

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ IBN KHALDOUN DE TIARET.



FACULTÉ DES SCIENCES APPLIQUÉES
DÉPARTEMENT GÉNIE CIVIL

Mémoire de fin d'études en vue de l'obtention du diplôme de Master

Spécialité : Génie Civil

Option : ouvrage d'art

Présenté par :

MEHDI MOHAMED

MILOUDI TAYEB

Sujet du mémoire

Etude de la flexion statique et vibration libre des poutres FGM à l'aide de théorie de la déformation par cisaillement exponentiel

Soutenu publiquement le .././2022 devant le jury composé de :

Mr, Belmahi Samir

Mr, Chikh Abdelbaki

Mr, Khiloun Mokhtar

M^{me}, Kharoubi Lamia

Président

Rapporteur

Examineur

Examineur

PROMOTION : 2021/2022





Remerciements

Avant de commencer à parcourir cette thèse,
j'aimerais faire quelques remerciements.

Je remercie **Mr. Chikh Abdelbaki** pour l'encadrement,
ses précieux conseils et toute la confiance
qu'il m'a accordée tout au long de cette thèse.

Mes remerciements s'adressent à
Mr. Belmahi Samir qui a accepté de présider mon jury
puis **Mr. Khiloun Mokhtar** et **M^{me} Kharoubi Lamia**
qui ont accepté la lourde tâche de rapporter
mon travail.

Je tiens à remercier également toutes
les personnes qui ont participé de près ou
de loin à la réalisation de ce travail



Dédicace

Je dédie ce travail à ceux qui luttent
pour régulariser, démocratiser et libérer
l'accès aux ressources scientifiques
académiques.



MILOUDI TAYEB

MEHDI MOHAMED

Sommaire

Liste des figures	I
Liste des tableaux	III
Liste notations.....	IV
Résumé.....	VII
Abstract.....	VIII
المخلص.....	IX

INTRODUCTION GENERALE

<u>Introduction générale</u>	1
------------------------------------	---

CHAPITRE I GENERALITES SUR LES MATERIAUX A GRADIANTS DE DEPROPRIETES

1.1 <u>Introduction</u>	4
1.2 <u>Histoire du développement architectural du concept FGM</u>	4
1.3 <u>La Définition et le concept d'un matériau à gradient de propriétés</u>	5
1.4 <u>Différence entre FGM et les matériaux composites traditionnels</u>	6
1.5 <u>L'intérêt d'utilisation des FGM</u>	7
1.6 <u>Propriétés physiques et mécaniques des FGM</u>	7
1.6.1 <u>Propriétés physiques de l'aluminium</u>	7
1.6.2 <u>Propriétés physiques de la céramique</u>	9
1.7 <u>Propriétés matérielles effectives d'un matériau FGM</u>	9
1.8 <u>Domaines d'application des matériaux à gradients évalués FGM</u>	10
1.9 <u>Les différentes lois qui régissent la variation des propriétés matérielles suivant l'épaisseur d'une poutre FGM</u>	11
1.9.1 <u>Propriétés matérielles de la poutre P-FGM</u>	11
1.9.2 <u>Propriétés matérielles de la poutre S-FGM</u>	12
1.9.3 <u>Les propriétés matérielles de la poutre E-FGM</u>	13
1.10 <u>Conclusion</u>	15

CHAPITRE II LES DIFFERENTES THEORIES DES POUTRES

11.1 <u>Introduction</u>	17
11.2 <u>Historique des théories des poutres</u>	17
11.3 <u>Le comportement des poutres composites</u>	17
11.4 <u>Les différents types de poutres</u>	18
<u>Poutre simple</u>	18
<u>Poutre console</u>	18
<u>Poutre avec porte-à-faux</u>	18
<u>Poutre continue</u>	18

<u>Poutre à double encastrement</u>	18
<u>Poutre supportée à double encastrement</u>	19
11.5 <u>Les différentes théories des poutres</u>	19
11.5.1 <u>Modèle d'Euler Bernoulli (Classical Beam Theory- CBT)</u>	19
11.5.2 <u>Modèle de Timoshenko (FSDBT)</u>	20
11.5.3 <u>Théorie d'Ordre Elevé</u>	22
11.6 <u>Conclusion</u>	25

Chapitre III Flexion statique et vibration libre d'une poutre FGM à l'aide d'une théorie de déformation par cisaillement exponentielle

<u>12. Introduction</u>	27
<u>13. Formulation du problème</u>	29
<u>13.1 Propriétés des matériaux</u>	29
<u>13.2 Cinématique et équations constitutives</u>	30
<u>13.3 Équations du mouvement</u>	31
<u>14. Solution analytique</u>	32
<u>16. Conclusions</u>	40

Chapitre IV Résultats et discussion

<u>Introduction</u> :	42
<u>Résultats et discussion</u>	42
<u>Conclusion</u> :.....	408
Conclusion Générale et perspectives.....	50

Liste des figures

Chapitre I : Généralités Sur Les Matériaux A Gradients De Propriétés

Figure I.1 : Un type d'un matériau FGM en céramique et métal.....	6
Figure I.2 : La distribution composante des matériaux	7
Figure I.3 : Modèles analytiques pour une couche en FGM.....	10
Figure I.4 : Les dimensions de la poutre FGM.....	11
Figure I.5 : La variation du module de Young dans une poutre P-FGM.....	12
Figure I.6 : Variation de la fraction volumique dans une poutre S-FGM.....	13
Figure I.7 : Variation du module de Young dans une poutre E-FGM.....	14

Chapitre II: Les Differentes Theories Des Poutres

Figure II.1 : Cinématique d'Euler Bernoulli.....	20
Figure II.2 : Cinématique de Timoshenko.....	21
Figure II.3 : Cinématique de la Théorie d'Ordre Elevé.....	23

Chapitre III: Les Differentes Theories Des Poutres.

Fig. III.1 Géométrie et coordonnées d'une poutre FG	30
Fig. III.2 La variation du déplacement axial u dans l'épaisseur d'une poutre FG ($L = 2h$).....	36
Fig. III.3 La variation de la contrainte σ_x dans l'épaisseur d'une poutre FG ($L = 2h$).....	36
Fig. III.4 La variation de la contrainte de cisaillement transverse τ_{xz} dans l'épaisseur d'une poutre FG ($L = 2h$).....	37
Fig. III.5 Variation du déplacement transversal W en fonction de la longueur adimensionnelle d'une poutre FG ($L = 5h$).....	37
Fig. III.6 Variation de la fréquence fondamentale adimensionnelle W du poutre FG d'indice de loi de puissance k et rapport portée/profondeur L/h	38

Liste des tableaux

Tableau IV.1 : Flèches et contraintes adimensionnelles des poutres FG sous charge uniforme.....35

Tableau IV.2 : Variation de la fréquence fondamentale $\bar{\omega}$ avec l'indice de loi de puissance pour une poutre FG.....38

Tableau IV.3 : Trois premières fréquences non dimensionnelles $\bar{\omega}$ des poutres FG39

Tableau IV.4 : Flèches et contraintes adimensionnelles des poutres FG sous charge uniforme.....43

Tableau IV.5 : Variation de la fréquence fondamentale $\bar{\omega}$ avec l'indice de loi de puissance pour une poutre FG.....46

Tableau IV.6 : Trois premières fréquences non dimensionnelles $\bar{\omega}$ des poutres FG.....47

Liste de notations

$\{ \}$	Vecteur colonne.
$[\]$	Matrice.
E	Module de Young.
E_C	Module de Young de la céramique.
E_m	Module de Young de métal.
$E_{(z)}$	Module de Young en fonction de « z ».
E_1, E_2	Propriétés matérielles.
ν	Coefficient de poisson.
ρ	Densité de masse.
$g(z)$	Fonction volumique de la poutre.
G_{xz}	Module de cisaillement transversal.
$f(z)$	Fonction de gauchissement (fonction de cisaillement transverse).
$f'(z)$	La première dérivée de la fonction de gauchissement par rapport à z.
$\Psi(z)$	Fonction de gauchissement (fonction de cisaillement transverse).
$\emptyset(z)$	Fonction de gauchissement.
\emptyset	La rotation totale de la section mesurée sur la ligne moyenne de la poutre.
P	L'indice de puissance.
P_1, P_2	Les propriétés des faces supérieures et inférieures de la poutre FGM.
u	Déplacement suivant X.
w	Déplacement dans la direction de Z ou bien la flèche.
u^0	Déplacement au milieu de la section suivant X.
w^0	Déplacement au milieu de la section suivant z.

u_b	Composante de flexion.
u_s	Composante de Cisaillement.
w_b	Composante de la flèche due à la flexion.
w_s	Composante de la flèche due au cisaillement.
\bar{u}, \bar{w}	Les déplacements adimensionnels.
σ_z	Contrainte normale transversale.
σ_x	Contrainte plane.
$\bar{\sigma}_x$	Les contraintes normales adimensionnelles.
τ_{xz}	Contrainte de cisaillement.
$\bar{\tau}_{xz}$	Les contraintes de cisaillements adimensionnels.
γ_{xz}	Déformation angulaire.
γ_{xz}^0	La déformation angulaire mesurée sur la ligne moyenne de la poutre.
ε_x	Déformations dans les directions x.
ε_0	Déformation normale.
k_x^b	Courbure suivant X due à la flexion.
K_x^s	Courbure suivant X due au cisaillement.
Q_{11}, Q_{55}	Constantes de rigidité.
h	Hauteur de la poutre.
L	Longueur de la poutre.
∂	Dérivée partielle.
δ	Variation visuelle.
δu	Variation virtuelle de l'énergie de déformation.

Liste des notations

δ_v	Variation virtuelle de l'énergie potentielle.
$\delta_{U0}, \delta_{Wb}, \delta_{ws}$	Champ virtuel de déplacement.
a_{ij}	Valeurs propres.
$A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}, H_{ij}^S$	Coefficient de rigidités
q	Charge transversale.
N	Efforts normaux de membrane.
M_b	Moments de flexion pure.
M_s	Moments de flexion supplémentaire due au cisaillement transverse.
Q	Effort de cisaillement.
U_m, W_{bm}, W_{sm}	Paramètres arbitraires.
$[C]$	Matrice symétrique des valeurs propres.
$\{\Delta\}$	Le vecteur des déplacements.
$\{F\}$	Le vecteur des charges.

Résumé

L'objectif de ce thème est d'effectuer une étude sur l'effet du cisaillement transverse sur le comportement statique des poutres en matériau à gradient de propriété FGM chargées en flexion.

Ce matériau présente une variation continue des constituants des matériaux multi-phases dans un profil prédéterminé et qui est défini par la variation des fractions de volume en loi de puissance à travers l'épaisseur du matériau.

Le comportement statique des poutres en matériaux FGM est déterminé par l'utilisation d'approches mathématiques basées sur la formulation des équations d'équilibre et le développement de la théorie des poutres.

Mots clés : Cisaillement transverse, Comportement statique, poutre FGM.

Abstract

The objective of this theme is to conduct a study on the effect of transverse shear on the static behaviour of beams in gradient material property of FGM loaded in bending.

This material presents a continuous variation of multi-phases constituents of materials in a pre-definit profile which is defined by change of volume fractions in power law toward the thickness of material.

The static behaviour of in materials FGM beams is determined by the use of approaches based on mathematical formulation of the equilibrium equations and the development of beam's theory.

Key words: Transverse Shear, static behaviour, FGM beam.

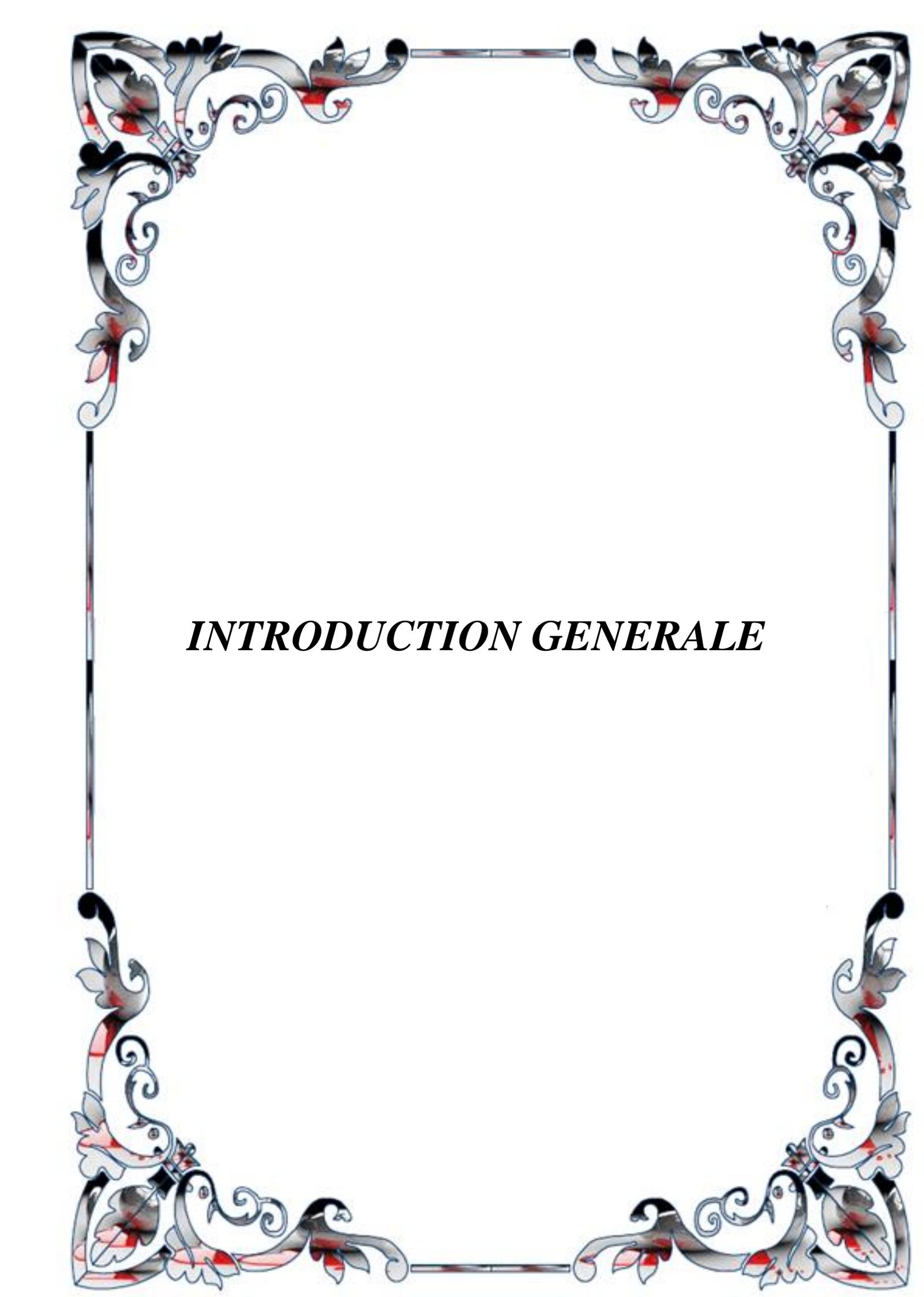
المخلص

الهدف من هذا البحث هو إجراء دراسة حول تأثير القص العرضي على العلوك السكوني للروافد المتدرجة وظيفيا المحملة بالانحناء.

هذه الرافدة تبرز تغير مستمر لمكونات المواد المتعددة الطبقات في الجانب المحدد سابقا و المعروف باختلاف النسب الحجمية بقانون الاسية من خلال سمك الرافدة.

العلوك السكوني للروافد امترجة وظيفيا تحدد باستعمال التقريب الحسابي المركز على معادلات التوازن و تطور نظرية الروافد

الكلمات المفتاحية : القص العرضي، العلوك السكوني، رافده متدرجة وظيفيا.



INTRODUCTION GENERALE

Introduction générale

Sachant que l'utilisation des matériaux dans les structures en génie civil pose d'énormes problèmes complexes. La conception des nouveaux matériaux au point de vue caractérisation et dimensionnement demande des connaissances variées en résistance des matériaux, en mécanique des milieux continus ainsi que les outils informatiques.

Le développement des matériaux composites a permis d'associer des propriétés spécifiques à différents matériaux au sein d'une même pièce. L'optimisation locale de ses propriétés par association d'un matériau de haute dureté à la surface d'un matériau tenace pose le problème d'interface. Cette transition brutale de composition peut générer localement de fortes concentrations de contraintes la solution d'une transition continue des propriétés recherchées par un gradient de propriétés FGM.

Pour cela nous nous sommes intéressés aux matériaux à gradient de propriétés (FGM) représentent des derniers développements, la révolution et la conception de ces matériaux a été défini au 21ème siècle. Ils sont utilisés pour des emplois à une large variété d'applications.

Le but de ce travail est d'analyser la flexion des poutres en FGM en utilisant les différentes théories de cisaillement des poutres telle que la théorie classique CBT, la théorie de cisaillement de premier ordre et les théories de cisaillement d'ordre élevé.

Plusieurs chercheurs ont étudié le comportement des poutres en matériaux FGM, ils ont défini la fraction volumique en utilisant plusieurs lois de mélange ; telle que la loi de puissance P-FGM, la loi exponentielle E-FGM ou encore la loi sigmoïde S-FGM pour assurer une répartition harmonieuse des contraintes entre toutes les interfaces.

Le travail présenté dans ce mémoire s'articule autour de quatre chapitres comme suit :

Le premier chapitre est consacré à présenter des généralités sur les matériaux à gradient de propriété tout en définissant leurs concepts, leurs caractéristiques et leurs domaines d'application.

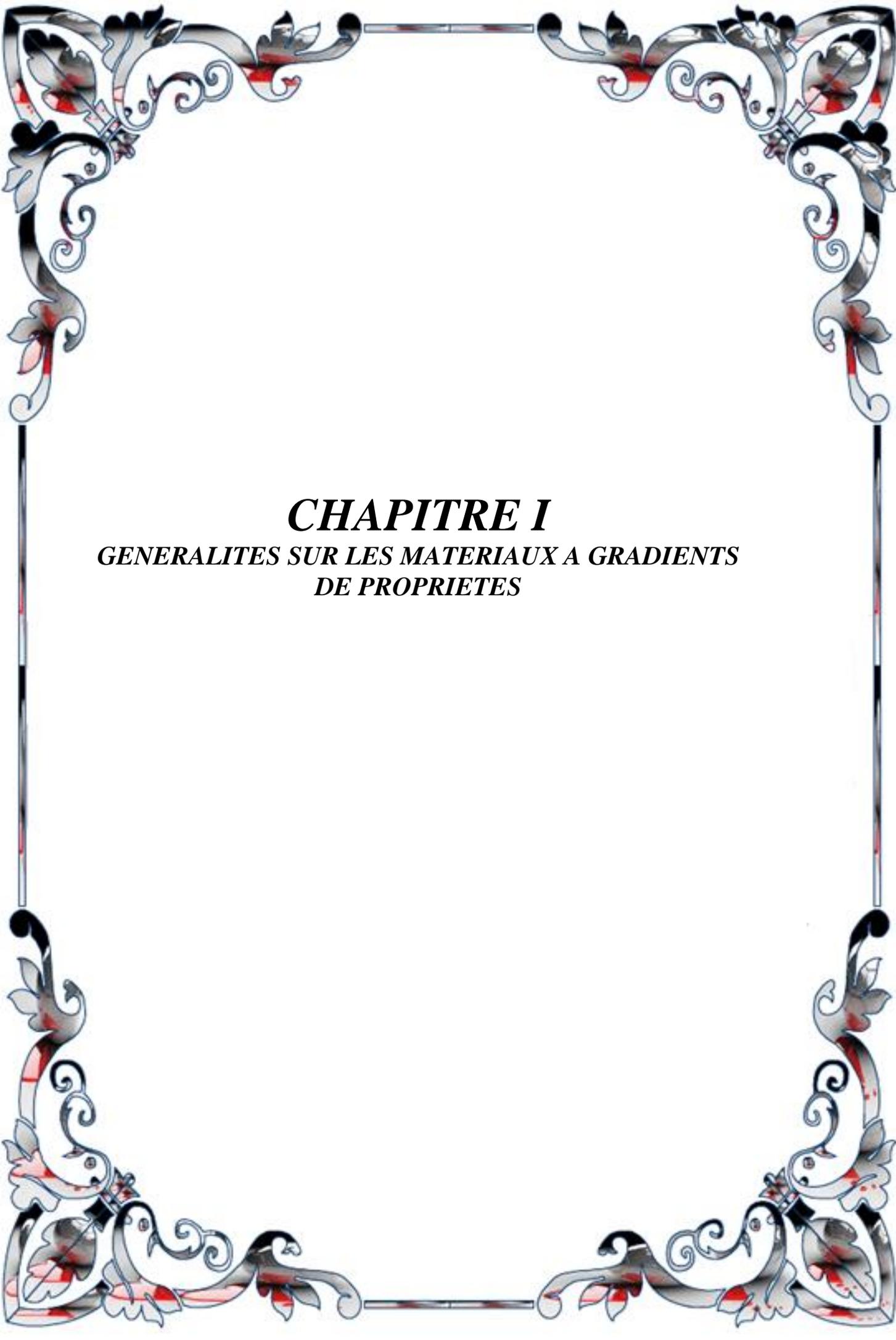
Le second chapitre, est réservé pour les différentes théories des poutres.

