

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE  
SCIENTIFIQUE  
UNIVERSITÉ IBN KHALDOUN DE TIARET



FACULTÉ DES SCIENCES APPLIQUÉES  
DÉPARTEMENT DE GÉNIE CIVIL

Mémoire de fin d'études en vue de l'obtention du diplôme de Master

**Spécialité : Génie Civil**

**Option : Structures**

Présenté par :  
BENSALAH Nouredine  
KHORCHEF Abdelhakim

*Sujet du mémoire*

**Vibration libre des plaques FGM en utilisant une  
simple Théorie de déformation d'ordre élevée (nth-  
HSDT)**

*Soutenu publiquement le ... /06/2022 devant le jury composé de :*

Mr. B.A. BENYAMINA

Président

Mr. I. KLOUCHE D.

Rapporteur

Mr. G. ABADA

Examineur

Mr. M. MIMOUNI

Examineur

PROMOTION : 2021/2022

## Dédicace

قال الله تعالى :

(قل إعملوا فسيرى الله عملكم ورسوله و المؤمنون )  
إلهي لا يطيب الليل إلا بشكرك و لا يطيب النهار إلا بطاعتك  
ولا تطيب اللحظات إلا بذكرك و لا تطيب الآخرة إلا بعفوك  
ولا تطيب الجنة الا برؤيتك

## الله جل جلاله

إلى من بلغ الرسالة و أدى الأمانة و نصح الأمة إلى نبي الرحمة و نور  
العالمين

## سيدنا محمد صلى الله عليه وسلم

إلى من كلله الله بالهيبة و الوقار إلى من علمنى العطاء بدون إنتظار  
إلى من أحمل أسمه بكل إفتخار أرجو من الله يرحمك و يتقبلك من  
الشهداء و ستنقى

كلماتك نجوم أهتدي بها اليوم و في الغد و إلى الأبد

## والذي العزيز رحمه الله

إلى ملاكي في الحياة إلى معنى الحب و إلى معنى الحنان و التفاني إلى  
بسمة

الحياة و سر الوجود

إلى من كان دعائها سر نجاحي و حنانها بلسم جراحي إلى أغلى الحبايب

## أمي الحبيبة

إلى منارة العلم و العلماء إلى صرح الشامخ الجامعة الجزائرية

إلى الذين حملوا أقدس رسالة في الحياة إلى الذين مهدوا لنا

طريق العلم و المعرفة

أساتذتنا الأفاضل

## Remerciements

Toute notre parfaite gratitude et remerciement infini avant tous à **ALLAH** le plus puissant qui m'a comblé des bienfaits de l'Islam et de la Science, qui nous a donné la force, le courage et la volonté pour élaborer ce travail.

Pour être mené à bien, un mémoire demande à la fois une direction scientifique permettant d'en dessiner les principales orientations ainsi qu'une bonne ambiance de travail. Monsieur, le Professeur iBrahim **KLOUCHE** par ses qualités humaines et scientifiques, son souci permanent de la pédagogie et sa disponibilité a su construire ce cadre nécessaire. Je tiens à lui témoigner toute ma gratitude pour l'aide qu'il m'a apporté.

Messieurs les membres du jury Mohamed **MIMOUNI**, Ghenam **ABADA** et Abderrahmane **BENYAMINA** ont assumé la lourde tâche d'examiner ce travail en détails et d'en être les examinateurs. Qu'ils en soient remerciés, ainsi que des suggestions et conseils qu'ils vont apporter. Je tiens également à adresser mes remerciements à Monsieur : le Chef de département le Professeur Khaled **BOUAKKAZ** pour avoir honoré et participé à l'évaluation de ce mémoire.

Que toutes les personnes qui ont croisé mon chemin ces trois dernières années soient remerciées. Qui n'ont jamais cessé de m'aider, et à ceux à qui je dois cette vocation,

Mes derniers remerciements iront à ma famille, et particulièrement à mon père et à ma mère sans qui je ne serais pas là aujourd'hui et à qui je dois beaucoup. Pour finir, j'avoue que n'aurais jamais pu en arriver jusque-là sans les sacrifices consentis par mes parents au cours de mes longues Études. Qu'ils trouvent en ces mots la profonde estime que j'ai d'eux.

## Résumé

### Résumé

L'intérêt de cette étude est donc l'analyse du comportement dynamique des plaques rectangulaires épaisses en FGM utilisant une théorie d'ordre élevé. Contrairement à toute autre théorie, le nombre de variables inconnues utilisées est seulement de quatre, à l'encontre de cinq dans le cas d'autres théories de déformation de cisaillement.

Cette théorie, basée sur une formulation variationnelle cohérente, utilise une expression polynomiale d'ordre  $n$  pour représenter le champ de déplacement. Elle ne nécessite pas de facteur de correction pour le cisaillement puisqu'elle tient compte des effets de cisaillement transversal et donne lieu à une distribution parabolique des contraintes de cisaillement transverse à travers l'épaisseur de la plaque, qui répond aux conditions aux limites de cisaillement d'une surface libre.

Dans ce travail on suppose que les propriétés matérielles comme le module de Young et la densité de masse de la plaque FGM varient sans interruption dans la direction de l'épaisseur selon une simple distribution de loi de puissance P-FGM en fonction de la fraction volumique des constituants. Les équations qui régissent le mouvement sont obtenues par le principe de Hamilton. Les solutions analytiques sont obtenues en résolvant les équations gouvernantes pour des plaques simplement appuyées.

Une étude paramétrique en fonction des rapports de forme des plaques pour différents indices de loi de puissance sera menée afin de quantifier l'influence de chaque facteur sur les fréquences de vibration. La précision des solutions issues de la présente théorie est vérifiée par la comparaison avec les résultats disponibles publiés. Elle s'avère concluante.

**Mots clés :** Matériaux à gradient de propriété, Vibration, Théorie d'ordre élevé.

## Abstract

### **Abstract**

The interest of this study is therefore the analysis of the dynamic behavior of thick rectangular plates in FGM using a high-order theory. Unlike any other theory, the number of unknown variables used is only four, compared to five in the case of other shear strain theories.

Theoretical formulation, Navier's solutions of rectangular plates based on a new higher order shear deformation model are presented for the dynamic analysis of functionally graded plates (FGM).

This theory enforces traction free boundary conditions at plate surfaces. Shear correction factors are not required because a correct representation of transverse shearing strain is given. Unlike any other theory, the number of unknown functions involved is only four, as against five in case of other shear deformation theories.

The mechanical properties of the plate are assumed to vary continuously in the thickness direction by a simple power-law distribution in terms of the volume fractions of the constituents.

A parametric study based on plate shape ratios for different power law indices will be conducted to quantify the influence of each factor on vibration frequencies. The accuracy of the solutions resulting from this theory is verified by comparison with the available published results. It proved conclusive.

**Keywords:** Functionally graded materials, Vibration, higher order theories,

## ملخص

لذلك فإن الفائدة من هذه الدراسة هي تحليل السلوك للألواح المستطيلة السميكة في تشويه الأعضاء التناسلية الأنثوية باستخدام نظرية عالية الترتيب. على عكس أي نظرية أخرى ، فإن عدد المتغيرات غير المعروفة المستخدمة هو أربعة فقط ، مقابل خمسة في حالة نظريات إجهاد القص الأخرى.

الهدف من هذه الدراسة هو تحليل السلوك الديناميكي للصفائح المتدرجة وظيفيا استنادا إلى الموضوع الدقيق للمحور المحايد باستعمال نظرية مبسطة و دقيقة ذات تشوه القص و بدرجة عليا (بأربعة متغيرات).

في هذه الدراسة خصائص المواد " معامل يونغ و كثافة الكتلة " تتغير حسب قانون أسي في الاتجاه العرضي للصفحة

معادلات الحركة للصفحة المتدرجة وظيفيا نتحصل عليها باستعمال مبدأ هاميلتون. الحل التحليلي نتحصل عليه باستعمال طريقة نافي.

لإثبات دقة وكفاءة النظرية ، تتم مقارنة النتائج المتحصل عليها مع نتائج نظريات أخرى.

الكلمات المفتاحية: المواد المتدرجة وظيفيا، الاهتزاز، نظرية ذات درجة عليا

## Sommaire

### **Sommaire**

Résumé .....	i
Abstract.....	ii
ملخص .....	iii
Liste des figures.....	iv
Liste des tableaux .....	iv
Liste des notations .....	vii
Introduction générale.....	1
<b>CHAPITRE I GENERALITES SUR LES MATERIAUX A GRADIENT DE PROPRIETES</b>	
I.1. Introduction .....	5
I.2. La Définition et le concept d'un matériau à gradient de propriétés.....	8
I.3. L'intérêt d'utilisation des FGM .....	10
I.4. Méthodes d'élaboration des FGM:.....	11
I.4.1 Coulage en Bande (Tape Casting ou Doctor-Blade).....	12
I.4.2 Coulage Séquentiel en Barbotine (Slip Casting).....	13
I.4.3 Compaction Sèche des Poudres .....	<a href="#">14</a>
I.4.4 Dépôt par Electrophorèse .....	14
I.4.5 Projection Plasma.....	14
I.4.6 C. V. D. et P. V. D. ....	15
I.4.7 Frittage et Infiltration .....	15
I.4.8 Frittage Laser Différentiel.....	15
I.4.9 Implantation Ionique (Sputtering).....	16
I.4.10 Dépôt par Centrifugation .....	16
I.5. Propriétés physiques et mécaniques des FGM .....	17
I.5.1 Propriétés physiques de l'aluminium .....	17
I.5.2 Propriétés physiques de la céramique .....	19
I.6. Différence entre FGM et les matériaux composites traditionnels.....	19
I.7. Propriétés matérielles effectives d'un matériau FGM... ..	20
I.8. Domaines d'application des matériaux à gradients évalués FGM.....	21
I.9. Les différentes lois qui régissent la variation des propriétés matérielles suivant l'épaisseur d'une plaque FGM... ..	24
I.9.1 Propriétés matérielles de la plaque P-FGM .....	24
I.9.2 Propriétés matérielles de la plaque S-FGM .....	25
I.9.3 Propriétés matérielles de la plaque E-FGM .....	26
I.10. Conclusion .....	27
<b>CHAPITRE II LES THEORIES DES PLAQUES FGM</b>	
II.1. Introduction .....	29
II.2. Les Différents Modèles des structures composites dans l'élasticité bidimensionnelles ..	29

## Sommaire

II.2.1.Approche monocouche équivalente.....	29
II.2.1.1.Les modèles classiques Love-Kirchhoff (théorie classique des plaque stratifiées CLPT).....	30
II.2.1.2.Les modèles Reissner-Mindlin (théorie de déformation en cisaillement du premier ordre FSDT).....	31
II.2.1.3.Les modèles d'ordre élevé.....	32
II.2.2. Approche par couche .....	38
II.3. Conclusion .....	39
<b>CHAPITRE III ANALYSE DYNAMIQUE DES PLAQUES FGM</b>	
III.1. Introduction .....	42
III.2.Formulation théorique .....	43
III.2.1.Surface physique neutre.....	43
III.2.2.Hypothèses de base.....	45
III.2.3.Equations cinématiques et constitutives .....	47
III.2.4.Equations gouvernantes.....	49
III.3.solution analytique.....	54
III.3.1.solution exacte pour une plaqueFGMsimplement appuyée.....	54
III.4. Conclusion .....	57
<b>CHAPITRE IV VALIDATION ET COMPARAISON DES RESULTATS</b>	
IV.1. Introduction .....	59
IV.2.Résultats numériques et discussion .....	59
IV.2.1.Analyse dynamique .....	60
IV.3. Conclusion.....	67
CONCLUSION GENERALE ET PERSPECTIVES .....	69
REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES .....	71



## Liste des figures

### Liste des figures

Figure. I.1 : un type d'un matériau FGM en céramique et métal.....	9
Figure. I.2 : variation de la composition d'un FGM ,(a) Conductivité thermique,(b) résistance mécanique.....	10
Figure. I.3 : Principe de la méthode coulage en bande.....	12
Figure. I.4 : Disposition du procédé frittage laser différentiel. ....	16
Figure. I.5: Schéma du procédé dépôt par centrifugation.....	17
Figure. I.6 : La distribution composante des matériaux. ....	20
Figure. I.7: Modèles analytiques pour une couche en FGM. ....	21
Figure. I.8: Les principaux domaines d'application des FGM [Houari 2011]..	23
Figure.I.9 : La variation du module de Young dans une plaque P-FGM.....	25
Figure. I.10: Variation de la fraction volumique dans une plaque S-FGM.....	26
Figure.I.11: Variation du module de Young dans une plaque E-FGM.....	27
Figure. II.1: Cinématique de Love-Kirchhoff. ....	30
Figure. II.2: Cinématique de Reissner-Mindlin.....	31
Figure.II.3:Variation de la fonction de gauchissement $f(x_3) = x_3$ et $f'(x_3)$ suivant l'épaisseur.....	32
Figure. II.4: Cinématique de la théorie d'ordre supérieur. ....	34
Figure. II.5:Variation de la fonction de forme $f(z)$ des différents modèles en fonction de l'épaisseur.....	37
Figure. II.6:Variation de la dérivée de la fonction de forme $f'(z)$ des différents modèles suivant l'épaisseur .....	37
Figure.II.7:Champ de déplacements des modèles couches discrètes, approche. Cinématique(Nguyen.2004).....	39
Figure.II.8:Champ de déplacements des modèles zig-zag, approche cinématique (Nguyen.2004).....	39

## Liste des figures

Figure. III.1 : Position de la surface médiane et la surface neutre pour une plaque FGM.....	44
Figure. III.2 : Géométrie d'une plaque en FGM.....	46
Figure. IV.1 : Position de la surface du milieu et de la surface neutre pour une plaque FGM .....	60
Figure. IV.2 : Fréquence adimensionnelle $\bar{\omega}$ en fonction du rapport $a/h$ pour différentes indices de loi de puissance des plaques carrées en FGM ( $n = 3$ ).....	65
Figure. IV.3 : Effet du rapport $a/h$ sur la fréquence adimensionnelle $\bar{\omega}$ pour différentes indices de loi de puissance des plaques carrées en FGM ( $n = 3$ ).....	66
Figure. IV.4 : Fréquence adimensionnelle $\bar{\omega}$ en fonction du rapport $b/a$ pour différentes indices de loi de puissance des plaques carrées en FGM ( $a = 10h$ , $n = 3$ ).....	67

**Liste des tableaux**

Tableau IV.1 : propriétés des matériaux utilisés dans la plaque FGM.....59

Tableau IV.2 : comparaison du paramètre de fréquence fondamentale  $\bar{\beta}$  d'Al/ZrO<sub>2</sub> pour la plaque carrée en FGM pour différentes valeurs de k et du rapport  $a/h$  .....61

Tableau IV.3 : comparaison du paramètre de fréquence naturelle  $\bar{\beta}$  d'Al/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> pour la plaque carrée en FGM pour différentes valeurs de k et du rapport  $a/h$  .....63

Tableau IV.4 : Effet de l'indice de la fraction volumique sur les fréquences fondamentales  $\bar{\omega}$  d'Al/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> de la plaque rectangulaire FGM ( $b = 2a$ ) avec  $a/h = 5$  et  $a/h = 10$  .....64

## Liste des notations

### Liste des notations

$[ ]$	Matrice.
$\{ \}$	Vecteur colonne.
$E$	Module de Young
$E_c$	Module de Young de la céramique
$E_m$	Module de Young de métal
$E_1$	Module de Young de la face supérieure
$E_2$	Module de Young de la face inférieure
$E(z)$	Module de Young en fonction de « z »
$\nu$	Coefficient de Poisson
$\nu(z)$	Coefficient de Poisson en fonction de « z »
$V(z)$	Fraction volumique
$p$	Paramètre de matériau
$b$	la largeur de la plaque
$h$	L'épaisseur total de la plaque
$L$	La longueur de la plaque
$u, v, w$	Les déplacements suivant les directions x, y et z
$u_0, v_0, w_0$	Les composantes du champ de déplacement sur le plan moyen de la plaque
$\phi_x, \phi_y, \phi_z$	Les rotations autour des axes x, y et z
$f(z)$	Fonction de gauchissement (fonction de cisaillement transverse)
$f'(z)$	La première dérivée de la fonction de gauchissement par rapport à z
$g(z)$	$1 - f'(z)$
$\rho$	la densité massique
$\sigma_x, \sigma_y$	Contraintes normales
$\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$	Contraintes de cisaillement
$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$	Déformations dans les directions x, y et z
$\gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$	Déformations de distorsion
$\delta$	Opérateur de variation

## Liste des notations

$\delta u, \delta v, \delta w_b, \delta w_s$	Champ virtuel de déplacement
$\delta U$	Variation de l'énergie de déformation interne de la plaque.
$\delta V$	Variation de l'énergie de déformation externe de la plaque.
$\delta T$	Variation de l'énergie de déformation cinétique de la plaque.
$d$	la distance séparant l'axe neutre de chacune des peaux
$w_b$	Composante de la flèche due à la flexion
$w_s$	Composante de la flèche due au cisaillement
$N$	Efforts normaux de membrane
$M^b$	Moments de flexion pure
$M^s$	Moments de flexion supplémentaire dus au cisaillement transverse
$S$	Effort de cisaillement pur
$m, n$	Nombres de mode
$A_{ij}$	Termes de rigidité en membrane de la plaque
$B_{ij}$	Termes de rigidité de couplage de la plaque
$D_{ij}$	Termes de rigidité de flexion de la plaque
$A_{ij}^s$	Termes de rigidité de la plaque en cisaillement
$B_{ij}^s$	Termes de rigidité de la plaque en cisaillement
$D_{ij}^s$	Termes de rigidité de la plaque en cisaillement
$H_{ij}^s$	Termes de rigidité de la plaque en cisaillement
$I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, I_6$	constantes d'inertie
$Q_{ij}$	Les coefficients de rigidité
$\partial$	Dérivée partielle
$a_{ij}$	Valeurs propres
$i, j$	Nombres naturels
$[K]$	Matrice de rigidité
$[M]$	Matrice de masse
$\{A\}$	Le vecteur de colonne (déplacements)
$\bar{w}$	Les fréquences adimensionnelles

## Liste des notations

$\omega$	Fréquence naturelle de la plaque FGM
$\phi_\alpha$	Rotation de la normale au plan moyen autour des axes $x$ $\alpha$
$\gamma_\alpha^0$	Déformation de cisaillement mesurée sur le plan
$\phi_i$	Rotations des sections déformées autour des axes 1 $x$ et 2 $x$ (termes du premier ordre)
$k_x^b$	Courbure suivant X due à la flexion.
$k_x^s$	Courbure suivant X due au cisaillement.
$U_{mn}, V_{mn}, W_{bmn}$ , et $W_{smn}$	Paramètres arbitraires.
$q$	Charge transversale.

# INTRODUCTION

## GENERALE

## Introduction générale

Les matériaux composites légers ont été, pendant de nombreuses années, utilisés avec succès dans la construction aéronautique et dans d'autres applications d'ingénierie, en raison de leurs excellents rapports résistance/poids et rigidité/poids (rapports très grands). Cependant, les matériaux composites traditionnels sont inutilisables sous un environnement à hautes températures. Les métaux ont été généralement utilisés dans le domaine de la technologie pendant plusieurs années grâce à leur excellente résistance mécanique et dureté. Mais dans des conditions de hautes températures, la résistance mécanique du métal devient faible comme pour les matériaux composites traditionnels. Les matériaux en céramique ont d'excellentes caractéristiques en résistance thermique. Cependant, les applications de la céramique sont habituellement limitées du fait de leur faible dureté.

Le développement des matériaux composites a permis d'associer des propriétés spécifiques à différents matériaux au sein d'une même pièce. L'optimisation locale de ces propriétés par association d'un matériau de haute dureté à la surface d'un même matériau tenace pose le problème de l'interface, La transition brusque dans les propriétés des matériaux à travers l'interface entre les matériaux discrets peut entraîner une grande contrainte inter-laminaire ou une forte concentration de contraintes conduisant à la déformation plastique ou de fissuration. Une technique pour surmonter ces effets nuisibles et d'utiliser un matériau à gradient évalué (de l'anglicisme FUNCTIONALLY GRADED MATERIALS (FGM)).

Apparu en 1984 au Japon pour des applications aéronautiques et spatiales à très haute température, ce type de revêtement est plus connu sous le nom de FGM ou MGF (matériaux gradués fonctionnellement). Ce concept est en plein développement et la majorité des publications le concernant est apparue ces dix dernières années.

Les matériaux Fonctionnellement gradués (FGM) sont une classe de composites qui ont une variation continue des propriétés des matériaux d'une surface à l'autre. Ces matériaux peuvent être fabriqués en faisant varier la teneur en pourcentage de deux ou plusieurs matériaux constitutifs de telle manière à créer un gradient de propriété à travers l'épaisseur. Ce gradient de propriété réduit les contraintes thermiques, les contraintes



résiduelles et les facteurs de concentration de contraintes rencontrées dans les composites stratifiés.

Les matériaux à gradients fonctionnels (MGF) ont une texture microscopique non-homogène, dans lesquels les propriétés mécaniques varient d'une surface à l'autre de façon régulière et continue. Ils sont généralement fabriqués à partir d'un mélange de céramique et de métaux, façonnable à volonté au gré du concepteur et en fonction de la performance convoitée.

Du fait de l'utilisation accrue des matériaux composites à gradients fonctionnels (MGF) dans la conception des ouvrages de génie civil, de nombreuses études ont été entreprises sur le comportement statique et dynamique des plaques à gradients fonctionnels (PGF).

Plusieurs chercheurs ont étudiés le comportement des plaques en matériau FGM, qui ont définis la fraction volumique en utilisant plusieurs lois de mélange ; tel que la loi de puissance P-FGM, la loi exponentielle E-FGM ou encore la loi sigmoïde S-FGM pour assurer une répartition harmonieuse des contraintes entre tous les interfaces.

