaux. Un FGM permet de combiner plusieurs caractéristiques telle que la légèreté, la bonne résistance mécanique et chimique une maintenance réduite, une dureté plus élevée de rupture, et réduit facteurs d'intensité d'effort [Meftah Ali, 2017].

### 1.3 Historique :

En 1987, le gouvernement Japonais a lancé une vaste recherche sur la technologie de base pour développement de matériaux à Gradient fonctionnel et l'étude de la relaxation des contraintes thermiques ». L'intérêt du projet est d'améliorer des matériaux présentant des structures utilisées comme barrière thermique dans les programmes aérospatiaux.

Les matériaux constituant les parois des engins spatiaux doivent supporter des températures de surface de 1800°C, ainsi qu'à un gradient de température de l'ordre de 1300°C. A cette année-là, aucun matériau industriel n'était connu pour supporter de telles sollicitations thermomécaniques.

Trois caractéristiques sont à considérer pour la conception de tels matériaux :

Résistance thermique et résistance à l'oxydation à haute température de la couche superficielle du matériau ;

Ténacité du matériau coté basse température ; Relaxation effective de la contrainte thermique le long du matériau.

Alors l'idée originale des FGM a été proposée pour élaborer un nouveau composite profitant à la fois des propriétés des céramiques (Coté haute températures) et des métaux (Coté basse température). A la fin de la première étape (1987-1989), les chercheurs avaient réussi à fabriquer des petites pièces expérimentales (1-10 mm d'épaisseur et 30 mm de diamètre) pouvant résister à des températures maximales de 2000 K (Température de surface) et à un gradient de température de 1000 K.

Dans la seconde étape, le but était de réaliser des pièces de tailles plus grandes et de forme plus complexes par rapport à celles réalisées dans la première étape.

Enfin, en 1990 la conférence internationale qui s'est tenue à Sendai, la technologie des FGM a vu le jour, et devenue non seulement au niveau des nations, mais aussi au niveau mondiale.[BOUAMAMA Mohamed, ,2019]

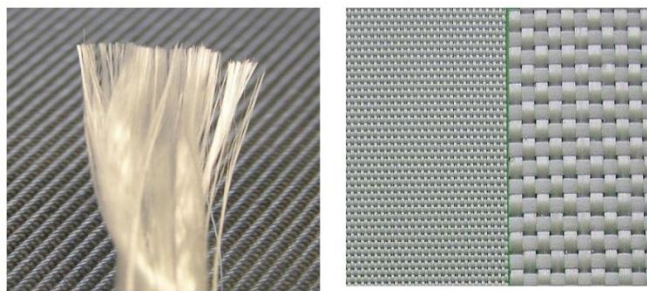
## 1.4 Les éléments constitutants d'un matériau composite

Un matériau composite est constitué d'une matrice et d'un renfort, constitué de fibres. La matrice est elle-même composée d'une résine et de charges dont le but est d'améliorer les caractéristiques de la résine tout en diminuant le coût de production. D'un point de vue mécanique, l'ensemble résine-charges se comporte comme un matériau homogène, et le composite est considéré comme constitué d'une matrice et d'un renfort. Le renfort apporte au matériau composite ses performances mécaniques élevées, alors que la matrice a pour rôle de transmettre aux fibres les sollicitations mécaniques extérieures et de protéger les fibres vis-à-vis des agressions extérieures (Meftah Ali, 2017).

### 1.4.1 Les renforts

Les composites sont souvent désignés selon le type de renfort. Ainsi, il existe des composites à particules, des composites sandwichs, des composites à phases dispersées ou encore des composites fibreux (figure 1.1). Les renforts forment les armatures du matériau composite, ils aident à améliorer la résistance mécanique et la rigidité et se présentent sous forme filamentaire, allant de la particule de forme allongée à la fibre continue. Ainsi les fibres sont constituées par plusieurs milliers de filaments de diamètres variant de 5 à 25  $\mu\text{m}$ . Les renforts sont présents sous plusieurs formes : simple linéique, tissu surfacique simple, tissu complexe. Les renforts sont caractérisés par :

- La nature de la fibre, minérale ou organique,
- L'architecture du renfort.



**Figure (1.1)** Fibre de verre [AYACHE Belqassim, 2019]

### 1.4.2 La matrice

Les matrices utilisées dans les matériaux composites désignent la matière solide qui entoure les renforts pour former une masse compacte, et ont pour rôle de transférer les sollicitations mécaniques aux fibres et de les protéger de l'environnement extérieur.

Le solide formant la matrice peut être d'origine métallique, céramique ou polymère. A partir de la nature de la matrice les matériaux composites sont classés en trois catégories : Les composites à matrice polymère ou organique (CMO), Les composites à matrice métallique et Les composites à matrice céramique.

### 1.4.3 Interfaces

Afin d'assurer une compatibilité entre le renfort et la matrice l'utilisation d'une couche d'interface est indispensable. Un apprêt spécifique comportant un agent collant est administré aux fibres destinées à la fabrication des composites reçoit il permet de coller les filaments pour en faire des fils et assure une fonction de lubrification afin de les protéger contre l'abrasion due au frottement entre fibres.

### 1.4.4 Charges- additifs

Dans le domaine des matériaux composites on appelle communément une charge toute substance inerte, minérale ou végétale qui est ajoutée à un polymère de base qui permet de modifier de manière sensible les propriétés mécaniques, électriques ou thermiques et d'améliorer l'aspect de surface ou bien simplement redirection le prix de revient du matériau modifié. Au contraire des matériaux thermoplastiques, les matériaux thermodurcissables ont toujours renfermé des charges à des taux souvent élevés pouvant atteindre 60 % en masse. Le choix d'une charge pour un polymère donné est caractérisé en fonction des modifications recherchées pour l'objet terminé. Mais d'une manière générale, les substances utilisables comme charges des matériaux plastiques devront avant tout satisfaire un certain nombre d'exigences à savoir : la compatibilité avec la résine de

base, la mouillabilité, l'uniformité de qualité et de granulométrie, la faible action abrasive et le bas prix de revient [AYACHE, 2019].

## 1.5 Domaines d'applications des matériaux fonctionnellement gradués :

Le concept des matériaux fonctionnellement gradués est applicable dans nombreux domaines. Il a été initialement conçu pour l'industrie de l'aéronautique, où les FGM ont fournis deux propriétés contradictoires telles que la conductivité et l'isolation thermique. Actuellement, ils permettent la production des matériaux légers, forts et durables, et ils sont applicables dans un large intervalle des domaines tels que :

### 1.6 Aérospatial :

Le secteur de l'aérospatiale est l'un des secteurs qui montre plus d'intérêt au développement des FGM. NASA et la JAXA ont montré un grand intérêt au développement de cette technologie. Comme le coût de lancement des navettes spatiales dépend du poids qu'ils soulèvent dans l'espace, la création de pièces avec des éléments de connexion moins est une solution.

En outre, la conception optimale, l'équilibre entre le poids et la performance peut réduire les coûts de lancement. La performance et la sécurité sont toujours très préoccupantes dans l'aérospatiale. La protection de bouclier thermique des navettes spatiales pourrait être optimisée pour réduire le poids et augmenter la fiabilité en utilisant des plaques FGM. Bhatt, 1989 a montré l'utilisation de céramiques à base de nitrure de silicium pour les aubes de distributeur de turbine.

### 1.7 Médecine :

Le but d'utiliser les FGM pour produire des implants est d'utiliser les propriétés mécaniques des alliages, céramiques et composites gradué avec des matériaux biocompatibles. Ainsi, un implant osseux peut être constitué par un matériau solide et dur dans le noyau avec le

tissu osseux gradué compatible à la surface et un matériau de faible coefficient de frottement dans les articulations. Kumar et Maruno (2002) ont également ajouté le verre à la poudre d'hydroxyapatite et des implants en titane revêtus pour une meilleure biocompatibilité.

## 1.8 Défense :

Dans la demande de défense, tels que des plaques de blindage et des gilets pare-balles, la pénétration des matériaux résistants est nécessaire. Une des caractéristiques les plus importantes du matériau à gradient fonctionnel est la capacité à inhiber la propagation des fissures, ce qui rend les matériaux à gradient fonctionnel appropriés pour les applications de défense.

## 1.9 Énergie nucléaire :

Les FGM sont utilisés dans les dispositifs de conversion d'énergie. Ils fournissent également une barrière thermique et ils sont utilisés comme revêtement de protection sur des aubes de turbine dans le moteur à turbine à gaz et aussi dans le générateur thermoélectrique, pile à combustible, réacteurs nucléaires, pastilles de combustible

## 1.10 Optoélectronique :

Les FGM trouvent aussi leur application dans l'optoélectronique comme les matériaux à indice de réfraction gradués et des disques audio-vidéo ; support de stockage magnétique, semi-conducteur à bande graduée.

## 1.11 Génie civil :

ponts à poutre en caisson, les cheminées, les fondations élastiques (ces structures de plaques peuvent être trouvées dans différents types d'applications industrielles telles que radiers), réservoirs de stockage, les piscines [ADIM, 2013].

## 1.12 Type des matériaux fonctionnellement gradués :

Au début du développement des matériaux FGM, le concept était d'éliminer l'interface nette qui existait dans le matériau composite traditionnel et de la remplacer par une interface progressivement variable, qui s'expliquait par la composition chimique changeante de ce composite dans cette région d'interface. L'intérêt progressif pour ce type de matériaux a conduit à la mise au point de différents types de FGM. Le type d'application étudiée détermine généralement le type de FGM à utiliser. Les différents types des matériaux FGM en cours de production comprennent à présent le gradient de composition chimique, le gradient de porosité et le gradient de la microstructure. Chacun de ces types des matériaux FGM est décrit en détail dans les sections suivantes.

### 1.12.1 Gradient de composition chimique des Matériaux FGM :

Il s'agit d'un type des matériaux FGM, dans lesquels la composition chimique varie progressivement en fonction de la position spatiale dans le matériau. Cela pourrait être sous la forme d'une seule phase, ou dans un matériau multi phase. Une FGM monophasée est produite lorsque le composite est fabriqué à partir d'une seule phase, en raison de la solubilité des éléments chimiques d'une phase dans l'autre phase. Cela se produit généralement lors du processus de frittage [Bharti, I. et al. 2013]. Le changement graduel de la répartition des éléments chimiques dans la phase unique entraîne la formation du matériau fonctionnellement gradué. Selon le diagramme de phase et les limitations thermodynamiques, lorsque certains matériaux sont ajoutés à un autre matériau, le matériau qui a été ajoutée à l'autre matériau serait soluble dans ce matériau sur une gamme de composition et des conditions de mélange. Ce matériau deviendrait ce qu'on appelle un matériau monophasé mais de composition chimique variable en raison de la solubilité. Ce type de FGM est moins habituel. Les matériaux FGM les plus couramment conçus et les plus habituellement utilisés sont ceux qui ont une composition chimique multi phase [Mahmoud, R.M. et al. 2012,2015]. Les phases et la composition chimique on fait varier à travers le volume apparent du matériau. Comme la composition



du matériau varie d'un matériau à l'autre, il en résultera différentes phases avec différentes compositions chimiques qui permettraient de réaliser l'application souhaitée, pour laquelle la FGM a été conçue. Les différentes phases produites dépendent de la quantité de composition du matériau de renforcement et des conditions de fabrication, telles que la vitesse de refroidissement et le traitement thermique appliqué à ce matériau. Dans la métallurgie des poudres, le procédé de production de FGM est en plaçant la couche par couche de composition de poudre requise, et cela est suivi par le compactage et le frittage de la poudre par la suite. Au cours du processus de frittage, certaines poudres métalliques vont réagir pour former différents composés et phases chimiques. Celles-ci varieraient en fonction de la position spatiale dans le matériau fonctionnellement gradué.

