

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ IBN KHALDOUN DE TIARET.



FACULTÉ DES SCIENCES APPLIQUÉES
DÉPARTEMENT GÉNIE CIVIL

Mémoire de fin d'études en vue de l'obtention du diplôme de Master

Spécialité : Génie Civil

Option : Structures

Présenté par :

KASDI ABOUBAKER ESSEDIK

BERRABHA ADDA

Sujet du mémoire

**ETUDE DE LA MECANIQUE DES POUTRES FGM EPAISSES AVEC
IMPERFECTION DANS LA COMPOSITION DU MATERIAU PAR LA THEORIE
D'ELASTICITE D'ORDRE SUPERIEUR HYPERBOLIQUE- POLYNOMIALE**

Soutenu publiquement le 30/06/2022.devant le jury composé de :

Mr, BELMAHI Samir

Mr, CHEIKH Abdelbaki

Mr, KHILOUN Mokhtar

Mme, KHARROUBI Lamia

Président

Rapporteur

Examineur

Examineur

PROMOTION : 2021/2022

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

Remerciement

Dédicace

*C'est avec un très grand honneur que je dédie ce modeste travail aux
Personnes les plus chères au monde, mes chers parents pour leurs amour
Et bonté et que sans eux je n'aurai jamais pu atteindre mon objectif, que*

Dieu me les garde

À...

∞ Mes parents

∞ Ma petite famille

∞ Mes amis

*∞ tous ceux qui m'ont aidé de près ou de loin dans
L'accomplissement de ce travail.*

مخلص

Résumé

Résumé

Un inconvénient de la composition matérielle des poutres épaisses de matériaux fonctionnellement gradués (FGM) est vérifié dans cette recherche en conjonction avec une nouvelle théorie des poutres à élasticité d'ordre supérieur hyperbolique-polynomiale (HPET).

Le modèle de poutre proposé consiste en une nouvelle fonction de forme pour la distribution de la déformation des contraintes de cisaillement dans la coordonnée transversale. La théorie des poutres intègre également l'effet d'étirement pour présenter un effet indirect des variations d'épaisseur. À la suite de la composition du modèle de poutre proposé en déformations lagrangiennes linéaires et variationnelles d'énergie, le système d'équations est obtenu. La méthode actuelle est ici étendue à plusieurs conditions de bord pour obtenir des valeurs de flambement critique élastique. Tout d'abord, l'importance de la théorie des poutres d'ordre supérieur, ainsi que l'effet d'étirement, est évaluée dans des comparaisons tabulées assorties.

Ensuite, avec des validations basées sur la littérature existante et ouverte, la fonction de forme proposée est évaluée pour prendre en compte la précision souhaitée.

Quelques graphiques comparatifs au moyen de fonctions de forme bien connues sont tracés. Ces comparaisons révèlent une très bonne conformité. Dans la dernière section de l'article, basée sur un mélange inapproprié de SUS304 et Si₃C₄ comme premier type de faisceau FGM (poutre-I) et, Al et Al₂O₃ comme deuxième type (poutre-II), les résultats sont illustrés tout en la poutre est maintenue dans quatre états, encastree–encastree (C–C), simplement–simplement (S–S), encastree–simplement (C–S) et en particulier en porte-à-faux (C–F). Nous avons constaté que le défaut impressionne nettement une poutre FGM avec des conditions aux limites avec des degrés de liberté inférieurs.

Mots clés : *Nouvelle théorie de l'élasticité, Poutre FGM, Imperfection, Méthode analytique, Différentes conditions de bord.*

Abstract

Abstract

A drawback to the material composition of thick functionally graded materials (FGM) beams is checked out in this research in conjunction with a novel hyperbolic-polynomial higher-order elasticity beam theory (HPET).

The proposed beam model consists of a novel shape function for the distribution of shear stress deformation in the transverse coordinate. The beam theory also incorporates the stretching effect to present an indirect effect of thickness variations. As a result of compounding the proposed beam model in linear Lagrangian strains and variational of energy, the system of equations is obtained. The analytic method is here expanded for several edge conditions to obtain elastic critical buckling values. First, the importance of the higher-order beam theory, as well as stretching effect, is assessed in assorted tabulated comparisons. Next, with validations based on the existing and open literature, the proposed shape function is evaluated to consider the desired accuracy.

Some comparative graphs by means of well-known shape functions are plotted. These comparisons reveal a very good compliance. In the final section of the paper, based on an inappropriate mixture of the SUS304 and Si₃C₄ as the first type of FGM beam (Beam-I) and, Al and Al₂O₃ as the second type (Beam-II), the results are pictured while the beam is kept in four states, clamped–clamped (C–C), pinned–pinned (S–S), clamped- pinned (C–S) and in particular cantilever (C–F). We found that the defect impresses markedly an FGM beam with boundary conditions with lower degrees of freedom.

Keywords: *Novel elasticity theory, FGM beam, Imperfection, analytical method, Different edge condition.*

Sommaire

Sommaire

ملخص.....	I
Résumé.....	II
Abstract.....	III
Liste des figures.....	IV
Liste des tableaux.....	VI
Liste des symboles et abréviations.....	VII
Introduction générale.....	01
<u>Chapitre I</u> : Recherche Bibliographique Sur Les Matériaux Composites	
I.1. Introduction.....	08
I.2. définition d'un matériau composite.....	10
I.3. Concept des matériaux à gradient de propriétés.....	10
I.4. Matériaux composites intelligents (FGMs).....	12
I.5. Historique des matériaux type FGM.....	13
I.6. Avantages et inconvénient des FGMs.....	16
I.6.1. Avantage des FGM.....	16
I.6.2. Inconvénient des FGM.....	17
I.7. Applications des matériaux FGM dans l'industriel.....	17
I.8. Comparaison des matériaux types FGM et les matériaux composites traditionnels.....	18
I.9. Revue des méthodes d'élaboration des matériaux FGMs.....	20
I.9.1 Coulage séquentiel en barbotine (Slip Casting).....	21
I.9.2. Coulage en bande (Tape casting).....	21
I.9.3 Compactage des couches (poudre d'empilement).....	22
I.9.4 Coulée par centrifugation.....	23
I.9.5 Dépôt par électrophorèse.....	23
I.9.6. Projection plasma.....	24
I.9.7. Dépôt physique en phase vapeur (PVD).....	25
I.9.8. Dépôt chimique en phase vapeur (CVD).....	26

I.9.9. Frittage et Infiltration.....	27
I.9.10. Frittage Laser Différentiel.....	27
I.9.11. Implantation Ionique (sputtering).....	28
I.9.12. Dépôt par centrifugation.....	28
I.10. Propriétés matérielles effectives d'un matériau FGM	29
I.11. L'intérêt d'utilisation d'un FGM.....	29
I.12. Domain d'application des FGM.....	29
I.12.1. L'aérospatiale.....	31
I.12.2. Industrie navale, aéronautique (Prévention contre les attaques terroristes).....	31
I.12.3. Médecine.....	32
I.12.4. Défense.....	32
I.12.5. Énergie	33
I.12.6. domaine appliqué en GC.....	33
I.12.6.1. Les joints dans la charpente métallique.....	33
I.12.6.2. Les grands vitrages dans les zones chaudes.....	33
I.12.6.3. Les chaussées rigides (Functionally Graded Concrete Materials for Rigid Pavements).....	33
I.12.6.4. Les chaussées souples (Functionally Graded Concrete Materials for Flexible Pavements).....	33
I.12.6.5. Les tunnels (functionally graded concrete segment in tunnel).....	34
I.13. Conclusion.....	34

Chapitre II : Les Différentes Théories Des Poutres

II.1. Introduction.....	35
II.2. Définition des poutres	35
II.3. Les différents types de poutres.....	35
II.3.1. Poutre simple.....	35
II.3.2. Poutre console.....	36
II.3.3. Poutre avec porte-à-faux.....	36

II.3.4. Poutre continue.....	36
II.3.5. Poutre à double encastrement.....	36
II.3.6. Poutre supportée à double encastrement.....	36
II.4. Historique des théories des poutres.....	37
II.5. Comportement des poutres FGM.....	37
II.6. Les différentes théories des poutres.....	39
II.6.1. Le modèle classique de la poutre d’Euler-Bernoulli (CBT).....	39
II.6.2. Le modèle de poutre basé sur la théorie du premier ordre de la déformation de cisaillement (FSDT).....	40
II.6.3. Le modèle de poutre basé sur la théorie du troisième ordre de la déformation de cisaillement (TSDT).....	43
II.7. Méthodes de résolution.....	45
II.7.1. procédure de NAVIER.....	45
II.7.2. Méthode de RAYLEIGH-Ritz.....	45
II.7.3. Méthode des éléments finis.....	45
II.8. conclusion.....	46

Chapitre III : Modèle mathématique et développement

III.1. Introduction.....	47
III.2. Modèle mathématique.....	48
III.3. Approche de résolution.....	56
III.4. Crédibilité des résultats.....	58
III.5. conclusion.....	61

Chapitre IV : Résultats et Discussions

IV.1. Introduction.....	62
IV.2. Résultats et discussions numériques.....	62
IV.3. Conclusions.....	70

Conclusion

générale.....	IIIXIX
----------------------	---------------

Référence Bibliographie.....	74-77
------------------------------	-------

Liste Des Figures

Liste des figures

Figure I.1. (a) Variation continue des propriétés (b) Variation discrète des propriétés.....10

Figure I.2. Concept des matériaux à gradient de propriétés.....11

Figure I.3. Protection thermique (Aerospace Spécification Métal, 2003).....12

Figure I.4 : Un FGM avec les fractions de volume de phases constitutives graduées dans la direction verticale.....14

Figure I.5. Implant dentaire en FGM (Ti/20HAP). Aspect externe (gauche) et section transversale (droite).....18

Figure I.6. Caractéristiques des matériaux composites FGM en comparaison avec les matériaux composites conventionnels.....19

Figure I.7. La distribution composante des matériaux.....20

Figure I.8. Principe de la Méthode de Coulage en Bande.....22

Figure I.9. Vue schématique de l'installation d'EPD pour la production des matériaux.....24

Figure I.10. Projection par plasma pour former un matériau thermoélectrique gradué. (La composition est graduée dans la direction plane).....25

Figure I.11. Schéma de l'installation pour la préparation d'un SiC/C FGM par le dépôt chimique en phase vapeur (CVD).....27

Figure. I.12. Disposition du procédé frittage laser différentiel.....28

Figure. I.13. schéma du procédé dépôt par centrifugation.....29

Figure I.14. Les principaux domaines d'application des FGM.....30

Figure I.15. Applications des FGM dans divers domaines.....31

Figure II.1. Types de poutre.....36

Figure II.2. Effet de l'épaisseur de la plaque sur les contraintes inter faciales avec différentes valeurs de l'index β : Poutres FGM.....39

Figure II.3. Illustration du modèle de la poutre d'Euler-Bernoulli (CBT).....40

Figure II.4. Illustration du modèle de la poutre de Timoshenko (TBT).....41

Figure II.5. Illustration d'une poutre d'ordre élevé.....44

Figure III.1. Une poutre FGM illustré schématiquement.....49

Figure III.2. Variation du module de Young selon la loi de puissance pour un parfait Faisceau FGM-I.....51

Figure III.3. Variation du module d'Young pour une poutre-I FGM imparfaite (Cas I, un $\frac{1}{4}$ 0:1h).....52

Figure III.4. Variation du module d'Young pour une poutre-I FGM imparfaite (Cas II, b $\frac{1}{4}$ 0:1h).....53

Figure IV.1. Indice de loi de puissance en fonction des différentes conditions de bord pour une poutre FGM-I épaisse (Cas I, $L = 5 h$).....67

Figure IV.2. Indice de loi de puissance en fonction des différentes conditions de bord pour une poutre FGM-II épaisse (Cas I, $L = 5 h$).....67

Figure IV.3. Indice de loi de puissance en fonction des différentes conditions de bord pour une poutre FGM-I épaisse (Cas II, $L = 5 h$).....68

Figure IV.4. Indice de loi de puissance par rapport à différentes conditions de bord pour une poutre FGM-II épaisse (Cas II, $L = 5 h$).....68

Liste Des Tableaux

Liste des Tableaux

Tableau III.1. Modèles du poutre FGM-I considérés ici, parfait (a), imparfait (cas I (b), cas II (c)).....	55
Tableau III.2. Fonctions de forme pour la distribution des contraintes de cisaillement dans la littérature.....	58
Tableau IV.1. Paramètres du matériau.....	60
Tableau IV.2. Charges élastiques de flambement (KN) pour plusieurs fonctions de forme dans un poteau carré en acier S-S basé sur HSDT ($E = 2 \times 10^5$ MPa, $h = 60$ mm).....	62
Tableau IV.3. Charges élastiques de flambement (KN) pour plusieurs fonctions de forme dans un poteau carré en acier F-F basé sur HSDT ($E = 2 \times 10^5$ MPa, $h = 60$ mm).....	62
Tableau IV.4. Charge élastique de flambement (KN) pour un poteau carré en acier S-S ($E = 2 \times 10^5$ MPa, $h = 60$ mm).....	63
Tableau IV.5. Charge élastique de flambement (KN) pour un poteau rectangulaire en acier S-S ($E = 2 \times 10^5$ MPa, $h = 40$ mm, $b = 90$ mm).....	63
Tableau IV.6. Charge élastique de flambement (KN) pour un poteau carré en acier F-F ($E = 2 \times 10^5$ MPa, $h = 60$ mm).....	63
Tableau IV.7. Charge élastique de flambement (KN) pour un poteau rectangulaire en acier F-F ($E = 2 \times 10^5$ MPa, $h = 40$ mm, $b = 90$ mm).....	63
Tableau IV.8. Charge élastique de flambement (KN) pour un poteau carré en acier S-S très épais et épais ($E = 2 \times 10^5$ MPa, $h = 60$ mm).....	64

Liste Des Symboles Et Abréviations

Liste des symboles et abréviations

z	Coordonnée d'épaisseur
$\nu(z)$	Coefficient de Poisson
$E(z)$	Module de Young
w_s	Épaisseur étirement
Π_w	Travail effectué par des charges externes
ν_1	Coefficient de Poisson Céramique ou Alumine
ν_2	Coefficient de Poisson Métal ou Aluminium
h	Épaisseur de la poutre
L	Longueur de la poutre
ϵ_{xx}	Déformation axiale
γ_{xz}	Déformation de cisaillement dans le plan x-z
ϵ_{zz}	Déformation transversale
σ_{xx}	Contrainte axiale
τ_{xz}	Contrainte de cisaillement
σ_{zz}	Contrainte transversale
Π_b	Énergie de déformation
m	numéro de mode
u_1	Déplacement axial des nœuds de la poutre
u_2	Déplacement transversal des nœuds de la poutre
u	Déplacement dans le plan des nœuds de la poutre selon x
E_1	Module de Young de la céramique ou de l'alumine
E_2	Module de Young du métal ou de l'aluminium
w_b	Déviations transversales des nœuds de la poutre
w_s	Déviations par cisaillement des nœuds de la poutre
$f(z)$	Fonction de forme de la déformation de cisaillement
$g(z)$	Fonction de forme de l'effet d'étirement
k	Fraction volumique, indice de loi de puissance
$G(z)$	Module de cisaillement du matériau de la poutre

M_{xx}	Contrainte de moment résultante autour de l'axe x
N_{xx}	Contrainte axiale dans le plan résultante
Q_{xz}	Contrainte de cisaillement résultante dans le plan x-z
X_m	Fonction de pondération pour satisfaire les conditions aux limites
a	Pour définir l'imperfection dans la section Céramique
b	Pour définir l'imperfection dans la section Métal
N_{xx}^0	Compression statique dans le plan appliquée aux deux extrémités du poutre
$R_{xx} R_{zz}$	Résultantes de contrainte d'étirement d'ordre supérieur et d'épaisseur
$U_m W_{bm} W_{sm}$	Variables inconnues pour axial, transversal et cisaillement
W_{zm}	Déviations
	Effet d'étirement

Introduction Générale

Introduction générale

Les FGMs : Les matériaux à gradient fonctionnel (FGM) sont des composites dont les propriétés changent doucement et continuellement d'une surface à l'autre selon une fonction donnée. Ces matériaux sont construits en composant des poudres de céramique et de métal ou d'aluminium et d'alumine, etc. Le type commun de ces matériaux peut être un mélange de céramiques et de métaux. Le principal mérite de l'utilisation d'un tel matériau est qu'il peut résister à des situations difficiles telles que des environnements à très haute température et à haute différence de température. Par exemple, le revêtement thermique sur les pales des turbines à gaz et les boucliers thermiques des engins spatiaux peuvent être de grandes promesses pour leurs applications. En outre, ce type de structure composite est résistant à la corrosion et à l'usure, et présente une résistance élevée à la rupture. Par rapport à cela, certains cas peuvent être évoqués tels que les réservoirs de produits chimiques et les environnements à forte abrasion en raison de sa spécificité [Koizumi M. 1997] [Miyamoto Y, Kaysser WA, Rabin BH, Kawasaki A, Ford RG. 2013].

Les Poutres : Les poutres, en tant que l'un des composants d'ingénierie les plus vitaux, ont toujours intéressé les chercheurs. L'instabilité des poutres entraîne un flambement sous une charge statique dans le plan qui, en raison de la grande déformation de la structure dans ce cas, l'efficacité de la poutre sera considérablement diminuée. Diverses méthodes d'analyse des poutres ont été présentées jusqu'à présent. La méthode d'analyse du comportement d'une poutre à l'aide de la théorie de l'élasticité tridimensionnelle, bien qu'une méthode basique et précise, est compliquée et difficile à cause de l'analyse tridimensionnelle de la poutre. Pour réduire ces complexités, et en supposant que l'épaisseur des poutres est faible dans une large mesure par rapport à d'autres dimensions comme la longueur, des hypothèses appelées théories des poutres sont présentées. La théorie la plus simple en analyse de poutre est la théorie la plus simple dans l'analyse des poutres est la théorie des poutres d'Euler-Bernoulli (EB). L'hypothèse EB correspond aux poutres minces et ne considère pas l'effet du cisaillement et de la déformation transversale dans l'épaisseur. Afin de réduire l'erreur dans l'analyse des poutres relativement épaisses, une autre théorie connue sous le nom de théorie de la déformation par cisaillement a été introduite [Timochenko SP. 1921]. Dans cette théorie, l'effet de la déformation de cisaillement sur l'épaisseur est considéré, cependant il se confronte à une erreur pour laquelle il faut un facteur de correction de cisaillement. La théorie de déformation par cisaillement d'ordre supérieur la plus courante peut être la théorie de

déformation par cisaillement de troisième ordre soulevée par [Reddy JN.1984]. Bien que les théories de déformation par cisaillement des poutres aient donné de bons résultats dans l'analyse de poutres relativement épaisses, elles sont encore loin d'être des réponses précises en raison de la négligence des déformations transversales et des effets d'étirement à travers l'épaisseur. Pour résoudre ce problème et maximiser la précision, l'élasticité quasi-3D est venue [Akavci SS, Tanrikulu AH. 2015]. [Zohra Zaoui F, Ouinas D, Tounsi A.2019]. Cependant, ces théories ne fonctionnent bien que pour les matériaux épais isotropes et ne peuvent pas être un modèle général d'élasticité quasi-3D approprié pour tous les matériaux tels que les composites stratifiés. Cette théorie complète les théories précédentes et considère à la fois les effets du cisaillement et de la déformation transversale le long de l'épaisseur sous la forme d'une théorie de poutre d'ordre supérieur.

Revue de littérature : En raison des applications exceptionnelles et primordiales des structures FGM, il est important d'étudier les conditions de leur défaillance et de leur défektivité. Dans le passé, en raison de l'ignorance du phénomène de flambage, la résistance à l'élasticité était considérée comme un indicateur clé dans la plupart des conceptions. Cependant, comme les études ont commencé à reconnaître ce critère important, le phénomène de flambement a été considéré comme le critère principal dans les considérations de conception. Le phénomène de flambement se produit lorsque la majeure partie de l'énergie de déformation stockée dans la membrane est capable de convertir l'énergie de flexion nécessaire aux grandes déformations, ce qui peut entraîner des dommages catastrophiques. Le flambement d'un élément dépend de facteurs tels que le chargement, la géométrie et le matériau. Les travaux théoriques relatifs au flambement des poutres FGM dépendent d'une variété de chercheurs. [Kiani Y, Eslami M. 2010;] ont effectué une analyse des poutres FGM soumis à la stabilité thermique sur la base de l'approche du poutre EB ainsi que de la distribution de la loi de puissance. Ils ont estimé trois types de distribution de la température, à savoir l'élévation de température linéaire, non linéaire et uniforme. Différentes conditions de bord ont également été considérées comme étant épinglées et épinglées. En fin de compte, les équations régies ont été résolues sur la base d'une solution exacte. [Wattanasakulpong N, Gangadhara Prusty B, Kelly DW. 2011] basé sur la loi de puissance, inspecté les fréquences propres et les charges thermiques critiques de stabilité pour une poutre FGM à l'aide d'une théorie raffinée de la déformation par cisaillement du troisième ordre (TSDT). L'analyse des fréquences propres a été adoptée par la méthode de Ritz. [Fallah A, Aghdam MM 2012] ont assisté à la réponse non linéaire d'une poutre EB-FGM dans une limite d'instabilité et de

vibration pour étudier le problème de thermo-élasticité. La poutre a été installée sur une matrice élastique non linéaire, et plusieurs conditions d'extrémité également. [Ma LS, Lee DW. 2012] à travers une théorie de déformation par cisaillement de premier ordre (FSDT), ont étudié la non-linéarité dans le comportement d'une poutre FGM pivot-pivot impliquant des déformations de cisaillement sous chargement thermique dans le plan basé sur la technique de solution exacte. [Rahimi GH, Gazor MS, Hemmatnezhad M, Toorani H. 2013] ont étudié les fréquences propres et la stabilité postcritique pour un faisceau FGM contenant des déformations de cisaillement sur la base de FSDT. La poutre a été mise en œuvre aux deux extrémités par des conditions goupillées-piquées, fixes-fixes et fixes-piquées. [Esfahani SE, Kiani Y, Eslami MR. 2013] ont discuté d'une poutre composite dépendante de la température soumise à des charges de flambement thermique non linéaires. Le FSDT a été utilisé alors que le système comprenait un substrat élastique non linéaire. Les résultats ont été donnés dans des conditions de bord fixe et articulé en utilisant la méthode de quadrature différentielle généralisée (GDQM). [Viola E, Tornabene F, Fantuzzi N. 2013] ont formulé et calculé les conditions de vibration libre des panneaux et coques composites à double courbure dans le cadre d'une théorie de l'élasticité d'ordre supérieur. Leur problème a été résolu par rapport à la méthode GDQ et validé par FSDT et des programmes informatiques commerciaux, par ex. ABAQUS aussi. Dans un autre travail, Viola et al. [20], sur la base d'une théorie de l'élasticité d'ordre supérieur et de la technique GDQ, ont étudié la réponse statique de panneaux et de coques composites à double courbure parfaite. Ils ont étudié six groupes de panneaux et de coques tels que des panneaux sphériques et cylindriques, des plaques rectangulaires et annulaires, en particulier un paraboloïde elliptique et une coque caténoïdale. [Tornabene F, Viola E, Fantuzzi N. 2013] ont proposé un modèle monocouche équivalent pour les structures composites stratifiées afin d'étudier les vibrations libres de la coque/panneau monocouche modélisée. Leur réflexion a également porté sur les effets de zig-zag et d'étirement du matériau. L'approche GDQ et la quadrature intégrale généralisée (GIQ) ont donné des solutions au problème. Les résultats des codes commerciaux et d'autres publications ont approuvé leur formulation. [Vo ThP, Thai HT, Nguyen TK, Maheri A, Lee J. 2014] ont traité de la stabilité et de la vibration d'une poutre sandwich composite concernant une théorie modifiée de la déformation par cisaillement d'ordre supérieur (HSST) par la technique des éléments finis. [Tornabene F, Fantuzzi N, Viola E, Ferreira AJM. 2013] ont appliqué une technique de fonction de base radiale (RBF) afin de calculer les fréquences propres d'une coque/panneau composite à double courbure dans le cadre d'un modèle

monocouche équivalent. La fiabilité et la stabilité de la méthodologie ont été confirmées par la comparaison des résultats avec FEM et GDQ. Shen et [Shen H-Sh, Wang Zh-X. 2014] ont considéré de manière non linéaire les grandes déviations, la situation de post-stabilité et l'amplitude de vibration pour une poutre FGM incorporant des déformations de cisaillement tandis que la poutre était intégrée dans un environnement avec un différentiel de température et également une fondation en polymère. [Tornabene F, Fantuzzi N, Baccocchi M.2014] ont présenté une approche générale d'ordre supérieur afin d'étudier les fréquences propres des structures composites à double courbure telles que les coques stratifiées. Pour calculer les résultats tabulaires et illustrés, ils ont utilisé une version avancée de GDQ, à savoir le GDQ local (LGDQ). Le mérite de cette méthode par rapport à la précédente, cependant, était la nécessité de réduire le nombre de points de grille tout en conservant la précision. [Nguyen TK, Truong-Phong Nguyen T, Vo ThP, Thai HT.2015] se sont concentrés sur un nouveau HSDT pour analyser une poutre composite sandwich exposée dans des conditions de stabilité et de fréquence propre. Les sorties numériques ont été capturées sur la base de la méthode du multiplicateur de Lagrange pour les conditions aux limites de fixe-fixe, épinglé-épinglé et leur mélange. [Tufeksi E, Eroglu U, Aydin S. Aya 2016] ont examiné des poutres FGM à section circulaire avec FSDT dans des conditions de stabilité dans le plan à l'aide de la technique de résolution exacte. Chen et al. [Chen D, Yang J, Kitipornchai S. 2015] ont évalué la porosité dans une poutre FGM et consacré une analyse statique basée sur le flambement et la flexion de la poutre FSDT et ont résolu la relation caractéristique récoltée en utilisant la méthode de Ritz pour certains cas de conditions finales, à savoir articuler, fixe, libre et leurs combinaisons. [Simsek M. 2016] a présenté la fonctionnalité dans deux directions pour un faisceau FSDT FGM comprenant plusieurs conditions aux limites sur la base de la méthode de Ritz. Huang et al. [Huang Y, Zhang M, Rong H.2016] sur la base du FSDT, ont analysé la stabilité axiale d'une poutre FSDT-FGM en supposant une inhomogénéité dans la direction de la longueur. Sur la base de solutions numériques, une variété de supports d'extrémité a été estimés comme étant libres, fixes, articulés et particulièrement guidés. [Elle GL, Yuan FG, Ren YR 2017] ont inspecté un HSDT pour étudier la stabilité post-critique et thermique d'un faisceau FGM. Ils ont capturé les résultats en utilisant une technique de perturbation en deux étapes. [Kahya V, Turan M.2017] ont acquis un modèle d'éléments finis pour une poutre composite dans des états de flambement et de vibration. L'équation FSDT et Lagrange a aidé à réaliser les équations constitutives. Une étude sur la stabilité et les vibrations d'un double système de poutre composite à base de

FSDT ponté sur du milieu Winkler-Pasternak a été réalisée par Deng et al. [Deng H, Dong Chen K, Cheng W, Zhao ShG. 2017] Pour raccourcir l'examen du grand nombre de travaux publiés, d'autres recherches importantes peuvent être consultées par [Sina SA, Nanazi HM, Haddadpour H. 2009] [Dastjerdi Sh, A kgöz B. 2018] et ailleurs.