Dans le troisième chapitre, on présente une analyse statique des poutres en matériaux à gradient de propriété type FGM en se basant sur le concept de la surface médiane

Enfinement le quatrième chapitre contient une validation et comparaison et présentation des résultats.

Le présent travail se termine par une conclusion générale où on souligne

l'efficacité de cette théorie de cisaillement raffinée dans la résolution du comportement statique des poutres FGM simplement appuyées ainsi par des perspectives envisagées pour des travaux futurs.



CHAPITRE I
GENERALITES SUR LES MATERIAUX A GRADIENTS
DE PROPRIETES

1.1 Introduction

De nombreux milieux naturels présentent des variations unidirectionnelles et continues de leurs propriétés élastiques. Les tissus vivants, la croûte terrestre, les océans ou encore l'os cortical en font partie. Tirant leur inspiration de la nature qui les entoure, les scientifiques (chercheurs et ingénieurs), se sont penchés sur les avantages que présentaient ce type de matériaux en termes de comportement mécanique et c'est ainsi que l'on vit apparaître, dans les années 1980, les matériaux à gradients de propriétés (Functionally Graded Materials « FGM »). Ils permettent par exemple de reproduire les propriétés structurales et matérielles des tissus biologiques tels que l'os à différentes étapes de son évolution (croissance, vieillissement ou pathologie).

Les matériaux à gradient de propriétés (FGM), sont un type de matériaux composites produit en changeant sans interruption les fractions de volume dans la direction d'épaisseur pour obtenir un profil bien déterminé. Ces types de matériaux, ont suscité beaucoup d'attention récemment en raison des avantages de diminuer la disparité dans les propriétés matérielles et de réduire les contraintes thermiques. La variation continue des propriétés mécaniques confère au matériau un comportement optimisé. Les FGM sont particulièrement utilisés dans les applications de haute technologie : aéronautique, aérospatiale, nucléaire, semi-conducteurs, et en Génie Civil et trouvent également des applications biomédicales.

1.2 Histoire du développement architectural du concept FGM

Actuellement, les structures fonctionnellement classées se trouvent en abondance dans la nature. Nous pouvons les rencontrer dans le bio tissu des plantes et des animaux et même dans notre corps en citant à titre d'exemple les os, les coquilles, les noix de coco et les feuilles de certaine graminée comme les bambous. Ces derniers sont dotés de plusieurs caractéristiques de qualité supérieure, ils sont légers, solides et élastiques, celles-ci sont dues à leurs nœuds qui créent une échelle et donnent naissance à l'activité de structure.

Dans la même perspective, les feuilles de noix de coco sont soufflées par le vent et transportées librement à n'importe quelle direction, alors qu'une partie très rigide reste en s'adoptant à son milieu de vie.

De même, une simple comparaison entre les plantes qui vivent sur une surface plane et celles poussant sur une pente, nous concluons que leur comportement varie en fonction des environnements dynamiques.

Tous ces exemples, ouvrent la porte vers la biométrie qui tente d'appliquer les caractéristiques de conception de la nature dans les sciences industrielles et médicales.

Les FGMs ont connu une évolution importante dans le temps. D'abord, ils ont été proposés en 1984 par deux chercheurs dont l'un étudiait l'aéronautique et l'autre s'intéresse aux matériaux avancés. Ces deux-là parlaient de leur rêve concernant un avion spatial exposé à un environnement à très haute température (1700° c).

Ils discutaient la problématique de la résistance à de graves écarts de la température entre l'intérieur et l'extérieure et ils se confrontent à la réalité suivante : Il n'existe pas de matériau unique supportable à une telle condition. À partir de cette réflexion, ces deux chercheurs ont mis au point ce qu'on appelle les FGMs, ils les ont considérés comme des matériaux caractérisés par une résistance thermique améliorée et par des propriétés mécaniques spécifiques. Pour ce faire, ils ont choisi pour l'utilisation de la céramique à la surface extérieure exposée à l'environnement à haute température, cependant pour la surface intérieure, ils ont conçu à utiliser de matériel conducteur de chaleur.

En 1987, leur recherche a été acceptée par le ministère de l'éducation et des sciences qui a lancé un grand projet universitaire traitant ces FGMs. À partir de cette mise en valeur du projet, plusieurs autres chercheurs et plusieurs laboratoires ont initié leur recherche en discutant les méthodes de développement des FGMs, la conception des matériaux, leur production et leur évolution.

Enfin, une contrainte thermique relaxant matériau FGM a vu le jour lors d'une première conférence internationale qui s'est tenue à Sendai en 1990, ce qui a conduit à fonder toute une technologie, qui est devenue, même, de recueillir les attentions, non seulement au niveau des nations, mais aussi au niveau mondial.

1.3 La Définition et le concept d'un matériau à gradient de propriétés

Un matériau à gradient de propriétés c'est un type de matériaux composites composé de deux ou plusieurs matériaux relatifs à des fractions volumiques et microstructure qui sont conçus pour avoir une continuité spatiale des variables. Un FGM est produit en changeant sans interruption les fractions de volume dans la direction d'épaisseur pour obtenir un profil bien déterminé. La plupart des chercheurs emploient trois fonctions pour décrire la variation de la fraction volumique qui sont :

- La fonction de puissance (P-FGM),
- La fonction sigmoïde (S-FGM)
- La fonction exponentielle (E-FGM),

Ces matériaux FGMs sont généralement fait à partir d'un mélange de métaux et de céramique (Figure I.1) par un processus de métallurgie de poudre, le cote métal riche est typiquement place dans les régions ou les propriétés mécaniques, comme la dureté, le besoin d'être élèves. en revanche, la céramique riche, ce qui a la conductivité faible et peut résister aux températures plus élevées, est place dans les régions de grand gradient de la température

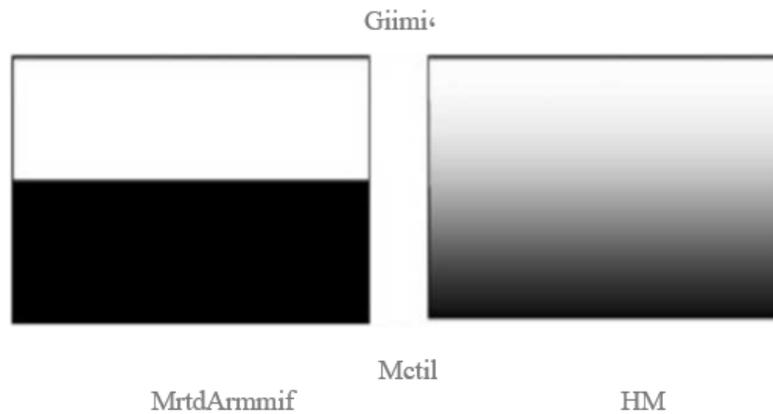


Figure I.1 : un type d'un matériau FGM en céramique et métal.

1.4 Différence entre FGM et les matériaux composites traditionnels

Un modèle simple illustrant les différences entre les matériaux à gradient de propriétés (FGM) et les matériaux plus conventionnels est montré sur la (figure I.2) : (a) un matériau plans composé, (b) un matériau relié et (c) un matériau à gradient de propriété. Le matériau plan composé à une caractéristique plane, et le matériau relié à une frontière sur l'interface de deux matériaux. Les FGM ont de excellentes caractéristiques qui diffèrent de ceux des matériaux plans composés et reliés. Par conséquent, les FGM attirent l'attention en termes de leur application dans les domaines industriels. Puisque les FGM ont une double propriété des deux matières premières qui sont mélangées ensemble, et la distribution composante est graduée sans interruption.

Par exemple, l'un des FGM qui se composent du métal et en céramique a la caractéristique de la conductivité thermique et de la force métallique dans le côté en métal et la résistivité aux hautes températures dans le côté en céramique.

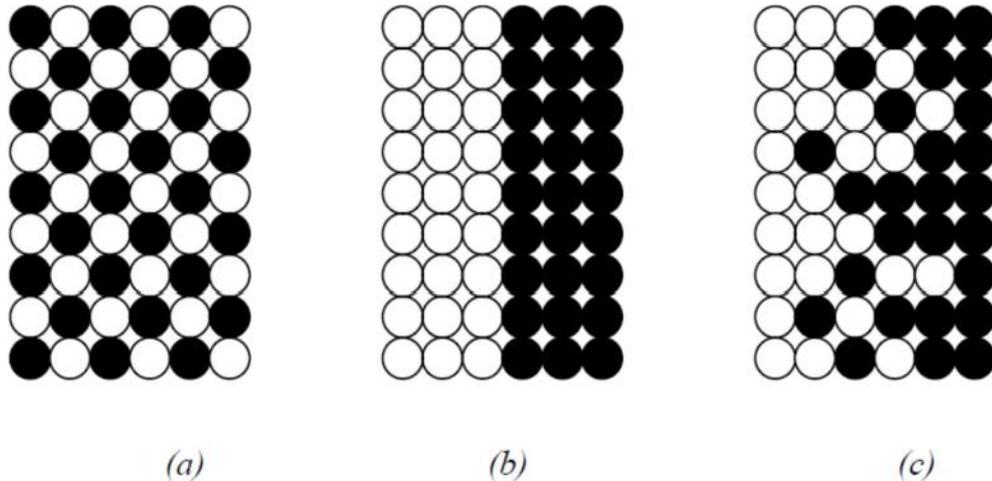


Figure I.2 : La distribution composante des matériaux

Matériau plan composé (a), Matériau relié (b), Matériau à gradient de propriété (c).

1.5 L'intérêt d'utilisation des FGM

Il y a beaucoup d'intérêt pour la mise sur pied des structures ainsi les conditions fonctionnelles peuvent varier avec l'endroit. Dans la plupart des cas, ceci impliquera de varier les matériaux qui sont employés aux endroits spécifiques dans la structure ayant pour résultat les interfaces discrètes dans tout. A nombre de proposé des technologies manufacturières pour le traitement de FGM.

Récemment, les concepts de FGM sont devenus d'intérêts scientifiques pour améliorer l'exécution des systèmes géométriquement complexes des structures.

1.6 Propriétés physiques et mécaniques des FGM

Pour ce travail le matériau FGM choisi est (Aluminium-Céramique).

1.6.1 Propriétés physiques de l'aluminium

Définition : L'Aluminium est un métal blanc qui après polissage peut devenir réfléchissant.

Propriétés physiques : L'Aluminium a une température de fusion relativement basse d'environ 660°. Il en résulte une facilité de fusion qui présente un avantage certain pour les opérations de fonderie. L'Aluminium est très ductile, on peut aisément le mettre en forme.

La masse volumique de l'Aluminium est de 2700kg/m³. L'utilisation de l'Aluminium s'impose donc dans les domaines aéronautiques et du transport.

Propriétés mécaniques : Les propriétés mécaniques des métaux présentent un grand intérêt dans la vie quotidienne, elles peuvent être classées en deux groupes :

- Celles qui se rapportent à la résistance mécanique du métal :
 - Résistance à la traction.
 - Résistance à la pénétration (dureté).
- Celles qui concernent les modifications de forme que le métal peut subir sans se briser :
 - La malléabilité (mises en feuilles).
 - La ductilité (mise en fils).

Propriétés des alliages d'aluminium : L'Aluminium a pour propriétés une :

- Température de travail élevée.
- Très bonne résistance à la corrosion.
- Légèreté.
- Très bonnes solidités, dureté et rigidité.
- Bon rapport force/poids.
- Bonnes propriétés de protection contre les interférences électromagnétiques.
- Bonne conductivité thermique.
- Conductivité électrique élevée.
- Bonnes caractéristiques de finition.
- Entièrement recyclable.

Résistance à la corrosion : Grâce à la couche d'oxyde qui se forme en surface, les alliages d'Aluminium résistent à la corrosion. On peut rendre cette couche protectrice d'oxyde plus épaisse par galvanisation. L'Aluminium et ses alliages peuvent être utilisés sans protection supplémentaire comme revêtement extérieur de bâtiments. Par contre dans les milieux corrosifs, les alliages d'Aluminium peuvent subir les effets de la corrosion. Des piqûres, de la corrosion sous contrainte, de la fatigue corrosion, voire de la corrosion généralisée peuvent se développer. Pour des conditions données, la sévérité de l'attaque dépend de l'alliage utilisé et de son état.

1.6.2 Propriétés physiques de la céramique

Définition : La céramique résulte des terres et des roches broyées (matériaux géologiques) ou bien d'une argile qui sera modelée puis cuite sous haute température (transformation irréversible) ce qui fait perdre au matériau sa plasticité donc il ne peut plus se réhydrater.

Propriétés physiques : La céramique a une facilité de fusion qui présente un avantage certain pour les opérations de fonderie. La masse volumique de la céramique est de 3800kg/m^3 . L'utilisation de la céramique s'impose dans les domaines de l'habitat et du design, l'industrie céramique et métallurgique, aéronautique et spatial, médicale et dans les revêtements.

Propriétés mécaniques : Les propriétés mécaniques de la céramique dépendent des :

- Matières première employées.
- Méthodes de fabrication qui fixent les microstructures finales et déterminent la répartition des différentes phases en présence.

Propriétés des céramiques : Les propriétés de la céramique sont :

- Un module de YOUNG élevé (Liaisons, covalente, ioniques).
- Une dureté élevée (Abrasif, outils de coupe, surfaces de frottement qui doivent résister à l'usure, résistance mécanique élevée, bonne tenue à chaud, rigidité élevée).
- Une très bonne résistance à la compression non à la traction (Résistance à la Compression = 200 MPa).

1.7 Propriétés matérielles effectives d'un matériau FGM

Les matériaux à gradient de propriétés sont généralement fabriqués par deux phases matérielles avec des propriétés différentes. Une description détaillée des microstructures graduées réelles n'est pas disponible, excepté peut-être pour l'information sur la distribution de fraction volumique. Puisque la fraction de volume de chaque phase varie graduellement dans la direction de la graduation, les propriétés effectives des FGM changent le long de cette direction.

Par conséquent, nous avons deux approches possibles pour modéliser un FGM.

La première approche : une variation par tranche de fraction volumique de la céramique ou du métal est assumée, et le FGM est pris pour être posé avec la même fraction de volume dans chaque région, c.-à-d., couches quasi homogènes de céramique-métal (figure. I.3a).

La deuxième approche : une variation continue de la fraction volumique de la céramique ou du métal est assumé (figure. I.3b), et la fraction de volume en métal peut être représentée suivant une fonction dépendante de la coordonnée Z (épaisseur).

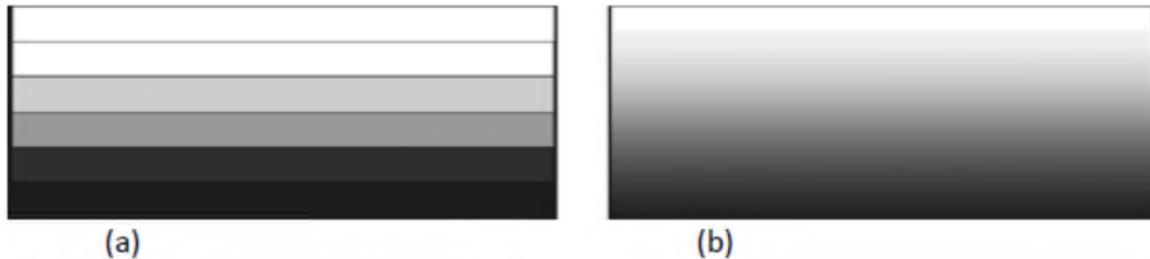


Figure.I.3 : Modèles analytiques pour une couche en FGM.

La plupart des chercheurs emploient la fonction de loi de puissance ; la fonction exponentielle, ou la fonction sigmoïde pour décrire les fractions de volume. Par conséquent, on considère dans notre travail des poutres FGM avec des variations de la fraction de volume qui suit des fonctions de la loi de puissance.

1.8 Domaines d'application des matériaux à gradients évalués FGM

Le concept des matériaux à gradient évalués FGM est applicable dans des nombreux et larges intervalles de domaines tels que les matériaux de construction, matériaux de conversion d'énergie, aéronautique, aérospatiale, nucléaire et semi-conducteurs. Ainsi, ces matériaux ont deux propriétés contradictoires : la conductivité thermique et l'isolation thermique.

Actuellement, ils permettent la production des matériaux légers, résistants et durables. Les principaux domaines d'application des FGM sont :

- **Génie civil** : ponts à poutre en caisson, les cheminées, les fondations élastiques (ces structures de plaques peuvent être trouvées dans différents types d'applications industrielles telles que radiers), réservoirs de stockage, les piscines.
- **Aéronautique** : composants de moteur-fusée, corps des avions spatiaux.
- **Chimique** : l'échangeur de chaleur, tube de chaleur, récipient de réaction.
- **Ingénierie** : outils de coupe, éléments de moteur.

- **L'énergie nucléaire** : composante des réacteurs nucléaires, pastilles de combustible.
- **Électronique** : semi-conducteur à bande graduée, capteurs.
- **Optique** : fibres optiques, lentilles.
- **Conversion d'énergie** : générateur thermoélectrique, convertisseurthermoïonique, pile à combustible.
- **Matières biologiques** : implants, peau artificielle,
- **Produits en générale** : matériaux de constructions, corps de voiture, verresde fenêtre.

1.9 Les différentes lois qui régissent la variation des propriétés matérielles Suivant l'épaisseur d'une poutre FGM

1.9.1 Propriétés matérielles de la poutre P-FGM

La fraction volumique dans les P-FGM est assure par une loi de puissance sous la forme :

$$g(z) = \left(\frac{z - \frac{h}{2}}{h} \right)^p \quad (\text{I.1})$$

Où p est un paramètre du matériau et h est l'épaisseur de la poutre. Une fois que la fraction de volume local $g(z)$ est définie, les propriétés matérielles d'une poutre P-FGM peuvent être déterminées par la loi des mélanges :

$$E(z) = g(z) \cdot E_1 + [1 - g(z)] \cdot E_2 \quad (\text{I.2})$$

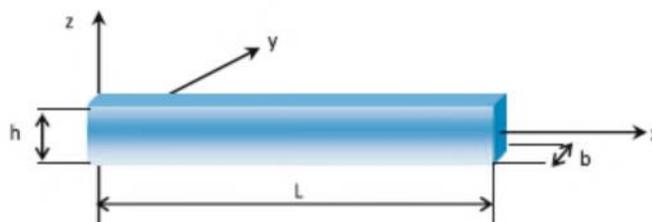


Figure. I.4 : Les dimensions de la poutre FGM.