### 1.13 Gradient de la microstructure des Matériaux FGM :

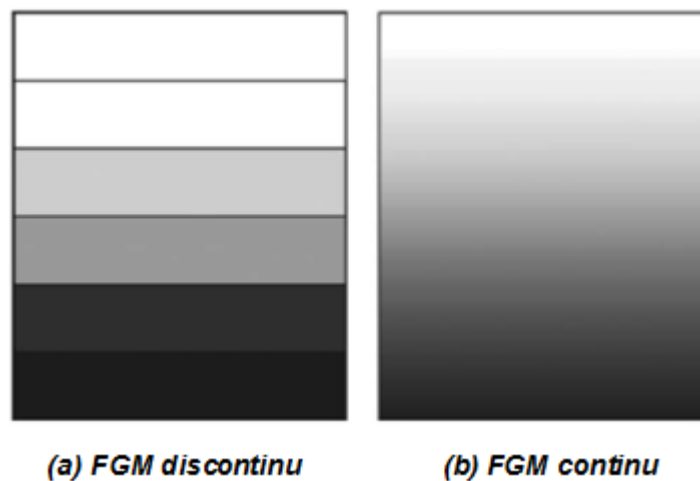
Un matériau fonctionnellement gradué de gradient microstructural est un autre type de FGM, dans lequel la microstructure est conçue de manière à produire différentes microstructures dans le matériau, qui sont amenées à changer progressivement, de manière à obtenir les propriétés requises du matériau. La gradation microstructurale peut être obtenue pendant le processus de solidification, de sorte que la surface du matériau est trempée, par exemple lors de la production d'une propriété de surface très dure du matériau. Le noyau du même matériau est laissé refroidir lentement, ce qui aiderait à produire des microstructures différentes de celles situées à la surface du matériau et à la partie la plus interne. De plus, la gradation microstructurale peut être obtenue par un processus de traitement thermique contrôlé.

### 1.14 Loi de mélange :

Plusieurs approches sont utilisées pour décrire la variation matérielle du FGM qui est fabriqués à partir de deux phases de matériaux. En général, la plupart des approches sont basées sur la distribution de la fraction volumique plutôt que développé à partir de microstructures classées réelles [Bao et Wang, 1995 ; Shen, 2009]. Deux types de fraction volumique (variations/gradations) sont populaires dans la littérature qui couvre la plupart

des modèles analytiques existants (figure 1.2.a). Une variation continue de la fraction volumique de la céramique ou du métal est assumée, et celle du métal peut être représentée comme une fonction de coordonnées suivant l'épaisseur ( $z$ ) (figure 1.2.b).

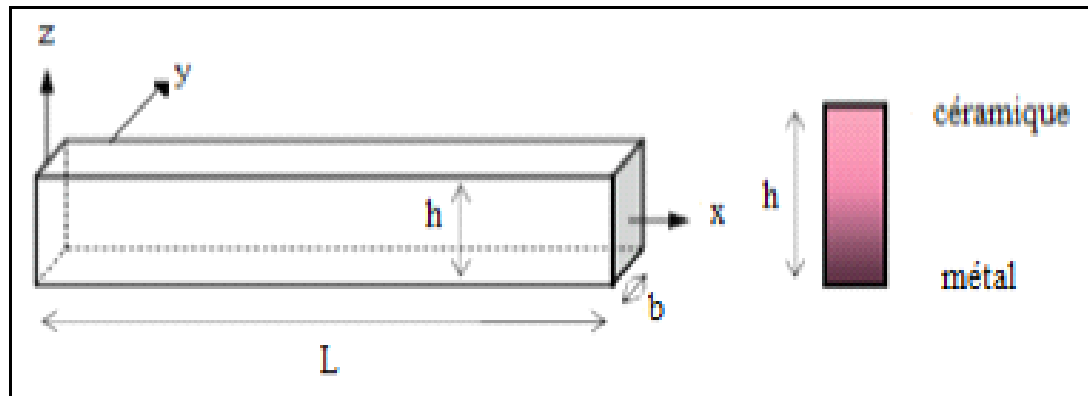
Une variation par morceaux de la fraction volumique de la céramique ou du métal est assumée, et le FGM est pris pour être posé avec la même fraction volumique dans chaque région, c.-à-d. une couche quasi-homogène de céramique-métal (figure 1.6a).



**Figure (1.2)** Modèle analytique pour une couche de matériau à gradient fonctionnel.

### 1.15 Propriétés matérielles des poutres FGM :

Un FGM peut être définie par la variation des fractions volumiques. La plupart des chercheurs emploient la fonction de puissance, la fonction exponentielle, ou la fonction sigmoïde pour décrire les fractions de volume. Considérons une poutre de longueur  $L$ , de section rectangulaire avec la largeur  $b$  et les épaisseurs  $h$  comme représenté sur la (figure 1.3).



**Figure (1.3)** Géométrie d'une poutre FGM.

### 1.15.2 Fonction de puissance (P-FGM) :

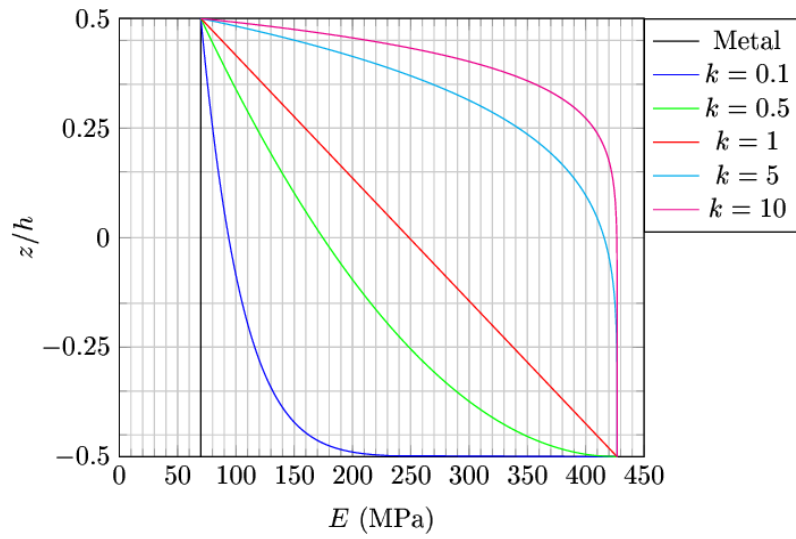
La première fonction les propriétés matérielles obéit à une fonction en loi de puissance (P-FGM) comme suit (Kolahchi *et al.* 2015, Bennai *et al.* 2015, Tlidji *et al.* 2014),:

$$P_e = P_m V_m + P_c V_c \quad (1.1)$$

$P_m, P_c$  sont les propriétés du métal et de la céramique,  $V_m$  et  $V_c$  représentent les fraction volumique du métal et de la céramique définies par

$$V_c = \left( \frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right)^k \quad (1.2.a)$$

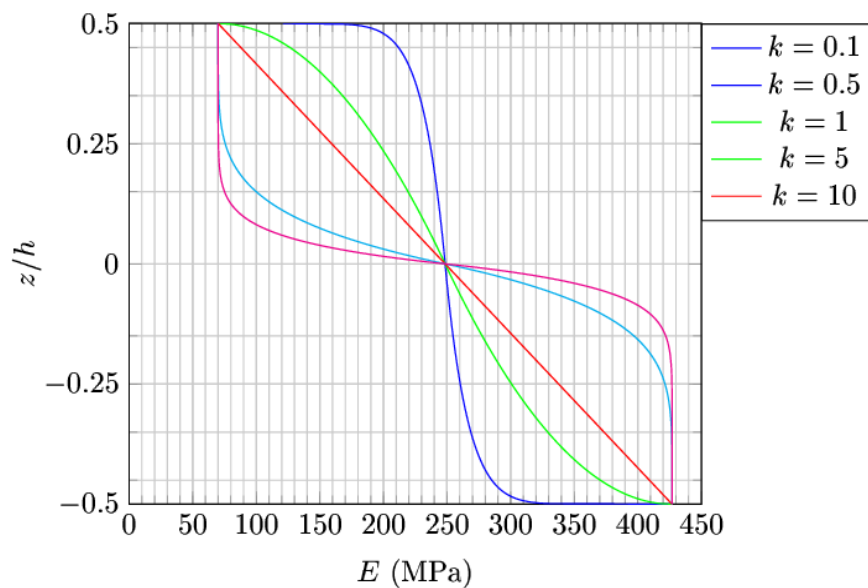
$$V_m = 1 - V_c \quad (1.2.b)$$



**Figure (1.4)** Lois de puissance (P-FGM).

### 1.16 Fonction sigmoïde(S-FGM) :

La troisième fonction utilisée dans cette étude est la fonction sigmoïde (S-FGM), (Aldousari (2017), Bouguenina et al. 2015).



**Figure (1.5)** Fonction sigmoïde S-FGM.

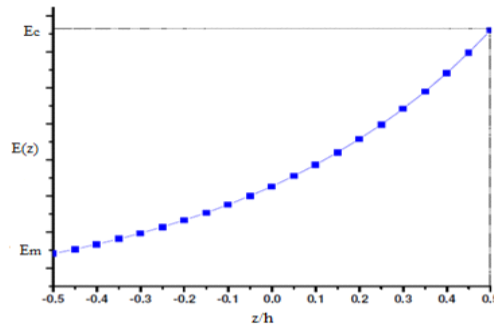
### 1.17 Fonction exponentielle (E-FGM) :

La fonction exponentielle est utilisée pour décrire les propriétés matérielles d'une poutre FGM ; elle s'écrit comme suit (Delale et Erdogan 1983) :

$$E(z) = E_m \cdot e^{\beta(z+h/2)} \quad (1.4)$$

Avec :

$$\beta = 1/h * \ln(E_c / E_m)$$



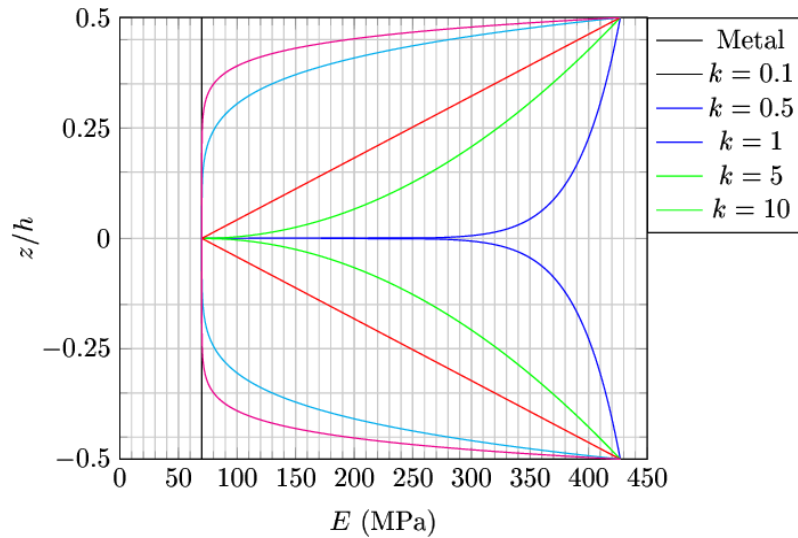
**Figure (1.6)** Variation du module de Young en fonction de l'épaisseur (E-FGM).

