

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE

UNIVERSITÉ IBN KHALDOUN DE TIARET



FACULTÉ DES SCIENCES APPLIQUÉES
DÉPARTEMENT DE GÉNIE CIVIL

Mémoire de fin d'études en vue de l'obtention du diplôme de Master

Spécialité : Génie civil

Option : Structures

Présenté par :

BESBES Dhaouia Meriem.

CHABIL Rania

Sujet du mémoire

Comportement statique des poutres poreuses en FGM

Soutenu publiquement le 29 /06/2022 devant le jury composé de :

Mme. KHELIFA Z

Président

Mr. TLIDJI Y

Rapporteur

Mr. DRAICHE K

Examineur

Mme. OUAZIR K

Examineur

PROMOTION : 2021/2022

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

1438



Remerciements



Tout d'abord nous remercions avant tous, Allah le tout puissant qui nous a donné le courage, et la volonté pour atteindre notre objectif, et tous les enseignants qui ont contribué à notre formation durant tous les cycles et particulièrement le chef de département Mr. BOUAKAZ Khaled.

*Nous remercions vivement, notre promoteur Mr : TLIDJI YUCEF de nous avoir pris en charges, son aide et ses précieux conseils.
Ainsi ne saurons oublier de remercier les honorables membres du Jury qui nous ont fait l'immense honneur de Présider et d'examiner ce modeste travail.
A tous ceux ou celles qui nous ont apportés leur soutien, trouvent ici, l'expression de nos vives et sincères reconnaissances.*

A tous les professeurs et à tous nos collègues du département de Génie Civil de l'Université de Tiaret, nous dirons merci pour les encouragements et le soutien qu'ils n'ont cessé de nous donner.

Nous ne saurons oublier de remercier les honorables Membres du Jury qui nous ont fait l'immense honneur de Présider et d'examiner ce Modeste travail.

Merci



Dédicace



dédicace 01

Au nom de dieu Allah

Avec toute ma reconnaissance Je dédie ce modeste travail :

- mes parents :

*Aucun hommage ne pourrait être à la hauteur de l'amour Dont ils
. ne cessent de me combler. Que dieu leur procure bonne santé et long*

*- ma sœur **Chabil hiba** et mon frère*

*- toute ma famille , Et mon ami (**Mariem**)*

-Ainsi qu'a tous mes amis et collègues de l'institut de génie civil

- tous ceux qui ont contribué de près ou de loin pour que ce projet

soit possible, je vous dis merci

dédicace 02

Je dédie ce travail

*- à **ma maman** qui m'a soutenu et encouragé durant cet étude.*

*- à ma grande mère et ce qui ont partagé avec moi tous les moments d'émotion lors de la
réalisation de ce travail et surtout de mentionner ma chère sœur "**Samia**" et chère amie*

*"**Rania**" que je l'aime très fort.*

*- à **ma famille et mes proches** et à ce qui me donnent de l'amour et de la vivacité.*

*- Et finalement je dédie bien sur ce ouvrage à mon soutien et la prunelle de mes yeux, **Mon**
chér époux pour toute la confiance et le soutien constants sans oublier mes enfants et ma*

*joie "**taim**" et "**louay**". Je vous remercie énormément .*

Résumé

L'objectif de ce mémoire de fin d'étude est l'analyse de l'effet de porosité sur le comportement statique des poutres à gradient de porosité. Dans de ce travail sont utilisés trois formes de distribution de la porosité, deux lois de distribution non uniforme et l'autre uniforme. La porosité est supposé varie seulement a travers l'épaisseur des poutres étudiées. Les relations cinématique de plusieurs théories de poutre sont supposées et le principe d'Hamilton est utilisé pour dériver les équations d'équilibre. Le résultat numérique montre l'effet de l'indice de porosité et le rapport longueur-épaisseur sur les déplacements et les contraintes des poutres à gradient de porosité.

Mots clés: Poutre, statique, Déplacement, Contrainte, Porosité

Abstract

The objective of this dissertation is to analyze the effect of porosity on the static behavior of beams with a porosity gradient. In this work are used three forms of porosity distribution, two forms are non-uniform and the other one is uniform. The porosity is assumed to vary only through the thickness of the studied beams. The kinematic relationships of the beams are assumed and Hamilton's principle is used to derive equilibrium equations. The numerical result shows the effect of the porosity index and the length-thickness ratio on the displacements and stresses of beams with porosity gradient.

Keywords: Beam, Static, Displacement, Stresses, Porosity

الهدف من هذه الرسالة هو تحليل تأثير المسامية على السلوك الساكن لمساند ذات التدرج المسامي. في هذا العمل تم استخدام ثلاثة أشكال لتوزيع المسامية ، شكلين غير منتظيمان والآخر منتظم. من المفترض أن تختلف المسامية فقط من خلال سمك المسند المدروسة. يتم افتراض العلاقات الحركية للرافدة ويتم استخدام مبدأ هاملتون لاشتقاق معادلات التوازن. توضح النتيجة العددية تأثير مؤشر المسامية ونسبة الطول إلى السماكة على إزاحة و إجهاد الرافدة ذات التدرج المسامي

كلمات مفتاحية: رافدة ، سكون ، إزاحة ، إجهاد ،المسامية

Sommaire

Résumé	i
Abstract	ii
ملخص	iii
Liste des tableaux	viii
Liste des figures	ix
Liste des symboles	xi
Introduction générale.....	1
Chapitre 1.Généralités sur les matériaux FGM	3
1.1 Introduction :	3
1.2 Définition :	3
1.3 Historique :	4
1.4 Domaines d'applications des matériaux fonctionnellement gradués :	5
1.4.1 Aérospatial :	5
1.4.2 Médecine :	5
1.4.3 Défense :	6
1.4.4 Énergie nucléaire :	6
1.4.5 Optoélectronique :	6
1.4.6 Articles de sports:	6
1.5 Type des matériaux fonctionnellement gradués :	7
1.5.1 Gradient de composition chimique des Matériaux FGM :	7
1.5.2 Gradient de porosité des Matériaux FGM :	8

1.5.3	Gradient de la microstructure des Matériaux FGM :	9
1.6	Propriétés matérielles des poutres FGM :	10
1.6.1	Fonction de puissance (P-FGM) :	10
1.6.2	Fonction sigmoïde(S-FGM) :	11
1.6.3	Fonction exponentielle (E-FGM) :	12
1.6.4	Fonction puissance symétrique SP-FGM :	13
1.7	Loi de mélange :	14
1.8	Porosité	15
1.9	Caractérisation de la porosité	16
1.10	Effet de la porosité sur les propriétés mécaniques des matériaux	16
1.10.1	Porosité et module d'élasticité longitudinale (le module de Young/porosité)	16
1.10.2	Porosité et le module de cisaillement	18
1.10.3	Porosité et le coefficient de Poisson ν	18
1.11	Poutres poreuses fonctionnellement graduées	19
1.12	Conclusion	21
Chapitre 2. Théories des poutres		22
2.1	Introduction :	22
2.2	Historique :	22
2.3	Comportement des poutres composite	22

2.4	Modèles des poutres	23
2.5	Hypothèses cinématiques de la théorie des poutres :	24
2.5.1	-Modèle d'Euler Bernoulli (Classical Beam Theory- CBT) :.....	24
2.5.2	Modèle de Timoshenko (First shear deformation beam theory-FBT).	26
2.5.3	Modèle d'ordre élevé (High shear deformation beam theory HSDBT) :.....	27
2.6	. Méthodes de résolution.....	31
2.6.1	. Procédure de Navier :	31
2.6.2	Méthode des éléments finis.....	31
2.6.3	Méthode de Rayleigh-Ritz.....	31
2.7	Conclusion :	31
Chapitre 3.Développement		Mathématique
.....		32
3.1	Introduction :	32
3.2	Modèle mathématique :	32
3.3	Champ de déplacement :	33
3.4	Le champ des contraintes :	34
3.5	Équation du mouvement.....	36
3.6	Solution de Navier.....	38
3.7	Conclusion.....	39
Chapitre 4.Résultats		et discussions
.....		41

Sommaire

4.1	Introduction	41
4.2	Résultats numériques et discussion	41
4.3	Conclusions	51
	Conclusion générales.....	52

Liste des tableaux

Tableau (4.1) Comparaison des déplacements et des contraintes d'une poutre FGM simplement appuyée soumise à une charge uniformément répartie42

Tableau (4.2) Comparaison des déplacements et des contraintes des poutres poreuses simplement appuyées soumises à une charge uniformément répartie43

Tableau (4.3) Comparaison des déplacements et des contraintes des poutres poreuses simplement appuyées soumises à une charge sinusoïdale47

Liste des figures

Figure (1.1)	Matériau FGM poreaux.....	9
Figure (1.2)	Géométrie d'une poutre FGM.....	10
Figure (1.3)	Lois de puissance (P-FGM).....	11
Figure (1.4)	Fonction sigmoïde S-FGM.....	12
Figure (1.5)	Variation du module de Young en fonction de l'épaisseur (E-FGM).....	13
Figure (1.6)	Lois de puissance symétrique (SP-FGM).....	14
Figure (1.7)	Modèle analytique pour une couche de matériau à gradient fonctionnel....	15
Figure (2.1)	Schéma d'un élément de poutre (Berthelot 2012).....	23
Figure (2.2)	cinématique de la poutre d'Euler Bernoulli	25
Figure (2.3)	Cinématique de la poutre de Timoshenko (Dufort 2001).....	26
Figure (2.4)	Cinématique de la poutre d'ordre élevé.	28
Figure (2.5)	Variation de la fonction de gauchissement $f(z)$	30
Figure (2.6)	Variation de la fonction de cisaillement $f'(z)$	30
Figure (3.1)	: Géométrie des poutre a gradient de porosité.....	32
Figure (4.1)	Variation du déplacement axial adimensionnel à travers l'épaisseur de la poutre sous chargement uniformément répartie	45
Figure (4.2)	Variation de la contrainte normale adimensionnelle à travers l'épaisseur de la poutre sous charge uniformément répartie	45
Figure (4.3)	Variation de la contrainte de cisaillement adimensionnelle à travers l'épaisseur de la poutre sous charge uniformément répartie	46
Figure (4.4)	Variation du déplacement axial adimensionnel à travers l'épaisseur de la poutre sous charge sinusoïdale.....	48
Figure (4.5)	Variation de la contrainte normale adimensionnelle à travers l'épaisseur de la poutre sous charge sinusoïdale.....	49

Figure (4.6) Variation du déplacement axial adimensionnel à travers l'épaisseur de la poutre sous charge sinusoïdale50

Liste des symboles

$\nu(z)$ Fraction volumique

$E(z)$ Module de Young en fonction de l'épaisseur

E_m Module Young (Métal)

E_c Module Young (Céramique)

p Indice de puissance

ρ_z Masse volumique en fonction de l'épaisseur

ρ_m Masse volumique (Métal)

ρ_{cz} La masse volumique (Céramique)

h Épaisseur de la p outre

ℓ Longueur de la p outre

σ_x, τ_{xz} Composantes des contraintes

$\varepsilon_x, \gamma_{xz}$ Composantes des déformations

n Nombre naturel

Q_{ij} Coefficients de rigidité réduite

ν Coefficient de Poisson

u Déplacement suivant x

w Déplacement suivant z

u_0, w_0 Déplacements au niveau du plan moyen ($z = 0$)

$f(z)$ La fonction de forme (Fonction de gauchissement)

φ Rotation de la normale

$()$, Dérivée par rapport à x

$f'(z)$ La première dérivée de la fonction de forme

δ Variationnel

E Énergie de déformation

T Énergie cinétique

N_x Effort normal

M_x moments de flexion

S_x Moment supplémentaire du au cisaillement transverse

Q_{xz} Effort de cisaillement

∂ Dérivée partielle

A_{11}, B_{11}, D_{11} Coefficients de rigidité d'extension

$A_{11}^a, B_{11}^a, F_{11}^a$ Coefficients de rigidité de flexion

A_{55}^s Coefficients de rigidité de cisaillement transverse

m Nombre de mode

$[K]$ Matrice de rigidité

det Déterminant

$[]$ Matrice

$\{ \}$ Vecteur

$[M]$ Matrice de masse

Introduction générale

Les matériaux les plus recherchés aujourd'hui sont ceux qui sont capables de coupler la légèreté et la rigidité. Face à ces exigences, les matériaux composites représentent, une solution idéale de par leur multifonctionnalité intégrée. De nombreux secteurs d'ingénierie tels que l'aérospatial, l'automobile et le génie civil s'y intéressent fortement.

Les Matériaux à gradients caractéristiques (en anglais : Functionally Graded Material "F.G.M"); sont des matériaux composites produits en changeant continuellement des fractions volumiques dans une certaine direction pour obtenir une structure bien définie. Ce processus de calibrage des matériaux permet de produire des produits industriels avec un continuum, évitant ainsi les phénomènes de concentration de contraintes, de fissuration et de délaminage qui se produisent dans les composites conventionnels.

Le comportement statique des structures FGM a été étudié à l'aide de théories allant de la théorie classique des poutres à la théorie des déformations de cisaillement d'ordre supérieur. Les équations différentielles obtenues sont résolues par méthode analytique (méthode de Navier, méthode de Levy) et méthode numérique (méthode de RAYLEIGH Ritz, méthode des éléments finis). Les chercheurs ont différentes lois de distribution décrivant la variation des propriétés matérielles de la structure FGM ; généralement par leur épaisseur..

Des pores peuvent apparaître dans les matériaux fonctionnellement gradués (FGM) lors de la fabrication en raison des problèmes techniques qui entraînent des micro-vides dans ces matériaux influant sur leur comportement. Les structures poreuses FG présentent des nombreuses combinaisons intéressantes de propriétés mécaniques. L'objectif de ce travail est d'utiliser trois formes de distribution de porosité, la première étant uniforme (Poutres 1) et les deux autres étant non uniforme (Poutre 2, et 3).

Pour atteindre cet objectif, notre mémoire est divisée en quatre chapitres. Le premier chapitre présente les matériaux classés selon leurs fonctions, propriétés, principaux modes de fabrication et domaines d'application et on présentera la porosité, on étudiera l'effet de la porosité propriétés mécaniques des matériaux, tel que (le module de cisaillement /porosité), (le

coefficient de Poisson ν /porosité) et en particulier l'effet de la porosité sur le module d'élasticité longitudinal (le module de Young/porosité).

Le deuxième chapitre est consacré à la présentation des différentes théories de déformation de poutre, en commençant par les plus anciennes comme la théorie classique et la théorie du premier ordre, et les théories d'ordre élève des déformations en cisaillement. Dans le troisième chapitre, un développement mathématique du problème de flexion de poutres à gradient de propriétés en utilisant la théorie d'ordre supérieur a été développé. Trois lois de distribution décrivent la variation de la porosité des poutres à travers l'épaisseur. L'équation d'équilibre est obtenue selon le principe d'Hamilton. Ces équations sont résolues à l'aide de la solution de Navier.

Le quatrième chapitre détail les résultats numérique obtenus pour l'analyse de statique des poutres rectangulaires simplement appuyées a gradient de porosité. Ce travail s'achèvera par une conclusion générale qui résumera l'ensemble des travaux et permet aussi de revenir sur les résultats importants mis en avant ainsi que des perspectives.

