

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de L'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Ibn-Khaldoun - Tiaret
Faculté Des Sciences Appliquées
Département De Génie Mécanique

THÈSE

**En vue de l'obtention du
Diplôme de Doctorat L.M.D
Spécialité : Génie Mécanique
Option : Modélisation des matériaux et des structures**

THÈME

**Analyse numérique de la défaillance des composites stratifiés en utilisant la
modélisation multi-échelle.**

**Présentée par :
Madame. YAMANI Sarra.**

Soutenu publiquement le

Devant le jury composé de :

Année universitaire 2017/ 2018

Dédicaces

A mes parents, pour leurs prières et sacrifices.

A ma fille Maria Khoudjia, la prunelle de mes yeux.

A mon mari Amine, pour son aide et soutien.

A mes chers frères takieddine, abdessamed, Abderrahman, Taha.

A ma belle mère et mon père Debbah Rachid.

A mes belles sœurs Houda et Souad.

A mes beaux frères Ilyes et Karim.

A mes amis Amel, Souad, Asmaa, Amina, Benadda, Benhenni, Aboubekr, Oussama.

A tous ceux qui me sont cher.

Remerciements :

En premier lieu et avant tout, je remercie Dieu le tout puissant qui m'a donné la volonté et le courage pour achever ce modeste travail.

Je remercie d'abord Monsieur Ahmed SAHLI, mon directeur de thèse, pour son aide, sa disponibilité et son engagement pour l'accomplissement de ce travail de recherche.

Je tiens à remercier, l'équipe de Laboratoire de recherche des technologies industrielles, Université Ibn Khaldoun de Tiaret.

J'adresse également mes remerciements à l'équipe de laboratoire de Mécanique Appliquée, Université des Sciences et de la Technologie d'Oran (USTO) qui ont permis de Réaliser ce travail.

Toute ma gratitude aux dames et messieurs qui ont accepté de participer au jury de cette thèse, leurs contributions le rendra meilleur.

J'adresse toute ma reconnaissance à mes amis ; ils m'ont motivé lors des moments difficiles qui ont égrené ce travail, leurs appuis et encouragements m'ont aidé à avancer.

Mes derniers remerciements, et non les moindres, vont à ma famille, grâce à eux ce travail trouve tout son sens.

الحمد لله

ملخص

تتناول هذه الرسالة التحليل العددي للفشل في شرائح من مواد مركبة أحادية الاتجاه على أساس النمذجة متعددة المقاييس للمواد المركبة .

يفترض الأسلوب في مقياسين ، حيث يتم حل المشكلات المرنة لوصف السلوك الميكانيكي للصفائح. في المقياس الماكروسكوبي (مقياس عالمي) ، ينبغي استخدام طريقة العناصر الحدودية (BEM) لمرونة الطائفة المتباينة لتقييم حالات الإجهاد والتوتر في مجال الطية. تمثل هذه الحقول الموتر العياني للهيكل ، والذي يستخدم لتقييم الظروف الحدودية للمقياس الصغير (المقياس المحلي). في هذا المقياس ، أي ما يعادل نقطة مادية للهيكل (التوطين التقني) ، يتم أخذ عنصر الحجم التمثيلي (EVR) لإرضاء السلوك التأسيسي العام.

الحل لمشكلة مرونة عنصر الحجم التمثيلي ، يتم تشكيلها من قبل مصفوفة متناحرة ، وهي ألياف متناحرة بشكل عكسي ، وتطبيق نظرية الحقول المتوسطة ، يجب أن تتحقق من قبل طريقة العنصر الحدودي ، من خلال صياغة متعددة المناطق.

تقييم الفشل في المكونات الدقيقة يكون باستخدام معايير فشل تساي-هيل للمعايير المصفوفة والحد الأقصى للتشوه للألياف.

نتائج الأمثلة العددية تعرض و تناقش وتُقارن بالنتائج العددية التي تم الحصول عليها بمعيار فشل اخر LARC03 ، والذي لا يجري التحليل إلا على المقياس الهيكلي.

Abstract

This thesis concerns the numerical analysis of failure in unidirectional laminates of composite materials based on multi-scale modeling of heterogeneous materials.

The approach assumes the material in two scales, in which elastic problems are solved to describe the mechanical behavior of the laminate. In the macroscopic scale (global scale), the boundary element method (BEM) for anisotropic plane elasticity should be used to evaluate stress and strain fields in the fold domain. These fields represent the macroscopic tensor of the structure, which is used to assess the boundary conditions of the micro-scale (local scale). In this scale, equivalent to a material point of the structure (technical localization), a representative volume element (EVR) is taken to satisfy the overall constitutive behavior.

The solution to the problem of elastic EVR, is constituted by an isotropic matrix, a fiber transversely isotropic, and the application of the theory of the average fields, must be realized by the BEM through the multi-region formulation.

The assessment of failure in the microcomponents will be made using Tsai-Hill failure criteria for the matrix and maximum deformation criteria for the fiber.

The results for the numerical examples will be presented, discussed and compared with the numerical results obtained by the failure criterion LARC03, which performs the analysis only on the structural scale.

Résumé

Cette thèse concerne l'analyse numérique de la défaillance dans les stratifiés unidirectionnels des matériaux composites basée sur la modélisation multi-échelle des matériaux hétérogènes.

L'approche suppose le matériau en deux échelles, dans lesquelles les problèmes élastiques sont résolus pour décrire le comportement mécanique du stratifié. Dans l'échelle macroscopique (échelle globale), la méthode des éléments de frontière (BEM) pour l'élasticité plane anisotrope doit être utilisée pour évaluer les champs de contrainte et de déformation dans le domaine du pli. Ces champs représentent le tenseur macroscopique de la structure, qui est utilisé pour évaluer les conditions aux limites de la micro-échelle (échelle locale). Dans cette échelle, équivalente à un point matériel de la structure (localisation technique), un élément de volume représentatif (EVR) est pris pour satisfaire le comportement global constitutif.

La solution du problème de l'EVR élastique, est constituée par une matrice isotrope, une fibre transversalement isotrope, et l'application de la théorie des champs moyens, doivent être réalisées par la BEM à travers la formulation multi-région.