#### 1.17.2 Fonction puissance symétrique SP-FGM :

La loi de puissance symétrique modifiée (S-P-FGM), Aldousari (2017), a la forme suivante :

$$P_e = P_c + (P_m + P_c) \left( \frac{-2z}{h} \right)^k \left( -\frac{h}{2} \leq z \leq 0 \right) \quad (1.5.a)$$

$$P_e = P_c + (P_m + P_c) \left( \frac{2z}{h} \right)^k \left( 0 \leq z \leq \frac{h}{2} \right) \quad (1.5.b)$$



**Figure (1.7)** Lois de puissance symétrique (SP-FGM).

## 1.1 Gradient de porosité des Matériaux FGM :

### 1.1.1 Définition de la porosité

Selon le glossaire international d'hydrologie, la porosité peut être définie comme étant la propriété d'un milieu, d'un sol ou d'une roche de comporter des pores, c'est à dire des vides interstitiels interconnectés ou non. Elle peut être exprimée comme l'ensemble des vides (pores) d'un matériau solide, ces vides sont remplis par des fluides (liquide ou gaz). La porosité est aussi une valeur numérique définie comme le rapport entre le volume

des vides et le volume total d'un milieu poreux ;  $a_0 = \frac{V_{pores}}{V_{total}}$

Avec :  $a_0$  c'est la porosité,  $V_{pores}$  le volume des pores et  $V_{total}$  le volume total du matériau, c'est-à-dire la somme du volume de solide et du volume des pores.

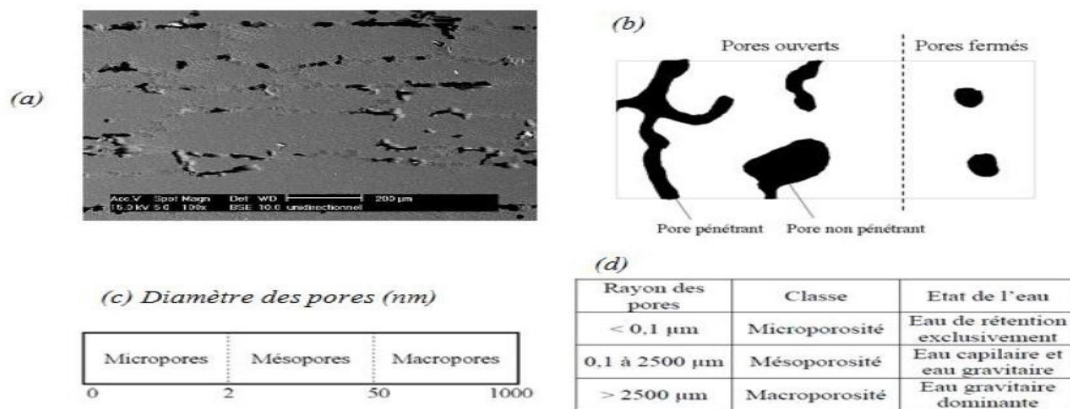
La porosité est donc définie à la fois comme une propriété caractéristique d'un milieu poreux et comme un paramètre qui l'exprime quantitativement (rapport de volumes, sans dimension).

D'après cette définition, il est possible de se représenter le défaut de porosité dans un matériau composite comme étant de très petites cavités emprisonnant à priori de la

matière gazeuse (tâches noires sur la Figure.1.8.a). Schoeller (1955) distingue deux catégories de pores représentés sur la Figure. 1.8.b).

- les porosités ouvertes composées de vides inters communicants connectés à la partie extérieure du matériau.- les porosités fermées, isolées à l'intérieur du matériau et ne permettant aucune perméabilité. Les pores pénétrants sont des pores ouverts qui ont la particularité de relier au moins deux faces du matériau poreux.

Les nombreuses applications des matériaux poreux font appel à des tailles de pores qui peuvent varier de l'échelle atomique à l'échelle millimétrique. L'IUPAC (International Union of Pure and Applied Chemistry) a recommandé la nomenclature relative à la taille des pores présentée à la Figure.1.8.c) (Schaefer, 1994) En se référant à la gamme des tailles moyennes des interstices d'un milieu poreux et aux états physiques de l'eau contenue en leur sein, une seconde classification des porosités avait préalablement été proposée (Schoeller, 1955). Celleci définit un micropore (ou pore matricielle) comme une cavité de diamètre inférieur à  $0,1\mu\text{m}$  et un macropore (ou porosité structurale) comme une cavité de diamètre supérieur à  $2,5\text{mm}$ . Les mésoporosités (ou porosité texturale ou capillaire) sont donc les interstices de diamètre intermédiaire compris entre  $0,1\mu\text{m}$  et  $2,5\text{mm}$  (Figure.1.8.d). [Ait yahia, 2015]

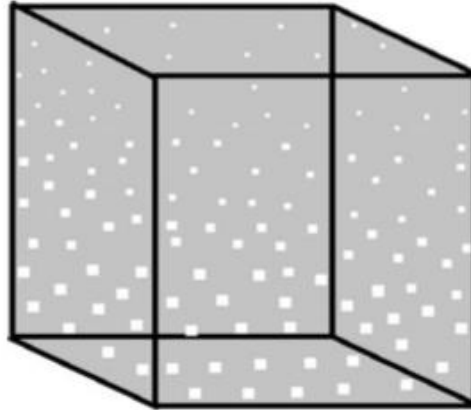


**Figure (1.8)** (a) Micrographie MEB des porosités étudiées, (b) Schématisation des différents types de pores (c) et (d) Nomenclatures relatives à la taille des pores.

La porosité est donc un concept indépendant de la forme et des connexions entre les pores. Seuls les volumes sont considérés. Néanmoins, il est important de signaler que pour les matériaux composites, le concept de porosité correspond à des interstices de petites tailles (ordre millimétrique et inférieur) par rapport aux fissures, diaclases ou délaminages. [FOURN, 2019]

Le Gradient de porosité des matériaux fonctionnellement gradués est un autre type de FGM, dans lequel la porosité dans le matériau est amenée à changer avec le changement de la position spatiale dans le matériau composite. Le diagramme schématique du gradient de porosité typique d'un matériau fonctionnellement gradué est représenté sur la figure 1.9. Ce type de matériau à gradation fonctionnelle est très important pour les applications de génie civiles, L'utilisation des matériaux composites dans la construction civile est un nouveau pas qui commence à intéresser nos bâtisseurs. Le nombre de dégâts causés par les séismes à travers le monde a poussé les chercheurs à s'intéresser aux composites. Le problème majeur de l'utilisation des matériaux composites dans la construction civile, reste leur coût, qui est encore excessif. L'utilisation des composites renforcés de fibres de carbone, en complément des composites à fibre de verre (TD et TP) pourra se développer dans le secteur de la construction civile lorsque leur prix deviendra inférieur à 6€/kg. (Les composites apportent au bâtiment la souplesse des formes, la résistance aux contraintes climatiques, et les composites renforcés de fibres de carbone résistent aux séismes. l'utilisation des composites dans le bâtiment ne pourra se développer que si les prescriptions techniques actuelles sont mieux adaptées à leur spécificité.





**Figure (1.9)** Matériau FGM poreux.

## 1.2 Lois des distributions de la porosité

### 1.2.1 Lois de distribution uniforme

Dans laquelle le module de Young, le module de cisaillement et la masse volumique sont calculés comme suit :

$$E(z) = E_1 (1 - e_0 \alpha_1) \quad 1.6. a$$

$$G(z) = G_1 (1 - e_0 \alpha_1) \quad 1.6. b$$

$$\rho(z) = \rho_1 \sqrt{1 - e_0 \alpha_1} \quad 1.6. c$$

### 1.2.2 Lois de distribution non uniforme

Les distributions non uniformes, sont respectivement poutre 2 et poutre 1. Dans ce cas, les propriétés du matériau peuvent être déterminées comme suit :

Pour poutre 2:

$$E(z) = E_1 \left[ 1 - e_0 \cos\left(\frac{\pi z}{h}\right) \right] \quad 1.7. a$$

$$G(z) = G_1 \left[ 1 - e_0 \cos\left(\frac{\pi z}{h}\right) \right] \quad 1.7. b$$

$$\rho(z) = \rho_1 \left[ 1 - e_m \cos\left(\frac{\pi z}{h}\right) \right] \quad 1.7. c$$

Pour poutre 3:

$$E(z) = E_1 \left[ 1 - e_0 \cos\left(\frac{\pi z}{2h} + \frac{\pi}{4}\right) \right] \quad 1.8. a$$

$$G(z) = G_1 \left[ 1 - e_0 \cos\left(\frac{\pi z}{2h} + \frac{\pi}{4}\right) \right] \quad 1.8. b$$

$$\rho(z) = \rho_1 \left[ 1 - e_m \cos\left(\frac{\pi z}{2h} + \frac{\pi}{4}\right) \right] \quad 1.8. c$$

Où  $e_0 = 1 - \frac{E_0}{E_1}$  est le coefficient de porosité, et  $e_m = 1 - \frac{\rho_0}{\rho_1}$  est le coefficient de

porosité pour la masse volumique, respectivement. La relation entre les coefficients de porosité peut être exprimée comme suit :

$$\frac{E_0}{E_1} = \left( \frac{\rho_0}{\rho_1} \right)^2 \rightarrow e_m = 1 - \sqrt{1 - e_0} \quad (1.9)$$

$E_0$  et  $E_1$  sont les valeurs minimale et maximale du module d'élasticité, est la valeur maximale du module de cisaillement.

$$G_1 = \frac{E_1}{2[1 + \nu]} \quad (1.10)$$

Les valeurs minimales et maximales de la masse volumique sont  $\rho_0$  et  $\rho_1$ . Dans cet article, le rapport de Poisson ( $\nu$ ) est considéré comme constant.

### 1.3 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons défini les matériaux à gradient de propriétés (FGM), leurs propriétés, leurs domaines d'application, l'histoire de leur développement.

La variation spatiale et progressive des propriétés de ces matériaux permet de créer des structures innovantes qui peuvent être utilisées dans de nombreux domaines d'application.

Enfin nous avons terminé par la présentation des différentes lois possibles qui servent à décrire la variation des propriétés matérielles du matériau FGM suivant l'épaisseur de la poutre. Ces lois pouvaient être sigmoïdes, exponentielles ou même loi de puissance, et ceux qui décrivent le changement spéciale de la porosité dans les poutres qui seront utilisées par la suite dans l'analyse du comportement vibratoire des poutres.

## 1.4 Introduction :

Les structures complexes que l'on étudie couramment sont constituées de sous-ensembles aux géométries les plus diverses : barres ou poutres, plaques et coques minces ou épaisses, parties massives. Les structures minces de type poutre, arc, plaque et coque sont très répandues dans le milieu naturel (feuilles d'arbres, mollusques, cellules vivantes, etc.) et dans les réalisations humaines les plus diverses (charpentes, voûtes, réservoirs, caissons, tabliers de ponts, carrosseries automobiles, coques de bateaux, ailes d'avions, etc.).

Pour chacun de ces constituants, on dispose de la formulation de la théorie de l'élasticité ou plasticité ou de modèles théoriques qui en sont dérivés (théorie des poutres, plaques et coques). L'analyse du comportement et la conception de ces structures sont des activités importantes sur les plans techniques et économiques.

### **I.2 Aperçu historique des théories des poutres**

A la fin de XVI<sup>ème</sup> siècle, Galilée effectue les premiers essais connus de traction et de flexion, c'est pratiquement le premier pas dans la théorie des poutres, puis Hook énonce en 1678 la loi de proportionnalité entre les déformations et les contraintes tandis que Bernoulli étudie la flexion plane. A Varigno (1654-1722) on doit le polygone funiculaire, En 1773 Colomb donne une théorie satisfaisante de la flexion simple par l'application des équations d'équilibre interne, et Euler étudie la stabilité des pièces longues comprimées. Ce n'est qu'à partir de 1823 que Navier établit un cours de résistance des matériaux. Ensuite Gulmann, Muller-Breslau, Mohr, Gastigliano, Ménabréa, Bresse, Clapeyron, Wilson-Maney, Hardy Cross, Verechaguine, Bernard de Fontvialant établissent des relations et mettent au point des méthodes nouvelles permettant une systématisation des calculs. Actuellement les recherches portent plus particulièrement sur : les théories mathématiques de l'élasticité, la photoélasticité, la plasticité, des matériaux nouveaux, obtenus par alliage ou par synthèse, font l'objet d'études poussées dans les domaines des hautes et basses températures et des efforts répétés

**Les différents types de poutres** La poutre est l'élément structural le plus répandu, puisqu'elle fait partie intégrante de la plupart des ouvrages de construction ou des pièces machines. En réaction aux charges appliquées, des forces et des moments internes se développent dans la poutre pour maintenir l'équilibre.