Où E_1 et E_2 et sont respectivement les propriétés matérielles (modules de Young ou densité) de la surface inférieure ($z = -h/2$) et de la surface supérieure ($z=h/2$) de la poutre FGM. La variation de ces propriétés dans la direction de l'épaisseur de la poutre P-FGM est représentée sur la figure (I.5), il apparaît clairement que le module de Young par exemple change rapidement près de la surface inférieure pour $p > 1$, et augmente rapidement près de la surface supérieure pour $p < 1$. Pour une résolution numérique, par éléments finis par exemples, Les propriétés matérielles effectives E de la couche de FGM, comme le module de Young E , et la densité et le coefficient de poisson ν peut alors être exprimé comme suit :

$$E = \sum_{j=1} E_j g_j \tag{I.3}$$

Là où le E_j et le g_j sont les propriétés matérielles et la fraction volumique de la couche j_j (Figure. I.5), et la somme des fractions de volume de tous les matériaux constitutifs fait l'unité :

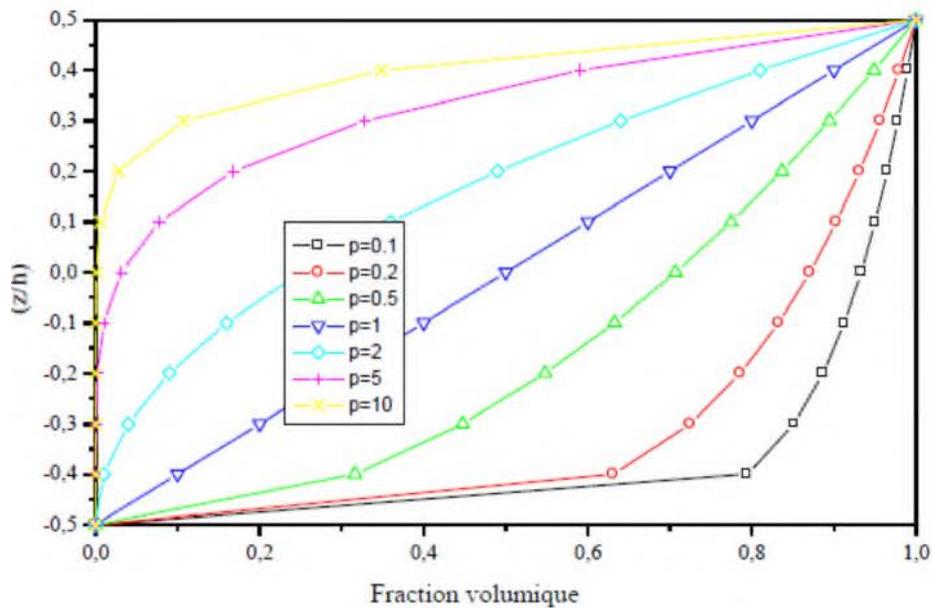


Figure I.5 : La variation du module de Young dans une poutre P-FGM.

1.9.2 Propriétés matérielles de la poutre S-FGM

Si l'on rajoute une poutre P-FGM d'une simple fonction de loi de puissance à une poutre composite multicouche, les concentrations des contraintes apparaissent sur l'interface des deux matériaux Par conséquent, Chung et chi ont défini la fraction de volume de la poutre FGM en utilisant deux fonctions de loi de puissance pour assurer une bonne distribution des contraintes parmi toutes les interfaces.

Les deux fonctions de loi de puissance sont définies par :

$$g_1(z) = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{z}{\frac{h}{2}} \right)^p \quad \text{pour} \quad 0 \leq z \leq \frac{h}{2} \quad (I.4.a)$$

$$g_2(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{\frac{h}{2} - z}{\frac{h}{2}} \right)^p \quad \text{pour} \quad -\frac{h}{2} \leq z \leq 0 \quad (I.4.b)$$

En utilisant la loi des mélanges, le module de Young de la poutre S-FGM peut être calculé par :

$$E(z) = g_1(z).E_1 + [1 - g_1(z)].E_2 \quad \text{Pour} \quad 0 \leq z \leq \frac{h}{2} \quad (I.5.a)$$

$$E(z) = g_2(z).E_1 + [1 - g_2(z)].E_2 \quad \text{Pour} \quad -\frac{h}{2} \leq z \leq 0 \quad (I.5.b)$$

La figure I.6 montre que la variation de la fraction volumique dans les équations (I.5.a) et (I.5.b) représente les distributions sigmoïdes, et cette poutre FGM est appelée (poutre S-FGM).

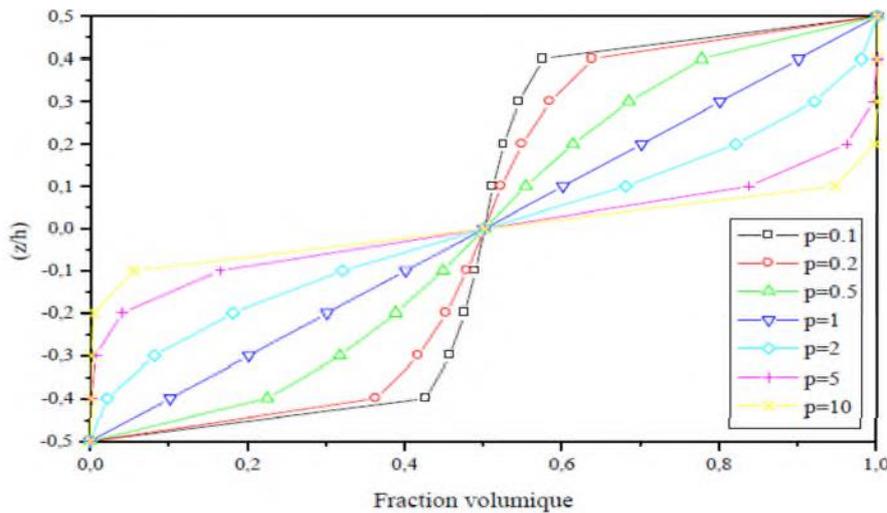


Figure I.6 : Variation de la fraction volumique dans une poutre S-FGM.

1.9.3 Les propriétés matérielles de la poutre E-FGM

Pour décrire les propriétés matérielles des matériaux FGM, la plupart des chercheurs utilisent la fonction exponentielle qui s'écrit sous la forme :

$$E(z) = Ae^{\beta(z+\frac{h}{2})} \quad \text{Avec : } A=E_2 \text{ et } B=\frac{1}{h} \ln \frac{E_1}{E_2} \quad (1.6)$$

La variation du module de Young à travers l'épaisseur de la poutre E-FGM est représentée dans (Figure I.7).

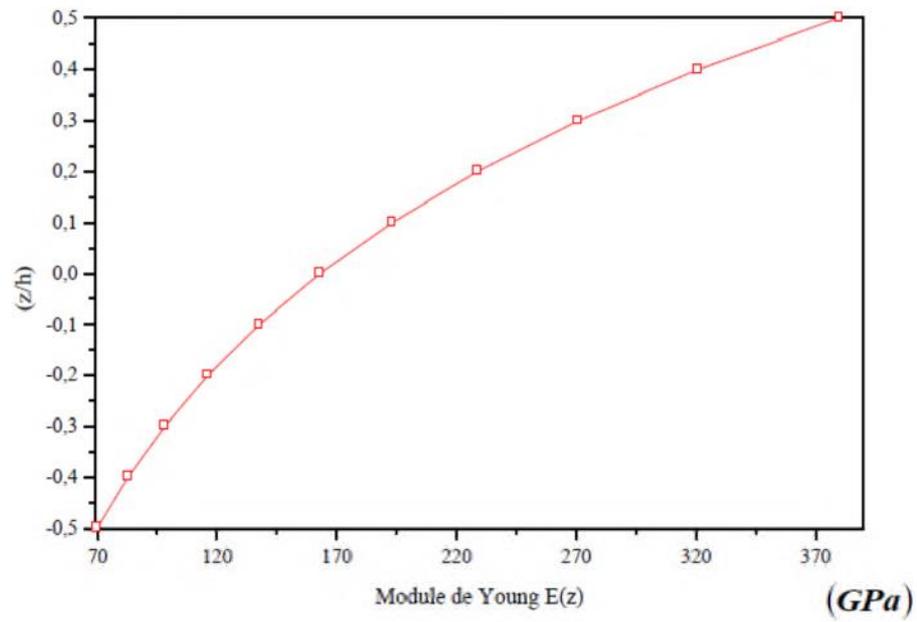
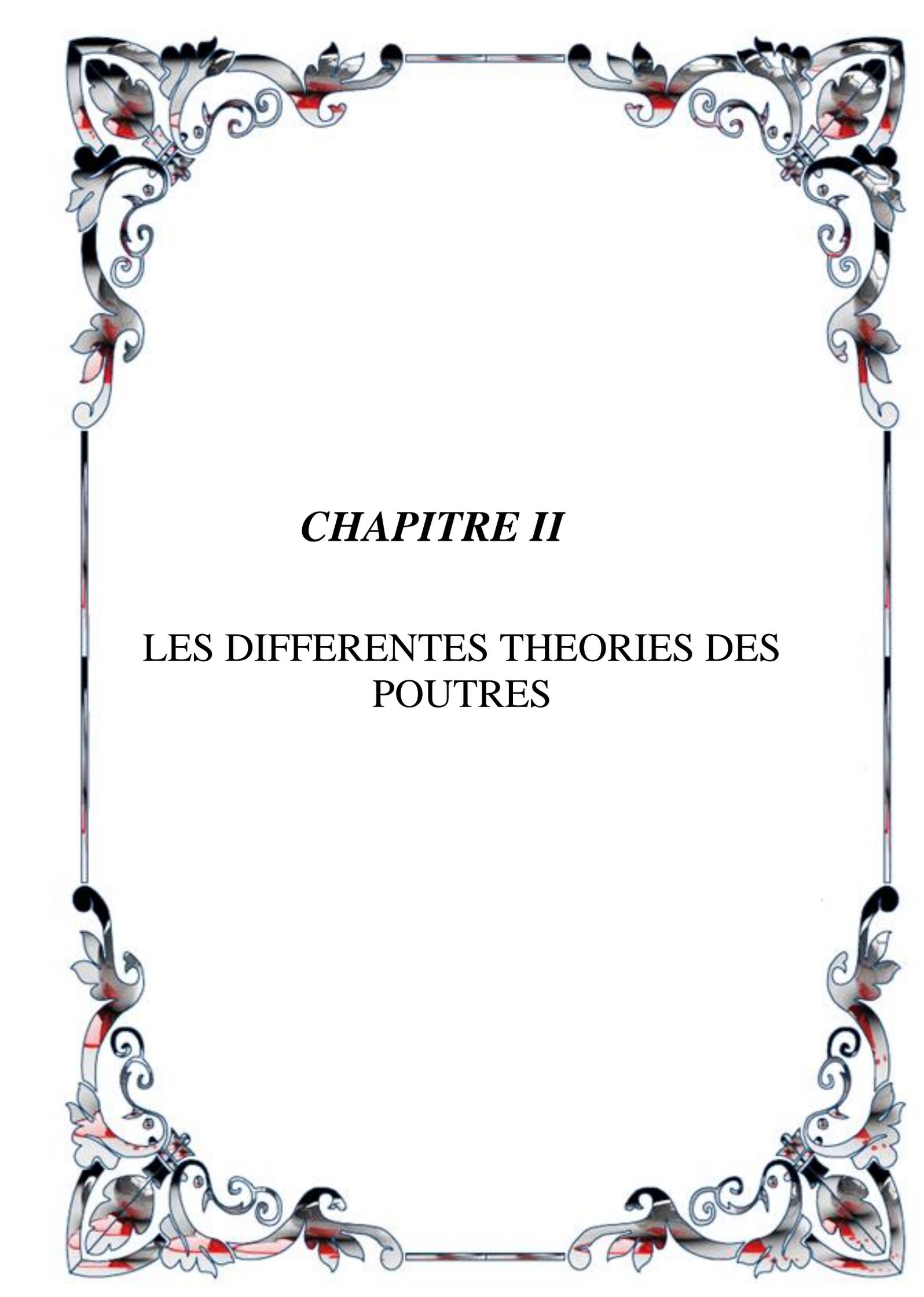


Figure I.7 : Variation du module de Young dans une poutre E-FGM.

1.10 Conclusion

Nous avons vu dans ce chapitre une vue sur historique des FGM dont les premiers pas de la naissance du FGM. D'où une vue sur leur propriété et l'intérêt de leur utilisation, ensuite on s'est intéresser au domaine d'application de ces derniers. Apres nous avons cités les propriétés matérielles effectives d'un matériau FGM, et à la fin nous avons terminés par les différenteslois possibles qui servent à décrire la variation des propriétés matérielles du matériau FGM (module de Young, masse volumique et coefficient de poisson) suivant l'épaisseur d'une poutre, ces lois peuvent être de puissances, exponentielles ou même sigmoïde. Le chapitre suivant va porter sur les différentes théories des poutres.



CHAPITRE II

LES DIFFERENTES THEORIES DES POUTRES

11.1 Introduction

Le terme « poutre » désigne un objet dont la longueur est grande comparée aux dimensions transverses (section fine). Une poutre est un élément de structure utilisée dans la construction des bâtiments, des navires, autres véhicules et dans la fabrication des machines. Cependant, le modèle des poutres peut être utilisé pour des pièces très diverses à condition qu'elles respectent certaines normes.

11.2 Historique des théories des poutres

La paternité de la théorie des poutres est attribuée à Galilée, mais des études récentes indiquent que Léonard De Vinci l'aurait précédé. De Vinci avait supposé que la déformation varie de manière linéaire en s'éloignant de la surface neutre, mais il ne pût finaliser ses calculs car il ne connaissait pas la loi de Hooke. De son côté, Galilée était parti sur une hypothèse incorrecte (il supposait que la contrainte était répartie uniformément en flexion), et c'est Antoine Parent qui obtint la distribution correcte.

Ce sont Leonard Euler et Jacques Bernoulli qui émirent la première théorie utile vers les années 1750, alors que Daniel Bernoulli, le neveu du précédent, écrivit l'équation différentielle pour l'analyse vibratoire. À cette époque, le génie mécanique n'était pas reconnu comme une science, et on ne considérait pas que les travaux d'une académie des mathématiques puissent avoir des applications pratiques, et on continua à bâtir les ponts et les bâtiments de manière empirique. Ce n'est qu'au XIX^e siècle, avec la Tour Eiffel et les grandes roues, qu'on démontra la validité de la théorie à grande échelle.

11.3 Le comportement des poutres composites

L'analyse d'une structure composite est plus complexe que celle d'une structure en matériaux traditionnels, métalliques par exemple. Cela est dû au caractère hautement anisotrope des propriétés mécaniques du matériau de base, tant sur les plans raideur que résistance, et qui sont concentrées dans la direction des fibres. L'importance de développer une analyse sur le comportement des poutres est liée d'une part à l'utilisation des poutres comme éléments de base dans la réalisation des structures, d'autre part à la caractérisation des propriétés mécaniques des matériaux composites et ceci à partir des différents essais réalisés sur des éprouvettes en forme de poutres.

11.4 Les différents types de poutres

La poutre est l'élément structural le plus répandu, puisqu'elle fait partie intégrante de la plupart des ouvrages de construction ou des pièces machines. En réaction aux charges appliquées, des forces et des moments internes se développent dans la poutre pour maintenir l'équilibre.

Poutre simple

C'est une poutre reposant sur deux supports ; l'appui double et l'appui simple. Les points d'appui sont articulés de façon à ce que les extrémités puissent se mouvoir librement pendant la flexion.

Poutre console

C'est une poutre encastrée dans un mur à une extrémité. L'extrémité encastrée ne bouge pas pendant la flexion, tandis que l'autre extrémité est entièrement libre. On appelle aussi cette poutre, poutre en porte-à-faux ou poutre encastrée à une extrémité.

Poutre avec porte-à-faux

C'est une poutre sur deux appuis (un simple et l'autre double), elle a une ou deux extrémités qui dépassent de façon appréciable les appuis (porte-à-faux). Les poutres sont classées suivant leurs appuis. Ces trois précédents types des poutres entrent dans la catégorie des poutres statiquement déterminées (poutre isostatique), parce qu'elles possèdent trois inconnues reliées aux trois degrés de liberté et par le fait même des équations d'équilibre.

Poutre continue

C'est une poutre supportée par l'un des deux supports, c'est donc une poutre en équilibre hyperstatique.

Poutre à double encastrement

C'est une poutre supportée par deux encastresments, elle est donc une poutre en équilibre hyperstatique.

Poutre supportée à double encastrement

C'est une poutre supportée par deux encastresments ayant un ou plusieurs supports. C'est donc une poutre en équilibre hyperstatique. Elle a plus de fixation ou support que nécessaire. Cependant, ces supports augmentent la capacité portante de la poutre mais les équations de la statique ne suffisent pas à analyser ces poutres. On aura donc recours à différentes méthodes.

11.5 Les différentes théories des poutres

La théorie des poutres s'applique sur des solides élancés (typiquement les prismes dont lalongueur vaut 10 fois la plus grande dimension transversale). Là où la détermination de la solution exacte pour les champs de contrainte et de déformation n'est pas possible, elle permet d'obtenir une solution approchée, qui donne une bonne idée sur les efforts et les déplacements.

11.5.1 Modèle d'Euler Bernoulli (Classical Beam Theory- CBT)

Il est bien connu que la théorie d'Euler-Bernoulli est basée sur la théorie élémentaire de flexion des poutres qui ne tient pas compte des effets de la déformation de cisaillement. Il est également connu qu'elle n'est applicable qu'aux poutres fines.

Dans cette approche, le nombre d'équations ne dépend pas du nombre de couches puisque la poutre multicouche est homogénéisée, donc considérée comme une seule couche. Comme hypothèse de cette théorie, les déformations dues au cisaillement transversal sont négligées (pas de cisaillement sur la hauteur de la poutre),

La section reste perpendiculaire à la ligne moyenne de la poutre et la section reste plane. La fonction qui décrit la répartition de déplacement suivant l'épaisseur de la poutre est :

$$\psi(z) = 0 \quad (\text{II-1})$$

Pour le cas des poutres élancées et d'après la théorie classique des poutres, le déplacement d'un point M est donné par les deux composantes suivantes :

$$U(M) = \begin{cases} u(x, z) = u^0(x) - z \cdot w_x^0(z) \\ w(x, z) = w^0(x) \end{cases} \quad (\text{II-1})$$

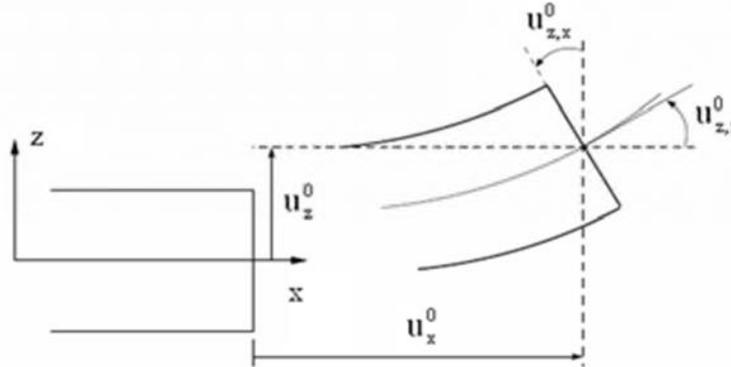


Figure II.1 : Cinématique d'Euler Bernoulli.

$U(x, z)$: C'est le déplacement suivant X et $w(x, z)$ est le déplacement dans la direction de Z ou bien la flèche.

La rotation autour de l'axe Y, provoquée par la flexion est tel que :

$$w_x^0(x) = \frac{\partial w^0}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad (\text{II-1})$$

$u^0(x)$ et $w^0(x)$ sont les composantes de déplacement au milieu de la section et sur la ligne moyenne de la poutre, respectivement le long des axes X et Z.

Lorsque cette théorie est utilisée pour l'analyse des fréquences naturelles des poutres, les flèches sont sous-estimées. Ceci est la conséquence de négliger la déformation de transversal.