Chapitre 1. Généralités sur les matériaux FGM

1.1 Introduction :

Le développement des composites a permis d'associer les propriétés spécifiques de différents matériaux au sein d'une même pièce. Deuxièmement, l'optimisation locale de ces propriétés en liant des matériaux durs à la surface de matériaux résistants, tels que provoque des problèmes d'interface. Cette transition compositionnelle abrupte peut provoquer une concentration locale de contraintes. La solution à la transition continue des propriétés souhaitées avec un gradient de composition permet d'atténuer cette spécificité en utilisant un matériau avec un gradient caractéristique de

(Anglais: Functionally graded material "F.G.M"). Le matériau FGM est un matériau à gradient fonctionnel, un matériau macroscopiquement non uniforme. Ils sont généralement fabriqués à partir d'un mélange de métal et de céramique. Ces types de matériaux ont reçu beaucoup d'attention ces derniers temps car ils réduisent les différences de propriétés des matériaux et réduisent les contraintes thermiques.

1.2 Définition :

Un matériau FGM représente une combinaison de deux matériaux ou plus (généralement métal +céramique). Un FGM produit en changeant sans interruption les fractions volumiques dans la direction de l'épaisseur pour l'obtention d'un volume bien déterminé.

Généralement, les FGM sont fabriqués à partir des matériaux isotropes tels que les céramiques et les métaux. Un FGM permet de combiner plusieurs caractéristiques telles que la légèreté, la bonne résistance mécanique et chimique, une maintenance réduite, une dureté plus élevée de rupture, et réduit les facteurs d'intensité d'effort.

1.3 Historique :

Le concept d'un matériau à gradient fonctionnel (FGM) a été développé par des chercheurs japonais en 1984. En 1985, un grand nombre de chercheurs des institutions publiques et de l'industrie ont uni leurs efforts pour créer ce nouveau type de matériau. Le principal objectif était de construire l'enveloppe extérieure d'une navette intercontinentale commerciale. Le problème principal à résoudre était le flux de la chaleur important frappant la majorité des surfaces qui sont exposées à la friction par l'air lors de la période de rentrée d'une navette spatiale dans l'atmosphère terrestre et, en même temps protéger l'intérieur contre les surchauffes. En 1987, le gouvernement Japonais a lancé un vaste projet intitulé « la recherche sur la technologie de base pour développement de matériaux à gradient de propriétés et l'étude de la relaxation des contraintes thermiques ». L'intérêt du projet est de développer des matériaux présentant des structures utilisées comme barrière thermique dans les programmes aérospatiaux. Les matériaux constituant les parois des engins spatiaux sont appelés à travailler à des températures de surface de 1800°C ainsi qu'à un gradient de température de l'ordre de 1300°C. A cette année-là, aucun matériau industriel n'était connu pour supporter de telles sollicitations thermomécaniques. **[Koizumi1992]** Trois caractéristiques sont à considérer pour la conception de tels matériaux :

- Résistance thermique et résistance à l'oxydation à haute température de la couche superficielle du matériau.
- Ténacité du matériau coté basse température
- Relaxation effective de la contrainte thermique le long du matériau

[Abdizadeh1997].

L'idée originale des FGM a été proposée pour élaborer un nouveau composite profitant à la fois des propriétés des céramiques (Coté haute température) et des métaux (Coté basse température). A la fin de la première étape (1987-1989),

les chercheurs avaient réussi à fabriquer des petites pièces expérimentales (10 mm d'épaisseur et 30mm de diamètre) pouvant résister à des températures maximales de 2000K (température de surface) et à un gradient de température de 1000K. Dans la seconde étape (1990-1991), le but était de réaliser des pièces de tailles plus grandes et de formes plus complexes par

rapport à celles réalisées dans la première étape .Pendant les années 90, non seulement les champs d'application des FGM s'est développé pour les matériaux de structure fonctionnant à haute température, mais s'est aussi élargi à d'autres applications : biomécaniques, technologie de capteur, optique, etc... On trouve une littérature très importante sur l'utilisation de ce matériau. Cependant, l'utilisation des structures en FGM dans les environnements avec de grands changements de température exige la connaissance des déformations.

1.4 Domaines d'applications des matériaux fonctionnellement gradués :

Le concept des matériaux à gradient évalué est applicable dans des nombreux domaines. Il a été initialement conçu pour l'industrie de l'aéronautique où les FGM ont fourni deux propriétés contradictoires telles que la conductivité thermique et d'isolation thermique dans un matériau. Actuellement elles permettent la production des matériaux légers, forts et durables, et elles sont applicables dans un large intervalle des domaines tels que les matériaux de construction, matériaux de conversion d'énergie, nucléaire et semi-conducteurs.

1.4.1 Aérospatial :

Les matériaux à gradient fonctionnel peuvent être utilisés dans des conditions de haute température avec une de ses constituants à faible conductivité thermique. Ils peuvent résister à des gradients thermiques élevés, ce qui rend les matériaux à gradient fonctionnel appropriée beaucoup dans les structures aérospatiales comme les composants de véhicules spatiaux (moteur de fusée, corps des avions spatiaux.etc...).

1.4.2 Médecine :

. Les FGM a trouvé une large gamme d'application dans le domaine dentaire et orthopédique pour les dents et le remplacement des os.

1.4.3 Défense :

Dans la demande de défense, tels que des plaques de blindage et des gilets pare-balles, la pénétration des matériaux résistants est nécessaire. Une des caractéristiques les plus importantes du matériau à gradient fonctionnel est la capacité à inhiber la propagation des fissures, ce qui rend les matériaux à gradient fonctionnel appropriés pour les applications de défense.

1.4.4 Énergie nucléaire :

Les FGM sont utilisés dans les dispositifs de conversion d'énergie. Ils fournissent également une barrière thermique et ils sont utilisés comme revêtement de protection sur des aubes de turbine dans le moteur à turbine à gaz et aussi dans le générateur thermoélectrique, pile à combustible, réacteurs nucléaires, pastilles de combustible

1.4.5 Optoélectronique :

Les FGM trouvent aussi leur application dans l'optoélectronique comme les matériaux à indice de réfraction gradués et des disques audio-vidéo; support de stockage magnétique, semi-conducteur à bande graduée. Autres domaines d'application sont: produits (matériaux de constructions, corps de voiture, verres de fenêtre), conversion d'énergie (générateur thermoélectrique, convertisseur thermoïonique, pile à combustible), optiques (fibres optiques, lentilles), matières biologiques (implants, peau artificielle), chimique (échangeur de chaleur, tube de chaleur, récipient de réaction).

1.4.6 Articles de sports:

Divers composants et accessoires sportifs peuvent bénéficier de l'utilisation du FGM. Par exemple, pointes en carbure ont été fabriqués pour les chaussures de baseball afin de réduire l'usure. Entre la pointe et de la structure des chaussures une région à matériau gradué a été produite afin de réduire l'impact sur les extrémités [Niino, M., and Kisara, K. 2004.]. Ceci est un excellent exemple comment les FGM pourraient être utilisées pour produire des articles de sport de haute performance. Avec la même idée de réduction d'usure, des outils d'escalade sur glace

tels que crampons et piolets pourraient être gradué avec le carbure de tungstène dans les arêtes vives qui capte la glace. Les outils de l'escalade de rocher auraient également le même avantage de réduire l'usure tels que sur les surfaces. [Hopkinson, N., Hague, R., and Dickens, P. (Eds.). 2006.][Saiyathibrahim, A., Mohamed, N. S. S., and Dhanapal, P. (2015).][Benferhat, R. 2017].

: Autres champs d'applications :Il existe autres domaines d'application des FGM:

- Champ optique (fibre optique, lentille etc...)
- [Champ d'électronique.](#)
- Champ chimique (Échangeur de chaleur, récipient de réacteur, tuyau (pipe) de chaleur, etc...)
- Champ de biomatériaux (peau artificielle, Système de délivrance de médicaments, prothèses, etc...)

1.5 Type des matériaux fonctionnellement gradués :

Au début du développement des matériaux FGM, le concept était d'éliminer l'interface nette qui existait dans le matériau composite traditionnel et de la remplacer par une interface progressivement variable, qui s'expliquait par la composition chimique changeante de ce composite dans cette région d'interface. L'intérêt progressif pour ce type de matériaux a conduit à la mise au point de différents types de FGM. Le type d'application étudiée détermine généralement le type de FGM à utiliser. Les différents types des matériaux FGM en cours de production comprennent à présent le gradient de composition chimique, le gradient de porosité et le gradient de la microstructure. Chacun de ces types des matériaux FGM est décrit en détail dans les sections suivantes.

1.5.1 Gradient de composition chimique des Matériaux FGM :

Il s'agit d'un type des matériaux FGM, dans lesquels la composition chimique varie progressivement en fonction de la position spatiale dans le matériau. Cela pourrait être sous la forme d'une seule phase, ou dans un matériau multi phase. Une FGM monophasée est produite lorsque le composite est fabriqué à partir d'une seule phase, en raison de la solubilité des éléments chimiques d'une phase dans l'autre phase. Cela se produit généralement lors du

processus de frittage [Bharti, I. et al. 2013]. Le changement graduel de la répartition des éléments chimiques dans la phase unique entraîne la formation du matériau fonctionnellement gradué. Selon le diagramme de phase et les limitations thermodynamiques, lorsque certains matériaux sont ajoutés à un autre matériau, le matériau qui a été ajoutée à l'autre matériau serait soluble dans ce matériau sur une gamme de composition et des conditions de mélange. Ce matériau deviendrait ce qu'on appelle un matériau monophasé mais de composition chimique variable en raison de la solubilité. Ce type de FGM est moins habituel. Les matériaux FGM les plus couramment conçus et les plus habituellement utilisés sont ceux qui ont une composition chimique multi phase [Mahmoud, R.M. et al. 2012,2015]. Les phases et la composition chimique on fait varier à travers le volume apparent du matériau. Comme la composition du matériau varie d'un matériau à l'autre, il en résultera différentes phases avec différentes compositions chimiques qui permettraient de réaliser l'application souhaitée, pour laquelle la FGM a été conçue. Les différentes phases produites dépendent de la quantité de composition du matériau de renforcement et des conditions de fabrication, telles que la vitesse de refroidissement et le traitement thermique appliqué à ce matériau. Dans la métallurgie des poudres, le procédé de production de FGM est en plaçant la couche par couche de composition de poudre requise, et cela est suivi par le compactage et le frittage de la poudre par la suite. Au cours du processus de frittage, certaines poudres métalliques vont réagir pour former différents composés et phases chimiques. Celles-ci varieraient en fonction de la position spatiale dans le matériau fonctionnellement gradué.

1.5.2 Gradient de porosité des Matériaux FGM :

Le Gradient de porosité des matériaux fonctionnellement gradués est un autre type de FGM, dans lequel la porosité dans le matériau est amenée à changer avec le changement de la position spatiale dans le matériau composite. Le diagramme schématique du gradient de porosité typique d'un matériau fonctionnellement gradué est représenté sur la Figure I.5. Ce type de matériau à gradation fonctionnelle est très important pour les applications biomédicales, car le matériau naturel qu'elles entendent remplacer consiste en une porosité à gradation fonctionnelle, laquelle faciliterait également l'intégration de l'implant et des tissus environnants. La porosité est importante pour le processus de guérison de cet implant et contribue également à la circulation

sanguine vers les tissus intégrés. La porosité graduée contribue également à réduire le poids total de l'implant et à améliorer le module d'élasticité du matériau de l'implant pour correspondre à celui du tissu humain. La porosité graduée contribue à réduire la densité du bio-implant. Cela est nécessaire pour éviter la protection contre les contraintes qui se produit lorsque le module d'élasticité de l'implant est supérieur à celui de l'os humain. Les matériaux à gradient de porosité sont produits par dépôt de poudre avec un mélange varié de formes et de tailles de particules différentes, ce qui aiderait à produire la porosité variable nécessaire en fonction de la forme et de la taille des pores. Les matériaux à gradient de porosité peuvent être un gradient de densité de porosité ou un gradient de taille de pores. La densité de porosité est produite lorsque la densité de porosité change en fonction de la position spatiale à travers le volume du matériau.

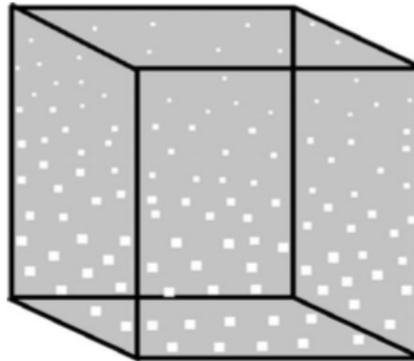


Figure (1.1) Matériau FGM poreaux.

1.5.3 Gradient de la microstructure des Matériaux FGM :

Un matériau fonctionnellement gradué de gradient microstructural est un autre type de FGM, dans lequel la microstructure est conçue de manière à produire différentes microstructures dans le matériau, qui sont amenées à changer progressivement, de manière à obtenir les propriétés requises du matériau. La gradation microstructurale peut être obtenue pendant le processus de solidification, de sorte que la surface du matériau est trempée, par exemple lors de la production d'une propriété de surface très dure du matériau. Le noyau du même matériau est laissé refroidir lentement, ce qui aiderait à produire des microstructures différentes de celles

situées à la surface du matériau et à la partie la plus interne. De plus, la gradation microstructurale peut être obtenue par un processus de traitement thermique contrôlé.

1.6 Propriétés matérielles des poutres FGM :

Un FGM peut être définie par la variation des fractions volumiques. La plupart des chercheurs emploient la fonction de puissance, la fonction exponentielle, ou la fonction sigmoïde pour décrire les fractions de volume. Considérons une poutre de longueur L , de section rectangulaire avec la largeur b et l'épaisseur h comme représenté sur la (figure1.1).

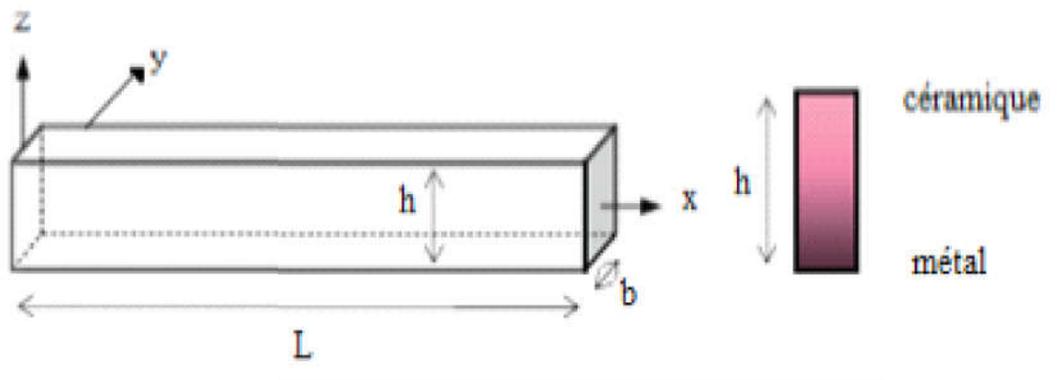


Figure (1.2) Géométrie d'une poutre FGM.