- **Poutre simple**

C'est une poutre reposant sur deux supports ; l'appui double et l'appui simple. Les points d'appui sont articulés de façon à ce que les extrémités puissent se mouvoir librement pendant la flexion.

- **Poutre console**

C'est une poutre encastrée dans un mur à une extrémité. L'extrémité encastrée ne bouge pas pendant la flexion, tandis que l'autre extrémité est entièrement libre. On appelle aussi cette poutre, poutre en porte-à-faux ou poutre encastrée à une extrémité.

- **Poutre avec porte-à-faux**

C'est une poutre sur deux appuis (un simple et l'autre double), elle a une ou deux extrémités qui dépassent de façon appréciable les appuis (porte-à-faux). Les poutres sont classées suivant leurs appuis. Ces trois précédents types des poutres entrent dans la catégorie des poutres statiquement déterminées (poutre isostatique), parce qu'elles possèdent trois inconnues reliées aux trois degrés de liberté et par le fait même des équations d'équilibre.

- **Poutre continue**

C'est une poutre supportée par l'un des deux supports, c'est donc une poutre en équilibre hyperstatique.

- **Poutre à double encastrement**

C'est une poutre supportée par deux encastremets, elle est donc une poutre en équilibre hyperstatique.

- **Poutre supportée à double encastrement**

C'est une poutre supportée par deux encastremets ayant un ou plusieurs supports. C'est donc une poutre en équilibre hyperstatique. Elle a plus de fixation ou support que nécessaire.

Cependant, ces supports augmentent la capacité portante de la poutre mais les équations de la statique ne suffisent pas à analyser ces poutres. On aura donc recours à différentes méthodes

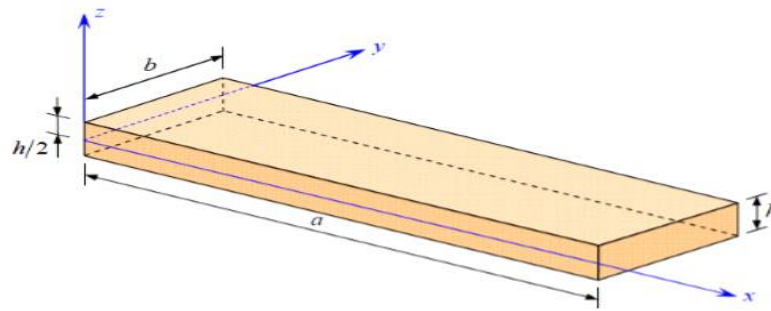
## 1.5 Théories des poutres [Sellai 2011]

Les théories des poutres impliquent essentiellement la réduction d'un problème en trois dimensions de la théorie d'élasticité à un problème unidimensionnel.

Elles s'appliquent sur des solides élancés (les prismes dont la longueur vaut 10 fois la plus grande dimension transversale), Là où la détermination de la solution exacte pour les champs de contrainte et de déformation n'est pas possible, elles permettent d'obtenir une solution approchée, qui donne une bonne idée sur les efforts et les déplacements

## 1.6 Les modèles des poutres pour les matériaux fonctionnellement gradués

Le terme « poutre » désigne un objet dont la longueur est grande comparée aux dimensions transverses (section fine) (figure 2.1). Une poutre est un élément de structure utilisée dans la construction des bâtiments, des navires, autres véhicules et dans la fabrication de machines. Cependant, le modèle des poutres peut être utilisé pour des pièces très diverses à condition qu'elles respectent certaines normes.



**Figure 2.1.** Schéma d'un élément de poutre (Berthelot 2012)

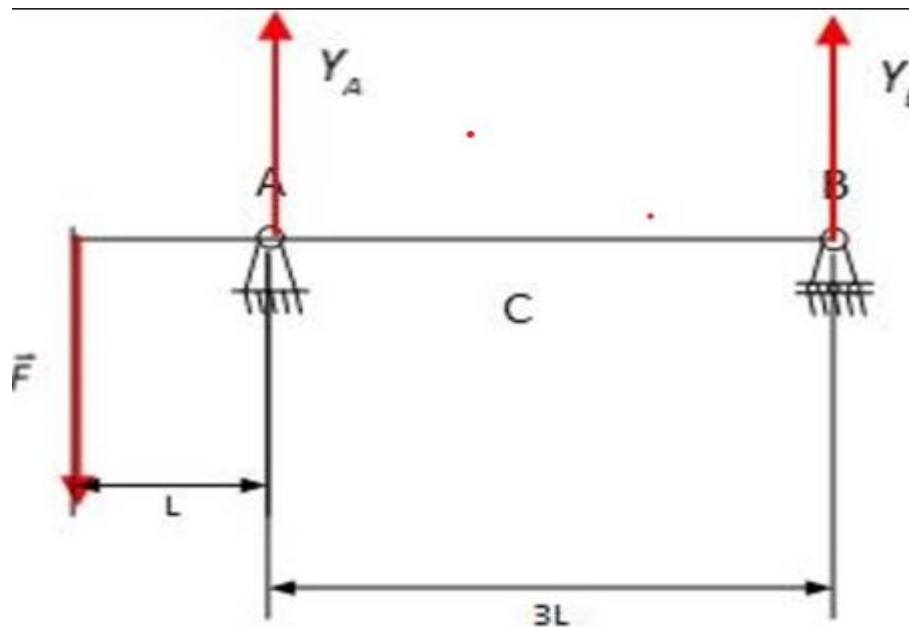
**Définition du cisaillement :** Le cisaillement est une notion très importante et ce paragraphe vise à expliquer le plus clairement possible en quoi il consiste. Par soucis de simplicité l'exemple qui suit traite d'une poutre homogène et isotrope dont l'axe longitudinal est « x ».

Lorsqu'une charge dirigée vers les « z » positifs est appliquée à l'extrémité droite de la poutre, elle induit un moment de flexion et du cisaillement et se déforme vers le haut selon une certaine courbe :

#### 1.7 Hypothèses cinématiques de la théorie des poutres :

- L'hypothèse cinématique fondamentale de la théorie des poutres (Coffignal 2001) est l'hypothèse de Navier. (Navier -Bernoulli et Navier -Timoshenko) : "Toute section droite de la configuration de référence est supposée rester plane et inaltérée au cours du mouvement".
- L'hypothèse de Navier s'énonce aussi de la façon équivalente suivante : "Toute section droite est considérée comme ayant un mouvement de solide indéformable".
- L'hypothèse d'Euler- Bernoulli énonce que la section droite de la poutre est indéformable reste plane et perpendiculaire à la fibre moyenne avant et après déformation, et la déformation transversale est nulle.

- L'hypothèse de Timoshenko énonce que la section droite de la poutre est indéformable ne reste pas perpendiculaire à la fibre moyenne après déformation (il y a une rotation de la section droite), et l'effet de cisaillement n'est pas nul et pris en compte.



**Figure 2.2.** Cisaillement et flexion d'une poutre.

**Remarques :**

- 1) L'hypothèse énoncée de Navier montre que la section reste plane. Il n'est donc pas imposé a priori que la section reste perpendiculaire à la ligne moyenne.
- 2) L'hypothèse de Navier n'est pas suffisante pour définir l'état de contrainte dans une section droite. Des hypothèses supplémentaires doivent être faites pour passer des "contraintes généralisées" (effort normal, effort tranchant, moment fléchissant) aux contraintes en chaque point de la section droite.



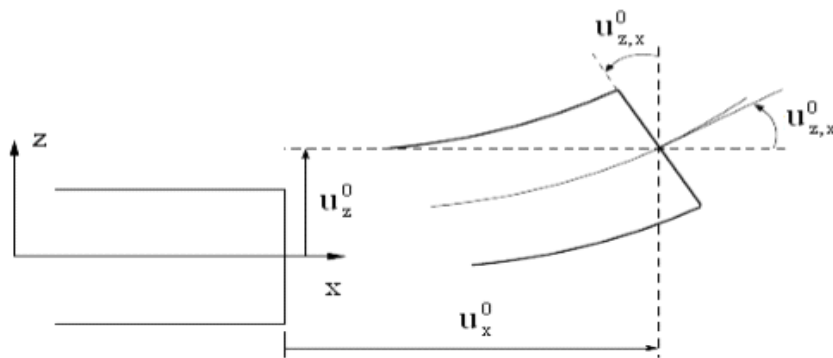
Dans notre travail on utilise les modèles d'Euler Bernoulli, Timochenko et quelques modèles d'ordre élevé.

### 1.7.1 -Modèle d'Euler Bernoulli (Classical Beam Theory- CBT) :

Cette théorie est basée sur la théorie élémentaire de flexion des poutres qui ne tient pas compte des effets de la déformation de cisaillement.

Comme hypothèse de cette théorie, les déformations dues au cisaillement transversal sont négligées car il n'existe pas de cisaillement sur la hauteur de la poutre,

« La section reste plane et perpendiculaire à l'axe neutre de la poutre avant et après la déformation » (Fig. 2.3).



**Figure 2.3.** (Cinématique de la poutre d'Euler Bernoulli)

La répartition de déplacement (le gauchissement) est décrite par la fonction nulle :

D'après la CBT ; le champ de déplacement de n'importe point M est donné par les deux composantes suivantes :

$$U(M) = \begin{cases} u(x, z) = u_0 - z u_{0,x(x)} \\ w(x, z) = w_0 \end{cases} \quad (2.2)$$

Avec :

$u(x, z)$ : C'est le déplacement suivant X et  $w(x, z)$  est le déplacement dans la direction de Z ou bien la flèche.

La rotation autour de l'axe Y, provoquée par la flexion est tel que :

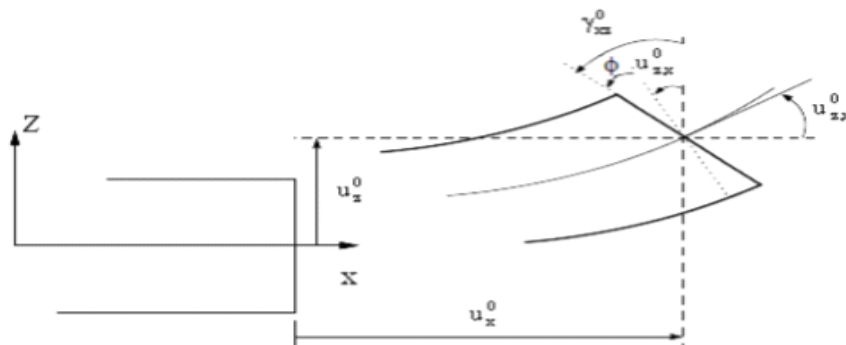
$$w_0(x) = \frac{\partial w_0}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad (2.3)$$

$u_0(x)$  et  $w_0(x)$  sont les composantes de déplacement au milieu de la section et sur la ligne moyenne de la poutre, respectivement le long des axes X et Z .