Les Plaques et coques forment une partie essentielle de nombreuses structures aérospatiales, marines et automobiles.

De nombreuses études ont été réalisées sur le comportement statique et dynamique des plaques à gradient fonctionnel (FGM). **Reddy (2000)** a présenté une formulation théorique et des modèles par éléments finis à base de la théorie du troisième ordre de déformation de cisaillement pour l'analyse statique et vibratoire des plaques de FG. **Zenkour (2006)** a étudié la réponse à la flexion de la plaque de FG simplement appuyée en utilisant une théorie de déformation de cisaillement de plaque généralisée. **Abrate (2006)** a analysé les problèmes de vibrations libres, de flambement, et de déformations statiques des plaques FGM à l'aide de la théorie de déformation de cisaillement du second ordre. Cette même théorie est appliquée avec succès pour présenter le domaine des déplacements dans la plaque solaire simplement appuyée soumise à un type de sollicitations mécaniques différent: tels que des charges réparties, sinusoïdales et uniformes (**Shahrjerdi et al. 2010**). **Bodaghi et Saidi (2010)** ont présenté une approche analytique pour déterminer les charges critiques de flambement de plaques de FG rectangulaires épaisses. **Talha et Singh (2010)** ont étudié les vibrations libres et l'analyse statique des plaques FGM à l'aide de la

méthode des éléments finis sur une théorie de déformation de cisaillement à ordre élevé avec cinq inconnues.

Récemment, **Tounsi (2010); Hadji et al, (2011); Houari et al, (2011); Bourada et al, (2012); Bouiadjra Bachir et al, (2012); Fekrar et al, (2012); Fahsi et al. (2012); Boudarba et al, (2013)** ont développé de nouvelles théories d'ordre supérieur impliquant seulement quatre fonctions inconnues. Dans cette étude, la théorie raffinée (RPT : Refined plates theory) d'ordre  $n$  à quatre variables est utilisée pour analyser les caractéristiques dynamiques des plaques fonctionnellement graduées.

Pour atteindre cet objectif le présent travail s'articule autour en quatre chapitres relatifs à chaque aspect du travail effectué :

- La première partie se veut générale et introductive, elle a pour but principal de situer les étapes des travaux dans leur environnement. Elle n'est en rien un recensement exhaustif de la bibliographie. En effet, nous pourrions retrouver tout au long du mémoire des paragraphes resituant de manière spécifique, dans leur contexte scientifique et chronologique, les développements réalisés.
- Le premier chapitre traite une recherche bibliographique sur les matériaux à gradients évalués FGM et leurs domaines d'application.
- Au second chapitre, on présente les différentes théories des plaques.
- Le troisième chapitre, est consacré à la formulation théorique pour l'analyse dynamique des plaques en matériaux à gradient de propriété type FGM.
- Quand au quatrième chapitre une validation et comparaison des résultats sont discutées.

Enfin le présent travail se termine par une conclusion générale où on souligne l'efficacité de cette nouvelle théorie de cisaillement dans la résolution du comportement dynamique des plaques FGM simplement appuyées ainsi par des perspectives envisagées pour des travaux futures.

# CHAPITRE I

---

GENERALITES SUR LES MATERIAUX A GRADIENT DE PROPRIETES

## I.1.Introduction

Cette étude bibliographique fait l'état de l'art des différents éléments nécessaires à ce travail. Ainsi, il faut d'abord définir le concept de matériau. Ce dernier n'est pas de la matière première brute, mais une matière élaborée en vue d'un usage. Cela nécessite une symbiose entre la préparation de nouveaux composites et la conception de nouveaux objets. Il est évident que la diversité des matériaux modernes est telle qu'on ne peut en faire une présentation exhaustive en quelques lignes. Il est plus en plus difficile de faire un choix entre les matériaux dits "traditionnels" comme le bois, le béton, l'acier et les matériaux "évolutifs" comme les céramiques, le métal, les plastiques. La tendance actuelle n'est d'ailleurs pas de les opposer comme des ennemis mais de les marier pour engendrer des matériaux plus performants tel que le matériau à gradient de propriétés "FGM". Ainsi la notion de matériau, matière première massive est dépassée par la notion de matériau objet technique très élaboré ayant une fonction précise à remplir.

### **-Aperçu Historique Sur Les matériaux à gradient de propriétés:**

Récemment, cette nouvelle classe de matériaux composites très élaborés connue sous le nom de matériau fonctionnellement gradués (FGM), ou matériaux à gradient de propriétés, a attiré une attention particulière. Ils ont été utilisés dans de nombreuses applications d'ingénierie en raison de leur résistance à des températures élevées tout en conservant l'intégrité structurale (**Koizumi, 1997**).

Les FGM ont permis une large application dans divers domaines, ils peuvent jouer le rôle de barrières thermiques dans les structures, de matériaux résistants à l'usure et à la corrosion dans le cas de revêtements.

Les concepts des FGM ont été proposés par les japonais (**Yamanouchi et al, 1990 ; Koizumi, 1993**) et ont été préconisés comme matériaux de barrière thermique dans les navettes spatiales, les structures dans l'espace et les réacteurs nucléaires.

L'amélioration des performances des pièces structurales peut conduire à rechercher, au sein d'un même matériau, des propriétés différentes, souvent antagonistes, mais localement optimisées. Le développement des matériaux composites a permis d'associer des propriétés spécifiques à différents matériaux au sein d'une même pièce.

L'optimisation locale de ces propriétés, par association d'un matériau de haute dureté à la surface d'un matériau tenace par exemple, pose alors le problème de l'interface par exemple, une couche d'un matériau céramique peut coller à la surface d'une structure métallique pour former un revêtement barrière thermique dans les applications à haute température. La transition brusque dans les propriétés des matériaux à travers l'interface entre les matériaux discrets peut entraîner une grande contrainte inter laminaire ou une forte concentration de contraintes qui conduit à la déformation plastique ou de fissuration.

Une façon pour surmonter ces effets nuisibles : on doit employer un matériau à gradient de propriété (en anglais : FUNCTIONALLY GRADED MATERIALS « FGM »).

Ces dernières années, les matériaux à gradients de propriétés ont été développés pour leurs excellentes propriétés mécaniques. Ces matériaux ont de grandes performances et capables de résister aux ultras hautes températures.

Les FGM sont au microscope des matériaux Composites non homogènes. Un groupe de scientifiques, à Sendai (japon) a proposé pour la première fois le concept de FGM en 1984, comme étant un nouveau matériau avec une barrière thermique ou des propriétés calorifuges (isolation thermique).

Au début, les FGM ont été conçus en tant que matériaux thermiques de barrière dans les applications aéronautiques et les réacteurs, c'est par la suite que les FGM ont été développés dans le domaine militaire, l'automobile, la biomédicale, l'industrie de semi-conducteur et toutes utilisations dans un environnement à hautes températures.

Historiquement et dans ce contexte, on note quelques dates importantes :

**Reddy (2000)** a développé une formulation théorique et des modèles en éléments finis, en tenant compte de la théorie des déformations de cisaillement du troisième ordre, pour l'analyse statique et dynamique des PGF.

Quelques années après, **Batra et Jin (2005)** ont considéré les déformations de cisaillement du premier ordre et la méthode des éléments finis pour étudier les vibrations libres des plaques rectangulaires anisotropes à gradients fonctionnels (GF).

**Zenkour (2006)** a ensuite étudié le comportement à la flexion des PGF simplement appuyées, en utilisant la théorie des plaques avec des déformations de cisaillement généralisées.

**Abrate (2006)** a étudié les problèmes de vibrations libres, le flambage et le déplacement transversal statique des PGF.

**Chi et Chung (2006a et 2006b)** ont étudié le comportement des PGF sous charges transversales où trois évaluations de propriétés MGF (loi de puissance, fonction sigmoïde et fonction exponentielle) ont été considérées.

Dans le même sillage, **Matsunaga (2008)** a calculé les fréquences propres et les contraintes dues au flambage des plaques en MGF en utilisant les déformations de cisaillement 2D d'ordre élevé.

**Chen et ses co-auteurs (2008, 2009)** ont étudié les vibrations et la stabilité des PGF en considérant des théories différentes pour l'analyse des plaques.

**Lü et ses co-auteurs (2009a)** ont présenté des solutions semi-analytiques d'élasticité 3D des PGF à orthotropie multidirectionnelle selon une méthode des quadratures différentielles, basée sur un formalisme de l'espace d'état. Ces mêmes auteurs **(2009b)** ont étudié les vibrations libres des PGF épaisses reposant sur des fondations de type Pasternak en utilisant des solutions analytiques 3D exactes.

Les déformations de cisaillement du second ordre ont également été appliquées avec succès par **Shahrjerdi et ses co-auteurs (2010)** pour représenter le champ des déplacements des PGF solaires simplement appuyées et soumises à des charges sinusoïdales ou uniformément réparties.

**Bodaghi et Saidi (2010)** ont à leur tour présenté une approche analytique basée sur un HOST pour déterminer les charges critiques de flambement des PGF rectangulaires épaisses.

**Talha et Singh (2010)** ont étudié les vibrations libres et le comportement statique des PGF par la méthode des éléments finis et en tenant compte de la théorie des déformations de cisaillement d'ordre élevé.

**Xiang et ses co-auteurs (2011)** ont utilisé les déformations de cisaillement d'ordre  $n$  pour l'étude des vibrations libres des PGF et des plaques composites en sandwich.

Par la théorie de déformation de cisaillement sinusoïdale, **Sobhy (2013)** a étudié le comportement des plaques à gradient exponentiel (PGE) en sandwich en vibrations libres

et au flambement, reposant sur des fondations élastiques et pour diverses conditions aux limites.

**Yaghoobi et Torabi (2013)** ont étudié les déformations thermiques des PGF reposant sur des fondations de type Pasternak à deux paramètres en utilisant la théorie des déformations de cisaillement de premier ordre.

Dans une autre tentative, **Yaghoobi et Torabi (2013)** ont également, en se basant sur la théorie des déformations de cisaillement de premier ordre, entrepris une étude analytique du comportement au flambement de plaques sandwiches avec des feuilles de surface à GF, reposant sur une fondation élastique des plaques et soumises à des charges mécaniques, thermiques et thermomécaniques.

Toutefois, diverses théories de déformation de cisaillement d'ordre élevé (cinq ou plus de fonctions inconnues) ont été développées.

Récemment, **Tounsi et ses co-auteurs (2011a, 2011b, 2012a, 2012b, 2012c, 2012c et 2013)** ont développé de nouvelles théories d'ordre élevé impliquant seulement quatre variables.

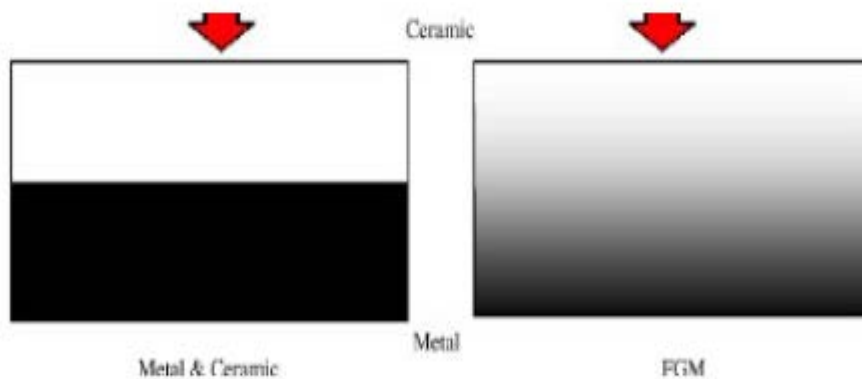
## **I.2. La Définition et le concept d'un matériau à gradient de propriétés**

Un matériau à gradient de propriétés c'est un type de matériaux composites composé de deux ou plusieurs matériaux relatifs à des fractions volumiques et microstructures qui sont conçus pour avoir une continuité spatiale des variables. Un FGM est produit en changeant sans interruption la fraction de volume dans la direction d'épaisseur pour obtenir un profil bien déterminé. La plupart des chercheurs emploient trois fonctions pour décrire la variation de la fraction volumique qui sont :

- La fonction de puissance (P-FGM),
- La fonction sigmoïde (S-FGM),
- La fonction exponentielle (E-FGM),

Ces matériaux FGM sont généralement faits à partir d'un mélange de métaux et de céramique (figure. I.1) par un processus de métallurgie de poudre, le côté métal riche est typiquement placé dans les régions où les propriétés mécaniques, comme la dureté, le besoin d'être élevées. En revanche, la céramique riche, ce qui a la conductivité faible et

peut résister aux températures plus élevées, est placée dans les régions de grands gradient de la température.

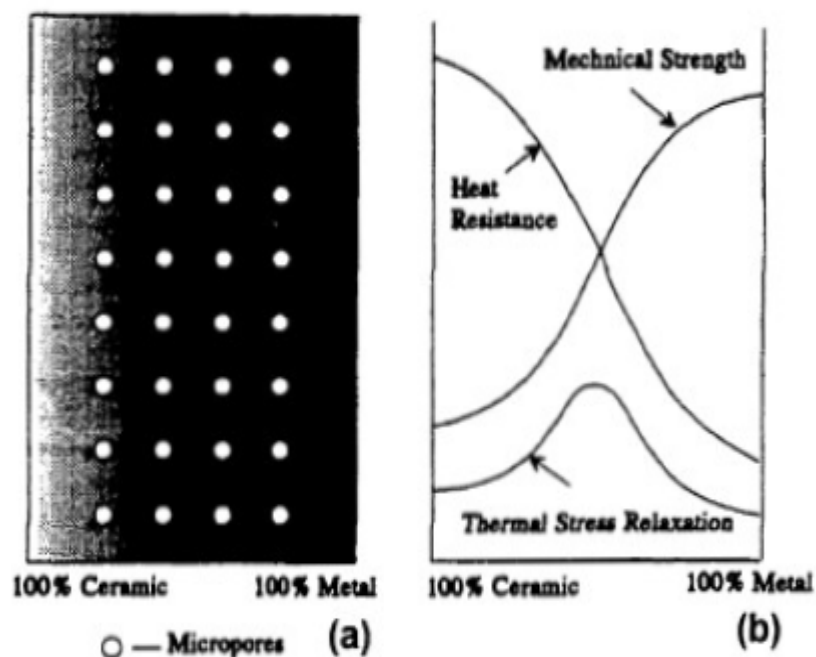


**Figure. I.1** : un type d'un matériau FGM en céramique et métal.

Le concept de "matériaux à gradient de propriétés " a été développé dans le laboratoire national d'aérospatial du Japon en 1984 par **M.Niino** et ses collègues à Sendai. L'idée est de réaliser des matériaux utilisés comme barrière thermique dans les structures spatiales et les réacteurs à fusion (**Koizumi 1992**). Les FGM peuvent être utilisés pour différentes applications, telles que les enduits des barrières thermiques pour les moteurs en céramique, turbines à gaz, couches minces optiques, ...

Les matériaux à gradient de propriétés sont donc des matériaux composites avec un caractère au microscope non homogène. Constitués de plusieurs couches contenant des composants différents tels que les céramiques et les métaux. Le changement continu dans la composition et donc dans la microstructure du matériau distingue les FGM (figure(I.2)) des matériaux composites conventionnels. Dans certains cas, on peut avoir un FGM constitué d'un même matériau mais microstructure différente.





**Figure. I.2 :** Variation de la composition d'un FGM

(a) Conductivité thermique,

(b) résistance mécanique,

En 1987, le gouvernement japonais a lancé un vaste projet intitulé "la recherche sur la technologie de base pour développement de matériaux à gradient de propriétés et l'étude de la relation des contraintes thermiques" l'intérêt du projet est de développer des matériaux présentant des structures utilisées comme barrière thermique dans les programmes aérospatiaux. Les matériaux constituant les parois des engins spatiaux sont appelés à travailler à des températures de surface de  $1800^{\circ}\text{C}$  ainsi qu'un gradient de température de l'ordre de  $1300^{\circ}\text{C}$ . A cette année-là, aucun matériau industriel n'était connu pour supporter de telles sollicitations thermomécaniques (Koizumi.1992).

### I.3. L'intérêt d'utilisation des FGM

Il y a beaucoup d'intérêt pour la mise sur pied des structures ainsi les conditions fonctionnelles peuvent varier avec l'endroit. Dans la plupart des cas, ceci impliquera de varier les matériaux qui sont employés aux endroits spécifiques dans la structure ayant

pour résultat les interfaces discrètes dans tout. A nombre de proposé des technologies manufacturières pour le traitement de FGM.

#### **I.4. Méthodes d'élaboration des FGM**

L'obtention des qualités désirées nécessite de plus l'intervention de techniques sophistiquées et subtiles comme l'utilisation de lasers, de plasmas, l'implantation ionique, de dépôts en phase vapeurs, etc.

Les procédés de fabrication d'un matériau à gradient évalués peuvent habituellement être divisés en construisant la structure dans un espace hétérogène (mélange graduel) et la transformation de cette structure en matériau en bloc (solidification).

Les processus de mélange graduel peuvent être classés suivant ses constituants, l'homogénéisation et la ségrégation. Les procédés élémentaires sont basés sur la fabrication par étape de structure en matériaux graduels précurseurs ou poudres. Les avancés en technologie d'automatisation durant les dernières décennies ont rendu des processus élémentaires de progression technologiquement et économiquement durables. Dans la procédure d'homogénéisation qui traite une interface pointue entre deux matériaux est convertie dans un gradient par transport matériel. Les procédés d'homogénéisation et de ségrégation produisent un gradient continu, mais ont des limitations au sujet des types de gradients qui peuvent être produits.

Habituellement, le séchage et la solidification suivent les étapes du mélange graduel. Le besoin de ces processus de consolidation doit adapter aux FGM :

- Des conditions de procédure choisie pour ne pas altérer ou détruire le gradient en mode non contrôlé.
- Prêter attention a tout rétrécissement inégal du FGM pendant la consolidation.

Ces dernières années, les travaux menés au laboratoire ont permis de développer une méthode originale pour élaborer des composites à gradient continu de composition. Cette méthode est basée sur une technique de Co-sédimentation de poudres en milieu proportionnelle à la densité du matériau et au carré du diamètre de particule. En contrôlant

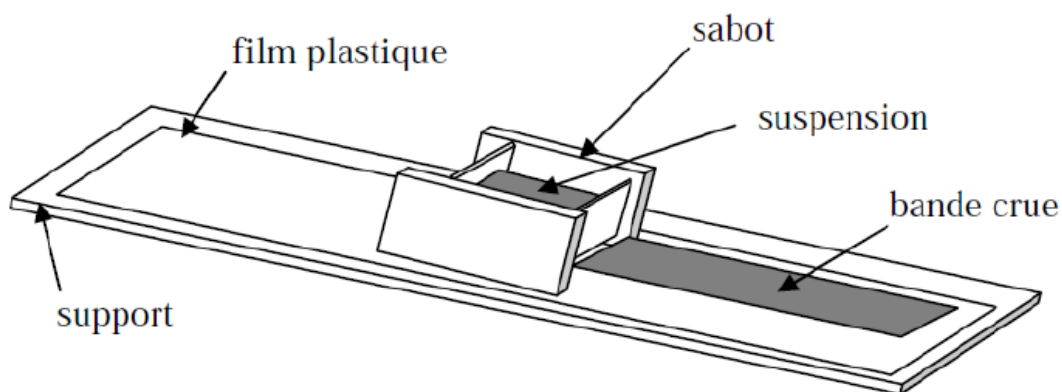
et en adaptant les répartitions granulométriques de chaque poudre, il est possible d'obtenir différents gradient de concentration dans le dépôt formé à l'issue de sédimentation.

Il existe de nombreuses méthodes d'élaboration des matériaux à gradient de propriétés, les techniques les plus employées sont brièvement expliquées ci-dessous :

#### I.4.1 Coulage en Bande (Tape Casting ou Doctor-Blade)

Le coulage en bande consiste à couler une barbotine de poudres fines en suspension aqueuse ou non-aqueuse (la plupart des travaux commerciaux utilisent le procédé non-aqueux) sur un support plan en couches minces et régulières. Selon les cas, c'est soit la lame (doctor-Blade) qui est animée d'un mouvement de translation, soit le support qui se déplace sous la lame (figure. I.3). Les produits obtenus sont des feuillets avec des épaisseurs contrôlées (25-1000 $\mu$ m). Après un raffermissement de la pâte, les feuillets sont démoulés et ensuite découpés.

Le solvant doit avoir un point d'ébullition très bas et une viscosité faible. Il doit être soluble avec le liant le plastifiant et les autres ajouts, mais ne doit être ni soluble ni réactif avec la poudre céramique. Le liant donne une grande résistance mécanique au produit cru en permettant son maniement. Généralement un plastifiant est ajouté au liant pour baisser sa viscosité. Les liants (Plastifiants et défloculant) doivent être totalement dégagés pendant le délainage.



**Figure. I.3 :** Principe de la méthode coulage en bande.

L'un des plus anciens travaux sur l'étude de cette technique a été publié par **Howatt**. **En 1947**, et depuis d'autres travaux ont été réalisés (**Reddy.1984**). Ce procédé est devenu une technique économique pour la production des substrats céramiques de type  $Al_2O_3$  et surtout pour les condensateurs à base de  $BaTiO_3$ . On peut d'ailleurs remarquer qu'il s'agit déjà de F.G.M puisqu'il faut empiler des couches conductrices (métaux rares) avec des couches diélectriques ( $BaTiO_3$  principalement).

Le procédé de coulage en bande est largement utilisé pour réaliser des matériaux composites laminaires suivant deux méthodes :

- Réalisation directe de bandes multicouches grâce à un système de lames multiples c'est le cas des tri-couches élaborées par (**MISTLER.1973**).
- Empilement des couches élaborées séparément dont la cohésion est ensuite assuré par une étape de thermo-compression (**Reddy.1984**).