Imperfection : Comme le montrent clairement les évaluations des recherches publiées, toute la littérature sur les FGM a souvent été réalisée sur la base d'hypothèses théoriques d'une structure parfaite pour les propriétés mécaniques des FGM. Sans aucun doute, il est difficile d'explorer la gradation exacte des FGM car elle nécessite un contrôle expérimental. Cependant, le contrôle de presque toutes les pièces fabriquées à partir de FGM peut ne pas être rentable, ce qui conduit à des produits imparfaits. De l'autre côté, aujourd'hui, plusieurs techniques fortes ont été utilisées pour fabriquer des FGM, mais quelques-unes d'entre elles peuvent produire des constituants de ces matériaux prestigieux parfaitement sans défauts [Naebe M, Shirvanimoghaddam K. 2016]. Ainsi, dépourvu d'un défaut pour atteindre une gradation variant de façon fluide et continue et une structure parfaite peut être impossible. Bien que dans cet article nous supposions également un modèle théorique pour les FGM, il est basé sur les FGM imparfaites. En regardant la littérature, on peut trouver le [Czechowski L, Koçakowski Z. 2019], dans lequel les propriétés matérielles des FGM ont été dosées avec une imperfection. Cependant, la recherche était basée sur la conversion des FGM en composites stratifiés pour ouvrir la voie à l'étude de l'imperfection. Contrairement à cette référence, dans la présente recherche, nous essayons de mettre l'inconvénient de la composition du matériau sur la base de la gradation de fonctionnalité de la distribution de la loi de puissance.

Bref examen du présent travail : Dans la présente étude, une nouvelle fonction de déformation par cisaillement est présentée pour l'analyse de stabilité de poutres rectangulaires épaisses et très épaisses constituées de matériaux fonctionnellement gradués. En prenant le changement d'épaisseur en fonction de la dimension x , nous transformons le problème en un problème d'élasticité d'ordre supérieur. Les propriétés du matériau sont considérées comme inchangées selon l'axe de l'épaisseur. Dans la forme parfaite des matériaux fonctionnellement gradués, les propriétés du matériau changent continuellement et progressivement selon les différents modèles tels que l'exponentielle, la puissance et la loi sigmoïde [Arefi M, Pourjamshidian M, Ghorbanpour Arani A, Rabczuk T. 2019]. Dans cet article, nous essayons d'apporter la forme parfaite de matériaux fonctionnellement gradués dans certaines imperfections de la composition du matériau. En effet, il est peu probable qu'un matériau

calibré respecte exactement la loi de modèle. Puisqu'il peut y avoir des erreurs potentielles dans le processus de mélange, nous avons donc considéré dans cette étude deux cas fonctionnels d'étalonnage imparfait basé sur la loi de puissance afin de déterminer quelle sera la différence dans leurs résultats s'ils ne se conforment pas exactement à la loi de puissance. De plus, en raison de l'importance du coefficient de Poisson des matériaux calibrés, sa valeur le long de l'épaisseur de l'élément est considérée comme une fonction des deux matériaux. Dans la première étape, afin d'étudier le comportement de stabilité de l'élément, l'équation déterminante pour le flambement de la poutre rectangulaire est obtenue en utilisant une combinaison du principe de l'énergie potentielle minimale et de la théorie de l'élasticité d'ordre supérieur. En conséquence, la forme approximative de la déformation de la poutre est obtenue sous la forme d'une équation différentielle ordinaire et en imposant les conditions de bord de la poutre, et en utilisant la méthode du solveur de valeur propre, les charges critiques de flambement sont atteintes. A la validation, les résultats numériques de l'analyse de stabilité sont comparés à des références prestigieuses et à un logiciel de solution par éléments finis (EF). Une vue d'ensemble est effectuée sur les fonctions de déformation de cisaillement les plus connues fournies jusqu'à présent par d'autres chercheurs. Des résultats numériques sont présentés pour des éléments constitués de matériaux à gradient fonctionnel et les influences de l'aire de la section transversale, de la loi de puissance des matériaux et du type d'appui de bord sur la charge de flambement critique sont étudiées partie par partie. Dans tous les tableaux de comparaison, l'efficacité, la précision et la fiabilité de la fonction présentée ont été approuvées. La nouveauté du travail actuel peut être écrite comme :

- Une nouvelle fonction de forme basée sur les termes hyperboliques-polynomiaux est supposé présenter une nouvelle analyse d'élasticité d'ordre supérieur.
- Une imperfection dans la composition du matériau est ici considérée sur la base de deux modèles.
- Quatre conditions aux limites disparates sont étudiées par une méthode de résolution analytique, présentant et développant une nouvelle fonction admissible pour les bords libres. Finalement, cette étude de recherche peut constituer un pont pour que les chercheurs commencent à envisager d'autres formes de défauts dans la composition matérielle des FGM, Ou dans cette étude, il a été divisé en quatre chapitres : Le premier chapitre comprenait une étude bibliographique des matériaux fonctionnellement gradués, sa composition, ses caractéristiques et ses perspectives technologiques dans ce domaine. Le deuxième chapitre expose un rappel sur les

différentes théories des poutres, Le troisième chapitre est dédié aux modèles mathématiques et développement. Le quatrième chapitre est consacré aux résultats obtenus et les discussions.

Introduction Générale

I.1.Introduction

Lors de l'examen des porteurs de charge de nature biologiques tels que les tiges de plantes et les troncs d'arbres, d'os d'animaux, des coquilles de mollusques, et d'autres tissus biologiques durs, on peut voir que sa géométrie change pour tenir compte de leur environnement physique.

Cela implique qu'ils sont très adaptés à toutes les conditions aux limites et du chargement définies par leur environnement. Seule la structure la plus économique est en mesure de survivre à la concurrence intense de l'énergie et les conditions physiques externes avec la quantité minimale de matériaux à leur disposition dans leur espace de vie limitée. Par exemple, la structure interne (architecture) d'un os a une forme optimisée par rapport à la direction de contrainte principale et l'ampleur de la contrainte de cisaillement [Koch, I.C 1917]. Ceci a été expliqué pour être due à une conception mécanique optimisée qui est caractérisée par une distribution uniforme des contraintes, sans pics de contrainte localisées [Mattheck, C. et Burkhardt, S., 1990]. Ceci suggère que les os et d'autres tissus biologiques sont gérés par un système auto-optimisation avec des mécanismes de détection capables de détecter des stimuli mécaniques externes afin de contrôler le modelage et le remodelage du système squelettique [Mattheck, C. 1990]. Il peut être déduit, par conséquent, que la forme et la structure ingénieuse de tissus durs biologiques sont le résultat d'un processus continu d'optimisation intelligente. Cette découverte en biologie constitue une source d'inspiration aux scientifiques pour développer une nouvelle génération des matériaux performants, capables de répondre aux exigences du domaine industriel de nos jours (grande dureté, résistance à la corrosion, résistance à la chaleur, conductivité thermique optimale, etc.). Ces performances dépendent en grande partie des propriétés du matériau, mais aussi de l'optimisation de l'architecture des phases en présence (Mishnaevsky,L. et Schmauder,S. ,2001). Une variété de méthodes a été proposée dans la littérature pour la production de nouveaux matériaux. Parmi celles qui suscitent un intérêt particulier, il y a la réalisation des matériaux à gradient de propriété FGM (Functionally Graded Materials)

En effet, les FGMs sont une classe de composites particuliers caractérisée par une composition et une structure qui varient d'une manière graduelle dans le matériau, conduisant ainsi à une variation progressive des propriétés [Nabil Ferguen et al, 2011].. Cette gradation des propriétés confère à ces matériaux une plus grande efficacité par rapport aux matériaux

composites conventionnels. Le potentiel des matériaux à gradient de propriétés est illustré pour les applications de haute technologie: aéronautique, aérospatiale, nucléaire, semi-conducteurs, et le génie civil [O. BOUAZIZ, 2011].

Cette stratégie de développement semble très prometteuse en particulier pour optimiser la tenue en température et la ténacité. La plupart des « FGM » sont constitués d'un mélange de céramique et de métal. Cette composition est variée d'une surface riche en céramique à une surface riche en métal avec une variation graduelle des fractions volumiques de ces deux matériaux entre les deux surfaces [J. N. Reddy, 2000].

La diversité des matériaux et de leurs propriétés correspond à la diversité des applications techniques : éléments porteurs d'une construction civile ou mécanique, éléments d'un circuit électromagnétique, protecteurs résistants aux agressions thermique ou chimiques, capteurs. La multitude d'objectifs provoque toujours de nouveaux matériaux. La plupart des matériaux composites les plus légers avec les rapports de haute résistance/poids et rigidité/poids ont été utilisés avec succès dans l'industrie aéronautique et d'autres applications de technologie. Cependant, le matériau composite traditionnel est incapable pour l'utiliser sous les environnements à hautes températures. Généralement les métaux ont été utilisés dans le domaine de technologie pendant plusieurs d'années à cause de leur excellente force et dureté. Dans les conditions à hautes températures, ces caractéristiques du métal sont assimilées réduites aux matériaux composites traditionnels. Les matériaux à base de céramique ont d'excellentes caractéristiques dans la résistance thermique. Cependant, les applications de céramique sont habituellement limitées en raison de leur basse dureté.

Une revue bibliographique sur les matériaux composites et les matériaux fonctionnellement gradués (FGM) est présentée dans ce chapitre. Cette revue débutera avec une exposition plutôt générale de la structure en matériaux composites (définition et différents constituants). Dans un deuxième temps, l'accent sera mis sur les matériaux fonctionnellement gradués (FGM) tel que leur historique, les types de FGM, les lois régissant la variation des propriétés matérielles des structures FGM et la loi de mélange.

I.2.définition d'un matériau composite

Un matériau composite peut être défini comme une association de plusieurs matériaux de natures différentes à l'échelle microstructurale. Cet assemblage conduit à un matériau dont les performances sont supérieures à celles d'un matériau à un seul constituant. [BERTHELOT, 2012]. Un matériau composite est constitué généralement d'une matrice et d'un renfort. La matrice est caractérisée par une résistance mécanique plus faible, et elle sert à maintenir les renforts et assure les transferts de charge, tandis que les renforts apportent principalement leurs caractéristiques mécaniques élevées (modules et limite d'élasticité, résistance mécanique, etc.) [d.GAY 1991]

I.3. Concept des matériaux à gradient de propriétés

Les matériaux à gradient fonctionnel sont une nouvelle classe de matériaux composites dont les propriétés thermomécaniques varient selon une loi de fonction continue (Figure I.1.a) ou discrète (Figure I.1.b) à travers l'épaisseur [Hirai 1996]. Grâce à la structure spéciale de ces matériaux, il est possible d'éviter les concentrations de contraintes au niveau des interfaces (provoquant le délaminage) et d'améliorer les propriétés mécaniques et thermiques des pièces par association de matériaux. Ces matériaux sont de plus en plus utilisés dans les industries aéronautiques, aérospatiale, biomécanique, automobile et dans bien d'autres applications technologiques.

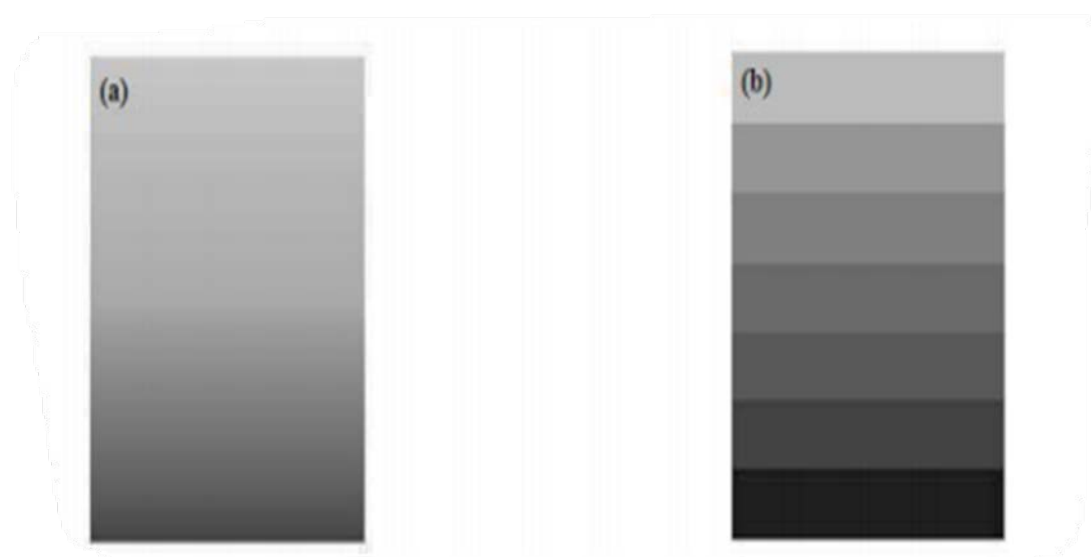


Figure I.1. (a) Variation continue des propriétés (b) Variation discrète des propriétés.

Le changement continu dans la composition et donc dans la microstructure d'un matériau « FGM » est illustré dans (**La figure I.2**). Il en résulte un gradient qui déterminera les propriétés des « FGM ». Dans certains cas, on peut avoir un FGM constitué d'un même matériau mais de microstructure différente.

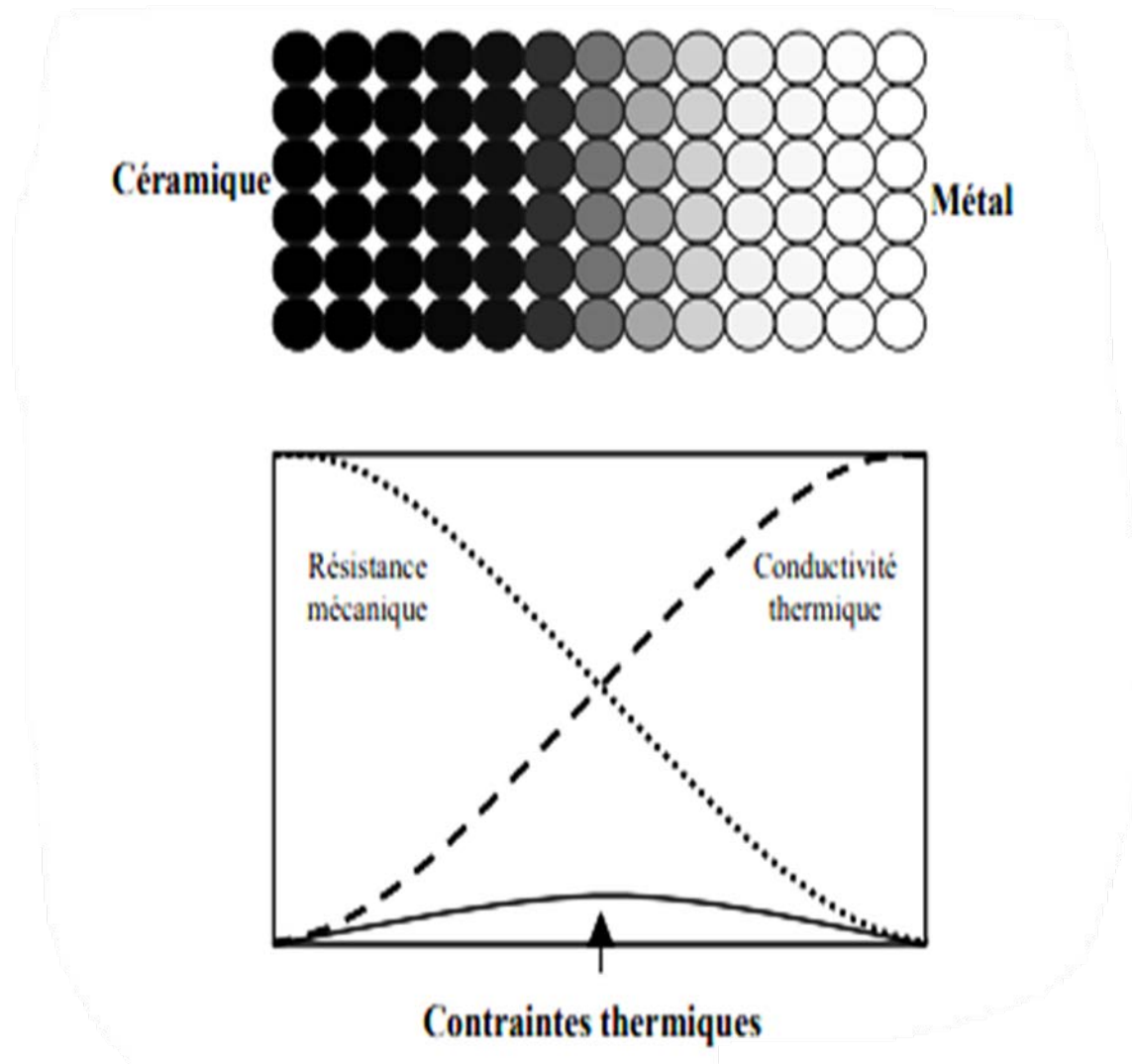


Figure I.2. Concept des matériaux à gradient de propriétés.

(**La figure I.3**) montre les concentrations de contraintes dans les panneaux de protection thermique conventionnels au niveau des interfaces (changement brutale de composition). Il Montre également comment un FGM peut alléger Ces concentrations de contraintes en changeant graduellement les propriétés matérielles et assure toujours la protection thermique trouvée dans les barrières thermiques conventionnelles.

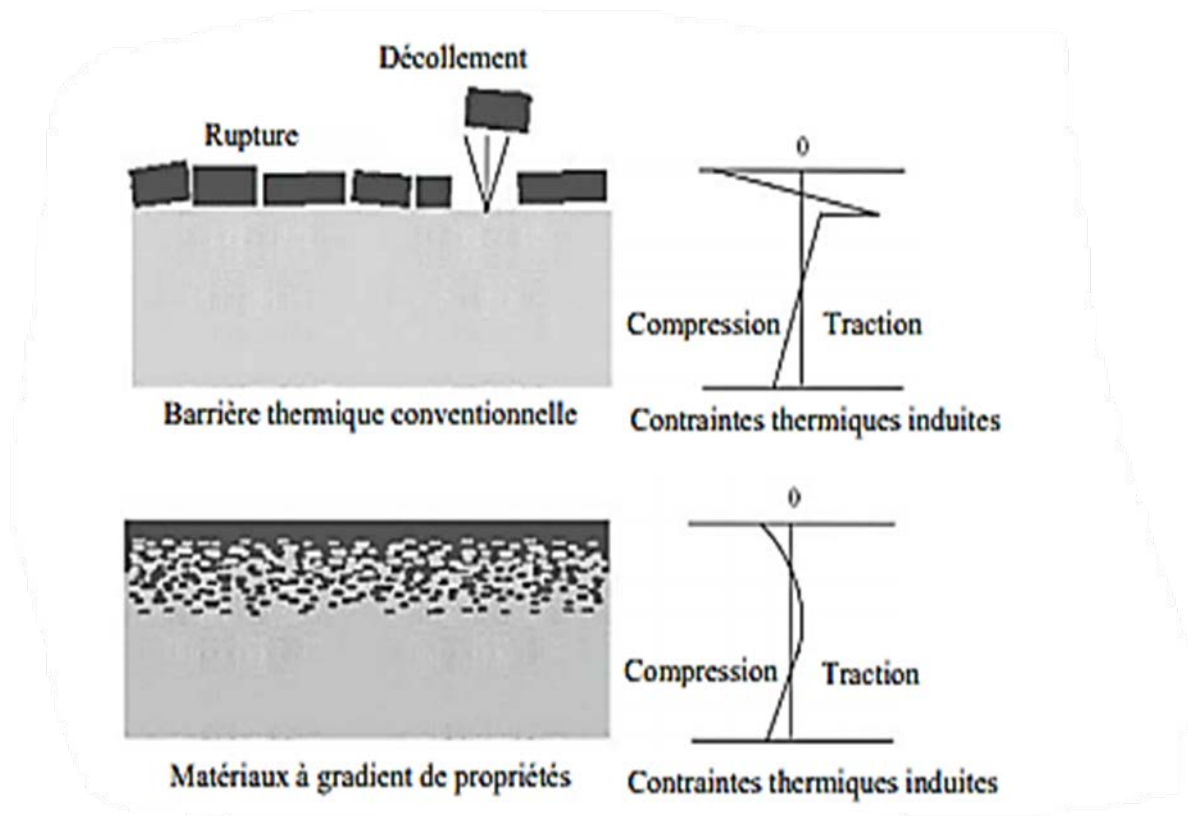


Figure I.3. Protection thermique (Aerospace Spécification Métal, 2003)

I.4. Matériaux composites intelligents (FGMs)

Les matériaux à gradient fonctionnel (Functionally Graded Materials) ou les matériaux fonctionnellement gradués sont une nouvelle classe de matériaux composites. Ils sont considérés comme des matériaux intelligents dont les fonctions désirées sont intégrées, dès la conception, au cœur même de la matière. A chaque interface, le matériau est choisi selon les applications spécifiques et les charges environnementales. Ces matériaux possèdent de multiples avantages qui peuvent les rendre attractifs du point de vue de leur potentiel d'application. Il peut s'agir de l'amélioration de la rigidité, de la tenue à la fatigue, de la résistance à la corrosion ou de la conductivité thermique en plus d'avoir une gradation des propriétés permettant ainsi d'augmenter ou de moduler des performances telles que la réduction des contraintes locales ou encore l'amélioration du transfert de chaleur.

I.5. Historique des matériaux type FGM

De nombreux milieux naturels présentent des variations unidirectionnelles et continues de leurs propriétés élastiques. Les tissus vivants, la croûte terrestre, les océans ou encore l'os cortical en font partie. Tirant leur inspiration de la Nature qui les entoure, les scientifiques (chercheurs et ingénieurs), se sont penchés sur les avantages que présentaient ce type de matériaux en terme de comportement mécanique et c'est ainsi que l'on vit apparaître, dans les années 1980, les matériaux à gradients de propriétés (Functionally Graded Materials « FGM »). Ils permettent par exemple de reproduire les propriétés structurales et matérielles des tissus biologiques tels que l'os à différentes étapes de son évolution (croissance, vieillissement ou pathologie).

Récemment, une nouvelle classe de matériaux composites connus sous le nom de matériaux à gradient de propriétés (functionally graded matériels : FGM) a attiré une grande attention. Un FGM typique, est un composite non homogène effectué à partir de différentes phases des constituants matériels (habituellement en céramique et métal). Un exemple d'un tel matériau est montré sur (**La figure I.4**) [Yin et al. 2004], où des particules sphériques ou presque sphériques sont incorporées dans une matrice isotrope. Dans un matériau de type FGM les différentes phases microstructurales ont différentes fonctions, en variant graduellement la fraction de volume des matériaux constitutifs avec un changement doux et continu d'une surface à l'autre, de ce fait éliminant des problèmes d'interface et diminuant des concentrations de contrainte thermique. C'est dû au fait que les constituants en céramique des FGM peuvent résister aux environnements à hautes températures en raison de leurs meilleures caractéristiques de résistance thermique, alors que les constituants en métal fournissent une performance mécanique plus forte et réduisent la possibilité de rupture catastrophique.

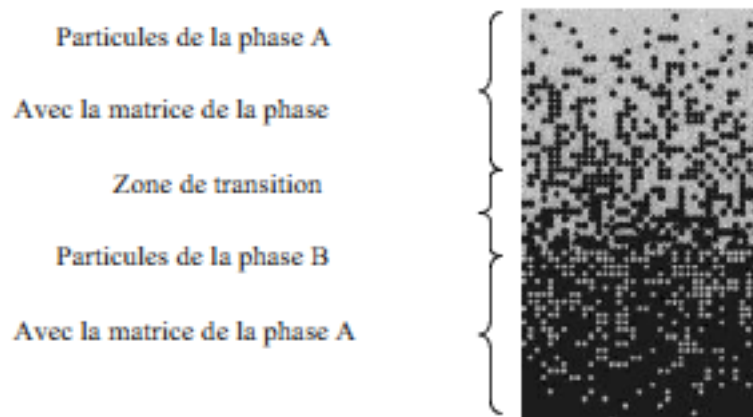


Figure I.4 : Un FGM avec les fractions de volume de phases constitutives graduées dans la direction verticale

Les problèmes de transitoire ou de fatigue thermique sont étudiés dans divers secteurs industriels autres que l'aéronautique, comme l'électronucléaire (circuits de refroidissement, combustible), l'électrotechnique (contacts électriques), l'automobile (culasses, collecteurs d'échappement, filtres à particules) ou la production de matériaux (verre, aluminium).