Lorsque cette théorie est utilisée pour l'analyse des fréquences naturelles des poutres, les Flèches sont sous-estimées. Ceci est la conséquence de la négligence de la déformation Transversale. Modèle de Timoshenko (First shear deformation beam theory-FSDBT):

La théorie de Timoshenko est plus riche et plus générale que la théorie élémentaire des poutres au prix d'une fonction supplémentaire. Cette solution permet d'affiner les solutions analytiques issues de la théorie classique. Toutefois ces solutions sont entachées d'erreurs au voisinage des appuis et de la zone indentation où nous pouvons avoir des concentrations de contrainte et des champs de déplacement non homogènes.

Elle est basée sur le principe : « qu'après déformation, la section plane reste plane mais elle perd sa perpendicularité par rapport à la ligne moyenne de la poutre » (Timoshenko 1972) (Figure 2.3).



**Figure (2.4)** Cinématique de la poutre de Timoshenko (Dufort 2001)

Dans le cas où nous avons un élancement faible, l'effet du cisaillement devient plus important sur la déformée. Dans ce cas, la fonction s'écrit comme suit :

$$U(M) = \begin{cases} u(x, z) = u_0(x) - w_0, x_{(x)} + z\gamma_{xz}^0(x) \\ w(x, z) = w_0(x) \end{cases} \quad (2.4)$$

Il existe un cisaillement uniforme et les déformations dues au cisaillement transversal ne sont pas négligées. C'est la théorie de premier ordre (FSDBT). Le champ de déplacements de Timoshenko s'écrit alors

Avec :

$\gamma_{xz}^0$ , c'est la distorsion ou la déformation angulaire mesurée sur la ligne moyenne de la poutre.

Tel que :

$$\gamma_{xz}^0 = w_x^0(x) - \phi^0(x) \quad (2.5)$$

$\phi^0(x)$ , Etant la rotation totale de la section mesurée sur la ligne moyenne de la poutre.

La contrainte de cisaillement est :

$$\tau_{xz} = G_{xz} \gamma_{xz} = G_{xz} \gamma_{xz}^0 \quad (2.7)$$

$G_{xz}$ , est le module de cisaillement transversal qui est supposé constant

La théorie de Timoshenko est plus riche et plus générale que la théorie élémentaire des poutres au prix d'une fonction supplémentaire. Cette solution permet d'affiner les solutions analytiques issues de la théorie classique.

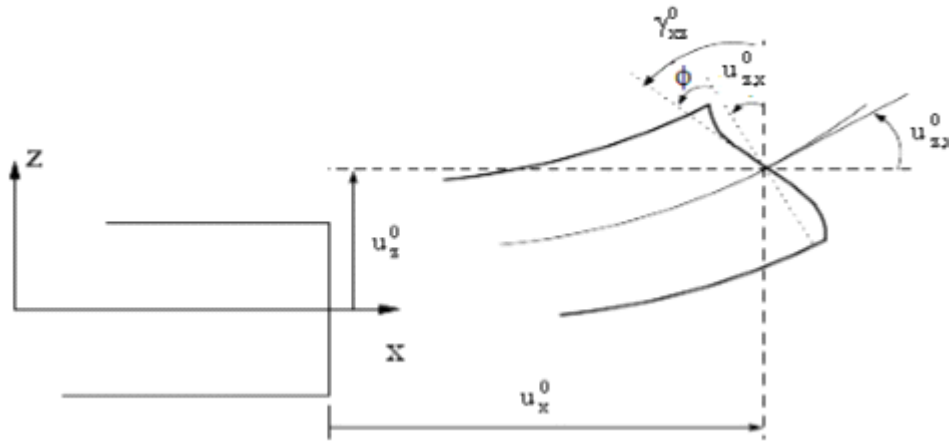
Le non nullité des contraintes tangentielles sur les bords extrêmes de la poutre et l'introduction des coefficients de correction de cisaillement ont menés d'autres chercheurs à

essayer de trouver une autre théorie pouvant tenir compte de ces facteurs ; c'est "la théorie d'ordre élevé".

### 1.7.2 Modèle d'ordre élevé (High shear deformation beam theory HSDBT) :

Dans cette théorie la distribution des champs de déplacement est non linéaire selon l'épaisseur de la poutre. Elle est plus précise que la théorie du premier ordre puisqu'elle introduit une fonction qui tient compte du phénomène de « gauchissement ».

Ce phénomène apparaît lorsque la section transversale de la poutre perd sa planéité. La fonction représente le gauchissement et sa dérivée représente le cisaillement (figure 2.5).



**Figure (2.5)** Cinématique de la poutre d'ordre élevé.

Le champ de déplacement devient :

Pour que les contraintes tangentielles soient nulles sur les bords extrêmes de la poutre, on doit avoir :

$$U(M) = \begin{cases} u(x, z) = u_0(x) - zw_{0,x(x)} + \phi(z)\gamma_{xz}^0(x) \\ w(x, z) = w_0(x) \end{cases} \quad (2.8)$$

$$\gamma_{xz(x)} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = -w^x(x) + \phi'(z)\gamma_{xz}^0(z) + w_{0,x(x)} \quad (2.9)$$

$$\gamma_{xz}(x) = \phi'(z)\gamma_{xz}^0(x) \quad (2.10)$$

Cette condition qui nous permet d'avoir une répartition parabolique des contraintes de cisaillement sur l'épaisseur de la poutre d'une part et de choisir correctement des fonctions cubiques qui répondent à la condition.

- ***Quelques modèles de gauchissement :***

- *Approche de Levinson 1980, Murthy 1981 et Reddy 1945*  $f(z) = z \left( 1 - \frac{4 \cdot z^2}{3 \cdot h^2} \right)$

- *Modèle exponentiel proposé par Afaq et al* :  $f(z) = z e^{-2\left(\frac{z}{h}\right)^2}$

- *L'approche de Reissner 1945* :  $f(z) = \frac{5}{4} z \left( 1 - \frac{4 \cdot z^2}{3 \cdot h^2} \right)$

- *Touratier* :  $f(z) = \left( \frac{z}{h} \right) \sin\left( \frac{\pi \cdot z}{h} \right)$

## 1.8 Conclusion :

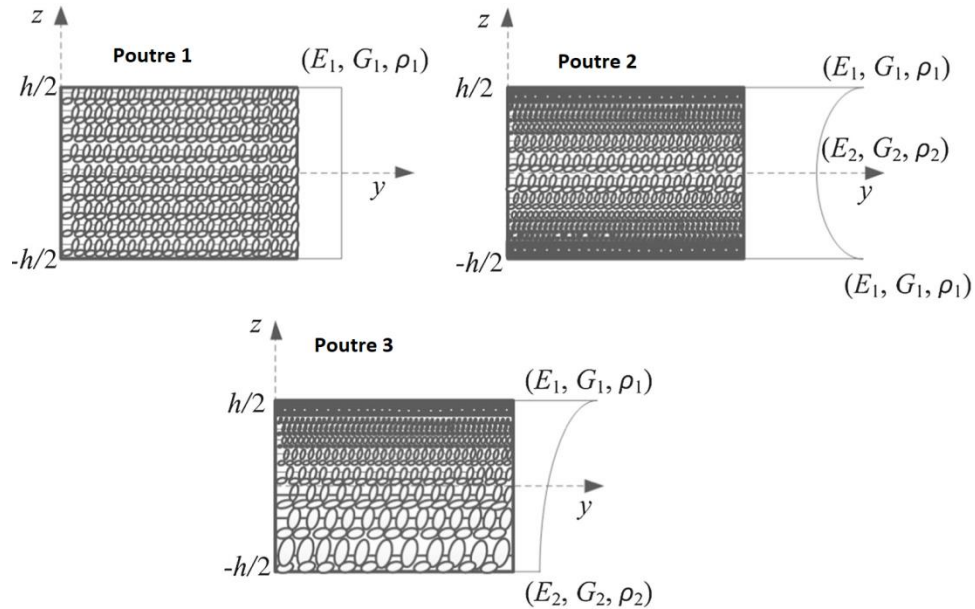
Dans cette partie de la recherche ; nous avons présenté les différents types des théories des poutres telles que la théorie de Bernoulli (CBT), Timochenko (FSDBT) et la théorie d'ordre élevé (HBT). On a aussi présenté les différents modèles des poutres avec une approche monocouche. Le modèle monocouche équivalent est mieux adaptée pour les matériaux FGM car il n'y a pas de changement brusque dans les caractéristiques mécaniques contrairement aux composites conventionnels ou le délaminage est un problème à ne pas écarter.

## 1.9 Introduction :

Ce chapitre est dédié au développement mathématique de problème de vibration libre des poutres à gradient de porosité. La formulation des équations d'équilibre est obtenue par l'utilisation du principe d'Hamilton. Les fréquences propres de vibration sont obtenues, en résolvant un problème aux valeurs propres.

## 1.10 Modèle mathématique :

La porosité dans les poutres varie de façon continue suivant l'épaisseur  $h$  d'une poutre de longueur  $L$ .



**Figure (1.10) :** Géométrie des poutres poreuses.

Dans laquelle le module de Young, le module de cisaillement et la masse volumique sont calculés comme suit par les expressions (1.6) pour la poutre 1, (1.7) pour la poutre 2 et les expressions (1.8) pour la poutre 3.

### 1.11 Champ de déplacement :

Le champ de déplacement de n'importe quel point M est le suivant :

$$u(x, z, t) = u_0(x, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + f(z)\varphi(x) \quad (3.3a)$$

$$u(x, z, t) = w_0(x, t) \quad (3.3b)$$

Ou  $u_0(x, t)$  ,  $w_0(x, t)$  sont les déplacements dans les directions  $x, z$  . Et  $\varphi(x)$  est une fonction inconnue, qui représente l'effet de la déformation en cisaillement transverse sur le plan moyen. Et  $f(z)$  représente le fonctionnement de gauchissement et sa distribution des contraintes de cisaillement transverse à travers l'épaisseur de la poutre.

Dans notre travail nous utilisons les théories suivantes :

Euler Bernoulli :  $f(z) = 0$

Timoshenko :  $f(z) = z$

Reddy (HBT1) :  $f(z) = z \left( 1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right)$

Touratier(HBT2) :  $f(z) = \frac{z}{h} \sin\left(\frac{z\pi}{h}\right)$

Le champ des déformations se déduit du champ des déplacements comme suit :

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_0(x)}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w_0(x)}{\partial x^2} + f(z) \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x} \quad (3.4a)$$

$$\gamma_{xz} = f'(z)\varphi_0(x) \quad (3.4b)$$

### 1.12 Le champ des contraintes :

En utilisant les relations suivantes on peut déduire le champ des contraintes :

$$\sigma_x = Q_{11} \times \varepsilon_x \quad (3.5a)$$

$$\tau_{xz} = Q_{55} \times \gamma_{xz} \quad (3.5b)$$

Avec :

$$Q_{11} = E(z) \quad (3.6a)$$

$$Q_{55} = \frac{E(z)}{2(1-\nu^2)} \quad (3.6b)$$

Les relations entre les contraintes et les déformations sont les suivants :

$$N_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x dz \quad (3.7a)$$

$$M_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z \times \sigma_x dz \quad (3.7b)$$

$$S_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} f(z) \times \sigma_x dz \quad (3.7c)$$

$$Q_{xz} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} f'(z) \times \tau_{xz} dz \quad (3.7d)$$

Donc

Les résultats supplémentaires  $S_x$  et  $Q_{xz}$  sont dus à l'introduction de  $f(z)$  dans l'expression du champ de déplacement sont :

$N_x$  : Effort normal.