#### **I.4.2 Coulage Séquentiel en Barbotine (Slip Casting)**

Le coulage en Barbotine (Slip Casting) consiste à couler une suspension dans un moule poreux qui va drainer le liquide grâce aux forces capillaires, laissant un tesson (couche de poudre compacte) sur la surface du moule. Après séchage, on obtient le corps en cru. Donc le coulage s'effectue en deux étapes essentielles :

- Formation du tesson ou « prise ».
- Consolidation du tesson « raffermissement ».

La filtration, c'est à dire la formation du tesson lors du coulage, peut être considéré comme un processus d'élimination d'une partie de l'eau de la barbotine ; Cette eau migre à travers la couche de tesson déjà formée, sous l'effet :

- du pouvoir de succion du plâtre (coulage classique) ;
- ou d'une pression appliquée sur la barbotine (coulage sous pression).

Dans le cas de la fabrication de multicouches, après la formation du premier tesson, le dépôt de la deuxième couche s'effectue de manière telle que la barbotine ne pénètre pas dans le tesson formé. Ce procédé est successivement reproduit pour les autres couches.

#### **I.4.3. Compaction Sèche des Poudres**

Cette technique consiste à verser successivement dans un moule en acier les poudres, et à chaque fois qu'une poudre est versée une faible compression est exercée. Ensuite la compaction de l'ensemble des couches sera effectuée. Ce procédé est suivi généralement par une pression isostatique et un délainage. La densification sera enfin l'étape finale (**Bishop.1993**). Ce procédé peut être envisagé pour la fabrication de pièces de formes complexes. En effet il s'applique aussi avec la technique du pressage isostatique, et de façon industrielle.

#### **I.4.4. Dépôt par Electrophorèse**

Le dépôt par électrophorèse est un procédé dans lequel une suspension colloïdale stable est placée dans une cellule contenant deux électrodes, le dépôt se fait par le mouvement des particules chargées au sein de la solution vers la cathode ou l'anode selon le signe de la charge des particules due à un champ électrique. L'élaboration des F.G.M peut se faire donc par le dépôt séquentiel des matériaux (**Abdizadeh H.1997**).

#### **I.4.5. Projection Plasma**

Un gaz soumis à une forte température (par exemple celle d'un arc électrique), se transforme en un état ionisé (plasma). Cette transformation est accompagnée d'un dégagement de chaleur important. Si une particule de céramique se trouve dans cet environnement, elle se fond totalement ou superficiellement, ce qui permet de la situer sur un substrat. La projection plasma des particules des divers matériaux est devenue une méthode très utilisée pour fabriquer des FGM L'équipement relativement simple, le rendement élevé du dépôt des particules sur des substrats à géométrie compliquée, les performances des surfaces en fonctionnement et la compatibilité des céramiques avec les métaux sont les avantages essentiels de cette technique (**Steffes.H.D.1990**).

#### **I.4.6. C. V. D. et P. V. D.**

Les dépôts chimique ou physique en phase vapeur sont des techniques dans lesquelles les atomes du matériau sont déposés sur la surface du substrat. Les techniques de C.V.D. et P. V. D. peuvent être utilisées pour façonner un F.G.M sur des substrats de formes compliquées.

#### **I.4.7. Frittage et Infiltration**

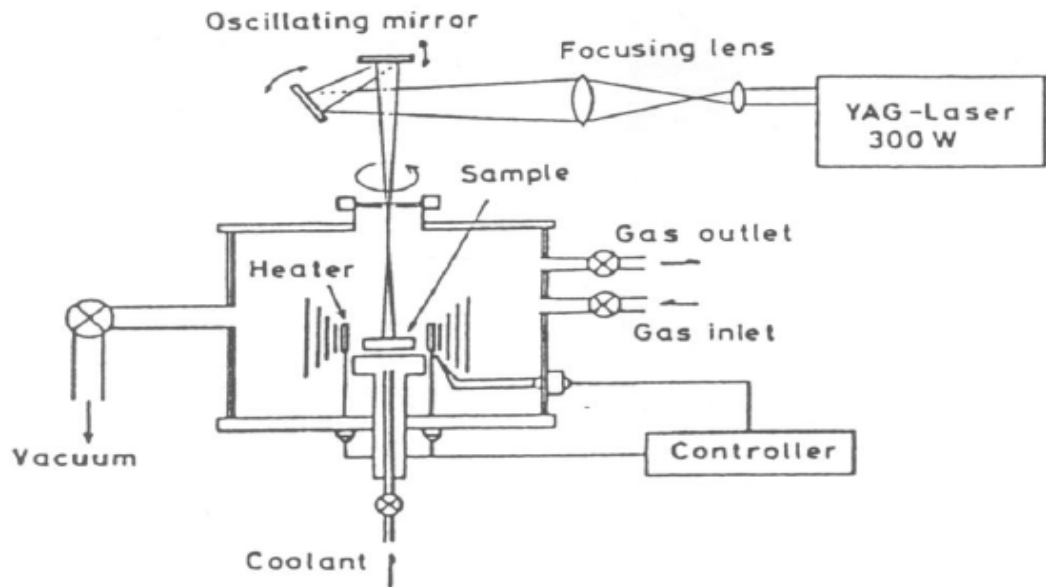
Cette technique est constituée de deux étapes et convient à la fabrication d'un composite à gradient de fonction composé de deux matériaux dont les températures de fusion sont très différentes :

- La première étape est de fabriquer une matrice frittée du matériau à haute température de fusion avec un gradient de porosité.
- La seconde étape est de remplir ces porosités avec le deuxième matériau fondu par infiltration.
- Le résultat est excellent pour la diminution de la contrainte thermique.

Cette technique peut être généralement appliquée pour plusieurs combinaisons de matériaux qui sont chimiquement inertes et qui ont des points de fusion bien différents les uns par rapport aux autres.

#### **I.6.8. Frittage Laser Différentiel**

Le rayonnement thermique du laser permet le contrôle de la température et la focalisation du point à chauffer. La différence de l'intensité de l'irradiation sur différents points du matériau, provoque un frittage différentiel le long de la pièce, ce qui résulte en des microstructures différentes, dépendant de la position du point irradié. Cette technique a été utilisée pour élaborer un F.G.M de PSZ/Mo. La figure. I.4 montre schématiquement la disposition du procédé utilisé par ces auteurs.



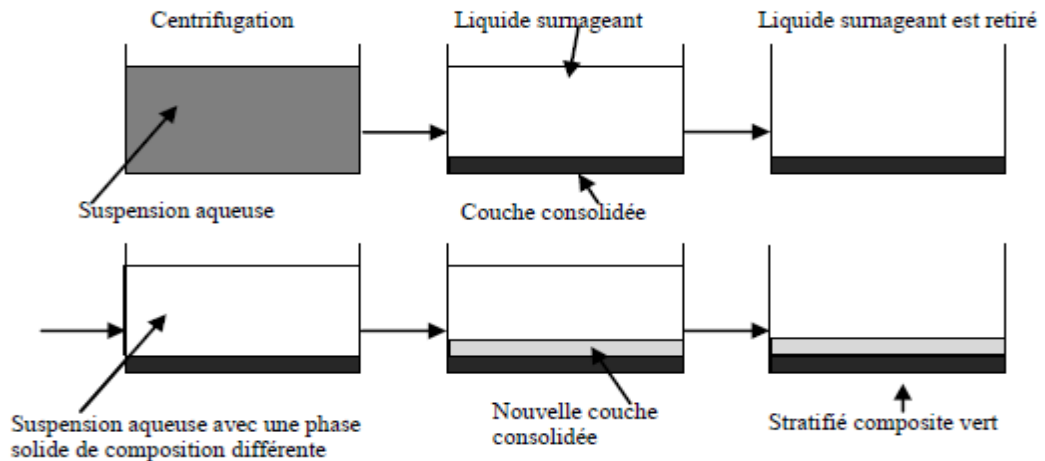
**Figure I.4 :** Disposition du procédé frittage laser différentiel.

#### I.4.9. Implantation Ionique (Sputtering)

C'est une technique avancée pour la fabrication des F.G.M permettant de réaliser seulement des épaisseurs fines ( $<1\mu\text{m}$ ) sur différents substrats (plastiques, céramiques, et métaux). Le traitement s'effectue par les faisceaux énergétiques d'ions ou via des gaz réactifs. Les couches fabriquées présenteront un gradient de composition qui peut être très finement contrôlé (Abdizadeh H.1997).

#### I.4.10. Dépôt par Centrifugation

La technique consiste à verser une suspension colloïdale relativement diluée dans des flacons cylindriques, le tout est soumis à une centrifugation. La sédimentation s'opère et le liquide surnageant est retiré. Ce procédé est répété pour obtenir des multicouches (figure. I.5) (Abdizadeh H.1997).



**Figure I.5 :** Schéma du procédé dépôt par centrifugation (Abdizadeh H.1997)

## I.5. Propriétés physiques et mécaniques des FGM

Pour ce travail le matériau FGM choisi est (Aluminium-Céramique).

### I.5.1. Propriétés physiques de l'aluminium

**Définition :** L'Aluminium est un métal blanc qui après polissage peut devenir réfléchissant.

**Propriétés physiques :** L'Aluminium a une température de fusion relativement basse d'environ  $660^{\circ}$ . Il en résulte une facilité de fusion qui présente un avantage certain pour les opérations de fonderie. L'Aluminium est très ductile, on peut aisément le mettre en forme. La masse volumique de l'Aluminium est de  $2700 \text{ kg/m}^3$ . L'utilisation de l'Aluminium s'impose donc dans les domaines aéronautiques et du transport.

**Propriétés mécaniques :** Les propriétés mécaniques des métaux présentent un grand intérêt dans la vie quotidienne, elles peuvent être classées en deux groupes :

- Celles qui se rapportent à la résistance mécanique du métal :

- ✓ Résistance à la traction.
- ✓ Résistance à la pénétration (dureté).

- Celles qui concernent les modifications de forme que le métal peut subir sans se briser :



- La malléabilité (mises en feuilles).
- La ductilité (mise en fils).

**Propriétés des alliages d'aluminium** : L'Aluminium a pour propriétés une :

- Température de travail élevée.
- Très bonne résistance à la corrosion.
- Légèreté.
- Très bonnes solidités, dureté et rigidité.
- Bon rapport force/poids.
- Bonnes propriétés de protection contre les interférences électromagnétiques.
- Bonne conductivité thermique.
- Conductivité électrique élevée.
- Bonnes caractéristiques de finition.
- Entièrement recyclable.

**Résistance à la corrosion** : Grâce à la couche d'oxyde qui se forme en surface, les alliages d'Aluminium résistent à la corrosion. On peut rendre cette couche protectrice d'oxyde plus épaisse par galvanisation. L'Aluminium et ses alliages peuvent être utilisés sans protection supplémentaire comme revêtement extérieur de bâtiments. Par contre dans les milieux corrosifs, les alliages d'Aluminium peuvent subir les effets de la corrosion. Des piqures, de la corrosion sous contrainte, de la fatigue corrosion, voire de la corrosion généralisée peuvent se développer. Pour des conditions données, la sévérité de l'attaque dépend de l'alliage utilisé et de son état.

### I.5.2. Propriétés physiques de la céramique

**Définition :** La céramique résulte des terres et des roches broyées (matériaux géologiques) ou bien d'une argile qui sera modelée puis cuite sous haute température (transformation irréversible) ce qui fait perdre au matériau sa plasticité donc il ne peut plus se réhydrater.

**Propriétés physiques :** La céramique a une facilité de fusion qui présente un avantage certain pour les opérations de fonderie. La masse volumique de la céramique est de  $3800 \text{ kg/m}^3$ . L'utilisation de la céramique s'impose dans les domaines de l'habitat et du design, l'industrie céramique et métallurgique, aéronautique et spatial, médicale et dans les revêtements.

**Propriétés mécaniques :** Les propriétés mécaniques de la céramique dépendent des :

- Matières premières employées.
- Méthodes de fabrication qui fixent les microstructures finales et déterminent la répartition des différentes phases en présence.

**Propriétés des céramiques :** Les propriétés de la céramique sont :

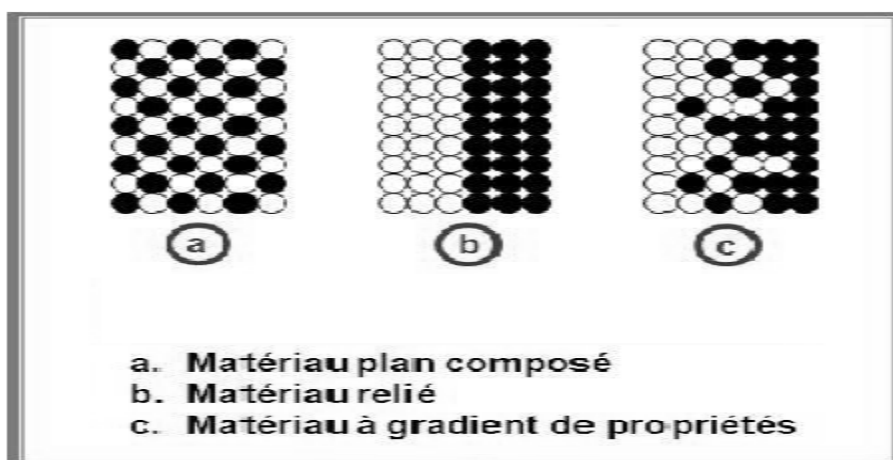
- Un module de YOUNG élevé (Liaisons, covalente, ioniques).
- Une dureté élevée (Abrasif, outils de coupe, surfaces de frottement qui doivent résister à l'usure, résistance mécanique élevée, bonne tenue à chaud, rigidité élevée).
- Une très bonne résistance à la compression non à la traction (Résistance à la compression = 200 MPa).

### I.6. Différence entre FGM et les matériaux composites traditionnels

Un modèle simple illustrant les différences entre les matériaux à gradient de propriétés (FGM) et les matériaux plus conventionnels est montré sur la (figure I.6) : (a) un matériau plans composé, (b) un matériau relié et (c) un matériau à gradient de propriété. Le matériau plan composé à une caractéristique plane, et le matériau relié a une frontière sur

l'interface de deux matériaux. Les FGM ont d'excellentes caractéristiques qui diffèrent de ceux des matériaux plans composés et reliés. Par conséquent, les FGM attirent l'attention en termes de leur application dans les domaines industriels. Puisque les FGM ont une double propriété des deux matières premières qui sont mélangées ensemble, et la distribution composante est graduée sans interruption.

Par exemple, l'un des FGM qui se compose du métal et en céramique a la caractéristique de la conductivité thermique et de la force métallique dans le côté en métal et la résistivité aux hautes températures dans le côté en céramique.



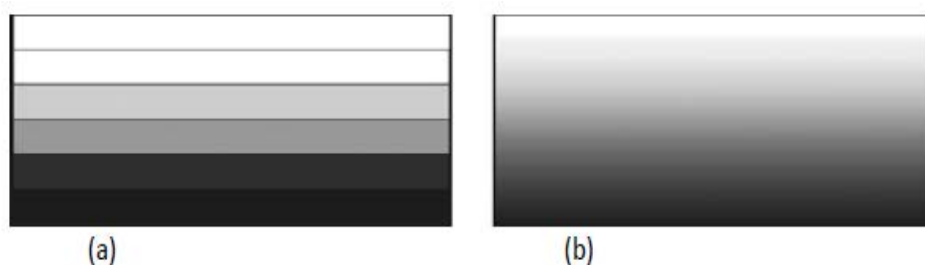
**Figure. I.6 :** La distribution composante des matériaux.

### I.7. Propriétés matérielles effectives d'un matériau FGM

Les matériaux à gradient de propriétés sont généralement fabriqués par deux phases matérielles avec des propriétés différentes. Une description détaillée des microstructures graduées réelles n'est pas disponible, excepté peut-être pour l'information sur la distribution de fraction volumique. Puisque la fraction de volume de chaque phase varie graduellement dans la direction de la graduation, les propriétés effectives des FGM changent le long de cette direction.

Par conséquent, nous avons deux approches possibles pour modéliser un FGM :

- La première approche : une variation par tranche de fraction volumique de la céramique ou du métal est assumée, et le FGM est pris pour être posé avec la même fraction de volume dans chaque région, c.-à-d., couches quasi homogènes de céramique-métal (figure. I.7a).
- La deuxième approche : une variation continue de la fraction volumique de la céramique ou du métal est assumée (figure. I.7b), et la fraction de volume en métal peut être représentée suivant une fonction dépendante de la coordonnée  $Z$  (épaisseur).



**Figure. I.7 :** Modèles analytiques pour une couche en FGM.

La plupart des chercheurs emploient la fonction de loi de puissance ; la fonction exponentielle, ou la fonction sigmoïde pour décrire les fractions de volume. Par conséquent, on considère dans notre travail des plaques FGM avec des variations de la fraction de volume qui suit des fonctions de la loi de puissance.

### **I.8. Domaines d'application des matériaux à gradients évalués FGM**

Le concept des matériaux à gradient évalués FGM est applicable dans des nombreux et larges intervalles de domaines tels que les matériaux de construction, matériaux de conversion d'énergie, aéronautique, aérospatiale, nucléaire et semi-conducteurs. Ainsi, ces matériaux ont deux propriétés contradictoires : la conductivité thermique et l'isolation thermique. Actuellement, ils permettent la production des matériaux légers, résistants et durables.

Les principaux domaines d'application des FGM sont :

- **Génie civil** : ponts à poutre en caisson, les cheminées, les fondations élastiques (ces structures de plaques peuvent être trouvées dans différents types d'applications industrielles telles que radiers), réservoirs de stockage, les piscines.
- **Aéronautique** : composants de moteur-fusée, corps des avions spatiaux.
- **Chimique** : l'échangeur de chaleur, tube de chaleur, récipient de réaction.
- **Ingénierie** : outils de coupe, éléments de moteur.
- **L'énergie nucléaire** : composante des réacteurs nucléaires, pastilles de combustible.
- **Électronique** : semi-conducteur à bande graduée, capteurs.
- **Optique** : fibres optiques, lentilles.
- **Conversion d'énergie** : générateur thermoélectrique, convertisseur thermoïonique, pile à combustible.
- **Matières biologiques** : implants, peau artificielle,
- **Produits en générale** : matériaux de constructions, corps de voiture, verres de fenêtre.

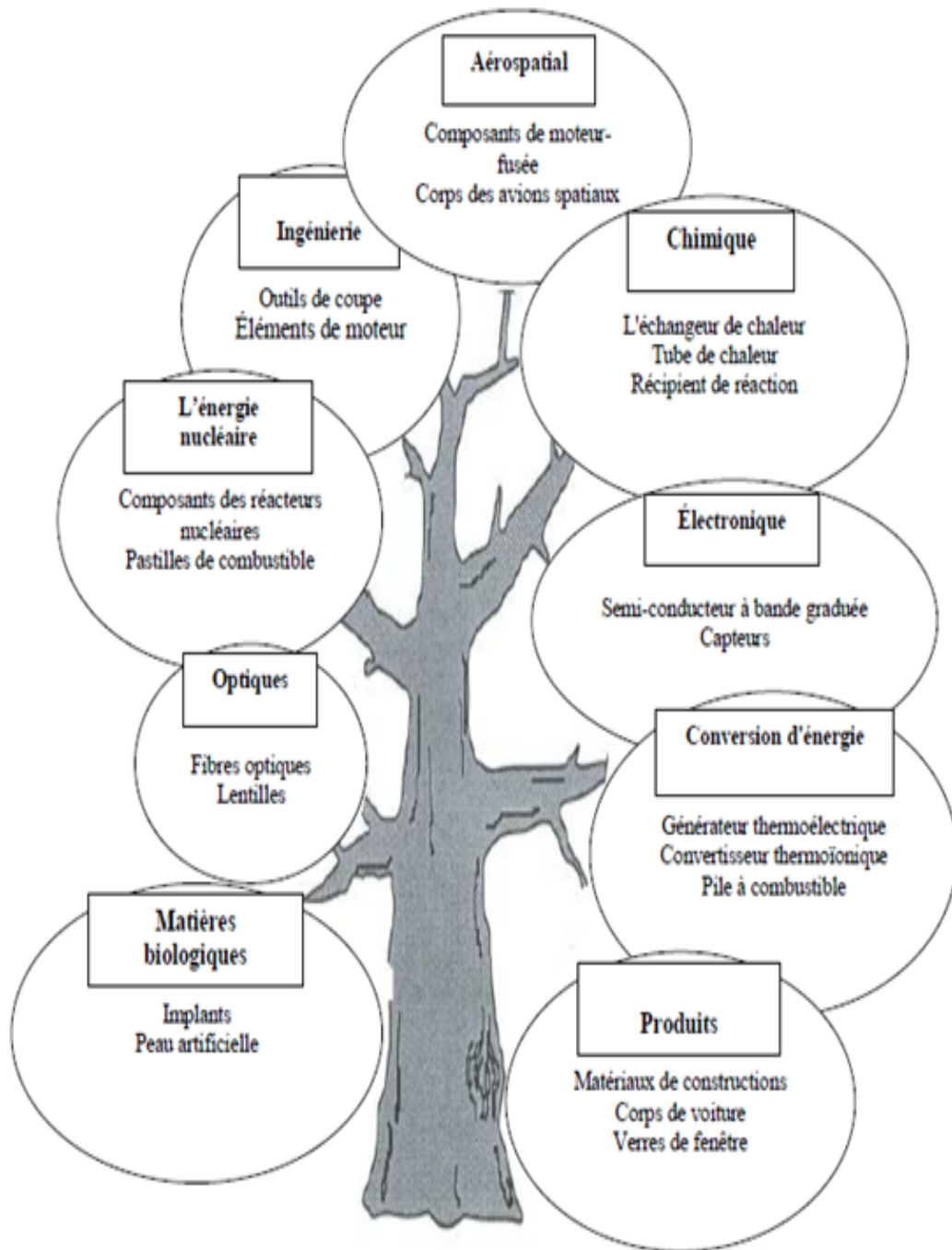


Figure I.8 : Les principaux domaines d'application des FGM (Houari, 2011)