1.6.1 Fonction de puissance (P-FGM) :

La première fonction les propriétés matérielles obéit à une fonction en loi de puissance (P-FGM) comme suit (Kolahchi *et al.* 2015, Bennai *et al.* 2015, Tlidji *et al.* 2014),:

$$P_e = P_m V_m + P_c V_c \quad (1.1)$$

sont les propriétés du métal et de la céramique, V_m et V_c représentent les fraction volumique du métal et de la céramique définies par

$$V_c = \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right)^k \quad (1.2.a)$$

$$V_m = 1 - V_c \quad (1.2.b)$$

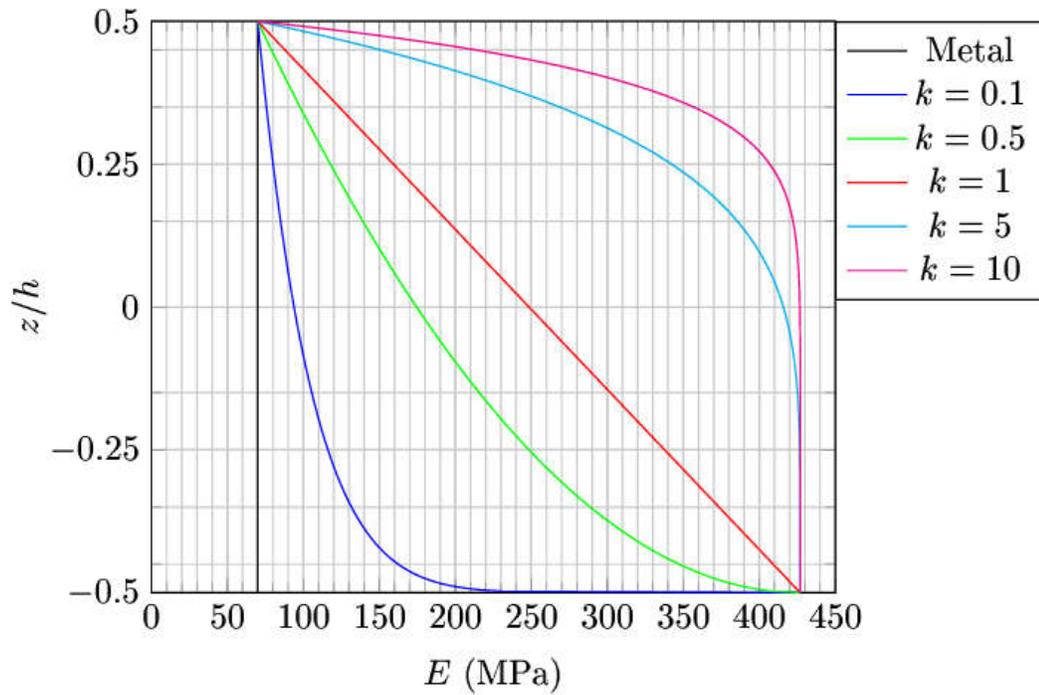


Figure (1.3) Loïs de puissance (P-FGM).

1.6.2 Fonction sigmoïde(S-FGM) :

La troisième fonction utilisée dans cette étude est la fonction sigmoïde (S-FGM), (Aldousari (2017), Bouguenina et al. 2015).

$$P_e = P_m + \frac{1}{2}(P_m - P_c) \left(1 + \frac{2z}{h}\right)^k \left(-\frac{h}{2} \leq z \leq 0\right) \quad (1.3.a)$$

$$P_e = P_m + \frac{1}{2}(P_m - P_c) \left(1 - \frac{2z}{h}\right)^k \left(0 \leq z \leq \frac{h}{2}\right) \quad (1.3.b)$$

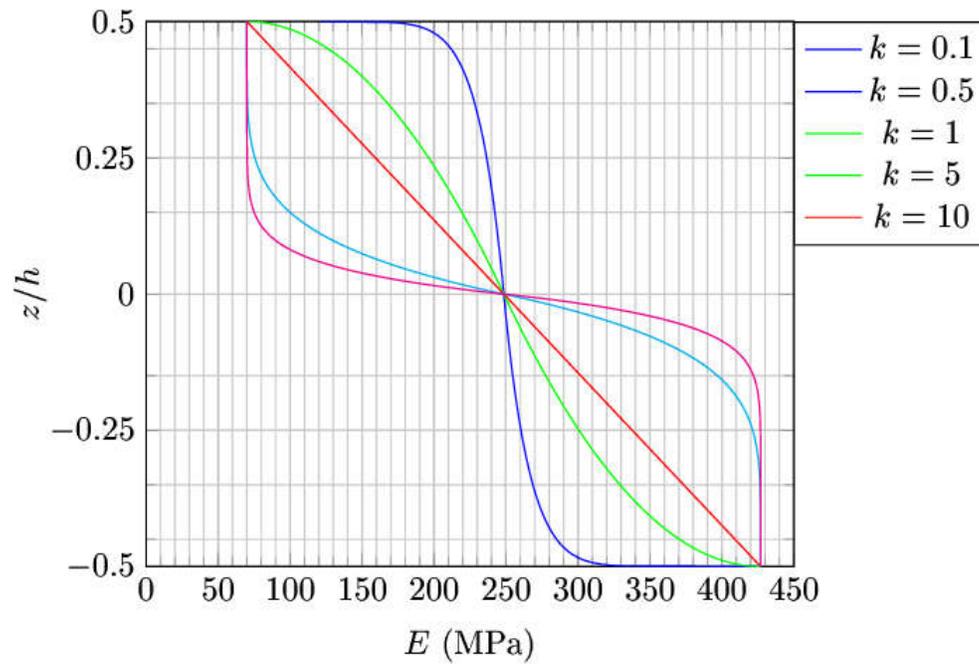


Figure (1.4) Fonction sigmoïde S-FGM.

La distribution du module de Young à travers l'épaisseur d'une poutre P-FGM, SP-FGM et distribution sigmoïdale est présentée aux Fig. 2, 3 et 4, respectivement.

1.6.3 Fonction exponentielle (E-FGM) :

La fonction exponentielle est utilisée pour décrire les propriétés matérielles d'une poutre FGM ; elle s'écrit comme suit (Delale et Erdogan 1983) :

$$E(z) = E_m \cdot e^{\beta(z+h/2)} \quad (1.4)$$

Avec :

$$\beta = 1/h * \ln(E_c / E_m)$$

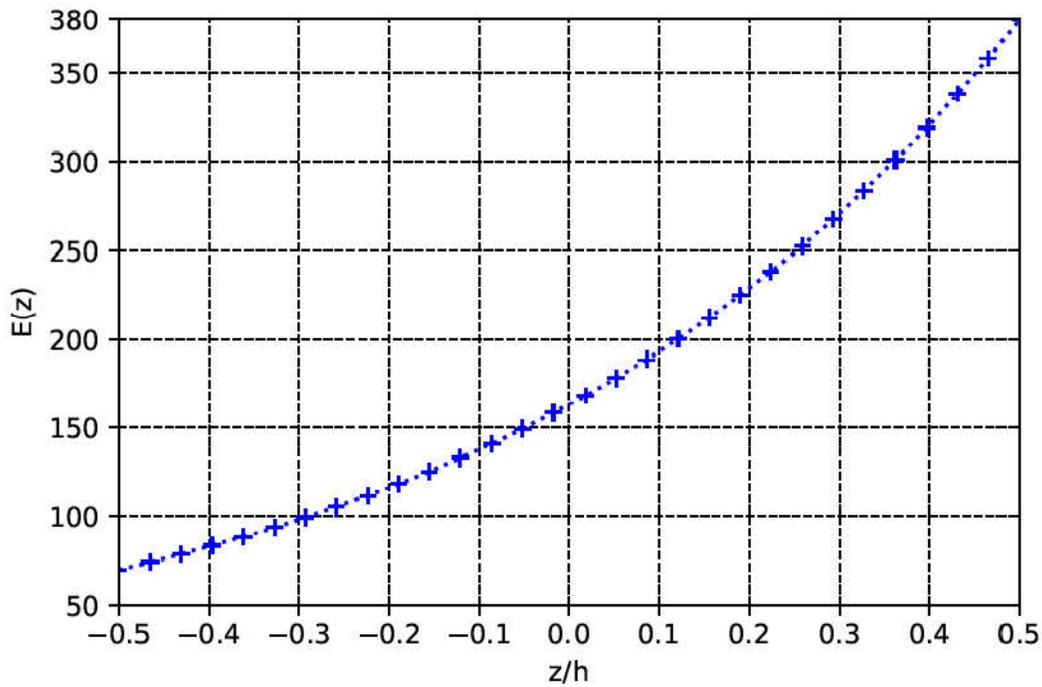


Figure (1.5) Variation du module de Young en fonction de l'épaisseur (E-FGM).

1.6.4 Fonction puissance symétrique SP-FGM :

La loi de puissance symétrique modifiée (S-P-FGM), Aldousari (2017), a la forme suivante :

$$P_e = P_c + (P_m + P_c) \left(\frac{-2z}{h} \right)^k \left(\frac{-h}{2} \leq z \leq 0 \right) \quad (1.5.a)$$

$$P_e = P_c + (P_m + P_c) \left(\frac{2z}{h} \right)^k \left(0 \leq z \leq \frac{h}{2} \right) \quad (1.5.b)$$

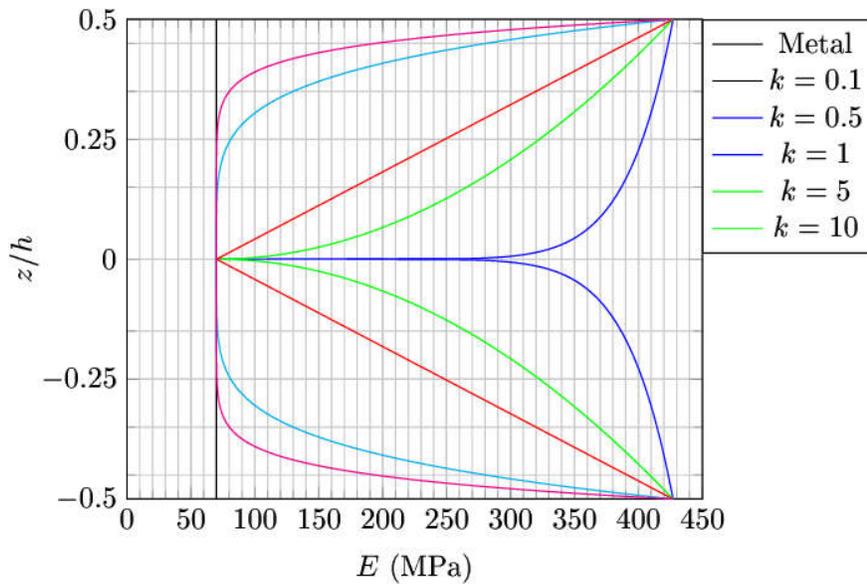


Figure (1.6) Lois de puissance symétrique (SP-FGM).

1.7 Loi de mélange :

Plusieurs approches sont utilisées pour décrire la variation matérielle du FGM qui sont fabriqués à partir de deux phases de matériaux. En général, la plupart des approches sont basées sur la distribution de la fraction volumique plutôt que développé à partir de microstructures classées réelles [Bao et Wang, 1995 ; Shen, 2009]. Deux types de fraction volumique (variations/gradations) sont populaires dans la littérature qui couvre la plupart des modèles analytiques existants (figure 1.7a).

Une variation continue de la fraction volumique de la céramique ou du métal est assumé, et celle du métal peut être représentée comme une fonction de coordonnées suivant l'épaisseur (z) (figure 1.7b).

Une variation par morceaux de la fraction volumique de la céramique ou du métal est assumée, et le FGM est pris pour être posé avec la même fraction volumique dans chaque région, c.-à-d. une couche quasi-homogène de céramique-métal (figure 1.6a).

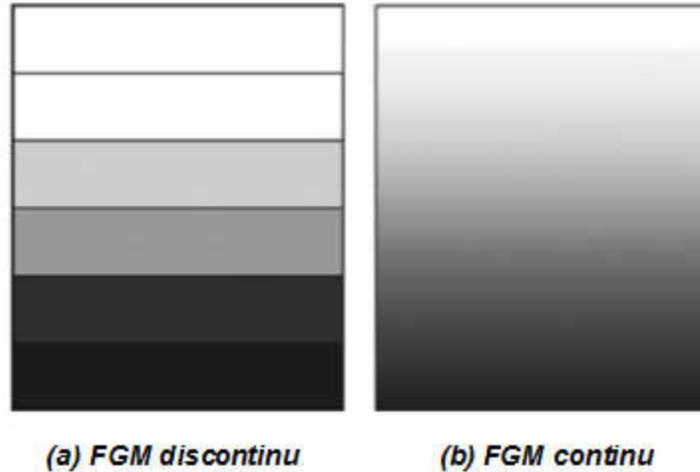


Figure (1.7) Modèle analytique pour une couche de matériau à gradient fonctionnel.

1.8 Porosité

La porosité est la quantité de vides (pores) dans un matériau solide, qui sont remplis de fluides (liquide ou gaz). C'est une grandeur physique de 0 à 1 (ou un pourcentage de la grandeur physique de 0 à 1 (ou un pourcentage de entre 0 et 100%)) qui détermine le débit et la capacité de rétention de substrat

La porosité est le volume de vide et le volume total du milieu poreux : la lumière totale du milieu poreux :

$$\varphi = \frac{V_{pores}}{V_{total}} \quad (1.7)$$

où :

φ est la porosité,

V_{pores} est le volume des pores,

V_{total} est le volume total du matériau, du le volume des pores

1.9 Caractérisation de la porosité

La variété des méthodes de caractérisation de la porosité est liée à la variété des matériaux poreux et aux objectifs de chaque approche. Par exemple, lors de l'étude des adsorbants ou des matériaux utilisés en catalyse, les mesures de surface peuvent être préférables. En revanche, si l'objectif est de contrôler la taille des pores, alors la méthode de détermination de la distribution granulométrique est recommandée [Félix 2012].

Les méthodes de caractérisation poreuse sont souvent associées à la classification des matériaux poreux selon certains critères. Les matériaux poreux peuvent être classés selon le type de porosité principale (fermée ou ouverte), l'origine de la porosité (inter-particule ou intra-particule), la résistance mécanique (rigidité ou fragilité) ou la taille des pores [Inagaki 2009].

1.10 Effet de la porosité sur les propriétés mécaniques des matériaux

Les études des propriétés mécaniques des matériaux poreux sont généralement résumées en qui détermine la corrélation entre la porosité et les propriétés mécaniques. Une augmentation de la fraction volumique des pores signifie une diminution des propriétés mécaniques. [Clemens 2013].

La plupart des études disponibles dans la littérature se concentrent sur l'influence du principal facteur d'influence, la porosité [Ogasawara 2006], la forme des pores, leur distribution en taille, et même.