L'étude des conséquences de ces sollicitations d'origine thermique constitue l'un des axes majeurs de plusieurs chercheurs et s'appuie sur la méthodologie développée pour l'aéronautique et les superalliages. Des approches multi-échelles sont aussi utilisées pour la prévision de durée de vie des revêtements à haute température. L'objectif est d'augmenter la tenue aux hautes températures pour les turbines à gaz en appréhendant les mécanismes fondamentaux de la rupture des revêtements pour aubes de turbine.

Le terme FGM (functionally graded matériels) a été élaboré au milieu des années 80 par un groupe de scientifiques dans la région de Sendai au Japon, comme un moyen de préparer les matériaux de barrière thermique [Yamanoushi et al. 1990], [Koizumi 1993]. Des efforts énormes ont été fournis pour développer des matériaux à haute performance et à résistance élevée à la chaleur en utilisant la technologie de gradient à propriété qui a été poursuivie.

En 1985, un grand nombre de chercheurs des institutions publiques et de l'industrie ont uni leurs efforts pour créer ce nouveau type de matériau. Principalement pour être à même de construire l'enveloppe extérieure d'une navette intercontinentale commerciale. Le problème principal à résoudre était le flux de chaleur énorme frappant la majorité des surfaces qui sont exposées à la friction par l'air lors de la période de rentrée d'une navette spatiale dans l'atmosphère terrestre et, en même temps, protéger l'intérieur contre un sur échauffement. Il

s'est avéré impossible de dissiper cette chaleur par un refroidissement .en plus, il s'agissait d'un vaisseau commercial qui, après atterrissage, devait redémarrer à nouveau en quelques heures. une inspection majeure et une réparation soignée. Au retour de la navette spatiale dans l'atmosphère, la structure superficielle de l'appareil est soumise à des températures élevées. Les pièces les plus exposées sont le cône d'entrée, les bords d'attaque des ailes ainsi que la surface inférieure. Pour cette raison les matériaux de revêtement, soumis sur une face à environ 1800°C en atmosphère, doivent supporter dans leur épaisseur d'une dizaine de millimètres, un gradient thermique d'environ 1000°C. Il n'y a aucun matériaux monolithique capable de résister à une telle contrainte thermique (par exemple d'un carrelage céramique) serait normalement exclus. Certes, un revêtement céramique Al_2O_3 aurait pu protéger le fuselage (acier austénitique) contre les températures qui se développent à la surface , mais on a dû craindre l'action des très grandes contraintes thermo élastiques aux interfaces entre le fuselage métallique et sa protection céramique , se rendant compte des valeurs du coefficient de dilatation thermique , des modules de Young et de la conductivité thermique des deux matériaux .La solution envisagée est la mise en œuvre de matériaux composites et notamment l'utilisation de matériau à gradient de fonction (FGM) . On peut imaginer un matériau dont la face exposée à très haute température posséderait des propriétés de résistance aux fortes chaleurs et à l'oxydation, telle une céramique, et dont la face intérieure serait très bonne conductrice de la chaleur, comme le carbone.

Cependant, si l'on considère un simple assemblage de ces deux matériaux, ils présentent immédiatement une rupture due aux contraintes thermiques exercées à l'interface entre deux types de matériaux ayant des propriétés thermiques différentes. L'idéal serait de supprimer cette interface en créant une **transition continue** entre les deux faces.

C'est ainsi qu'est né le concept de matériau à gradient de fonction, à la fois dans les laboratoires de la NASA puis de manière plus formalisée au Japon après la mise en place d'un comité de réflexion en 1985 entre des chercheurs du NAL (National Aerospace Laboratory, STA), de l'université du Tohoku et du GIRI du Tohoku (Gouvernemental Industrial Research Institute, MITI). Le FGM consiste en l'association de deux matériaux aux propriétés structurales et fonctionnelles différentes avec une transition (douce), donc graduelle, idéalement continue de la composition, de la structure et de la distribution des propriétés entre ces matériaux.

La transition entre les deux matériaux peut généralement être approchée par le biais d'une série de puissance. L'industrie aéronautique et l'aérospatiale et l'industrie des circuits informatiques sont très intéressées par la possibilité de matériaux qui peuvent résister à de très forts gradients thermiques [Yamanoushi et al. 1990]. Ceci est normalement obtenu en utilisant une couche de céramique en rapport avec une couche métallique.

Pour illustrer l'idée de l'application des FGM à ce concept, prenons un exemple simple dans le domaine des matériaux métalliques. Il existe des matériaux dits qui lorsqu'ils sont soumis à un apport thermique produisent un courant électrique. Il existe, pour chacun de ces matériaux, une température particulière où la réponse est excellente, et si l'on s'éloigne de cette température, la réponse chute immédiatement. En considérant un matériau constitué dans le sens de l'épaisseur e couches successives sensibles à des températures décroissantes au fur et à mesure que l'on pénètre en profondeur, lorsque ce matériau est chauffé sur sa face externe, même si la température transmise baisse dans les couches internes, on obtient une réponse optimum à chaque niveau et en conséquence une conversion thermo électrique globale améliorée.

I.6. Avantages et inconvénient des FGMs

Les matériaux fonctionnellement gradués présentent des avantages et des inconvénients

I.6.1. Avantage des FGM

Outre l'accomplissement de son objectif principal, c'est à dire de fournir les différents requis des propriétés en divers points et des surfaces du futur produit qui, pourrait être réalisé par un simple revêtement ; [Narottam et al 2011]. et beaucoup d'autres soulignent divers avantages supplémentaires de la FGM. Ils énumèrent certains avantages qui en résultent principalement de la non-existence d'une interface forte FGM, tels que:

- Diminuer les contraintes thermiques causées par les différences de coefficients de dilatation thermique des matériaux utilisés.
- Absence d'une interface nette devrait conduire à un contrôle d'ensemble mieux des contraintes
- Meilleure cohésion entre différents matériaux, par exemple un métal et une céramique.
- Extension de la région fonctionnelle avant d'atteindre la valeur limite de la déformation plastique.
- Suppression de délaminage.
- Augmentation de la ténacité à la rupture.

- Elimination des singularités des contraintes à divers endroits, tels que les surfaces libres, des coins, des racines de fissure

I.6.2. Inconvénients des FGM

Le principal obstacle à une application plus large de la FGM est leur fabrication compliquée en raison de l'inadéquation des propriétés différentes, par exemple, la température de fusion, des affinités différentes pour divers autres éléments, la taille des particules, la morphologie, etc un exemple type est un mélange d'un métal avec la température de fusion (T_1) et une céramique avec une température de fusion (T_2). Dans la plupart des cas, un tel couple est habituellement ($T_1 \ll T_2$). Puis, si la température de fabrication est d'environ (T_1), la céramique est encore non fondue et la structure finale contient des particules de céramique non fondue dans une matrice métallique. Dans de nombreux cas, une telle structure présente une grande porosité et une petite adhérence entre les différents composants et son application générale est limitée. Cependant, pour des applications spéciales, la présence de particules très dures (carbures) dans une matrice solide peut être souhaitable.

D'autre part, travailler autour (T_2) va certainement entraîner une oxydation rapide et de l'évaporation de nombreux métaux. La formation de phases indésirables, etc. Les matériaux doivent être fabriqués dans une atmosphère protectrice ou à une basse pression et ces deux technologies sont très coûteuses [Narottam.P et al, 2011].

I.7. Applications des matériaux FGM dans l'industriel

La conception des MGF est récente, et leurs applications sont encore rares. Les MGF permettent par exemple d'associer dans une même structure des matériaux ayant des propriétés thermiques différentes sans provoquer de contraintes. Le japonais Sumitomo Electric a ainsi développé un matériau pour bouclier thermique dont l'une des faces est en composite carbone-carbone, résistant à très haute température, et l'autre en carbure de silicium, bon conducteur de la chaleur. Les MFG pourraient être utilisés également pour la génération thermoélectronique de l'électricité et dans les piles solaires.

Au début, les matériaux à gradient de fonction ont été élaborés autant que matériaux résistants à des contraintes thermiques abusives pour les structures aéronautiques et les réacteurs à fusion [Hirai 1999] et [Uemura 2003]. Maintenant Ils sont développés pour une multitude d'objectifs structurels dans les environnements sous conditions de haute température. Les applications des matériaux FGM sont diverses et nombreuses, ils offrent de grandes performances dans les applications où les conditions de fonctionnement sont sévères.

Souvent les couches en céramiques peuvent être utilisées comme barrières thermiques pour les moteurs, turbines à gaz, couches minces en optiques [Nguyen 2007], des sondes [Müller 2003], des déclencheurs [Qiu 2003], des armures metal/ceramic [Liu 2003], des détecteurs photoélectriques [Paszkiwicz 2008] et des implants dentaires (La figure I.5) [Watari 2004]. Un certain nombre de revues traitant de divers aspects de FGM ont été publiées dans les dernières décennies. Elles prouvent que la majeure partie de première recherche étudiée dans FGM s'était concentrée sur l'analyse du comportement mécanique et le traitement de la rupture sous l'effet des contraintes thermiques [Shen 2009]. Une étude complète de la flexion et l'analyse de vibration des plaques et des structures de coquille faites de FGM a été présentée par [Shen 2004]. Récemment, Birman et Byrd [Birman 2007] ont présentés un examen des principaux développements dans FGM qui inclut des problèmes de transfert de chaleur, contraintes, stabilité et analyses dynamiques.

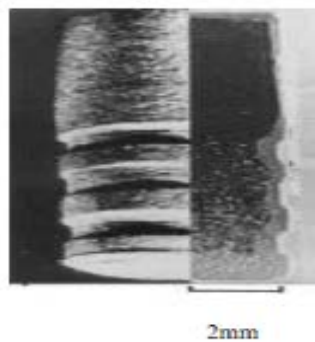


Figure I.5. Implant dentaire en FGM (Ti/20HAP). Aspect externe (gauche) et section transversale (droite).

I.8. Comparaison des matériaux types FGM et les matériaux composites traditionnels

Généralement, les F.G.M sont des matériaux constitués de plusieurs couches contenant des composants différents tels que les céramiques et les métaux. Ils sont donc des composites présentant des caractéristiques macroscopiquement inhomogènes. Le changement continu dans la composition et donc dans la microstructure du matériau distingue les F.G.M des matériaux composites conventionnels comme illustré sur la (La figure I.6) [Koizumi 1996]. Il en résulte un gradient qui déterminera les propriétés matérielles des FGM. Dans certains cas, on peut avoir un FGM constitué d'un même matériau mais de microstructure différente [Boch1986].

Le concept FGM peut être appliqué dans divers domaines pour des usages structuraux et fonctionnels. Au Japon, plusieurs programmes de cinq ans ont été conduits au cours des années 80 et 90 afin de développer l'architecture des FGM, et d'étudier également ces matériaux pour les applications de hautes températures (par exemple, éléments pour navettes spatial hypersonique) ainsi que pour des applications fonctionnelles (par exemple, convertisseurs thermoélectriques et thermo-ioniques). Ces programmes ont conduit au développement de la conception architecturale du FGM et de ces perspectives.

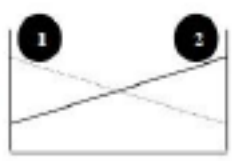
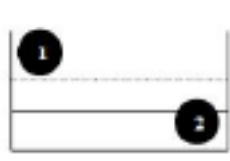
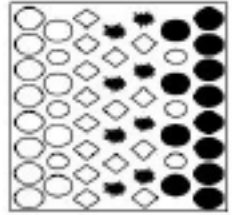
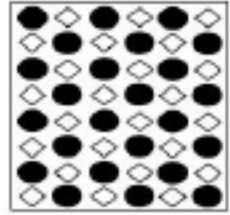
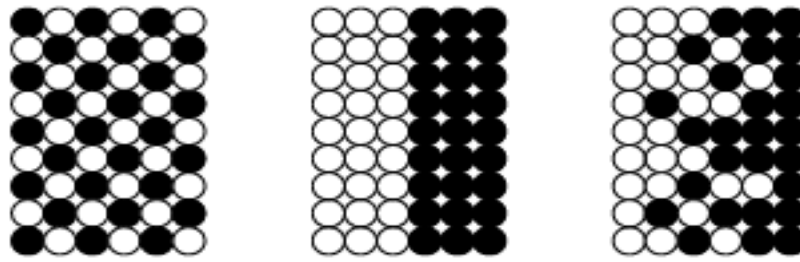
Propriétés	<p>1 Résistance mécanique</p> <p>2 Conductivité thermique</p>		
Structure	<p>Eléments constitutifs:</p> <p>céramique ○</p> <p>métal ●</p> <p>microporosité ◊</p> <p>fibre ✱</p>		
Matériaux	exemple	FGM	NON-FGM

Figure I.6. Caractéristiques des matériaux composites FGM en comparaison avec les matériaux composites conventionnels.

[Yoshihisa 2004] a établi un modèle simple illustrant les différences entre les matériaux à gradient de propriétés (FGM) et les matériaux plus conventionnels est montré sur la (La figure I.7) : (a) un matériau plans composé, (b) un matériau relié et (c) un matériau à gradient de propriété. Le matériau plan composé à une caractéristique plane, et le matériau relié à une frontière sur l'interface de deux matériaux. FGM ont de excellentes caractéristiques qui diffèrent de ceux des matériaux plans composés et reliés. Par conséquent, les FGM attirent l'attention en termes de leur application dans les domaines industriels. Puisque les FGM ont une double propriété des deux matières premières qui sont mélangées ensemble, et la distribution composante est graduée sans interruption. Par exemple, l'un des FGM qui se composent du métal et en céramique a la caractéristique de la conductivité thermique et de la force métallique dans le côté en métal et la résistivité aux hautes températures dans le côté en céramique.



Matériau plan composé (a), Matériau relié (b), Matériau à gradient de propriété (c)

Figure I.7. La distribution composante des matériaux.

I.9. Revue des méthodes d'élaboration des matériaux FGMs

L'utilité des composites à gradient de propriétés avec une structure à gradient a été identifiée dans les articles théoriques par, [Shen 2009] et [Kieback 2003]. Cependant, leurs travaux n'ont qu'un effet limité, probablement en raison d'un manque de méthodes de production appropriées pour FGMs à ce moment-là. Cela a pris 15 ans supplémentaires jusqu'à ce que la recherche systématique sur des processus de fabrication pour les matériaux à gradient de propriétés ait été effectuée dans le cadre d'un programme de recherche national sur FGMs au Japon. Depuis lors, une partie de la recherche sur les FGM a été consacrée au traitement de ces matériaux et une grande variété de méthodes de production a été développée [Mortensen 1995], [Hirai 1996].

Le processus de fabrication d'un FGM peut habituellement être divisé en établissant la structure dans l'espace non homogène « gradation » et la transformation de cette structure en matériau en bloc « consolidation ». Des processus constitutifs sont basés sur un habillage par étapes de la structure graduée à partir des matériaux de précurseur ou des poudres. Les principaux procédés disponibles de nos jours pour la production des matériaux FGM : coulage séquentiel en barbotine (Slip Casting), coulage en bande (Tape Casting), projection thermique (plasma), dépôt chimique et physique en phase vapeur (CVD et PVD) et le frittage laser différentiel sont les plus importants. IL ressort de notre étude bibliographique que de nombreuses méthodes d'élaboration sont employées pour la réalisation des matériaux FGMs. Ces techniques sont brièvement expliquées ci-après :

I.9.1 Coulage séquentiel en barbotine (Slip Casting)

Morinaga a également réussi à fabriquer un $\text{Al}_2\text{O}_3/\text{W}$ FGM en utilisant une méthode de coulée en barbotine. Il a obtenu un matériau de gradient avec une composition sans interruption changeante en contrôlant le taux d'arrangement de fines particules, qui dépend de la densité et de la taille du grain [Morinaga 1993], [Mel 2005]. Quand il utilise une densité mince en barbotine (5% ou 10%), la couche d' Al_2O_3 et la couche de W ont été séparées, confirmant des couches inclinées continues et claires. Dans le passé, le dépôt en phase vapeur, l'implantation ionique, et la diffusion ont été employées pour fabriquer des matériaux de gradient, mais cette technique a attiré l'attention et pourrait permettre pour fabriquer une série de FGM en utilisant des densités minces en barbotine et de fines particules comme matière première avec différentes densités spécifiques.

L'addition d'une pression pendant la coulée en barbotine augmente le taux de dépôt du matériau et à permet de fabriquer des pièces à plus grandes dimensions; ceci a été trouvé dans une étude réalisée par [Grazzini et al 1992]. Leur travail a couvert le traitement des composés monolithiques Al_2O_3 et $\text{Al}_2\text{O}_3\text{-Si}$ avec des formulations de coulée en barbotine basées sur les boues d'émouillage dispersées et coagulées qui ont été analysées, et d'excellents résultats ont été obtenus en utilisant les boues d'émouillage coagulées, sans présence de fissuration après séchage. L'effet de la pression s'est avéré pour augmenter la densité avec une augmentation conséquente de la densité de feu. En outre, des microstructures homogènes ont été réalisées dans le système composé, malgré la grande différence de tailles des particules utilisées.

I.9.2. Coulage en bande (Tape casting)

Le processus de coulage en bande connu sous la dénomination anglaise (Tape casting) a été employé pour préparer les diverses bandes de poudres fines en suspension non aqueuse, dont lequel les matériaux composites laminaires et les matériaux à gradient de propriétés (FGM $\text{Al}_2\text{O}_3\text{-TiC}$) ont été produits en coupant, en empilant, en stratifiant le matériau, ensuite enlevant la reliure, et ont pressant les produits obtenus à chaud, le coulage en bande est une méthode utile pour modifier les propriétés mécaniques des composés en céramique [ZENG 2000].

L'élaboration des barbotines utilisées pour le coulage en bandes comprend plusieurs étapes : tout d'abord, le solvant avec une viscosité faible, le dispersant et la poudre céramique

sont mélangés soit dans un broyeur planétaire dans des jarres en alumine pour SiC, soit dans un mélangeur à rouleaux avec des billes en SiC pour B₄C (problème d'usure) ; ensuite, un liant acrylique et un plastifiant sont ajoutés et mélangés durant une nuit ; puis un autre agent est ajouté (seulement pour les barbotines servant à obtenir des bandes poreuses) et mélangé pendant 4 heures environ pour obtenir une répartition uniforme ; enfin, la barbotine est désaérée pendant 24 heures à faible vitesse de rotation. Après vérification de la viscosité des barbotines, ces dernières sont coulées sur un film Myler siliconé afin de faciliter le décollement de la bande sur un banc de coulage à l'aide d'un sabot constitué d'un double couteau permettant d'obtenir des bandes d'épaisseur contrôlée (100-200 µm). Des disques (20mm de diamètre) et des carrés (50mm de côté) sont découpés.

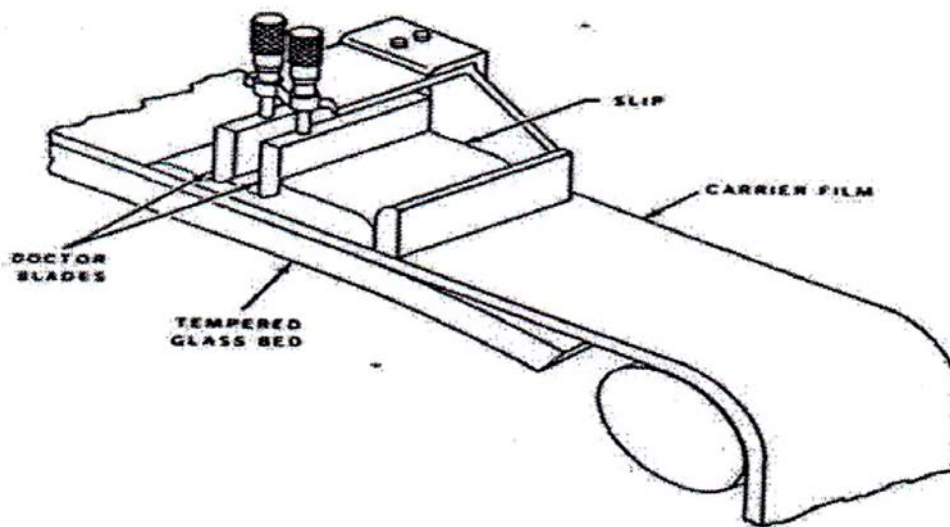


Figure I.8. Principe de la Méthode de Coulage en Bande.

I.9.3 Compactage des couches (poudre d'empilement)

Dans cette méthode simple et bien établie un gradient est constitué par le dépôt des couches de poudre avec les compositions changeantes dans la matrice de compactage [Atarashiya 1993], [Leushake 1999]. Les inconvénients de ce processus sont évidents : changements discrets, nombre limité des couches (jusqu'à 10 dans l'échelle de laboratoire, mais pas plus de deux ou de trois dans la fabrication potentielle), épaisseur limitée des différentes couches (normalement pas moins de 1mm), taille limitée de la pièce (<100 cm²) en raison des limites des forces de compaction, fabrication discontinue avec la productivité faible. Néanmoins cette méthode permet des études de laboratoire efficaces des systèmes à gradient de propriétés [Kieback 2003].

I.9.4 Coulée par centrifugation

Dans la coulée par centrifugation, des particules d'une phase réfractaire sont dispersées dans un métal fondu. Ces particules peuvent être formées in situ pendant le refroidissement du fondant [Zhang 1998] ou être dispersées dans une étape précédente. La différence de densité entre les particules et le métal fondu mène à la formation d'un gradient de concentration de particules si le fondant est moulé dans une centrifugeuse. Particules avec une plus faible densité (Mg_2Si , [Zhang 1998]) et une densité plus élevée (Al_3Ti , [Watanabe 1997]) que le fondant a été utilisé pour préparer les tubes en aluminium à gradient de propriétés qui sont sélectivement la particule renforcée sur la surface intérieure ou externe du tube.

I.9.5 Dépôt par électrophorèse

Un autre processus est ajouté aux différentes techniques de la fabrication des FGM, ce que n'appelle le dépôt par électrophorèse (EPD) est un processus assez rapide à faible coût, capable de produire les matériaux à gradient de propriétés changeant sans interruption avec la géométrie complexe. EPD se compose de deux processus, c'est-à-dire le mouvement des particules chargées en suspension dans un champ électrique entre deux électrodes (électrophorèse) et le dépôt de particules sur l'un des électrodes [Aldo 2002]. EPD permet la conception des matériaux à gradient de propriétés en forme de plaque binaire en déposant d'une suspension de poudre à laquelle une deuxième suspension est sans interruption ajoutée pendant le processus. Le dépôt est un contrat de poudre emballé étroit qui a besoin de l'agglomération pour réaliser les composants matériels entièrement denses.

Depuis lors, de nombreuses applications d'EPD ont été développées pour la fabrication de la céramique, y compris l'application des matériaux sans interruption à gradient de propriétés peut être obtenu tels que le céramique-céramique ZrO_2/Al_2O_3 , et le céramique- métal, WC/Co puisque la composition des couches déposantes est déterminée par la suite composition de la suspension au moment du dépôt. Une installation générale de ce principe est illustrée sur la **(La figure I.9)**

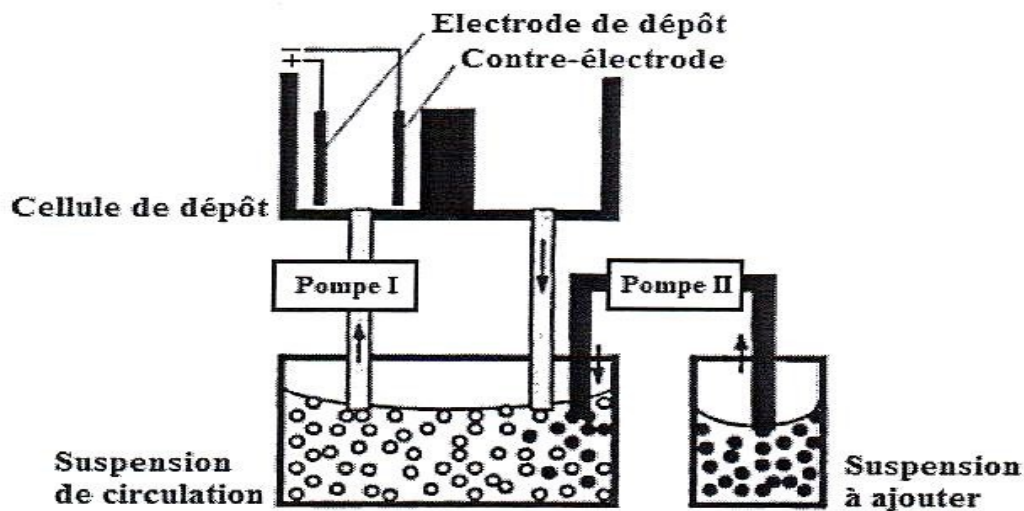


Figure I.9. Vue schématique de l'installation d'EPD pour la production des matériaux.

I.9.6. Projection plasma

La projection plasma consiste à introduire des particules solides (de taille inférieure à 100 μm , environ) dans un jet de gaz, dont la température atteint couramment 11000 °C et la vitesse 1000-1500 m/s. Le dépôt est ainsi formé par l'empilement des lamelles solidifiées obtenues par l'impact des particules sur le substrat préalablement préparé [Watremetz 2006].

Ce procédé est utilisé en particulier pour déposer des matériaux à haute température de fusion tels que des alliages réfractaires ou des céramiques. Les caractéristiques des dépôts réalisés par projection plasma sont la résistance à l'usure et à la corrosion et l'isolation thermique et électrique.