## I.9. Les différentes lois qui régissent la variation des propriétés matérielles suivant l'épaisseur d'une plaque FGM

Puisque les FGM sont des matériaux graduellement variés, leurs caractéristiques physiques et mécaniques varient suivant une direction ou une dimension (généralement l'épaisseur) et selon une fonction (loi) l'on citera :

### I.9.1. Propriétés matérielles de la plaque P-FGM

La continuité du FGM est assurée par des fractions de volume  $V(z)$

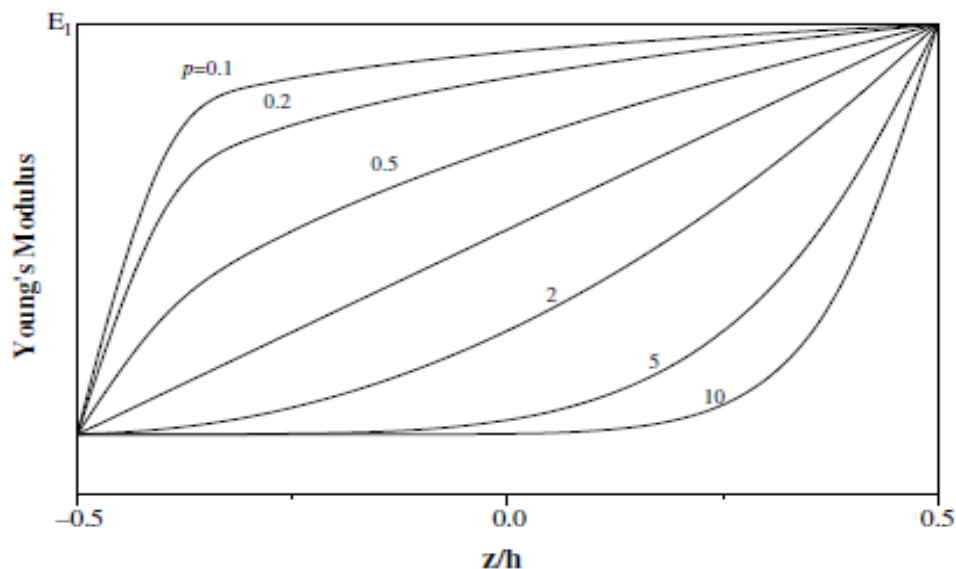
La fraction volumique de la classe P-FGM obéit à une fonction en loi de puissance.

$$V(z) = \left( \frac{z + h/2}{h} \right)^p \quad (\text{I.1})$$

Où  $p$  (ou  $k$ ) est un paramètre du matériau et  $h$  est l'épaisseur de la plaque. Une fois que la fraction de volume local  $V(z)$  est définie, les propriétés matérielles d'une plaque P-FGM peuvent être déterminées par la loi des mélanges :

$$E(z) = V(z).E_1 + [1 - V(z)].E_2 \quad (\text{I.2})$$

Où  $E_2$  et  $E_1$  sont respectivement les propriétés matérielles (modules de Young ou densité) de la surface inférieure ( $z = -h/2$ ) et de la surface supérieure ( $z = h/2$ ) de la plaque FGM. La variation de ces propriétés dans la direction de l'épaisseur de la plaque P-FGM est représentée dans (Figure I.9), il apparaît clairement que le module de Young par exemple change rapidement près de la surface inférieure pour  $p > 1$ , et augmente rapidement près de la surface supérieure pour  $p < 1$ .



**Figure I.9:** La variation du module de Young dans une plaque P-FGM.

### I.9.2 Propriétés matérielles de la plaque S-FGM

Dans le cas d'ajouter une plaque P-FGM d'une simple fonction de loi de puissance à une plaque composite multicouche, les concentrations des contraintes apparaissent sur l'interfaces où le matériau est continu mais change rapidement. Par conséquent, Chung et chi ont défini la fraction de volume de la plaque FGM en utilisant deux fonctions de loi de puissance pour assurer une bonne distribution des contraintes parmi toutes les interfaces. Les deux fonctions de loi de puissance sont définis par :

$$V_1(z) = 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{h/2 - z}{h/2} \right)^p \quad \text{Pour } 0 \leq z \leq h/2 \quad (\text{I.3})$$

$$V_2(z) = \frac{1}{2} \left( \frac{h/2 + z}{h/2} \right)^p \quad \text{Pour } -h/2 \leq z \leq 0$$

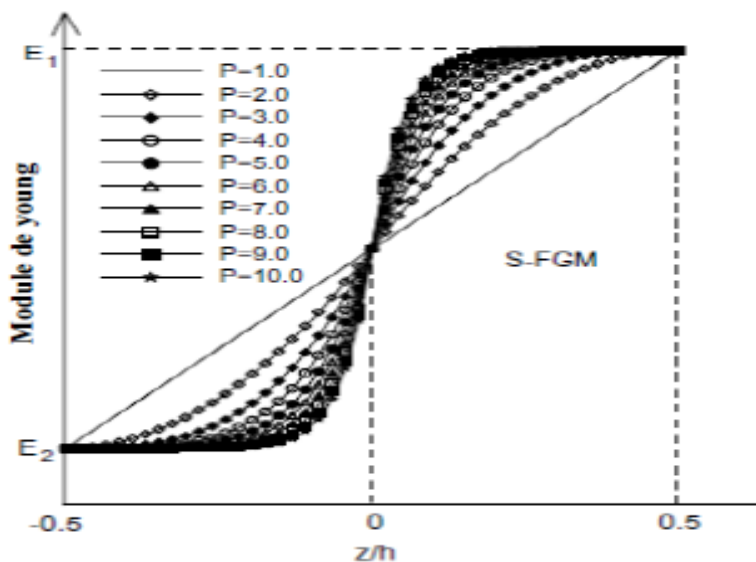
En utilisant la loi des mélanges, le module de Young de la plaque S-FGM peut être calculé par :

$$E(z) = V_1(z).E_1 + [1 - V_1(z)].E_2 \quad \text{Pour } 0 \leq z \leq h/2 \quad (\text{I.4})$$

$$E(z) = V_2(z).E_1 + [1 - V_2(z)].E_2 \quad \text{Pour } -h/2 \leq z \leq 0$$



La figure I.9 montre que la variation de la fraction volumique dans les équations (I.3) et (I.4) représente les distributions sigmoïdes, et cette plaque FGM est appelée (Plaque S-FGM).



**Figure I.10:** Variation de la fraction volumique dans une plaque S-FGM.

### I.9.3 Les propriétés matérielles de la plaque E-FGM

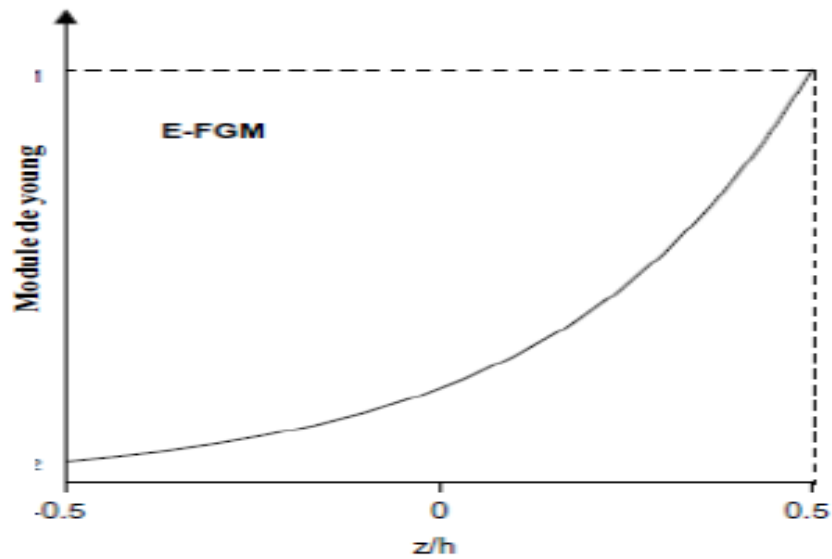
Pour décrire les propriétés matérielles des matériaux FGM, la plupart des chercheurs utilisent la fonction exponentielle qui s'écrit sous la forme :

$$E(z) = A.e^{B.(z+h/2)} \quad (I.5)$$

Avec,

$$A = E_2 \quad \text{Et} \quad B = \frac{1}{h} \cdot \ln\left(\frac{E_1}{E_2}\right) \quad (I.6)$$

La variation du module de Young à travers l'épaisseur de la plaque E-FGM est représentée dans la Figure I.10.



**Figure I.11 :** Variation du module de Young dans une plaque E-FGM.

### I.10. Conclusion

Nous avons vu dans ce chapitre une brève introduction aux matériaux à gradient de propriété FGM, d'où une vue sur l'historique de leur développement, leur méthodes d'élaboration, leur propriété ,ensuite on s'est intéressé aux domaine d'application de ces derniers et l'intérêt de leur utilisation et par la suite nous avons cité les différentes lois possibles qui servent à décrire la variation des propriétés matérielles du matériau FGM (module de Young, masse volumique et coefficient de poisson) suivant l'épaisseur d'une plaque, ces lois peuvent être de puissance, exponentielle ou même sigmoïde

# CHAPITRE II

---

LES THEORIES DES PLAQUES FGM

## II.1. Introduction

Une structure FGM peut être considérée comme un corps hétérogène. La caractéristique géométrique d'une plaque est une épaisseur faible par rapport aux autres dimensions. La modélisation des structures FGM modernes avec une forte anisotropie (par exemple : faible rapport du module de cisaillement transverse de l'âme par rapport au module d'élasticité longitudinal des peaux dans le cas des structures sandwich) exige des théories raffinées qui prennent en compte une bonne description des cisaillements transverses. On trouve dans (**Noor.1989**) des revues complètes sur les différents modèles existants de type élasticité tridimensionnelle ou de type plaque.

Durant ces dernières années, plusieurs modèles bidimensionnels ont été développés pour la modélisation des structures multicouches tenant compte des cisaillements transverses. Ils peuvent être regroupés en fonction du type d'approche adopté :

- Approche monocouche équivalente
- Approche par couche
- Approche développement asymptotique

## II.2. Les Différents Modèles des structures composites dans l'élasticité bidimensionnelles

### II.2.1. Approche monocouche équivalente

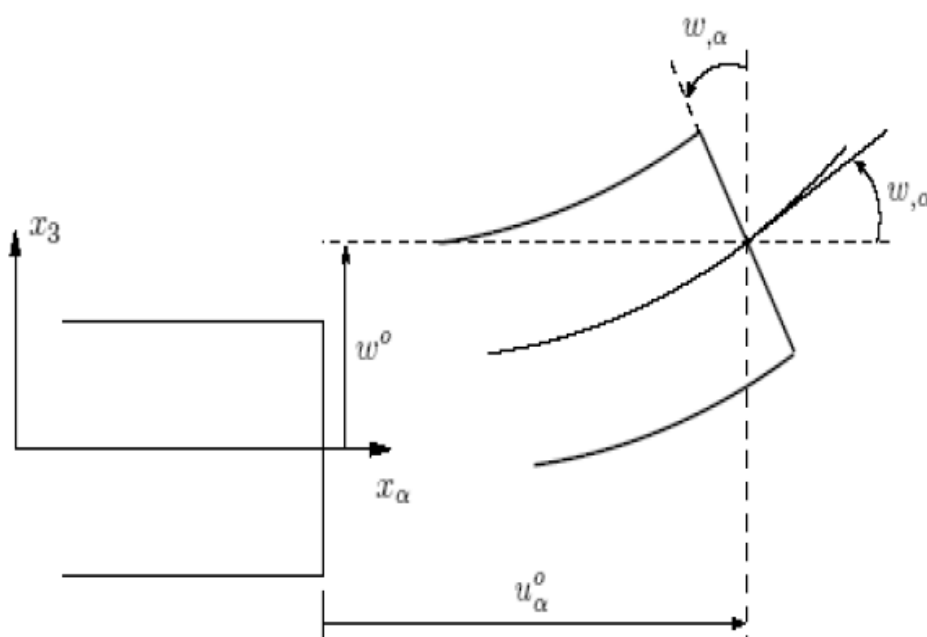
Dans l'approche monocouche équivalente, la variation des caractéristiques physicomécaniques selon l'épaisseur n'est pas un facteur déterminant du nombre d'équations, la plaque FGM est homogénéisée et considérée donc comme une seule couche.

Depuis le premier travail de **Sophie Germain en 1815** sur les plaques minces en passant par les modèles du premier ordre de **Love-Kirchhoff et de Reissner-Mindlin**, de nombreux auteurs ont développé des théories de plaques à partir de cinématiques ou champs de contraintes plus raffinées. Nous passons en revue, dans ce qui suit, les principaux modèles.

### II.2.1.1. Les modèles classiques Love-Kirchhoff (théorie classique des plaques stratifiées CLPT)

En commence par le model le plus simple est le plus général appelé modèle de **Love-Kirchhoff**. Ce modèle est basé sur une distribution linéaire des déplacements suivant l'épaisseur (**Reissner1961**).

L'hypothèse adoptée est celle de **Love-Kirchhoff (Kirchhoff. 1850)** des contraintes planes, les déformations dues au cisaillement transverse sont négligées. La normale à la surface moyenne de la plaque reste perpendiculaire et droite à celle-ci après déformation (Figure. II.1).



**Figure. II. 1 :** Cinématique de Love-Kirchhoff.

Le champ de déplacements de Love-Kirchhoff s'écrit alors,

$$\begin{cases} u_{\alpha}(x_1, x_2, x_3 = z) = u_{\alpha}^0(x_1, x_2) - zw_{,\alpha}(x_1, x_2) \\ u_3(x_1, x_2, x_3 = z) = w(x_1, x_2) \end{cases}, \alpha = 1, 2 \quad (\text{II.1})$$

Avec,

$u_{\alpha}^0$  : Le déplacement de membrane dans la direction  $\alpha$  ,

$W$  : La flèche de la plaque,

$w_{,\alpha}$  : La rotation due à la flexion (sans cisaillement).

### II.2.1.2. Les modèles Reissner-Mindlin (théorie de déformation en cisaillement du premier ordre FSDT)

Le cisaillement transverse ne peut être négligé ; sa prise en compte est adoptée par Mindlin dont l'hypothèse cinématique est la suivante :

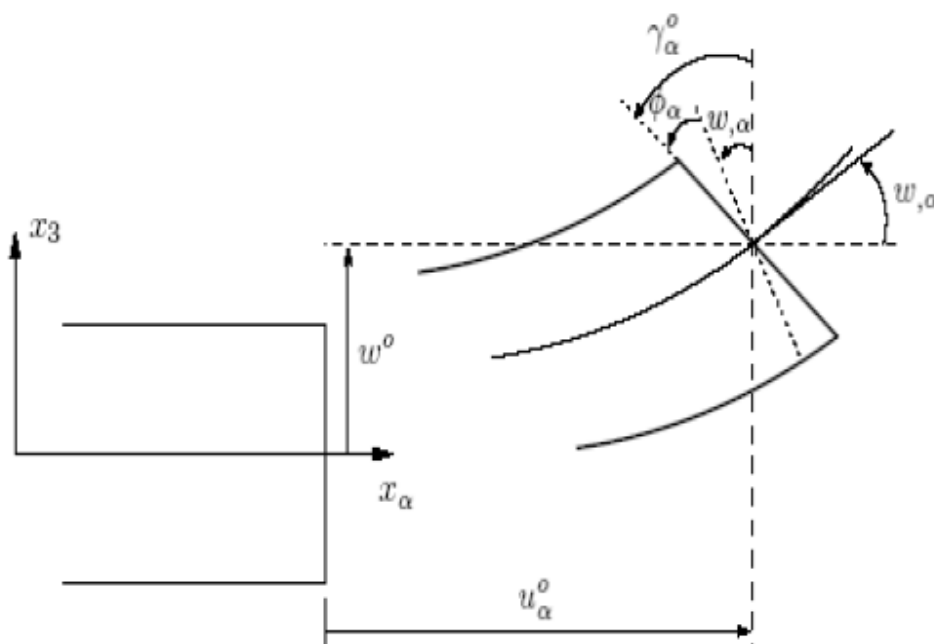
La normale reste droite mais non perpendiculaire à la surface moyenne (à cause de l'effet du cisaillement transverse) dans la configuration déformée (Figure.II.2). Le champ de déplacements de Reissner-Mindlin s'écrit :

$$\begin{cases} u_\alpha(x_1, x_2, x_3 = z) = u_\alpha^0(x_1, x_2) - z\phi_{,\alpha}(x_1, x_2) \\ u_3(x_1, x_2, x_3 = z) = w(x_1, x_2) \end{cases} \quad (\text{II.2})$$

Avec,

$\phi_\alpha$  : La rotation de la normale au plan moyen autour des axes  $x_\alpha$ ,

$\gamma_\alpha^0 = (w_{,\alpha} + \phi_\alpha)$  : La déformation de cisaillement transverse mesurée sur le plan moyen.



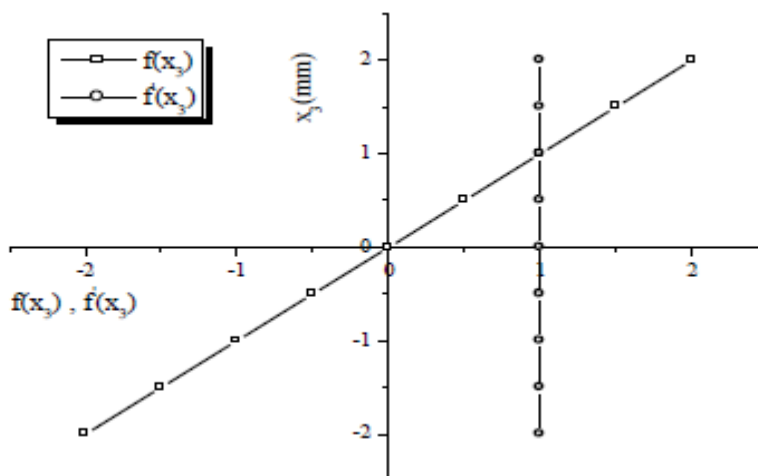
**Figure. II.2 :** Cinématique de Reissner-Mindlin.

Avec ce choix de la forme des champs de déplacements, les déformations transversales  $\gamma_\alpha^0$  sont constantes en  $z$ . Les contraintes de cisaillement sont donc

uniformes à n'importe quel point suivant l'épaisseur et ça évitent la discontinuité entre les couches dans les composites conventionnels.

Cette mauvaise description d'uniformité de distribution des contraintes oblige à introduire des coefficients correcteurs pour mieux prendre en compte, dans l'écriture de l'énergie, les effets du cisaillement transversal (**Whitney. 1973**). Les résultats obtenus dépendent essentiellement du choix empirique dans des situations complexes des coefficients correcteurs et l'étude des plaques épaisses reste aléatoire par ce type d'approche cinématique.

La Figure. II.3 montre la variation de la fonction de forme ainsi que sa dérivée par rapport à l'épaisseur de la plaque. Cette variation est plus authentique pour le cas des plaques stratifiés ou au niveau de l'interface il ya une discontinuité de distribution des propriétés alors que pour les FGM ce problème est résolu.



**Figure. II.3:** Variation de la fonction de gauchissement  $f(x_3) = x_3$  et  $f'(x_3)$  suivant l'épaisseur.

### II.2.1.3. Les modèles d'ordre élevé

Pour franchir les limites des théories du premier ordre, plusieurs auteurs proposent des théories à un ordre supérieur. Les modèles sont basés sur une distribution non linéaire des champs suivant l'épaisseur. Ces modèles permettent de représenter le gauchissement de la section dans la configuration déformée (Figure. II.4), (**Liberscu. 1967**). La plupart des

modèles d'ordre supérieur utilisent un développement en série de Taylor des champs de déplacements qui s'écrivent de la forme :

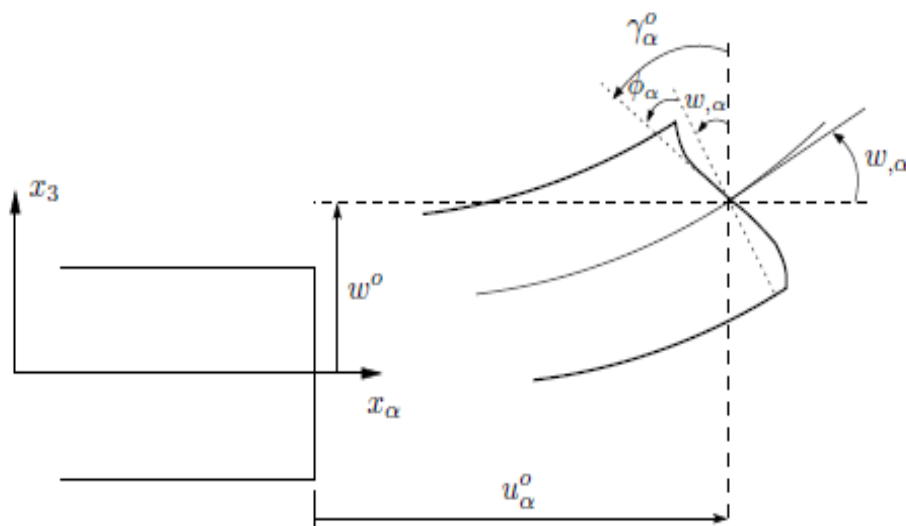
$$u_i(x_1, x_2, x_3) = u_i^0(x_1, x_2) + z\phi_i^{0(1)}(x_1, x_2) + z^2\phi_i^{0(2)}(x_1, x_2) + z^3\phi_i^{0(3)}(x_1, x_2) + z^4\phi_i^{0(4)}(x_1, x_2) + \dots \quad (\text{II.3})$$

Partons de ce principe, nous pouvons utiliser différents ordres, en fonction de la complexité du problème et de la précision souhaitée. La plupart des études sont basées sur un développement en 3ème ordre, assurant ainsi un niveau minimum de complexité. La valeur de  $\phi_j^{0(i)}$  détermine la nature de la théorie. Ainsi, la théorie du premier ordre de Reissner-Mindlin est obtenue en posant :  $\phi_i^{0(j)} = 0$  pour  $j = 2, 3, 4$  et  $\phi_3^{0(1)} = 0$ .