$M_x$  : Moment fléchissant



$S_x$  : Moment supplémentaire du au cisaillement transversal

$Q_{xz}$  = Effort de cisaillement

Nous obtenons les relations fondamentales suivantes

$$\begin{bmatrix} N_x \\ M_x \\ S_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & B_{11} & B_{11}^a \\ B_{11} & D_{11} & B_{11}^a \\ B_{11}^a & D_{11} & F_{11}^a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial u_0(x)}{\partial x} \\ -\frac{\partial^2 w_0(x)}{\partial x^2} \\ \frac{\varphi_0(x)}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

$$Q_{xz} = A_{55}^s \times \varphi_0(x) \quad (3.9)$$

Les coefficients de rigidité d'extension et de flexion sont donnés par les expressions :

$$(A_{11}, B_{11}, D_{11}) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q \times (1, z, z^2) \, dz \quad (3.10a)$$

$$(B_{11}^a, D_{11}^a, F_{11}^a) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{11} \times f'(z) \times (1, z, f(z)) \, dz \quad (3.10b)$$

Le coefficient de rigidité de cisaillement transverse est donné par l'expression :

$$A_{55}^s = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{55} \times f'(z)^2 \, dz \quad (3.11)$$

## 1.13 Équation du mouvement

Le principe d'Hamilton est utilisé pour obtenir les équations du mouvement.

$$\delta \int_{t_2}^{t_1} (U_e - T) dt \quad (3.12)$$

Avec :

$U_e$  : Énergie de déformation.

$T$  : Énergie cinétique

L'énergie de déformation  $U_e$  s'écrit en coordonnées cartésiennes suivant :

$$U_e = \frac{1}{2} \iint (\sigma_{xx} \varepsilon_{xx} + \tau_{xz} \gamma_{xz}) dx dz \quad (3.13)$$

La variation de l'énergie de déformation  $U_e$  s'écrit

$$\delta U_e = \frac{1}{2} \iint (\sigma_{xx} \delta \varepsilon_{xx} + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz}) dx dz \quad (3.14)$$

Ou encore :

$$\delta U_e = \frac{1}{2} \int \left( N_x \cdot \frac{\partial \delta u_0(x)}{\partial x} - M_x \cdot \frac{\partial^2 \delta w_0(x)}{\partial x^2} + S_x \cdot \frac{\partial \delta \varphi_0(x)}{\partial x} + Q_{xz} \cdot \delta \varphi_0(x) \right) dx \quad (3.15)$$

Et l'énergie cinétique s'écrit :

$$T = \frac{1}{2} \iint \rho \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] dx dz \quad (3.16)$$

La variation de l'énergie cinétique s'écrit

$$\delta T = \frac{1}{2} \iint \rho \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial \delta u}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial t} \frac{\partial \delta w}{\partial t} \right) \right] dx dz \quad (3.17)$$

ou encore :

$$\delta T = \frac{1}{2} \int \left[ I_1 \left( \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial \delta u}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial t} \frac{\partial \delta w}{\partial t} \right) - I_2 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} \frac{\partial \delta u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x \partial t} \right) + I_3 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} \cdot \right. \\ \left. I_4 \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{\partial \delta u}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial t} \frac{\partial \delta \varphi}{\partial t} \right) - I_5 \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} \frac{\partial \delta \varphi}{\partial t} \right) - I_6 \frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{\partial \delta \varphi}{\partial t} \right] \quad (3.18)$$

en faisant l'intégration par partie de l'énergie de déformation (3.18) et l'énergie cinétique (3.21), tout en conservant alors le second terme sous forme intégrale, nous obtenons les équations du mouvement.

$$N_{x,x} = (I_1 u_0 - I_2 w_{0,x} + I_4 \varphi_0)_{,tt} \quad (3.19a)$$

$$M_{x,xx} = (I_2 u_{0,x} - I_3 w_{0,xx} + I_1 w_0 + I_5 \varphi_{0,x})_{,tt} \quad (3.19b)$$

$$S_{x,x} - Q_{xz} = (-I_4 u_0 - I_5 w_{0,x} + I_6 \varphi_0)_{,tt} \quad (3.19c)$$

Où désigne les dérivés de temps et I sont définis comme suit :

$$(I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, I_6) = \int_{-h}^h \rho (1, z, z^2, f(z), z \cdot f(z), f(z)^2) \quad (3.20)$$

Pour une poutre en appuis simples, les conditions aux frontières en  $x=0$  et  $x=\ell$  sont :

$$\delta u = 0 \quad \text{Ou} \quad N_x = 0 \quad (3.21a)$$

$$\frac{\partial \delta w}{\partial x} = 0 \quad \text{Ou} \quad M_x = 0 \quad (3.21b)$$

$$\delta w = 0 \quad \text{Ou} \quad \frac{\partial M_x}{\partial x} = 0 \quad (3.21c)$$

$$\delta \varphi = 0 \quad \text{Ou} \quad S_x = 0 \quad (3.21d)$$

## 1.14 Solution de Navier

Une solution de type Navier de (3.19), satisfaisant aux conditions aux frontières, est de la forme :

$$u_0 = A_m \cos\left(\frac{m\pi x}{\ell}\right) e^{i\omega t} \quad (3.22a)$$

$$w_0 = B_m \sin\left(\frac{m\pi x}{\ell}\right) e^{i\omega t} \quad (3.22b)$$

$$\varphi_0 = C_m \cos\left(\frac{m\pi x}{\ell}\right) e^{i\omega t} \quad (3.22c)$$

Avec :  $A_m$  ;  $B_m$  ;  $C_m$  sont des coefficients indéterminés.

En reportant ces expressions dans les équations (3.19), il vient :

$$\left( \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{bmatrix} - \omega^2 \times \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix} \right) \times \begin{bmatrix} u_0 \\ w_0 \\ \varphi_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

Où  $[K_{ij}]$  est la matrice de rigidité symétrique et  $[M_{ij}]$  Est la matrice masse symétrique, les éléments des deux matrices sont exprimées par les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} K_{11} &= A_{11} \cdot \left(\frac{m\pi x}{\ell}\right)^2 \\ K_{12} &= K_{21} = -B_{11} \cdot \left(\frac{m\pi x}{\ell}\right)^3 \\ K_{13} &= K_{31} = B_{11}^a \cdot \left(\frac{m\pi x}{\ell}\right)^3 \\ K_{22} &= D_{11} \cdot \left(\frac{m\pi x}{\ell}\right)^4 \\ K_{23} &= K_{32} = D_{11}^a \cdot \left(\frac{m\pi x}{\ell}\right)^3 \\ K_{33} &= F_{11}^a \cdot \left(\frac{m\pi x}{\ell}\right)^2 + A_{55}^s \end{aligned}$$

et

$$m_{11} = I_1$$

$$m_{12} = m_{21} = -I_2 \cdot \left( \frac{m\pi x}{\ell} \right)$$

$$m_{13} = m_{31} = I_3$$

$$m_{22} = I_4 \cdot \left( \frac{m\pi x}{\ell} \right) + I_1$$

$$m_{23} = m_{32} = -I_5 \cdot \left( \frac{m\pi x}{\ell} \right)$$

$$m_{33} = I_6$$

Une solution non nulle est obtenue lorsque le déterminant de l'équation 3.23 est nul :

$$\det \left( \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{bmatrix} - w^2 \times \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix} \right) = 0 \quad (3.24)$$

Pour obtenir les équations du mouvement de la théorie FBT, il suffit de remplacer la fonction de gauchissement  $f(z)$  par  $z$  dans l'expression de déplacement et introduire un coefficient de correction de cisaillement dans ce cas égale à  $k=5/6$  (poutre de section rectangulaire).

En mettant  $f(z) = 0$ , nous obtenons le système à résoudre de la théorie classique (CBT) :

$$\det \left( \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{23} \end{bmatrix} - w^2 \times \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{22} & m_{23} \end{bmatrix} \right) = 0 \quad (3.25)$$

## 1.15 Conclusion

Dans ce chapitre une formulation mathématique du problème de vibration libre des poutres à gradient de porosité en utilisant une théorie d'ordre élevée a été développée. Les caractéristiques du matériau à travers l'épaisseur de cette poutre sont trois lois de distribution de porosité, à savoir (Poutre 1, Poutre 2 et Poutre 3). Les équations de mouvement sont obtenues par

le principe d'Hamilton. Ces équations sont résolues par la solution de Navier. Les résultats obtenus de ce travail seront présentés et interprétés dans le chapitre suivant.

## 1.16 Introduction

Dans la présente partie du travail, les analyses des vibrations libres des poutres à gradient de porosité sont investiguées. Dans cette analyse, les modes de vibrations et les fréquences propres sont obtenus par résolution numérique du problème aux valeurs propres (3.23). Les propriétés matérielles des poutres FG sont estimées par trois lois de distribution de porosité (Poutre 1, Poutre 2 et Poutre 3). Ces poutres sont composées du métal, la porosité dans ces poutres varie seulement à travers l'épaisseur.

## 1.17 Résultats numériques et discussion

Pour cette étude de comparaison, les trois premiers modes de vibration d'une poutre simplement appuyée à gradient de porosité composée du métal,  $E_0 = 200\text{ GPa}$ ,  $\rho_0 = 7800\text{ kg/m}^3$ ,  $\nu = 0.3$ , sont déterminés et comparés aux solutions de la littérature (Wattanasakulpong, 2018). Dans cette analyse, la fréquence propre est normalisée à partir des propriétés du matériau FGM. La fréquence adimensionnelle ( $\bar{w}$ ) est alors déduite de la fréquence propre  $w$  par la relation suivante :

$$\bar{w} = wL \sqrt{\frac{I_{00}}{A_{110}}} \quad (4.1)$$

Avec  $I_{00}$  est l'inertie masse des poutres isotropes homogènes sans porosité et  $A_{110}$  est la rigidité des poutres isotropes homogènes sans porosité.

Les calculs sont effectués en considérant le modèle classique, du premier ordre des déformations en cisaillement et le modèle de cisaillement d'ordre élevé HOST (Reddy).

Afin de déterminer les fréquences propres de vibration libre des poutres à gradient de porosité, un programme de calcul a été écrit sous Python, logiciel SageMath [Developers, 2021].

Les tableaux (4.1) – (4.3) présentent les trois premiers modes des fréquences de vibration des poutres à gradient de poreuse simplement appuyées, pour trois théories (CBT, FBT et HBT).



Le coefficient de porosité ( $e_0$ ) varie de 0.10 à 0.50 pour chaque type de poutre. L'exactitude du présent les résultats sont confirmés par comparaison avec les résultats existants donnés par Wattanasakulpong et al. [Wattanasakulpong, 2018], Tableau (4.3). Les résultats de Wattanasakulpong et al ont été obtenus par la méthode de collocation de Chebyshev. Les différences dans les résultats sont peut être lie aux méthodes utilisées.

Les fréquences adimensionnelles de la poutre 2 sont plus grandes que celles de la poutre 1 et 3.

Aussi, les comparaisons des modèles de poutres montrent que, dans l'analyse vibratoire, le modèle CBT génère des fréquences de vibration adimensionnelle plus élevées que ceux des modèles FBT et HOST.