Une recherche détaillée a été effectuée sur la microstructure et le contrôle de propriété des fines particules pulvérisés par plasma. La projection par plasma est un processus rapide et fournit la formation de film sur une large zone, mais a habituellement un inconvénient avec sa microstructure approximative [Omori et al 1998]. Ichikawa [Ichikawa 2000] a employé les poudres mécaniquement alliées des matériaux thermoélectriques, et a réussi à bien contrôler la teneur en dépôt dans le SiC pour former un matériau thermoélectrique transporteur-concentration-gradué avec une microstructure homogène. Sa configuration de pulvérisation est schématiquement montrée sur la (La figure I.10).

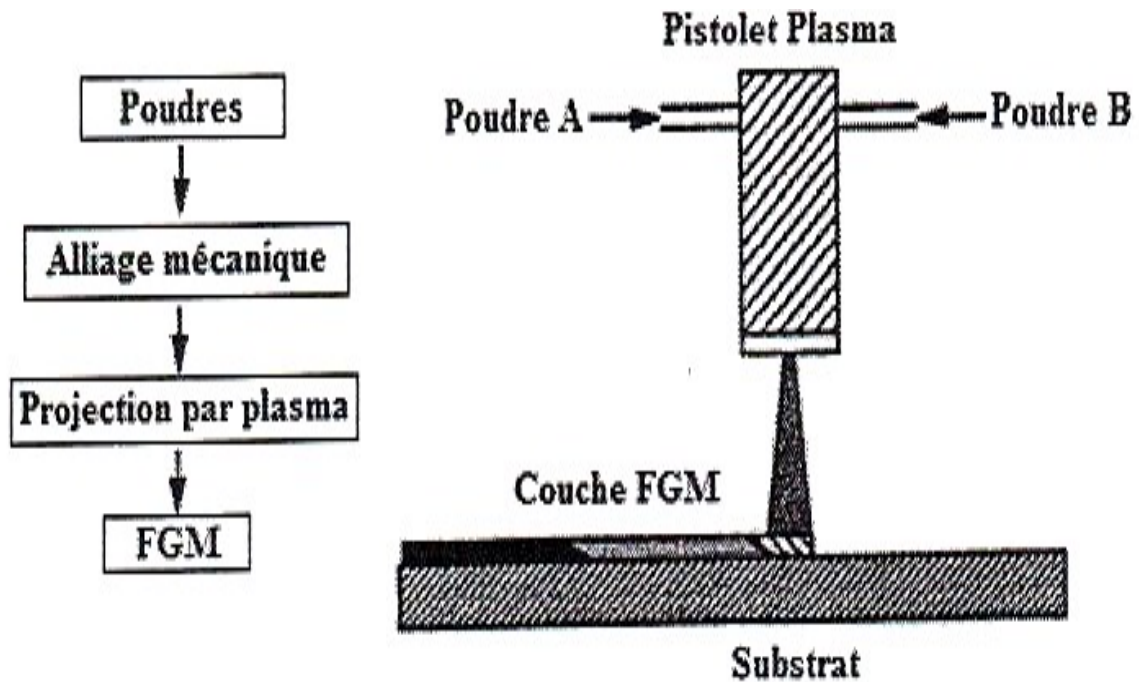


Figure I.10. Projection par plasma pour former un matériau thermoélectrique gradué. (La composition est graduée dans la direction plane)

I.9.7. Dépôt physique en phase vapeur (PVD)

La technique de dépôt physique en phase vapeur (Physical Vapor Deposition) est une technologie primordiale (prometteuse) pour la production de revêtements de barrière thermique. Parmi les caractéristiques avantageuses de PVD que les revêtements sont fabriqués ont des surfaces lisses, sans exigence, en fin il n'y a pas de fermeture de trous de refroidissement. Toutefois, le principal avantage est leur résistance exceptionnelle aux chocs thermiques, ainsi que la durée de vie est considérablement plus longue. L'équipement utilisé pour déposer les revêtements d'isolation thermiques par l'intermédiaire de PVD, se compose de plusieurs récipients pour le chargement, le préchauffage, et le dépôt plus un dispositif de rotation et la manipulation des échantillons ...etc. [Miyamoto 1999].

Une autre approche pour obtenir une structure à gradients est d'utiliser un mélange d'aluminium, l'alumine, et de zircone, chimiquement contrôlés peuvent être fabriqués facilement par vaporisation à partir de sources multiples en utilisant un ou plusieurs pistolets électroniques. En ajustant les paramètres de faisceau d'électrons, différents taux de dépôt peuvent être obtenus pour chaque source [Miyamoto 1999]. Si les taux d'évaporation de deux

composants, par exemple alumine et de zircone, sont changés sans interruption, un gradient défini de composition est obtenu, c'est le FGM.

Pour les systèmes de barrières thermiques plus sollicités à l'environnement oxydant, notamment les aubes mobiles de turbines aéronautiques ou terrestres ne sont, toutefois, pas systématiquement élaborés par projection thermique ; dans le cas de la zircone yttrée ZrO_2 , un autre procédé différent est également employé. En l'occurrence, il s'agit de la technique de l'évaporation sous faisceau d'électrons (EB-PVD) qui conduit à des microstructures et des propriétés thermomécaniques assez différentes de celles obtenues par la technique de la projection thermique [Mévrel 2009].

I.9.8. Dépôt chimique en phase vapeur (CVD)

Dans la technique de dépôt chimique en phase vapeur (Chemical Vapor Deposition), représenté schématiquement sur la (La figure I.11), un dépôt est formé sur un substrat en soumettant la source des gaz (par exemple, des hydrures, bromures ou chlorures) qui occupent la chambre de réaction, à différents types d'énergie comme la chaleur, la lumière et le plasma [Miyamoto 1999].

Les FGM peuvent être synthétisés à lent pour modérer des taux de dépôt en modifiant le rapport de mélange de la source des gaz, ou par le contrôle de la température de dépôt, la pression de gaz, ou le débit de gaz. En raison de son faible taux de dépôt, CVD est largement utilisé pour l'infiltration de piles ou pour la fabrication de couches minces.

Un exemple typique d'une application de FGM par CVD est la formation d'un revêtement gradué de carbure de silicium SiC sur le graphite dans lequel il ya une transition continue de SiC au C . des compositions contrôlés la source de mélanges des gaz ($CH_4-SiCl_4-H_2$) sont employés aux températures de dépôt entre $1400\text{ }^\circ C$ et $1500\text{ }^\circ C$ et aux pressions entre 1.3 et 6.5 KPa.

Par définition le frittage est un procédé de fabrication de pièces consistant à chauffer une poudre sans la mener jusqu'à la fusion. Sous l'effet de la chaleur, les grains se soudent entre eux, ce qui forme la cohésion de la pièce.

Cette technique est constituée de deux étapes et convient à la fabrication d'un composite à gradient de fonction composé de deux matériaux dont les températures de fusion sont très différentes. La première étape est de fabriquer une matrice frittée du matériau à haute température de fusion avec un gradient de porosité. La seconde est de remplir ces porosités avec le deuxième matériau fondu par infiltration. Le résultat est excellent pour la diminution

de la contrainte thermique [Takahashi 1990]. Ce procédé peut être généralement appliquée pour plusieurs combinaisons de matériaux qui sont chimiquement inertes et qui ont des points de fusion bien différents les uns par rapport aux autres

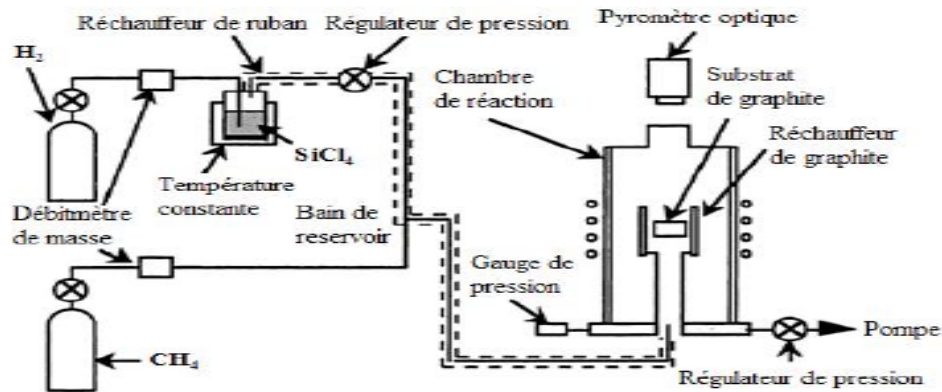


Figure I.11. Schéma de l'installation pour la préparation d'un SiC/C FGM par le dépôt chimique en phase vapeur (CVD)

I.9.9. Frittage et Infiltration

Cette technique est constituée de deux étapes et convient à la fabrication d'un composite à gradient de fonction composé de deux matériaux dont les températures de fusion sont très différentes. La première étape est de fabriquer une matrice frittée du matériau à haute température de fusion avec un gradient de porosité.

La seconde étape est de remplir ces porosités avec le deuxième matériau fondu par infiltration. Le résultat est excellent pour la diminution de la contrainte thermique. Cette technique peut être généralement appliquée pour plusieurs combinaisons de matériaux qui sont chimiquement inertes et qui ont des points de fusion bien différents les uns par rapport aux autres.

I.9.10. Frittage Laser Différentiel

Le rayonnement thermique du laser permet le contrôle de la température et la focalisation du point à chauffer. La différence de l'intensité de l'irradiation sur différents points du matériau, provoque un frittage différentiel le long de la pièce, ce qui résulte en de microstructures différentes, dépendant de la position du point irradié.

YUKI et al. [YUKI, 1991] ont utilisé cette technique pour élaborer un FGM de PSZ/Mo. La (La figure I.12) montre schématiquement la disposition du procédé utilisé par ces auteurs.

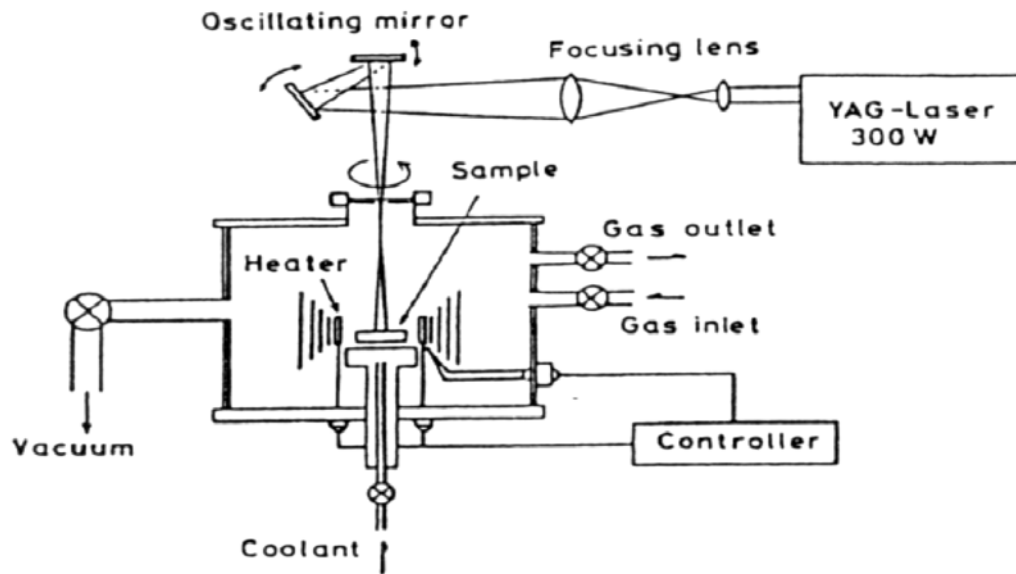


Figure. I.12. Disposition du procédé frittage laser différentiel.

I.9.11. Implantation Ionique (sputtering)

C'est une technique avancée pour la fabrication des F.G.M permettant de réaliser seulement des épaisseurs fines ($<1\mu\text{m}$) sur différents substrats (plastiques, céramiques, et métaux). Le traitement s'effectue par les faisceaux énergétiques d'ions ou via des gaz réactifs. Les couches fabriquées présenteront un gradient de composition qui peut être très finement contrôlé [Abdizadeh 1997].

I.9.12. Dépôt par centrifugation

La technique consiste à verser une suspension colloïdale relativement diluée dans des flacons cylindriques, le tout est soumis à une centrifugation. La sédimentation s'opère et le liquide surnageant est retiré. Ce procédé est répété pour obtenir des multicouches (La figure I.13) [Abdizadeh 1997].

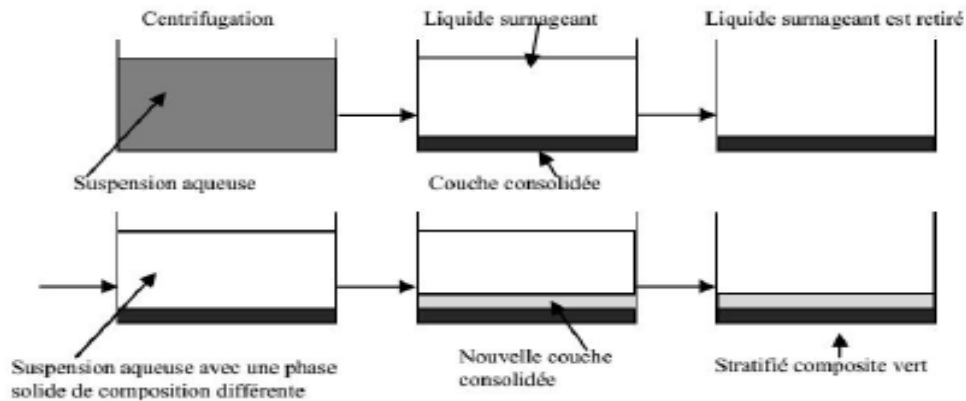


Figure. I.13. schéma du procédé dépôt par centrifugation.

I.10. Propriétés matérielles effectives d'un matériau FGM

Les matériaux à gradient de propriétés sont généralement fabriqués par deux phases matérielles avec des propriétés différentes. Une description détaillée des microstructures graduées réelles n'est pas disponible, excepté peut-être pour l'information sur la distribution de fraction volumique. Puisque la fraction de volume de chaque phase varie graduellement dans la direction de la graduation, les propriétés effectives des FGM changent le long de cette direction.

I.11. L'intérêt d'utilisation d'un FGM

Il y a beaucoup d'intérêt pour la mise sur pied des structures ainsi les conditions fonctionnelles peuvent varier avec l'endroit. Dans la plupart des cas, ceci impliquera de varier les matériaux qui sont employés aux endroits spécifiques dans la structure ayant pour résultat les interfaces discrètes dans tout. À nombre de proposer des techniques manufacturières pour le traitement de FGM.

I.12. Domain d'application des FGM

Récemment, les concepts de FGM sont devenus d'intérêts scientifiques pour améliorer l'exécution des systèmes géométriquement complexes des structures et larges intervalles de domaines tels que les matériaux de construction, Le concept des matériaux à gradient évalués FGM est applicable dans des nombreux matériaux de conversion d'énergie, aéronautique, aérospatiale, nucléaire et semi-conducteurs. Ainsi, ces matériaux ont deux propriétés contradictoires : la conductivité thermique et l'isolation thermique.

Actuellement, ils permettent la production des matériaux légers, résistants et durables. Les principaux domaines d'application des FGM sont :

- Génie civil : ponts à poutre en caisson, les cheminées, les fondations élastiques (ces structures de plaques peuvent être trouvées dans différents types d'applications industrielles telles que radiers), réservoirs de stockage, les piscines.
- Aéronautique : composants de moteur-fusée, corps des avions spatiaux.
- Chimique : l'échangeur de chaleur, tube de chaleur, récipient de réaction.
- Ingénierie : outils de coupe, éléments de moteur.
- L'énergie nucléaire : composante des réacteurs nucléaires, pastilles de combustible.
- Électronique : semi-conducteur à bande graduée, capteurs.
- Optique : fibres optiques, lentilles.
- Conversion d'énergie : générateur thermoélectrique, convertisseur thermoïonique, pile à combustible.
- Matières biologiques : implants, peau artificielle,
- Produits en générale : matériaux de constructions, corps de voiture, verres de fenêtre.

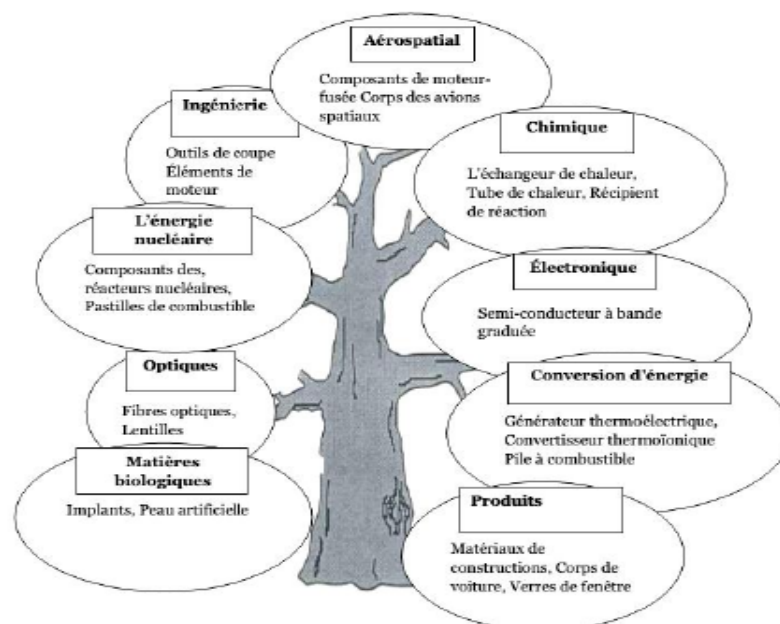


Figure I.14. les principaux domaines d'application des FGM.

Le concept des matériaux à gradient de propriétés est applicable dans des nombreux domaines, comme il est illustré dans (**La figure I.15**) Il a été initialement conçu pour l'industrie de l'aéronautique, où les FGM ont fournis deux propriétés contradictoires telles que la conductivité thermique et d'isolation thermique dans un matériau. Actuellement, elles permettent la production des matériaux légers, forts et durables, et elles sont applicables dans un large intervalle des domaines tels que les matériaux de construction, matériaux de conversion d'énergie, nucléaire et semi-conducteurs

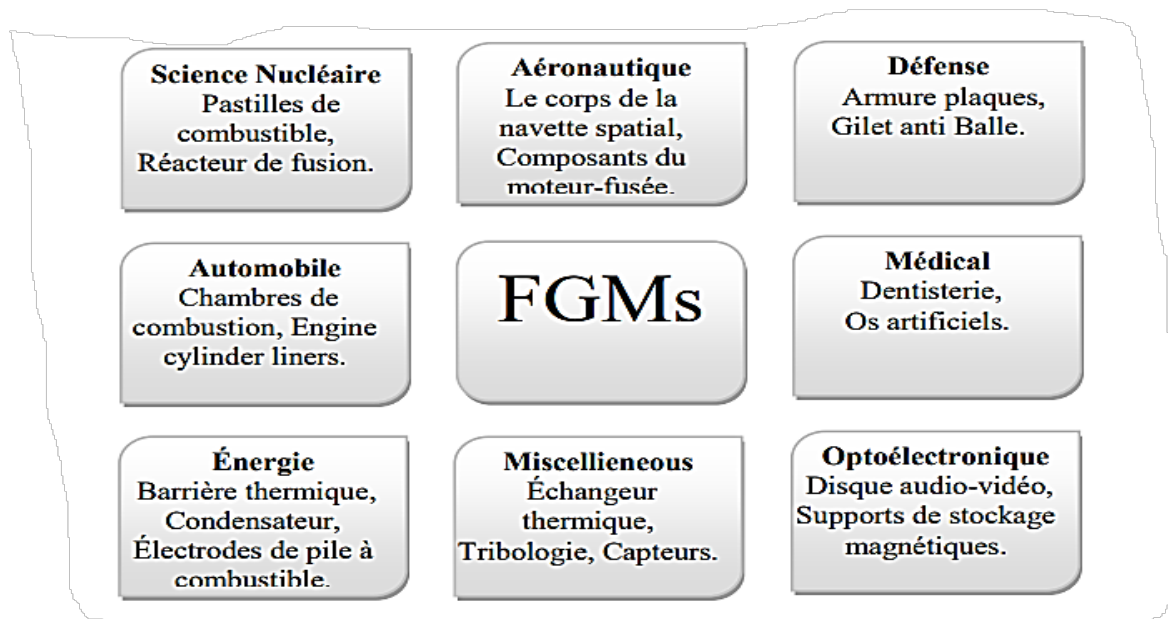


Figure I.15. Applications des FGM dans divers domaines

Certaines des applications de matériaux à gradient fonctionnel sont mises en évidence ci-dessous:

I.12.1.L'aérospatiale

Les Matériaux fonctionnellement gradués peuvent résister à de très hauts gradients thermiques, qui sont plus approprié pour la structure des avions, composante de moteur de fusée etc. [L. Marin 2003]. Si la technique de traitement est améliorée, les FGM sont prometteurs et peut être utilisé dans des domaines plus larges de l'aérospatiale.

I.12.2.Industrie navale, aéronautique (Prévention contre les attaques terroristes)

Les explosions provenant par les attaques terroristes se produisent beaucoup plus fréquemment dans le monde dans lequel nous vivons aujourd'hui, comme l'attaque du navire

« USS Cole » [Perl R., O'Rourke R. 2001] (structure navale), attaque sur l'ambassade américaine au Kenya [Perl R. 1998] (structure civile) et les bombardements en bordure de route IED sur Humvees (structures militaires). Ces attaques ont conduit à un besoin important de remplacer les matériaux de construction traditionnels avec plus des matériaux résistants aux charges explosives. Avec les préoccupations croissantes concernant la sécurité envers les vies humaines et les patrimoines, l'importance d'une telle recherche ne peut pas être négligée.

Les structures sandwich ont des applications très importantes dans l'industrie navale et aéronautique. En raison de leur constitution, elles présentent de nombreux avantages en termes de résistance, rigidité et possèdent des capacités d'absorption d'énergie élevées. Les structures sandwich sont constituées de deux couches superficielles minces et rigides, généralement ont la même épaisseur, séparées par un noyau léger plus épais. Les couches superficielles portent presque toute la flexion et les charges dans ses plans, tandis que le noyau contribue à stabiliser les couches superficielles et définit la rigidité en flexion et résiste aux efforts de compression et du cisaillement hors plan. Lorsque les structures sandwich sont soumises à des charges impulsives à haute intensité, les matériaux constituant le noyau jouent un rôle crucial dans le comportement dynamique et la réponse structurelle globale. Leurs propriétés aident à disperser l'impulsion mécanique transmis dans la structure, et donc protéger quoi que ce soit situé derrière elle [Xue Z., Hutchinson JW. 2003; Fleck NA., Deshpande VS. 2004 ; Dharmasena KP et al. 2008].

I.12.3.Medicine

Les Tissus vivants tels que les os et les dents sont caractérisées en tant que matériau à gradient de propriétés naturel [W. Pompea et al., 2003], pour remplacer ces tissus, un matériau compatible est nécessaire qui serviront aux fins de la bio-tissu original. Le FGM set la substance idéale pour cette application. Le matériau FGM a trouvé une large gamme d'applications en chirurgie dentaire [S. Matsuo et al., 2001] et des applications orthopédiques pour les dents et le remplacement osseux [F.Watari et al.,2004].

I.12.4.Défense

L'une des caractéristiques les plus importantes du matériau à gradient de propriété est la capacité à inhiber la propagation de fissure. Cette propriété rend utile dans le secteur de la défense, comme des matériaux résistants aux pénétrations utilisés pour plaques de blindage et des gilets pare-balles [L.Lu et al.2011].

I.12.5.Énergie

FGM sont utilisés dans des dispositifs de conversion d'énergie. Ils fournissent également une barrière thermique et sont utilisés comme revêtement protecteur sur des aubes de turbine dans le moteur de turbine à gaz [E. Müller et al., 2003 ; M. Niino et al., 2005].

I.12.6.domaine appliqué en GC

I.12.6.1. Les joints dans la charpente métallique

Lors de l'assemblage des éléments en charpente métallique, on est obligé de réaliser des soudures entre deux éléments de nature/nuance différente l'un lourd et l'autre souple (acier/aluminium). Dans ce cas on utilise des joints ordinaires en acier. L'inconvénient de ce type de joint est la rupture et la durabilité. L'utilisation des joints FGM est optimale.

I.12.6.2. Les grands vitrages dans les zones chaudes

L'utilisation des vitres en FGM a pour but de contrôler la température dans les zones chaudes, éviter les vitrages multiples et réduire le cout et le poids des structures.

I.12.6.3. Les chaussées rigides (Functionally Graded Concrete Materials for Rigid Pavements)

Les FGMs peuvent être utilisés dans les chaussées rigides en béton avec une gradation obtenue par la variation de la fraction volumique de fibres, cette technique est visée d'être utilisée dans les autoroutes et les routes à très fort trafic, les pistes des aéroports, car elles offrent une résistance et une durabilité élevées, le but est d'optimiser l'épaisseur de la chaussée afin d'avoir un matériau rigide sur la surface de roulement et un matériau moins rigide sur la couche de fondation [Jeffery R et al.2007].

I.12.6.4. Les chaussées souples (Functionally Graded Concrete Materials for Flexible Pavements)

Les FGM peuvent être utilisé dans les chaussées souples pour supprimer les couches d'accrochage entre la couche de Grave Bitume et la couche de roulement en Béton Bitumineux pour éviter le glissement entre les deux couches et économiser les épaisseurs tout en obtenant un comportement optimisé, augmentant la capacité portante de la chaussée et par la suite sa durabilité [Ernie P, Wael A, and Ewan C, August2007].

I.12.6.5. Les tunnels (functionally graded concrete segment in tunnel)

Les parois intérieures des tunnels doivent être réalisées en matériau réfractaire et rigide dans la surface exposée et d'un matériau imperméable dans la surface en contact avec le sol et les roches [Baoguo MA et al.2009].