L'évaluation de la défaillance dans les micros constituants sera faite en utilisant les critères de défaillance de Tsai-Hill pour la matrice et le critère de déformation maximale pour la fibre.

Les résultats pour les exemples numériques seront présentés, discutés et comparés avec les résultats numériques obtenus par le critère de défaillance LARC03, qui effectue l'analyse seulement sur l'échelle structurelle.

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION GENERALE.....	1
Chapitre 01	
Recherche Bibliographique	
1.1 Introduction	5
1.2 Matériaux composites.....	5
1.2.1 Définition et caractéristiques	5
1.2.2 Applications.....	6
1.2.3 Classification et types	7
1.2.4 Stratifiés composites.....	9
1.3 Modélisation multi-échelles de matériaux composites	11
Chapitre 02	
Elasticité linéaire et formulation des stratifiés en composite	
2.1 Introduction	14
2.2 Relations constitutives.....	14
2.2.1 Fondements de l'élasticité linéaire	14
2.2.2 Matériaux isotropes	17
2.2.3 Matériaux orthotropes.....	19
2.2.4 Matériaux transversalement isotropes	21
2.2.5 Matériaux anisotropes.....	22
2.3 Formulation des stratifiés en composite	23
2.3.1 Comportement élastique du pli en matériau composite.....	23
Chapitre 03	
Technique multi-échelle pour la défaillance	
3.1 Introduction	37
3.2 Modélisation Multi-échelles.....	37
3.2.1 Analyse des échelles et Technique Homogénéisation / Localisation	37
3.2.2 Approches macro mécanique et micromécanique	38
3.2.3 Représentation de l'élément de volume.....	39
3.2.4 Théorèmes moyennes et conditions aux limites	41
3.2.5 Condition de l'énergie de Hill	44
3.3 Critères de défaillance	46
3.3.1 Introduction.....	46

3.3.2 Critère de Tsai-Hill critère – Défaillance de la matrice.....	47
3.3.3 Critère de Déformation maximale – Défaillance de la fibre.....	48
3.3.4 Critère LaRC03 pour l'analyse structurale de stratifié.....	48

Chapitre 04

Modélisation et mise en œuvre numérique

4.1 Introduction	50
4.2 Méthode des éléments de frontière (BEM)	50
4.2.1 Théorème de Betti et Identité de Somigliana	50
4.2.2 Discrétisation	52
4.2.3 Système équation	55
4.2.4 Équations intégrales Singulières.....	57
4.3 Méthode des éléments de frontière à l'échelle macro	58
4.3.1 Introduction.....	58
4.3.2 Elasticité pour matériaux anisotropes	59
4.3.3 Solutions fondamentales anisotropes.....	64
4.3.4 Intégration numérique.....	66
4.3.5 Calcul des déformations et contraintes dans les points internes.....	67
4.4 Méthode des éléments de frontière pour Micro-échelle.....	67
4.4.1 Introduction.....	67
4.4.2 Solutions fondamentales isotropes	68
4.4.3 Méthode de sous-régions	70
4.4.4 Intégration numérique - Transformation de Telles.....	72
4.4.5 Calcul des contraintes et déformations à la frontière.....	73
4.5 Computationnel code multi-échelle.....	75

Chapitre 05

Résultat numérique et discussion

A - Modélisation multi-échelle de la défaillance	80
5.1 Introduction	80
5.2 Analyse du problème à l'échelle macroscopique.....	80
5.2.1 Modèle macroscopique	80
5.2.2 Calcul des tenseurs de déformations macroscopiques	81
5.3 Analyse du problème dans l'échelle micro	84
5.3.1 Détermination de la géométrie et de la longueur de l'EVR	84
5.3.2 Évaluation de la défaillance dans l'EVR.....	93

5.4 Conclusion A.....	98
B - Analyse des défaillances des plaques stratifiées	99
5.5 Critères de dégradation d'un pli	99
5.6. Résultats	104
5.6.1 L'endommagement de la plaque : résultats expérimentaux	107
5.6.2 Résultats des solutions numériques	108
5.6.3 Correction des résultats des solutions numériques	114
5.7 Conclusion B	116
Conclusion générale	117

Références bibliographiques

Liste des tableaux

Tableau 5.1: Propriétés mécaniques des stratifiés unidirectionnels analysé.....	81
Tableau 5.2: 4 Propriétés mécaniques des fibres analysées.....	85
Tableau 5.3: Propriétés mécaniques des quatre matrices analysées.....	85
Tableau 5.4: pourcentage d'erreurs relatives à la composante de rigidité homogénéisée dans la direction de x	89
Tableau 5.5: Pourcentage d'erreurs relatives pour la composante de rigidité homogénéisée dans la direction y	92
Tableau 5.6: longueurs moyennes trouvées par analyse à plusieurs échelles.....	93
Tableau 5.7: Valeurs maximales et minimales des indices de défaillance au voisinage de l'alésage du stratifié pour les deux analyses.....	97
Tableau 5.8 : propriétés dégradées selon le critère de dégradation D01.....	100
Tableau 5.9 : propriétés dégradées par le mode de rupture par cisaillement dans le plan 12 selon le critère de dégradation D02.....	100
Tableau 5.10 : propriétés dégradées par le mode de défaillance pour la traction dans la direction 1 selon le critère de dégradation D03.....	100
Tableau 5.11 : propriétés dégradées par les modes de défaillance pour la traction et la compression dans la direction 1 selon le critère de dégradation D04.....	101
Tableau 5.12 : Facteurs de correction de h_m	106
Tableau 5.13 : Résistance Valeurs seuil d'endommagement des plaques.....	106
Les résultats expérimentaux des impacts qui ne causent aucun endommagement sur les plaques [0.90] ₁₀ et [0.90] ₃₀ sont présentés aux tableaux 5.14 et 5.15 respectivement.....	106
Tableau 5.14 : mesures expérimentales de V_i , E_i , F_{max} , T_{imp} et $\Delta t_F = 0$ dont les impacts n'ont causé aucun endommagement à la plaque [0.90] ₁₀	106
Tableau 5.15 : mesures expérimentales de V_i , E_i , F_{max} , T_{imp} et $\Delta t_F = 0$ dont les impacts n'ont causé aucun endommagement à la plaque [0.90] ₃₀	106