11.5.2 Modèle de Timoshenko (FSDBT)

La théorie de Timoshenko est plus riche et plus générale que la théorie élémentaire des poutres au prix d'une fonction supplémentaire. Cette solution permet d'affiner les solutions analytiques issues de la théorie classique. Toutefois ces solutions sont entachées d'erreurs au voisinage des appuis et de la zone indentation où nous pouvons avoir des concentrations de contrainte et des champs de déplacement non homogènes

Chapitre II les différentes théories des poutres

Elle s'applique sur des poutres courtes, elle est basée sur le principe ; qu'après déformation, la section plane reste plane mais elle perd sa perpendicularité par rapport à l'aligne moyenne de la poutre (Figure II.2). Ceci est dû au cisaillement transversal, découvert par Timoshenko, sur l'épaisseur de la poutre. Cette théorie est analogue à la théorie de "Reissner- Mindlin" dans le cas des plaques épaisses. Dans le cas où nous avons un élancement faible, l'effet du cisaillement devient plus important sur la déformée. Dans ce cas, la fonction

$$\psi(z) = z \quad (\text{II-3})$$

Il existe un cisaillement uniforme et les déformations dues au cisaillement transversal ne sont pas négligées. C'est la théorie de premier ordre (FSDBT).

Le déplacement d'après Timoshenko s'écrit comme suit :

$$U(M) = \begin{cases} u(x, z) = u^0(x) - z \cdot w_x^0(x) + z \cdot \gamma_{xz}^0(x) \\ w(x, z) = w^0(x) \end{cases} \quad (\text{II-4})$$

γ_{xz}^0 : C'est la distorsion ou la déformation angulaire mesurée sur la ligne moyenne de la poutre.

Tel que :

$$\gamma_{xz}^0(x) = w_x^0(x) - \phi^0(x) \quad (\text{II-5})$$

$\phi^0(x)$: Etant la rotation totale de la section mesurée sur la ligne moyenne de la poutre.

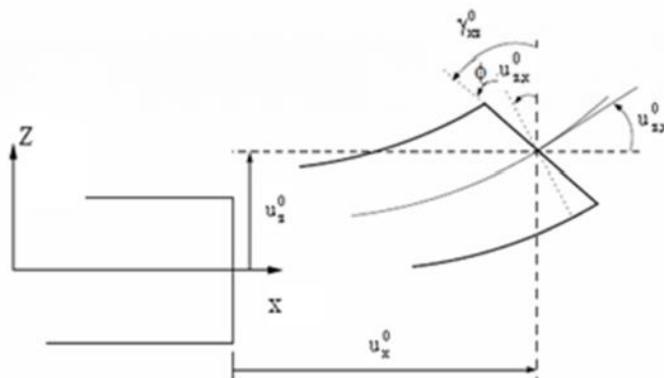


Figure II.2 Cinématique de Timoshenko.

Par définition, la distorsion est donnée par la relation suivante :

$$\begin{cases} \gamma_{xz}(x) = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = -w_x^0(x) + \gamma_{xz}^0(x) + w_x^0(x) \\ \gamma_{xz}(x) = \gamma_{xz}^0(x) \end{cases} \quad (\text{II-6}) \text{ et } (\text{II-7})$$

Sachant que la contrainte de cisaillement est égale

$$\tau_{xz} = G_{xz} \cdot \gamma_{xz} = G_{xz} \gamma_{xz}^0 \quad (\text{II-8})$$

G_{xz} : est le module de cisaillement transversal qui est supposé constant.

Avec cette théorie, les contraintes tangentielles de cisaillement sont constantes et uniformes sur toute l'épaisseur de la poutre ; cela veut dire qu'elles existent même sur les bords supérieurs et inférieurs de la poutre et pourtant il n'y a aucun chargement qui induit le cisaillement.

Cette contradiction mène à introduire des coefficients pour corriger et maintenir les contraintes et les déformations du cisaillement transversales constantes à travers l'épaisseur de la poutre. Ce facteur a été calculé pour la variété de sections de poutres par [Mindlin et Deresiewicz]. Cowper et Murty ont donné de nouvelles expressions de ce coefficient pour différentes sections de la poutre.

Les non nullité des contraintes tangentielles sur les bords extrêmes de la poutre et l'introduction des coefficients de correction de cisaillement ont menés d'autres chercheurs à essayer de trouver une autre théorie pouvant tenir compte de ces facteurs ; c'est "la théorie d'ordre élevé".

11.5.3 Théorie d'Ordre Elevé

Dans cette théorie la distribution des champs de déplacement est non linéaire selon l'épaisseur de la poutre. Elle est plus précise que la théorie du premier ordre puisqu'elle introduit une fonction qui tient compte du phénomène de "gauchissement ». Ce phénomène apparaît lorsque la section transversale de la poutre perd sa planéité (figure II.3).

La fonction $\psi(z)$ représente le gauchissement et sa dérivée $\psi'(z)$ représente le cisaillement.

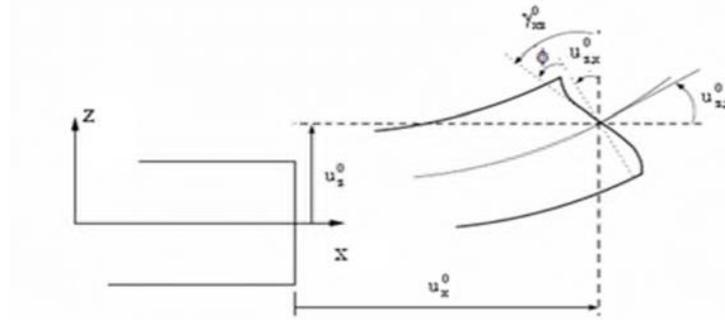


Figure II.3 : Cinématique de la Théorie d'Ordre Elevé.

Dans ce cas, le champ de déplacement devient :

$$U(m) = \begin{cases} u(x, z) = u^0(x) - zw^0, x(x) + \vartheta(z)\gamma_{xz}^0(x) \\ u(x, z) = w^0(x) \end{cases} \quad (\text{II-9})$$

$$\gamma_{xz}(x) = \frac{\partial y}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = -W_x^0(x) + \psi'(z)\gamma_{xz}^0(x) + w_x^0(x) \quad (\text{II-10})$$

$$\gamma_{xz}(x) = \psi'(z)\gamma_{xz}^0(x) \quad (\text{II-11})$$

Pour que les contraintes tangentielles soient nulles sur les bords extrêmes de la poutre, on doit avoir :

$$\psi'(z)|_{Z = \pm h/2} = 0 \quad (\text{II-12})$$

C'est la condition qui nous permet d'avoir une répartition parabolique des contraintes de cisaillement sur l'épaisseur de la poutre d'une part et de choisir correctement des fonctions cubiques qui répondent à la condition.

Selon l'expression de la fonction de gauchissement $\psi(z)$, quelques modèles sont présentés dans la littérature des poutres en FGM :

1-) Le modèle Euler-Bernoulli (la théorie des poutres classiques) (CBT) :

$$\psi(z) = 0 \quad (\text{II-13})$$

2-) Le modèle de Timoshenko ou bien la théorie du premier ordre (FSDBT) :

$$\psi(z) = z \quad (\text{II-14})$$

3-) Le modèle de puissance avec l'approche de (PSDBT) [7] :

$$\psi(z) = z \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right) \quad (\text{II-15})$$

4-) Le modèle exponentiel proposé par (ESDBT) :

$$\Psi(z) = z e^{-2\left(\frac{z}{h}\right)^2} \quad (\text{II-16})$$

5-) Le modèle trigonométrique :

$$\Psi(z) = \frac{h}{\pi} \sin \frac{\pi z}{h} \quad (\text{II-12})$$

h : étant l'épaisseur de la poutre

11.6 Conclusion

Dans le présent chapitre, nous nous sommes attachés à présenter l'historique des théories des poutres. Dans un premier temps, nous avons présenté les différents types des poutres, et nous l'avons terminé par une démonstration des différents types des théories des poutres telles que la théorie classique (CBT), la théorie de cisaillement de premier ordre (FSDBT) et les théories d'ordre élevé HSDBT (PSDBT, SSDBT, ESDBT). Le chapitre suivant portera sur la présentation de l'analyse du problème de flexion des poutres FGM en se basant sur le concept de la surface médiane.



Chapitre III

Flexion statique et vibration libre d'une poutre FGM à l'aide d'une théorie de déformation par cisaillement exponentielle

12. Introduction

Les matériaux à gradient fonctionnel (FGM) sont une classe de composites qui présentent une variation continue des propriétés des matériaux d'une surface à l'autre, éliminant ainsi la concentration de contraintes trouvée dans les composites stratifiés.

Un FGM typique est fabriqué à partir d'un mélange de deux phases matérielles, par exemple, une céramique et un métal. Les FGM sont largement utilisés dans le génie mécanique, aérospatial, nucléaire et civil.

Par conséquent, les études consacrées à comprendre les comportements statiques et dynamiques des poutres FGM, des plaques ont fait l'objet de plus en plus d'attentions ces dernières années.

Sankar (2001) a étudié une solution d'élasticité pour la flexion de poutres fonctionnellement graduées (poutres FG) basée sur la théorie des poutres d'Euler-Bernoulli. Zhong et Yu (2007) ont fourni une solution analytique pour les poutres en porte-à-faux soumises à divers types de chargements mécaniques en utilisant la fonction de contrainte d'Airy. Li (2008) a étudié la flexion statique et la vibration transversale des poutres FGM Timoshenko, dans lesquelles, en introduisant une nouvelle fonction, les équations régissant la flexion et la vibration des poutres FGM ont été découplées et la déviation, l'angle de rotation et la force et le moment résultants ont été exprimés uniquement dans les termes de cette nouvelle fonction. Benata *et al.* (2009) ont proposé une solution analytique au problème de flexion d'une poutre FG symétrique en incluant le gauchissement de l'effet de déformation de section et de cisaillement. Sallaï *et al.* (2009) ont étudié les réponses statiques d'un poutre épais sigmoïde FG en utilisant différentes théories de poutre. Şimşek (2010a) a étudié l'analyse des vibrations libres d'un poutre FG en utilisant différentes théories de poutre d'ordre supérieur. Dans une étude récente, Şimşek (2010b) a étudié les déviations dynamiques et les contraintes d'une poutre FG simplement appuyée soumise à une masse en mouvement en utilisant Euler-Bernoulli, Timoshenko et la théorie de la poutre de déformation parabolique par cisaillement. El Meiche *et al.* (2011) ont proposé une nouvelle théorie de la déformation par cisaillement hyperbolique pour le flambage et la vibration d'une plaque sandwich fonctionnellement graduée. Benachour *et al.* (2011) ont utilisé une théorie de plaque raffinée à quatre variables pour étudier la réponse aux vibrations libres des plaques FG avec un gradient arbitraire. Bachir Bouiadjra *et al.* (2012) ont utilisé une théorie de plaque raffinée à quatre variables pour la réponse au flambement des plaques FG sous des charges thermiques. Bourada *et al.* (2012) ont développé une nouvelle théorie de plaque raffinée à quatre variables pour le flambement thermique des plaques sandwich FG. Fekrar *et al.* (2012) ont analysé la réponse au flambage

Chapitre III flexion statique et vibration libre d'une poutre FGM à l'aide d'une théorie de déformation par cisaillement exponentielle

des plaques composites hybrides FG à l'aide d'une nouvelle théorie de plaque raffinée à quatre variables. Bouremana *et al.* (2013) ont proposé une nouvelle première théorie de poutre de déformation par cisaillement basée sur la position de surface neutre pour les poutres FG. Bachir Bouiadjra *et al.* (2013) ont étudié la réponse de flambement thermique non linéaire des plaques FG en utilisant une théorie de déformation par cisaillement sinusoïdale efficace. Bessaim *et al.* (2013) ont examiné les comportements de flexion et de vibration libre des plaques sandwich avec des feuilles de surface isotropes FG en utilisant une nouvelle théorie de cisaillement et de déformation normale d'ordre supérieur. Tounsi *et al.* (2013a) ont présenté une étude analytique sur la flexion thermoélastique des plaques sandwich FG à l'aide d'une théorie raffinée de la déformation par cisaillement trigonométrique. Boudarba *et al.* (2013) ont étudié le comportement thermomécanique en flexion des plaques FG supportées par des fondations élastiques Winkler-Pasternak. Kettaf *et al.* (2013) ont proposé un nouveau modèle de déplacement de cisaillement hyperbolique pour étudier le comportement de flambement thermique des plaques sandwich FG. Ould larbi latifa *et al.* (2013) ont développé une théorie efficace des poutres de déformation par cisaillement basée sur la position de la surface neutre pour la flexion et la vibration libre des poutres fonctionnellement gradués. Zidi *et al.* (2014) ont étudié la réponse en flexion des plaques FG soumises à un chargement hygro-thermo-mécanique en utilisant une théorie de plaque raffinée à quatre variables. Ait Amar Meziane *et al.* (2014) ont développé une théorie raffinée efficace et simple pour le flambage et la réponse aux vibrations libres de plaques sandwich à gradient exponentiel dans diverses conditions aux limites. Draiche *et al.* (2014) ont étudié la vibration libre de plaques composites rectangulaires avec une masse de patch en utilisant une théorie trigonométrique des plaques à quatre variables. Nedri *et al.* (2014) ont étudié le comportement en vibration libre de plaques composites stratifiées reposant sur des fondations élastiques en utilisant une théorie raffinée de la déformation par cisaillement hyperbolique. Khalfi *et al.* (2014) ont utilisé une théorie raffinée et simple de la déformation par cisaillement pour le comportement de flambement thermique des plaques FG solaires reposant sur une fondation élastique. Klouche Djedid *et al.* (2014) ont développé une théorie raffinée à quatre variables d'ordre n pour la flexion et la vibration libre des plaques FG. Récemment, Hadji (2014) a étudié la vibration statique et libre de la poutre FGM en utilisant une théorie de déformation par cisaillement d'ordre supérieur. Belabed *et al.* (2014) ont développé une théorie efficace et simple du cisaillement d'ordre supérieur et de la déformation normale pour les plaques FG. Hebali *et al.* (2014) ont analysé le comportement en flexion et en vibration libre des plaques FG à l'aide d'une nouvelle théorie de déformation par cisaillement hyperbolique quasi-3D. L'effet d'étirement a également été inclus dans l'analyse des réponses mécaniques des plaques FG épaisses (Houari *et al.* 2013, Bousahla *et al.* 2014, Fekrar *et al.* 2014). Certaines théories de poutres sont également appliquées à différents types de structures, comme décrit dans les références (Heireche *et al.* 2008, Tounsi *et al.* 2008, Benzair *et al.* 2008, Tounsi *et al.* 2009, Amara *et al.* 2010, Tounsi *et al.* 2013b, c, Berrabah *et al.* 2013, Benguediab *et al.* 2014). Une

Chapitre III flexion statique et vibration libre d'une poutre FGM à l'aide d'une théorie de déformation par cisaillement exponentielle

revue générale pour les structures FG telles que les poutres, les plaques et les coques est présentée par Tounsi *et al.* (2013d).

Dans la présente étude, la flexion et la vibration libre de poutres FG simplement supportées ont été étudiées en utilisant une théorie raffinée de poutre de déformation par cisaillement exponentiel avec ($\varepsilon_z \neq 0$) caractéristique la plus intéressante de cette théorie est qu'elle tient compte d'une variation parabolique des déformations de cisaillement transverses à travers l'épaisseur et satisfait les conditions aux limites de traction nulle sur les surfaces supérieure et inférieure de la poutre sans utiliser de facteurs de correction de cisaillement. Ensuite, la théorie actuelle ainsi que le principe de Hamilton sont utilisées pour extraire les équations de mouvement des poutres fonctionnellement graduées. Des solutions analytiques pour les vibrations statiques et libres sont obtenues. Des exemples numériques sont présentés pour vérifier l'exactitude de la présente théorie.

13. Formulation du problème

Considérons une poutre fonctionnellement graduée de longueur L et de section rectangulaire $b \times h$, avec b étant la largeur et h étant la hauteur, comme indiqué sur la figure 1. La poutre est constituée d'un matériau isotrope avec des propriétés de matériau variant en douceur dans le sens de l'épaisseur.

13.1 Propriétés des matériaux

Les propriétés des FGM varient continuellement en raison de la fraction volumique qui change progressivement des matériaux constitutifs (céramique et métal), généralement dans le sens de l'épaisseur uniquement. La fonction de loi de puissance est couramment utilisée pour décrire ces variations de propriétés des matériaux.

L'expression donnée ci-dessous représente le profil de la fraction volumique.

$$V_c = \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^k \quad (a1)$$

k est un paramètre qui dicte le profil de variation du matériau à travers l'épaisseur. La valeur de k égal à zéro représente une poutre entièrement céramique, tandis que k infini indique une poutre entièrement métallique, et pour différentes valeurs de k on peut obtenir différentes fractions volumiques de métal.

Les propriétés matérielles des poutres FG sont supposées varier de manière continue sur la profondeur de poutre par la règle du mélange (Marur 1999) comme

$$P(z) = (P_t - P_b)V_c + P_b \quad (1b)$$

Chapitre III flexion statique et vibration libre d'une poutre FGM à l'aide d'une théorie de déformation par cisaillement exponentielle

Où P désigne une propriété de matériau générique telle que le module, P_t et P_b désignent respectivement la propriété des faces supérieure et inférieure de la poutre. Ici, on suppose que les modules E, G et ν varient

Selon l'éq. (1).