I.13. Conclusion

Après avoir défini les matériaux FGM comme étant des matériaux composites innovants dans lesquels la composition et la structure se modifient graduellement en fonction du volume, nous avons évoqué les différentes lois régissant la variation des propriétés matérielles de ces derniers. Nous avons aussi cité quelques procédés de leur fabrication ainsi que les domaines de leur application. La variation spatiale et progressive des propriétés de ces matériaux permet de créer des structures innovantes qui peuvent être exploitées dans de nombreux domaines d'application dans les structures spéciales en génie civil.

CHAPITRE II :
Les Différentes Théories Des
poutres

II.1. Introduction

Ce chapitre présente une revue de quelques travaux scientifiques portant sur les matériaux à gradient de propriétés « FGM » en mettant l'accent sur les travaux publiés récemment. Divers espaces pour les différents aspects des FGM sont reflétés dans ce chapitre. La revue est consacrée à des modèles théoriques qui ont été développés pour prédire les réponses globales des poutres à gradient fonctionnel sous chargement mécanique et thermique. Cette revue se concentre principalement sur les théories de la couche unique équivalente (ESL), y compris la théorie classique de la poutre (CPT), la théorie de la déformation de cisaillement de premier ordre (FSDT), les théories d'ordre élevé de la déformation de cisaillement (HSDTs), des théories simplifiées et théories mixtes puisqu'elles ont été largement utilisées dans la modélisation des plaques et coques à gradient fonctionnel. En outre, un examen approfondi de la littérature liée au développement des solutions d'élasticité en trois dimensions (3D) et une formulation unifiée est également présentée.

II.2. Définition d'une poutre

Le terme « poutre » désigne un élément porteur horizontal et linéaire faisant partie de l'ossature d'un plancher de bâtiment ou d'un tablier de pont. Une poutre reçoit des actions mécaniques, et les transmet sur des appuis. Plus généralement, au sens de la résistance des matériaux, une poutre est un élément de forme élancée, de section constante.

La poutre est un élément de structure utilisé pour la construction, et dans la fabrication de machines. Cependant, le modèle des poutres peut être utilisé pour des pièces très diverses à condition qu'elles respectent certaines conditions.

II.3. Les différents types de poutres

La poutre est l'élément structural le plus répandu, puisqu'elle fait partie intégrante de la plupart des ouvrages de construction ou des pièces machines. En réaction aux charges appliquées, des forces et des moments internes se développent dans la poutre pour maintenir l'équilibre.

II.3.1. Poutre simple

C'est une poutre reposant sur deux supports ; l'appui double et l'appui simple. Les points d'appui sont articulés de façon à ce que les extrémités puissent se mouvoir librement pendant la flexion.

II.3.2. Poutre console

C'est une poutre encastrée dans un mur à une extrémité. L'extrémité encastrée ne bouge pas pendant la flexion, tandis que l'autre extrémité est entièrement libre. On appelle aussi cette poutre, poutre en porte-à-faux ou poutre encastrée à une extrémité.

II.3.3. Poutre avec porte-à-faux

C'est une poutre sur deux appuis (un simple et l'autre double), elle a une ou deux extrémités qui dépassent de façon appréciable les appuis (porte-à-faux). Les poutres sont classées suivant leurs appuis. Ces trois précédents types des poutres entrent dans la catégorie des poutres statiquement déterminées (poutre isostatique), parce qu'elles possèdent trois inconnues reliées aux trois degrés de liberté et par le fait même des équations d'équilibre.

II.3.4. Poutre continue

C'est une poutre supportée par l'un des deux supports, c'est donc une poutre en équilibre hyperstatique.

II.3.5. Poutre à double encastrement

C'est une poutre supportée par deux encastresments, elle est donc une poutre en équilibre hyperstatique.

II.3.6. Poutre supportée à double encastrement

C'est une poutre supportée par deux encastresments ayant un ou plusieurs supports. C'est donc une poutre en équilibre hyperstatique. Elle a plus de fixation ou support que nécessaire. Cependant, ces supports augmentent la capacité portante de la poutre mais les équations de la statique ne suffisent pas à analyser ces poutres. On aura donc recours à différentes méthodes.

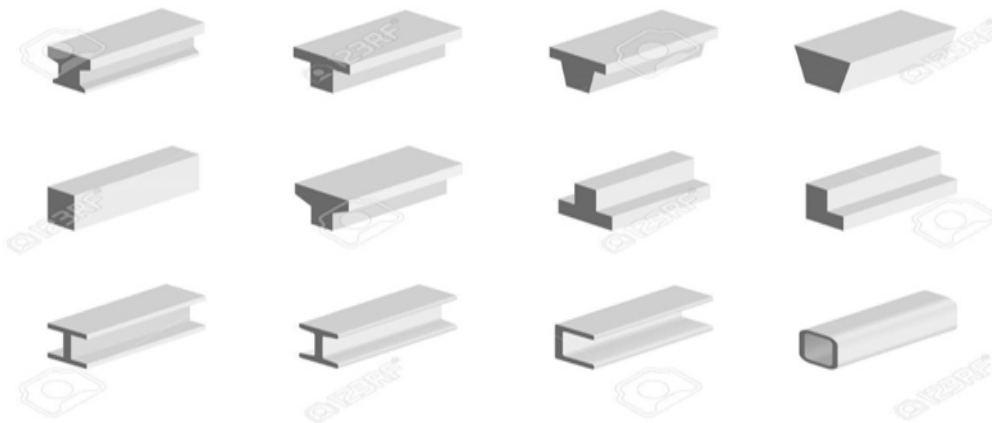


Figure II.1. Types de poutre.

II.4. Historique des théories des poutres

Le terme de < poutre > désigne un objet dont la longueur est grande par rapport aux dimensions transverses. La théorie des poutres est un modèle utilisé dans le domaine de la résistance des matériaux. La paternité de la théorie des poutres est attribuée à « Galilée », mais des études récentes indiquent que « Léonard de Vinci » l'aurait précédé. « De Vinci » avait supposé que la déformation variât de manière linéaire en s'éloignant de la surface neutre, mais il ne put pas finaliser ses calculs car il ne connaissait pas la loi de « Hooke ». De son côté, « Galilée » était parti sur une hypothèse incorrecte (il supposait que la contrainte était répartie uniformément en flexion), et c'est « Antoine Parent » qui obtint la distribution correcte. Ce sont « Leonhard Euler » et « Jacques Bernoulli » qui émirent la première théorie utile vers 1750, alors que « Daniel Bernoulli », le neveu du précédent, écrivit l'équation différentielle pour l'analyse vibratoire. À cette époque, le génie mécanique n'était pas reconnu comme une science, et on ne considérait pas que les travaux d'une académie des mathématiques pussent avoir des applications pratiques, et on continua à bâtir les ponts et les bâtiments de manière empirique. Ce n'est qu'au XIXe siècle, avec la Tour Eiffel et les grandes roues, qu'on démontra la validité de la théorie à grande échelle [Jean-Louis Fanchon, 2001].

II.5. Comportement des poutres FGM

Plusieurs travaux sur le comportement des poutres non-homogènes de type FGM ont été effectués, nous citons :

Sankar (2001) a développé une solution d'élasticité pour la flexion des poutres FGM soumises à des charges transversales, en se basant sur la théorie des poutres d'Euler-Bernoulli. Le module de Young de la poutre a été supposé varier à travers l'épaisseur selon la loi de distribution exponentielle tandis que le coefficient de Poisson a été supposé constant. Une simple théorie des poutres de type Euler-Bernoulli a aussi été développée sur la base de la supposition que les sections planes restent planes et normales à l'axe de la poutre. Les contraintes et les déplacements ont été trouvés dépendants d'un paramètre sans dimensions pour une variation du module de Young selon la direction fonctionnellement graduée. Les résultats ont montré que la théorie des poutres est valide pour les poutres longues et minces avec des chargements transverses à variation lente. Les concentrations des contraintes prennent place dans les poutres courtes ou épaisses. Les concentrations de contraintes sont moins que celles dans les poutres homogènes lorsque le côté doux des poutres

fonctionnellement graduées est soumis à une charge. Le contraire est vrai lorsque le côté plus rigide est soumis à une charge.

Zhong & Yu (2006) ont étudié le problème d'une poutre fonctionnellement graduée cantilever soumise à des charges différentes (Une force normale concentrée et une force concentrée à l'extrémité libre, une force concentrée de cisaillement à l'extrémité libre, une pression uniforme à la face supérieure). Les auteurs ont présenté une solution bidimensionnelle générale pour une poutre cantilever fonctionnellement graduée, en supposant que le module d'élasticité du matériel a les mêmes variations le long de la direction d'épaisseur de la poutre.

Aydogdu et Taskin (2007) ont effectué une analyse des vibrations libres des poutres fonctionnellement graduées simplement appuyées. Le module de Young de la poutre FGM varie dans le sens de l'épaisseur selon la loi de puissance et la loi exponentielle. Les équations régissant ont été trouvées en appliquant le principe de Hamilton, tandis que les fréquences ont été obtenus en utilisant la méthode de solution de type Navier. Les auteurs ont utilisé dans l'analyse, différentes théories de la déformation de cisaillement d'ordre élevé et des théories classiques des poutres.

Merajah et al. (2010) ont présenté une méthode pour la détermination des contraintes normales et de cisaillement dans un joint adhésif entre une plaque de renfort et une poutre fonctionnellement graduée (FGM) soumise à un chargement mécanique. La poutre FGM était supposée être isotrope avec un coefficient de Poisson constant et un module d'élasticité à variation exponentielle à travers l'épaisseur de la poutre. Les distributions des contraintes ont été calculées selon une inhomogénéité constante. Les résultats ont montré que les inhomogénéités jouent un rôle important dans la distribution et la diminution des contraintes inter faciales (**La figure II.2.**).

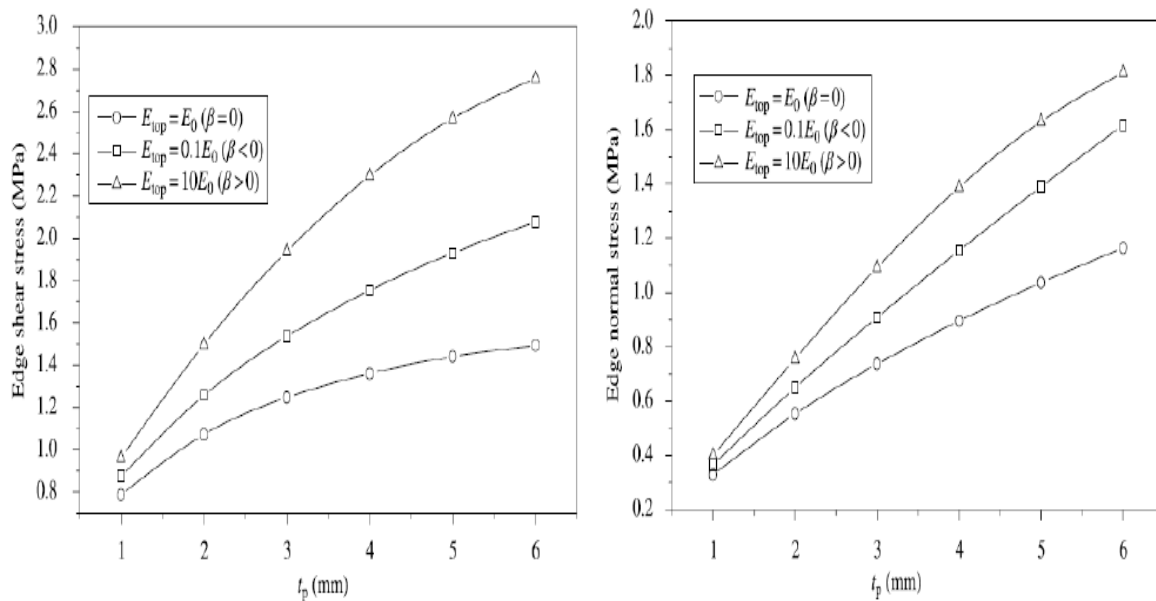


Figure II.2. Effet de l'épaisseur de la plaque sur les contraintes inters faciales avec différentes valeurs de l'index β : Poutres FGM

II.6. Les différentes théories des poutres

Résoudre un problème d'élasticité revient à trouver une fonction qui satisfait aux différentes équations de mécanique et d'équilibre. Les théories de poutres impliquent essentiellement la réduction d'un problème en trois dimensions de la théorie de l'élasticité à un problème unidimensionnel. Là où la détermination de la solution exacte pour les champs de contrainte et de déformation n'est pas possible, elle permet d'obtenir une solution approchée, qui donne une bonne idée sur les efforts et les déplacements [Sallai, 2011]. L'obtention d'une théorie de poutre nécessite l'introduction de certaines hypothèses, qui représentent des simplifications acceptables de la réalité. Plusieurs théories jouent sur la prise en compte ou non de l'effet du cisaillement. Dans ce qui suit, on abordera les différents modèles les plus célèbres dans la littérature.

II.6.1. Le modèle classique de la poutre d'Euler-Bernoulli (CBT)

Ce modèle basé sur la théorie classique de poutre (CBT) satisfait l'hypothèse d'Euler Bernoulli avec une distribution linéaire des déplacements dans l'épaisseur. La droite perpendiculaire à l'axe moyen avant déformation, reste droite après déformation. L'hypothèse d'Euler-Bernoulli néglige l'effet de cisaillement transversal et la déformation est entièrement due à la déformation de flexion. Une description détaillée des modèles de poutres, y compris

le modèle actuel peut être trouvée dans [Timoshenko et Woinowsky-Kreiger 2009 ; Reddy.J 1997 et 1999].

Sur la base des hypothèses ci-dessus, le champ de déplacement de ce modèle de poutre (CBT) développée est donné par l'équation suivante

$$\begin{aligned} u(x, z) &= u_0(x) - z \frac{dw_0(x)}{dx} \\ w(x, z) &= w_0(x) \end{aligned} \quad (\text{II.1})$$

Où (u_0, w_0) sont deux fonctions de déplacement inconnues de l'axe médian de la poutre ($z = 0$), (La Figure II.3).

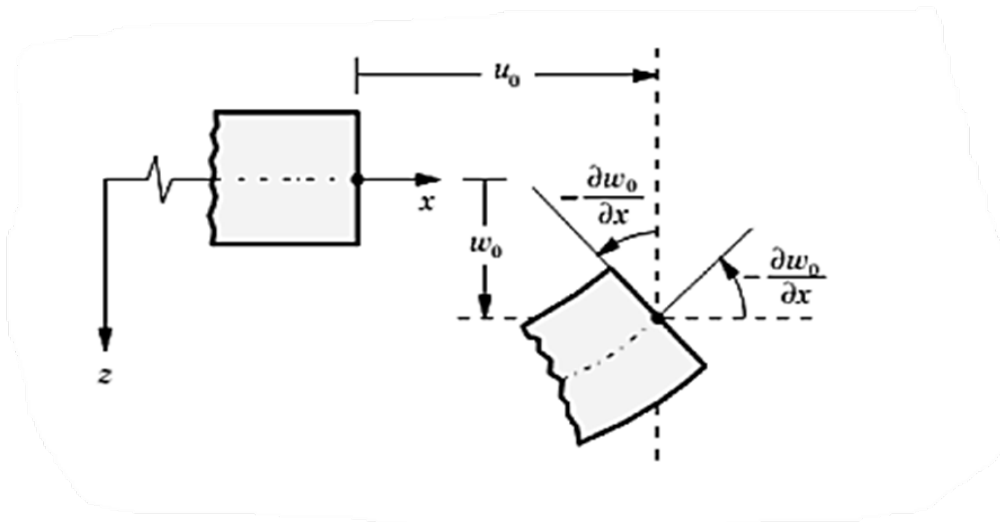


Figure II.3. Illustration du modèle de la poutre d'Euler-Bernoulli (CBT).

Puisque ce modèle ne prend pas l'énergie de cisaillement en compte, il donne des résultats inexacts pour les poutres épaisses. Cependant, en raison de sa simplicité avec seulement trois degrés de liberté de déplacement, ce modèle classique reste une bonne approche en premier. Les analyses du comportement des poutres fonctionnellement graduées (FGBs) à l'aide du modèle de poutre classique d'Euler-Bernoulli (CBT) ont été étudiées par [He et al.2001].

II.6.2. Le modèle de poutre basé sur la théorie du premier ordre de la déformation de cisaillement (FSDT)

Contrairement au modèle classique, ce modèle prend en compte les déformations de cisaillement transversales, qui sont assumées constantes dans l'épaisseur de la poutre. Le

modèle nécessite donc un facteur de correction pour calculer l'effort de cisaillement transverse. Les premières études sur la théorie de premier ordre de la déformation de cisaillement de la poutre (FSDT) peuvent être trouvées dans [Reissner, E Mindlin 1945 et 1975]. Les études sur ce modèle peuvent être trouvées dans [Timoshenko et WoinowskyKreiger, (2009), Reddy.J (1997), Miara et Podio-Guidugli (2006)]. La théorie du premier ordre est basé sur le champ de déplacement selon les mêmes hypothèses et restrictions que la théorie classique, mais la poutre est à l'état de normalité détendue,

$$\begin{aligned} u(x, z) &= u_0(x) + z\phi(x) \\ w(x, z) &= w_0(x) \end{aligned} \quad (\text{II.2})$$

Où (u_0, w_0) et $(\phi(x))$ sont les déplacements dans la surface moyenne et la rotation autour de l'axe y , respectivement, (**La Figure II.4**) Le champ de déplacement défini dans l'expression ci-dessus permet de reprendre la théorie des poutres classique décrite dans la section précédente en remplaçant $\phi(x) = -\frac{\partial w_0}{\partial x}$

La FSDT est donc une extension de la cinématique de la CBT par une déformation de cisaillement transversale de la poutre dans leur hypothèse cinématique.

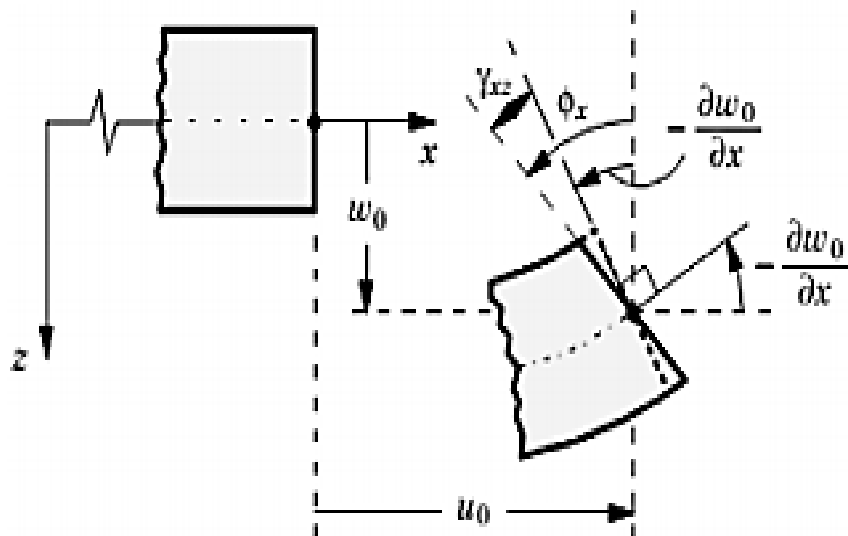


Figure II.4. Illustration du modèle de la poutre de Timoshenko (TBT).

Le modèle FSDT a été largement utilisé pour l'analyse des matériaux à gradient de propriété en raison de sa simplicité de l'analyse et la programmation [Praveen, G.N., Reddy, J.1998] et [Zenkour, A. M., 2003]. Cependant, le fait que la déformation de cisaillement transversale est constante dans l'épaisseur, il nécessite donc une correction quand on calcule les contraintes transversales de cisaillement et les efforts. Pratiquement, une correction de cisaillement transverse du modèle de la plaque homogène a été prise. En outre, afin d'éviter les difficultés de la correction de cisaillement, les théories de la déformation de cisaillement d'ordre supérieur des poutres ont été développées. Plusieurs auteurs ont appliqué la théorie de poutre à ordre élevé pour les matériaux à gradient de propriétés (FGMs). Dans la section suivante, nous allons rappeler deux modèles de poutres basés sur des théories de la déformation de cisaillement à ordre élevé utilisés pour l'analyse des matériaux à gradient de propriétés (FGMs) : un modèle de poutre basé sur la théorie de la déformation de cisaillement à ordre élevé (TSDT) proposé par [Reddy.J 1997 et 1999]. Et un modèle de la poutre basé sur la théorie de la déformation de cisaillement sinusoïdale (SSDT) étudié par [Zenkour, A. M., (2003 ; 2004a et 2004b)].

Avec cette théorie, les contraintes tangentielles de cisaillement sont constantes et uniformes sur toute l'épaisseur de la poutre ; cela veut dire qu'elles existent même sur les bords supérieurs et inférieurs de la poutre et pourtant il n'y a aucun chargement qui induit le cisaillement.

Cette contradiction mène à introduire des coefficients pour corriger et maintenir les contraintes et les déformations du cisaillement transversales constantes à travers l'épaisseur de la poutre. Ce facteur a été calculé pour la variété de sections de poutres par [Mind lin et Deresiewicz]. Cowper et Murtyont donné de nouvelles expressions de ce coefficient pour différentes sections de la poutre. La théorie de Timoshenko est plus riche et plus générale que la théorie élémentaire des poutres au prix d'une fonction supplémentaire. Cette solution permet d'affiner les solutions analytiques.

Bien qu'issues de la théorie classique, ces solutions sont toutefois entachées d'erreurs au voisinage des appuis et de la zone indentation où nous pouvons avoir des concentrations de contrainte et des champs de déplacement non homogènes.

II.6.3. Le modèle de poutre basé sur la théorie du troisième ordre de la déformation de cisaillement (TSDT)

Les théories de la déformation de cisaillement des poutres à ordre élevé ont été développées ces dernières années, d'abord pour l'analyse de plusieurs problèmes isothermes et ensuite déployées pour comprendre les phénomènes physiques induits dans la poutre. Contrairement à la CBT et TBT avec les hypothèses de répartition linéaire de déplacement à travers l'épaisseur, la théorie de la déformation de cisaillement des poutres à ordre élevé est basée sur une distribution non-linéaire des champs dans la section. Par conséquent, l'effet de la déformation de cisaillement transversal est pris en compte. Ces modèles ne nécessitent pas de facteurs de correction. Les références sur ces modèles peuvent être trouvées dans [Hildebrand, F.B et al.1949](#), [Naghdi, P. M., 1957](#), [Liberscu, L, 1967](#), [Nelson, R., et al.1974](#), [Lo, K. H., et al.1977a ; 1977b](#), [Kant, T., Swaminathan, 2002](#)].

Nous présentons ici deux modèles de poutres utilisés pour l'analyse du comportement des matériaux à gradient de propriété (FGMs).

Le champ de déplacement est généralement écrit comme suit :

$$u(x, z) = u_0(x) - \frac{\partial w_0(x)}{\partial x} + \Psi(z)\varphi_x(x) \quad (\text{II.3})$$

$$w(x, z) = w_0(x)$$

Avec : (u_0, w_0) et (φ_x) sont les déplacements axiaux et la rotation autour de l'axe y

$$\varphi_x = \frac{\partial w_0(x)}{\partial x} + \Phi_x$$

$\Psi(z)$: est une fonction de cisaillement transverse caractérisant les théories correspondantes. En effet, les déplacements de la théorie classique de poutre (CBT) est obtenue en prenant $\Psi(z)$, alors que la théorie de premier ordre de Timoshenko (TBT) peut être obtenue en écrivant

$$\Psi(z) = z$$

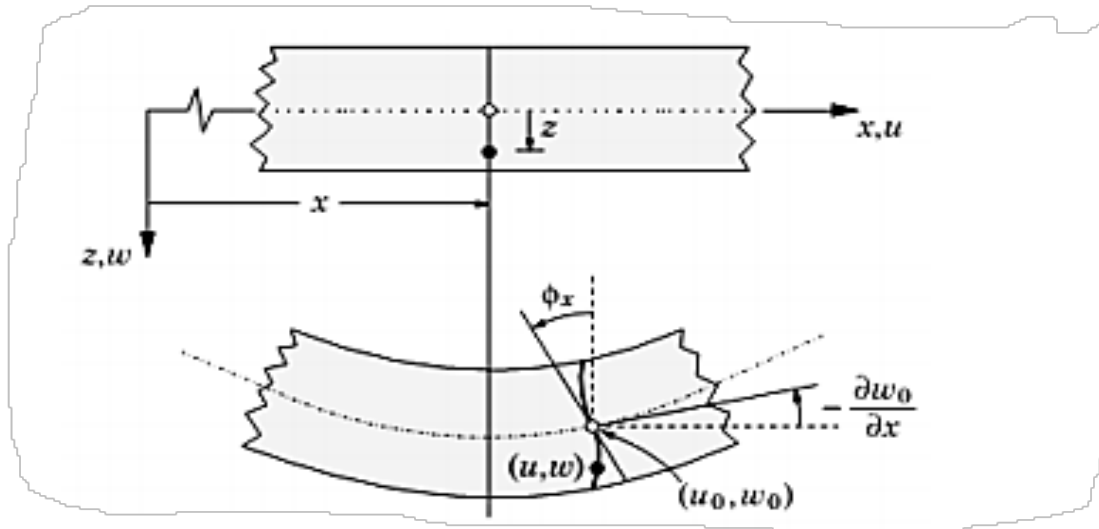


Figure II.5. Illustration d'une poutre d'ordre élevé.

Les déplacements de la théorie des déformations de cisaillement à ordre élevé de Reddy (TSDT) [Reddy.J 1997 et 1999] sont obtenus par :

$$\Psi(z) = z \left(1 - \frac{4}{3h^2} z^2 \right) \quad (\text{II.4})$$

La théorie du troisième ordre de cisaillement (TSDT), qui suppose que la contrainte de cisaillement transversal est approchée par une forme quadratique dans l'épaisseur de la poutre, a été proposée par [Reddy.J 1997 et 1999]. Elle ne nécessite pas de facteurs de correction de cisaillement.