Liste des figures

Figure 1.1: Constituants d'un matériau composite.....	6
Figure 1.2: Utilisation de matériaux composites en poids dans les avions commerciaux	7
Figure 1.3: Classification du matériau composite [30]	8
Figure 1.4: Lampe unidirectionnelle et ses axes de coordonnées principaux.....	10
Figure 1.5: Stratifié multidirectionnel et son système de coordonnées de référence.	10
Figure 2.1: diagramme de déformation d'un matériau isotrope et anisotrope.....	15
Figure 2.2: corps en deux dimensions (Ω) à l'équilibre et ses conditions aux limites.....	16
Figure 2.3: Comportement mécanique d'un matériau isotrope.....	18
Figure 2.4: Comportement mécanique d'un matériau orthotrope.....	20
Figure 2.5: Comportement mécanique d'un matériau anisotrope.....	22
Figure 2.6: Pli uni directionnel et de ses principaux axes de coordonnées.....	24
Figure 2.7: Système de coordonnées du pli (1 et 2) et du stratifié (x et y).....	25
Figure 2.8: Flexion d'une ligne dans le plan x - z	27
Figure 2.9 : Exemple de variation de la contrainte et de la déformation dans un stratifié à trois couches.....	30
Figure 2.10: Sens positif des forces et des moments résultants.....	31
Figure 2.11: Géométrie d'un stratifié à plusieurs couches.....	31
Figure 3.1 : Illustration des niveaux des échelles dans une analyse multi-échelle du composite.....	38
Figure 3.2: macrostructure continue et microstructure hétérogène associé à un point matériel macroscopique.....	40
Figure 3.3: modes de défaillance des matériaux composites.....	46
Figure 4.1: contour Discrétisation en éléments quadratiques discontinus.....	53
Figure 4.2: Point source situé sur la frontière, entouré d'une zone semi-circulaire.....	57
Figure 4.3: Structure composée de trois sous-régions soumises à des charges et des liaisons.....	70
Figure 4.4: Les contraintes à la frontière.....	74
Figure 4.5: Organigramme de calcul programme multi-échelles.	77
Figure 5.1: stratifié unidirectionnel avec alésage central soumis à un déplacement positif, θ étant l'angle d'orientation des fibres.....	80
Figure 5.2: discrétisation du stratifié et des conditions aux limites.....	82
Figure 5.3: Déformation de points internes dans la direction de x	82
Figure 5.4: Déformation de points internes dans la direction de y	83

Figure 5.5: Déformation de points internes dans la direction de xy	83
Figure 5.6: géométrie EVR pour un stratifié ayant l'orientation des fibres à $\theta = 0$	86
Figure 5.7: Combinaisons des longueurs des EVRS avec des longueurs des rayons des fibres des EVRS.....	86
Figure 5.8: technique de localisation; Première combinaison de longueur pour EVR 1 sous déplacement linéaire en x	87
Figure 5.9: Composants homogénéisés suivant la direction x en fonction de la longueur EVR 1, Pour chaque rayon de la longueur des fibres.....	88
Figure 5.10: Les valeurs des écarts types de l'EVR 1 pour un déplacement linéaire en x	89
Figure 5.11: technique de localisation; Première combinaison de longueur pour EVR 1 sous déplacement linéaire en y	90
Figure 5.12: Composants homogénéisés dans la direction y en fonction des longueurs de l'EVR 1, pour chaque longueur de rayon de la fibre.....	91
Figure 5.13: Valeurs des écarts types de l'EVR 1, pour le déplacement linéaire en y	92
Figure 5.14: EVR 1 déformé en raison du déplacement linéaire en x et y	93
Figure 5.15: Modes de défaillance des EVRs.....	94
Figure 5.16: modes de défaillance multi-échelles dans le stratifié.....	95
Figure 5.17: modes de défaillance pour le critère LARC03 le stratifié obtenu par ABAQUS.....	96
Figure 5.18: Valeurs de l'indice de défaillance pour les deux analyses.....	96
Figure 5.19: Mode de défaillance multi -échelle à proximité du trou Central.....	97
Figure 5.20: mode de défaillance multi- échelle pour les critères LaRC03 à proximité Du trou central obtenu par ABAQUS.....	97
Figure 5.21: Critère de dégradation de la lamelle D02.6.4. Modèles par éléments finis des tests d'impact.....	101
Figure 5.22 : zones d'endommagement expérimental sur les plaques.....	107
Figure 5.23 : Extensions des endommagements expérimentaux (h_m) sur les plaques.....	108
Figure 5.24 : simulation numérique de la zone d'endommagement avec les différents modèles de défaillance et d'endommagement de la plaque $[0.90]_{10}$	109
Figure 5.25 : simulation numérique de h_m avec les différents modèles de défaillance et d'endommagement de la plaque $[0.90]_{10}$	110
Figure 5.26 : simulation numérique de la zone endommagée avec les différents modèles Et des endommagements à la plaque $[0.90]_{20}$	111

Figure 5.27 : simulation numérique de h_m avec les différents modèles de défaillance et d'endommagement de la plaque $[0.90]_{20}$	111
Figure 5.28 : simulation numérique de la zone endommagée avec les différents modèles de défaillance et d'endommagement à la plaque $[0.90]_{30}$	112
Figure 5.29 : simulation numérique de h_m avec les différents modèles de défaillance et de d'endommagement de la plaque $[0.90]_{30}$	112
Figure 5.30 : La méthodologie A_d avec correction des résultats sur la plaque. $[0.90]_{10}$	114
Figure 5.31 : La méthodologie A_d avec correction des résultats sur la plaque $[0.90]_{20}$	115
Figure 5.32 : La méthodologie A_d avec correction des résultats sur la plaque $[0.90]_{30}$	115
Figure 5.33 : Comparaison entre A_d expérimentale et A_d corrigée obtenue numériquement avec critère de défaillance de Hashin Modifié et critères D02 endommagement.	116

INTRODUCTION GENERALE

Les matériaux composites sont couramment utilisés dans la pratique de l'ingénierie. Ils permettent de tirer parti des différentes propriétés des matériaux constitutifs, de la structure géométrique et de l'interaction entre les constituants pour obtenir un comportement sur mesure en tant que résultat final. De tels matériaux composites peuvent présenter à la fois une rigidité élevée et un amortissement élevé, une résistance et une ténacité améliorée, une conductivité thermique et une permittivité électrique améliorée, une perméabilité améliorée, des propriétés physiques inhabituelles telles qu'un coefficient de Poisson négatif, des inclusions de rigidité négative, etc.