1.10.1 Porosité et module d'élasticité longitudinale (le module de Young/porosité)

De vastes travaux expérimentaux et théoriques ont été entrepris pour relier l'interaction complexe de la microstructure et des propriétés mécaniques. Dans le cas de notre étude on s'est focaliser sur l'effet de la porosité sur le module d'élasticité longitudinal (le module de Young/porosité). Les expressions (relations empiriques) suivantes sont celles utilisées le plus souvent pour décrire ce comportement : [Dean 1983]

$$E = E_0(1 - bP) \quad (1.8)$$

Où :

- E : est le module de Young à la porosité P
- E_0 : le module de Young à porosité nulle
- b : Paramètre dépend de la nature et de la géométrie du matériau

Ce modèle linéaire (1.8) repris dans la théorie de l'élasticité d'Einstein [Einstein 1906], qui l'utilisait pour décrire le comportement élastique d'un fluide avec une suspension de sphères dures.

$$E = E_0(e^{-bP}) \quad (1.9)$$

Cette relation exponentielle (1.9) a été utilisée pour la première fois par SPRIGGS [Spriggs 1961] pour analyser l'effet de la porosité sur le module élastique de la matière réfractaire poly cristalline, oxyde d'aluminium.

$$E = E_0(1 - P)/(1 + bP) \quad (1.10)$$

Ce modèle non linéaire (1.10) a été proposé par Hasselman en 1962 est directement basé sur les expressions obtenues par Hashin en 1962 pour les modules de matériaux avec suspensions diluées de pores sphériques.

$$E = E_0(1 - bP^{\frac{2}{3}}) \quad (1.11)$$

Cette relation (1.11) à puissance (2/3) a été dérivée par Martin et Haynes en 1971 pour le module de Young des matériaux poreux et a été utilisée tardivement pour analyser les données de plusieurs matériaux.

Le principal inconvénient de ces modèles est qu'ils ne peuvent pas être utilisés pour toute la plage de porosité. Il semble que certaines conditions doivent être remplies par un bon modèle pour toute la plage de porosité : il doit être aussi simple que possible, doit posséder le plus petit nombre possible de paramètres d'ajustement et il est nécessaire d'intégrer la porosité critique

(seuil de percolation) [Kovacik 2008] au modèle. A cause cela, le modèle exponentiel de Knudsen et Spriggs équation (10) ne convient pas car aucun seuil de percolation n'est pris en compte. De plus, il est également inapplicable pour les mousses, car il ne satisfait pas la condition limite $E = 0$ pour $P = 1$ (E est le module de Young et P est la porosité).

1.10.2 Porosité et le module de cisaillement

Le même modèle de percolation est valable pour le module de cisaillement [Kovach 2001] de matériaux poreux.

$$G = G_0 \left(1 - \frac{P}{P_c}\right)^{f_G} \quad (1.12)$$

Où f_G est l'exposant caractéristique du module de cisaillement. Du point de vue de la stabilité mécanique du système, on peut s'attendre à ce que le seuil de percolation soit évidemment le même pour le module de Young et le module de cisaillement. Cependant, les exposants caractéristiques du module de Young et du module de cisaillement ne sont pas identiques en général. Il existe de nombreux paramètres qui influencent le module de Young et le module de cisaillement des matériaux poreux [Kovacik 2006]

1.10.3 Porosité et le coefficient de Poisson ν

Dans le cas de matériaux isotropes homogènes, le coefficient de Poisson ν peut être déterminé à l'aide du module d'élasticité E et du module de cisaillement G comme suit

$$\nu = \frac{E}{2G} - 1 \quad (1.13)$$

Après le remplacement des équations 1.11 et 1.12 dans l'équation 1.13 nous obtenons

$$\nu = \frac{E_0}{2G_0} \left[\frac{P_c - P}{P_c} \right] \quad \text{Pour } P \leq P_c \quad (1.14)$$

Puisque $E_0/2G_0$ détermine le coefficient de Poisson du matériau solide, nous pouvons simplifier l'équation comme suit

$$v = (v_0 + 1) \left[\frac{P_c - P}{P_c} \right] - 1 \quad \text{Pour } P \leq P_c \quad (1.15)$$

Dans ce cas, le seuil de percolation est à nouveau considéré comme identique du point de vue de la stabilité mécanique. Cependant, comme les exposants caractéristiques du module de Young et du module de cisaillement ne sont pas toujours les mêmes, il est nécessaire de considérer un nouvel exposant caractéristique pour le coefficient de Poisson où $f_v = f_E - f_G$ [Kovacic 2006].

1.11 Poutres poreuses fonctionnellement graduées

Une poutre de longueur (L) dans l'axe des x et l'épaisseurs (h) dans l'axe z. Trois modèles de distribution de porosité sont considérés, dans laquelle la première est une distribution poreuse uniforme définie par poutre-I et les deuxième et troisième sont des distributions poreuses non uniformes ou des distributions poreuses FG défini par poutre-II et poutre-III, respectivement. Les propriétés du matériau, à savoir le module de Young E(z), le module de cisaillement G(z) et la masse volumique $\rho(z)$ varient en continu sur l'épaisseur, comme cela peut être décrit par les équations suivantes [9-11]

$$E(z) = E_1(1 - e_0\eta) \quad (1.16.a)$$

$$G(z) = G_1(1 - e_0\eta) \quad (1.16.b)$$

$$\rho(z) = \rho_1(1 - e_m\eta) \quad (1.16.c)$$

Pour poutre 1

$$\text{dans lequel } \alpha = \frac{1}{e_0} - \frac{1}{e_0} \left(\frac{2}{\pi} \sqrt{1 - e_0} - \frac{2}{\pi} + 1 \right)^2 \quad (1.17.a)$$

$$E(z) = E_1 \left[1 - e \cos \left(\frac{\pi z}{h} \right) \right] \quad (1.17.b)$$

$$G(z) = G_1 \left[1 - e_0 \cos h \left(\frac{\pi z}{h} \right) \right] \quad (1.17.c)$$

$$\rho(z) = \rho_1 \left[1 - e_m \cos \left(\frac{\pi z}{h} \right) \right], \quad (1.17.d)$$

pour poutre 2

$$E(z) = E_1 \left[1 - e_0 \cos \left(\frac{\pi z}{2h} + \frac{\pi}{4} \right) \right] \quad (1.18.a)$$

$$G(z) = G_1 \left[1 - e_0 \cos \left(\frac{\pi z}{2h} + \frac{\pi}{4} \right) \right] \quad (1.18.b)$$

$$\rho(z) = \rho_1 \left[1 - e_m \cos \left(\frac{\pi z}{2h} + \frac{\pi}{4} \right) \right], \quad (1.18.c)$$

pour poutre 3.

On note que e_0 est le coefficient de porosité pour le module d'Young et le module de cisaillement, qui peut être obtenu à partir de $e_0 = 1 - E_2/E_1 = 1 - G_2/G_1, 0 < e_0 < 1$. Aussi, le coefficient de porosité pour la masse volumique est $e_m = 1 - \rho_2/\rho_1, 0 < e_m < 1$. A partir de ces équations, E_1, G_1, ρ_1 sont les valeurs maximales du module d'Young, du module de cisaillement et de la masse volumique, respectivement, et E_2, G_2, ρ_2 sont les valeurs minimales correspondantes valeurs des propriétés du matériau. La relation entre e_0 et e_m , peut être déterminée à l'aide de l'équation suivante [Ashby, M.F., Evans, T., Fleck, N.A., Boston (2000)]

$$\frac{E_2}{E_1} = \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^2 \quad (1.19)$$

Par conséquent, la relation entre les coefficients de porosité est

$$e_m = 1 - \sqrt{1 - e_0} \quad (1.20)$$

1.12 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté les matériaux à gradient de propriétés (FGM), leurs propriétés, leurs domaines d'utilisation, leur l'histoire, l'historique et développement Et aussi présenté les différentes lois possibles qui servent à décrire la variation des propriétés matérielles du matériau FGM suivant l'épaisseur de la poutre. Ces lois pouvaient être sigmoïdes, exponentielles ou même loi de puissance.

Enfin nous avons terminé par définie la porosité et essayé de développer différents modèles de l'effet de la porosité sur les propriétés mécanique des matériaux, tel que (le module de cisaillement /porosité), (le coefficient de poisson ν / Porosité), et l'effet de la porosité sur le module de Young

Chapitre 2. Théories des poutres

2.1 Introduction :

Les poutres sont largement utilisées dans les structures civiles (Ailes d'avions, Coques de bateaux, Carrosseries automobiles, Charpentes, Etc.) cela est principalement dû à leur très grande résistance et rigidité spécifiques de l'avantage de leur propriétés pour répondre aux exigences de la pratique, ce qui a rendu nécessaire à l'étude de leur comportement statique.

Le terme de « poutre » désigne un objet dont la longueur est grande par rapport aux dimensions transverses (section fine).

2.2 Historique :

La théorie des poutres est attribuée à Galilée, mais des études récentes indiquent que Léonard De Vinci l'aurait précédé. De Vinci avait supposé que la déformation variée de manière linéaire en s'éloignant de la surface neutre, mais il ne pût finaliser ses calculs car il ne connaissait pas la loi de Hooke [Z KHELIFA. 2016]. De son côté, Galilée était parti sur une hypothèse incorrecte (il supposait que la contrainte était répartie uniformément en flexion), et c'est Antoine Parent qui obtint la distribution correcte [DUFOT 2001]. Ce sont Leonard Euler et Jacques Bernoulli qui émirent la première théorie utile vers les années 1790, alors que Daniel Bernoulli, le neveu du précédent, écrivit l'équation différentielle pour l'analyse vibration. À cette époque, le génie mécanique n'était pas reconnu comme une science, et on ne considérait pas que les travaux d'une académie des mathématiques puissent avoir des applications pratiques, et on continua à bâtir les ponts et les bâtiments de manière roue, qu'on démontra la validité de la théorie à grand échelle.

2.3 Comportement des poutres composite

L'analyse sur le comportement statique des poutres est liée d'une part à l'utilisation des poutres comme éléments de base dans la réalisation des structures, et la structure composite est

plus complexe que la structure en matériaux traditionnels comme métallique. D'autres part à la caractérisation des propriétés mécanique des matériaux composites et ceci à partir des différents essais réalisés sur des éprouvettes en forme de poutres.

2.4 Modèles des poutres

Une poutre est un élément de structure utilisée dans la construction des bâtiments, des navires, et dans la fabrication de machines. Cependant, le modèle des poutres peut être utilisé pour des pièces très diverses à condition qu'elles respectent certaines normes. La théorie des poutres s'applique sur le solide élancé (les prismes dont la longueur vaut 10 fois la plus grande dimension transversal). L'a où la détermination de la solution exacte pour les champs de contrainte et de déformation n'est pas possible, elle permet d'obtenir une solution approchée, qui donne une bonne idée sur les efforts et les déplacements (SALLAI, 2011).

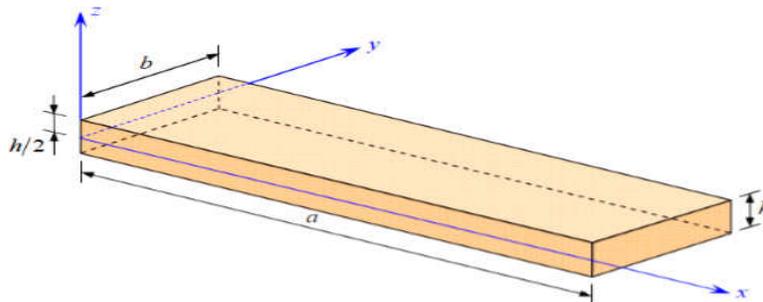


Figure (2.1) Schéma d'un élément de poutre (Berthelot 2012)

Définition du cisaillement : Le cisaillement est une notion très importante et ce paragraphe vise à expliquer le plus clairement possible en quoi il consiste. Par soucis de simplicité l'exemple qui suit traite d'une poutre homogène et isotrope dont l'axe longitudinal est « x ».

Lorsqu'une charge dirigée vers les « z » positifs est appliquée à l'extrémité droite de la poutre, elle induit un moment de flexion et du cisaillement et se déforme vers le haut selon une certaine courbe :

2.5 Hypothèses cinématiques de la théorie des poutres :

- L'hypothèse cinématique fondamentale de la théorie des poutres ([Coffignal 2001](#)) est l'hypothèse de Navier. (Navier -Bernoulli et Navier -Timoshenko) : "Toute section droite de la configuration de référence est supposée rester plane et inaltérée au cours du mouvement".
- L'hypothèse de Navier s'énonce aussi de la façon équivalente suivante : "Toute section droite est considérée comme ayant un mouvement de solide indéformable".
- L'hypothèse d'Euler- Bernoulli énonce que la section droite de la poutre est indéformable reste plane et perpendiculaire à la fibre moyenne avant et après déformation, et la déformation transversale est nulle.
- L'hypothèse de Timoshenko énonce que la section droite de la poutre est indéformable ne reste pas perpendiculaire à la fibre moyenne après déformation (il y a une rotation de la section droite), et l'effet de cisaillement n'est pas nul et pris en compte.

Remarques :

1) L'hypothèse énoncée de Navier montre que la section reste plane. Il n'est donc pas imposé a priori que la section reste perpendiculaire à la ligne moyenne.

2) L'hypothèse de Navier n'est pas suffisante pour définir l'état de contrainte dans une section droite. Des hypothèses supplémentaires doivent être faites pour passer des "contraintes généralisées" (effort normal, effort tranchant, moment fléchissant) aux contraintes en chaque point de la section droite.

Dans notre travail on utilise les modèles d'Euler Bernoulli, Timochenko et quelques modèles d'ordre élevé.

2.5.1 -Modèle d'Euler Bernoulli (Classical Beam Theory- CBT) :

Dans cette théorie d'Euler-Bernoulli on basée sur la théorie élémentaire de flexion des poutres qui ne tient pas compte des effets de la déformation de cisaillement. Il est également connu qu'elle n'est applicable qu'aux poutres fines.

Dans cette approche, le nombre d'équations ne dépend pas du nombre de couches puisque la poutre multicouche est homogénéisée, donc considérée comme une seule couche. Comme hypothèse de cette théorie, les déformations dues au cisaillement transversal sont négligées (Pas

de cisaillement sur la hauteur de la poutre), La section reste perpendiculaire à la ligne moyenne de la poutre et la section reste plane. (Fig. 2.2).

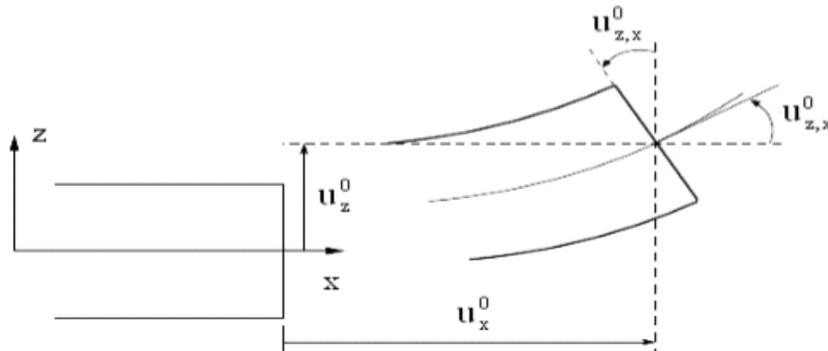


Figure (2.2) cinématique de la poutre d'Euler Bernoulli

La répartition de déplacement (**le gauchissement**) est décrite par la fonction nulle :

D'après la CBT ; le champ de déplacement de n'importe point M est donné par les deux composantes suivantes :

$$U(M) = \begin{cases} u(x, z) = u_0 - zw_0, x(x) \\ w(x, z) = w_0 \end{cases} \quad (2.2)$$

Avec :

$u(x, z)$: C'est le déplacement suivant X et $w(x, z)$ est le déplacement dans la direction de Z ou bien la flèche.