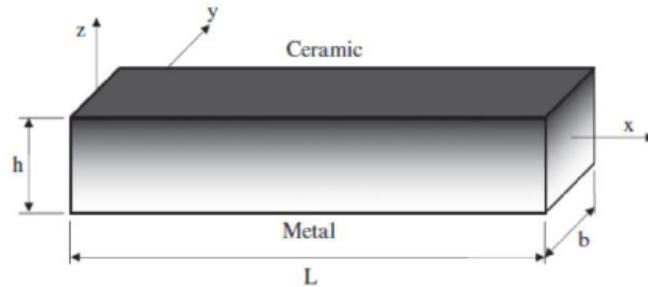


Fig. 1 Géométrie et coordonnées d'un poutre FG

13.2 Cinématique et équations constitutives

Le champ de déplacement de la théorie proposée prend la forme la plus simple comme suit

$$\begin{aligned} u(x, z) &= u_0(x, t) - z \frac{\partial w_b}{\partial x} - f(z) \frac{\partial w_s}{\partial x} \\ u(x, z) &= w_b(x) + w_s + g(z) \varphi_z(x) \end{aligned} \quad (2)$$

Clairement, le champ de déplacement dans l'Eq. (2) ne contient que quatre inconnues (u, w_b, w_s, φ_z). Les déformations associées aux déplacements dans l'Eq. (2) sont

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u_0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} - f(z) \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} \\ \varepsilon_z &= g'(z) \varphi_z \\ \gamma_{xz} &= g(z) \left(\frac{\partial w_s}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_z}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (3)$$

Où, $F(z) = z - ze^{-2(z/h)^2}$ et $g(z) = 1 - f'(z)$ On peut le voir à partir des équations. Déformation de cisaillement transversal γ_{xz} que l'est égal à zéro en haut ($z = h/2$) et en bas ($z = -h/2$) surfaces de la poutre, satisfaisant ainsi les conditions de contrainte de cisaillement transverse nulle. L'état de contrainte dans la poutre est donné par la loi de Hooke généralisée comme suit

$$\begin{aligned} \sigma_x &= Q_{11}(z) \varepsilon_x + Q_{13}(z) \varepsilon_z \\ \tau_{xz} &= Q_{55}(z) \gamma_{xz} \\ \sigma_z &= Q_{13}(z) \varepsilon_x + Q_{33}(z) \varepsilon_z \end{aligned} \quad (4)$$

Les expressions Q_{ij} en termes de constantes d'ingénierie sont

$$Q_{11}(z) = Q_{33}(z) = \frac{E(z)}{1-\nu^2}, \quad Q_{13}(z) = \nu Q_{11}(z), \quad Q_{55}(z) = \frac{E(z)}{(1+\nu^2)} \quad (4.1)$$

13.3 Équations du mouvement

Le principe de Hamilton est utilisé ici pour dériver les équations du mouvement. Le principe peut être

13.2 Cinématique et équations constitutives

Indiqué sous forme analytique comme (Thai et Vo 2012)

$$\delta = \int_{t_1}^{t_2} (U + V - K) dt = 0 \quad (5)$$

Où t est le temps ; t_1 et t_2 sont respectivement l'heure initiale et l'heure de fin ; δU est la variation virtuelle de l'énergie de déformation ; δV est la variation virtuelle de l'énergie potentielle ; et δK est la variation virtuelle de l'énergie cinétique. La variation de l'énergie de déformation de la poutre peut être exprimée comme :

$$\begin{aligned} \delta U &= \int_0^L \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_z \delta \varepsilon_z + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz}) dz dx \\ &= \int_0^L \left(N_x \delta \frac{\partial u_0}{\partial x} - M_x \delta \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} - P_x \delta \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} + R_z \delta \varphi_z + Q_{xz} \delta \left(\frac{\partial w_s}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_z}{\partial x} \right) \right) dx \end{aligned} \quad (6)$$

Où N , M , P et Q sont les résultantes de contrainte définies par

$$(N, M_x, P_x) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (1, z, f) \sigma_x dz, \quad Q = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} g \tau_{xz} dz \quad \text{and} \quad R_z = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_z g'(z) dz \quad (7)$$

La variation de l'énergie potentielle par la charge transversale appliquée q peut s'écrire

$$\delta V = - \int_0^L q \delta (w_b + w_s + g \varphi_z) dx \quad (8)$$

La variation de l'énergie cinétique peut être exprimée comme

$$\begin{aligned} \delta K &= \int_0^L \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho(z) [\ddot{u} \delta u + w \delta \dot{w}] dz dx \\ &= \int_0^L \left\{ I_0 \left[\ddot{u}_0 \delta u_0 + (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) (\delta w_b + \delta w_s) \right] + I_1 \left(\frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial t^2} \delta w_b - \frac{\partial^3 w_b}{\partial x \partial t^2} \delta u_0 \right) \right. \\ &\quad + J_1 \left(\frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial t^2} \delta w_s - \frac{\partial^3 w_s}{\partial x \partial t^2} \delta u_0 \right) - I_2 \left(\frac{\partial^4 w_b}{\partial x^2 \partial t^2} \delta w_b \right) - J_2 \left(\frac{\partial^4 w_b}{\partial x^2 \partial t^2} \delta w_s + \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^2 \partial t^2} \delta w_b \right) \\ &\quad \left. - K_2 \left(\frac{\partial^4 w_s}{\partial x^2 \partial t^2} \delta w_s \right) + L_1 \left(\left(\frac{\partial^2 w_b}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 w_s}{\partial t^2} \right) \delta \varphi_z + \left((\delta w_b + \delta w_s) \frac{\partial^2 \varphi_z}{\partial t^2} \right) \right) + L_2 \left(\frac{\partial^2 \varphi_z}{\partial t^2} \delta \varphi_z \right) \right\} dx \end{aligned} \quad (9)$$

Où la convention point-exposant indique la différenciation par rapport à la variable de temps t ; $\rho(z)$ définies (z) est la densité de masse ($(I_0, I_1, J_1, I_2, J_2, K_2, L_1, L_2)$) sont les inerties de masse

$$(I_0, I_1, J_1, I_2, J_2, K_2, L_1, L_2) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (1, z, f, z^2, z f, f^2, g, g^2) \rho(z) dz \quad (10)$$

Chapitre III flexion statique et vibration libre d'une poutre FGM à l'aide d'une théorie de déformation par cisaillement exponentielle

Remplacer les expressions par δU , δV et δT des Eqs. (6), (8), et (9) dans l'équation. (5) et en intégrant par parties par rapport aux variables d'espace et de temps, et en collectant les coefficients de δu_0 , δw_b , δw_s et $\delta \varphi_z$ les équations de mouvement suivantes des variables fonctionnellement graduées Poutre sont obtenus

$$\begin{aligned} \delta u_0: \frac{\partial N_x}{\partial x} &= I_0 \frac{d^2 u_0}{dt^2} - I_1 \frac{d^3 w_b}{dx dt^2} - J_1 \frac{d^3 w_s}{dx dt^2} \\ \delta w_b: \frac{\partial^2 M_x^b}{\partial x^2} + q &= I_1 \frac{\partial^3 u_0}{\partial x dt^2} - I_2 \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^2 dt^2} + I_0 \left(\frac{\partial^2 w_b}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 w_s}{\partial t^2} \right) - J_2 \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^2 \partial t^2} + L_1 \frac{\partial^2 \varphi_z}{\partial t^2} \\ \delta w_s: \frac{\partial^2 P_x}{\partial x^2} + \frac{\partial Q_{xz}}{\partial x} + q &= J_1 \frac{\partial^3 u_0}{\partial t^2} - J_2 \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^2 \partial t^2} + I_0 \left(\frac{\partial^2 w_b}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 w_s}{\partial t^2} \right) - K_2 \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^2 \partial t^2} + L_1 \frac{\partial^2 \varphi_z}{\partial t^2} \\ \delta \varphi_z: -R_z + \frac{\partial Q_{xz}}{\partial x} + gq &= L_1 \left(\frac{\partial^2 w_b}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 w_s}{\partial t^2} \right) + L_2 \frac{\partial^2 \varphi_z}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (11)$$

Éq. (11) peut être exprimé en termes de déplacements (u_0 , w_b , w_s , φ_z) en utilisant les Éqs. (2), (3), (4) et (7) comme suit :

$$\begin{aligned} A_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} - B_{11} \frac{\partial^3 w_b}{\partial x^3} - B_{11}^s \frac{\partial^3 w_s}{\partial x^3} + X_{13} \frac{\partial \varphi_z}{\partial x} &= I_0 \frac{d^2 u_0}{dt^2} - I_1 \frac{d^3 w_b}{dx dt^2} - J_1 \frac{d^3 w_s}{dx dt^2} \\ B_{11} \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} - D_{11} \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^4} - D_{11}^s \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^4} + Y_{13} \frac{\partial^2 \varphi_z}{\partial x^2} + q &= I_1 \frac{\partial^3 u_0}{\partial x dt^2} - I_2 \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^2 dt^2} + I_0 \left(\frac{\partial^2 w_b}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 w_s}{\partial t^2} \right) - J_2 \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^2 \partial t^2} + L_1 \frac{\partial^2 \varphi_z}{\partial t^2} \\ B_{11}^s \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} - D_{11}^s \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^4} - H_{11} \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^4} + A_{55}^s \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} + \left(Y_{13}^s + A_{55}^s \frac{\partial^2 \varphi_z}{\partial x^2} + q \right) &= J_1 \frac{\partial^3 u_0}{\partial t^2} - J_2 \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^2 \partial t^2} \\ &+ I_0 \left(\frac{\partial^2 w_b}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 w_s}{\partial t^2} \right) - K_2 \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^2 \partial t^2} + L_1 \frac{\partial^2 \varphi_z}{\partial t^2} \\ -X_{13} \frac{\partial u_0}{\partial x} + Y_{13} \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} + \left(Y_{13}^s + A_{55}^s \right) \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} + A_{55}^s \frac{\partial^2 \varphi_z}{\partial x^2} - Z_{33} \varphi_z + gq &= L_1 \left(\frac{\partial^2 w_b}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 w_s}{\partial t^2} \right) + L_2 \frac{\partial^2 \varphi_z}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (12)$$

Où A_{11} , D_{11} etc., sont la rigidité de la poutre, définie par

$$\begin{aligned} A_{11} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{11} dz, B_{11} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{11} z dz, B_{11}^s = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{11} f dz, X_{13} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{13} g' dz \\ D_{11} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{11} z^2 dz, D_{11}^s = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{11} z \cdot f dz, Y_{13} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{13} z \cdot g' dz, H_{11}^s = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{11} f^2 dz \\ Y_{13}^s &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{13} \cdot f \cdot g' \cdot dz, Z_{33} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{13} [g']^2 dz, A_{55}^s = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{55} g^2 dz \end{aligned} \quad (13)$$

14. Solution analytique

Les équations de mouvement admettent les solutions de Navier pour des poutres simplement appuyées. Les variables, (u_0 , w_b , w_s , φ_z) peut être écrit en supposant les variations suivantes

$$\begin{pmatrix} u_0 \\ w_b \\ w_s \\ \varphi_z \end{pmatrix} = \sum_{m=1}^{\infty} \begin{pmatrix} U_m \cos(\lambda x) e^{i\omega t} \\ w_{bm} \sin(\lambda x) e^{i\omega t} \\ w_{sm} \sin(\lambda x) e^{i\omega t} \\ \phi_{zm} \sin(\lambda x) e^{i\omega t} \end{pmatrix} \quad (14)$$

Où U_m, W_{bm}, W_{sm} et ϕ_{zm} fréquence sont des paramètres arbitraires à déterminer, ω est le propre associé au même mode propre, et également $\gamma = m\pi / L$ La charge transversale q est développée en série de Fourier comme

$$q(x) = \sum_{m=1}^{\infty} Q_m \sin \gamma(x) \quad (15)$$

Où Q_m est l'amplitude de charge calculée à partir de

$$Q_m = \frac{2}{L} \int_0^L q(x) \sin(\lambda x) dx \quad (16)$$

Les coefficients Q_m sont donnés ci-dessous pour quelques charges typiques. Pour le cas de l'uniforme charge répartie, nous avons

$$Q_m = \frac{4Q_0}{m\pi}, (m=1, 3, 5 \dots) \quad (17)$$

En substituant les expressions de u_0, w_b, w_s, φ_z depuis Eqs (14) et (15) dans l'équation de mouvement Eqs (12) être obtenues à partir des équations suivantes

$$\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} \\ m_{12} & m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ m_{13} & m_{23} & m_{33} & m_{34} \\ m_{14} & m_{24} & m_{34} & m_{44} \end{bmatrix} \right) \begin{pmatrix} U_m \\ W_{bm} \\ W_{sm} \\ \phi_{zm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ Q_m \\ Q_m \\ g_m \end{pmatrix} \quad (18)$$

Où

$$\begin{aligned} a_{11} &= A_{11}\lambda^2, a_{12} = -B_{11}\lambda^3, a_{13} = -B_{11}^s\lambda^3, a_{14} = -X_{13}\lambda, a_{22} = D_{11}\lambda^4, a_{23} = D_{11}^s\lambda^4, \\ a_{24} &= Y_{13}\lambda^2, a_{33} = H_{11}\lambda^4 + A_{55}^s\lambda^2, a_{34} = Y_{13}^s\lambda^2 + A_{55}^s\lambda^2, a_{44} = A_{55}^s\lambda^2 + Z_{33} \\ m_{11} &= I_0, m_{12} = -I_1\lambda, m_{13} = J_1\lambda, m_{14} = 0, m_{22} = I_0 + I_2\lambda^2, m_{23} = I_0 + J_2\lambda \\ m_{24} &= L_1, m_{33} = I_0 + K_2\lambda^2, m_{34} = L_1, m_{44} = L_2 \end{aligned} \quad (19)$$

Résultats et discussion

Dans ce chapitre, divers exemples numériques sont présentés et discutés pour vérifier la précision de la théorie actuelle dans la prédiction des réponses de flexion et de vibration libre des poutres FG simplement supportées. La poutre FG est considérée comme étant constituée d'aluminium et d'alumine avec les propriétés matérielles suivantes :

- Céramique (P_C : Alumina, Al_2O_3) : $E_c=380\text{GPa}$; $\nu=0.3$; $\rho_c=3960\text{kg/m}^3$.

Chapitre III flexion statique et vibration libre d'une poutre FGM à l'aide d'une théorie de déformation par cisaillement exponentielle

- Metal (P_M : Aluminium, Al): $E_m=70$ GPa; $\nu=0.3$; $\rho_m=2702$ kg/m³.

Et leurs propriétés changent par l'épaisseur de la poutre selon la loi de puissance. Les surfaces inférieures des poutres FG sont riches en aluminium, tandis que les surfaces supérieures des poutres FG sont riches en alumine.

Pour plus de commodité, le formulaire sans dimension suivant est utilisé :

$$\bar{w} = 100 \frac{E_m h^3}{q_0 L^4} w \left(\frac{L}{2} \right), \quad \bar{u} = 100 \frac{E_m h^3}{q_0 L^4} u \left(0, -\frac{h}{2} \right), \quad \bar{\sigma}_x = \frac{h}{q_0 L} \sigma_x \left(\frac{L}{2}, \frac{h}{2} \right),$$
$$\bar{\tau}_{xz} = \frac{h}{q_0 L} \tau_{xz}(0,0), \quad \bar{\omega} = \frac{\omega L^2}{h} \sqrt{\frac{\rho_m}{E_m}}$$

Résultats de l'analyse de Flexion :

Le tableau IV.1 contient les déformations non dimensionnelles et les contraintes des poutres de FGM soumis à une charge uniforme q pour différentes valeurs de l'indice de puissance k et du rapport portée-profondeur L/h . Les résultats obtenus sont comparés avec diverses théories de déformation de la poutre (SSDBT, PSDBT).

On peut observer que nos résultats avec $\varepsilon_z \neq 0$ sont en excellent accord avec ceux prévus en utilisant les différentes théories des poutres de déformation de cisaillement (c.-à-d., SSDBT, PSDBT) avec $\varepsilon_z = 0$ pour toutes les valeurs de l'indice de loi de puissance p et du rapport portée-profondeur L/h .

Les figures IV.2 à 4 montrent les variations du déplacement axial u , de la contrainte axiale σ_x , et de la contrainte de cisaillement transversale τ_{xz} , respectivement, à travers la profondeur d'une poutre très profond ($L=2h$) sous une charge uniforme. En général, la théorie actuelle et le modèle de poutre de déformation de cisaillement de Reddy (PSDBT) donnent des résultats presque identiques.

Chapitre III flexion statique et vibration libre d'une poutre FGM à l'aide d'une théorie de déformation par cisaillement exponentielle

Tableau IV.1 : Flèches et contraintes adimensionnelles des poutres FG sous charge uniforme

k	Méthode	$L/h=5$				$L/h = 20$			
		\bar{w}	\bar{u}	$\bar{\sigma}_x$	$\bar{\tau}_{xz}$	\bar{w}	\bar{u}	$\bar{\sigma}_x$	$\bar{\tau}_{xz}$
0	Li <i>et al.</i> (2010)	3.166	0.94	3.802	0.75	2.896	0.231	15.013	0.75
	SSDBT (Huu-Tai Thai 2012)	3.165	0.941	3.805	0.755	2.896	0.231	15.014	0.767
	PSDBT (Huu-Tai Thai 2012)	3.165	0.94	3.802	0.733	2.896	0.231	15.013	0.744
	Présente ($\epsilon_z \neq 0$)	3.167	0.923	3.913	0.788	2.881	0.229	15.489	0.789
1	Li <i>et al.</i> (2010)	4.829	1.66	4.993	0.768	4.465	0.409	19.701	0.768
	SSDBT (Huu-Tai Thai 2012)	4.828	1.661	4.997	0.772	4.464	0.409	19.701	0.784
	PSDBT (Huu-Tai Thai 2012)	4.829	1.66	4.992	0.75	4.464	0.409	19.7	0.761
	Présente ($\epsilon_z \neq 0$)	4.805	1.609	5.154	0.805	4.416	0.4	20.397	0.806
1	Li <i>et al.</i> (2010)	6.26	2.305	5.884	0.75	5.805	0.569	23.205	0.75
	SSDBT (Huu-Tai Thai 2012)	6.259	2.306	5.889	0.755	5.805	0.569	23.207	0.767
	PSDBT (Huu-Tai Thai 2012)	6.259	2.304	5.884	0.733	5.805	0.569	23.205	0.744
	Présente ($\epsilon_z \neq 0$)	6.181	2.212	6.071	0.788	5.697	0.55	24.01	0.789
2	Li <i>et al.</i> (2010)	8.06	3.113	6.881	0.679	7.442	0.769	27.099	0.679
	SSDBT (Huu-Tai Thai 2012)	8.068	3.115	6.89	0.693	7.442	0.769	27.101	0.706
	PSDBT (Huu-Tai Thai 2012)	8.068	3.113	6.882	0.67	7.442	0.769	27.099	0.681
	Présente ($\epsilon_z \neq 0$)	7.911	2.963	7.093	0.727	7.246	0.737	27.984	0.729
5	Li <i>et al.</i> (2010)	9.78	3.709	8.103	0.579	8.815	0.913	31.811	0.579
	SSDBT (Huu-Tai Thai 2012)	9.837	3.714	8.122	0.615	8.819	0.913	31.816	0.628
	PSDBT (Huu-Tai Thai 2012)	9.828	3.71	8.11	0.59	8.818	0.913	31.813	0.601
	Présente ($\epsilon_z \neq 0$)	9.693	3.543	8.358	0.651	8.618	0.878	32.818	0.654
10	Li <i>et al.</i> (2010)	10.9	3.886	9.706	0.644	9.688	0.954	38.137	0.644
	SSDBT (Huu-Tai Thai 2012)	10.94	3.891	9.724	0.671	9.691	0.954	38.141	0.685
	PSDBT (Huu-Tai Thai 2012)	10.94	3.886	9.712	0.647	9.691	0.954	38.138	0.659
	Présente ($\epsilon_z \neq 0$)	10.87	3.746	9.988	0.706	9.551	0.926	39.272	0.709

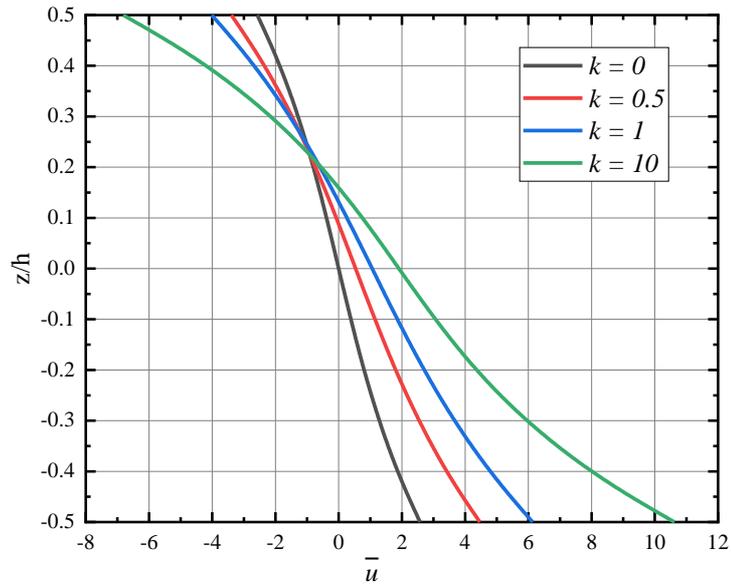


Fig. IV.2 : Variation du déplacement axial \bar{u} à travers l'épaisseur d'une poutre FG ($L = 2h$).