L'utilisation de matériaux composites dans les applications techniques, principalement dans les domaines de l'aéronautique, de l'automobile et de la marine, a été mise en évidence au cours des dernières décennies. Grâce aux nombreux avantages obtenus grâce à la combinaison de ses constituants microscopiques, dont l'objectif est d'optimiser leurs propriétés mécaniques, les rendant supérieurs aux mêmes que lorsque les constituants sont considérés isolément. Des propriétés optimisées telles que la légèreté, la résistance et la flexibilité rendent le matériau indispensable pour le type particulier d'application structurelle. Pour cette raison et grâce au développement rapide des ordinateurs, les techniques les plus avancées, telles que l'analyse multi échelle du comportement mécanique des matériaux composites, gagnent du terrain dans la communauté scientifique, représentée principalement par des travaux d'auteurs tels que [1,2, 3, 4, 5].

Pour la plupart des analyses de structures composites, on utilise des propriétés matérielles efficaces ou homogénéisées, au lieu de tenir compte des propriétés individuelles des composants et des dispositions géométriques. Ces propriétés efficaces sont généralement difficiles ou coûteuses à mesurer et, au stade de la conception, la composition peut varier considérablement, rendant les mesures fréquentes prohibitives. Par conséquent, beaucoup d'efforts ont été consacrés au développement de modèles mathématiques et numériques permettant de déduire les propriétés matérielles homogénéisées directement de celles des constituants et de leur microstructure. De nombreux problèmes d'ingénierie sont résolus à l'échelle macroscopique avec de telles propriétés homogénéisées. Cependant, parfois, de telles analyses ne sont pas suffisamment précises. En principe, il serait possible de se référer directement à l'échelle microscopique, mais de tels modèles microscopiques sont souvent beaucoup trop complexes pour l'analyse d'une grande structure. En outre, les données obtenues seraient redondantes et des procédures compliquées seraient nécessaires pour extraire des informations d'intérêt.

Un moyen de sortir est ce que l'on appelle communément la modélisation multi-échelles, où les modèles macroscopiques et microscopiques sont couplés pour tirer parti de l'efficacité des modèles macroscopiques et de la précision des modèles microscopiques. Le but de cette modélisation multi-échelle est de concevoir des méthodes de calcul macroscopique-microscopique combinées plus efficaces que la résolution du modèle microscopique complet et en même temps de fournir l'information dont nous avons besoin à la précision désirée [6].

Dans le cas de composites à comportement constitutif linéaire, si la microstructure est suffisamment régulière pour être considérée comme périodique, les propriétés effectives peuvent être déterminées en termes de problèmes de cellules unitaires avec des conditions aux limites appropriées. Si la microstructure n'est pas régulière, les propriétés effectives ne peuvent pas être déterminées exactement. Le but consiste donc à définir la portée du comportement effectif possible en termes de bornes, qui dépendent de certains paramètres caractérisant la microstructure, comme par exemple le rapport volumique des inclusions dans une matrice. A cette fin, de nombreuses méthodes d'homogénéisation ont été développées. Nous mentionnons les études pionnières de Voigt [7] et Reuss [8], qui ont formulé des limites rigoureuses pour les modules efficaces des composites à fraction volumique prescrite. Quelques décennies plus tard, Hashin et Shtrikman [9-10] ont présenté une extension de la méthode basée sur des formulations variationnelles. Si la microstructure est composée d'une matrice et d'inclusions sphériques ou sphéroïdales, le comportement effectif du composite peut être obtenu au moyen de la méthode d'auto-cohérence [11, 12, 13, 14, 15].

Si les matériaux composites ont un comportement constitutif non linéaire, pour des microstructures périodiques, les propriétés effectives peuvent toujours être obtenues en termes de problèmes de cellules unitaires avec des conditions aux limites appropriées. Pour les composites à microstructures aléatoires, les premières bornes sont obtenues par Bishop et Hill [16, 17] pour des polycristaux rigides parfaitement plastiques. Certaines extensions de la méthode auto-cohérente sont également disponibles dans la littérature, par exemple dans Hill [18], Hutchinson [19] et Berveiller et Zaoui [20].

Dans le cadre des limites non linéaires, nous mentionnons également les travaux de Willis et Talbot [21, 22] qui fournissent des extensions des principes variationnels de Hashin-Shtrikman pour les composites non linéaires. Leur travail est suivi par l'introduction de plusieurs nouveaux principes variationnels utilisant des «composites de comparaison linéaire» choisis de façon appropriée, qui permettent de déterminer Hashin-Shtrikman et des bornes plus générales et des estimations directement à partir des estimations correspondantes pour les composites linéaires. Il s'agit des

principes variationnels de Ponte Castañeda [23, 24] et Talbot et Willis [25] pour les classes générales de composites non linéaires, de Suquet [26] pour les composites de loi de puissance et d'Olson [27] pour les composites parfaitement plastiques.

Par conséquent, l'approche multi échelle des matériaux composites consiste à simuler leur comportement à travers de multiples échelles de temps et / ou de longueur; de ce fait, générer des résultats précis, car il capture les phénomènes physiques contenus dans des échelles plus petites, fournit également un temps de calcul de sauvegarde par rapport aux modèles qui représentent uniquement toutes les échelles [1].

Ainsi, pour relier les résultats intrinsèques à chaque échelle, on utilise les techniques d'homogénéisation qui fournissent les propriétés ou les réponses d'une structure macroscopique, compte tenu des propriétés ou des réponses des constituants de la structure, microscopiques ou inversement, qui fournissent les propriétés ou réponses des constituants, compte tenu des propriétés ou des réponses de la structure [28].