En principe, ces modèles d'ordre supérieur sont plus précis que les modèles du premier ordre. La précision augmente avec l'ordre de développement, c'est à dire avec le nombre de paramètres supplémentaires. Cependant, les conditions aux limites sur les bords sont difficiles à satisfaire et le nombre de variables de déplacement indépendantes dépasse celui des modèles classiques. Pour réduire le nombre de paramètres de déplacement, plusieurs simplifications sont proposées. On impose souvent les conditions de nullité des contraintes de cisaillement transverse aux surfaces supérieure et inférieure de la plaque. Le développement en série de Taylor est utilisé avec  $\phi_i^{o(4)} = \phi_i^{o(2)} = \phi_i^{o(1)} = 0, \phi_i^{o(3)}$ ,  $\alpha = \{1, 2\}$ . Le champ de déplacement devient :

$$\begin{cases} u_\alpha(x_1, x_2, x_3 = z) = u_\alpha^o(x_1, x_2) - zw_{,\alpha} + f(z)\gamma_\alpha^o(x_1, x_2) \\ u_3(x_1, x_2, x_3 = z) = w(x_1, x_2) \end{cases} \quad (\text{II.4})$$





**Figure.II.4** : Cinématique de la théorie d'ordre supérieur.

La figure montre bien que la normale à la surface moyenne de la plaque n'est ni perpendiculaire ni droite à celle-ci après déformation, la section se déforme alors carrément, elle gauchit.

Voici quelques contributions importantes de développement de modèles d'ordre supérieur qui se sont distingués dans la littérature et qui diffèrent par la fonction de cisaillement  $f(z)$  :

- L'approche d'Ambartsumyan (**Ambartsumyan.1969**) avec :

$$f(z) = \frac{z}{2} \left( \frac{h^2}{4} - \frac{z^2}{3} \right) \quad (\text{II.5})$$

- L'approche de Reissner (**Reissner. 1945**):

$$f(z) = \frac{5}{4} z \left( 1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right) \quad (\text{II.6})$$

- L'approche de Reddy (**Reddy. 1987**) avec :

$$f(z) = z \left( 1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right) \quad (\text{II.7})$$

Dans le modèle de **(Reddy. 1987)**, le champ de déplacement membranaire est cubique et le déplacement normal  $w$  est constant. Ce modèle donne une bonne approximation pour les contraintes de cisaillement transverse par rapport à la solution élastique tridimensionnelle. La distribution des contraintes de cisaillement transversal est parabolique suivant l'épaisseur. Les conditions aux limites sur les surfaces libres sont satisfaites.

➤ L'approche de Touratier **(Touratier. 1991)** avec :

$$f(z) = \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{z}{h}\right) \quad (\text{II.8})$$

Touratier propose le modèle "sinus" qui est différent des autres modèles d'ordre supérieur puisqu'il n'utilise pas de fonction polynomiale. Une fonction trigonométrique sinusoïdale est donc introduite pour modéliser la répartition des contraintes de cisaillement suivant l'épaisseur. La fonction de cisaillement transverse s'écrit comme suit :

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) = \frac{h}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \left(\frac{\pi z}{h}\right)^{2n+1} \\ &= z \left( 1 - \frac{\pi^2}{3!} \frac{z^2}{h^2} + \frac{\pi^4}{5!} \frac{z^4}{h^4} - \frac{\pi^6}{7!} \frac{z^6}{h^6} + \dots \right) \end{aligned} \quad (\text{II.9})$$

Les différents termes du développement correspondent aux différents modèles cités précédemment. Suivant la troncature choisie, on obtient la théorie Love-Kirchhoff, la théorie Reissner-Mindlin ou les modèles d'ordre supérieur (aux coefficients prés).

Les contraintes de cisaillement transversal déterminées par le modèle "sinus" prennent une forme cosinusoidale dans l'épaisseur de la plaque. La précision de ce modèle par rapport à la solution exacte est meilleure que la théorie de Reddy.

Récemment, Afaq et al. **(Afaq. 2003)** propose un modèle exponentiel avec une cinématique plus riche.

La fonction de cisaillement transverse est de la forme suivante :

$$f(z) = ze^{-2\left(\frac{z}{h}\right)^2} \quad (\text{II.10})$$

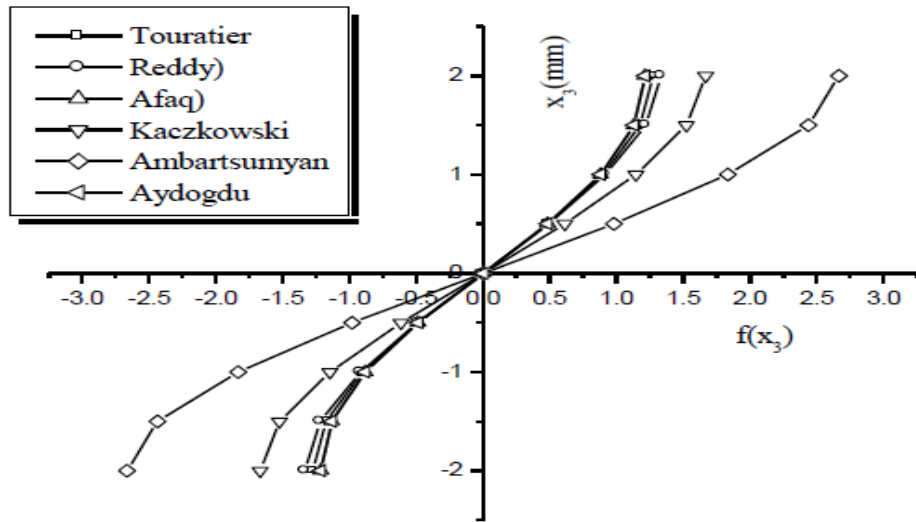
Le choix de la fonction exponentielle permet un développement en puissance pair et impair de la variable  $z$  alors que la fonction "sinus" [Touratier] ne permet qu'un développement en puissances impaires.

➤ L'approche de Aydogdu (**Aydogdu, 2005**) avec ;

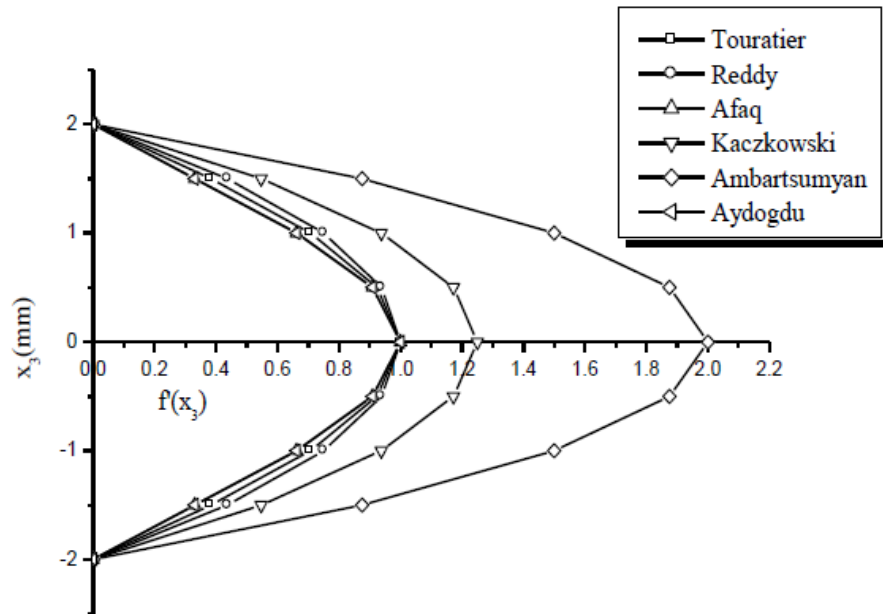
$$f(z) = z\alpha \frac{e^{-2\left(\frac{z}{h}\right)^2}}{\ln(\alpha)} \quad \alpha > 0 \quad (\text{II.11})$$

$h$  : étant l'épaisseur de la plaque FGM.

Il faut remarquer que les modèles issus d'une approche monocouche équivalente présentent des contraintes de cisaillement transverse discontinues aux interfaces si les couches ont des propriétés différentes, même si la continuité du champ de déformation est assurée. Ceci présente un inconvénient sérieux lors de l'analyse locale à l'interface des structures multicouches (effets de bord sur les contraintes, délaminage . . .). mais pour le cas des matériaux FGM cette approche paraît très appropriée, du fait que la variation des propriétés se fait continuellement selon l'épaisseur.



**Figure. II.5:** Variation de la fonction de forme  $f(z)$  des différents modèles en fonction de l'épaisseur.



**Figure. II.6:** Variation de la dérivée de la fonction de forme  $f'(z)$  des différents modèles suivant l'épaisseur

En fonction des Figures. II.5 et II.6 on remarque que les deux approches d'Ambartsumyan et de Kaczkowski sont un sensiblement loin des autres fonctions de forme ; Elles sont servies comme bases pour développer les autres fonctions qui sont plus proches de l'analyse 3D.

Il faut remarquer que les modèles issus d'une approche monocouche équivalente pressentent des contraintes de cisaillement transverse discontinues aux interfaces si les couches ont des propriétés différentes, même si la continuité du champ de déformation est assurée. Ceci présente un inconvénient sérieux lors de l'analyse locale à l'interface des structures multicouches (effets de bord sur les contraintes, délaminage . . .) mais pour le cas des matériaux FGM cette approche paraît très appropriée, du fait que la variation des propriétés se fait continuellement selon l'épaisseur.

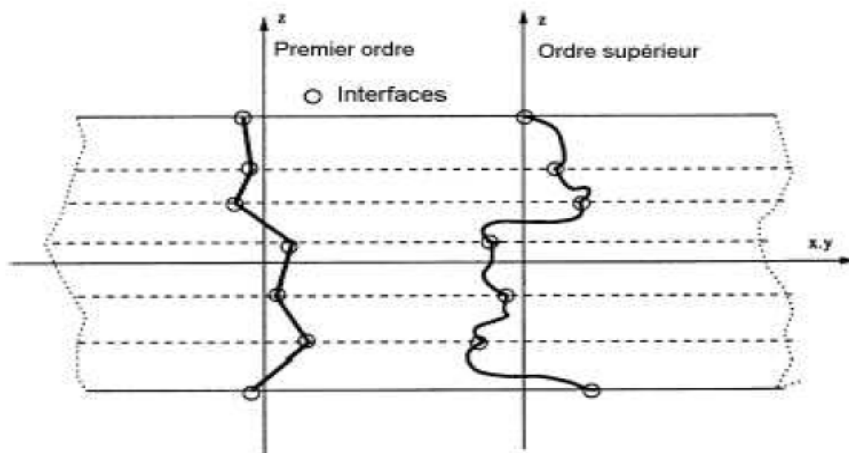
### II. 2. 2. Approche par couche

Ces approches sont destinées justement à mieux décrire les effets d'interface pour les matériaux composites conventionnels.

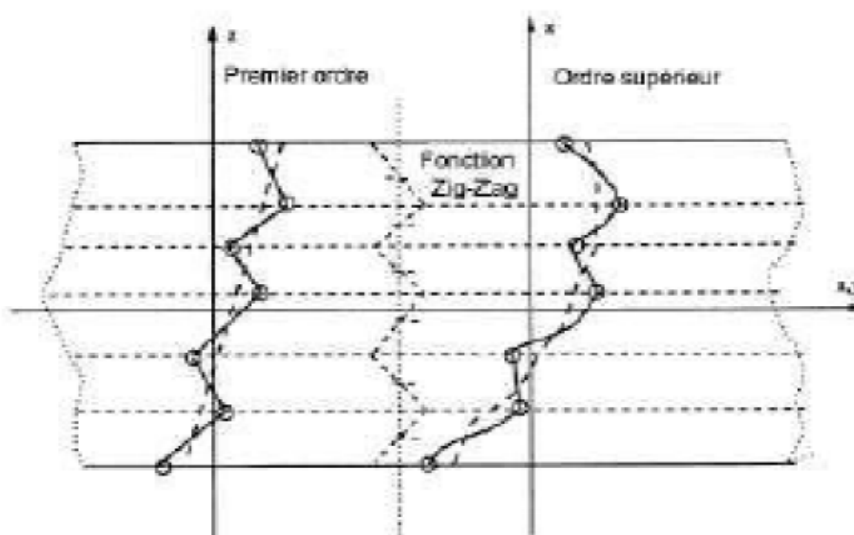
Ainsi différents modèles issus de l'approche par couche ont été proposés (**Afaq, 2003**) ; (**Reddy 1984**). Le multicouche est subdivisée en sous structures (correspondant en fait à chaque couche ou chaque ensemble de couches). On applique à chaque sous structure une théorie du premier ordre ou un modèle d'ordre supérieur, imposant un champ de déplacement vérifiant la continuité aux interfaces entre les différentes couches.

Les modèles de ce type sont relativement coûteux (l'ordre des équations de comportement dépend du nombre de couche), mais ils permettent l'obtention de résultats plus précis, notamment en ce qui concerne le calcul des contraintes hors plan.

D'une manière générale, les modèles issus de l'approche par couche peuvent être classés en deux groupes : les modèles couches discrètes ou chaque couche est considérée comme une plaque en imposant les conditions de continuité en déplacements ou en contraintes aux interfaces et les modèles zig-zag ou la cinématique satisfait à priori les conditions de contact est indépendante du nombre de couches. (Figures II.7 et II. 8).



**Figure II.7 :** Champ de déplacements des modèles couches discrètes, approche Cinématique (Nguyen.2004).



**Figure II.8 :** Champ de déplacements des modèles zig-zag, approche cinématique (Nguyen.2004).

### II.3. Conclusion

Dans cette partie on a décrit les différentes théories des plaques à savoir l'approche monocouche équivalente, l'approche par couche et l'approche développement asymptotique.

Nous concluons aussi que l'approche monocouche équivalente est mieux adaptée pour les matériaux FGM car il n'y a pas de changement brusque dans les caractéristiques

mécaniques contrairement aux composites conventionnels ou le délaminage est un problème à ne pas écarter.

Donc on a eu recours au modèle monocouche équivalent pour les plaques épaisses et les poutres courtes pour différentes théories d'ordre élevé ou la prise en compte du cisaillement transversal est nécessaire pour une étude plus exacte.

# CHAPITRE III

---

ANALYSE DYNAMIQUE DES PLAQUES FGM



### III.1. INTRODUCTION

Le concept de matériaux fonctionnellement gradués (FGM) a été les premiers mis en place en 1984 par un groupe de scientifiques matériels au Japon, que des matériaux résistants à ultra haute température pour les avions, véhicules spatiaux et d'autres applications d'ingénierie. Matériaux fonctionnellement gradués (FGM) sont de nouveaux matériaux composites dans lequel les micro-structurelle de détails sont spatialement varié au cours une distribution non uniforme de la phase de renforcement. Ceci est obtenu en utilisant le renforcement avec des propriétés différentes, de tailles et de formes, ainsi que par inversion du rôle de renforcement et la phase de matrice d'une manière continue. Le résultat est une microstructure produit un changement continu ou lisse sur les propriétés thermiques et mécaniques au niveau macroscopique ou continu (**Koizumi. 1993**).

Maintenant, les FGM sont développés pour une utilisation générale en tant que composants structurels en très haute température environnements. Par conséquent, il est important d'étudier la propagation de l'onde de gradation fonctionnelle structures des matériaux en termes de non-destructive évaluation et la caractérisation des matériaux. Plusieurs études ont été réalisées pour analyser la mécanique ou thermique ou les réponses thermomécaniques des plaques et coques FGM. Un examen approfondi est effectué par (**Tanigawa. 1995**). (**Reddy. 2000**) a analysé le comportement statique des plaques rectangulaire à base de sa théorie de la plaque de déformation de cisaillement de troisième ordre. (**Cheng,2000**) a lié les déviations d'une plaque FGM polygonale simplement appuyée donnée par la théorie du premier ordre de déformation de cisaillement et la théorie du troisième ordre de déformation de cisaillement à celui d'un équivalent plaques de Kirchhoff homogène.

La réponse statique de la plaque de FGM a été étudiée par (**Zenkour. 2006**) en utilisant une théorie de déformation de cisaillement généralisé. Dans une étude récente, (**Şimşek. 2010**) a étudié les déviations dynamiques et les contraintes d'une plaque FGM simplement appuyée soumis à une masse en mouvement à l'aide d'Euler-Bernoulli, Timochenko et la théorie de déformation de cisaillement parabolique des plaques. (**Şimşek. 2010**), (**Benachour. 2011 et Abdelaziz. 2011**) ont étudié la vibration libre de plaques FGM ayant différentes conditions aux limites à l'aide du classique, le premier ordre et différents d'ordre supérieur de théories de déformation de cisaillement de la plaque FGM.

L'analyse dynamique non linéaire d'une plaque FGM avec des supports épinglés-épinglés due à une charge harmonique mobile a été examinée par (Şimşek, 2010) en utilisant la théorie des plaques Timoshenko.

L'objectif principal de ce chapitre est de présenter une formulation générale pour les plaques fonctionnellement graduées (FGM) en utilisant une nouvelle théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé avec seulement quatre fonctions inconnues. La présente théorie satisfait les conditions de l'équilibre en haut et en bas de la face de plaque sans utiliser les facteurs de correction de cisaillement. La fonction hyperbolique en termes d'épaisseur de coordonnées est utilisée dans le champ de déplacement pour tenir compte de la déformation de cisaillement. Les équations de mouvement régissant proviennent du principe de l'énergie d'Hamilton. La solution de Navier est utilisée pour obtenir les solutions pour plaques FGM simplement appuyées. Les résultats obtenus de cette nouvelle théorie raffinée sont comparés à ceux existant dans la littérature telle que les solutions des théories classiques (CPT ou ZSDPT) et celles d'ordre élevé (HSDPT).

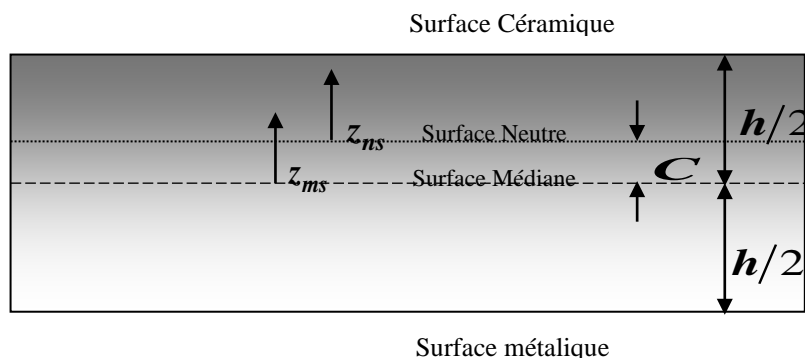
## III.2 Formulation théorique

### III.2.1 Surface physique neutre

Les matériaux à gradient de propriétés est un type particulier de composites dans lesquels leurs propriétés matérielles varient de façon continue en raison des variations progressive de la fraction volumique des matériaux constitutifs le long de l'une des dimensions (généralement dans le sens de l'épaisseur).

Dans cette étude, la plaque FGM est faite à partir d'un mélange de céramique et de métal et les propriétés sont supposées variables à travers l'épaisseur de la plaque. En raison de l'asymétrie des propriétés des matériaux de la plaque FGM par rapport au plan médian, les équations de cisaillement et de flexion sont couplées. *Mais, si l'origine du système de coordonnées est choisie de manière appropriée dans la direction de l'épaisseur de façon à être la surface neutre, les propriétés de la plaque FGM étant symétrique par rapport à cet axe, cependant l'analyse des plaques de FG peut être facilement traitée avec les théories de plaques isotropes homogènes, car les équations de la plaque ne sont pas couplées et les équations des déplacements peuvent être séparées.*

Afin de déterminer la position de la surface neutre de la plaque FGM, deux plans différents sont à considérés pour la mesure de  $z$ , à savoir,  $z_{ms}$  et  $z_{ns}$  mesurés à partir de la surface médiane et la surface neutre de la plaque, respectivement, comme il est montré dans la figure III.1.



**Fig.III.1:** Position de la surface médiane et la surface neutre pour une plaque FGM.

En tenant compte de la distribution dans la direction de l'épaisseur qui suit une loi de puissance, les fractions volumiques des constituants céramiques ( $V_c$ ) et métalliques ( $V_m$ ) en se basant sur les coordonnées  $z_{ms}$  et  $z_{ns}$  peuvent être écrites sous la forme :

$$V_c = \left( \frac{z_{ms}}{h} + \frac{1}{2} \right)^\rho = \left( \frac{z_{ns} + C}{h} + \frac{1}{2} \right)^\rho \quad (\text{III.1})$$

Où  $\rho$  (ou  $k$ ) est l'indice de loi de puissance qui prend une valeur supérieure ou égale à zéro et  $C$  est la distance entre la surface neutre et la surface médiane.

Les propriétés matérielles non homogènes de la plaque FGM peuvent être exprimées par la loi de mélange en puissance règle de mélange de Voigt (**Suresh et Mortensen, 1998**). Ainsi en utilisant l'équation. (III.1), Les propriétés matérielles non homogènes de la plaque P-FGM, en fonction de coordonnée de l'épaisseur  $z$  devient :

$$\rho(z) = (\rho_c - \rho_M) \left( \frac{z_{ns} + C}{h} + \frac{1}{2} \right)^\rho + \rho_M, \quad (\text{III.2})$$

Ou  $\rho_M$  et  $\rho_C$  sont les propriétés du métal et de céramique successivement.