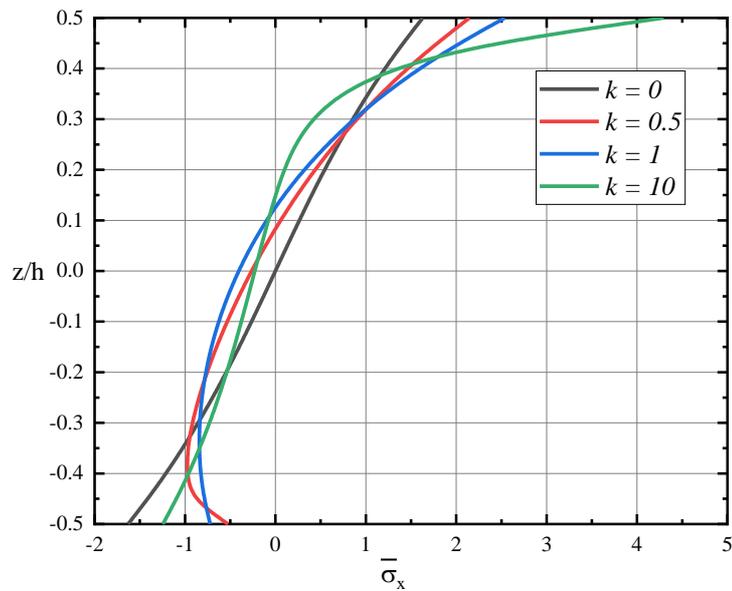


Fig. IV.3 : La variation de la contrainte axiale x à travers l'épaisseur d'une poutre FG ($L = 2h$).

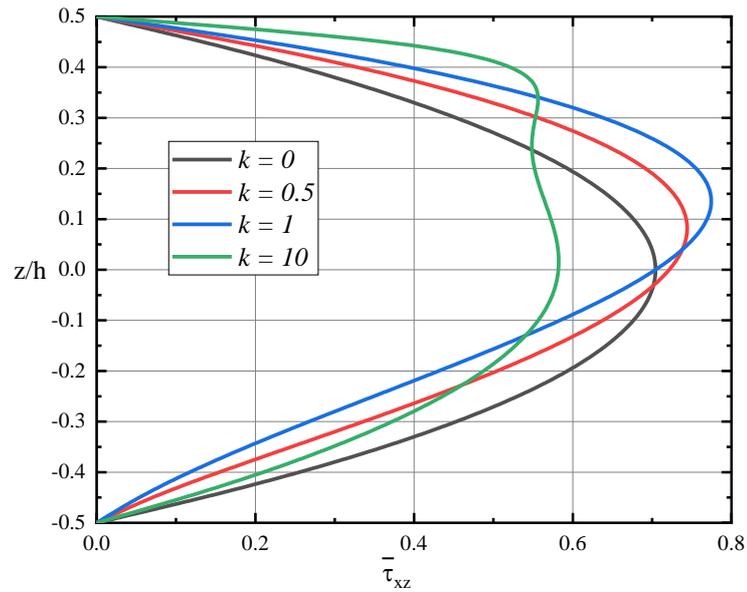


Fig. IV.4 : La variation de la contrainte de cisaillement transverse $\bar{\tau}_{xz}$ à travers l'épaisseur d'une poutre FG ($L = 2h$).

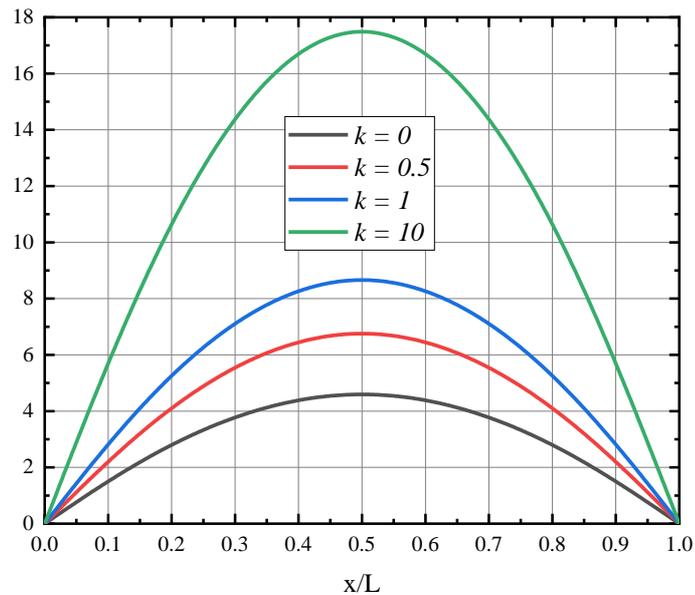


Fig. IV.5 : Variation du déplacement transversal \bar{w} en fonction de la longueur adimensionnelle d'une poutre FG ($L = 5h$).

La figure IV.5 illustre la variation du déplacement transversal adimensionnel \bar{w} en fonction de la longueur adimensionnelle pour différents indices de loi de puissance k . On peut également voir que la théorie actuelle des poutres donne des résultats presque identiques à Reddy (PSDBT). De plus, les résultats montrent que l'augmentation de l'indice de loi de puissance k conduit à une augmentation du déplacement transversal \bar{w} .

Résultats de l'analyse des vibrations libres :

Le tableau 2 montre les fréquences fondamentales adimensionnelles $\bar{\omega}$ des poutres FG pour différentes valeurs de l'indice de loi de puissance k et du rapport portée/profondeur L/h . Les fréquences calculées sont comparées à celles données par Simsek (2010a) avec ($\varepsilon_z = 0$). Un excellent accord entre les solutions actuelles et les résultats de Simsek (2010a) est trouvé.

Le tableau IV3 montre les variations des trois premières fréquences adimensionnelles $\bar{\omega}$ des poutres FG en utilisant la théorie actuelle et les résultats donnés par PSDBT (Simsek 2010a) et CBT pour différentes valeurs de l'indice de loi de puissance k et du rapport portée/profondeur L/h . Les fréquences actuelles sont en bon accord avec les résultats de Simsek (2010a). Il convient de rappeler que les fréquences prédites par la théorie actuelle sont plus petites que celles prédites par la théorie classique des poutres et la différence entre les fréquences de CBT et les théories de poutre déformable par cisaillement diminue à mesure que la valeur de L/h augmente.

Tableau IV.2 : Variation de la fréquence fondamentale $\bar{\omega}$ avec l'indice de loi de puissance pour une poutre FG.

L/h	Théorie	k					
		0	0.5	1	2	5	10
5	PSDBT (Simsek, M. (2010a))	5.1527	4.4111	3.9904	3.6264	3.4012	3.2816
	Présente ($\varepsilon_z \neq 0$)	5.1788	4.4441	4.0354	3.6798	3.4425	3.3103
20	PSDBT (Simsek, M. (2010a))	5.4603	4.6516	4.2050	3.8361	3.6485	3.5389
	Présente ($\varepsilon_z \neq 0$)	5.4770	4.6781	4.2463	3.8890	3.6918	3.5660

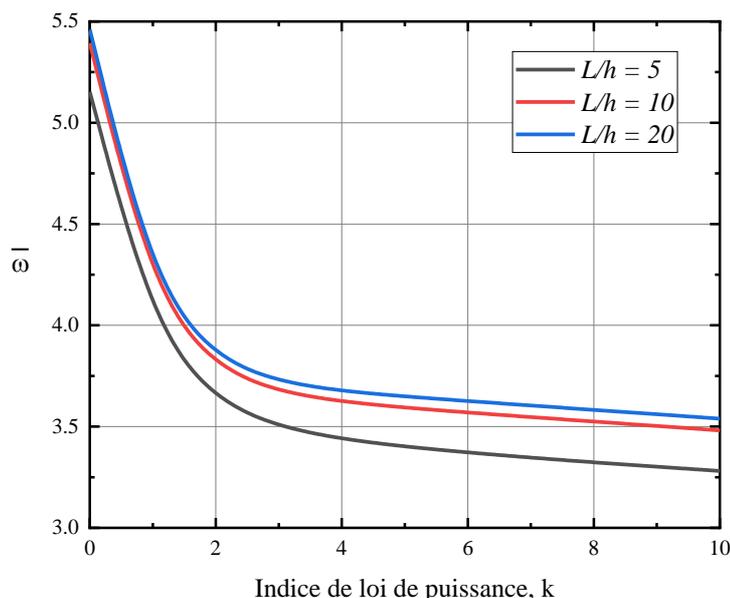


Fig. IV.6 : Variation de la fréquence fondamentale adimensionnelle $\bar{\omega}$ du poutre FG avec l'indice de loi de puissance k et le rapport portée/profondeur L/h .

Chapitre III flexion statique et vibration libre d'une poutre FGM à l'aide d'une théorie de déformation par cisaillement exponentielle

Tableau IV3 : Trois premières fréquences non dimensionnelles $\bar{\omega}$ des poutres FG

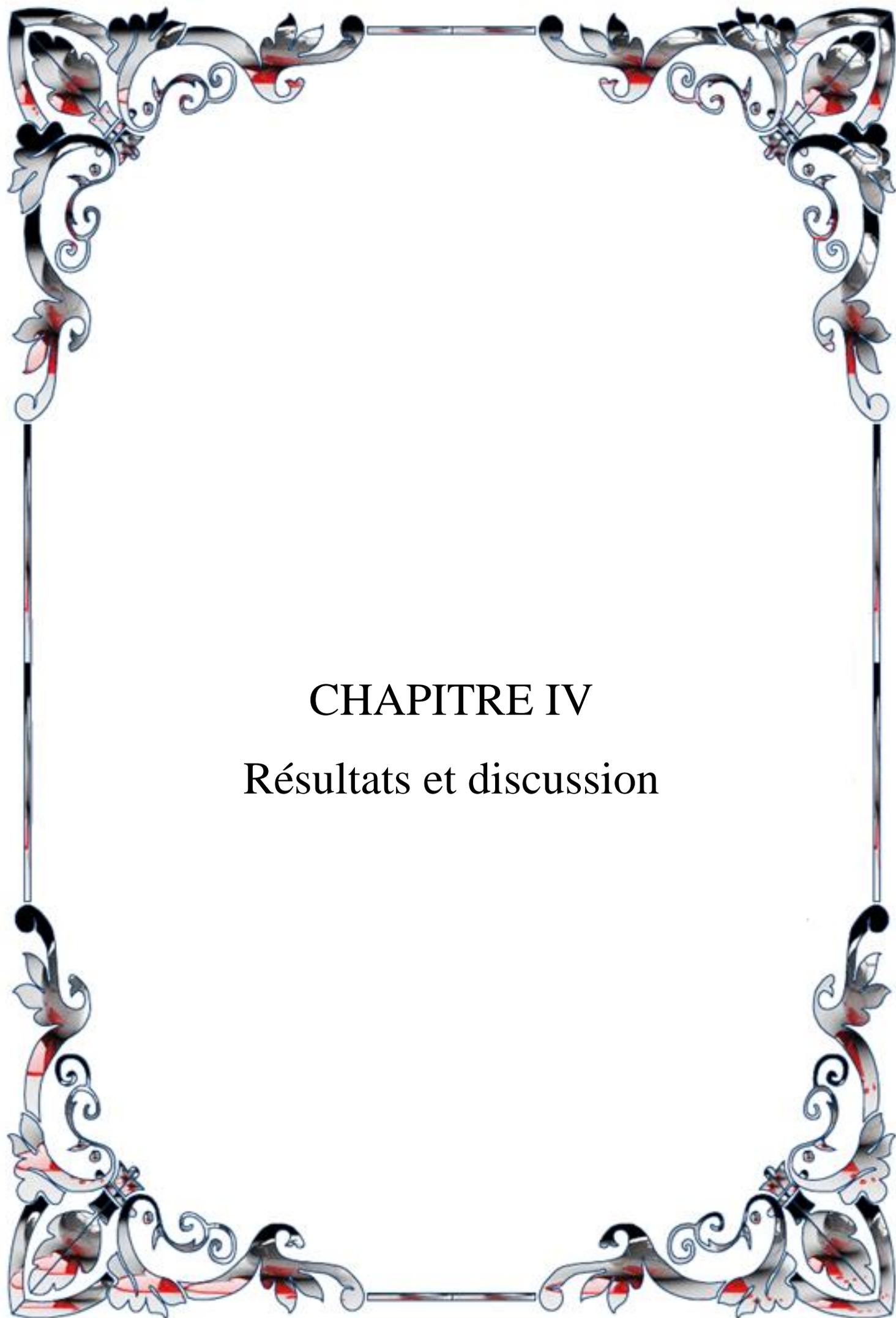
L/h	Mode	Theory	K					
			0	0.5	1	2	5	10
5	1	CBT (Simsek, M. (2010a))	5.3953	4.5931	4.1484	3.7793	3.5949	3.4921
		PSDBT (Simsek, M. (2010a))	5.1527	4.4107	3.9904	3.6264	3.4012	3.2816
		Present ($\varepsilon_z \neq 0$)	5.1788	4.4441	4.0354	3.6798	3.4425	3.3103
5	2	CBT (Simsek, M. (2010a))	20.6187	17.5415	15.7982	14.3260	13.5876	13.2376
		PSDBT (Simsek, M. (2010a))	17.8812	15.4588	14.0100	12.6405	11.5431	11.0240
		Present ($\varepsilon_z \neq 0$)	18.0493	15.6362	14.2133	12.8536	11.6921	11.1470
5	3	CBT (Simsek, M. (2010a))	43.3483	36.8308	33.0278	29.7458	28.0850	27.4752
		PSDBT (Simsek, M. (2010a))	34.2097	29.8382	27.0979	24.3152	21.7158	20.5561
		Present ($\varepsilon_z \neq 0$)	34.6743	30.2943	27.5781	24.7783	22.0198	20.8356
20	1	CBT (Simsek, M. (2010a))	5.4777	4.6641	4.2163	3.8472	3.6628	3.5547
		PSDBT (Simsek, M. (2010a))	5.4603	4.6511	4.2051	3.8361	3.6485	3.5390
		Present ($\varepsilon_z \neq 0$)	5.4770	4.6781	4.2463	3.8890	3.6918	3.5660
20	2	CBT (Simsek, M. (2010a))	21.8438	18.5987	16.8100	15.3334	14.5959	14.1676
		PSDBT (Simsek, M. (2010a))	21.5732	18.3962	16.6344	15.1619	14.3746	13.9263
		Present ($\varepsilon_z \neq 0$)	21.6488	18.5102	16.8029	15.3739	14.5462	14.0362
20	3	CBT (Simsek, M. (2010a))	48.8999	41.6328	37.6173	34.2954	32.6357	31.6883
		PSDBT (Simsek, M. (2010a))	47.5930	40.6526	36.7679	33.4689	31.5780	30.5369
		Present ($\varepsilon_z \neq 0$)	47.7924	40.9292	37.1587	33.9478	31.9577	30.7896

La figure IV.6 montre la fréquence naturelle fondamentale adimensionnelle $\bar{\omega}$ en fonction de l'indice de loi de puissance k pour différentes valeurs du rapport portée/profondeur L/h en utilisant à la fois la théorie actuelle et la théorie PSDBT (Simsek, 2010a). Un excellent accord entre la présente théorie et le PSDBT est montré à partir de la Fig. IV.6. On observe qu'une augmentation de la valeur de l'indice de loi de puissance conduit à une réduction de fréquence. Les valeurs de fréquence les plus élevées sont obtenues pour les poutres entièrement en céramique ($k = 0$) tandis que les valeurs de fréquence les plus basses sont obtenues pour les poutres entièrement en métal ($k \mapsto \infty$).

Ceci est dû au fait qu'une augmentation de la valeur de l'indice de loi de puissance entraîne une diminution de la valeur du module d'élasticité. En d'autres termes, la poutre devient flexible lorsque l'indice de la loi de puissance augmente, diminuant ainsi les valeurs de fréquence.

Conclusion :

Dans ce chapitre, nous avons présenté des résultats numériques de l'analyse du comportement vis à vis de la flexion et la vibration libre des poutres FG en utilisant la théorie d'ordre élevé. La présente théorie, n'exige pas d'utiliser un facteur de correction de cisaillement, tout en remplissant la condition de contrainte de cisaillement nulle sur les bords libres. Des exemples numériques montrent que la théorie proposée donne des solutions presque identiques à celles obtenues en utilisant d'autres théories de déformation par cisaillement de d'autres chercheurs



CHAPITRE IV
Résultats et discussion

Introduction :

Pour vérifier les équations qui ont été analysées dans le chapitre précédent, nous allons, à ce stade, comparer les résultats du modèle mathématique utilisé dans cette étude avec les résultats d'autres modèles existants. Les résultats obtenus par la présente théorie de déformation en cisaillement sont présentés, et comparés à ceux disponibles dans la littérature pour voir vérifier l'exactitude de la présente théorie.

Résultats et discussion

Dans ce chapitre, divers exemples numériques sont présentés et discutés pour vérifier la précision de la théorie actuelle dans la prédiction des réponses de flexion et de vibration libre des poutres FG simplement supportées. La poutre FG est considérée comme étant constituée d'aluminium et d'alumine avec les propriétés matérielles suivantes :

- Céramique (P_C: Alumina, Al₂O₃) : E_c=380GPa ; ν=0.3; ρ_c=3960kg/m³.
- Metal (P_M: Aluminum, Al): E_m=70 GPa; ν=0.3; ρ_m=2702 kg/m³.

Et leurs propriétés changent par l'épaisseur de la poutre selon la loi de puissance. Les surfaces inférieures des poutres FG sont riches en aluminium, tandis que les surfaces supérieures des poutres FG sont riches en alumine.

Pour plus de commodité, le formulaire sans dimension suivant est utilisé :

$$\bar{w} = 100 \frac{E_m h^3}{q_0 L^4} w \left(\frac{L}{2} \right), \bar{u} = 100 \frac{E_m h^3}{q_0 L^4} u \left(0, -\frac{h}{2} \right), \bar{\sigma}_x = \frac{h}{q_0 L} \sigma_x \left(\frac{L}{2}, \frac{h}{2} \right),$$

$$\bar{\tau}_{xz} = \frac{h}{q_0 L} \tau_{xz}(0,0), \quad \bar{\omega} = \frac{\omega L^2}{h} \sqrt{\frac{\rho_m}{E_m}}$$

Résultats de l'analyse de Flexion :

Le tableau 1 contient les déformations non dimensionnelles et les contraintes des poutres de FGM soumis à une charge uniforme q pour différentes valeurs de l'indice de puissance k et du rapport portée-profondeur L/h . Les résultats obtenus sont comparés avec diverses théories de déformation du faisceau (SSDBT, PSDBT).

On peut observer que nos résultats avec $0 \leq z \leq h$ sont en excellent accord avec ceux prévus en utilisant les différentes théories des poutres de déformation de cisaillement (c.-à-d., SSDBT, PSDBT) avec $\varepsilon_z = 0$ pour toutes les valeurs de l'indice de loi de puissance p et du rapport portée-profondeur L/h .

Les figures 2 à 4 montrent les variations du déplacement axial u , de la contrainte axiale x , et de la contrainte de cisaillement transversale τ_{xz} , respectivement, à travers la profondeur d'une poutre très profond ($L=2h$) sous une charge uniforme. En général, la théorie actuelle et le modèle de poutre de déformation de cisaillement de Reddy (PSDBT) donnent presque résultats identiques.