La mécanique du continuum est basée sur le concept d'un continuum homogène, qui peut être subdivisé à plusieurs reprises en sous-volumes infinitésimaux, dont chacun conserve les propriétés du matériau en vrac. Cependant, à une certaine échelle, tous les matériaux réels sont hétérogènes. Le but de la micromécanique est de rendre compte explicitement d'une microstructure hétérogène des matériaux tout en permettant de la traiter comme un continu efficace à une échelle de longueur supérieure (par exemple, à l'intérieur d'une structure). Pour tenir compte de cette microstructure, la micromécanique s'appuie soit sur un élément de volume représentatif (EVR), soit une cellule unitaire, dans le cas de matériaux à microstructure périodique [28]. Un EVR est une représentation statistique des propriétés du matériau, qui devrait contenir suffisamment d'informations à l'échelle microscopique et devrait être suffisamment plus petit que les dimensions structurelles macroscopiques.

Dans la micromécanique du continuum, chaque point matériel est considéré comme un volume fini d'un matériau homogène qui a des dimensions structurales nulles du point de vue macroscopique mais qui représente un volume d'une dimension microscopique finie avec une certaine microstructure. Pour une microstructure non périodique, l'EVR est défini comme un volume contenant un très grand nombre d'éléments à l'échelle microscopique. Cette définition n'est valable que dans le cas d'un matériau ergodique, c'est-à-dire que l'hypothèse ergodique implique que le matériau hétérogène est supposé statistiquement homogène. Ce fait implique également que des éléments de volume suffisamment grands sélectionnés à des positions aléatoires dans l'échantillon du matériau considéré

ont des agencements de composants statistiquement équivalents et contiennent les mêmes propriétés de matériau moyennées. De telles propriétés matérielles sont appelées les propriétés matérielles efficaces du matériau inhomogène. Par conséquent, le volume dans la procédure d'homogénéisation / localisation doit être choisi pour être un EVR approprié, avec la taille suffisante pour contenir toutes les informations nécessaires pour décrire le comportement du composite. Ainsi, un tel choix détermine en grande partie l'exactitude du modèle d'un matériau hétérogène [2].

Objectifs

Ce travail vise à développer une analyse de défaillance numérique dans les stratifiés unidirectionnels, basée sur une modélisation multi-échelles des matériaux hétérogènes, et en utilisant les critères de défaillance, Tsai-Hill et de la déformation maximale, pour détecter toute défaillance de la matrice et de la fibre, respectivement. Pour cela, les étapes suivantes ont été effectuées:

- Revue bibliographique des matériaux composites, ainsi qu'une brève recherche sur la modélisation multi échelle dans les matériaux composites;
- Etude des relations constitutives pour l'élasticité linéaire et pour les stratifiés de matériaux composites;
- Etude des approches et des définitions utilisées dans la modélisation multi échelle des matériaux composites;
- Etude de la formulation de la théorie du critère d'échec de Tsai-Hill et le critère de la déformation maximale;
- Formulation numérique de la modélisation multi échelle utilisant la formulation BEM: BEM pour l'élasticité anisotrope dans la formulation macroscopique et sous-région BEM à l'échelle microscopique;
- Implémentation informatique de la BEM et des approches multi-échelles, pour effectuer des analyses de défauts sur des stratifiés composites;
- Discussion des résultats obtenus à partir de l'analyse multi échelle et de la défaillance et comparaison avec les résultats obtenus par d'autres analyses.

CHAPITRE 01
RECHERCHE BIBLIOGRAPHIQUE

Chapitre 01

Recherche Bibliographique.

1.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous présentons un résumé de la revue bibliographique des sujets qui constituent le noyau principal de ce travail et il a été divisé en deux thèmes: les matériaux composites, basés sur les révisions faites par [28-31], Modélisation multi échelle des matériaux composites, qui met en évidence une brève synthèse des approches multi-échelles développées par certains auteurs.

1.2 Matériaux composites

1.2.1 Définition et caractéristiques

Les matériaux composites sont des systèmes issus de la combinaison de deux ou plusieurs matériaux, appelés composants d'un composite (Figure 1.1). L'objectif structurel principal de la projection de ces matériaux est de s'assurer que leurs propriétés mécaniques sont supérieures à celles de leurs constituants isolés. Dans de nombreux cas, en particulier pour les matériaux composites utilisés en génie structurel, l'agencement géométrique est constitué de deux phases, l'une étant la moins résistante, continue et servant à maintenir l'autre composant, communément appelé matrice, la deuxième phase du matériau, souvent appelé inclusion ou renforcement, qui à son tour est plus rigide, résistant et peut être continu ou discontinu, mais est généralement discontinu dans le matériau. Mais il y a aussi des cas d'apparition d'une troisième phase, appelée interphase, présente entre la matrice et la fibre, et qui provient des interactions chimiques ou d'autres effets de traitement du matériau composite. Les propriétés d'un matériau composite dépendent des propriétés des matériaux constitutifs, de l'agencement de la géométrie et de la manière dont ses phases sont réparties et interconnectées. Ainsi, l'un des paramètres qui permet à l'ingénieur d'optimiser le composant pour une application spécifique donnée est la fraction volumétrique de la fibre, à partir de sa concentration dans le matériau.

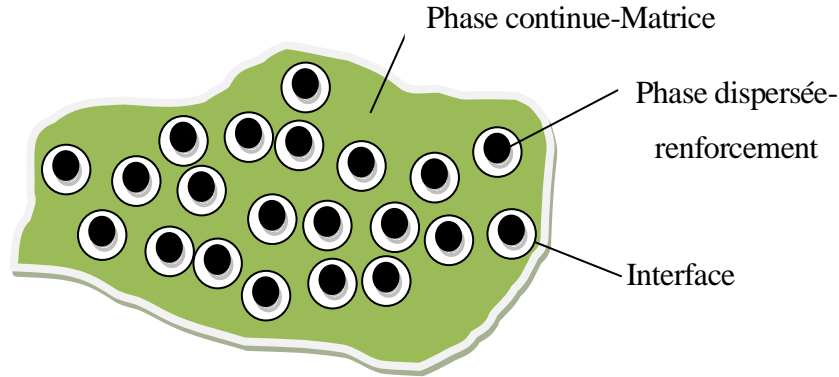


Figure 1.1: Constituants d'un matériau composite.