La rotation autour de l'axe Y , provoquée par la flexion est tel que :

$$w_0, x(x) = \frac{\partial w_0}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad (2.3)$$

$u_0(x)$ et $w_0(x)$ sont les composantes de déplacement au milieu de la section et sur la ligne moyenne de la poutre, respectivement le long des axes X et Z .

Représente le déplacement suivant l'axe X.

Le déplacement l'axe suivant Y ou bien la flèche.

La rotation autour l'axe Y est la suivante :

2.5.2 Modèle de Timoshenko (First shear deformation beam theory-FBT).

Cette théorie est basée sur le principe : « qu'après déformation, la section plane reste plane mais elle perd sa perpendiculaire par rapport à la ligne moyenne de la poutre » (**Timoshenko 1972**), elle est plus riche et plus générale que la théorie élémentaire des poutres au prix d'une fonction supplémentaire, les solutions permet d'affiner les solutions analytiques issues de la théorie classique.

Il existe un cisaillement uniforme et les déformations dues au cisaillement transversal ne sont pas négligés ce cas, la fonction $f(z)$ est égale à z .

La théorie de Timoshenko et s'applique pour le cas des poutres courtes (Timoshenko 1972) (Fig2.3).

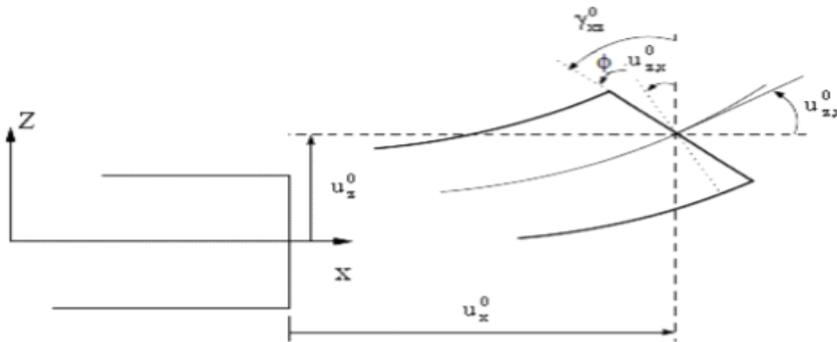


Figure (2.3) Cinématique de la poutre de Timoshenko (Dufort 2001)

Dans le cas où nous avons un élancement faible, l'effet du cisaillement devient plus important sur la déformée. Dans ce cas, la fonction s'écrit comme suit :

$$U(M) = \begin{cases} u(x, z) = u_0(x) - w_0, x_{(x)} + z\gamma_{xz}^0(x) \\ w(x, z) = w_0(x) \end{cases} \quad (2.4)$$

Il existe un cisaillement uniforme et les déformations dues au cisaillement transversal ne sont pas négligées. C'est la théorie de premier ordre (FSDBT). Le champ de déplacements de Timoshenko s'écrit alors

Avec :

γ_{xz}^0 , c'est la distorsion ou la déformation angulaire mesurée sur la ligne moyenne de la poutre.

Tel que :

$$\gamma_{xz}^0 = w_x^0(x) - \phi^0(x) \quad (2.5)$$

$\phi^0(x)$, Etant la rotation totale de la section mesurée sur la ligne moyenne de la poutre.

La contrainte de cisaillement est :

$$\tau_{xz} = G_{xz} \gamma_{xz} = G_{xz} \gamma_{xz}^0 \quad (2.7)$$

G_{xz} , le module de cisaillement transversal qui est supposé constant.

La non nullité des contraintes tangentielles sur les bords extrêmes de la poutre et l'introduction des coefficients de correction de cisaillement ont menés d'autres chercheurs à essayer de trouver une autre théorie pouvant tenir compte de ces facteurs, c'est " les théories d'ordre élevé".

2.5.3 Modèle d'ordre élevé (High shear deformation beam theory HSDBT) :

Dans la théorie d'ordre élevé la distribution est non linéaire de champs de déplacement selon l'épaisseur de la poutre. Elle est plus précise que la théorie du premier ordre puisqu'elle introduit une fonction qui tient compte du phénomène de "gauchissement".

Et le gauchissement apparaît lorsque la section transversale de la poutre perd sa planéité. La fonction $f(z)$ représente le gauchissement et sa dérivée $f'(z)$ le cisaillement. (figure 2.4).

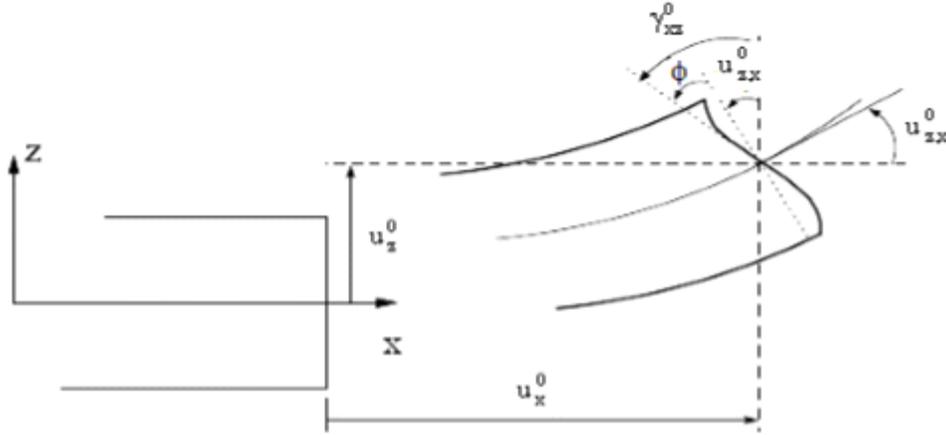


Figure (2.4) Cinématique de la poutre d'ordre élevé.

Le champ de déplacement devient :

Pour que les contraintes tangentielles soient nulles sur les bords extrêmes de la poutre, on doit avoir :

$$U(M) = \begin{cases} u(x, z) = u_0(x) - zw_{0,x(x)} + f(z)\gamma_{xz}^0(x) \\ w(x, z) = w_0(x) \end{cases} \quad (2.8)$$

$$\gamma_{xz(x)} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} = -w^x(x) + f'(z)\gamma_{xz}^0(z) + w_{0,x(x)} \quad (2.9)$$

$$\gamma_{xz(x)} = f'(z)\gamma_{xz}^0(x) \quad (2.10)$$

Pour que les contraintes tangentielles soient nulles sur les bords extrêmes de la poutre, on doit avoir :

$$f'\left(z = \mp \frac{h}{2}\right) = 0$$

Cette condition qui nous permet d'avoir une répartition parabolique des contraintes de cisaillement sur l'épaisseur de la poutre d'une part et de choisir correctement des fonctions cubiques qui répondent à la condition.

Quelques modèles sont présentés dans la littérature des poutres en FGM, par l'expression de la fonction de gauchissement $f(z)$.

Approche de Levinson 1980, Murthy 1981 et Reddy 1945 $f(z) = z \left(1 - \frac{4 \cdot z^2}{3 \cdot h^2} \right)$

Modèle exponentiel proposé par Afaq 2003 et al : $f(z) = z e^{-2\left(\frac{z}{h}\right)^2}$

L'approche de Reissner 1945 : $f(z) = \frac{5}{4} z \left(1 - \frac{4 \cdot z^2}{3 \cdot h^2} \right)$

Touratier: $f(z) = \left(\frac{z}{h} \right) \sin \left(\frac{\pi \cdot z}{h} \right)$

Avec h : l'épaisseur de la poutre.

Le choix de la fonction exponentielle permet un développement en puissance pair et impair de la variable z .

La figure ci-dessus, illustre la variation de la fonction de gauchissement $f(z)$ des modèles de Reddy et Afaq à travers l'épaisseur de la poutre. Cette fonction est symétrique par rapport au plan moyen de la poutre.

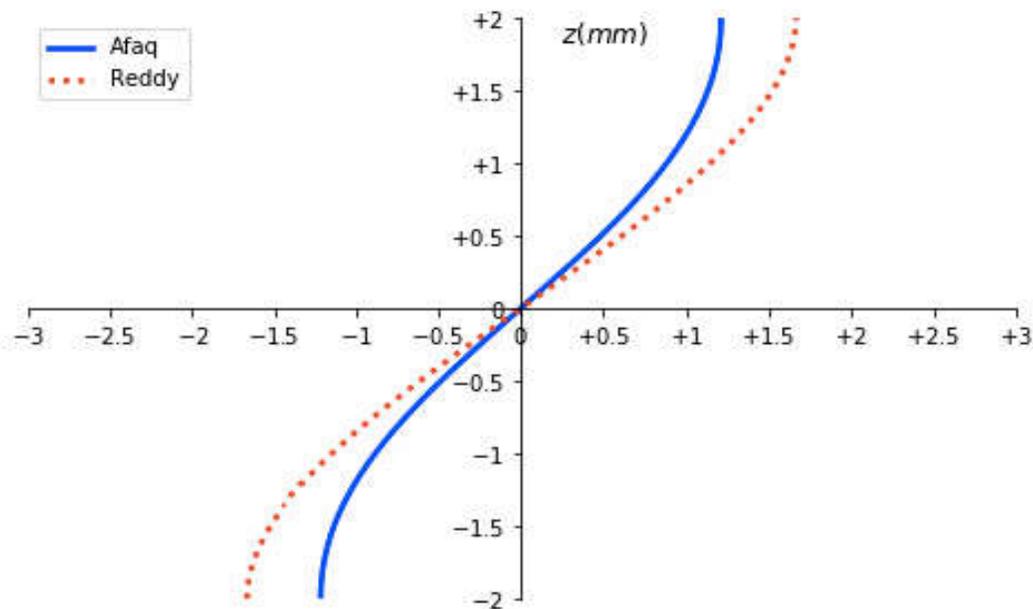


Figure (2.5) Variation de la fonction de gauchissement $f(z)$

Dans la deuxième figure on a des modèles de Reddy et Afaq a travers l'épaisseur de la poutre. Cette fonction est aussi symétrique par rapport au plan moyen de la poutre.

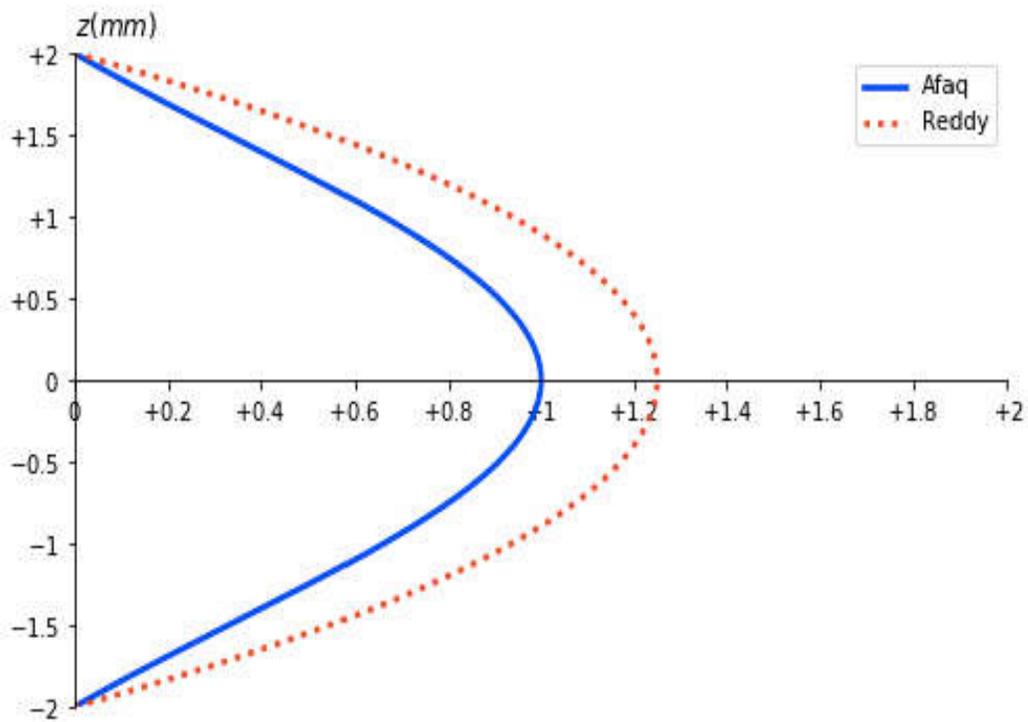


Figure (2.6) Variation de la fonction de cisaillement $f'(z)$

2.6 . Méthodes de résolution

2.6.1 . Procédure de Navier :

La méthode de Navier est utilisée pour simuler une poutre ou plaque rectangulaire simplement appuyée chargée avec une pression de forme sinusoïdale ou uniforme; la déflexion associée est alors supposée sinusoïdale. Les autres degrés de liberté sont exprimés sur une base trigonométrique correspondant. Nous choisissons ici de nous référer à cette méthode par le terme générique de procédure de Navier.

2.6.2 Méthode des éléments finis

C'est une méthode qui permet la résolution numérique des équations aux dérivées partielles .Elle est utilisée comme méthode de discrétisation afin de simuler le comportement de structures complexes proches de cas pratique. Les principes généraux de la méthode ainsi qu'un certain nombre de raffinements sont regroupés dans le livre de Zienkiewicz.

2.6.3 Méthode de Rayleigh-Ritz

Le principal avantage de méthode Rayleigh-Ritz réside dans le fait que, avec un choix de base de projection adapté, cette méthode permet, en projetant les déplacements sur une base donnée, d'implémenter un modèle pour la simulation de poutres ou plaque rectangulaire soumises à des conditions aux limites et des chargements variés. Et par conséquent la méthode est tout à fait adaptée aux modèles nécessitant le calcul des dérivées multiples de la base.

2.7 Conclusion :

À cette partie de la recherche nous sommes attachées à présentes l'historique des théories des poutres, et ses différents types. Telles que la théorie classique de Bernoulli (CBT), la théorie de cisaillement de premier ordre (FSDBT) Timochenko et la théorie d'ordre élevé (HSDBT).

Chapitre 3. Développement Mathématique

3.1 Introduction :

Dans les études de réponse des structures fonctionnellement graduées (FGM), la loi de distribution est choisie pour assurer la variation des propriétés mécaniques de la poutre sur la gamme d'épaisseur, Une simple loi de puissances en termes de la fraction volumique des constituants, par exemple. L'effet de la porosité sur le comportement des structures FGM est introduit dans ces lois en ajoutant un indice de porosité. Pour étudier la flexion des poutres poreuses, nous proposons trois distributions, une uniforme et deux non uniformes.

3.2 Modèle mathématique :

Dans cette étude, on considère une poutre poreuse de longueur L et d'épaisseur h . Les propriétés de cette poutre varient de façon continue suivant son épaisseur.