Dans ce chapitre, nous supposons que le module d'élasticité  $E$  et la densité de masse  $\rho$  sont décrits par l'équation. (III.2), tandis que le coefficient de Poisson  $\nu$  est considéré constant suivant l'épaisseur ((Benachour .2009), (labri chaht.2014)).

La position de la surface neutre de la plaque FGM est déterminée à satisfaire le premier moment par rapport au module d'Young étant nul (autrement dit en égalant à zéro l'équation du moment statique correspondant au module d'Young) (Ould Larbi.2013 Bouremana et al, 2013).

$$\int_{-h/2}^{h/2} E(z_{ms})(z_{ms} - C)dz_{ms} = 0 \quad (III.3)$$

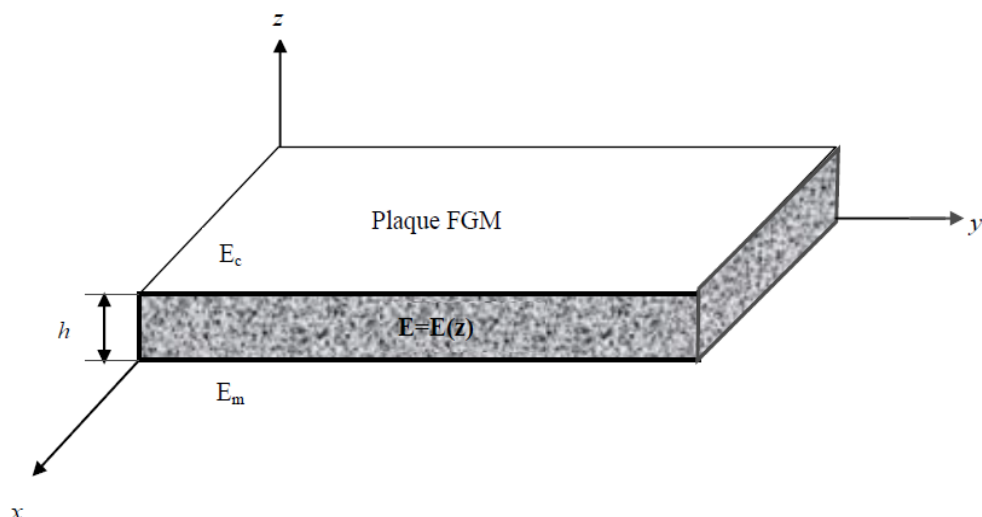
Par conséquent, la position de la surface du neutre peut être obtenue à partir de l'équation suivante :

$$C = \frac{\int_{-h/2}^{h/2} E(z_{ms})z_{ms} dz_{ms}}{\int_{-h/2}^{h/2} E(z_{ms}) dz_{ms}} \quad (III.4)$$

Il est clair que le paramètre  $C$  est nul pour les plaques homogènes et isotropes.

### III.2.2 Hypothèses de base

Considérons le cas d'une plaque FGM d'épaisseur totale  $h$  (Fig. III. 2). La plaque est constituée d'un matériau isotrope ayant des propriétés variant sans interruption dans la direction de l'épaisseur. Le plan  $xy$  est considéré comme étant le plan médian de la plaque non déformé avec l'axe  $z$  positif vers le haut depuis le plan médian.



**Fig.III.2 :** Géométrie d'une plaque en FGM.

Les hypothèses de la présente théorie raffinée des plaques sont les suivantes :

- L'origine du système de coordonnées cartésiennes est prise à la surface neutre de la plaque FGM.
- Les déplacements sont petits par rapport à l'épaisseur de la plaque et, en conséquence les déformations impliquées sont infinitésimales.
- Le déplacement transverse  $w$  contient deux composantes de flexion  $w_b$  et de cisaillement  $w_s$ . Ces composantes sont en fonction des coordonnées  $x, y$  et du temps  $t$  seulement.

(III.5)

$$w(x, y, z_{ns}, t) = w_b(x, y, t) + w_s(x, y, t)$$

- La contrainte normale transversale  $\sigma_z$  est négligeable devant la contrainte plane  $\sigma_x$  et  $\sigma_y$ .
- Le déplacement  $u$  dans la direction  $x$  et Le déplacement  $v$  dans la direction  $y$  sont définis par superposition des déplacements dus aux effets d'extension (déformations de membrane), de flexion et de cisaillement.

$$u = u_0 + u_b + u_s, v = v_0 + v_b + v_s,$$

(III.6)

- Les composantes de flexion  $u_b$  et  $v_b$  (déplacements de flexion) sont supposées similaires aux déplacements donnés par la théorie classique des plaques. Par conséquent, les expressions de  $u_b$  et  $v_b$  peuvent être données comme suit :

$$u_b = -z_{ns} \frac{\partial w_b}{\partial x}, v_b = -z_{ns} \frac{\partial w_b}{\partial y}, \quad (\text{III.7})$$

- À partir de la composante de déplacements  $u_s$  et  $v_s$  (déplacements de cisaillement) qui donnent lieu, en relation avec (ws) aux variations sinusoïdales des déformations de cisaillement  $\gamma_{xz}$ ,  $\gamma_{yz}$  donc aux contraintes  $\tau_{xz}$ ,  $\tau_{yz}$  se dérive la composante de déformation  $\gamma_{xz}$ ,  $\gamma_{yz}$  qui varie suivant une forme hyperbolique à travers l'épaisseur de la plaque, tout en assurant la condition de nullité des contraintes de cisaillement  $\tau_{xz}$  aux surfaces inférieure et supérieure de la plaque. Par conséquent, l'expression pour  $u_s$  et  $v_s$  respectivement peut être donnée comme :

$$u_s = -f(z_{ns}) \frac{\partial w_s}{\partial x}, v_s = -f(z_{ns}) \frac{\partial w_s}{\partial y}, \quad (\text{III.8})$$

$$\text{Où } f(z_{ns}) = \frac{1}{n} \left( \frac{2}{h} \right)^{n-1} (z_{ns} + C)^n \quad (\text{III.9})$$

### III.2.3 Équations cinématiques et constitutives

En se basant, sur les hypothèses de la section précédente, le champ de déplacement de la théorie développée à quatre variables d'ordre n peut être obtenu en utilisant les équations (III.5) – (III.9) comme :

$$u(x, y, z_{ns}, t) = u_0(x, y, t) - z_{ns} \frac{\partial w_b}{\partial x} - f(z_{ns}) \frac{\partial w_s}{\partial x}, \quad (\text{III.10a})$$

$$v(x, y, z_{ns}, t) = v_0(x, y, t) - z_{ns} \frac{\partial w_b}{\partial y} - f(z_{ns}) \frac{\partial w_s}{\partial y}, \quad (\text{III.10b})$$

$$w(x, y, z_{ns}, t) = w_b(x, y, t) + w_s(x, y, t), \quad (\text{III.10c})$$

Les relations cinématiques peuvent être écrites de la manière suivante, le champ de déformations se déduit alors des déplacements de l'Eq. (III.10) soit :

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \varepsilon_x^0 + z_{ns} k_x^b + f(z_{ns}) k_x^s, \\ \varepsilon_y &= \varepsilon_y^0 + z_{ns} k_y^b + f(z_{ns}) k_y^s, \end{aligned} \quad (\text{III.11a})$$

$$\begin{aligned} \gamma_{xy} &= \gamma_{xy}^0 + z_{ns} k_{xy}^b + f(z_{ns}) k_{xy}^s, \\ \gamma_{yz} &= g(z_{ns}) \gamma_{yz}^s, \\ \gamma_{xz} &= g(z_{ns}) \gamma_{xz}^s, \end{aligned} \quad (\text{III.11b})$$

Où

$$\begin{aligned} \varepsilon_x^0 &= \frac{\partial u_0}{\partial x}, k_x^b = -\frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2}, k_x^s = -\frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2}, \\ \varepsilon_y^0 &= \frac{\partial v_0}{\partial y}, k_y^b = -\frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2}, k_y^s = -\frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2}, \\ \gamma_{xy}^s &= \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x}, k_{xy}^b = -2 \frac{\partial^2 w_b}{\partial x \partial y}, k_{xy}^s = -2 \frac{\partial^2 w_s}{\partial x \partial y}, \\ \gamma_{xz}^s &= \frac{\partial w_s}{\partial x}, \gamma_{yz}^s = \frac{\partial w_s}{\partial y}, g(z_{ns}) = 1 - f'(z_{ns}) \text{ Et } f'(z_{ns}) = \frac{df(z_{ns})}{dz_{ns}}, \end{aligned} \quad (\text{III.11c})$$

$$g(z_{ns}) = 1 - \frac{df(z_{ns})}{dz_{ns}} = 1 - \frac{(z_{ns} + C)^n}{(z_{ns} + C)} \left( \frac{2}{h} \right)^{n-1}$$

Pour les FGM élastiques et isotropes, les relations constitutives (relations contraintes –déformations) peuvent être écrites comme suit :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (\text{III.12})$$

Dans lesquelles  $(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{yx})$  et  $(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{yx})$  sont respectivement les composantes des contraintes et des déformations. En utilisant les propriétés des matériaux, définies dans l'équation 2, les coefficients de rigidité  $Q_{ij}$  peuvent avoir l'expression suivante:

$$Q_{11}(z_{ns}) = Q_{22}(z_{ns}) = \frac{E(z_{ns})}{(1-\nu^2)}, \quad (\text{III.13a})$$

$$Q_{12}(z_{ns}) = \nu Q_{11}(z_{ns}), \quad (\text{III.13b})$$

$$Q_{44}(z_{ns}) = Q_{55}(z_{ns}) = Q_{66}(z_{ns}) = \frac{E(z_{ns})}{2(1+\nu)}, \quad (\text{III.13c})$$

### III.2.4 Équations gouvernantes

Les équations de mouvement de la plaque FGM peuvent être exprimées en utilisant le principe d'énergie d'Hamilton (**Reddy, 1984**), dans ce cas le principe est utilisé pour dériver les équations du mouvement dans le domaine du déplacement approprié.

La formulation analytique de ce principe peut être énoncée de la manière suivante :

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (U + V - T) dt = 0 \quad (\text{III.14})$$

ou encore

$$0 = \int_0^T (\delta U + \delta V - \delta K) dt$$



Où  $t$  est le temps ;  $t_1$  et  $t_2$  sont les temps initial et final, respectivement ;  $\delta U$  est la variation virtuelle de l'énergie de déformation ;  $\delta V$  est la variation virtuelle de l'énergie potentielle (variation du travail déduit des forces externes) ; et  $\delta T$  (ou  $\delta K$ ) est la variation virtuelle de l'énergie cinétique.

La variation de l'énergie de déformation de la plaque peut être comme suit :

$$\delta U = \int_V (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz}) dx dy dz, \quad (\text{III.15})$$

Soit alors :

$$\begin{aligned} \delta U &= \int_{\Omega} \int_{\frac{h-C}{2}}^{\frac{h+C}{2}} [\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz} + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz}] dz_{ns} d\Omega \\ &= \int_{\Omega} [N_x \delta \varepsilon_x^0 + N_y \delta \varepsilon_y^0 + N_{xy} \delta \varepsilon_{xy}^0 + M_x^b \delta k_x^b + M_y^b \delta k_y^b + M_{xy}^b \delta k_{xy}^b \\ &\quad + M_x^s \delta k_x^s + M_y^s \delta k_y^s + M_{xy}^s \delta k_{xy}^s + S_{yz}^s \delta \gamma_{yz}^s + S_{xz}^s \delta \gamma_{xz}^s] d\Omega \end{aligned}$$

Où  $\Omega$  (ou  $A$ ) est la surface supérieure et  $V$  est le volume ( $V=z\Omega$ )

La variation de l'énergie potentielle (variation dans le travail produit par les forces appliquées) par l'application de la charge transversale  $q$  peut être écrite comme suit :

$$\delta V = - \int_A q \delta (w_b + w_s) dx dy, \quad (\text{III.16})$$

Avec  $d\Omega = dx dy$  et  $dV = dx dy dz$

$q$  désigne la charge transversale appliquée.

La variation de l'énergie cinétique peut être exprimée par :

$$\delta T = \int_V \left\{ \begin{aligned} &\rho(z_{ns}) \left[ \ddot{u}_0 - z \frac{\partial \dot{w}_b}{\partial x} - f \frac{\partial \dot{w}_s}{\partial x} \right] \delta \left[ u_0 - z \frac{\partial w_b}{\partial x} - f \frac{\partial w_s}{\partial x} \right] + \\ &\left[ \ddot{v}_0 - z \frac{\partial \dot{w}_b}{\partial y} - f \frac{\partial \dot{w}_s}{\partial y} \right] \delta \left[ v_0 - z \frac{\partial w_b}{\partial y} - f \frac{\partial w_s}{\partial y} \right] + (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) \delta (w_b + w_s) \end{aligned} \right\} dx dy dz, \quad (\text{III.17})$$

Soit donc :

$$\begin{aligned} \delta T &= \int_{-\frac{h}{2}-c}^{\frac{h}{2}-c} \int_{\Omega} [\dot{u} \delta \dot{u} + \dot{v} \delta \dot{v} + \dot{w} \delta \dot{w}] \rho(z_{ns}) d\Omega dz_{ns} \\ &= \int_A \{ I_0 [\dot{u}_0 \delta \dot{u}_0 + \dot{v}_0 \delta \dot{v}_0 + (\dot{w}_b + \dot{w}_s) (\delta \dot{w}_b + \delta \dot{w}_s)] \\ &\quad - I_1 \left( \dot{u}_0 \frac{\partial \delta \dot{w}_b}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}_b}{\partial x} \delta \dot{u}_0 + \dot{v}_0 \frac{\partial \delta \dot{w}_b}{\partial y} + \frac{\partial \dot{w}_b}{\partial y} \delta \dot{v}_0 \right) \\ &\quad - J_1 \left( \dot{u}_0 \frac{\partial \delta \dot{w}_s}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}_s}{\partial x} \delta \dot{u}_0 + \dot{v}_0 \frac{\partial \delta \dot{w}_s}{\partial y} + \frac{\partial \dot{w}_s}{\partial y} \delta \dot{v}_0 \right) \\ &\quad + I_2 \left( \frac{\partial \dot{w}_b}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{w}_b}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}_b}{\partial y} \frac{\partial \delta \dot{w}_b}{\partial y} \right) + K_2 \left( \frac{\partial \dot{w}_s}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{w}_s}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}_s}{\partial y} \frac{\partial \delta \dot{w}_s}{\partial y} \right) \\ &\quad + J_2 \left( \frac{\partial \dot{w}_b}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{w}_s}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}_s}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{w}_b}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}_b}{\partial y} \frac{\partial \delta \dot{w}_s}{\partial y} + \frac{\partial \dot{w}_s}{\partial y} \frac{\partial \delta \dot{w}_b}{\partial y} \right) \} d\Omega \end{aligned}$$

Où le point « . » Indique la dérivation par rapport à la variable de temps ;  $\rho(z_{ns})$  est la densité de masse, et  $(I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, I_6)$  sont les inerties massiques définies par :

$$(I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, I_6) = \int_{-h/2-c}^{h/2-c} (1, z_{ns}, z_{ns}^2, f(z_{ns}), z_{ns} f(z_{ns}), [f(z_{ns})]^2) \rho(z_{ns}) dz_{ns}, \quad (\text{III.18})$$

$N$ ,  $M$  et  $S$  sont les efforts résultants définis par :

$$\begin{pmatrix} N_x, N_y, N_{xy} \\ M_x^b, M_y^b, M_{xy}^b \\ M_x^s, M_y^s, M_{xy}^s \end{pmatrix} = \int_{-h/2-c}^{h/2-c} (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) \begin{pmatrix} 1 \\ z_{ns} \\ f(z_{ns}) \end{pmatrix} dz_{ns}, \quad (\text{III.19a})$$

$$(S_{xz}^s, S_{yz}^s) = \int_{-h/2-c}^{h/2-c} (\tau_{xz}, \tau_{yz}) g(z_{ns}) dz_{ns}, \quad (\text{III.19b})$$

En remplaçant les expressions de  $\delta U$ ,  $\delta V$  et  $\delta T$  des équations (III.15), (III.16), et (III.17) dans l'équation (III.14) et en intégrant par partie suivant l'épaisseur de la plaque et le temps, tout en rassemblant les coefficients  $\delta u_0$ ,  $\delta v_0$ ,  $\delta w_b$  et  $\delta w_s$  les équations de mouvement (équations de déplacements) pour la plaque FGM sont obtenues:

$$\delta u_0 : \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = -I_1 \ddot{u}_0 + I_2 \ddot{w}_b + I_4 \ddot{w}_s, \quad (\text{III.20a})$$

$$\delta v_0 : \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} = -I_1 \ddot{v}_0 + I_2 \ddot{w}_b + I_4 \ddot{w}_s, \quad (\text{III.20b})$$

$$\delta w_b : \frac{\partial^2 M_x^b}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^b}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^b}{\partial y^2} + q = -I_1 (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) - I_2 \left( \frac{\partial^3 u_0}{\partial t^3} + \frac{\partial^3 v_0}{\partial t^3} \right) + I_3 \left( \frac{\partial^2 \ddot{w}_b}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \ddot{w}_b}{\partial y^2} \right) + I_5 \left( \frac{\partial^2 \ddot{w}_s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \ddot{w}_s}{\partial y^2} \right), \quad (\text{III.20c})$$

$$\delta w_s : \frac{\partial^2 M_x^s}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^s}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^s}{\partial y^2} + \frac{\partial S_{xz}^s}{\partial x} + \frac{\partial S_{yz}^s}{\partial y} + q = -I_1 (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) - I_4 \left( \frac{\partial^3 u_0}{\partial t^3} + \frac{\partial^3 v_0}{\partial t^3} \right) + I_5 \left( \frac{\partial^2 \ddot{w}_b}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \ddot{w}_b}{\partial y^2} \right) + I_6 \left( \frac{\partial^2 \ddot{w}_s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \ddot{w}_s}{\partial y^2} \right), \quad (\text{III.20d})$$

En utilisant l'équation (III.9) dans l'équation (III.12) et ensuite le résultat trouvé dans l'équation (III.19), les expressions des efforts résultants de la plaque FGM sont liées aux déformations par la relation suivantes :

$$\begin{Bmatrix} N, \\ M^b \\ M^s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 & B^s \\ 0 & D & D^s \\ B^s & D^s & H^s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon \\ k^b \\ k^s \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} S_{yz}^s \\ S_{xz}^s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{44}^s & 0 \\ 0 & A_{55}^s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^s \\ \gamma_{xz}^s \end{Bmatrix} \quad (\text{III.21})$$

$$S = A^s \gamma$$

Il est clair que la matrice de couplage est nulle ;  $B=0$  (idem pour un matériau isotrope), le calcul matriciel se rafraichit alors.