Les phases du système composite ont des fonctions différentes selon le type et l'application du matériau composite. Dans le cas de la performance moyenne de grandes quantités de matériaux composites, le renforcement, généralement sous forme de fibres courtes ou de particules, apporte une certaine rigidité, mais ne renforce que localement le matériau. La matrice, d'autre part, est le constituant principal du porteur de charge qui régule les propriétés mécaniques du matériau. Dans le cas de matériaux composites structuraux à haute performance, le renforcement continu des fibres est généralement la colonne vertébrale du matériau qui détermine sa rigidité et sa résistance vis-à-vis des fibres. La matrice assure la protection et le support des fibres et le transfert de tension local d'une fibre à l'autre. L'interphase, bien que de petite taille, peut jouer un rôle important dans le contrôle des mécanismes de défaillance, de la résistance au cisaillement et du comportement global de contrainte-déformation du matériau.

1.2.2 Applications

En raison des avantages structurels obtenus par les matériaux composites, tels que la rigidité élevée, la résistance mécanique élevée et la faible densité, leurs applications ont considérablement augmenté dans plusieurs secteurs industriels. Parmi ceux-ci, il convient de mentionner les industries aéronautique, automobile, navale, énergétique, biomédicale et sportive. Parmi ces secteurs, ce qui a le plus profité des propriétés attractives (gain de poids) des composites, c'est l'industrie aéronautique, qui traduit directement cet avantage dans la réduction des coûts. L'avion commercial récemment commercialisé est le Boeing 787, dont plus de 50% sont des matériaux composites (figure 1.2). La figure 1.2 illustre également l'augmentation significative de l'utilisation des composites au cours de la dernière moitié du

siècle dernier. En plus des avions commerciaux, les matériaux composites constituent également de nombreux avions militaires. Avant le milieu des années 1990, les composites étaient principalement utilisés dans les structures secondaires (c.-à-d. Celles qui ne causent pas de danger immédiat en cas de défaillance). Cependant, avec le développement de l'Airbus A380, du Boeing 787 et du Lockheed Martin F-22, les composites sont aujourd'hui largement utilisés dans les structures primaires telles que les ailes et les composants du fuselage.

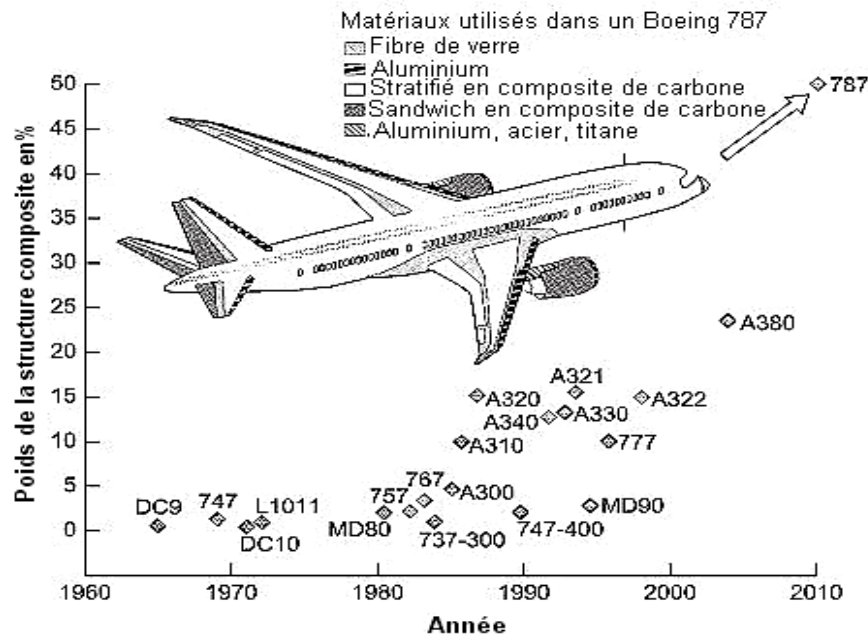


Figure 1.2: Utilisation de matériaux composites en poids dans les avions commerciaux [28].

En plus des avantages structuraux obtenus par les composites, il convient de souligner les caractéristiques anisotropes et hétérogènes des composites qui, bien que rendant plus complexe la modélisation de leur comportement mécanique, permettent un ajustement de la conception matérielle, en fournissant des propriétés adéquates pour répondre à une exigence d'application spécifique.

1.2.3 Classification et types

Comme mentionné précédemment, les matériaux constitutifs d'un composite influencent directement ses propriétés, ainsi que le type, la disposition géométrique et l'orientation de la fibre. Par conséquent, les matériaux composites sont divisés en trois groupes (figure 1.3). Composites particuliers: se composent de particules de différentes longueurs et formes dispersées aléatoirement dans la matrice.

En raison du caractère aléatoire de la distribution des particules, ce type de composite peut être considéré comme presque homogène du point de vue macro mécanique. Les particules composites peuvent être constituées de particules non métalliques dans une matrice non métallique (béton, mica renforcé de verre, des polymères fragiles renforcés par des particules de caoutchouc), les particules de métal de matrice non métallique (particules d'aluminium en caoutchouc de polyuréthane utilisés dans propergol), les particules métalliques dans des matrices métalliques (particules d'alliage de cuivre du plomb pour améliorer l'usinabilité) et des particules non métalliques dans des matrices métalliques (particules de carbure de silicium dans l'aluminium $SiC(p)/Al$).