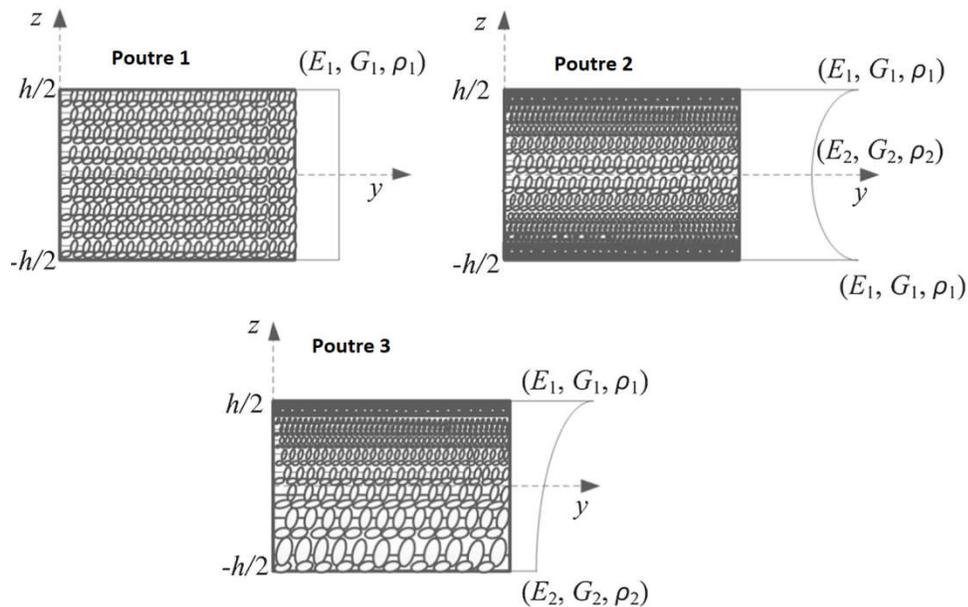


Figure (3.1) : Géométrie des poutres à gradient de porosité.

Dans la poutre 1, le module de Young, le module de cisaillement et la masse volumique sont calculés par les expressions

$$E(z) = E_1 (1 - e_0 \alpha_1) \quad 3.1. a$$

$$G(z) = G_1 (1 - e_0 \alpha_1) \quad 3.1. b$$

Pour poutre 2:

$$E(z) = E_1 \left[1 - e_0 \cos\left(\frac{\pi z}{h}\right) \right] \quad 3.2. a$$

$$G(z) = G_1 \left[1 - e_0 \cos\left(\frac{\pi z}{h}\right) \right] \quad 3.2. b$$

Pour poutre 3:

$$E(z) = E_1 \left[1 - e_0 \cos\left(\frac{\pi z}{2h} + \frac{\pi}{4}\right) \right] \quad 3.3. a$$

$$G(z) = G_1 \left[1 - e_0 \cos\left(\frac{\pi z}{2h} + \frac{\pi}{4}\right) \right] \quad 3.4. b$$

3.3 Champ de déplacement :

Le champ de déplacement de n'importe quel point M est le suivant :

$$u(x, z, t) = u_0(x, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + f(z)\varphi(x) \quad (3.3a)$$

$$u(x, z, t) = w_0(x, t) \quad (3.3b)$$

Ou $u_0(x, t)$, $w_0(x, t)$ sont les déplacements dans les directions x, z . Et $\varphi(x)$ est une fonction inconnue, qui représente l'effet de la déformation en cisaillement transverse sur le plan moyen. Et $f(z)$ représente la fonction de forme de distribution des contraintes de cisaillement transverse à travers l'épaisseur de la poutre.

Dans notre travail nous utilisons les théories suivantes :

Euler Bernoulli: $f(z) = 0$

Timoshenko: $f(z) = z$

Reddy (HBT1) : $f(z) = z \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right)$

Touratier(HBT2) : $f(z) = \frac{z}{h} \sin\left(\frac{z\pi}{h}\right)$

Le champ des déformations se déduit du champ des déplacements comme suit :

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_0(x)}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w_0(x)}{\partial x^2} + f(z) \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x} \quad (3.4a)$$

$$\gamma_{xz} = f'(z) \varphi_0(x) \quad (3.4b)$$

3.4 Le champ des contraintes :

On peut déduire le champ des contraintes avec les relations suivantes :

$$\sigma_x = Q_{11} \times \varepsilon_x \quad (3.5a)$$

$$\tau_{xz} = Q_{55} \times \gamma_{xz} \quad (3.5b)$$

Avec :

$$Q_{11} = E(z) \quad (3.6a)$$

$$Q_{55} = \frac{E(z)}{2(1-\nu^2)} \quad (3.6b)$$

Les relations entre les contraintes et les déformations sont les suivants :

$$N_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x dz \quad (3.7a)$$

$$M_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z \times \sigma_x dz \quad (3.7b)$$

$$S_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} f(z) \times \sigma_x dz \quad (3.7c)$$

$$Q_{xz} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} f'(z) \times \tau_{xz} dz \quad (3.7d)$$

Donc

Les résultats supplémentaires S_x et Q_{xz} sont dus à l'introduction de $f(z)$ dans l'expression du champ de déplacement sont :

N_x : Effort normal.

M_x : Moment fléchissant

S_x : Moment supplémentaire du au cisaillement transversal

$Q_{xz} = E$ Effort de cisaillement

Nous obtenons les relations fondamentales suivantes

$$\begin{bmatrix} N_x \\ M_x \\ S_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & B_{11} & B_{11}^a \\ B_{11} & D_{11} & B_{11}^a \\ B_{11}^a & D_{11} & F_{11}^a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial u_0(x)}{\partial x} \\ -\frac{\partial^2 w_0(x)}{\partial x^2} \\ \frac{\varphi_0(x)}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

$$Q_{xz} = A_{55}^s \times \varphi_0(x) \quad (3.9)$$

Les coefficients de rigidité d'extension et de flexion sont donnés par les expressions :

$$(A_{11}, B_{11}, D_{11}) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q \times (1, z, z^2) dz \quad (3.10a)$$

$$(B_{11}^a, D_{11}^a, F_{11}^a) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{11} \times f'(z) \times (1, z, f(z)) dz \quad (3.10b)$$

Le coefficient de rigidité de cisaillement transverse est donné par l'expressions :

$$A_{55}^s = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{55} \times f'(z)^2 dz \quad (3.11)$$

3.5 Équation du mouvement

Les équations du mouvement sont établies à partir du principe d'Hamilton.

$$\delta \int_{t_2}^{t_1} (U_e - T - V) dt \quad (3.12)$$

Avec :

U_e : Énergie de déformation.

T : Énergie cinétique

V : Travail des forces extérieures

L'énergie de déformation U_e s'écrit en coordonnées cartésiennes suivant :

$$U_e = \frac{1}{2} \iint (\sigma_{xx} \varepsilon_{xx} + \tau_{xz} \gamma_{xz}) dx dz \quad (3.13)$$

La variation de l'énergie de déformation U_e s'écrit

$$\delta U_e = \frac{1}{2} \iiint (\sigma_{xx} \delta \varepsilon_{xx} + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz}) \, dx dz \quad (3.14)$$

Ou encore :

$$\delta U_e = \frac{1}{2} \int \left(N_x \cdot \frac{\partial \delta u_0(x)}{\partial x} - M_x \cdot \frac{\partial^2 \delta w_0(x)}{\partial x^2} + S_x \cdot \frac{\partial \delta \varphi_0(x)}{\partial x} \right) dx + Q_{xz} \cdot \delta \varphi_0(x) \quad (3.15)$$

En statique, l'énergie cinétique est nulle, l'équation d'équilibre dérive de la condition de stationnarité du potentiel. Elle se traduit par la relation suivante

$$\delta \int_{t_2}^{t_1} (U_e - V) \, dt$$

La variation du travail des forces extérieures est

$$\delta V = \frac{1}{2} \int_0^L q(x) \delta w \, dx \quad (3.16)$$

$q(x)$ La charge transversale

en faisant l'intégration par partie de l'énergie de déformation (3.18) et l'énergie cinétique (3.21), tout en conservant alors le second terme sous forme intégrale, nous obtenons les équations du mouvement.

$$N_{x,x} = 0 \quad (3.17a)$$

$$M_{x,xx} - q(x) = 0 \quad (3.17b)$$

$$S_{x,x} - Q_{xz} = 0 \quad (3.17c)$$

Pour une poutre en appuis simples, les conditions aux frontières en $x = 0$ et $x = \ell$ sont :

$$\delta u = 0 \quad \text{Ou} \quad Nx = 0 \quad (3.18)$$

$$\frac{\partial \delta w}{\partial x} = 0 \quad \text{Ou} \quad Mx = 0 \quad (3.18b)$$

$$\delta w = 0 \quad \text{Ou} \quad \frac{\partial Mx}{\partial x} = 0 \quad (3.18c)$$

$$\delta \varphi = 0 \quad \text{Ou} \quad Sx = 0 \quad (3.18d)$$

3.6 Solution de Navier

Une solution de type Navier de (3.19), satisfaisant aux conditions aux frontières, est de la forme :

$$u_0 = \sum A_m \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) e^{i\omega t} \quad (3.19a)$$

$$w_0 = \sum B_m \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) e^{i\omega t} \quad (3.19b)$$

$$\varphi_0 = \sum C_m \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) e^{i\omega t} \quad (3.19c)$$

$$q(x) = \sum q_m \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) e^{i\omega t} \quad (3.19d)$$

Avec : A_m ; B_m ; C_m sont des coefficients indéterminés.

q_m coefficient d'expansion de Fourier

Charge Sinusoïdale : $q_m = q_0$ for $m = 1$

$$\text{Charge Uniformément répartie } qm = \begin{cases} \frac{4q_0}{m\pi} & m = 1,3,5 \\ 0 & m = 2,4,6 \end{cases}$$

En reportant ces expressions dans les équations (3.19), il vient :

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} u_0 \\ w_0 \\ \varphi_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ qm \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

Où $[K_{ij}]$ est la matrice de rigidité symétrique, les éléments de cette matrice sont exprimés par les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} K_{11} &= A_{11} \cdot \left(\frac{m\pi x}{L} \right)^2 \\ K_{12} &= K_{21} = -B_{11} \cdot \left(\frac{m\pi x}{L} \right)^3 \\ K_{13} &= K_{31} = B_{11}^a \cdot \left(\frac{m\pi x}{L} \right)^3 \\ K_{22} &= D_{11} \cdot \left(\frac{m\pi x}{L} \right)^4 \\ K_{23} &= K_{32} = D_{11}^a \cdot \left(\frac{m\pi x}{L} \right)^3 \\ K_{33} &= F_{11}^a \cdot \left(\frac{m\pi x}{L} \right)^2 + A_{55}^s \end{aligned}$$

Pour obtenir les équations du mouvement de la théorie FBT, il suffit de remplacer la fonction de gauchissement $f(z)$ par z dans l'expression de déplacement. Et l'introduire un coefficients de correction de cisaillement dans ce cas égale a $k=5/6$ (p outre de section rectangulaire). En mettant $f(z) = 0$, nous obtenons le système a résoudre de la théorie classique (CBT) :

3.7 Conclusion

Dans ce chapitre une formulation mathématique du problème de flexion des poutres a gradient de porosité, en utilisant une théorie d'ordre élevée été développe. La variation de la porosité à travers l'épaisseur des poutres suit trois lois de distribution. Les équations d'équilibre

sont obtenues selon le principe d'Hamilton. Ces équations sont résolues par la solution de Navier. Les résultats obtenus de ce travail seront présentés et interprétés dans le chapitre suivant.

Chapitre 4. Résultats et discussions

4.1 Introduction

Dans la présente partie du travail, la flexion des poutres à gradient de porosité sous deux cas de chargement (charge sinusoïdale et sous charge uniformément répartie) est investiguée. Dans cette analyse, le déplacement axial, le déplacement transversal, contrainte normale et contrainte de cisaillement sont obtenus après la résolution numérique du problème (3.20). Les propriétés matérielles des poutres FG sont estimées par trois lois de distribution de porosité (Poutre 1, Poutre 2 et Poutre 3). Ces poutres sont composées du métal, la porosité dans ces poutres varie seulement à travers l'épaisseur.

4.2 Résultats numériques et discussion

Par manque des résultats de la flexion des poutres à gradient de porosité. Nos résultats, seront validés, par des comparaisons avec les solutions disponibles dans la littérature des poutres FGM. Les déplacements et les contraintes adimensionnelles d'une poutre FGM composé du métal et de la céramique soumise à une charge uniformément répartie et à une charge sinusoïdale sont présents dans le tableau 4.1. Les résultats de cette analyse sont comparés avec les résultats générés par la théorie HSDT [Sayyad, 2018]. Les déplacements et les contraintes sont calculés pour deux rapport $l/h=5$. La flèche w , le déplacement u et les contraintes sont adimensionnalisées à l'aide des relations suivantes:

$$\bar{u}(L, \frac{h}{2}) = u \frac{Ebh^2}{q_0L^3} \quad (4.1a)$$

$$\bar{w}(\frac{L}{2}, 0) = w \frac{10Ebh^3}{q_0L^4} \quad (4.1b)$$

$$\overline{\sigma_x}\left(\frac{L}{2}, \frac{h}{2}\right) = \sigma \frac{b}{q_0} \quad (4.1c)$$

$$\overline{\tau_{xz}}(0,0) = \tau_x \frac{b}{q_0} \quad (4.1d)$$

Les calculs sont effectués en considérant le modèle de poutre de la théorie de cisaillement de troisième ordre (TSDBT). Nous observons que nos résultats sont en excellent accord avec ceux publiés par Sayyad et Ghugal Y, [Sayyad, 2018].

Tableau (4.1) Comparaison des déplacements et des contraintes d'une poutre FGM simplement appuyée, $L/h = 5$

Charge uniformément répartie					
P	0	1	2	5	10
\overline{u}	0.94093 0.9420 ^a	2.3037 2.3074 ^a	3.1128 3.1174 ^a	3.7098 3.7178 ^a	3.8861 3.8958 ^a
\overline{w}	3.16489 3.1635 ^a	6.2594 6.2563 ^a	8.0677 8.0666 ^a	9.8281 9.8414 ^a	10.938 10.940 ^a
$\overline{\sigma_x}$	3.80531 3.8084 ^a	5.88927 5.8957 ^a	6.8842 6.8971 ^a	8.1127 8.1331 ^a	9.7141 9.7345 ^a
$\overline{\tau_{xz}}$	0.75491 0.7764 ^a	0.8031 0.8288 ^a	0.8446 0.8485 ^a	0.8114 0.7654 ^a	0.6448 0.6947 ^a
Charge sinusoïdale					
\overline{u}	0.7251 0.7266 ^a	1.7793 1.7819 ^a	2.4048 2.4078 ^a	2.8644 2.8697 ^a	2.9989 3.0054 ^a
\overline{w}	2.5020 2.5004 ^a	4.9458 4.7964 ^a	6.3754 6.3745 ^a	7.7723 7.7830 ^a	8.6530 8.6547 ^a
$\overline{\sigma_x}$	3.0916 3.0979 ^a	4.7856 4.9432 ^a	5.6004 5.6149 ^a	6.6057 6.6281 ^a	7.9080 7.9300 ^a
$\overline{\tau_{xz}}$	0.4769 0.5072 ^a	0.5243 0.5430 ^a	0.5521 0.5553 ^a	0.5314 0.5024 ^a	0.4224 0.4560 ^a

a [Sayyad, 2018]

Dans cette partie, nous considérons des poutres simplement appuyée a gradient de porosité composées de céramique, $E_c = 380 \text{ GPa}$, $\nu = 0.3$, Deux rapport longueur- épaisseur sont considères ($L/h = 5, 20$). Les déplacements et les contraintes adimensionnels d'une poutre poreuse soumise à une charge uniformément répartie sont présents dans le tableau 4.2. Les déplacements et les contraintes sont calculés pour deux indices de porosité ($e_0 = 0.1, 0.3$).