Ou

$$\mathbf{N} = \{N_x, N_y, N_{xy}\}^t, \mathbf{M}^b = \{M_x^b, M_y^b, M_{xy}^b\}^t, \mathbf{M}^s = \{M_x^s, M_y^s, M_{xy}^s\}^t \quad (\text{III.22a})$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \{\varepsilon_x^0, \varepsilon_y^0, \gamma_{xy}^0\}, \mathbf{k}^b = \{k_x^b, k_y^b, k_{xy}^b\}, \mathbf{k}^s = \{k_x^s, k_y^s, k_{xy}^s\}, \quad (\text{III.22b})$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix}, \mathbf{D} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix}, \mathbf{B}^s = \begin{bmatrix} B_{11}^s & B_{12}^s & 0 \\ B_{12}^s & B_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & B_{66}^s \end{bmatrix}, \quad (\text{III.22c})$$

$$\mathbf{D}^s = \begin{bmatrix} D_{11}^s & D_{12}^s & 0 \\ D_{12}^s & D_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & D_{66}^s \end{bmatrix}, \mathbf{H}^s = \begin{bmatrix} H_{11}^s & H_{12}^s & 0 \\ H_{12}^s & H_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & H_{66}^s \end{bmatrix}, \quad (\text{III.22d})$$

Ou

Les composantes de rigidité  $A_{ij}, B_{ij}$ , etc. , sont définis comme :

$$\begin{Bmatrix} A_{11} & D_{11} & B_{11}^s & D_{11}^s & H_{11}^s \\ A_{12} & D_{12} & B_{12}^s & D_{12}^s & H_{12}^s \\ A_{66} & D_{66} & B_{66}^s & D_{66}^s & H_{66}^s \end{Bmatrix} = \int_{-h/2-c}^{h/2-c} Q_{11}(1, z_{ns}^2, f(z_{ns}), z_{ns}f(z_{ns}), f^2(z_{ns})) \begin{Bmatrix} 1 \\ \nu \\ \frac{1-\nu}{2} \end{Bmatrix} dz_{ns}, \quad (\text{III.23a})$$

et

$$(A_{22} D_{22}, B_{22}^s, D_{22}^s H_{22}^s) = (A_{11} D_{11}, B_{11}^s, D_{11}^s H_{11}^s), \quad (\text{III.23b})$$

$$A_{44}^s = A_{55}^s = \int_{-h/2-c}^{h/2-c} Q_{55} [g(z_{ns})]^2 dz_{ns}, \quad (\text{III.23c})$$

Les équations (III.20) peuvent être exprimées en termes de déplacements ( $u_0, v_0, w_b, w_s$ ) en utilisant les équations (III.10), (III.11), (III.12) et (III.19) comme suit:

$$\begin{aligned} \delta u_0 : & A_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + A_{66} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} - B_{11}^s \frac{\partial^3 w_s}{\partial x^3} - (B_{12}^s + 2B_{66}^s) \frac{\partial^3 w_s}{\partial x \partial y^2} \\ & = -I_1 \ddot{u}_0 + I_2 \ddot{w}_b + I_4 \ddot{w}_s, \end{aligned} \quad (\text{III.24a})$$

$$\begin{aligned} \delta v_0 : & (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + A_{66} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + A_{22} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} - B_{22}^s \frac{\partial^3 w_s}{\partial y^3} - (B_{12}^s + 2B_{66}^s) \frac{\partial^3 w_s}{\partial x^2 \partial y} \\ & = -I_1 \ddot{v}_0 + I_2 \ddot{w}_b + I_4 \ddot{w}_s, \end{aligned} \quad (\text{III.24b})$$

$$\begin{aligned} \delta w_b : & -D_{11} \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^4} - 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^2 \partial y^2} - D_{22} \frac{\partial^4 w_b}{\partial y^4} - D_{11}^s \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^4} - 2(D_{12}^s + 2D_{66}^s) \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^2 \partial y^2} \\ & - D_{22}^s \frac{\partial^4 w_s}{\partial y^4} = -I_1 (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) - I_2 (\ddot{u}_0 + \ddot{v}_0) + I_3 \nabla^2 \ddot{w}_b + I_5 \nabla^2 \ddot{w}_s, \end{aligned} \quad (\text{III.24c})$$

$$\begin{aligned} \delta w_s : & B_{11}^s \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} + (B_{12}^s + 2B_{66}^s) \frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial y^2} + (B_{12}^s + 2B_{66}^s) \frac{\partial^3 v_0}{\partial x^2 \partial y} + B_{22}^s \frac{\partial^3 v_0}{\partial y^3} - D_{11}^s \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^4} - 2(D_{12}^s + 2D_{66}^s) \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^2 \partial y^2} \\ & - D_{22}^s \frac{\partial^4 w_b}{\partial y^4} - H_{11}^s \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^4} - 2(H_{12}^s + 2H_{66}^s) \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^2 \partial y^2} - H_{22}^s \frac{\partial^4 w_s}{\partial y^4} + A_{35}^s \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} + A_{44}^s \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} = -I_1 (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) - \\ & I_4 (\ddot{u}_0 + \ddot{v}_0) + I_5 \nabla^2 \ddot{w}_b + I_6 \nabla^2 \ddot{w}_s, \end{aligned} \quad (\text{III.24d})$$

### III.3. solution analytique

#### III.3.1. solution exacte pour une plaque FGM simplement appuyée

Les plaques rectangulaires sont généralement classées en fonction du type d'appuis utilisé. Nous sommes concernés ici par la solution exacte des équations. (III.24a-d) pour une plaque FGM simplement appuyée. Les conditions aux limites suivantes sont imposées au niveau des bords :

$$v_0 = w_b = w_s = \frac{\partial w_b}{\partial y} = \frac{\partial w_s}{\partial y} = N_x = M_x^b = M_x^s = 0 \quad \text{pour : } x = -a/2, a/2 \quad (\text{III.25a})$$

$$u_0 = w_b = w_s = \frac{\partial w_b}{\partial x} = \frac{\partial w_s}{\partial x} = N_y = M_y^b = M_y^s = 0 \quad \text{pour : } y = -b/2, b/2 \quad (\text{III.25b})$$

Pour résoudre ce problème, **Navier** suppose que la charge mécanique  $q(x, y)$  est sous la forme d'une double série trigonométrique de Fourier :

$$q(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} q_{mn} \sin(\lambda x) \sin(\mu y) \quad (\text{III.26})$$

Les équations de mouvement admettent les solutions de Navier pour les plaques simplement appuyées. Les variables  $(u_0, v_0, w_b \text{ et } w_s)$  peuvent être écrits en supposant les variations suivantes :

$$\begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_b \\ w_s \end{Bmatrix} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \begin{Bmatrix} U_{mn} \cos(\lambda x) \sin(\mu y) \cdot e^{i\omega t} \\ V_{mn} \sin(\lambda x) \cos(\mu y) \cdot e^{i\omega t} \\ W_{bmn} \sin(\lambda x) \sin(\mu y) \cdot e^{i\omega t} \\ W_{smn} \sin(\lambda x) \sin(\mu y) \cdot e^{i\omega t} \end{Bmatrix} \quad (\text{III.27})$$

Où  $U_{mn}, V_{mn}, W_{bmn}$ , et  $W_{smn}$  sont des paramètres arbitraires à déterminer, et  $\omega$  est la fréquence propre associée au  $(m, n)$  nième mode propre, et  $\lambda = m\pi/a$ ,  $\mu = n\pi/b$ ,

Dans le cas de la charge avec répartition sinusoidale, on a:

$$m=n=1 \text{ et } q_{11} = q_0$$

$q_0$  : représente l'intensité de la charge transversale au centre de la plaque.

La charge  $q$  devient alors :

$$q = q_0 \sin(\lambda x) \sin(\mu y),$$

Pour l'analyse de flexion :

$$[C]\{\Delta\} = \{P\}, \quad (\text{III.28a})$$

Pour l'analyse de vibration :

$$([C] - \omega^2 [G])\{\Delta\} = \{0\}, \quad (\text{III.28b})$$

Où  $\{\Delta\} = \{U, V, W_b, W_s\}^t$ ,  $\{P\} = \{0, 0, -q, -q\}^t$

$[C]$  et  $[G]$  se réfère à la rigidité en flexion et la matrice de masse

$\omega$  étant la fréquence de vibration correspondante.

La substitution des équations (III.26) et (III.27) dans l'équation (III.24) permet d'obtenir la solution analytique qui peut être de la forme suivante :

$$[C] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{bmatrix}, [G] = \begin{bmatrix} m_{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_{33} & m_{34} \\ 0 & 0 & m_{34} & m_{44} \end{bmatrix} \quad (\text{III.29})$$

Pour lesquels :

$$a_{11} = A_{11}\lambda^2 + A_{66}\mu^2$$

$$a_{12} = \lambda \mu (A_{12} + A_{66})$$

$$a_{13} = -\lambda [B_{11}\lambda^2 + (B_{12} + 2B_{66})\mu^2] = 0$$

$$a_{14} = -\lambda [B_{11}^s\lambda^2 + (B_{12}^s + 2B_{66}^s)\mu^2] \quad (\text{III.30a})$$

$$a_{22} = A_{66}\lambda^2 + A_{22}\mu^2$$

$$a_{23} = -\mu [(B_{12} + 2B_{66})\lambda^2 + B_{22}\mu^2] = 0$$

$$a_{24} = -\mu [(B_{12}^s + 2B_{66}^s)\lambda^2 + B_{22}^s\mu^2]$$

$$a_{33} = D_{11}\lambda^4 + 2(D_{12} + 2D_{66})\lambda^2\mu^2 + D_{22}\mu^4$$

$$a_{34} = D_{11}^s\lambda^4 + 2(D_{12}^s + 2D_{66}^s)\lambda^2\mu^2 + D_{22}^s\mu^4$$

$$a_{44} = H_{11}^s\lambda^4 + 2(H_{12}^s + 2H_{66}^s)\lambda^2\mu^2 + H_{22}^s\mu^4 + A_{55}^s\lambda^2 + A_{44}^s\mu^2$$

$$m_{11} = m_{22} = I_1$$

$$m_{33} = I_1 + I_3(\lambda^2 + \mu^2) \quad (\text{III.30b})$$

$$m_{13} = \lambda I_2, \quad m_{14} = \lambda I_3,$$

$$m_{23} = \mu I_2, \quad m_{24} = \mu I_3$$

$$m_{34} = I_1 + I_5(\lambda^2 + \mu^2)$$

$$m_{44} = (I_1 + I_6(\lambda^2 + \mu^2))$$

### III.4 Conclusion

Dans ce chapitre, L'analyse de la vibration libre des plaques simplement appuyées en matériau fonctionnellement graduées (FGM) est examinée par une nouvelle théorie de cisaillement raffinée des plaques. Cette théorie prend en compte les effets de cisaillement transversal et la distribution parabolique des contraintes de cisaillement suivant l'épaisseur de la plaque et satisfait les conditions de nullité de la contrainte de cisaillement sur les faces supérieure et inférieure de la plaque FGM sans l'aide de facteur de correction de cisaillement. Le module de Young est supposé varie dans la direction de l'épaisseur de la plaque FGM en fonction d'une simple loi de puissance. Les équations de mouvement ont été trouvées en utilisant le principe d'énergie d'Hamilton.

Les solutions sont obtenues en utilisant les équations de Navier, et les fréquences fondamentales sont trouvées en résolvant le problème en valeurs propres. Une validation des résultats de cette nouvelle théorie des plaques raffinées ainsi qu'une étude paramétrique seront faites ultérieurement.



# CHAPITRE IV

---

VALIDATION ET COMPARAISON DES RESULTATS

### IV.1.Introduction

Dans ce chapitre nous considérons cette théorie raffinée en tenant compte d'une fonction de cisaillement  $f(z)$  qui permet d'une part de prendre en compte le cisaillement transverse, et d'autre part d'en approcher la forme de distribution suivant l'épaisseur. Du fait que les caractéristiques matérielles sont variables suivant l'épaisseur donc l'axe neutre va être décalé vers le coté le plus consistant ; ce concept a été pris en compte pour éviter les problèmes de couplage.

Nous essayons de comparer les résultats de cette étude à ceux de la littérature en vue de vérifier l'exactitude de la théorie développée pour prédire le comportement dynamique du aux vibrations libres des PGF simplement supportées.

Faire, par la suite ; une étude paramétrique afin de voir l'influence de la géométrie et de la variation matérielle sur le comportement dynamique de ce type des plaques en matériau FGM.

### IV.2. Résultats numériques et discussion

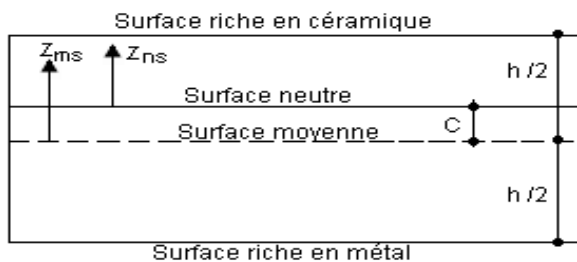
Dans cette étude, l'analyse de la vibration libre des plaques FGM simplement appuyées par la présente théorie est effectuée pour discussion.

Deux types de PGF (Al/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> et Al/ZrO<sub>2</sub>) sont considérés dans cette étude, dont les propriétés matérielles (physiques et mécaniques) sont rapportées dans le tableau 1. Le coefficient de Poisson est pris égal à 0.3.

Et leurs propriétés changent à travers l'épaisseur de la plaque selon la loi de puissance P-FGM. Les surfaces inférieures et supérieures de la plaque FGM sont riches de métal et de céramique respectivement.

**Tableau. IV.1:** propriétés des matériaux utilisés dans la plaque FGM

Propriétés	Métal aluminum (Al)	Céramique	
		Alumine (Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub> )	Zircone (ZrO <sub>2</sub> )
$E$ (GPa)	70	380	200
$\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )	2702	3800	5700



**Figure. IV.1:** Position de la surface du milieu et de la surface neutre pour une plaque FGM

#### IV.2.1. Analyse dynamique

La précision et l'efficacité de la présente théorie de cisaillement est montrée par l'analyse de la vibration libre des plaques en FGM. Les propriétés des matériaux utilisés dans la présente analyse sont :

- Céramique ( $P_c$ , Zircon,  $Al_2O_3$ ) :  $E_c = 200 \text{ GPa}$ ,  $\nu = 0.3$ ,  $\rho_c = 5700 \text{ Kg/m}^3$ ,
- Métal ( $P_m$ , Aluminium,  $Al$ ) :  $E_m = 70 \text{ GPa}$ ,  $\nu = 0.3$ ,  $\rho_m = 2702 \text{ Kg/m}^3$ ,

Les résultats numériques sont présentés en termes des fréquences fondamentales naturelles adimensionnelles :

$$\bar{\beta} = \omega h \sqrt{\rho_m / E_m}$$

$$\hat{\beta} = \omega h \sqrt{\rho_c / E_c}$$

$$\bar{\omega} = \frac{\omega a^2}{h} \sqrt{\rho_c / E_c},$$

La première vérification est établie pour les plaques carrées à base de  $Al/ZrO_2$  comme constituant avec des valeurs différentes du rapport ( $a/h$ ) et l'indice ( $k$ ), voir Tableau IV.2.

**Tableau IV.2 :** comparaison du paramètre de fréquence fondamentale  $\bar{\beta}$  d'Al/ZrO<sub>2</sub> pour la plaque carrée en FGM pour différentes valeurs de k et du rapport  $a/h$

Method	$k = 0$		$k = 1$			$a / h$		
	$a / h = \sqrt{10}$	$a / h = 10$	$a / h = 5$	$a / h = 10$	$a / h = 20$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 5$
3D (Vel and Batra, 2004)	0.4658	0.0578	0.2192	0.0596	0.0153	0.2197	0.2211	0.2225
Matsunaga (2008)	0.4658	0.0578	0.2285	0.0619	0.0158	0.2264	0.2270	0.2281
Hosseini-Hashemi et al. (2011a)	0.4623	0.0577	0.2276	0.0619	0.0158	0.2256	0.2263	0.2272
Present $n = 3$	0.4622	0.0576	0.2276	0.0618	0.0158	0.2256	0.2262	0.2271
Present $n = 5$	0.4634	0.0577	0.2280	0.0618	0.0158	0.2262	0.2269	0.2280
Present $n = 7$	0.4651	0.0577	0.2284	0.0619	0.0158	0.2267	0.2276	0.2287
Present $n = 9$	0.4665	0.0577	0.2287	0.0619	0.0158	0.2271	0.2281	0.2293

Les paramètres des fréquences fondamentales  $\bar{\beta}$  obtenus en utilisant la théorie développée sont comparés avec les valeurs issues de la théorie exacte 3D de Vel and Batra (2004), de la théorie d'ordre élevé 2D de Matsunaga (2008), de la théorie de Reddy basée sur les solutions issues de méthode analytique de Hosseini-Hashemi et al. (2011a).

Il peut être observé que, pour des plaques avec  $k = 0$ , c'est à dire des plaques isotropes avec des constituants totalement céramiques, les résultats obtenus avec la théorie développée sont en très bon accord avec les résultats issus d'autres solutions (Matsunaga, 2008 ; Vel et Batra, 2004 ; Hosseini-Hashemi et al. 2011a). Toutefois, pour les PGF avec des valeurs non nulles de  $(k)$ , les résultats de la présente théorie raffinée à quatre variables d'ordre  $n$  et les autres théories des déformations de cisaillement sont supérieurs que ceux obtenus des solutions exactes 3D de Vel et Batra (2004).

Plusieurs paramètres sont variés pour étudier le comportement dynamique de ce type de plaque. Les quatre premières fréquences naturelles pour le mode fondamental de vibration ( $m = n = 1$ ) d'une plaque carrée en FGM ( $Al/Al_2O_3$ ) sont comparées avec les résultats de la littérature.

La fréquence fondamentale et les paramètres  $\hat{\beta}$  de la troisième petite fréquence sont présentés dans le Tableau IV.3 pour les plaques carrées à base de Al/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> et des rapports (a/h) variant de 5 à 20 et le facteur (k) de 0 à 10. Il est constaté que les résultats obtenus par la théorie raffinée développée à quatre variables d'ordre n sont en très bon accord avec les résultats rapportés par Hosseini-Hashemi et al. (2011a) et basées sur la théorie de Reddy.

Les paramètres  $\bar{\omega}$  des quatre petites fréquences obtenues par la théorie raffinée développée à quatre variables d'ordre n sont comparés avec les résultats obtenus par Hosseini-Hashemi et al. (2011b) et basés sur la première théorie des déformations de cisaillement, voir Tableau IV. 4. Des plaques rectangulaires (b =2a) à base de Al/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> et des rapports (a/h) variant de 5 à 20 et k de 0 à 10. Il est constaté que la première théorie des déformations de cisaillement FSDTP (Hosseini-Hashemi et al. 2011b) donne des résultats assez précis pour les modes supérieurs de vibrations et pour des plaques avec des épaisseurs légèrement épaisses.

**Tableau IV.3 :** comparaison du paramètre de fréquence naturelle  $\bar{\beta}$  d'Al/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> pour la plaque carrée en FGM pour différentes valeurs de  $k$  et du rapport  $a/h$

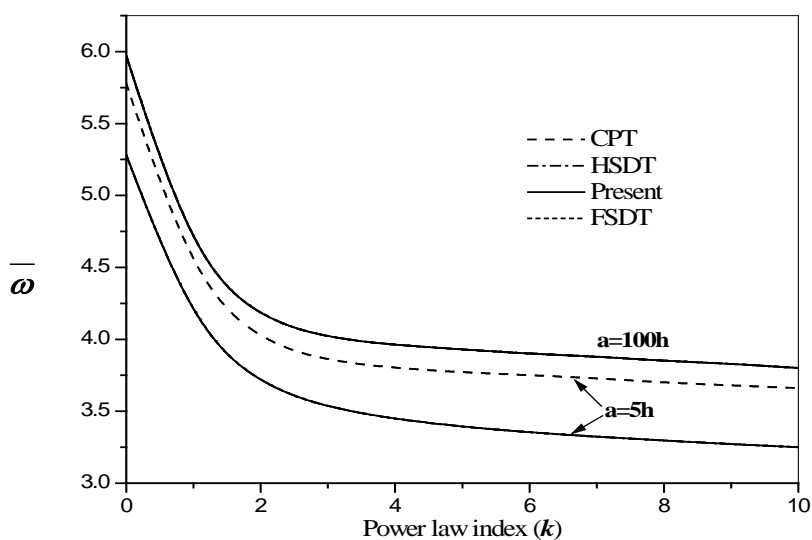
$a/h$	Mode no ( $m, n$ )	Method	$k$				
			0	0.5	1	4	10
5	(1,1)	Hosseini-Hashemi et al. (2011a)	0.2113	0.1807	0.1631	0.1378	0.1301
		Present $n = 3$	0.2112	0.1807	0.1631	0.1378	0.1300
		Present $n = 5$	0.2115	0.1809	0.1633	0.1385	0.1306
		Present $n = 7$	0.2120	0.1812	0.1636	0.1390	0.1312
		Present $n = 9$	0.2123	0.1815	0.1638	0.1394	0.1316
	(1,2)	Hosseini-Hashemi et al. (2011a)	0.4623	0.3989	0.3607	0.2980	0.7271
		Present $n = 3$	0.4622	0.3988	0.3606	0.2979	0.2770
		Present $n = 5$	0.4634	0.3997	0.3614	0.3004	0.2790
		Present $n = 7$	0.4651	0.4010	0.3626	0.3026	0.2812
		Present $n = 9$	0.4665	0.4020	0.3635	0.3042	0.2830
	(2,2)	Hosseini-Hashemi et al. (2011a)	0.6688	0.5803	0.5254	0.4284	0.3948
		Present $n = 3$	0.6688	0.5802	0.5254	0.4283	0.3948
		Present $n = 5$	0.6707	0.5817	0.5267	0.4326	0.3980
		Present $n = 7$	0.6739	0.5842	0.5288	0.4365	0.4019
		Present $n = 9$	0.6764	0.5860	0.5305	0.4393	0.4050
10	(1,1)	Hosseini-Hashemi et al. (2011a)	0.0577	0.0490	0.0442	0.0381	0.0364
		Present $n = 3$	0.0576	0.0490	0.0441	0.0380	0.0363
		Present $n = 5$	0.0577	0.0490	0.0442	0.0381	0.0364
		Present $n = 7$	0.0577	0.0490	0.0442	0.0381	0.0364
		Present $n = 9$	0.0577	0.0491	0.0442	0.0382	0.0365
	(1,2)	Hosseini-Hashemi et al. (2011a)	0.1377	0.1174	0.1059	0.0903	0.0856
		Present $n = 3$	0.1376	0.1173	0.1059	0.0902	0.0856
		Present $n = 5$	0.1378	0.1174	0.1060	0.0905	0.0859
		Present $n = 7$	0.1379	0.1176	0.1061	0.0908	0.0861
		Present $n = 9$	0.1381	0.1177	0.1062	0.0910	0.0863
	(2,2)	Hosseini-Hashemi et al. (2011a)	0.2113	0.1807	0.1631	0.1378	0.1301
		Present $n = 3$	0.2112	0.1807	0.1631	0.1378	0.1300
		Present $n = 5$	0.2115	0.1809	0.1633	0.1385	0.1306
		Present $n = 7$	0.2120	0.1812	0.1636	0.1390	0.1312
		Present $n = 9$	0.2123	0.1815	0.1638	0.1394	0.1316
20	(1,1)	Hosseini-Hashemi et al. (2011a)	0.0148	0.0125	0.0113	0.0098	0.0094
		Present $n = 3$	0.0147	0.0125	0.0113	0.0098	0.0094
		Present $n = 5$	0.0148	0.0125	0.0113	0.0098	0.0094
		Present $n = 7$	0.0148	0.0125	0.0113	0.0098	0.0094
		Present $n = 9$	0.0148	0.0125	0.0113	0.0098	0.0094

**Tableau IV.4 :** Effet de l'indice de la fraction volumique sur les fréquences fondamentales  $\bar{\omega}$  d'Al/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> de la plaque rectangulaire FGM ( $b = 2a$ ) avec  $a/h = 5$  et  $a/h = 10$