Tableau IV4 : Flèches et contraintes adimensionnelles des poutres FG sous charge uniforme

k	Méthode	$L/h=5$				□	$L/h = 20$			
		\bar{w}	\bar{u}	$\bar{\sigma}_x$	$\bar{\tau}_{xz}$		\bar{w}	\bar{u}	$\bar{\sigma}_x$	$\bar{\tau}_{xz}$
0	Li <i>et al.</i> (2010)	3.166	0.94	3.802	0.75		2.896	0.231	15.013	0.75
	SSDBT (Huu-Tai Thai 2012)	3.165	0.941	3.805	0.755		2.896	0.231	15.014	0.767
	PSDBT (Huu-Tai Thai 2012)	3.165	0.94	3.802	0.733		2.896	0.231	15.013	0.744
	Présente ($\varepsilon_z \neq 0$)	3.167	0.923	3.913	0.788		2.881	0.229	15.489	0.789
1	Li <i>et al.</i> (2010)	4.829	1.66	4.993	0.768		4.465	0.409	19.701	0.768
	SSDBT (Huu-Tai Thai 2012)	4.828	1.661	4.997	0.772		4.464	0.409	19.701	0.784
	PSDBT (Huu-Tai Thai 2012)	4.829	1.66	4.992	0.75		4.464	0.409	19.7	0.761
	Présente ($\varepsilon_z \neq 0$)	4.805	1.609	5.154	0.805		4.416	0.4	20.397	0.806
1	Li <i>et al.</i> (2010)	6.26	2.305	5.884	0.75		5.805	0.569	23.205	0.75
	SSDBT (Huu-Tai Thai 2012)	6.259	2.306	5.889	0.755		5.805	0.569	23.207	0.767
	PSDBT (Huu-Tai Thai 2012)	6.259	2.304	5.884	0.733		5.805	0.569	23.205	0.744
	Présente ($\varepsilon_z \neq 0$)	6.181	2.212	6.071	0.788		5.697	0.55	24.01	0.789
2	Li <i>et al.</i> (2010)	8.06	3.113	6.881	0.679		7.442	0.769	27.099	0.679
	SSDBT (Huu-Tai Thai 2012)	8.068	3.115	6.89	0.693		7.442	0.769	27.101	0.706
	PSDBT (Huu-Tai Thai 2012)	8.068	3.113	6.882	0.67		7.442	0.769	27.099	0.681
	Présente ($\varepsilon_z \neq 0$)	7.911	2.963	7.093	0.727		7.246	0.737	27.984	0.729
5	Li <i>et al.</i> (2010)	9.78	3.709	8.103	0.579		8.815	0.913	31.811	0.579
	SSDBT (Huu-Tai Thai 2012)	9.837	3.714	8.122	0.615		8.819	0.913	31.816	0.628
	PSDBT (Huu-Tai Thai 2012)	9.828	3.71	8.11	0.59		8.818	0.913	31.813	0.601
	Présente ($\varepsilon_z \neq 0$)	9.693	3.543	8.358	0.651		8.618	0.878	32.818	0.654
10	Li <i>et al.</i> (2010)	10.9	3.886	9.706	0.644		9.688	0.954	38.137	0.644
	SSDBT (Huu-Tai Thai 2012)	10.94	3.891	9.724	0.671		9.691	0.954	38.141	0.685
	PSDBT (Huu-Tai Thai 2012)	10.94	3.886	9.712	0.647		9.691	0.954	38.138	0.659
	Présente ($\varepsilon_z \neq 0$)	10.87	3.746	9.988	0.706		9.551	0.926	39.272	0.709

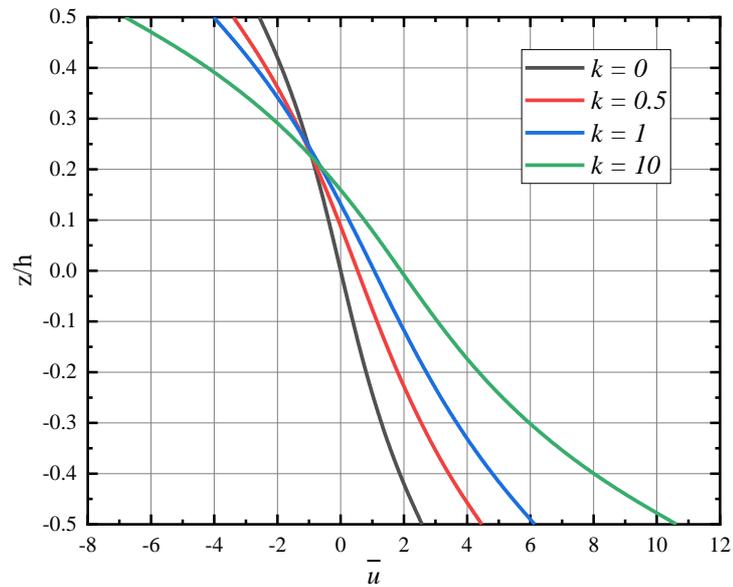


Fig. 2 : Variation du déplacement axial \bar{u} à travers l'épaisseur d'une poutre FG ($L = 2h$).

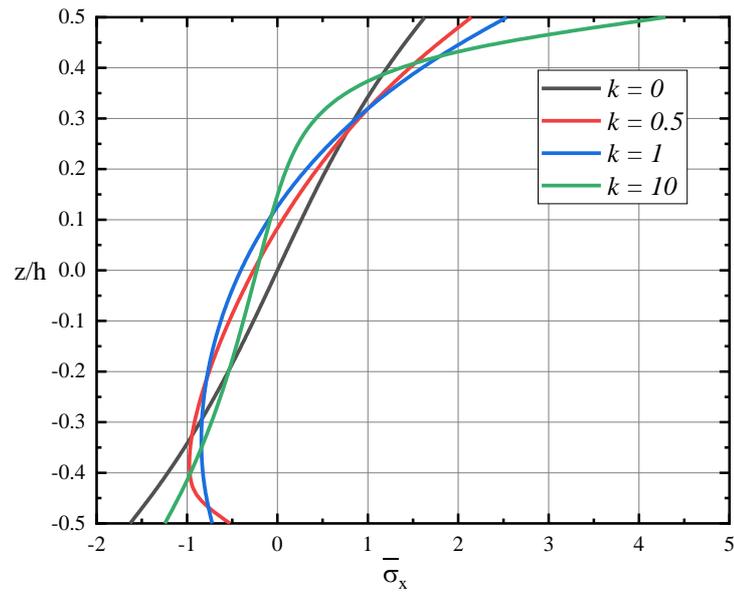


Fig. 3 : La variation de la contrainte axiale x à travers l'épaisseur d'une poutre FG ($L = 2h$).

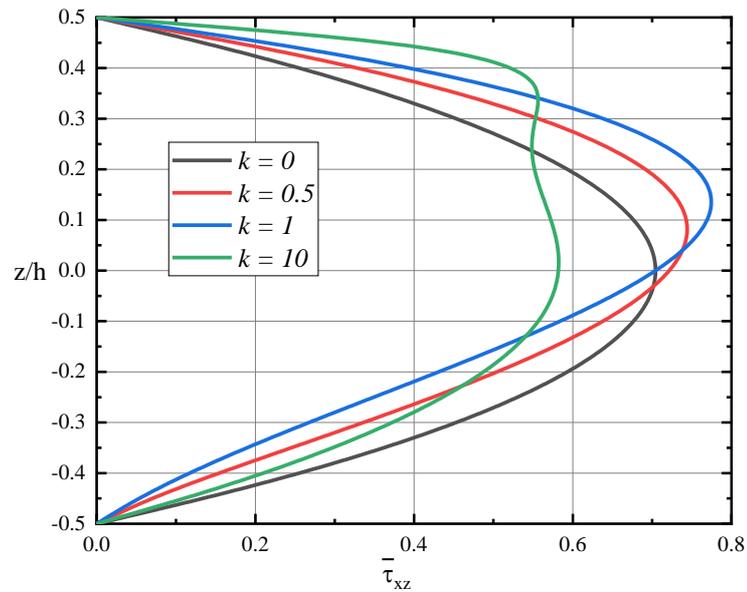


Fig. 4 : La variation de la contrainte de cisaillement transverse $\bar{\tau}_{xz}$ à travers l'épaisseur d'une poutre FG ($L = 2h$).

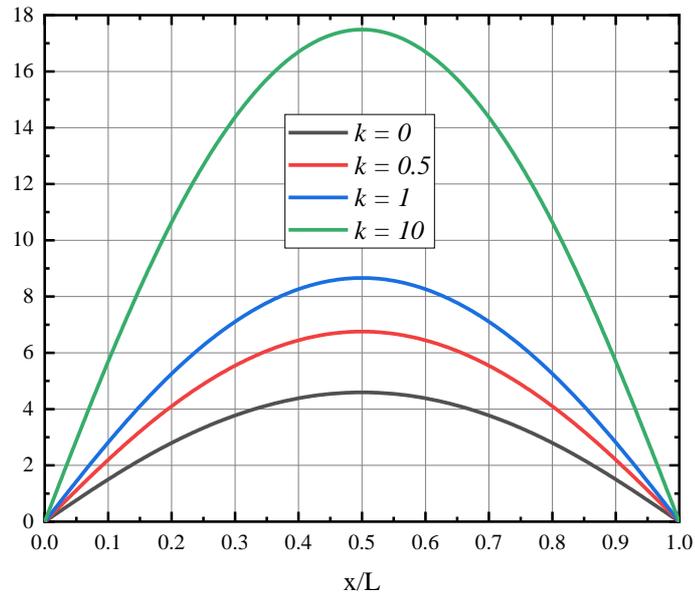


Fig. 5 : Variation du déplacement transversal \bar{w} en fonction de la longueur adimensionnelle d'une poutre FG ($L = 5h$).

La figure 5 illustre la variation du déplacement transversal adimensionnel \bar{w} en fonction de la longueur adimensionnelle pour différents indices de loi de puissance k . On peut également voir que la théorie actuelle des poutres donne des résultats presque identiques à Reddy (PSDBT). De plus, les résultats montrent que l'augmentation de l'indice de loi de puissance k conduit à une augmentation du déplacement transversal \bar{w} .

Résultats de l'analyse des vibrations libres :

Le tableau 2 montre les fréquences fondamentales adimensionnelles $\bar{\omega}$ des poutres FG pour différentes valeurs de l'indice de loi de puissance k et du rapport portée/profondeur L/h . Les fréquences calculées sont comparées à celles données par Simsek (2010a) avec ($\varepsilon_z = 0$). Un excellent accord entre les solutions actuelles et les résultats de Simsek (2010a) est trouvé.

Le tableau 3 montre les variations des trois premières fréquences adimensionnelles $\bar{\omega}$ des poutres FG en utilisant la théorie actuelle et les résultats donnés par PSDBT (Simsek 2010a) et CBT pour différentes valeurs de l'indice de loi de puissance k et du rapport portée/profondeur L/h . Les fréquences actuelles sont en bon accord avec les résultats de Simsek (2010a). Il convient de rappeler que les fréquences prédites par la théorie actuelle sont plus petites que celles prédites par la théorie classique des poutres et la différence entre les fréquences de CBT et les théories de poutre déformable par cisaillement diminue à mesure que la valeur de L/h augmente.

Tableau IV5 : Variation de la fréquence fondamentale $\bar{\omega}$ avec l'indice de loi de puissance pour une poutre FG.

L/h	Théorie	k					
		0	0.5	1	2	5	10
5	PSDBT (Simsek, M. (2010a))	5.1527	4.4111	3.9904	3.6264	3.4012	3.2816
	Présente ($\varepsilon_z \neq 0$)	5.1788	4.4441	4.0354	3.6798	3.4425	3.3103
20	PSDBT (Simsek, M. (2010a))	5.4603	4.6516	4.2050	3.8361	3.6485	3.5389
	Présente ($\varepsilon_z \neq 0$)	5.4770	4.6781	4.2463	3.8890	3.6918	3.5660

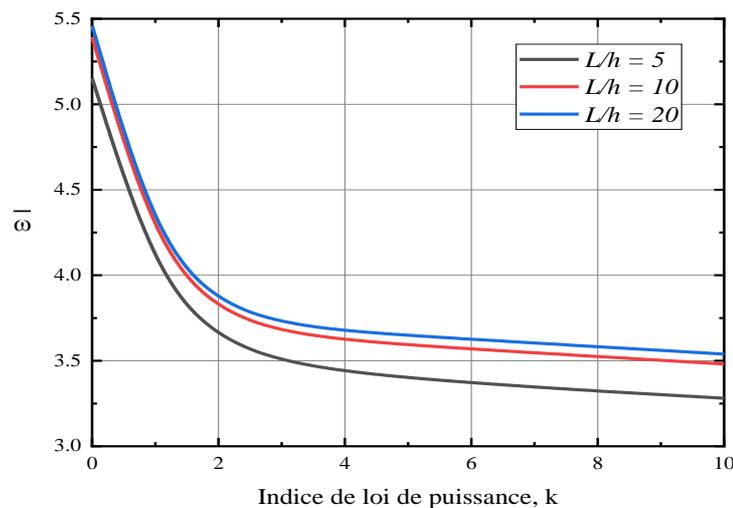


Fig. 6 : Variation de la fréquence fondamentale adimensionnelle $\bar{\omega}$ du poutre FG avec l'indice de loi de puissance k et le rapport portée/profondeur L/h .

Tableau IV6 : Trois premières fréquences non dimensionnelles $\bar{\omega}$ des poutres FG

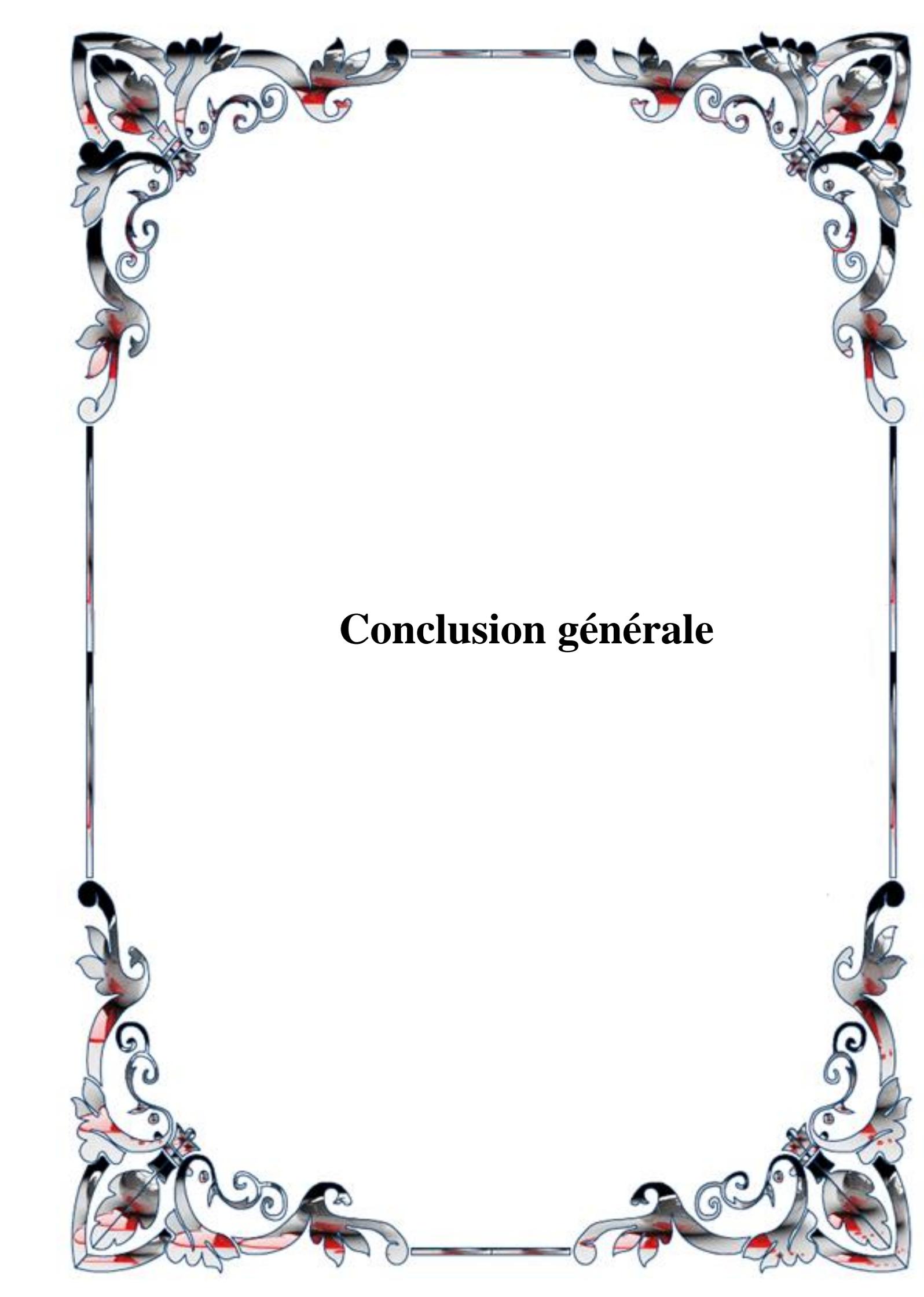
L/h	Mod e	Theory	k					
			0	0.5	1	2	5	10
1		CBT (Simsek, M. (2010a))	5.3953	4.5931	4.1484	3.7793	3.5949	3.4921
		PSDBT (Simsek, M. (2010a))	5.1527	4.4107	3.9904	3.6264	3.4012	3.2816
		Present ($\varepsilon_z \neq 0$)	5.1788	4.4441	4.0354	3.6798	3.4425	3.3103
5		CBT (Simsek, M. (2010a))	20.618	17.541	15.798	14.326	13.587	13.237
		PSDBT (Simsek, M. (2010a))	7	5	2	0	6	6
		Present ($\varepsilon_z \neq 0$)	17.881	15.458	14.010	12.640	11.543	11.024
2		CBT (Simsek, M. (2010a))	2	8	0	5	1	0
		PSDBT (Simsek, M. (2010a))	18.049	15.636	14.213	12.853	11.692	11.147
		Present ($\varepsilon_z \neq 0$)	3	2	3	6	1	0
3		CBT (Simsek, M. (2010a))	43.348	36.830	33.027	29.745	28.085	27.475
		PSDBT (Simsek, M. (2010a))	3	8	8	8	0	2
		Present ($\varepsilon_z \neq 0$)	34.209	29.838	27.097	24.315	21.715	20.556
7		CBT (Simsek, M. (2010a))	7	2	9	2	8	1
		PSDBT (Simsek, M. (2010a))	34.674	30.294	27.578	24.778	22.019	20.835
		Present ($\varepsilon_z \neq 0$)	3	3	1	3	8	6
1		CBT (Simsek, M. (2010a))	5.4777	4.6641	4.2163	3.8472	3.6628	3.5547
		PSDBT (Simsek, M. (2010a))	5.4603	4.6511	4.2051	3.8361	3.6485	3.5390
		Present ($\varepsilon_z \neq 0$)	5.4770	4.6781	4.2463	3.8890	3.6918	3.5660
20	2	CBT (Simsek, M. (2010a))	21.843	18.598	16.810	15.333	14.595	14.167
		PSDBT (Simsek, M. (2010a))	8	7	0	4	9	6
		Present ($\varepsilon_z \neq 0$)	21.573	18.396	16.634	15.161	14.374	13.926
8		CBT (Simsek, M. (2010a))	2	2	4	9	6	3
		PSDBT (Simsek, M. (2010a))	21.648	18.510	16.802	15.373	14.546	14.036
		Present ($\varepsilon_z \neq 0$)	8	2	9	9	2	2
3		CBT (Simsek, M. (2010a))	48.899	41.632	37.617	34.295	32.635	31.688
		PSDBT (Simsek, M. (2010a))	9	8	3	4	7	3
		Present ($\varepsilon_z \neq 0$)	47.593	40.652	36.767	33.468	31.578	30.536
0		CBT (Simsek, M. (2010a))	0	6	9	9	0	9
		PSDBT (Simsek, M. (2010a))	47.792	40.929	37.158	33.947	31.957	30.789
		Present ($\varepsilon_z \neq 0$)	4	2	7	8	7	6

La figure 6 montre la fréquence naturelle fondamentale adimensionnelle $\bar{\omega}$ en fonction de l'indice de loi de puissance k pour différentes valeurs du rapport portée/profondeur L/h en utilisant à la fois la théorie actuelle et la théorie PSDBT (Simsek, 2010a). Un excellent accord entre la présente théorie et le PSDBT est montré à partir de la Fig. 6. On observe qu'une augmentation de la valeur de l'indice de loi de puissance conduit à une réduction de fréquence. Les valeurs de fréquence les plus élevées sont obtenues pour les poutres entièrement en céramique ($k = 0$) tandis que les valeurs de fréquence les plus basses sont obtenues pour les poutres entièrement en métal ($k \mapsto \infty$).

Ceci est dû au fait qu'une augmentation de la valeur de l'indice de loi de puissance entraîne une diminution de la valeur du module d'élasticité. En d'autres termes, la poutre devient flexible lorsque l'indice de la loi de puissance augmente, diminuant ainsi les valeurs de fréquence.