**Tableau (1.1)** Fréquences adimensionnelles des poutres poreuses simplement appuyées (CBT,  $l/h=10$ )

$e_0$	Poutre-1			Poutre-2			Poutre-3		
	$w_1$	$w_2$	$w_3$	$w_1$	$w_2$	$w_3$	$w_1$	$w_2$	$w_3$
<b>0.1</b>	0.2791	1.1029	2.4335	0.2832	1.1191	2.4685	0.2798	1.1059	2.4400
<b>0.2</b>	0.2740	1.0830	2.3897	0.2829	1.1177	2.4648	0.2755	1.0888	2.4022
<b>0.3</b>	0.2686	1.0614	2.3421	0.2830	1.1176	2.4637	0.2707	1.0697	2.3598
<b>0.4</b>	0.2626	1.0378	2.2899	0.2835	1.1193	2.4664	0.2652	1.0477	2.3112
<b>0.5</b>	0.2559	1.0114	2.2317	0.2846	1.1234	2.4743	0.2587	1.0220	2.2541

**Tableau (1.2)** Fréquences adimensionnelles des poutres poreuses simplement appuyées (FBT,  $l/h=10$ ).

$e_0$	Poutre-1			Poutre-2			Poutre-3		
	$w_1$	$w_2$	$w_3$	$w_1$	$w_2$	$w_3$	$w_1$	$w_2$	$w_3$
<b>0.1</b>	0.2751	1.0462	2.1904	0.2797	1.0692	2.2532	0.2765	1.0577	2.2314
<b>0.2</b>	0.2701	1.0273	2.1510	0.2793	1.0664	2.2440	0.2722	1.0412	2.1963
<b>0.3</b>	0.2648	1.0069	2.1081	0.2793	1.0647	2.2365	0.2675	1.0229	2.1576
<b>0.4</b>	0.2589	0.9844	2.0611	0.2796	1.0643	2.2312	0.2620	1.0022	2.1141
<b>0.5</b>	0.2523	0.9594	2.0088	0.2805	1.0659	2.2295	0.2556	0.9780	2.0640

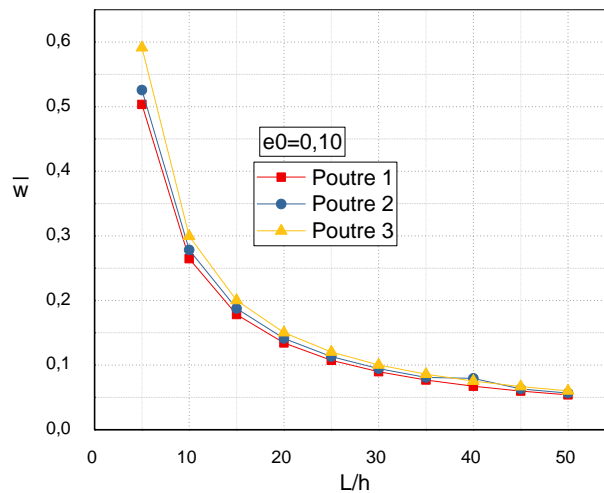
**Tableau (1.3)** Fréquences adimensionnelles des poutres poreuses simplement appuyées (HBT,  $l/h=10$ ).

$e_0$	Poutre-1			Poutre-2			Poutre-3		
	$w_1$	$w_2$	$w_3$	$w_1$	$w_2$	$w_3$	$w_1$	$w_2$	$w_3$

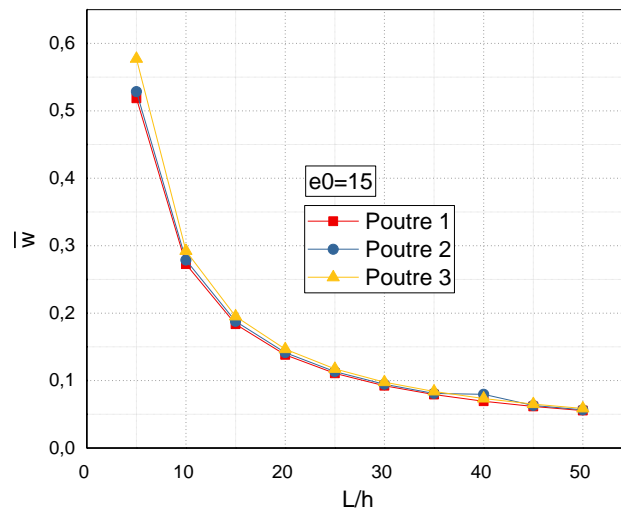
<b>0.1</b>	0.2751	1.0462	2.1911	0.2790	1.0593	2.2137	0.2758	1.0487	2.1953
	0.2751 <sup>1</sup>	1.0463 <sup>1</sup>	2.1913 <sup>1</sup>	0.2790 <sup>1</sup>	1.0593 <sup>1</sup>	2.2138 <sup>1</sup>	0.2759 <sup>1</sup>	1.0487 <sup>1</sup>	2.1957 <sup>1</sup>
<b>0.2</b>	0.2701	1.0274	2.1516	0.2785	1.0551	2.1993	0.2716	1.0322	2.1601
	0.2701 <sup>1</sup>	1.0274 <sup>1</sup>	2.1518 <sup>1</sup>	0.2785 <sup>1</sup>	1.0552 <sup>1</sup>	2.1995 <sup>1</sup>	0.2721 <sup>1</sup>	1.0321 <sup>1</sup>	2.1606 <sup>1</sup>
<b>0.3</b>	0.2648	1.0069	2.1087	0.2783	1.0515	2.1842	0.2668	1.0138	2.1212
	0.2648 <sup>1</sup>	1.0070 <sup>1</sup>	2.1090 <sup>1</sup>	0.2783 <sup>1</sup>	1.0517 <sup>1</sup>	2.1845 <sup>1</sup>	0.2681 <sup>1</sup>	1.0135 <sup>1</sup>	2.1220 <sup>1</sup>
<b>0.4</b>	0.2589	0.9845	2.0673	0.2784	1.0487	2.1708	0.2613	0.9930	2.0776
	0.2588 <sup>1</sup>	0.9845 <sup>1</sup>	2.0620 <sup>1</sup>	0.2784 <sup>1</sup>	1.0490 <sup>1</sup>	2.1718 <sup>1</sup>	0.2640 <sup>1</sup>	0.9923 <sup>1</sup>	2.0790 <sup>1</sup>
<b>0.5</b>	0.2523	0.9595	2.0093	0.2791	1.0470	2.1569	0.2549	0.9690	2.0277
	0.2523 <sup>1</sup>	0.9595 <sup>1</sup>	2.0096 <sup>1</sup>	0.2791 <sup>1</sup>	1.0475 <sup>1</sup>	2.1586 <sup>1</sup>	0.2586 <sup>1</sup>	0.9676 <sup>1</sup>	2.0301 <sup>1</sup>

1. Wattanasakulpong, 2018

Dans les figures (4.1) et (4.2), l'effet du rapport d'épaisseur sur les fréquences de vibration des poutres est étudié, l'indice de porosité dans ce cas prend deux valeur ( $e_0=0.1$  et  $e_0=0.15$ ). On voit clairement que les fréquences fondamentales adimensionnelles des poutres diminuent à mesure que le rapport d'épaisseur augmente, donc la valeur maximale est peut prendre  $e_0$ .

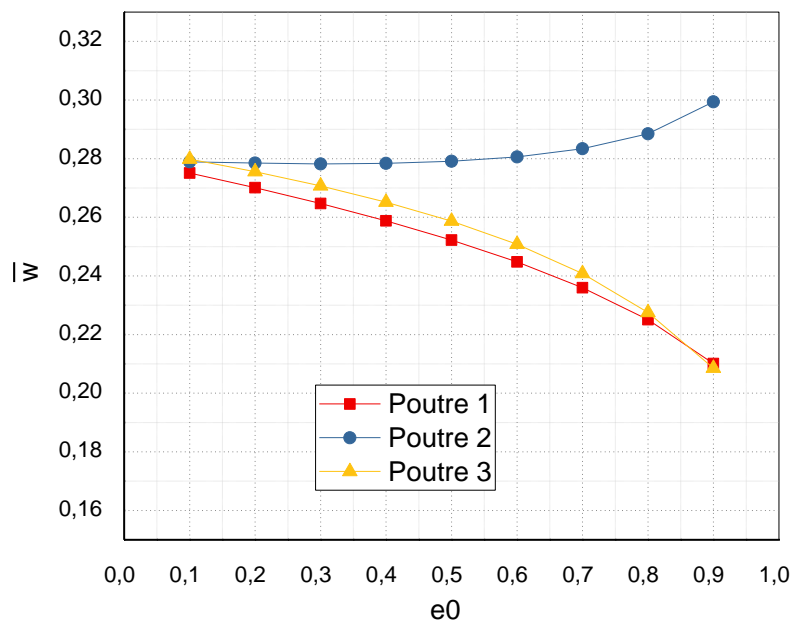


**Figure (1.11)** Variation des fréquences de vibration adimensionnelles en fonction du rapport  $L/h$

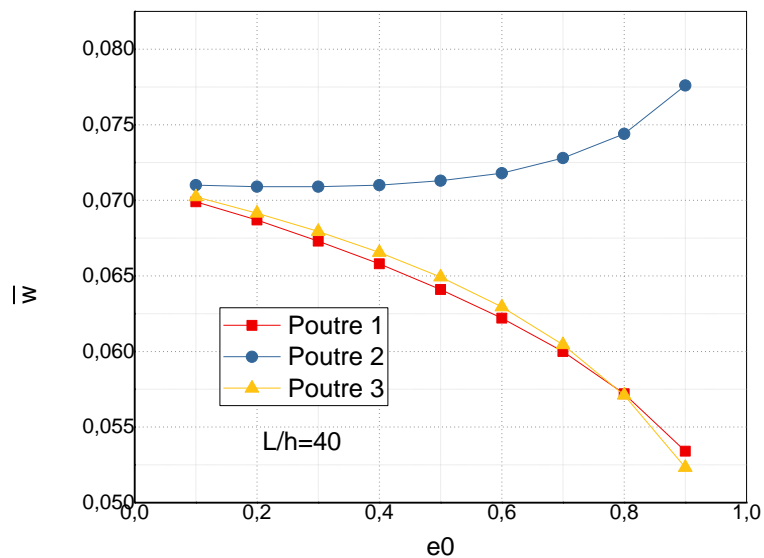


**Figure (1.12)** Variation des fréquences de vibration adimensionnelles en fonction du rapport  $L/h$

Les figures (4.3) et (4.4), représentent la variation des fréquences de vibration adimensionnelles en fonction de l'indice de porosité ( $e_0$ ), pour deux valeur du rapport  $l/h=10$  et  $l/h =40$  respectivement. Ces figures montrent une diminution significative des fréquences fondamentales de Poutre 1 et 3 lorsque le coefficient de porosité varie de 0.10 à 0.90. Cependant, nous ne pouvons voir que l'augmentation du coefficient de porosité induit un léger changement des fréquences vibration de la poutre 2.



**Figure (1.13)** Variation des fréquences de vibration adimensionnelles en fonction de l'indice de porosité



**Figure (1.14)** Variation des fréquences de vibration adimensionnelles en fonction de l'indice de porosité

Les fréquences de vibration en mode axiale  $\bar{w}_a$  et de cisaillement  $\bar{w}_s$  sont reportent dans les tableaux (4.4) et (4.5). Notons que l'augmentation de l'indice de de porosité, induit une réduction des fréquences de vibration.