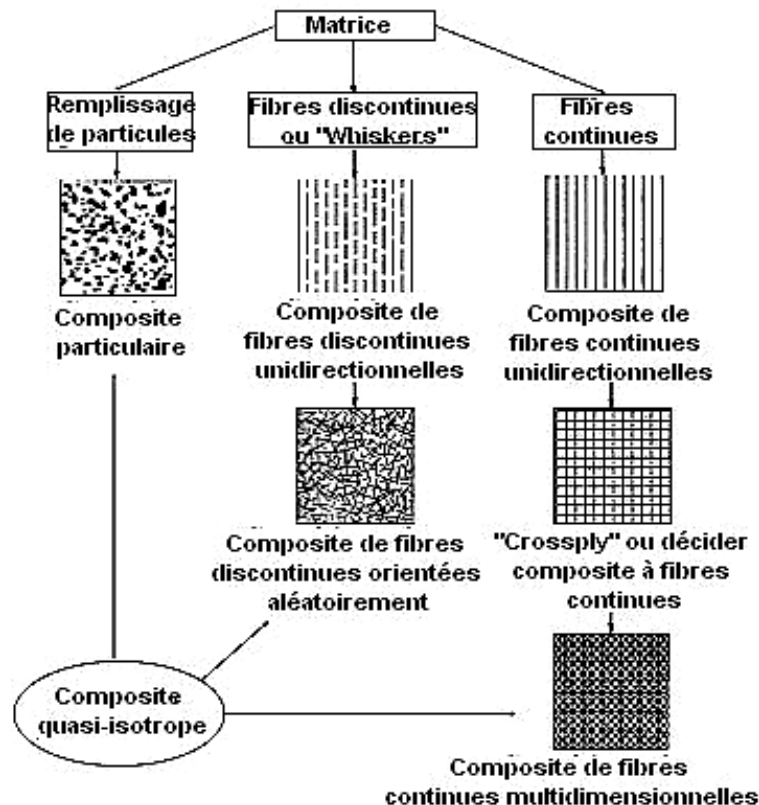


Figure 1.3: Classification du matériau composite [30]

Les composites à fibres continues: ce sont des composites renforcés avec des fibres longues et continues et sont plus efficaces du point de vue de la rigidité et de la résistance. Les fibres continues peuvent être toutes parallèles (composées de fibres continues unidirectionnelles), être orientées perpendiculairement l'une à l'autre (tissu composite à fibres croisées ou continues) ou être orientées

selon plusieurs directions (composite à fibres continues multidirectionnelles). Dans ce dernier cas, par un certain nombre de directions et la distribution des fibres, le composite peut être caractérisé comme un matériau quasi-isotrope.

Les composites renforcés par des fibres peuvent être classés en catégories générales selon la matrice utilisée: polymères, métaux, céramiques et composites à matrice de carbone. Les composites à matrice polymère: comprennent des résines thermodurcissables (époxy, polyester) ou thermoplastique (polyéther-éther cétone, poly sulfone) renforcés avec du verre, de carbone (graphite), de l'aramide (Kevlar), ou des fibres de bore, utilisés dans des applications à une température relativement basse. Les composites à matrice métallique: ils sont constitués de métaux ou d'alliages de métaux (aluminium, magnésium, titane, cuivre) renforcés avec du bore, du carbone (graphite), et de la fibre céramique, sa température de fonctionnement maximale est limitée par la température de ramollissement ou de fusion de métal de la matrice. Composite à matrice céramique: matrices céramiques comprennent (carbure de silicium, le verre d'oxyde d'aluminium, le nitrure de silicium) renforcé par des fibres de céramique, sont plus appropriés pour des applications à haute température. Carbone / carbone pcomposite: les matrices sont constituées de carbone ou de graphite ou de graphite renforcé d'un tissu de fils, ils ont des propriétés uniques de résistance relativement élevée aux hautes températures, avec une faible dilatation thermique et une faible densité.

Dans ces types discutés ci-dessus, il existe des matériaux composites stratifiés, qui sont composées de couches minces de matériaux différents, en tant que joint bimétal, de métal revêtu, formica et le contreplaqué. Selon la classification donnée par la figure 1.3, le présent travail mettra l'accent sur l'étude des composites de fibres continues, tels que les composites stratifiés.

1.2.4 Stratifiés composites

Un pli est une couche plane (ou courbe) de fibres unidirectionnelles disposée dans la matrice, appelé un pli unidirectionnel, étant ainsi un matériau orthotrope avec les axes principaux du matériau l'un dans le sens des fibres (longitudinal), l'autre normale aux fibres du plan du pli (dans le plan transversal), et le troisième normale au plan du pli (figure 1.4). Ces axes principaux sont désignés par 1, 2 et 3 respectivement.

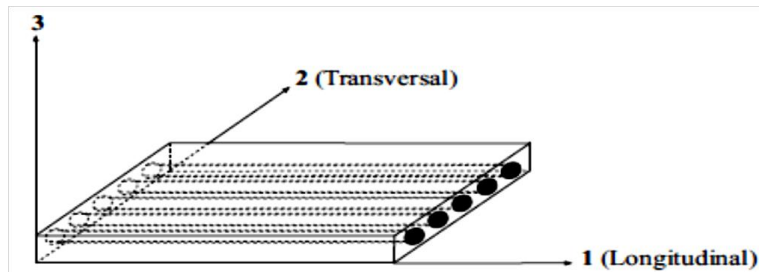


Figure 1.4: Lamme unidirectionnelle et ses axes de coordonnées principaux.

Un stratifié est composé de deux ou plusieurs plis ou couches unidirectionnelles empilées dans différentes orientations. Les plis (ou couches) peuvent être de différentes épaisseurs et de matériaux différents. Comme les axes principaux du matériau diffèrent d'une couche à l'autre, il est plus commode d'analyser les stratifiés en utilisant un système de coordonnées fixe commun (x , y , z), comme le montre la figure 1.5. L'orientation d'un pli donné dans le stratifié est donnée par un angle entre l'axe de référence (x) et l'axe principal du pli (1, orientation des fibres), mesurée dans le sens inverse des aiguilles d'une montre dans le plan xy .

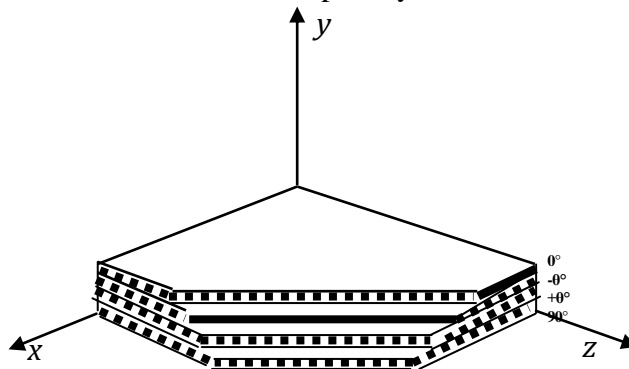


Figure 1.5: Stratifié multidirectionnel et son système de coordonnées de référence.