La théorie du troisième ordre a été largement utilisée pour analyser les comportements des plaques FGMs [(Reddy, 2000 ; Cheng, Z., et al.2000b et Ferreira, A., et al.2004)]. La théorie de cisaillement sinusoïdale (SSDT) de Zenkour [Zenkour, A. M., 2003 ; 2004a et 2004b]. Est obtenu par l'hypothèse :

$$\Psi(z) = \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \quad (\text{II.5})$$

Où le champ de déplacement qui en résulte est basé sur celui de la théorie classique en ajoutant le terme $\left[\frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \varphi_\alpha\right]$ à la composante de déplacement dans le plan u_α .

Ce modèle a été également utilisé pour étudier le comportement des structures FGMs par Zenkour [Zenkour, A. M., 2005a ; 2005b et 2006]. Comme pour la TSDT, pas de facteurs de correction de cisaillement transversal utilisés dans cette théorie. La version exponentielle de la

théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé (ESDPT) développée par Karama et al.2003 est obtenue en prenant :

$$\Psi(z) = ze^{-2\left(\frac{z}{h}\right)^2} \text{ Et } \varphi_{z=0} \quad (\text{II.6})$$

La version hyperbolique de la théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé (HSDPT) développée par Ait Atmane et al.2010 est obtenue en prenant :

$$\Psi(z) = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)-1\right]} z - \frac{\left(\frac{h}{\pi}\right) \sinh\left(\frac{\pi z}{h}\right)}{\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)-1\right]} \text{ et } \varphi_{z=0} \quad (\text{II.7})$$

II.7. Méthodes de résolution

II.7.1. Procédure de Navier

Nous choisissons ici de nous référer à cette méthode par le terme générique de procédure de Navier. Cette méthode est adaptée à des cas de chargement particuliers : c'est à dire que chaque variable est projetée sur une fonction d'une base trigonométrique adaptée. Dans sa version la plus classique, cette méthode est utilisée pour simuler une poutre ou plaque rectangulaire simplement appuyée chargée avec une pression de forme sinusoïdale ou uniforme ; la déflexion associée est alors supposée sinusoïdale. Les autres degrés de liberté sont exprimés sur une base trigonométrique correspondante.

II.7.2. Méthode de RAYLEIGH-Ritz

La méthode de Rayleigh-Ritz permet, en projetant les déplacements sur une base donnée, d'implémenter un modèle pour la simulation de poutres ou plaques rectangulaires soumises à des conditions aux limites et des chargements variés. Le principal avantage de cette méthode réside dans le fait que, avec un choix de base de projection adapté, les dérivées – successives – des fonctions de la base sont simples à obtenir, et par conséquent, cette méthode est tout à fait adaptée aux modèles nécessitant le calcul des dérivées multiples de la base. La qualité des résultats obtenus est souvent relative au choix de la base.

II.7.3. Méthode des éléments finis

La méthode des éléments finis a progressivement fait son apparition depuis les années 1950. C'est une méthode qui permet la résolution numérique des équations aux dérivées partielles. Elle est couramment utilisée comme méthode de discrétisation afin de simuler le

comportement de structures complexes proches de cas pratiques. Les principes généraux de la méthode ainsi qu'un certain nombre de raffinements sont regroupés dans le livre de Zienkiewicz.

II.8. Conclusion

Dans ce chapitre, nous sommes attachés à présenter l'historique des théories des poutres. Dans un premier temps, nous avons présenté le comportement des poutres composites qui est plus complexe que celui d'une poutre en matériaux traditionnels, métalliques par exemple, et nous l'avons terminé par une démonstration des différentes théories des poutres telles que la théorie classique (CBT), la théorie de cisaillement de premier ordre (FSDBT) et les théories d'ordre élevé HSDBT (PSDBT, SSDBT, ESDBT).

CHAPITRE III :
Modèle Mathématique Et
Développement.

III.1. Introduction

Dans la présente étude, une nouvelle fonction de déformation en cisaillement est présentée pour l'analyse de stabilité des poutres rectangulaires épaisses et très épaisses fait de matériaux fonctionnellement classés. Prendre le changement d'épaisseur en fonction de la dimension x , nous transformons le problème en un problème d'élasticité d'ordre supérieur. Les propriétés du matériau sont considérées comme inchangées selon l'axe des épaisseurs. Dans la parfaite forme de matériaux fonctionnellement gradués, les propriétés du matériau changer continuellement et progressivement selon les différents modèles comme l'exponentielle, la puissance et la loi sigmoïde [Arefi M, Pourjamshidian M, Ghorbanpour Arani A, Rabczuk T, 2019]

Dans cet article, nous tenter d'apporter la forme parfaite de matériaux fonctionnellement classés dans quelques imperfections dans la composition des matériaux. En effet, il est peu probable qu'un matériau calibré pour respecter exactement la loi de modèle.

Depuis il peut y a voir des erreurs potentielles dans le processus de mélange, donc dans cette étude nous avons considéré deux cas fonctionnels de calage imparfait sur la base de la loi de puissance afin de découvrir quelle est la différence de leurs résultats seront s'ils ne se conforment pas exactement à la puissance droite. De plus, en raison de l'importance du coefficient de Poisson des matériaux calibrés, sa valeur le long de l'épaisseur de l'élément est considérée comme une fonction des deux matériaux. Dans un premier temps, afin d'étudier le comportement de stabilité de l'élément, l'équation déterminante pour le flambement de la poutre rectangulaire est obtenue en utilisant une combinaison des principes de l'énergie potentielle minimale et de l'élasticité d'ordre supérieur la théorie.

En conséquence, la forme approximative de la déformation de la poutre est obtenue comme une équation différentielle ordinaire et en imposant les conditions de bord de la poutre, et en utilisant le solveur de valeurs propres méthode, les charges critiques de flambement sont atteintes. A la validation, les résultats numériques de l'analyse de stabilité sont comparés à de prestigieuse références et logiciel de solution par éléments finis (EF).

Un aperçu est effectuées sur les fonctions de déformation de cisaillement les plus connues fournies jusqu'à présent par d'autres chercheurs. Les résultats numériques sont présentés pour les éléments constitués de matériaux fonctionnellement gradués et les

influences la section transversale, de la loi de puissance du matériau et du type de support de bord sur la charge critique de flambement sont étudiées pièce par pièce.

La nouveauté du travail actuel peut être écrite comme :

- Une nouvelle fonction de forme basée sur les termes hyperboliques-polynomiaux est supposé présenter une nouvelle analyse d'élasticité d'ordre supérieur.
- Une imperfection dans la composition du matériau est ici considérée sur la base de deux modèles.
- Quatre conditions aux limites disparates sont étudiées par une méthode de solution analytique, présentant et développant une nouvelle fonction pour les bords libres.

Finalement, cette étude peut constituer un pont pour que les chercheurs commencent à considérer d'autres formes de défauts dans la composition des matériaux MGF.

III.2. Modèle mathématique

Une poutre FGM rectangulaire comprimée axialement est prise en considération avec une longueur L , une épaisseur h et une largeur t dans un système de coordonnées rectangulaires (La Figure III.1.).

Dans la mesure où chaque fonction mathématique a son propre comportement spécifique, en notre travail, le but est de trouver une nouvelle fonction mathématique pour la déformation par cisaillement à travers l'épaisseur de la poutre FGM épaisse. La combinaison d'une fonction hyperbolique avec une fonction polynomiale a été dérivée comme une nouvelle cadre dans l'analyse des poutres/plaques épaisses.

Ici, la transversale le déplacement contient trois parties, à savoir flexion (w_b), cisaillement (w_s) et un supplémentaire ($g(z)w_z(x)$) d'étirement dans l'épaisseur est évalué en fonction de la partie supplémentaire qui est elle-même fonction de x et z - axes . Ainsi, la théorie actuelle de l'élasticité d'ordre supérieur est ici adoptée comme

$$u(x, z, t) = u(x, t) - z \frac{\partial w_b}{\partial x} - f(z) \frac{\partial w_s}{\partial x} \quad (\text{III.1})$$

$$w(x, z, t) = w_b(x, t) + w_s(x, t)$$

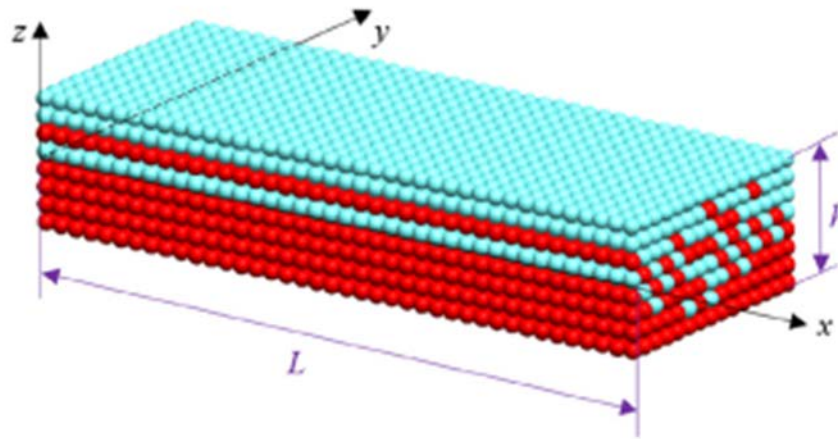


Figure III.1. Une poutre FGM illustré schématiquement.

Dans lequel

$$f(z) = \tanh\left(\frac{z}{h} - \left(\frac{z}{h}\right)^3 - r \left(\frac{z}{h}\right)^5\right) \quad (r = 0.8) \quad (\text{III.2.a})$$

$$g(z) = (1 - f(z)) \quad (\text{III.2.b})$$

où la fonction de forme suit une virgule qui signifie différenciation de la variable. Pour introduire l'imparfait pris, premièrement, la loi de puissance la gradation des matériaux peut être présentée comme ci-dessous [Malikan M, Tornabene F, Dimitri R. 2018] [Zharfi H.2019]

$$E(z) = E_2 + (E_1 - E_2) \left(\frac{1}{2} - \frac{z}{h}\right)^k \quad (\text{III.3.a})$$

$$v(z) = v_2 + (v_1 - v_2) \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h}\right)^k \quad (\text{III.3.b})$$

La distribution du module d'élasticité respectant l'équation (III.3.a) serait donner (La **Figure III.2**) dans une structure parfaite de FGMs.

L'imperfection dans la composition matérielle des MGF peut cependant être observée dans des cas dissemblables, cette recherche s'intéresse à les cas dessinés par (Les **Figures III.3.a et b**). Conformément à ces chiffres, nous peut révéler (le **tableau III.1**) dans lequel deux cas sont totalement représentés.

En premier cas, nous supposons que la section de céramique pure est constituée d'une partie de l'épaisseur et après la gamme, la composition de la gent commencera. En effet, dans

les cas imparfaits, on a une couche de céramique pure ou métal et ensuite la composition de la loi de puissance apparaîtra.

Cette page prise ici est affichée pour le premier cas par **a** et le dernier cas par **b** pour lequel nous supposons qu'une section d'épaisseur notable est graduée avec Un métal Pur uniquement. Ce sont juste la Couche la plus haute et la plus basse dans un FGM parfait pour Les zones en céramique pure et en métal.

Comme nous étudions un problème de stabilité linéaire, on peut obtenir le résultat linéaire Souche lagrangienne comme

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (\text{III.4})$$

Imposer l'équation (III.4) sur l'équation (III.1) on peut obtenir la déformation-déplacement relations comme

$$\varepsilon_{xx} = \frac{du}{dx} - z \frac{d^2 w_b}{dx^2} - f(z) \frac{d^2 w_s}{dx^2} \quad (\text{III.5.a})$$

$$\varepsilon_{xz} = g(z) \left(\frac{dw_s}{dx} + \frac{dw_z}{dx} \right) \quad (\text{III.5.b})$$

$$\varepsilon_{zz} = g'(z) w_z \quad (\text{III.5.c})$$

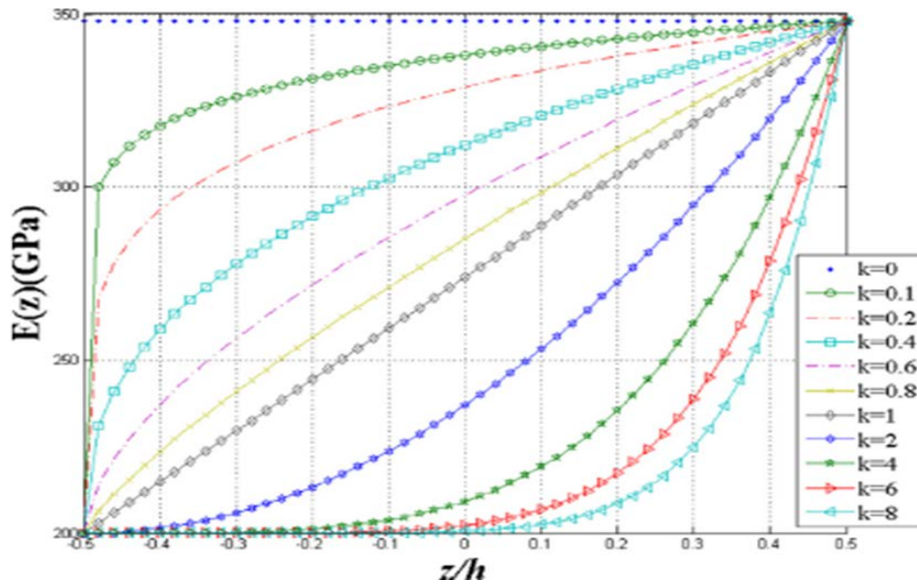


Figure III.2. Variation du module de Young selon la loi de puissance pour un parfait poutre FGM-I.

Si nous supposons le lagrangien dans un état varié, donc

$$\delta(\Pi_b + \Pi_w) = 0 \tag{III.6}$$

L'énergie de déformation peut être démontrée comme

$$\Pi_b = \int (\sigma_{xx} \varepsilon_{xx} + \tau_{xz} \gamma_{xz} + \sigma_{zz} \varepsilon_{zz}) dV \tag{III.7}$$

Dans lequel

$$\begin{matrix} \sigma_{xx} & C_{11} & C_{12} & 0 & \varepsilon_{xx} \\ \sigma_{zz} & C_{12} & C_{22} & 0 & \varepsilon_{zz} \\ \tau_{xz} & 0 & 0 & C_{33} & \gamma_{xz} \end{matrix} \tag{III.8}$$

Où la matrice élasticité-rigidité peut être définie comme

$$C_{11} = C_{22} = \frac{(1-\nu(z))E(z)}{(1-2\nu(z))(1+\nu(z))}$$

$$C_{12} = \frac{\nu(z)E(z)}{(1-2\nu(z))(1+\nu(z))}$$

$$C_{33} = G(z) = \frac{E(z)}{2(1+\nu(z))}$$

L'équation (III.7) basé sur l'équation (III.8) peut être étendue comme

$$\delta \Pi_b = \int_0^L \left[N_{xx} \frac{d\delta u}{dx} - M_{xx} \frac{d^2 \delta w_b}{dx^2} - R_{xx} \frac{d^2 \delta w_s}{dx^2} + Q_{xz} \left(\frac{d\delta w_s}{dx} + \frac{d\delta w_z}{dx} \right) + R_{zz} \delta w_z \right] dx \quad \text{(III.9)}$$

Dans lequel

$$N_{xx}, M_{xx}, R_{xx} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{xx} (1, z, f(z)) dz \quad (9a - c) \quad \text{(III.10.a)}$$

$$Q_{xz} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{xz} g(z) dz \quad \text{(III.10.b)}$$

$$R_{zz} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{zz} g'(z) dz \quad \text{(III.10.c)}$$

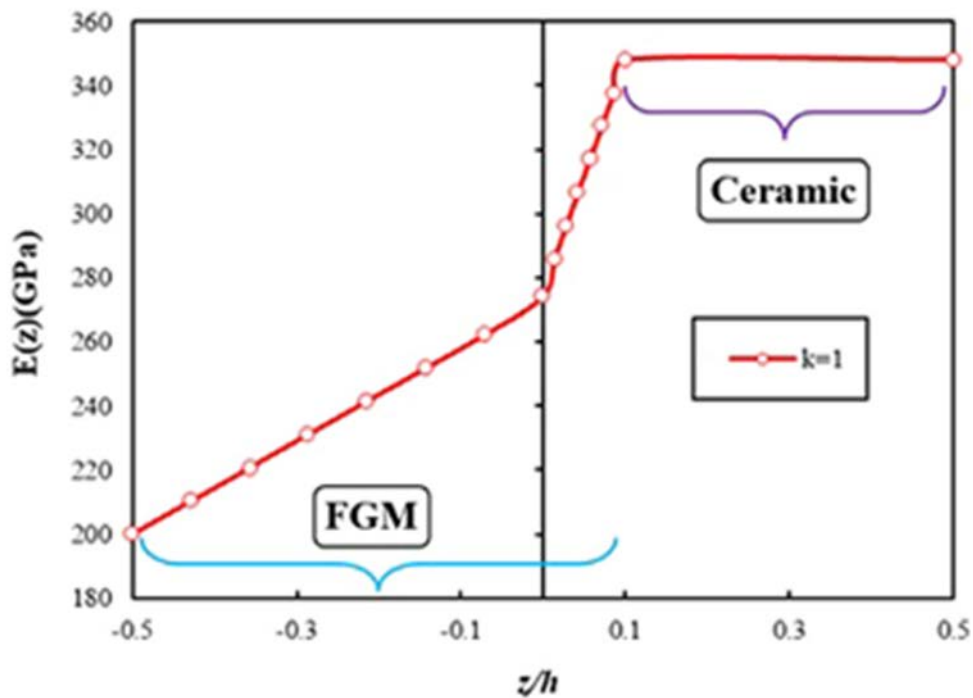


Figure III.3. Variation du module d'Young pour une poutre-I FGM imparfaite (Cas I, un ¼ 0:1h).

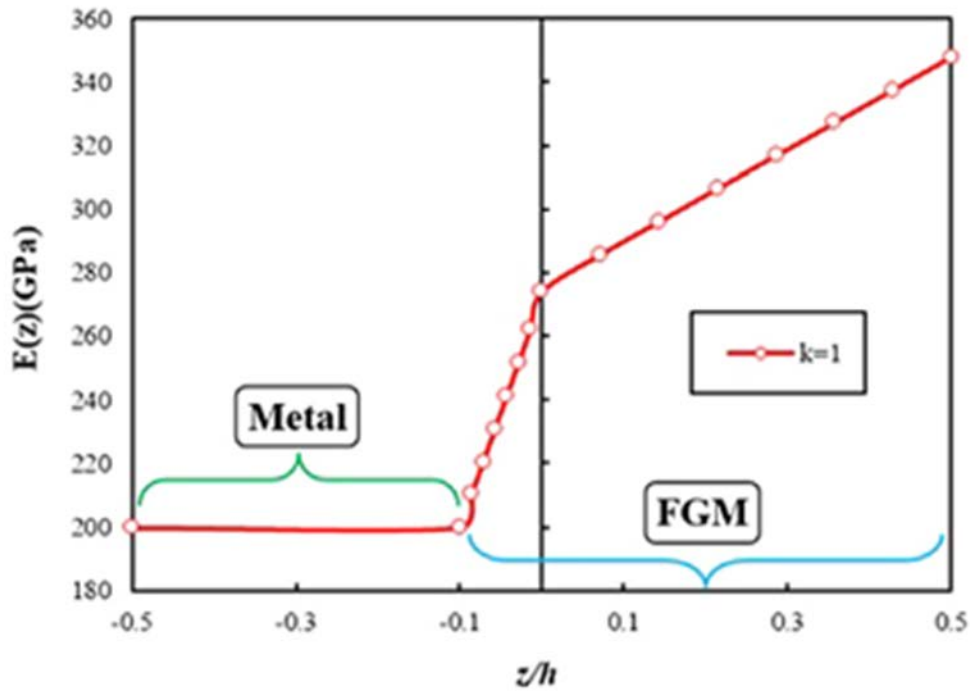


Figure III.4. Variation du module d 'Young pour une p outre-I FGM imparfaite (Cas II, b
¼ 0:1h).

Où les résultantes de contrainte exprimées peuvent être étendues comme ci-dessous

$$N_{XX} = A_{11} \frac{du}{dx} - A_{12} \frac{d^2w_b}{dx^2} - A_{33} \frac{d^2w_s}{dx^2} + D_{33} w_z \tag{III.11.a}$$

$$M_{XX} = A_{12} \frac{du}{dx} - D_{11} \frac{d^2w_b}{dx^2} - D_{12} \frac{d^2w_s}{dx^2} + D_{44} w_z \tag{III.11.b}$$

$$R_{XX} = A_{33} \frac{du}{dx} - D_{12} \frac{d^2w_b}{dx^2} - D_{22} \frac{d^2w_s}{dx^2} + D_{55} w_z \tag{III.11.c}$$

$$Q_{xz} = A_{44} \left(\frac{dw_s}{dx} + \frac{dw_z}{dx} \right) \tag{III.11.d}$$

$$R_{ZZ} = A_{66} \frac{du}{dx} - A_{77} \frac{d^2w_b}{dx^2} - A_{55} \frac{d^2w_s}{dx^2} + A_{55} w_z \tag{III.11.e}$$

Dans lequel nous définissons

$$A_{11}, A_{12}, A_{33}, D_{11}, D_{12}, D_{22} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} C_{11} \left(1, z, f(z), z^2, zf(z), f^2(z) \right) dz$$

$$D_{33}, D_{44}, D_{55} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} C_{12} \left(g'(z), zg'(z), f(z)g'(z) \right) dz$$

$$A_{44} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} C_{33} g^2(z) dz$$

$$A_{55} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} C_{22} g'^2(z) dz$$

$$A_{66}, A_{77}, A_{88} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} C_{12} (1, z, f(z)) dz$$

Considérons une charge de compression axiale dans le plan appliquée progressivement à les deux extrémités de la poutre fait un travail comme

$$\Pi_w = \frac{1}{2} \int_0^L N_{xx}^0 \left(\frac{dw_b}{dx} + \frac{dw_s}{dx} \right)^2 dx \quad (\text{III.12})$$

En faisant varier la relation ci-dessus, on peut explorer

$$\delta \Pi_w = \frac{1}{2} \int_0^L N_{xx}^0 \left[\frac{d\delta w_b}{dx} \frac{dw_b}{dx} + \frac{d\delta w_s}{dx} \frac{dw_s}{dx} + \delta \left(\frac{dw_b}{dx} \frac{dw_s}{dx} \right) \right] dx \quad (\text{III.13})$$

Obtenir les équations qui régissent une réponse statique du FGM faisceau nécessite de débiller équation (III.6) comme ci-dessous

$$\delta u = 0, \frac{dN_{xx}}{dx} = 0 \quad (\text{III.14.a})$$

$$\delta W_b = 0, \frac{d^2 M_{xx}}{dx^2} + N_{xx}^0 \left(\frac{d^2 w_b}{dx^2} + \frac{d^2 w_s}{dx^2} \right) = 0 \quad (\text{III.14.b})$$

$$\delta W_s = 0, \frac{d Q_{xx}}{dx} + \frac{d^2 R_{xx}}{dx^2} + N_{xx}^0 \left(\frac{d^2 w_b}{dx^2} + \frac{d^2 w_s}{dx^2} \right) = 0 \quad (\text{III.14.c})$$

$$\delta w_Z = 0, \frac{d Q_{xx}}{dx} - R_{ZZ} = 0 \quad (\text{III.14.d})$$

Ainsi, en termes de déplacements, au moyen de l'équation (III.11) on peut réécrire les équations ci-dessus comme

$$A_{11} \frac{d^2 u}{dx^2} - A_{12} \frac{d^3 w_b}{dx^3} - A_{33} \frac{d^3 w_s}{dx^3} + D_{33} \frac{dw_z}{dx} = 0 \quad (\text{III.15.a})$$

$$A_{12} \frac{d^3 u}{dx^3} - D_{11} \frac{d^4 w_b}{dx^4} - D_{12} \frac{d^4 w_s}{dx^4} + D_{44} \frac{d^2 w_z}{dx^2} + N_{xx}^0 \left(\frac{d^2 w_b}{dx^2} + \frac{d^2 w_s}{dx^2} \right) = 0 \quad (\text{III.15.b})$$

$$A_{33} \frac{d^3 u}{dx^3} - D_{12} \frac{d^4 w_b}{dx^4} - D_{22} \frac{d^4 w_s}{dx^4} + N_{xx}^0 \frac{d^2 w_b}{dx^2} + (A_{44} + N_{xx}^0) \frac{d^2 w_z}{dx^2} + (A_{44} + D_{55}) \frac{d^2 w_z}{dx^2} = 0 \quad (\text{III.15.c})$$

$$-A_{66} \frac{du}{dx} + A_{77} \frac{d^2 w_b}{dx^2} + A_{44} \frac{d^2 w_z}{dx^2} + (A_{44} + A_{88}) \frac{d^2 w_s}{dx^2} - A_{55} w_z = 0 \quad (\text{III.15.d})$$

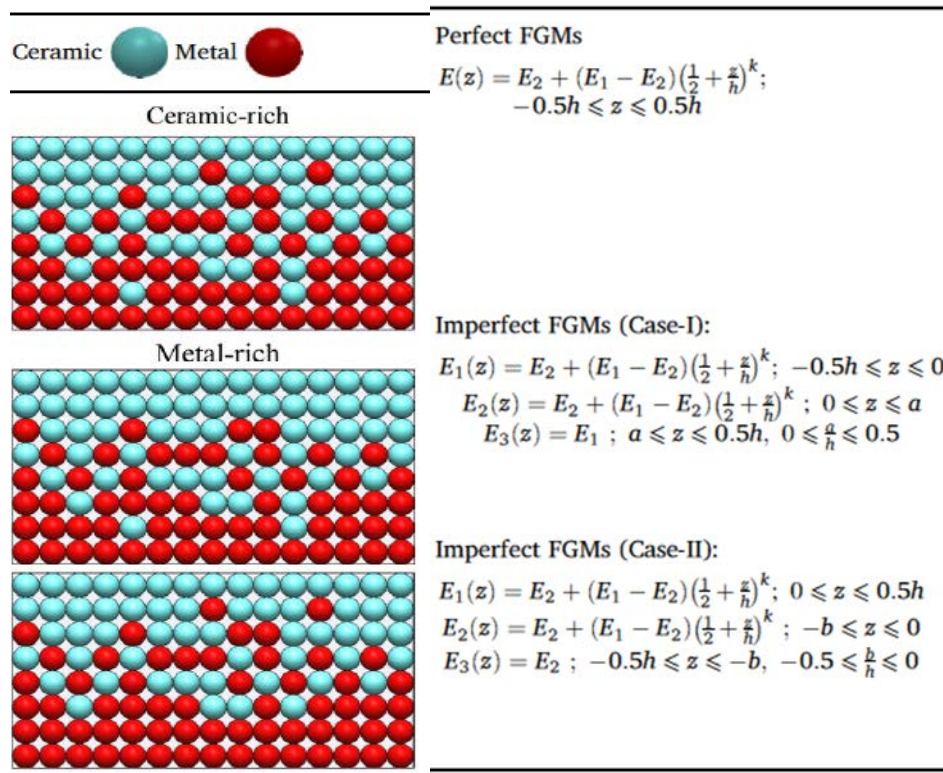


Tableau III.1. Modèles du poutre FGM-I considérés ici, parfait (a), imparfait (cas I (b), cas II (c)).