$a/h$	Mode no ( $m, n$ )	Method	$k$						
			0	0.5	1	2	5	8	10
5	1 (1,1)	Hosseini-Hashemi et al. (2011b)	3.4409	2.9322	2.6473	2.4017	2.2528	2.1985	2.1677
		Present $n = 3$	3.4412	2.9346	2.6475	2.3948	2.2271	2.1696	2.1406
		Present $n = 5$	3.4451	2.9374	2.6500	2.3987	2.2363	2.1781	2.1475
		Present $n = 7$	3.4499	2.9409	2.6532	2.4026	2.2435	2.1856	2.1545
		Present $n = 9$	3.4536	2.9436	2.6556	2.4055	2.2486	2.1912	2.1598
	2 (1,2)	Hosseini-Hashemi et al. (2011b)	5.2802	4.5122	4.0773	3.6953	3.4492	3.3587	3.3094
		Present $n = 3$	5.2813	4.5179	4.0780	3.6805	3.3938	3.2964	3.2513
		Present $n = 5$	5.2896	4.5240	4.0836	3.6889	3.4134	3.3143	3.2807
		Present $n = 7$	5.3003	4.5318	4.0906	3.6975	3.4290	3.3305	3.2807
		Present $n = 9$	5.3087	4.5379	4.0961	3.7041	3.4402	3.3427	3.2923
	3 (1,3)	Hosseini-Hashemi et al. (2011b)	8.0710	6.9231	6.2636	5.6695	5.2579	5.1045	5.0253
		Present $n = 3$	8.0748	6.9366	6.2662	5.6389	5.1424	4.9757	4.9055
		Present $n = 5$	8.0920	6.9493	6.2777	5.6562	5.1825	5.0119	4.9345
		Present $n = 7$	8.1150	6.9662	6.2930	5.6748	5.2154	5.0456	4.9653
		Present $n = 9$	8.1331	6.9795	6.3050	5.6889	5.2390	5.0710	4.9896
	4 (2,1)	Hosseini-Hashemi et al. (2011b)	9.7416	8.6926	7.8711	7.1189	6.5749	5.9062	5.7518
		Present $n = 3$	10.1163	8.7138	7.8761	7.0750	6.4073	6.1846	6.0954
		Present $n = 5$	10.1409	8.7322	7.8926	7.0998	6.4648	6.2360	6.1363
		Present $n = 7$	10.1749	8.7575	7.9154	7.1272	6.5127	6.2848	6.1810
		Present $n = 9$	10.2018	8.7773	7.9335	7.1483	6.5474	6.3219	6.2163
10	1 (1,1)	Hosseini-Hashemi et al. (2011b)	3.6518	3.0983	2.7937	2.5386	2.3998	2.3504	2.3197
		Present $n = 3$	3.6517	3.0990	2.7936	2.5364	2.3916	2.3410	2.3110
		Present $n = 5$	3.6530	3.0998	2.7944	2.5376	2.3945	2.3438	2.3132
		Present $n = 7$	3.6544	3.1009	2.7954	2.5388	2.3968	2.3462	2.3155
		Present $n = 9$	3.6556	3.1017	2.7961	2.5397	2.3984	2.3480	2.3172
	2 (1,2)	Hosseini-Hashemi et al. (2011b)	5.7693	4.8997	4.4192	4.0142	3.7881	3.7072	3.6580
		Present $n = 3$	5.7694	4.9014	4.4192	4.0089	3.7682	3.6845	3.6368
		Present $n = 5$	5.7724	4.9035	4.4211	4.0119	3.7754	3.6913	3.6423
		Present $n = 7$	5.7760	4.9061	4.4235	4.0148	3.7809	3.6971	3.6477
		Present $n = 9$	5.7788	4.9081	4.4253	4.0170	3.7849	3.7014	3.6519
	3 (1,3)	Hosseini-Hashemi et al. (2011b)	9.1876	7.8145	7.0512	6.4015	6.0247	5.8887	5.8086
		Present $n = 3$	9.1880	7.8189	7.0514	6.3886	5.9764	5.8340	5.7574
		Present $n = 5$	9.1953	7.8241	7.0562	6.3959	5.9938	5.8502	5.7706
		Present $n = 7$	9.2042	7.8304	7.0620	6.4031	6.0073	5.8644	5.7837
		Present $n = 9$	9.2111	7.8354	7.0665	6.4086	6.0169	5.8749	5.7938
	4 (2,1)	Hosseini-Hashemi et al. (2011b)	11.8310	10.0740	9.0928	8.2515	7.7505	7.5688	7.4639
		Present $n = 3$	11.8314	10.0809	9.0933	8.2308	7.6731	7.4812	7.3821
		Present $n = 5$	11.8431	10.0893	9.1009	8.2425	7.7009	7.5070	7.4030
		Present $n = 7$	11.8576	10.0997	9.1104	8.2543	7.7226	7.5298	7.4240
		Present $n = 9$	11.8688	10.1078	9.1177	8.2631	7.7381	7.5466	7.4402

La figure IV.2 illustre la variation des paramètres de la fréquence fondamentale d'une plaque rectangulaire par rapport au paramètre ( $k$ ). Les rapports ( $a/h$ ) sont pris égaux à 5 (plaque épaisse) et 100 (plaque mince). Il est constaté que les paramètres de la période fondamentale diminuent lorsque le paramètre ( $k$ ) diminue. Cela peut avoir lieu car l'accroissement du paramètre ( $k$ ) fait accroître la fraction volumique des constituants métalliques. De même, les paramètres de la fréquence des plaques entièrement en céramique sont considérablement plus importants que ceux des PGF. En plus, les résultats prédits par la théorie développée, la théorie de déformations de cisaillement d'ordre élevé HSDPT basée sur la théorie de Reddy et la première théorie des déformations de cisaillement FSDPT sont identiques, par contre la théorie classique des plaques CPT surestime ces mêmes paramètres des PGF. La différence entre les résultats de la théorie classique des plaques et les résultats de la théorie développée est importante pour les plaques épaisses et négligeables pour les plaques minces.

$\bar{\omega}$

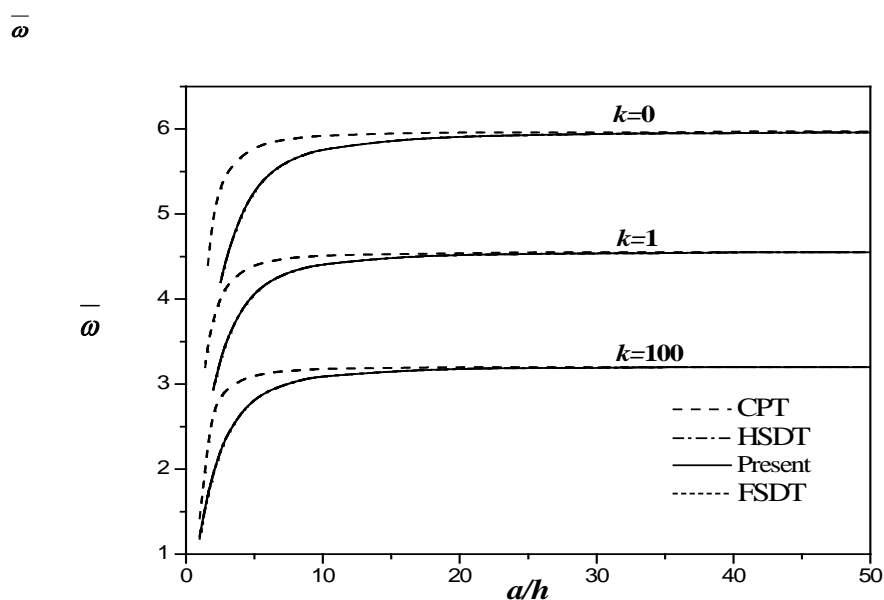


**Figure. IV.2:** Fréquence adimensionnelle  $\bar{\omega}$  en fonction du rapport  $a/h$  pour différentes indices de loi de puissance des plaques carrées en FGM ( $n = 3$ ).

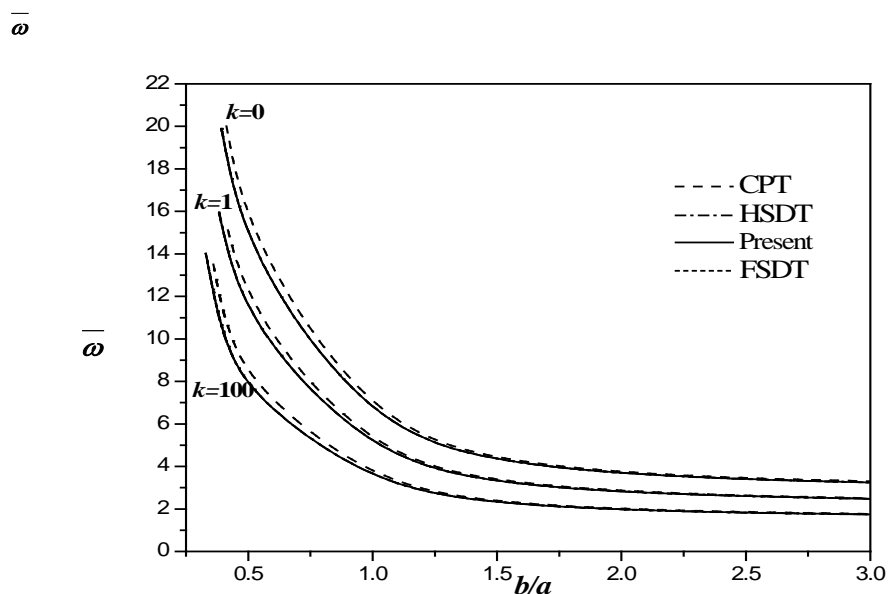


La variation des paramètres de la fréquence fondamentale des plaques carrées avec le rapport ( $a/h$ ) est illustrée dans la figure IV.3. Il est constaté que les paramètres de la fréquence fondamentale augmentent avec l'augmentation du rapport ( $a/h$ ) quel que soit la valeur de l'indice de la fraction volumique  $k$  et cette variation devient importante lorsque le rapport ( $a/h$ ) est plus petit que 5. De même, la théorie classique des plaques CPT surestime les paramètres de la fréquence fondamentale des PGF. La différence entre les courbes obtenues par la théorie classique des plaques et celle de la théorie développée est négligeable lorsque le rapport ( $a/h$ ) est plus grand que 10.

L'effet de forme ( $b/a$ ) sur les paramètres de la fréquence fondamentale des plaques ( $a/h = 10$ ) est illustrée dans la figure IV.4. Il est constaté que les paramètres de la fréquence diminuent avec l'accroissement du rapport de forme.



**Figure. IV.3:** Effet du rapport  $a/h$  sur la fréquence adimensionnelle  $\bar{\omega}$  pour différentes indices de loi de puissance des plaques carrées en FGM ( $n = 3$ ).



**Figure. IV.4 :** Fréquence adimensionnelle  $\bar{\omega}$  en fonction du rapport  $b/a$  pour différents indices de loi de puissance des plaques carrées en FGM ( $a = 10h$ ,  $n = 3$ ).

On voit une augmentation des fréquences de vibration avec l'augmentation de l'élanement de la plaque pour différente valeur de l'indice de la fraction volumique  $k$ .

### IV.3.Conclusion

Cette étude présente une nouvelle théorie de cisaillement de déformation raffinée pour l'analyse du comportement dynamique des plaques fonctionnellement gradués.

Les solutions de Navier sont présentées pour analyser la vibration libre des plaques FGM.

Cette théorie est également utilisée pour la prédiction des fréquences fondamentales des plaques FGM. L'influence jouée par les rapports de dimensionnement et de l'élanement de la plaque est étudiée. La présente théorie de cisaillement fournit des résultats en excellent accord avec les résultats disponibles par rapport aux autres théories des plaques HSDPT. En conclusion, on peut dire que la présente théorie proposée est précise et simple pour résoudre le comportement dynamique des plaques FGM.

## CONCLUSION GENERALE ET PERSPECTIVES

---

### Conclusion générale

Une théorie raffinée à quatre variables d'ordre  $n$  est développée dans cette étude en vue d'analyser le comportement dynamique en vibrations libres des plaques à gradients fonctionnels. La théorie développée considère comme hypothèse la division du déplacement transversal en un déplacement de flexion et un déplacement de cisaillement. Cette hypothèse permet de réduire le nombre des inconnues et des équations constitutives en comparaison avec les théories existantes dans la littérature et devient simple à utiliser. La solution des équations de déplacement, développées en utilisant le principe de Hamilton pour traiter les problèmes de vibrations dynamiques libres des plaques simplement supportées, est obtenue analytiquement.

Il est constaté que la théorie développée est non seulement précise mais permet également de produire une approche simple et facile pour la simulation du comportement des vibrations libres des plaques à gradients fonctionnels (PGF).

L'objectif de notre étude consiste à analyser le comportement des plaques en matériaux à gradients de propriétés sous l'effet du cisaillement transverse. La mise en évidence de l'effet du cisaillement transverse dans cette étude nous a permis de décrire avec une bonne précision les champs de contraintes et de déformations induites, pour cela nous avons traité:

- Les résultats obtenus par la théorie raffinée sont presque identiques avec ceux calculés à partir des théories de déformation de cisaillement.
- Il est montré que les fréquences fondamentales naturelles diminuées avec la diminution de la rigidité du matériau, qui est due à l'augmentation de l'indice de puissance  $k$  et avec l'augmentation du rapport  $a/h$  et  $a/b$  de la plaque.

En conclusion, on peut dire que la théorie de cisaillement des plaques raffinées proposée est exacte et simple pour la résolution du comportement de vibration des plaques en FGM. Le développement de la présente théorie est également considéré pour des conditions aux limites générales.

En perspective à ce travail, nous envisagerons d'étudier le problème de cisaillement, et d'utiliser la nouvelle fonction raffinée pour les cas suivants :

- ✓ La prise en compte de l'effet de la température dans l'étude de la vibration ;
- ✓ Prise en compte de la distribution graduelle arbitraire du matériau FGM ;
- ✓ Utilisation de la théorie raffinée pour d'autres types d'appuis ;
- ✓ Effet du cisaillement transverse sur le comportement mécanique (flexion) des plaques FGM;
- ✓ Utiliser cette théorie pour l'analyse d'autre type des plaques telle que les plaques sandwichs.
- ✓ Il s'avère indispensable de recourir à la méthode des éléments finis qui permet de résoudre des problèmes plus compliquées comparativement à la méthode analytique.

REFERENCES  
BIBLIOGRAPHIQUES

---

## Références bibliographiques

Abrate, S. (2006), "Free vibration buckling and static deflections of functionally graded plates", *Compos. Sci. Technol.*, **66**, 2383–2394.

BachirBouiadjra, M., Houari, M.S.A., Tounsi, A. (2012), "Thermal Buckling of Functionally Graded Plates According to a Four-Variable Refined Plate Theory", *Journal of Thermal Stresses*, **35**, 677–694.

Batra, R.C., Jin, J. (2005), "Natural frequencies of a functionally graded anisotropic rectangular plate", *J. Sound Vib.*, **282**, 509–516.

Bodaghi, M., Saidi, A.R. (2010), "Levy-type solution for bending analysis of thick functionally graded rectangular plates based on higher-order shear deformation plate theory", *Appl. Math. Model.*, **34**, 3659–3670.

Bouderba, B., Houari, M.S.A., Tounsi, A. (2013), "Thermomechanical bending response of FGM thick plates resting on Winkler-Pasternak elastic foundations", *Steel and Composite Structures*, **14**(1), 85 – 104.

Bourada, M., Tounsi, A., Houari, M.S.A., Adda Bedia, E.A. (2012), "A new four-variable refined plate theory for thermal buckling analysis of functionally graded sandwich plates", *Journal of Sandwich Structures and Materials*, **14**, 5 – 33.

Bouremama, M., Houari, M.S.A., Tounsi, A., Kaci, A., Adda Bedia, E.A. (2013), "A new first shear deformation beam theory based on neutral surface position for functionally graded beams", *Steel and Composite Structures*, (In press).

Chen, C.S., Fung, C.P., Yu, S.Y. (2008), "The investigation on the vibration and stability of functionally graded plates", *J. Reinf. Plast. Compos.*, **27**, 1435–1447.

Chen, C.S., Hsu, C.Y., Tzou, G.J. (2009), "Vibration and stability of functionally graded plates based on a higher order deformation theory", *J. Reinf. Plast. Compos.*, **28**, 1215–1234.

Chi, S.H., Chung, Y.L. (2006a), "Mechanical behavior of functionally graded material plates under transverse load. Part I: analysis", *Int J Solids Struct.*, **43**, 3657–3674.

Chi, S.H., Chung, Y.L. (2006b), "Mechanical behavior of functionally graded material plates under transverse load. Part II: numerical results", *Int J Solids Struct.*, **43**, 3675–3691.

Curiel Sosa, J.L., Munoz, J.J., Pinho, S.T., Anwar Bég, O. (2012), "(XFEM) Simulation of damage in laminates", *Applied Sciences and Engineering (ECCOMAS 2012)*, J.Eberhardsteiner et al. (eds.), Vienna, Austria, September 10-14 (2012).

Curiel Sosa, J.L., Anwar Bég, O., Liebana Murillo, J.M. (2013), "Finite element analysis of structural instability using a switching implicit-explicit technique", *Int. J. Comp. Methods Eng. Sci. Mech.*, **14**, 452 – 464.

Fahsi, B., Kaci, A., Tounsi, A., Adda Bedia, E.A. (2012), "A four variable refined plate theory for nonlinear cylindrical bending analysis of functionally graded plates under thermomechanical loadings", *Journal of Mechanical Science and Technology*, **26**(12), 4073 – 4079.

Fekrar, A., El Meiche, N., Bessaim, A., Tounsi, A., Adda Bedia, E.A. (2012), "Buckling analysis of functionally graded hybrid composite plates using a new four variable refined plate theory", *Steel and Composite Structures*, **13**(1), 91 – 107.

Hadji, L., Atmane, H.A., Tounsi, A., Mechab, I., Adda Bedia, E.A. (2011), "Free vibration of functionally graded sandwich plates using four variable refined plate theory", *Applied Mathematics and Mechanics*, **32**, 925-942.

Hosseini-Hashemi, S., Fadaee, M., Atashipour, S.R. (2011a), "Study on the free vibration of thick functionally graded rectangular plates according to a new exact closed-form procedure", *Compos. Struct.*, **93**(2), 722–735.

Hosseini-Hashemi, S., Fadaee, M., Atashipour, S.R. (2011b), "A new exact analytical approach for free vibration of Reissner–Mindlin functionally graded rectangular plates", *Int. J. Mech. Sci.*, **53**(1), 11–22.

Houari, M.S.A., Benyoucef, S., Mechab, I., Tounsi, A., Adda Bedia, E.A. (2011), "Two variable refined plate theory for thermoelastic bending analysis of functionally graded sandwich plates", *Journal of Thermal Stresses*, **34**, 315 – 334.

Koizumi, M. (1997), "FGM activities in Japan", *Compos. Part B.*, **28**, 1–4.

Lü, C.F., Lim, C.W., Chen, W.Q. (2009a), "Semi-analytical analysis for multi-directional functionally graded plates: 3-D elasticity solutions", *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, **79**, 25–44.

Lü, C.F., Lim, C.W., Chen, W.Q. (2009b), "Exact solutions for free vibrations of functionally graded thick plates on elastic foundations", *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, **16**, 576–584.

Matsunaga, H. (2008), "Free vibration and stability of functionally graded plates according to a 2-D higher-order deformation theory", *Composite Structures.*, **82**, 499–512.

Matsunaga, H. (2009), "Stress analysis of functionally graded plates subjected to thermal and mechanical loadings", *Compos. Struct.*, **87**, 344–357.



- Ould Larbi, L., Kaci, A., Houari, M.S.A., Tounsi, A. (2013), “An efficient shear deformation beam theory based on neutral surface position for bending and free vibration of functionally graded beams”, *Mechanics Based Design of Structures and Machines*, **41**, 421–433.
- Rashidi, M.M., Shooshtari, A., Anwar Bég, O. (2012), “Homotopy perturbation study of nonlinear vibration of Von Kármán rectangular plates”, *Computers and Structures*, **106/107**, 46 – 55.
- Reddy, J.N. (2000), “Analysis of functionally graded plates”, *Int. J. Numer. Method Eng.*, **47**, 663–684.
- Shahrjerdi, A., Bayat, M., Mustapha, F., Sapuan, S.M., Zahari, R. (2010), “Second-order shear deformation theory to analyze stress distribution for solar functionally graded plates”, *Mechanics Based Design of Structures and Machines*, **38**, 348–361.
- Sobhy, M. (2013), “Buckling and free vibration of exponentially graded sandwich plates resting on elastic foundations under various boundary conditions”, *Composite Structures*, **99**, 76–87.
- Suresh, S., and Mortensen, A. (1998), “Fundamentals of Functionally Graded Materials”, (IOM Communications Ltd., London,).
- Talha, M, Singh, BN. (2010), “Static response and free vibration analysis of fgm plates using higher order shear deformation theory”, *Appl Math Model*, **34**, 3991–4011.
- Vel, S.S., Batra, R.C. (2004), “Three-dimensional exact solution for the vibration of functionally graded rectangular plates”, *J. Sound Vib.* **272**(3–5), 703–730.
- Xiang, S., Jin, Y.X., Bi, Z.Y., et al. (2011), “A n-order shear deformation theory for free vibration of functionally graded and composite sandwich plates”, *Composite Structures*, **93**, 2826–2832.
- Yahoobi, H., and Feraiidooon, A. (2010), “Influence of neutral surface position on deflection of functionally graded beam under uniformly distributed load”, *World Applied Sciences Journal*, **10**(3), 337 – 341.
- Yaghoobi, H., Torabi, M. (2013), “Exact solution for thermal buckling of functionally graded plates resting on elastic foundations with various boundary conditions”, *Journal of Thermal Stresses*, **36**, 869–894.
- Yaghoobi, H., Yaghoobi, P. (2013), “Buckling analysis of sandwich plates with FGM face sheets resting on elastic foundation with various boundary conditions: An analytical approach”, *Meccanica*, **48**.

Zenkour, A.M. (2006), "Generalized shear deformation theory for bending analysis of functionally graded plates", *Applied Mathematical Modelling*, **30**, 67–84.

Zhang, D.G., Zhou, Y.H. (2008), "A Theoretical analysis of FGM thin plates based on physical neutral surface", *Computational Materials Science*, **44**, 716 – 720.