**Tableau (1.4)** Variation des fréquences de vibration en mode axiale  $\bar{w}_a$

$e_0$	Poutre-1			Poutre-2			Poutre-3		
	$w_1$	$w_2$	$w_3$	$w_1$	$w_2$	$w_3$	$w_1$	$w_2$	$w_3$
<b>0.1</b>	3.0899	6.1797	9.2695	3.0908	6.1817	9.2726	3.0908	6.1816	9.2723
<b>0.2</b>	3.0342	6.0684	9.1026	3.0387	6.0774	9.1160	3.0386	6.0770	9.1149
<b>0.3</b>	2.9738	5.9475	8.9213	2.9852	5.9704	8.9555	2.9851	5.9695	8.9527
<b>0.4</b>	2.9075	5.8149	8.7224	2.9306	5.8613	8.7920	2.9304	5.8596	8.7860
<b>0.5</b>	2.8336	5.6672	8.5008	2.8758	5.7515	8.6273	2.8754	5.7483	8.6163

**Tableau (1.5)** Variation des fréquences de vibration en mode de cisaillement  $\bar{w}_s$

$e_0$	Poutre-1			Poutre-2			Poutre-3		
	$w_1$	$w_2$	$w_3$	$w_1$	$w_2$	$w_3$	$w_1$	$w_2$	$w_3$
<b>0.1</b>	18.1855	19.1341	20.5703	17.8852	18.8527	20.3141	18.1362	19.0885	20.5296
<b>0.2</b>	17.8578	18.7894	20.1997	17.2545	18.2272	19.6924	17.7731	18.7119	20.1324
<b>0.3</b>	17.5023	18.4153	19.7975	16.5800	17.5606	19.0329	17.4018	18.3258	19.7238
<b>0.4</b>	17.1121	18.0047	19.3561	15.8538	16.8459	18.3297	17.0253	17.9324	19.3055
<b>0.5</b>	16.6773	17.5473	18.8644	15.0655	16.0743	17.5759	16.6493	17.5370	18.8818

## 1.18 Conclusions

Une analyse de la vibration libre d'une poutre simplement appuyée a gradient de porosité a été présentée dans ce travail de fin d'étude. La variation de la porosité a travers l'épaisseur de cette poutre est suppose suivant trois lois de distribution, qui sont, la loi uniforme notée poutre 1, la loi non uniforme, poutre 2 et 3. Les équations de mouvement sont obtenues par le principe d'Hamilton. Les résultats sont validés par des comparaisons avec les études précédentes. Les résultats numériques montrent l'effet des lois de

distribution, l'indice de porosité et le rapport longueur - épaisseur sur les fréquences de vibration.

A travers ces résultats, on peut conclure que la fréquence fondamentale adimensionnelle les plus élevées sont obtenus par la loi distribution non uniforme, poutre 2, et les plus petites ceux générées par la loi uniforme, poutre 1.

Une variation importante des fréquences fondamentale adimensionnelle de vibration pour les lois de distribution uniforme, poutre 1 et non uniforme poutre 3 quand  $e_0$  varie de 0.10 à 0.9, elle est moindre pour loi de distribution non uniforme, poutre 2.

### **Conclusion générales.**

Le travail de ce mémoire est une contribution à l'étude des vibrations libres des structures a gradient de porosité.

Le problème est traité en analysant les premières modes propres de vibration des cas de poutre poreuse rectangulaire simplement appuyée dont la variation porosité varient suivant trois lois de distribution a savoir la lois uniforme (poutre 1), la lois non uniforme (poutre 2) et (poutre 3). Les résultats obtenus ont été présentés par des tableaux et des figures pour les cas des poutres. Nos résultats sont obtenus pour différentes valeurs de l'indice de porosité et le rapport longueur-épaisseur. Les résultats ont été comparés avec les résultats de la littérature.

A travers ces résultats, les conclusions suivantes sont formulées ; Concernant l'effet des lois de distribution, Les fréquence fondamentale adimensionnelle sont plus élevées pour la distribution non uniforme poutre 2, et les plus petites pour distribution non uniforme poutre 1. Une variation importante des fréquences de vibration fondamentale adimensionnelle pour les lois de distribution uniforme, poutre 1 et non uniforme poutre 3 quand  $e_0$  varie de 0.10 a 0.90, elle est moindre pour la distribution non uniforme poutre 2.

Le travail présenté dans le cadre de ce projet de fin d'étude peut être développé et enrichi par l'étude d'autres phénomènes (flambement). Nous envisageons, par exemple, en perspective, d'analyse le flambement et la flexion des différentes formes de structures (poutres sandwicks, plaque) épaisses et modérément épaisses avec les différentes conditions aux limite en utilisant la méthode des éléments finis.

### **Bibliographie**

- Ait Atmane 2010, H., Tounsi, A., Mechab, I. and Adda Bedia, E.A. (2010), “Free vibration analysis of functionallygraded plates resting on Winkler–Pasternak elasticfoundationsusing a new sheardeformationtheory”, *Int. J. Mech. Mater. Des.*, 6(2), 113-121
- Aldosari S.M. Bending analysis of different material distributions of functionally graded beam. *Appl. Phys. A*, 91(4) :123–296, 2017
- Bao G. and Wang L. Multiple cracking in functionally graded ceramic/metal coatings.*Int. J ; Solids Structures* , 32(119) :28532871, 1995.
- Bennai, R., Ait Atmane, H.andTounsi, A. (2015), “A new higher-order shear and normal deformation theory for functionally graded sandwich beams”,*Steel Compos. Struct.*, 19(3), 521-546.
- Bhatt, R., 1989. "Oxidation Effects on the Mechanical Properties of SiC Fiber-Reinforced ReactionBonded Silicon Nitride Matrix Composites,". NASA TM-102360, NASA Lewis Research Center, Cleveland, OH.
- Bouguenina, O., Belakhdar, K, Tounsi, A. and Adda Bedia, E.A. (2015), “Numerical analysis of FGM plates with variable thickness subjected to thermal buckling”, *Steel Compos. Struct.*, 19(3), 679-695
- Chen 2009, W.Q., Wang, H.M. and Bao, R.H. (2007), “On calculating dispersion curves of waves in a functionallygradedelastic plate”, *Compos. Struct.*, 81, 233-242.
- Coffignal, Gérard. "Mécanique non-linéaire et éléments finis." Version Electronique e.1.0, 2001. <http://www.paris.ensam.fr/lmsp>.
- Delale, F., and F. Erdogan. 1983. "The Crack Problem For A Nonhomogeneous Plane". *Journal Of Applied Mechanics* 50 (3): 609. doi:10.1115/1.3167098
- Developers, T. S., Stein, W., Joyner, D., Kohel, D., Cremona, J., & Eröcal, B. (2021). *SageMath, version 9.0*. Retrieved from <http://www.sagemath.org>.
- Dufort, L., S. Drapier, and M. Grédiac. 2001. "Closed-Form Solution For The Cross-Section Warping In Short Beams Under Three-Point Bending". *Composite Structures* 52 (2): 233-246. doi:10.1016/s0263-8223(00)00171-9



- Hildebrand F.B., Reissner E., Thomas G.G., Notes on the foundations of theory of small displacements of orthotropic shells. NACA T.N° : 1833, 1949.
- Jean-Marie Berthelot 2012. « Matériaux composites, comportement mécanique et analyse des structures ». 5<sup>ème</sup> Edition, Lavoisier, 2012
- Karama M., Afaq K.S, Mitsou S., (2003), Mechanical behavior of laminated composite beam by the new multi-layered laminated composite structures model with transverse shear stress continuity, International Journal of Solids and Structures, vol. 40, p. 1525-1546.
- Kumar, R. Roop, and S Maruno. 2002. "Functionally Graded Coatings Of HA–G–Ti Composites And Their In Vivo Studies". Materials Science And Engineering: A 334 (1-2): 156-162. doi:10.1016/s09215093(01)01792-0.
- Mahmood, R. M., Akinlabi, E. T., Shukla, M., & Pityana, S. (2012). Functionally Graded Material: An overview. Retrieved from <http://researchspace.csir.co.za/dspace/handle/10204/6548>
- Reddy J. N. A simple higher-order theory for laminated composite plates. ASME J. Appl. Mech, 51(14) :745752, 1984.
- SALLAI BEN-OUMRANE 2010 « Etude et analyse des structures en FGM : Comparaison entre E-FGM, P-FGM et S-FGM. » Thèse de Doctorat de l'université de DJILLALI LIABES de SIDI BEL ABBES, 2011.
- Sayyad A. S. and Ghugal Y. M. Analytical solutions for bending, buckling, and vibration analyses of exponential functionally graded higher order beams. Asian Journal of Civil Engineering, 19(5) :607623, 2018.
- Shanmugavel, P., Bhaskar, G.B., Chandrasekaran, M., Mani, P.S., Srinivasan, S.P.: An overview of fracture analysis in functionally graded materials. Eur. J. Sci. Res. 68(3), 412-439 (2012).
- Touratier M. An efficient standard plate theory. Int. J. Engng Sci. , 29(8) :901916, 1991.
- Construction d'un nouveau champ de déplacement pour l'analyse de la réponse mécanique des structures composite, Meftah Ali, Université Djillali Liabes de Sidi Bel Abbés, 2017.

## Références

---

- Analyse des propriétés statiques et dynamiques des structures FGM épaisses en utilisant des modèles de déformation de cisaillement d'ordre élevé , AYACHE Belqassim, université Djillali Liabes sidi bel Abbes , 2019.
- Ait Yahia, S., Ait Atmane, H., Houari, M.S.A. and Tounsi, A. (2015), “Wave propagation in functionally graded plates with porosités using various higher-order shear déformation plate théories”, Struct. Eng. Mech., 53(6),1143-1165.
- Etude du comportement dynamique et stabilité des poutres en FGM , BOUAMAMA Mohamed, Université Djillali Liabes de Sidi Bel Abbes,2019.

## Annexe

## Programme python de la poutre 2

```

var('z,om')
from sympy import *
lh=10;L=1;h=L/lh;
Pi=pi.n()
for e0 in [0.1,0.2,0.3,0.4,0.5] :
    for m in [1,2,3] :
        alpha=m*Pi/L
        E1=200;nu=1/3;rho1=7850;
        em=1-sqrt(1-e0);
        Ez=E1*(1-e0*cos(Pi*z/h))
        rhoz=rho1*(1-em*cos(Pi*z/h))
        Q11=Ez/(1-nu^2)
        Q55=Ez/(2*(1+nu))
        fz=z*(1-4/3*(z**2/h**2))
        gz=diff(fz,z)
        A11=integrate(Q11,(z,-h/2,h/2))
        B11=integrate(Q11*z,(z,-h/2,h/2))
        D11=integrate(Q11*z^2,(z,-h/2,h/2))
        C11=integrate(Q11*fz,(z,-h/2,h/2))
        E11=integrate(Q11*fz*z,(z,-h/2,h/2))
        F11=integrate(Q11*fz^2,(z,-h/2,h/2))
        H11=integrate(Q55*gz^2,(z,-h/2,h/2))
        Ia=integrate(rhoz,(z,-h/2,h/2))
        Ib=integrate(rhoz*z,(z,-h/2,h/2))
        Ic=integrate(rhoz*fz,(z,-h/2,h/2))
        Id=integrate(rhoz*z^2,(z,-h/2,h/2))
        Ie=integrate(rhoz*z*fz,(z,-h/2,h/2))
        If=integrate(rhoz*fz^2,(z,-h/2,h/2))
        S11=A11*alpha^2
        S12=-B11*alpha^3
        S13=C11*alpha^2
        S21=-B11*alpha^3
        S22=D11*alpha^4
        S23=-E11*alpha^3
        S31=C11*alpha^2
        S32=-E11*alpha^3

```

```

S33=F11*alpha^2+H11
m11=Ia
m12=-Ib*alpha
m13=Ic
m21=-Ib*alpha
m22=Id*alpha^2+Ia
m23=-Ie*alpha
m31=Ic
m32=-Ie*alpha
m33=If
Kb=Matrix([[S11,S12,S13],[S21,S22,S23],[S31,S32,S33]])
Mb=Matrix([[m11,m12,m13],[m21,m22,m23],[m31,m32,m33]])
omega1=Kb-om*Mb
sol=det(omega1)
omega=solve(sol,om)
e00=0.;em0=1.-sqrt(1.-e00);
Ez0=E1*(1.-e00*cos(pi*z/h));
rhoz0=rho1*(1-em0*cos(pi*z/h));
Q110=Ez0/(1.-nu**2);
A110=integrate(Q110,(z,-h/2,h/2));
I10=integrate(rhoz0,(z,-h/2,h/2));
for i in [0,1,2] :
    ombar=print('e0=',e0,'m=',m,'omega_bar=',sqrt(real_part(omega[i]))*sqrt(I10/A110))

```