III.3. Approche de résolution

Procurer les sorties numériques de stabilité critique du FGM poutre avec l'imperfection réputée, ici la technique analytique est utilisée en référence au premier mode de flambement. Cette méthode est une sorte de méthodes résiduelles pondérées (MRP).

Pour l'exploiter, nous supposons un résidu pour les équations où le résidu est des erreurs d'équations. En effet, l'approximation provoque les erreurs. Si nous utilisons une solution exacte, alors les résidus deviennent nuls. Les WRM sont basés sur l'atteinte d'un solution d'approximation pour laquelle la moyenne des résidus sur la domaine est supposé nul. Il peut être obtenu par une fonction de poids (Xm) pour que l'intégrale pondérée soit égale à zéro. Cette fonction de poids satisfait une variété de conditions aux limites (CAL). Généralement, la fonction de pondération doit être multipliée par le résidu, puis l'intégration sur l'ensemble du domaine [0, L] est accomplie. À cet égard, les fonctions suivantes peuvent être exécutées.

- CAL (S-S) (simplement-simplement) :

$$X_m(x) = \sin(a_m x) \quad (\text{III.16.a})$$

- CAL (C-C) (encastrée-encastrée) :

$$X_m(x) = \frac{1}{2} [1 - \cos(2a_m x)] \quad (\text{III.16.b})$$

- CAL (C-S) (encastrée-simplement) :

$$X_m(x) = 0.170938 \left[\sin(\beta_m x) - \beta_m L \cos(\beta_m x) + \beta_m L \left(1 - \frac{x}{L}\right) \right] \quad (\text{III.16.c})$$

- CAL (C-F) (porte-à-faux) :

$$X_m(x) = \sin(\gamma_m x) * \cos(\gamma_m x) \quad (\text{III.16.d})$$

Dans laquelle

$$\alpha_m = \frac{m\pi}{L}, \beta_m = 1.4318 \frac{m\pi}{L}, \gamma_m = \frac{m\pi}{4L}$$

En tant que tels, les déplacements supposés peuvent être pris comme ci-dessous

$$u(x) = \sum_{m=1}^{\infty} U_m \frac{\partial X_m(x)}{\partial x} \quad (\text{III.17.a})$$

$$w_b(x) = \sum_{m=1}^{\infty} W_{bm} X_m(x) \quad (\text{III.17.b})$$

$$w_s(x) = \sum_{m=1}^{\infty} W_{sm} X_m(x) \quad (\text{III.17.c})$$

$$w_z(x) = \sum_{m=1}^{\infty} W_{zm} X_m(x) \quad (\text{III.17.d})$$

Dans la présente étude, nous utilisons les fonctions sinus ou cosinus comme les fonctions de poids et le sinus et le cosinus sont continuellement différenciables dans tout le domaine.

Donc, cela se comportera comme une analyse méthode, et le taux de convergence sera sans importance. C'est pourquoi le taux de convergence n'est pas évalué et m désigne les numéros de mode.

Puis, avec l'imposante d'équation (III.17) dans l'équation (III.15), la forme matricielle de l'équation constitutive du problème peut être réglée comme

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_m \\ W_{bm} \\ W_{sm} \\ W_{zm} \end{Bmatrix} = 0 \quad (\text{III.18})$$

Dans laquelle $\det[K_{IJ}]_{4 \times 4}$ sont les coefficients de matrice pour la poutre FGM. Si la déterminant de la matrice est égal à zéro, on peut acquérir le non solution triviale comme

$$\det[K_{IJ}]_{4 \times 4} = 0 \quad (\text{III.19})$$

Le résultat de cette opération serait un polynôme algébrique équation basée sur l'inconnue (N_{xx}^0), qui résout cette équation génère les charges critiques de flambement.

Les composants de la matrice des coefficients sont éclatés en Annexe A.

III.4. Crédibilité des résultats

Cette partie de la présente recherche est destinée à démontrer la validité et la ponctualité de la solution fermée, en particulier la nouvelle fonction de forme de la distribution de déformation de cisaillement.

Tout d'abord, la plupart des théories capitales des variations de déformation de cisaillement sont répertoriées dans (le tableau III.2), côte à côte.

Pour estimer les fonctions de forme susmentionnées, (les figures III.5 et III.6) sont conçus dans lesquels certaines fonctions de forme sont dessinées. Comme on le voit, le fonction de forme proposée est en très bon parallélisme avec les autres fonctions. également les résultats de la méthode des éléments finis (FEM) sont ajoutés. Cela vaut notant que les résultats de FEM sont donnés sur la base de l'élément de poutre 1D et en utilisant un nombre approprié d'éléments et de nœuds en fonction sur la section et la longueur de la poutre. Comme on peut le trouver, les résultats de la fonction de forme proposée peuvent être autorisés à utiliser car la corrélation des résultats est simplement vue.

Après avoir atteint une concordance pour la nouvelle fonction de forme proposée dans cette recherche et comprendre son très bon équilibre avec:

Reference	$f(z)$	Mathematical view
Zenkour	$h \sinh \frac{z}{h} - \frac{4}{3} \frac{z^3}{h^2} \cosh(\frac{1}{2})$	HT
Touratier	$\frac{h}{\pi} \sin(\frac{\pi}{h} z)$	T
Shahsavari et al.	$- [r_1 (\frac{z}{h}) + r_2 \sinh(\frac{z}{h})] h^*$	HT
Zohra Zaoui et al.	$\frac{\pi h}{\pi^4 + h^4} [(\pi^2 \sin(\frac{\pi z}{h}) + h^2 \cos(\frac{\pi z}{h})) \exp(\frac{h z}{\pi}) - h^2]$	T/Ex-2
Akavci and Tanrikulu	$3.7z(1.27 \operatorname{sech}^{0.65}(\frac{z}{h}) - 1)$	HT
Reddy	$z(1 - \frac{4}{3} \frac{z^2}{h^2})$	Pol
Mantari et al.	$\tan(rz) - zr \sec^2(\frac{rh}{2}) ; [r = 0.2]$	T
Joshani et al.	$\frac{r}{\pi} \operatorname{csch}^{-1}(\frac{rh}{z}) - z \frac{2r}{h^2 \sqrt{4r^2 + 1}} ; [r = 0.32]$	HT
Neves et al.	$\sin(\frac{\pi}{h} z)$	T
Neves et al.	$\sinh(\frac{\pi}{h} z)$	HT
Sarangan and Singh	$\tanh(\frac{rz}{h}) - z \frac{r}{h} \operatorname{sech}^2(\frac{r}{2}) ; [r = 2.5]$	HT
Aydogdu	$(1 - 4 \frac{z^2}{h^2}) r^{\left(\frac{-2z^2}{h^2 \ln(r)}\right)} ; [r = 3]$	Ex-1/Log
Soldatos	$h \sinh(\frac{z}{h}) - z \cosh(\frac{1}{2})$	HT
Karama et al.	$z \exp\left(-2\left(\frac{z}{h}\right)^2\right)$	Ex-2
Thai and Choi	$-\frac{z}{4} + \frac{5z^3}{3h^2}$	Pol
Hebali et al.	$\frac{h \sinh(\frac{\pi z}{h}) - z}{\cosh(\frac{\pi}{2}) - 1}$	HT
Present	$\tanh\left(\frac{z}{h} - \frac{z^3}{h^3} - r \frac{z^5}{h^5}\right) ; [r = 0.8]$	HT/Pol

Tableau III.2. Fonctions de forme pour la distribution des contraintes de cisaillement dans la littérature.

HT = trigonométrie hyperbolique.

Ex-1 = Forme de fonction exponentielle A

Ex-2 = Forme de fonction exponentielle B.

Pol = Polynôme.

Log = Logarithmique

T = trigonométrie.

III.5. conclusion

Un défaut dans la composition du matériau des poutres FGM a été étudié dans ce chapitre. De plus, l'influence de l'étirement dans les couches d'épaisseur a été examinée par une théorie de l'élasticité d'ordre supérieur (HPET). Une solution analytique a été obtenue pour donner le comportement de flambement axial des poutres FGM épaisses sur la base de variantes de conditions d'extrémité. De plus, une nouvelle fonction de forme de déformation par cisaillement a été proposée sur la base des fonctions hyperboliques-polynomiales.

Pour obtenir le modèle mathématique du problème, le principe énergétique et la déformation lagrangienne linéaire ont aidé. Une validation complète a été préparée pour assurer la qualité de la nouvelle fonction de forme. La MGF imparfaite a été analysée avec des résultats numériques tabulaires et illustrés. L'étude a généré de nouvelles découvertes résumées ci-dessous,

* La flexibilité des conditions aux limites affecte directement l'importance des déformations de cisaillement.

* Moins les conditions aux limites sont flexibles, plus les imperfections ont d'impact.

* Plus le faisceau est épais, plus l'influence des imperfections est importante

* Un inconvénient de la composition matérielle des FGM peut conduire à des réponses disparates de ces matériaux composites contre le chargement mécanique.

Ce comportement, qui dépend entièrement de la différence entre les caractéristiques d'élasticité des deux matériaux, peut donner une réaction imprévisible si le concept de base et le facteur de sécurité de la conception des pièces et produits en FGM sont basés sur le mélange parfait de la loi de puissance.

CHAPITRE IV :

Résultats Et Discussions

IV.1. Introduction

Dans cette section, le comportement statique des poutres en FGM est étudié sur la base sur un modèle de quasi-3D d'ordre supérieur. Le modèle actuel tient compte de deux paramètres l'effet de cisaillement transversal et l'effet de l'étirement de la section.

IV.2. Résultats et discussions numériques

Il est pertinent de noter que dans ce chapitre, nous allons examiner deux types de poutres FGM, le premier cas (I) est le cas usuel, à savoir composition de céramique et de métal, puis le deuxième cas (II) est un composé d'alumine et d'aluminium. Par la suite, sous différentes sortes de conditions aux limites, une étude paramétrique sur les poutres épaisses et très épaisses en FGM est discutée.

Les calculs sont effectués en tenant compte de la forme adimensionnelle des charges critiques de flambement comme suit

$$P_{Cr} = 100 \frac{N_{xx}^0}{E_2 h^2}$$

Pour déterminer et rapporter la réponse structurelle du FGM défectueux dans un problème de stabilité, les spécifications des matériaux sont rassemblées dans (**le tableau IV.1**).

FGM Poutre-I	Céramique : Silicon Carbide (Si_3C_4) $E_1 = 348 \text{ GPa}, \nu_1 = 0.24$ Metal:Stainless Steel-Grade 304 (AISI 304) $E_2 = 200 \text{ GPa}, \nu_2 = 0.29$
FGM Poutre-II	Alumina: (Al_2O_3) $E_1 = 380 \text{ GPa}, \nu_1 = 0.3$ Aluminium: (Al) $E_2 = 70 \text{ GPa}, \nu_2 = 0.3$

Tableau IV.1. Paramètres du matériau.

Cette partie du présent travail de recherche vise à démontrer la validité et ponctualité de la solution proposée, en particulier la nouvelle fonction de forme de la distribution de déformation de cisaillement. Tout d'abord, la plupart des théories capitales des variations de déformation de cisaillement sont répertoriées dans (**le tableau IV.2**), les unes à côté des autres.

D'autres comparaisons peuvent être observées dans **(les tableaux IV.3 et IV.4)** pour lesquels les résultats de la méthode des éléments finis (FEM) sont également ajoutés. Il convient de noter que les résultats de FEM mentionnés dans les tableaux sont donnés sur la base de l'élément de poutre 1D et par l'utilisation d'un nombre approprié d'éléments et de nœuds en fonction de la section et de la longueur de la poutre. Comme on peut le constater, les résultats de la fonction de forme proposée peuvent être autorisés à être utilisés car la corrélation des résultats est simplement vue.

Après avoir atteint une concordance pour la nouvelle fonction de forme proposée dans ce travail de recherche dans le cadre de cette mémoire de fin d'étude et compris son très bon équilibre avec la littérature, les autres reconnaissances des résultats numériques sont présentées dans l'ensemble des tableaux.

Les résultats de la théorie modifiée de la déformation par cisaillement du premier ordre (S-FSDT), une théorie de la déformation par cisaillement d'ordre supérieur sans effet d'étirement de l'épaisseur (HSDT, $\varepsilon_z = 0$), et en considérant cet effet $\varepsilon_z \neq 0$, et FEM.

Notez que la HSDT et la nouvelle théorie sont basées sur l'utilisation de la fonction de forme actuelle. Ce faisant, la poutre est débattue sous deux formes transversales, à savoir carrée et rectangulaire. De plus, les conditions de bord S-S, F-F et C-C sont discutées.

Pour **(les tableaux IV.5 et IV.8)**, le comportement de la poutre est basé sur un matériau mince comme $45 < L/h < 60$ pour le carré et $65 < L/h < 90$ pour le rectangulaire. Pour **(les tableaux IV.5 et IV.6)**, on peut voir que les résultats de FEM et S-FSDT ne sont pas en excellent accord. Bien que la poutre s'élargisse, les résultats de toutes les théories sont dans le voisinage.

De plus, l'examen **(des tableaux IV.7 et IV.8)** présente des résultats équivalents pour toutes les théories, bien que certaines divergences puissent être trouvées. Par cette partie de la comparaison, on peut conclure que l'importance des déformations de cisaillement est de plus en plus évidente en ayant des conditions de bord moins flexibles.

Fonction	L/h			
	10	15	20	30
Zenkour	5813.68	2610.32	1473.59	656.617
Touratier	5813.25	2610.24	1473.56	656.612
Shahsavari et al.	5807.16	2609.01	1473.17	656.534
Zohra Zaoui et al.	5921.76	2631.89	1480.44	657.974
Akavci and Tanrikulu	5813.36	2610.26	1473.57	656.613
Reddy	5813.68	2610.33	1473.59	656.617
Mantari et al.	5921.76	2631.89	1480.44	657.974
Joshan et al.	5825.87	2612.78	1474.37	656.772
Neves et al.	5824.64	2612.53	1474.29	656.757
Neves et al.	5827.76	2613.16	1474.49	656.796
Sarangan and Singh	5825.14	2612.63	1474.33	656.763
Aydogdu	5826.05	2612.82	1474.39	656.775
Soldatos	5829.55	2613.52	1474.61	656.819
Karama et al.	5812.89	2610.17	1473.54	656.607
Thai and Choi	5847.56	2617.13	1475.76	657.047
Hebali et al.	5847.35	2617.09	1475.75	657.045
Présente	5825.92	2612.79	1474.37	656.773

Tableau IV.2. Charges élastiques de flambement (KN) pour plusieurs fonctions de forme dans un poteau carré en acier S-S basé sur HSDT ($E = 2 \times 10^5$ MPa, $h = 60$ mm).

Method	L/h			
	10	15	20	30
Zenkour	1473.59	656.61	369.68	164.40
Touratier	1473.56	656.61	369.68	164.40
Shahsavari et al.	1473.17	656.53	369.65	164.40
Zohra Zaoui et al.	1480.44	657.97	370.11	164.49
Akavci and Tanrikulu	1473.57	656.61	369.68	164.40
Reddy	1473.59	656.61	369.68	164.40
Mantari et al.	1480.44	657.97	370.11	164.49
Joshan et al.	1474.37	656.77	369.73	164.41
Neves et al.	1474.29	656.75	369.72	164.41
Neves et al.	1474.49	656.79	369.73	164.42
Sarangan and Singh	1474.33	656.76	369.72	164.42
Aydogdu	1474.39	656.77	369.73	164.42
Soldatos	1474.61	656.82	369.74	164.42
Karama et al.	1473.54	656.60	369.67	164.41
Thai and Choi	1475.76	657.05	369.82	164.43
Hebali et al.	1475.75	657.04	369.82	164.43
Présente	1474.37	656.77	369.73	164.42

Tableau IV.3. Charges élastiques de flambement (KN) pour plusieurs fonctions de forme dans un poteau carré en acier F-F basé sur HSDT ($E = 2 \times 10^5$ MPa, $h = 60$ mm).

L (m)	S-FSDT, $K_s = 5/6$	FEM [84]	Présente	
			$\varepsilon = 0$	$\varepsilon \neq 0$
2.75	281.891	281.550	281.675	281.631
3	236.867	236.630	236.715	236.684
3.25	201.828	201.650	201.717	201.695
3.5	174.026	173.900	173.944	173.927

Tableau IV.4. Charge élastique de flambement (KN) pour un poteau carré en acier S-S ($E = 2 \times 10^5$ MPa, $h = 60$ mm).

L (m)	S-FSDT, $K_s = 5/6$	FEM	Présente	
			$\varepsilon = 0$	$\varepsilon \neq 0$
2.75	125.284	125.122	125.244	125.235
3	105.274	105.230	105.245	105.239
3.25	89.700	89.668	89.680	89.676
3.5	77.344	77.320	77.329	77.326

Tableau IV.5. Charge élastique de flambement (KN) pour un poteau rectangulaire en acier S-S ($E = 2 \times 10^5$ MPa, $h = 40$ mm, $b = 90$ mm).

L (m)	S-FSDT, $K_s = 5/6$	FEM [84]	Présente	
			$\varepsilon = 0$	$\varepsilon \neq 0$
2.75	70.473	70.452	70.460	70.457
3	59.217	59.202	59.207	59.206
3.25	50.457	50.447	50.450	50.449
3.5	43.506	43.499	43.503	43.500

Tableau IV.6. Charge élastique de flambement (KN) pour un poteau carré en acier F-F ($E = 2 \times 10^5$ MPa, $h = 60$ mm).

L (m)	S-FSDT, $K_s = 5/6$	FEM	Présente	
			$\varepsilon = 0$	$\varepsilon \neq 0$
2.75	31.321	31.318	31.319	31.318
3	26.318	26.316	26.317	26.316
3.25	22.425	22.423	22.424	22.423
3.5	19.336	19.335	19.335	19.335

Tableau IV.7. Charge élastique de flambement (KN) pour un poteau rectangulaire en acier F-F ($E = 2 \times 10^5$ MPa, $h = 40$ mm, $b = 90$ mm).

L (m)	S-FSDT,	Présente	
	$K_s = 5/6$	$\varepsilon = 0$	$\varepsilon \neq 0$
0.15	94252.1	74996.4	72063.1
0.25	34044.8	31155.4	30634.1
0.5	8523.3	8329.89	8292.05
0.75	3789.13	3750.42	3742.72
1	2131.58	2119.28	2116.82
1.25	1364.27	1359.22	1358.21

Tableau IV.8. Charge élastique de flambement (KN) pour un poteau carré en acier S-S très épais et épais ($E = 2 \times 10^5$ MPa, $h = 60$ mm).

Dans les l'ensemble des figures, nous examinons le rôle des poutres imparfaite de FGM dans de manière épaisse et dans les deux états et motifs mentionnés précédemment pour deux types de poutre FGM. Sur (**la figure IV.1**), la variation du paramètre de fraction volumique est observée dans les états de matière parfaits et imparfaits. La matière incomplète de cette figure suit le modèle du premier cas. C'est-à-dire que dans le cas du matériau composite FGM, la quantité de zone de céramique pure est substantielle dans l'épaisseur de la poutre. A cet effet, $a = 0,2 h$ a été choisi. De plus, $a = 0,5 h$ est l'état parfait de la FGM. Comme on peut le voir, lorsque $k = 0$ (toute la poutre est plein de céramique), la valeur du paramètre a ne fait aucune différence dans les résultats.

C'est assez logique. Mais à mesure que le paramètre k augmente et que le métal composition est ajouté, on peut voir que lorsque nous nous dirigeons vers la poutre avec du métal pur ($k = \infty$), les résultats seront disparates. Cependant, la poutre imparfaite FGM, dans ce cas, est beaucoup plus résistant que le cas parfait en raison de la teneur accrue en poudre de céramique dans le matériau composite.

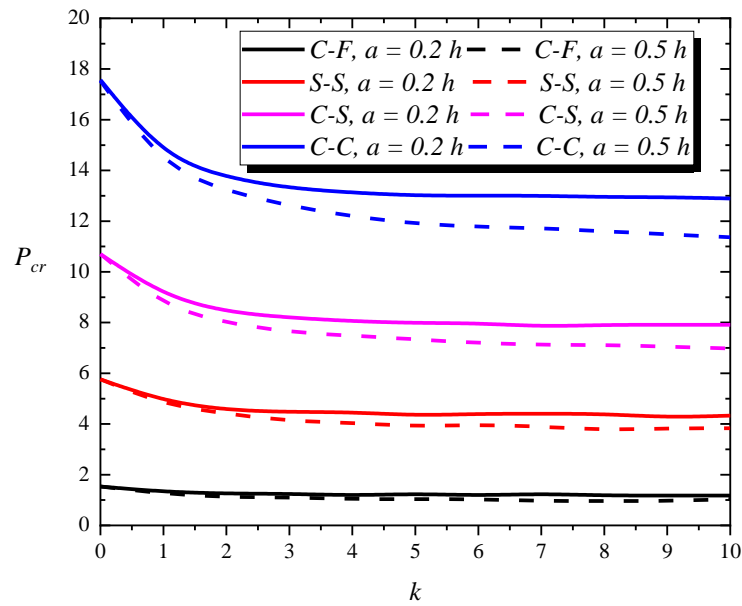


Figure IV.1. Indice de loi de puissance en fonction des différentes conditions de bord pour une poutre FGM-I épaisse (Cas I, $L = 5 h$).

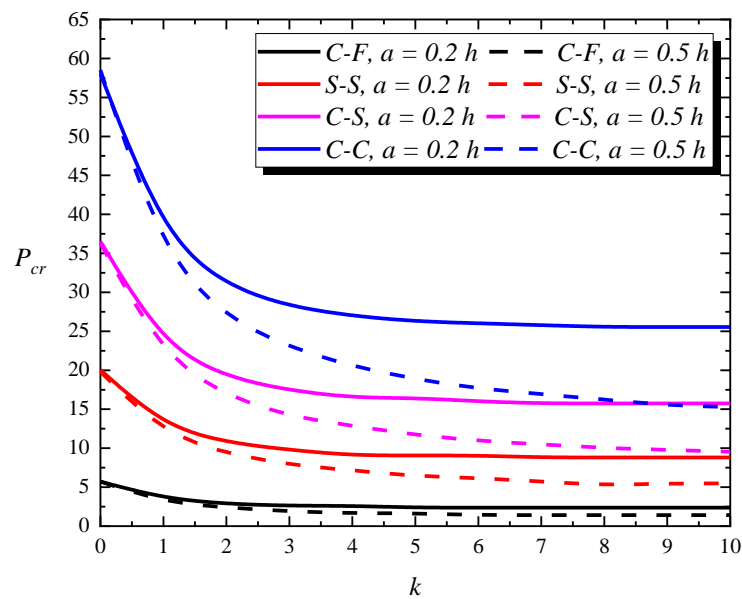


Figure IV.2. Indice de loi de puissance en fonction des différentes conditions de bord pour une poutre FGM-II épaisse (Cas I, $L = 5 h$).

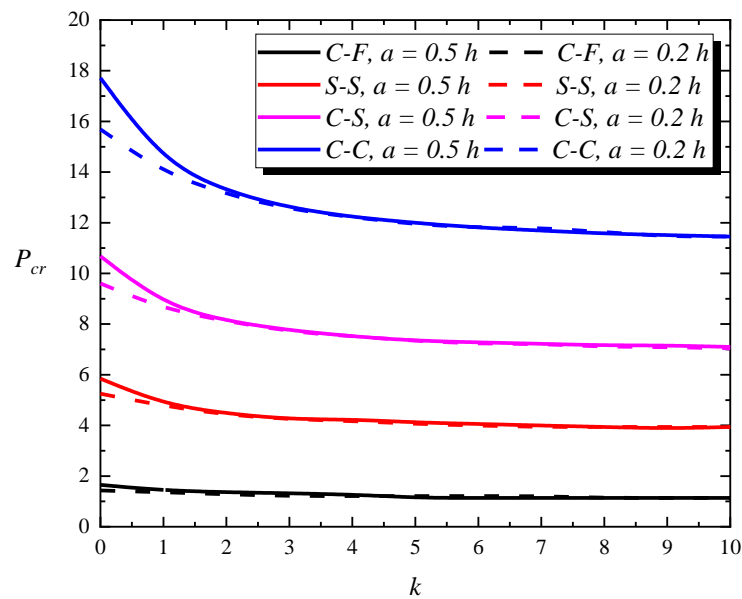


Figure IV.3. Indice de loi de puissance en fonction des différentes conditions de bord pour une poutre FGM-I épaisse (Cas II, $L = 5 h$).