Conclusion :

Dans ce chapitre, nous avons présenté des résultats numériques de l'analyse du comportement vis à vis de la flexion et la vibration libre des poutres FG en utilisant la théorie d'ordre élevé. La présente théorie, n'exige pas d'utiliser un facteur de correction de cisaillement, tout en remplissant la condition de contrainte de cisaillement nulle sur les bords libres. Des exemples numériques montrent que la théorie proposée donne des solutions presque identiques à celles obtenues en utilisant d'autres théories de déformation par cisaillement de d'autres chercheurs.



Conclusion générale

Conclusion générale et perspectives :

L'objectif visé de cette présente recherche était de développer une méthode analytique directe qui détermine les valeurs des contraintes et déplacements des poutres en matériaux FGM sous chargement uniforme basée sur le concept de la surface médiane, pour cela nous avons proposé un nouveau modèle analytique performant basé sur la théorie raffinée pour l'analyse du comportement statique des poutres en matériaux à gradients évalués FGM.

Afin de valider ce modèle, nous avons comparé nos résultats analytiques par comparaison avec d'autres modèles à ordre élevé issus de la littérature. Nous tirons comme conclusion de cette analyse : La variation du module d'élasticité joue un rôle important sur les distributions des contraintes normales et tangentielles ainsi que le déplacement transversal de la poutre FGM ; Le déplacement axial augmente avec l'augmentation de l'indice de puissance p .

La poutre homogène en céramique ($p=0$) donne une contrainte de compression maximale à la surface inférieure et une contrainte de traction minimale sur la surface supérieure de la poutre. La flèche augmente avec l'augmentation de l'indice de puissance p .

La théorie proposée RTSDBT donne des résultats presque identiques avec la théorie de cisaillement de Touratier (SSDBT), n'exige pas de facteur de correction de cisaillement, et donne une description parabolique de la contrainte de cisaillement à travers l'épaisseur tout en remplissant la condition de contrainte de cisaillement nulle sur les bords libres.

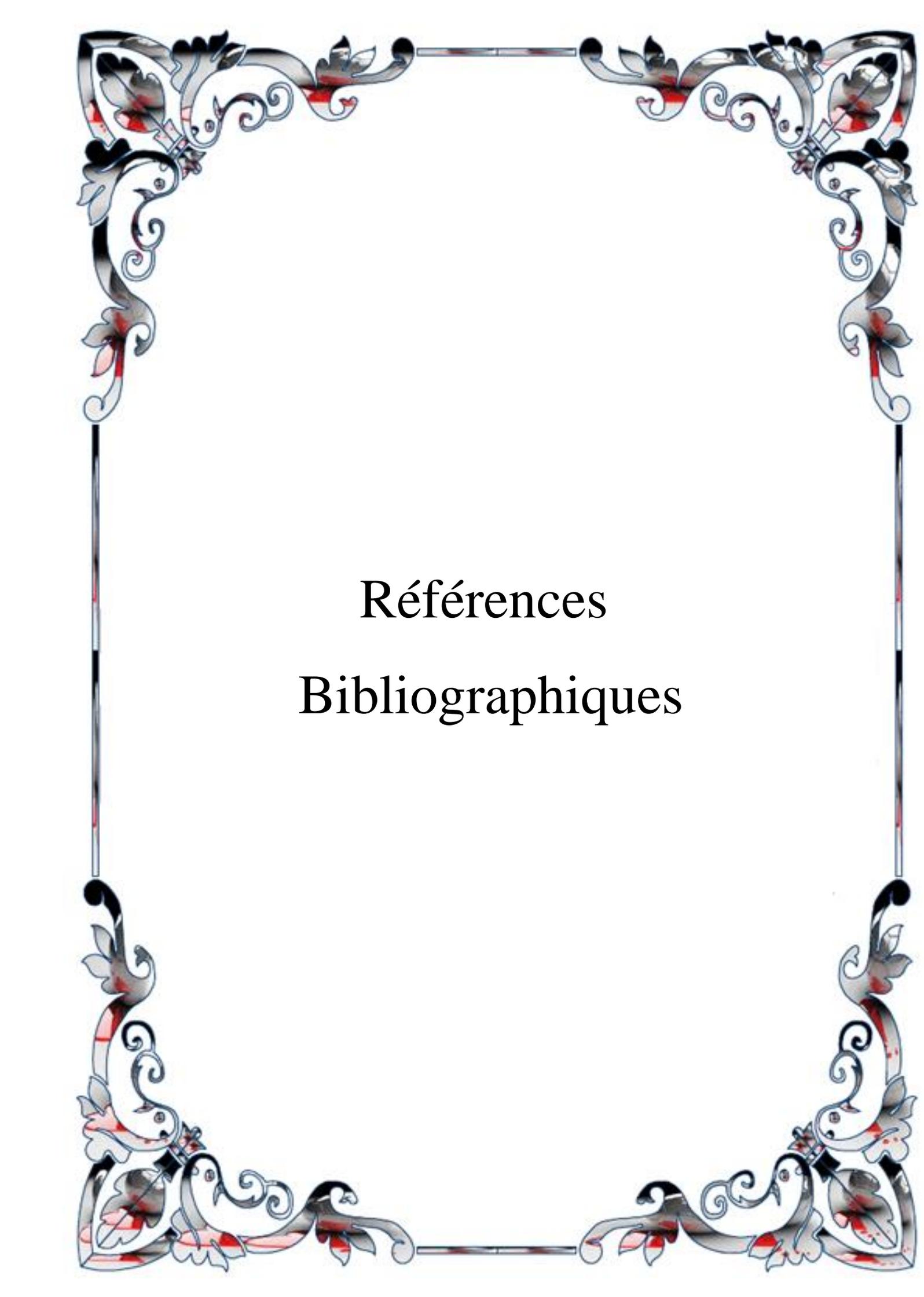
On peut dire que la théorie proposée est précise et simple pour résoudre le comportement statique des poutres en FGM. Finalement, en perspective il serait aussi intéressant de réaliser des recherches sur :

Analyse et modélisation du comportement des poutres FGM sous différents types d'appuis.

Utilisation de cette théorie de cisaillement raffinée pour résoudre le problème thermique des poutres FGM.

Validation de cette théorie de cisaillement raffinée avec les méthodes numérique telle que la méthode des éléments finis.

Utilisée cette théorie de cisaillement raffinée pour l'analyse d'autre type des poutres telles que les poutres sandwiches.



Références
Bibliographiques

Références bibliographiques

- Z. Zhong., T. Yu, Analytical solution of cantilever functionally graded beam. *Composites Science and Technology* ; 67 (3-4) : 481-488, 2007.
- C. Baron., S. Naili, Propagation d'ondes élastiques au sein d'un guide d'ondes Élastiques anisotropes à gradient unidirectionnel sous chargement fluide, *Compte Rendue Mécanique* ; 336 (9) : 722–730, 2008.
- Berrabah Hamza Majide « étude et analyse des poutres FGM sous chargement électrostatique », thèse de doctorat d'université Djilali Liabes De Sidi Bel Abbes 2011
- Adim Belkacem « comportement mécanique en flexion des plaques en matériaux à gradient de propriété », thèse de master d'université Ibn Khaldoun Tiaret 2013.
- Timoshenko, S.P. Goodier, J.N.: *Theort of elasticity*, 3rd end. McGraw-Hill, New York (1970).
- Sellai « Etude et analyse des structures en FGM, comparaison entre E-FGM, P-FGM et S-FGM ». Thèse de Doctorat de l'université Djilali Liabes de Sidi Bel Abbes 2011.
- Reddy, J.N. Reddy. A simple higher-order theory for laminated composite plates. *Jornal of Applied Mechanics*, vol. 51, pages 745-752, 1984.
- Afaq, K.S. Afaq, M. Karama & S. Mistou. Un nouveau modèle raffine pour les structures multicouches. In *Comptes-rendus des 13 emes Journées Nationales sur les Composites*, pages 289-292. Strasbourg, March 2003.
- Ait Amar Meziane, M., Abdelaziz, HH et Tounsi, A. (2014), "Une théorie raffinée efficace et simple pour le flambage et la vibration libre de plaques sandwich à gradient exponentiel sous diverses conditions aux limites", *J. Sandwich Struct. Mat.*, 16(3), 293-318.
- Amara, K., Tounsi, A., Mechab, I. et Adda Bedia, EA (2010), "Effet d'élasticité non locale sur le flambement de la colonne de nanotubes de carbone à parois multiples sous un champ de température", *Appl. Math. Modèle.*, 34, 3933-3942.
- Bachir Bouiadjra, M., Houari, MSA et Tounsi, A. (2012), « Flambement thermique desPlates selon une théorie des plaques raffinée à quatre variables », *J. Thermal Stresses*, 35, 677-694.
- Bachir Bouiadjra, R., Adda Bedia, EA et Tounsi, A. (2013), "Comportement de flambage thermique non linéaire de plaques fonctionnellement graduées à l'aide d'une théorie de déformation par cisaillement sinusoïdale efficace" *Struct. Ing.Méc.*, 48(4), 547-567.
- Belabed, Z., Houari, MSA, Tounsi, A., Mahmoud, SR et Anwar Béq, O. (2014), "Une théorie efficace et simple du cisaillement d'ordre supérieur et de la déformation normale pour les plaques en matériau à gradient fonctionnel (FGM)", *Composites : Partie B – Angl.*, 60, 274-283.
- Benachour, A., Daouadji Tahar, H., Ait Atmane, H., Tounsi, A. et Meftah, SA (2011), "Une théorie de

- plaque raffinée à quatre variables pour les vibrations libres de plaques fonctionnellement graduées avec un gradient arbitraire", *Composites Partie B - Eng.*, 42(6), 1386-1394.
- Benatta, MA, Tounsi, A., Mechab, I. et Bachir Bouiadjra, M., (2009), « solution mathématique pour la flexion de poutres composites hybrides courtes à espacement variable des fibres », *Appl. Math. Comput.*, 212(2), 337 - 348.
- Benguediab, S., Tounsi, A., Zidour, M. et Semmah, A. (2014), "Effets de chiralité et d'échelle sur les propriétés de flambement mécanique des nanotubes de carbone à double paroi en zigzag", *Composites Part B - Eng.*, 57, 21- 24.
- Benzair, A., Tounsi, A., Besseghier, A., Heireche, H., Moulay, N. et Boumia, L. (2008), "L'effet thermique sur la vibration des nanotubes de carbone à paroi unique à l'aide de la théorie des poutres non locaux de Timoshenko », *J. Phys. D \ddot{y} : Appl. Physique*, 41, 225404.
- Berrabah, HM, Tounsi, A., Semmah, A. et Adda Bedia, EA (2013), "Comparaison de diverses théories de poutre non locales raffinées pour l'analyse de flexion, de vibration et de flambage des nano poutres", *Struct. Ing. Méc.*, 48(3),351-365.
- Bessaim, A., Houari, MSA, Tounsi, A., Mahmoud, SR et Adda Bedia, EA (2013), "Une nouvelle théorie de cisaillement et de déformation normale d'ordre supérieur pour l'analyse des vibrations statiques et libres des plaques sandwich avec des feuilles de surface isotropes », *J. Sandwich Struct. Mat.*, 15(6), 671-703.
- Bouderba, B., Houari, MSA et Tounsi, A. (2013), « Réponse thermomécanique en flexion des plaques épaisses FGM reposant sur des fondations élastiques Winkler–Pasternak », *Steel Compos. Structu.*, 14(1), 85-104.
- Bourada, M., Tounsi, A., Houari, MSA et Adda Bedia, EA (2012), "Une nouvelle théorie de plaque raffinée à quatre variables pour l'analyse du flambement thermique des plaques sandwich à gradient fonctionnel", *J. Sandwich Struct. Mat.*, 14, 5-33.
- Bouremana, M, Houari, MSA, Tounsi, A, Kaci, A. et Adda Bedia, EA (2013), "Une nouvelle première théorie de poutre de déformation par cisaillement basée sur la position de surface neutre pour des poutres fonctionnellement graduées", *Steel Compos. Structu.*, 15(5), 467-479.
- Bousahla, AA, Houari, MSA, Tounsi, A., Adda Bedia, EA, (2014), "Une nouvelle théorie de cisaillement d'ordre supérieur et de déformation normale basée sur la position de surface neutre pour l'analyse de flexion des plaques composites avancées", *Int. J. Computational Methods*, (sous presse).
- Draiche, K., Tounsi, A. et Khalfi, Y. (2014), "Une théorie trigonométrique à quatre plaques variables pour la vibration libre de plaques composites rectangulaires à masse patchée », *Steel Compos. Structu.*, 17(1), 69-81.

- El Meiche, N., Tounsi, A., Ziane, N., Mechab, I. et Adda Bedia, EA (2011), "Une nouvelle théorie de déformation par cisaillement hyperbolique pour le flambage et la vibration de la plaque sandwich à gradient fonctionnel", *Int. J. Mech. Sci.*, 53(4), 237-247.
- Fekrar, A., El Meiche, N., Bessaim, A., Tounsi, A. et Adda Bedia, EA (2012), "Analyse de flambage de plaques composites hybrides fonctionnellement graduées à l'aide d'une nouvelle théorie de plaque raffinée à quatre variables", *Steel Compos. Structu.*, 13(1), 91-107.
- Fekrar, A., Houari, MSA, Tounsi, A. et Mahmoud, SR (2014), "Une nouvelle théorie raffinée à cinq inconnues basées sur la position de surface neutre pour l'analyse de flexion des plaques graduées exponentielles", *Meccanica*, 49, 795-810.
- Hadji, L., Daouadji, TH, Tounsi, A. et Bedia, EA (2014), "Une théorie de déformation par cisaillement d'ordre supérieur pour les vibrations statiques et libres de la poutre FGM", *Steel Compos. Structu.*, 16(5), 507-519.
- Hebali, H., Tounsi, A., Houari, MSA, Bessaim, A. et Adda Bedia, EA (2014), "Nouvelle théorie de la déformation par cisaillement hyperbolique quasi-3D pour l'analyse des vibrations statiques et libres des plaques fonctionnellement graduées", *J. Ing. Méca.-ASCE*, 140(2), 374-383.
- Heireche, H., Tounsi, A., Benzair, A., Maachou, M. et Adda Bedia, EA (2008), « Propagation des ondes sonores in single-walled carbon nanotubes using nonlocal elasticity », *Physica E*, 40(8), 2791-2799.
- Houari, MSA, Tounsi, A. et Anwar Bég, O. (2013), "Analyse de flexion thermoélastique de plaques sandwich fonctionnellement graduées à l'aide d'une nouvelle théorie de cisaillement d'ordre supérieur et de déformation normale", *Int. J. Mech. Sci.*, 76, 102-111.
- Khalfi, Y., Houari, MSA et Tounsi, A. (2014), "Une théorie raffinée et simple de la déformation par cisaillement pour le flambement thermique des plaques solaires fonctionnellement graduées sur une fondation élastique", *Int. J. Computational Methods*, (sous presse).
- Kettaf, FZ, Houari, MSA, Benguediab, M. et Tounsi, A. (2013), « Flambement thermique de plaques sandwich fonctionnellement graduées à l'aide d'un nouveau modèle de déplacement de cisaillement hyperbolique », *Steel Compos. Structure*, 15(4), 399-423.
- Klouche Djedid, I., Benachour, A., Houari, MSA, Tounsi, A. et Ameer, M. (2014), "Une théorie raffinée à quatre variables d'ordre n pour la flexion et la vibration libre de plaques à gradient fonctionnel", *Steel Compos. Structu.*, 17(1), 21-46.
- Li, XF (2008), "Une approche unifiée pour analyser les comportements statiques et dynamiques des poutres de Timoshenko et d'Euler- Bernoulli à gradient fonctionnel", *J. Sound Vib.*, 318(4-5), 1210-1229.

- Li, XF, Wang, BL et Han, JC (2010), "Une théorie d'ordre supérieur pour les analyses statiques et dynamiques des poutres fonctionnellement graduées", *Arch. Appl. Méc.*, 80(10), 1197-1212.
- Marur, PR (1999), *Comportement à la rupture de matériaux à gradient fonctionnel*, Ph.D. Mémoire, Auburn Université, Auburn, AL, États-Unis.
- Nedri, K., El Meiche, N. et Tounsi, A. (2014), "Analyse des vibrations libres de plaques composites stratifiées reposant sur des fondations élastiques en utilisant une théorie raffinée de la déformation par cisaillement hyperbolique", *Mech. Compos. Mat.*, 49(6), 629-640.
- Ould Larbi, L., Kaci, A., Houari, MSA et Tounsi, A. (2013), "Une théorie efficace des poutres à déformation par cisaillement basée sur la position de la surface neutre pour la flexion et la vibration libre des poutres fonctionnellement graduées », *Méca. Basé Des. Struc.*, 41, 421-433.
- Sallai, BO, Tounsi, A., Mechab, I., Bachir, BM, Meradjah, M. et Adda, BEA (2009), "Une analyse théorique de la flexion en flexion des poutres épaisses Al/Al₂O₃ S-FGM", *Comput. Mater. Sei.*, 44(4), 1344-1350.
- Sankar, BV (2001), "Une solution d'élasticité pour les poutres fonctionnellement graduées", *Compos. Sci. Technol.*, 61(5), 689-696.
- Simsek, M. (2010a), "Analyse fondamentale de la fréquence des poutres fonctionnellement gradués en utilisant différentes théories des poutres d'ordre supérieur », *Nucl. Ing. Déc.*, 240 (4), 697-705.
- Şimşek, M. (2010b), "Analyse des vibrations d'une poutre fonctionnellement graduée sous une masse en mouvement en utilisant différentes théories de poutre », *Compos. Structu.*, 92(4), 904-917.
- Thai, HT et Vo, TP (2012), « Flexion et vibration libre de poutres fonctionnellement graduées à l'aide de diverses théories de poutre de déformation de cisaillement d'ordre supérieur », *Int. J. Mech. Sei.*, 62(1), 57-66.
- Tounsi, A, Heireche, H, Berrabah, HM, Benzair, A, Boumia, L. (2008), "Effet de petite taille sur la propagation des ondes dans les nanotubes de carbone à double paroi sous champ de température", *J. Appl. Phys.*, 104(10), 104301.
- Tounsi, A., Hassaine Daouadji, T., Benyoucef, S. et Addabedia, EA (2009), "Contraintes interfaciales dans les poutres RC plaquées FRP: Effet des déformations de cisaillement adhérentes", *Int. J. Adhes. Adhés.*, 29(4), 343-351.
- Tounsi, A., Houari, MSA, Benyoucef, S. et Adda Bedia, EA (2013a), "Une théorie raffinée de la déformation par cisaillement trigonométrique pour la flexion thermoélastique de plaques sandwich à gradient fonctionnel", *Aerospace Sci. Technol.*, 24(1), 209-220.
- Tounsi, A., Benguediab, S., Adda Bedia, EA, Semmah, A. et Zidour, M. (2013b), "Effets non locaux sur les propriétés de flambement thermique des nanotubes de carbone à double paroi", *Adv. Nano Res.*, 1(1), 1 -11.

- Tounsi, A., Semmah, A. et Bousahla, AA (2013c), "Comportement de flambement thermique d'un nanopoutre utilisant une théorie de poutre non local d'ordre supérieur efficace", J. Nanomech. Micromécanique. -ASCE, 3(3), 37-42.
- Tounsi, A., Adda Bedia, EA, Mahmoud, SR et Amziane, S. (2013d), « Modélisation mathématique et Optimisation des structures fonctionnellement graduées », Math. Probl. Eng., 213, 1- 2.
- Zhong, Z. et Yu, T. (2007), "Solution analytique d'une poutre à gradient fonctionnel en porte-à-faux", Compos. Sci. Technol., 67(3-4), 481-488.
- Zidi, M., Tounsi, A., Houari, MSA, Adda Bedia, EA et Anwar Bég, O. (2014), "Analyse de flexion de plaques FGM sous chargement hygro-thermo-mécanique à l'aide d'une théorie de plaque raffinée à quatre variables", Sci. Aerospaciale. Technol., 34, 24-34.