A partir de ce tableau, nous remarquons que le minimum des déplacements et de la contrainte de cisaillement est obtenu par la poutre 2, cependant les contraintes normales sont minimales dans le cas de la poutre 1. On remarque, aussi que les déplacements et les contraintes ont augmentés lorsque l'indice de porosité à passe de 0.1 a 0.30. Les déplacements et la contraintes de cisaillement ont diminuent lors le rapport L/h a augmente. Par contre les contraintes normales ont augmentent.

Tableau (4.2) Comparaison des déplacements et des contraintes des poutres poreuses simplement appuyée soumis à une charge uniformément répartie

<i>L/h = 5</i>						
e_0	0.10			0.30		
Poutre	1	2	3	1	2	3
\bar{u}	1.004330	0.975640	1.017050	1.170570	1.056530	1.225210
\bar{w}	3.382790	3.297770	3.366500	3.942710	3.604630	3.887600
$\bar{\sigma}_x$	3.802000	3.946360	3.966920	3.802000	4.271450	4.365600
$\bar{\tau}_{xz}$	0.733300	0.717730	0.730360	0.733300	0.677520	0.723020
<i>L/h = 20</i>						
e_0	0.10			0.30		
Poutre	1	2	3	1	2	3
\bar{u}	0.246400	0.239220	0.249580	0.287180	0.258670	0.300900
\bar{w}	3.095180	3.005810	3.078210	3.607500	3.252240	3.551450
$\bar{\sigma}_x$	15.013010	15.576960	15.659380	15.013010	16.842480	17.221000
$\bar{\tau}_{xz}$	0.745680	0.730100	0.742750	0.745680	0.689780	0.735410

La distribution du déplacement axial et des contraintes normales et de cisaillement a travers l'épaisseur des poutres 1,2 et 3 pour deux rapport d'élancement l/h=5,20, sous chargement uniforme sont montrées dans les figures (4.1)-(4.3).

Les déplacements axiaux sont continus et linéaires tandis que les contraintes sont continues mais non linéaires, et ils sont maximaux au niveau des faces, supérieure et inférieure

des poutres. Et nulle au niveau de l'axe médian. La contrainte de cisaillement est maximale au niveau de l'axe médian et nulle aux faces, supérieure et inférieure.

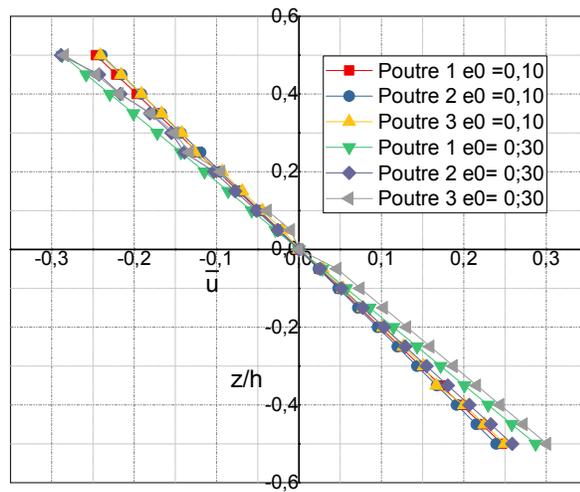
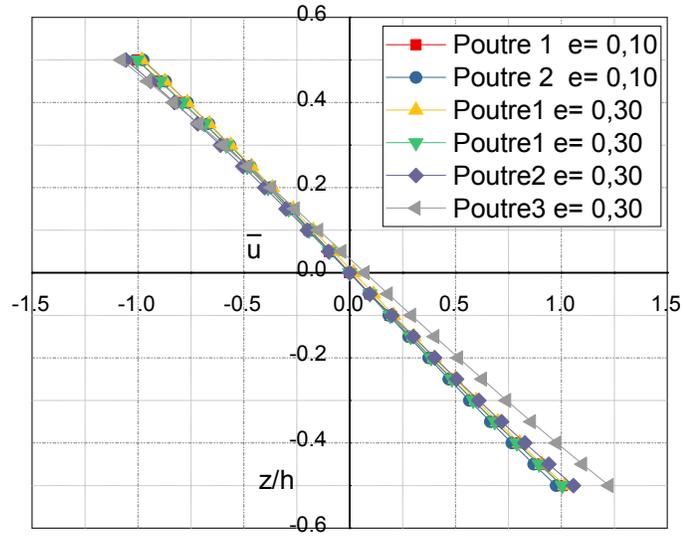


Figure (4.1) Variation du déplacement axial adimensionnel à travers l'épaisseur de la poutre sous chargement uniformément répartie

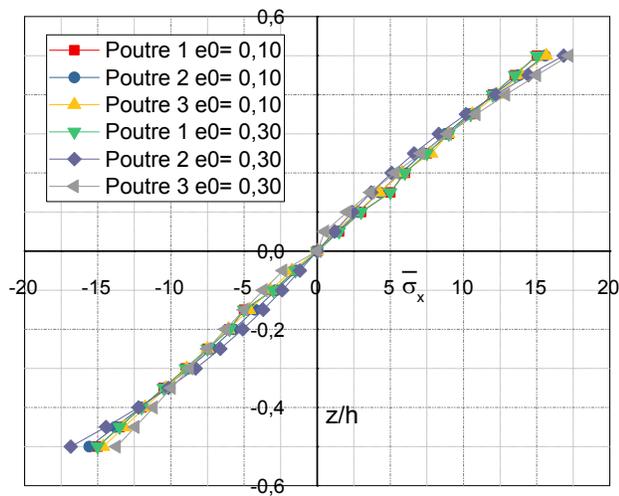
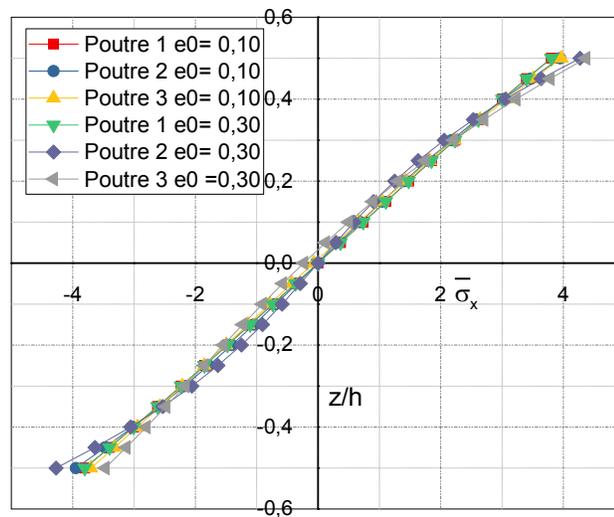


Figure (4.2) Variation de la contrainte normale adimensionnelle à travers l'épaisseur de la poutre sous charge uniformément répartie

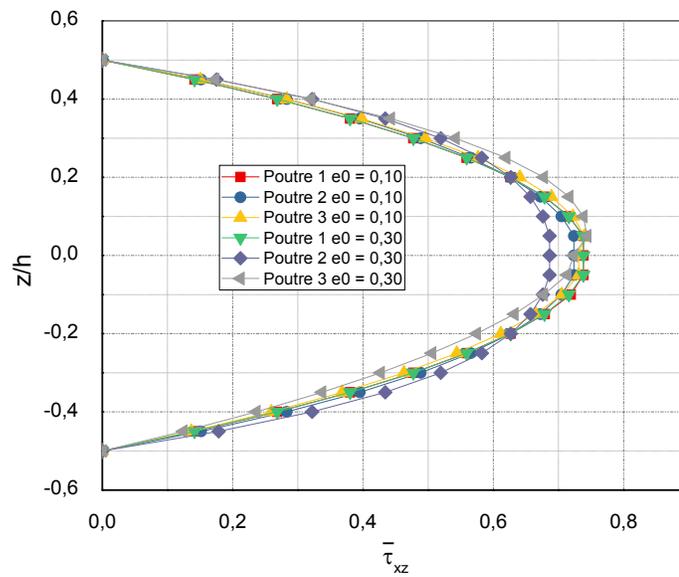
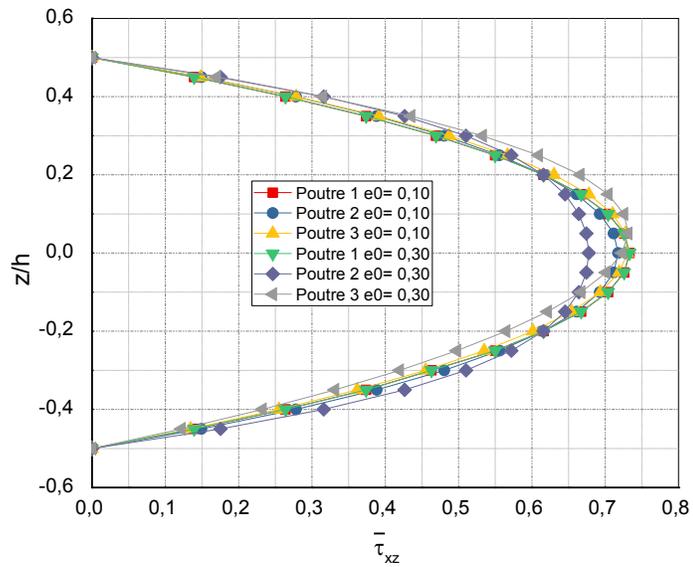


Figure (4.3) Variation de la contrainte de cisaillement adimensionnelle à travers l'épaisseur de la poutre sous charge uniformément répartie

Les déplacements et les contraintes adimensionnels d'une poutre poreuse soumise à une charge sinusoïdale sont présents dans le tableau 4.3. Les déplacements et les contraintes sont calculés pour deux indices de porosité ($e_0 = 0.1, 0.3$).

A partir de ce tableau, nous remarquons que le minimum des déplacements et de la contrainte de cisaillement est obtenu par la poutre 2, cependant les contraintes normales sont minimales dans le cas de la poutre 1. On remarque, aussi que les déplacements et les contraintes ont augmentés lorsque l'indice de porosité à passe de 0.1 a 0.30. Les déplacements et la contraintes de cisaillement ont diminuent lors le rapport L/h a augmente. Par contre les contraintes normales ont augmentent.

Tableau (4.3) Comparaison des déplacements et des contraintes des poutres poreuses simplement appuyée soumis à une charge sinusoïdale

$L/h = 5$						
e_0	0.10			0.30		
Poutre	1	2	3	1	2	3
\bar{u}	0.774910	0.752710	0.784760	0.903180	0.814920	0.945510
\bar{w}	2.673820	2.606880	2.660990	3.116390	2.850230	3.072960
$\bar{\sigma}_x$	3.091570	3.209260	3.225920	3.091570	3.474500	3.550730
$\bar{\tau}_{xz}$	0.476880	0.466940	0.475010	0.476880	0.441210	0.470330
$L/h = 20$						
e_0	0.10			0.30		
Poutre	1	2	3	1	2	3
\bar{u}	0.190680	0.185130	0.193140	0.222240	0.200170	0.232860
\bar{w}	2.440750	2.370300	2.427370	2.844740	2.564680	2.800560
$\bar{\sigma}_x$	12.171540	12.628830	12.695630	12.171540	13.655060	13.961850
$\bar{\tau}_{xz}$	0.477430	0.467500	0.475560	0.477430	0.441790	0.470890

De même façon, la répartition du déplacement axial et des contraintes normales et de cisaillement a travers l'épaisseur de la poutre sont tracés dans les figures 4.4 - 4.6, pour le rapport $l/h = 5$ et 20. Les déplacements axiaux sont continus et linéaires tandis que les contraintes sont continues mais non linéaires, et ils sont maximaux au niveau des faces, supérieure et inférieure

des poutres. Et nulle au niveau de l'axe médian. La contrainte de cisaillement est maximale au niveau de l'axe médian et nulle aux faces, supérieure et inférieure.

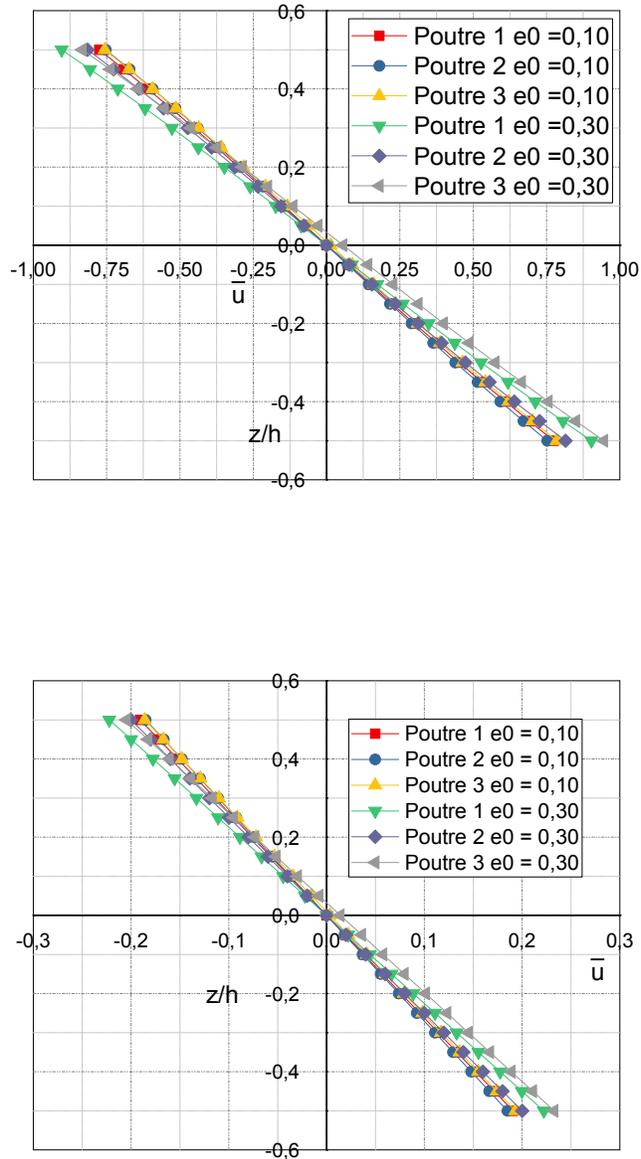


Figure (4.4) Variation du déplacement axial adimensionnel à travers l'épaisseur de la poutre sous charge sinusoïdale