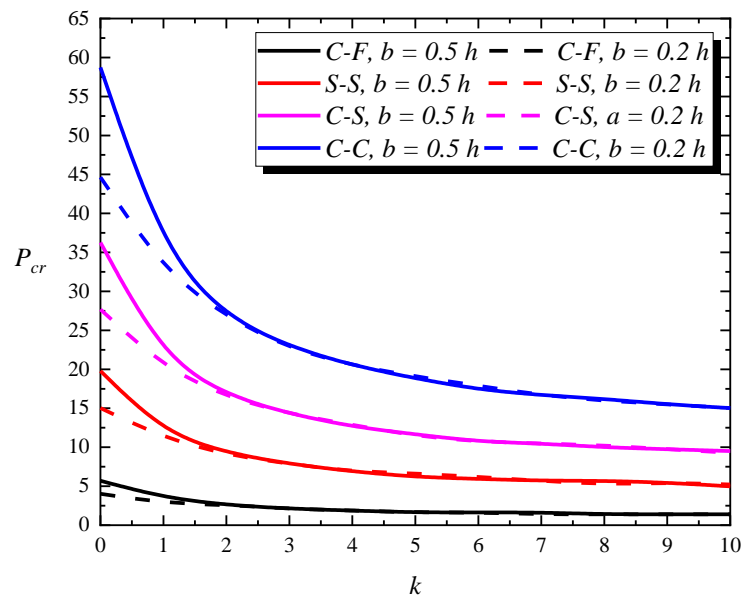


Figure IV.4. Indice de loi de puissance par rapport à différentes conditions de bord pour une poutre FGM-II épaisse (Cas II, $L = 5 h$).

Ces résultats est dû au module d'élasticité plus élevé de la céramique. Fait intéressant, la différence de résultats avec les conditions aux limites plus rigides augmente. Cela signifie que moins la condition aux limites est flexible et, en effet, plus les degrés de liberté des deux extrémités de la poutre sont faibles, plus l'impact du défaut est important. En termes de

diagrammes, l'effet maximum se fait sur la condition aux limites de l'encastré et le moins sur les bords libres.

D'autre part, la figure 5c est conçue pour le deuxième motif de défauts, dans lequel le motif de la zone métallique sera remarquable en épaisseur et ne sera pas limité à la couche la plus basse. Ici, $b = 0,5 h$ signifie poutre parfait et $b = 0,2 h$ signifie poutre imparfaite, qui représente environ 30% de l'épaisseur avec la zone de métal pur, le reste étant une combinaison de deux métaux et céramique.

En examinant cette figure, nous pouvons voir que lorsque la valeur numérique de l'indice de loi de puissance est $k \leq 1$, en raison de la présence de céramique dans le matériau composite, il est important de déterminer combien de métal s'est formé dans l'épaisseur. Cependant, en augmentant le paramètre k à mesure que nous nous approchons de la poutre de métal riche et que la teneur en céramique est négligeable, l'importance des défauts dans ce modèle est également éliminée et les résultats des poutres parfaits et défectueux sont appariés. Le point important ici est pour les résultats $k < 1$, ce que la différence entre les résultats le confirme. En fait, ce cas incomplet peut être plus important dans l'analyse de stabilité que le cas précédent. Parce que les poutres FGM sont utilisés dans la conception de produits en supposant un modèle complet, ce qui, en ce qui concerne une poutre FGM complet, le facteur de sécurité est assuré pour eux. Selon la figure ci-dessus, on peut affirmer que si la région métallique n'est pas unique à la couche d'épaisseur la plus faible et qu'une partie de l'épaisseur se forme avec du métal pur, la stabilité du matériau composite sera bien inférieure à celle du matériau parfait, entraînant une défaillance et un rendement imprévisibles avec des charges inférieures aux charges conçues pour le critère.

Cela souligne l'importance d'examiner les cas défectueux pour les produits fabriqués à partir de matériaux FGM.

Dans d'autres conditions, concernant **(les figures IV.2 et IV.4)**, nous essayons d'étudier la poutre FGM-II ainsi que de comparer ses résultats avec le premier type de poutre. **(La figure IV.2)** est dessinée exactement comme **(la figure IV.1)** mais l'alumine et l'aluminium sont respectivement remplacés par la céramique et le métal. Il est clair que les résultats ici sont encore plus remarquables que ceux des deux autres figures, c'est-à-dire que l'impact de l'imperfection est plus visible. En fait, la différence entre les valeurs de deux matériaux mélangés peut affecter directement ce résultat. En plus de ces derniers, pour **(les figures IV.2 et IV.4)**, une chute intensive peut être observée pour des résultats entre $k = 0$ et $k = 1$. Cela peut être dû à la différence de module d'élasticité de deux matériaux mélangés. Cela

signifie que le passage de l'état d'alumine pure au composé FGM conduit à un tel comportement.

IV.3. Conclusions

Dans ce chapitre une analyse statique a été effectuée sur des deux types des poutres en FGM en utilisant une nouvelle théorie de déformation de cisaillement d'ordre supérieur ou nous tentons d'apporter la forme parfaite de matériaux fonctionnellement gradués dans certaines imperfections de la composition du matériau. En effet, il est peu probable qu'un matériau calibré se conforme exactement à la loi de notre modèle. Puisqu'il peut y avoir des erreurs potentielles dans le processus de mélange, nous avons donc considéré dans cette étude deux cas fonctionnels d'étalonnage imparfait basé sur la loi de puissance afin de découvrir quelle sera la différence dans leurs résultats s'ils ne sont pas exactement conformes à la loi de puissance.

Conclusion Générale

Conclusion générale

Un défaut dans la composition des matériaux des poutres FGM a été étudié dans cette mémoire. De plus, l'influence de l'étirement dans les couches d'épaisseur a été examinée par une théorie de l'élasticité d'ordre supérieur (HSDT). Une solution analytique a été réalisée pour donner le comportement au flambement axial des poutres épaisses FGM sur la base de variantes de conditions d'extrémité. De plus, une nouvelle fonction de forme de déformation de cisaillement a été proposée sur la base des fonctions polynomiales hyperboliques. Pour obtenir le modèle mathématique du problème. Une validation complète a été préparée pour assurer la qualité de la fonction de forme. La FGM imparfaite a été analysée avec des résultats numériques tabulaires et illustrés. L'étude a généré de nouveaux résultats résumés ci-dessous,

- La flexibilité des conditions aux limites affecte directement l'importance des déformations de cisaillement.
- Le S-FSDT peuvent être applicables pour des poutres minces ($20 < L/h < \infty$) et modérément épais ($10 < L/h < 20$), respectivement. Et pour les poutres épaisses ($5 < L/h < 10$) leurs résultats échouent et les théories d'élasticité d'ordre supérieur basées sur les déformations de cisaillement modifiées doivent être utilisées. Cependant, lorsque le matériau se situe dans la plage d'une poutre très épais ($1 < L/h < 5$), les résultats des théories d'ordre supérieur communes échouent, et les théories d'ordre supérieur basées sur l'inclusion de l'effet d'étirement doivent être prises en compte. Considération alors qu'il est difficile d'utiliser la 3D exacte.
- Moins les conditions aux limites sont flexibles, plus les imperfections impactent.
- Plus la poutre est épaisse, plus l'influence des imperfections est importante.
- Un inconvénient de la composition matérielle des FGM peut conduire à des réponses disparates de ces matériaux composites contre le chargement mécanique. Ce comportement qui dépend entièrement de la différence entre les caractéristiques d'élasticité des deux matériaux peut donner une réaction imprévisible si le concept de base et le facteur de sécurité de la conception de pièces et de produits en FGM sont basés sur le mélange parfait de loi de puissance.

Références Bibliographiques

Références Bibliographiques

- * **Yamanouchi, M., Koizumi, M., Hirai, T., Shiota, I.**, "In Proceedings of first International symposium on functionally gradient materials", Sendai, Japan, (1990).
- * **Koizumi, M.**, "The concept of FGM", Ceram Trans, Funct Gradient Mater, (1993).
- * **Avramidis, I.E., Morfidis, K.**, "Bending of beams on three-parameter elastic foundation", Int. J. Solids Struct, (2006).
- * **Pasternak, P.L.**, "On a new method of analysis of an elastic foundation by means of two foundation constants", Cosudarstrennoe Izdatelstvo Literature Stroitelst vu i Arkhitekture, Moscow, USSR, [in Russian], (1954)
- * **Cheng, Z.Q., Batra, B.C.**, "Exact correspondence between eigenvalues of membranes and functionally graded simply supported polygonal plate", J Sound Vib, (2000)
- * **Reddy, J.N., Cheng, Z.Q.**, "Frequency correspondence between membranes and functionally graded spherical shallow shells of polygonal plan form", Int J Mech Sci,(2002).
- * **Koch, I.C.** "The laws of bone architecture", Am. J Anat.,(1917)
- * **Mattheck, C., Burkhardt, S.**, "A new method of structural shape optimization based on biological growth", Internat/. J Fat. (1990).
- * **Mattheck, C.**, "Engineering components grow like trees", Material wissenscha J tund Werkst of Jtechnik,(1990).
- * **Nabil, F., Emmanuel, B., Mohamed, G., Claudia, C., Christian, C., Olivier, R.**, « Matériaux composites alumine/aluminium à gradient de fonction: modélisation numérique pour le calcul de la conductivité thermique effective », 20ème Congrès Français de Mécanique, Besançon, 29 août au 2 septembre, (2011).
- * **Bouaziz, O.**, "Potentiel des matériaux à gradient de propriétés pour applications nucléaires", 20ème Congrès Français de Mécanique, Besançon, 29 août au 2 septembre, (2011)
- * **Reddy, J.N.**, "Analysis of functionally graded plates", International Journal for Numerical Methods In Engineering, Int. J. Numer. Meth. Engng. (2000)
- * **Watari, F., Yokoyama, A., Omori, M., Hirai, T., Kondo, H., Uo, M., et al.**, "Biocompatibility of materials and development to functionally graded implant for bio-medical application", Compos Sci Technol, (2004)
- * **Boch, P., Chartier, T., Huttepain, M.**, "Tape casting of Al₂O₃/ZrO₂ laminated Composites, J. Am. Ceram". Soc;(1986).
- * **Muller, E., Drasar, C., Schilz, J., Kaysser, W. A.** Functionally graded materials for sensor and energy applications. Material Science and Engineering, (2003).

- * **Nguyen, T.K., Vo, T.P., Thai, H.T.**, Static and free vibration of axially loaded functionally graded beams based on the first-order shear deformation theory. *Composite Part B*, (2013).
- * **Berthelot, J.M.**, matériaux composites «comportement mécanique et analyse des structures» Masson (1993)
- * **Gay, D.**, «Matériaux composites» Hermès (1991).
- * **Yamanoushi, M., Koizumi, M., Hirai T., Shiota. I.**, «In proceeding of first international symposium on functionally gradient materials» Sendai, Japan (1990).
- * **Narottam, P., Bansal, P., Singh. Jacques. Lamon., Sung R., Choi.** «Processing and proprieties of advanced ceramics and composites»
- * **Shen, H.S.**, "Functionally Graded Materials - Nonlinear Analysis of Plates and Shells", (2009)
- * **Birman, V., Byrd, L.W.**, Modeling and analysis of functionally graded materials and structures. *ASME Applied Mechanics* (2007).
- * **Kieback, B., Neubrand, A., Riedel, H.**, « Processing techniques for functionally graded materials. *Materials.* » (2003)
- * **Liu, Shu**, Free vibration analysis of exponential functionally graded beams with a single delamination. *Compos. Part B* (2014)
- * **Suresh, Mortensen**, "Fundamentals of functionally graded materials,Ed", IOM Comm. Ltd., London, (1998)
- * **Yoshihisa, U.** perpectives of functionally grades materials manufactured by progressive lamination method of application, (2004)
- * **Sasaki, M., Wang, Y., Hirano, T., Hirai, T.**, Conception d'un matériau à gradient fonctionnel SiC/C et sa préparation par dépôt chimique en phase vapeur. *J Ceram SocJpn*, (1989)
- * **Timochenko, SP.**, Sur la correction pour le cisaillement de l'équation différentielle des vibrations transversales des barres prismatiques. *The London, Edinburgh and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, (1921)
- * **Akavci, SS., Tanrikulu, AH.**, Analyse des vibrations statiques et libres de plaques fonctionnellement graduées basée sur de nouvelles théories de déformation par cisaillement quasi-3D et 2D. *Compos B*, (2015)

- ***Shahsavari, D., Shahsavari, M., Li, L., Karami, B.,** Une nouvelle théorie hyperbolique quasi-3D pour la vibration libre des plaques FG avec des porosités reposant sur la fondation Winkler/Pasternak/Kerr. *Aerosp Sci Technol*, (2018)
- ***Zohra Zaoui F., Ouinas, D., Tounsi, A.,** Nouvelles théories de déformation de cisaillement 2D et quasi-3D pour la vibration libre de plaques fonctionnellement graduées sur des fondations élastiques. *Compos B Eng*, (2019)
- ***Shen, H-Sh., Wang, Zh-X.,** Analyse non linéaire de poutres FGM déformables par cisaillement reposant sur des fondations élastiques dans des environnements thermiques. *Int J Mech Sci*, (2014)
- ***Huang, Y., Zhang, M., Rong, H.,** Analyse de flambage des poutres à gradient fonctionnel axial et non uniformes basée sur la théorie de Timoshenko. *Acta Mech Solida Sin*, (2016)
- ***Arefi, M., Pourjamshidian, M., Ghorbanpour Arani, A., Rabczuk, T.,** Influence des contraintes flexoélectriques, à petite échelle, de surface et résiduelles sur la vibration non linéaire des nano-faisceaux sigmoïdes, exponentiels et de loi de puissance FG Timoshenko, *Journal of Low Frequency Bruit, vibration et active Control* (2019)
- ***Zenkou,r AM.,** Une théorie raffinée simple à quatre inconnues pour l'analyse de la flexion des plaques fonctionnellement graduées. *Appl Math Model*, (2013)
- ***Zharfi, H.,** Relaxation de fluage dans le disque rotatif FGM avec distribution axisymétrique non linéaire de l'hétérogénéité. *Theor Appl Mech Lett* (2019)
- ***Malikan, M., Tornabene, F., Dimitri, R.,** Théorie tridimensionnelle non locale de l'élasticité pour le comportement de flambage de nano plaques poreuses fonctionnellement graduées à l'aide d' intégrales de volume. *Mater Res Express*, (2018)
- ***Touratier, M.,** Une théorie standard efficace des plaques. *Int J Eng Sci* (1991)
- ***Mantari, J., Oktem, A., Soares, C.,** Une nouvelle théorie trigonométrique de déformation par cisaillement pour les plaques isotropes composites stratifiées et sandwich. *Int J Solids Struct*, (2012)
- ***Joshan, YS., Santapuri, S., Neeraj, Grover,** Analyse de plaques composites piézoélectriques stratifiées utilisant une théorie de plaque couplée hyperbolique inverse. *Appl M ath Model* (2020)
- ***Neves, AMA., Ferreira, AJM., Carrera, E., Roque, CMC., Cinefra, M., Jorge, RMN.,** Une théorie de déformation par cisaillement sinusoïdale quasi-3D pour l'analyse

des vibrations statiques et libres de plaques fonctionnellement graduées. Compos B, (2012)

* **Neves ,AMA., Ferreira AJM., Carrera, E., Roque, CMC., Cinefra, M., Jorge, RMN.,** Une théorie de déformation de cisaillement hyperbolique quasi-3D pour l'analyse des vibrations statiques et libres de plaques fonctionnellement graduées. Compos Structure, (2012)

* **Saragan, S., Singh, BN.,** Solution de forme fermée d'ordre supérieur pour l'analyse des composites stratifiés et des plaques sandwich basées sur de nouvelles théories de déformation par cisaillement. Compos Struct, (2016)

***Aydogdu, M.,** Une nouvelle théorie de déformation par cisaillement pour les plaques composites stratifiées. Compos Structure, (2009)

* **Soldatos, KP.,** Une théorie de déformation par cisaillement transverse pour des plaques monocliniques homogènes. ActaMech, (1992)

* **Karama, M., Afaq, KS., Mistou, S.,** Une nouvelle théorie pour les plaques composites laminées. Journal of Materials Design and Applications,(2009)

* **Thai, HT., Choi, DH.,** Amélioration de la théorie des plaques raffinée tenant compte de l'effet de l'éirement de l'épaisseur dans les plaques fonctionnellement graduées. Compos B, (2014)

* **Hebali, H., Tounsi, A., Houari, MSA., Bessaim, A., Bedia, EAA.,** Nouvelle théorie de déformation par cisaillement hyperbolique quasi-3D pour l'analyse des vibrations statiques et libres de plaques fonctionnellement graduées. JEng Mech , (2014)

* **Yang, J., Shen, HS.,** Caractéristiques de vibration et réponse transitoire de plaques fonctionnellement graduées déformables par cisaillement dans des environnements thermiques. J Sound Vib, (2002)

* **Reddy, JN., Chin, CD.,** Analyse thermomécanique de cylindres fonctionnellement gradués et assiettes. J Therm Stresses, (1998)

* **Koizumi M.** MGF au Japon. Compos B (1997)

* **Miyamoto Y, Kaysser WA, Rabin BH, Kawasaki A, Ford RG.** Matériaux à gradient fonctionnel :conception, traitement et applications, Springer, Springer Science & Business. Médias (2013)

* **Reddy JN.** Une théorie simple d'ordre supérieur pour les plaques composites stratifiées. J Appl Mech (1984)

- * **Akavci SS, Tanrikulu AH.** Analyse des vibrations statiques et libres de plaques fonctionnellement graduées basée sur de nouvelles théories de déformation par cisaillement quasi-3D et 2D. Compos B (2015)
- * **Zohra Zaoui F, Ouinas D, Tounsi A.** Nouvelles théories de déformation de cisaillement 2D et quasi-3D pour la vibration libre de plaques fonctionnellement graduées sur des fondations élastiques. Compos B Eng (2019)
- * **Kiani Y, Eslami M.** Analyse de flambement thermique d'un matériau à gradient fonctionnel poutres. Int J Mech Mater Des (2010)
- * **Wattanasakulpong N, Gangadhara Prusty B, Kelly DW.** Flambement thermique et vibration élastique de poutres fonctionnellement graduées déformables par cisaillement du troisième ordre. Int J Mech Sci (2011)
- * **Fallah A, Aghdam MM.** Analyse thermomécanique du flambement et des vibrations libres non linéaires de poutres fonctionnellement graduées sur fondation élastique non linéaire. Compos B (2012)
- * **Ma LS, Lee DW.** Solutions exactes pour les réponses statiques non linéaires d'une poutre FGM déformable par cisaillement sous un chargement thermique dans le plan. Eur J Mech A Solids (2012)
- * **Rahimi GH, Gazor MS, Hemmatnezhad M, Toorani H.** Sur le post flambement et les vibrations libres des poutres FG Timoshenko. Compos Struct (2013)
- * **Esfahani SE, Kiani Y, Eslami MR.** Analyse de stabilité thermique non linéaire de poutres FGM dépendant de la température supportées sur des fondations élastiques à durcissement non linéaire. Int J Mech Sci (2013)
- * **Viola E, Tornabene F, Fantuzzi N.** Théories générales de déformation par cisaillement d'ordre supérieur pour l'analyse des vibrations libres de coques et de panneaux stratifiés complètement à double courbure. Compos Structure (2013)
- * **Tornabene F, Viola E, Fantuzzi N.** Théorie générale d'une seule couche équivalente d'ordre supérieur pour les vibrations libres de coques et de panneaux composites stratifiés à double courbure. Compos Struct (2013)
- * **Vo ThP, Thai HT, Nguyen TK, Maheri A, Lee J.** Modèle d'éléments finis pour la vibration et le flambement de poutres sandwich fonctionnellement graduées basé sur une théorie raffinée de déformation par cisaillement. Eng Struct (2014)
- * **Tornabene F, Fantuzzi N, Viola E, Ferreira AJM.** Méthode de la fonction de base radiale appliquée aux coques et panneaux composites stratifiés à double courbure avec une formulation monocouche équivalente d'ordre supérieur général. Compos B (2013)

- * **Tornabene F, Fantuzzi N, Baccocchi M.** La méthode GDQ locale appliquée aux théories générales d'ordre supérieur des coques et panneaux composites stratifiés à double courbure: l'analyse des vibrations libres. *Compos Struct* (2014)
- * **Nguyen TK, Truong-Phong Nguyen T, Vo ThP, Thai HT.** Analyse des vibrations et du flambement de poutres sandwich fonctionnellement graduées par une nouvelle théorie de déformation par cisaillement d'ordre supérieur. *Compos B Eng* (2015)
- * **Tufeksi E, Eroglu U, Aydin S. Aya,** Solution exacte pour les problèmes statiques dans le plan des poutres circulaires constituées de matériaux à gradient fonctionnel, Conception basée sur la mécanique des structures et des machines An. *Journal international* (2016)
- * **Simsek M.** Flambement de poutres de Timoshenko composées d'un matériau à gradient fonctionnel bidimensionnel (2D-FGM) ayant des conditions aux limites différentes. *Compos Struct* (2016)
- * **Huang Y, Zhang M, Rong H.** Analyse de flambage des poutres à gradient fonctionnel axial et non uniformes basée sur la théorie de Timoshenko. *Acta Mech Solida Sin* (2016)
- * **Elle GL, Yuan FG, Ren YR.** Analyse du flambement thermique et post-flambage de poutres fonctionnellement graduées sur la base d'une théorie générale de déformation par cisaillement d'ordre supérieur. *Appl Math Model* (2017)
- * **Kahya V, Turan M.** Modèle d'éléments finis pour la vibration et le flambement de poutres fonctionnellement graduées basé sur la théorie de la déformation par cisaillement du premier ordre. *Compos B* (2017)
- * **Deng H, Dong Chen K, Cheng W, Zhao ShG.** Analyse des vibrations et du flambement d'un système de poutres Timoshenko à double fonctionnalité sur une fondation élastique Winkler-Pasternak. *Structure de composition* (2017)
- * **Sina SA, Nanazi HM, Haddadpour H.** Une méthode analytique pour l'analyse des vibrations libres des poutres fonctionnellement graduées. *Mater Des* (2009)
- * **Arefi M, Pourjamshidian M, Ghorbanpour Arani A, Rabczuk T.** Influence des contraintes flexo électriques, à petite échelle, de surface et résiduelles sur la vibration non linéaire des nano-faisceaux sigmoïdes, exponentiels et de loi de puissance FG Timoshenko, *Journal of Low Frequency Bruit, vibration et actif. Contrôle* (2019)
- * **Dastjerdi Sh, A kgöz B.** Nouvelles analyses statiques et dynamiques de plaques macro et nano FGM utilisant une élasticité tridimensionnelle exacte dans un environnement thermique. *Compos Struct* (2018)
- * **Naebe M, Shirvanimoghaddam K.** Matériaux classés de manière fonctionnelle examen de la fabrication et des propriétés. *Appl Mater Today* (2016)

* Czechowski L, Kořakowski Z. Analyse de la plaque graduée à pas de fonctionnalité variable sous compression dans le plan. Matériaux (2019)

Annexe (A):

$$K_{11} = A_{11} \int_0^L \left(\frac{d^3 X_m}{dx^3} \frac{dX_m}{dx} \right) dx$$

$$K_{12} = -A_{12} \int_0^L \left(\frac{d^3 X_m}{dx^3} X_m \right) dx$$

$$K_{13} = -A_{33} \int_0^L \left(\frac{d^3 X_m}{dx^3} X_m \right) dx$$

$$K_{14} = D_{33} \int_0^L \left(\frac{dX_m}{dx} X_m \right) dx$$

$$K_{21} = A_{12} \int_0^L \left(\frac{d^4 X_m}{dx^4} \frac{dX_m}{dx} \right) dx$$

$$K_{22} = \int_0^L \left(-D_{11} \frac{d^4 X_m}{dx^4} X_m + N_{xx}^0 \frac{d^2 X_m}{dx^2} X_m \right) dx$$

$$K_{23} = \int_0^L \left(-D_{12} \frac{d^4 X_m}{dx^4} X_m + N_{xx}^0 \frac{d^2 X_m}{dx^2} X_m \right) dx$$

$$K_{24} = D_{44} \int_0^L \left(\frac{d^2 X_m}{dx^2} X_m \right) dx$$

$$K_{31} = A_{33} \int_0^L \left(\frac{d^4 X_m}{dx^4} \frac{dX_m}{dx} \right) dx$$

$$K_{32} = \int_0^L \left(-D_{12} \frac{d^4 X_m}{dx^4} X_m + N_{xx}^0 \frac{d^2 X_m}{dx^2} X_m \right) dx$$

$$K_{33} = \int_0^L \left[-D_{22} \frac{d^4 X_m}{dx^4} X_m + (A_{44} + N_{xx}^0) \frac{d^2 X_m}{dx^2} X_m \right] dx$$

$$K_{34} = \int_0^L \left[(A_{44} + D_{55}) \frac{d^2 X_m}{dx^2} X_m \right] dx$$

$$K_{41} = -A_{66} \int_0^L \left(\frac{d^2 X_m}{dx^2} \frac{dX_m}{dx} \right) dx$$

$$K_{42} = A_{77} \int_0^L \left(\frac{d^2 X_m}{dx^2} X_m \right) dx$$

$$K_{43} = \int_0^L \left[(A_{44} + A_{88}) \frac{d^2 X_m}{dx^2} X_m \right] dx$$

$$K_{44} = \int_0^L \left[A_{44} \frac{d^2 X_m}{dx^2} X_m - A_{55} X_m^2 \right] dx$$