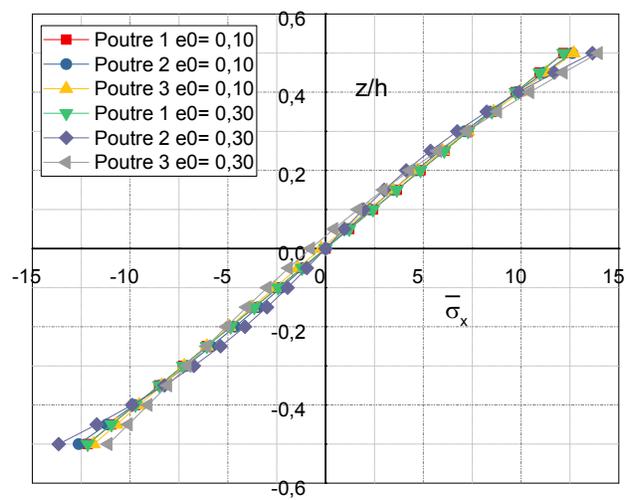
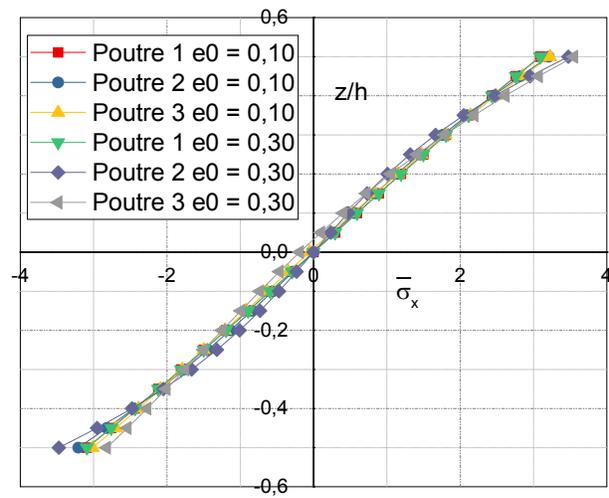


Figure (4.5) Variation de la contrainte normale adimensionnelle à travers l'épaisseur de la poutre sous charge sinusoïdale

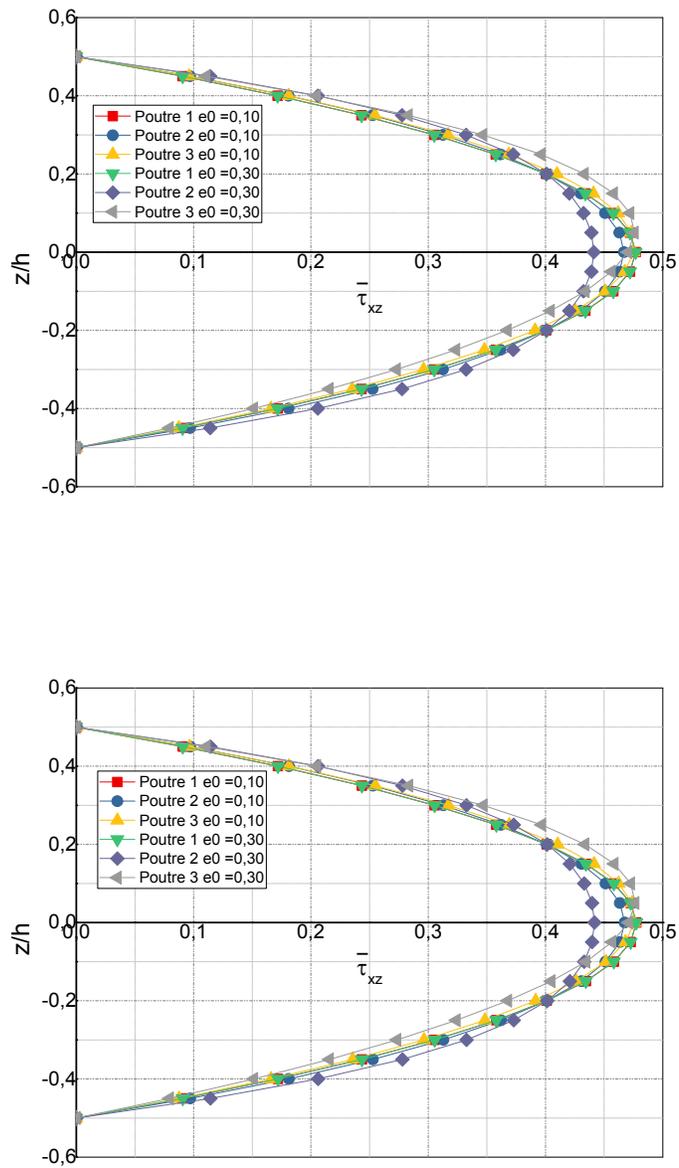


Figure (4.6) Variation du déplacement axial adimensionnel à travers l'épaisseur de la poutre sous charge sinusoïdale

4.3 Conclusions

Une analyse de la flexion des poutres simplement appuyée a gradient de porosité a été présentée dans ce travail de fin d'étude. La variation de la porosité a travers l'épaisseur de ces poutre est supposee suit trois forme de distribution, qui sont, uniforme (Poutre 1), et non uniforme (Poutre 1, et Poutre 3). Les équations d'équilibre sont obtenues par le principe d'Hamilton. Les résultats numériques montrent l'effet des formes de distribution, l'indice de porosité et le rapport longueur - épaisseur sur les déplacements et les contraintes.

A travers ces résultats, on peut conclure des déplacements et de la contrainte de cisaillement sont minimales pour la poutre 2. Les déplacements et les contraintes ont augmentés lorsque l'indice de porosité augmente.

Les déplacements et la contraintes de cisaillement ont diminuent lors le rapport L/h a augmente. Par contre les contraintes normales ont augmentent.

Conclusion générales.

Les structures en matériaux fonctionnellement gradués représentent un très vaste domaine de recherche et d'énormes applications dans l'industrie. Leur composition et leur structure peuvent être modifiées à volonté pour obtenir de ces matériaux les propriétés optimales souhaitées. Dans ce projet de fin d'étude, nous proposons trois poutres avec des gradients de porosité, c'est-à-dire que la porosité varie avec leur épaisseur selon trois formes de distribution.

Le problème est traité en analysant les déplacements et des contraintes des cas de poutre rectangulaire simplement appuyée dont la porosité varie selon trois lois de distribution à savoir ; distribution uniforme (Poutre 1), et non uniforme pour la poutre 2 et poutre 3. Les résultats obtenus ont été présentés par des tableaux et des figures pour les cas des poutres (1, 2 et 3) composées de la céramique. Nos résultats sont obtenus pour différentes valeurs de l'indice de porosité et le rapport longueur-épaisseur.

A travers ces résultats, les conclusions suivantes sont formulées ; le minimum des déplacements et de la contrainte de cisaillement est obtenu par la poutre 2, cependant les contraintes normales sont minimales dans le cas de la poutre 1. Les déplacements et les contraintes ont augmentés lorsque l'indice de porosité augmente. Les déplacements et la contraintes de cisaillement ont diminuent lors le rapport L/h a augmente. Par contre les contraintes normales ont augmentent.

Le travail présenté dans le cadre de ce projet de fin d'étude peut être développé et enrichi par l'étude d'autres phénomènes. Nous envisageons, par exemple, en perspective, d'analyse le flambement et la flexion des différentes formes de structures, poutres sandwichs, plaque épaisses et modérément épaisses avec les différentes conditions aux limites en utilisant la méthode des éléments finis.

Bibliographie

1. Ait Atmane , H., Tounsi, A., Mechab, I. and Adda Bedia, E.A. (2010), “Free vibration analysis of functionally graded plates resting on Winkler–Pasternak elastic foundations using a new shear deformation theory”, *Int. J. Mech. Mater. Des.*, 6(2), 113-121.2010.
2. Aldosari S.M. Bending analysis of diferent material distributions of functionally graded beam. *Appl. Phys. A*, 91(4) :123–296, 2017
3. Ashby, M.F., Evans, T., Fleck, N.A., et al.: *Metal Foams: A Design Guide*. Butterworth-Heinemann, Boston (2000)
4. Bao G. and Wang L. Multiple cracking in functionally graded ceramic/metal coatings. *Int. J ; Solids Structures* , 32(119) :28532871, 1995.
5. Benferhat, R. "Analyse et modélisation de l'influence du cisaillement transverse sur le comportement mécanique des plaques en matériaux à gradient de propriétés". (Doctoral dissertation.2017.
6. Bennai, R., Ait Atmane, H.and Tounsi, A. “A new higher-order shear and normal deformation theory for functionally graded sandwich beams”, *Steel Compos. Struct.*, 19(3), 521-546.(2015).
7. Bhatt, R., "Oxidation Effects on the Mechanical Properties of SiC Fiber-Reinforced Reaction Bonded Silicon Nitride Matrix Composites,". NASA TM-102360, NASA Lewis Research Center, Cleveland, OH.1989.
8. Bouguenina, O., Belakhdar, K, Tounsi, A. and Adda Bedia, E.A. “Numerical analysis of FGM plates with variable thickness subjected to thermal buckling”, *Steel Compos. Struct.*, 19(3), 679-695.2015.
9. Chen , W.Q., Wang, H.M. and Bao, R.H. “On calculating dispersion curves of waves in a functionally graded elastic plate”, *Compos. Struct.*, 81, 233-242. (2009/2007).
10. .Chen, D., Kitipornchai, S., Yang, J.: Nonlinear free vibration of shear deformable sandwich beam with a functionally graded porous core. *Thin-walled Struct.* 107, 39–48 (2016)
11. Chen, D., Yang, J., Kitipornchai, S.: Elastic buckling and static bending of shear deformable functionally graded porous beam.*Compos. Struct.* 133, 54–61 (2015)

12. . Chen, D., Yang, J., Kitipornchai, S.: Free and forced vibrations of shear deformable functionally graded porous beams. *Int. J. Mech. Sci.* 108–109, 14–22 (2016)
13. Clément, Phillipe. Détermination des propriétés mécaniques de céramiques poreuses par essais de microindentation instrumentée sphérique. Thèse de doctorat. INSA de Lyon.2013.
14. Coffignal, Gérard. "Mécanique non-linéaire et éléments finis." Version Electronique e.1.0, 2001. <http://www.paris.ensam.fr/lmsp>
15. Dean, E. A. et Lopez, J. A. Empirical dependence of elastic module on porosity for ceramic materials. *Journal of the American Ceramic Society*, 1983, vol. 66, no 5, p. 366
16. Delale, F., and F. Erdogan. "The Crack Problem For A Nonhomogeneous Plane". *Journal Of Applied Mechanics* 50 (3): 609. doi:10.1115/1.3167098.1983.
17. Dufort, L., S. Drapier, and M. Grédiac. "Closed-Form Solution For The Cross-Section Warping In Short Beams Under Three-Point Bending". *Composite Structures* 52 (2): 233-246. doi:10.1016/s0263-8223(00)00171-9. 2001.
18. EinsteinI, Albert. Einstein bestimmung der moleküldimensionen. *Annalen der Physik*, 1906, vol. 324, no 2, p. 289
19. Félix Balima. Structure et porosité de systèmes lamellaires sous haute pression : cas du graphite et de la vermiculite. *Science des matériaux [cond-mat.mtrl-sci]*. Université Claude Bernard - Lyon I, 2012. Français. tel-00845579 [20] INAGAKI, Michio. Pores in carbon materials-importance of their control. *New Carbon Materials*, 2009, vol. 24, no 3, p. 193-232.
20. Hasselman, D. P. H. On the porosity dependence of the elastic module of polycrystalline refractory materials. *Journal of the American Ceramic Society*, 1962, vol. 45, no 9, p. 452
21. Khelifa_Zoubida .Analyse et modélisation de l'influence de cisaillement transverse sur le comportement statique et dynamique des poutres FGM. Thèse de Doctorat de l'université de DjillaliJI LiabesI de Sidi Bel Abbes .2016.
22. Hildebrand F.B., Reissener E., Thomas G.G., Notes on the foundations of theory of small displacements of othotropic shells .NACA T.N° : 1833, 1949.
23. Hopkinson, N., Hague, R., and Dickens, P. (Eds.). "Rapid manufacturing: an industrial revolution for the digital age". John Wiley & Sons.2006.

24. Jean-Marie Berthelot . « Matériaux composites, comportement mécanique et analyse des structures ». 5^{ème} Edition, Lavoisier ,2012
25. Karama M., Afaq K.S, Mitsou S., Mechanical behavior of laminated composite beam by the new multi-layered laminated composite structures model with transverse shear stress continuity, *International Journal of Solids and Structures*, vol. 40, p. 1525-1546.(2003).
26. Kausch. H, N. Heymans, C. J. G. Plummer, P. Decroly, *Matériaux polymères : propriétés mécaniques et physiques*, Presses polytechniques et universitaires romandes (2001)
27. Koo J.H, “Polymer Nano composites: Processing, characterization, and applications”, Editeur: MC Graw – Hill, (2006)
28. Kovacik, J. Correlation between elastic modulus, shear modulus, poisson's ratio and porosity in porous materials. *Advanced Engineering Materials*, 2008, vol. 10, no 3, p. 250
29. Kovacik, J. Correlation between shear modulus and porosity in porous
30. shear stress continuity, *International Journal of Solids and Structures*, vol. 40, p. 1525-1546.
31. Kumar, R.Roop, and S Maruno. "Functionally Graded Coatings Of HA–G–Ti Composites And Their In Vivo Studies". *Materials Science And Engineering: A* 334 (1-2): 156-162. doi:10.1016/s09215093(01)01792-0.2002.
32. Niino, M., and Kisara, K. "The Present Status of the Functionally Graded Materials, and Future Prediction". *Journal of the Japan Society of Powder and Powder Metallurgy*, 51(4), 242-249. doi:10.2497/jjspm.51.242.2004.
33. Mahmood, R. M., Akinlabi, E. T., Shukla, M., & Pityana, S. (2012). Functionally Graded Material:An overview. Retrieved from <http://researchspace.csir.co.za/dspace/handle/10204/6548>
34. Marin, R. Bruce et HAYNES, Russell R. Theoretical analysis of the Effects of Air Voids in Concrete. In : *Journal Proceedings*. 1971. p. 36
35. Reddy J. N. A simple higher-order theory for laminated comp osite plates. *ASME J.Appl. Mech* , 51(14) :745752, 1984.
36. Sallai Ben-Oumrane 2010« Etude et analyse des structures en FGM : Comparaison entre E-FGM, P-FGM et S-FGM. » Thèse de Doctorat de l’université de Djillali Liabes de Sidi Bel Abbes 2011.

37. Sayyad A. S. and Ghugal Y. M. Analytical solutions for bending, buckling, and vibration analyses of exponential functionally graded higher order beams. *Asian Journal of Civil Engineering*, 19(5) :607623, 2018.
38. Shanmugavel, P., Bhaskar, G.B., Chandrasekaran, M., Mani, P.S., Srinivasan, S.P.: An overview of fracture analysis in functionally graded materials. *Eur. J. Sci. Res.* 68(3), 412-439 (2012).
39. Tlidji Y. Elasticity solution for bending response of functionally graded sandwich plates under thermomechanical loading. Thèse de Doctorat de l'université de Djillali Liabes de Sidi Bel Abbès 2014.
40. Touratier M. An efficient standard plate theory. *Int. J. Engng Sci.*, 29(8) :901916, 1991.