Les composites stratifiés contenant des couches de deux ou plusieurs types de matériaux sont appelés composites hybrides. Par exemple, un stratifié composite unidirectionnel peut être composé de verre / époxy, de carbone / époxy et d'aramide / époxy, empilés ensemble dans une séquence spécifiée. Dans certains cas, il peut être avantageux de mélanger différents types de fibres, comme le verre et le carbone, ou l'aramide et le carbone, dans la même couche unidirectionnelle. Les composites stratifiés sont désignés de manière à indiquer le nombre, le type, l'orientation et la séquence d'empilage des plis.

1.3 Modélisation multi-échelles de matériaux composites

Les soi-disant méthodes multi-échelles emploient généralement un processus d'homogénéisation des propriétés mécaniques, d'élaborer des méthodes pour prédire les réponses des solides qui ont des défaillances de développement dans la microstructure, ce qui est représenté par de petits éléments volumétriques appelés éléments de volume représentatif (EVR), qui sont d'une longueur suffisante pour capturer tous les détails moyens de la microstructure. Ce fut avec cette approche que les travaux ,Allen[1] a introduit des méthodes simplifiées pour prédire la réponse mécanique du solide contenant des microlésions à travers le développement d'algorithmes efficaces pour effectuer une analyse multi-échelle pour une variété d'applications, y compris les matériaux composites stratifiés et composites granulaires.

Dans [32], kouznetsova a souligné le fait que de nombreuses techniques d'homogénéisation existantes ne conviennent pas aux grandes déformations et aux charges complexes appliquées. Ainsi, pour surmonter ce problème, l'auteur a développé une homogénéisation computationnelle qui repose essentiellement sur la résolution de deux problèmes de valeur limite, l'un pour l'échelle macro et l'autre pour l'échelle micrométrique.

Une procédure pour calculer les propriétés mécaniques efficaces (homogénéisées) par la méthode des éléments de frontière (BEM) a été développée par yang

[33] pour des matériaux composites constitués de deux phases, la matrice et les fibres, avec un motif périodique de la microstructure ou des défauts. Ainsi, la formulation proposée par ces auteurs est capable de modéliser un composé de deux phases avec des inhomogénéités, telles que des fissures, des trous ou des inclusions, ayant leurs moyennes volumétriques de contraintes et déformations calculées à la fois pour les conditions de contour de force de surface uniforme et de déplacement linéaire, ainsi que pour les conditions aux limites périodiques de la cellule unitaire.

Un modèle informatique multi-échelle pour prédire le comportement mécanique des mélanges d'asphalte a été développée dans [34] c'est-à-dire que le comportement de la macroscopie considérée homogène est déterminé à partir du comportement de la micro-échelle hétérogène formée par les agrégats stellaires élastiques distribués dans une matrice viscoélastique. Le dommage macroscopique

est une conséquence du micro-endommagement, c'est-à-dire que les dommages observés à l'échelle macro sont dus à la formation et à la propagation de fissures et au développement de déformations permanentes à l'échelle microscopique.

Buroni [35] a présenté une formulation d'éléments de contour pour la modélisation de microstructures multi phases ayant des trous cylindriques et des inclusions de rayon variable dans leur structure. Cette formulation a été utilisée pour résoudre le problème élastique d'un EVR en appliquant le théorème de champ moyen pour obtenir les propriétés effectives de ces matériaux microporeux, qui avaient une matrice homogène et isotrope.

Déjà dans [36], le concept EVR a fait l'objet principal du travail, ou pour les matériaux élastiques, l'existence de ce matériau a été confirmée par la longueur déterminée, alors que pour d'autres matériaux, l'existence d'EVR peut ne pas se produire. Ces déclarations ont été rendues possibles par les enquêtes EVR pour différentes étapes de la réponse du matériel et par le développement d'analyses statistiques d'expériences numériques impliquant EVR avec différentes longueurs, concentrations de fibres et arrangements.

Pineda et al. [37] ont mis au point un modèle multi échelle pour la défaillance progressive des stratifiés composites, c'est-à-dire que le modèle a été développé à partir d'éléments finis et a servi à prédire la défaillance et l'endommagement progressif des stratifiés composites. Différents critères de défaillance ont été appliqués à la fois à l'échelle macroscopique et à l'échelle microscopique dans deux modèles différents de FEM et les résultats obtenus par chacun à travers le comportement contrainte-déformation observés dans la défaillance matérielle ont été comparés aux résultats expérimentaux.

La modélisation multi échelle pour la détermination des propriétés mécaniques efficaces des structures dentaires était l'objectif principal du travail développé dans [38]. La technique d'homogénéisation utilisée était l'homogénéisation par expansion asymptotique, qui est la technique utilisée pour les matériaux à microstructure périodique ou répétitive.

Les résultats d'une approche à deux échelles du problème des dommages et de la prédiction des défaillances, également dans les stratifiés composites, ont été présentés [39]. La modélisation à l'échelle microscopique a permis d'avoir un aperçu des processus physiques sous-jacents qui ramènent

les propriétés homogénéisées à la macroscopie. Les critères de défaillance micromécanique ont été comparés aux critères de défaillance appliqués au pli (échelle macro).

Czyż et al. [40] ont examiné et développé des formulations MEC appliquées à l'analyse de matériaux hétérogènes. Une nouvelle formulation du MEC, le MEC multipolaire rapide, a été développée, cette formulation se caractérise par une réduction du temps et de la mémoire computationnelle par rapport au MEC traditionnel. Les auteurs ont ainsi pu conclure à l'efficacité de l'utilisation de MEC en micromécanique par la modélisation numérique de matériaux élastiques, linéaires, élastoplastiques, piézoélectriques et piézomagnétiques présentant différentes hétérogénéités telles que des inclusions parfaitement rigides, des fibres déformables, des vides et des fissures même en utilisant différentes techniques d'homogénéisation des propriétés, telles que l'approche de la contrainte initiale, la formulation de Stroh et la méthode de Mori-Tanaka.

Chapitre 02

Elasticité linéaire et formulation des stratifiés en composite

Chapitre 2

Elasticité linéaire et formulation des stratifiés en composite.

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, les relations constitutives pour les types de matériaux utilisés dans cette thèse sont présentées, ainsi que la formulation traditionnelle pour les matériaux composites stratifiés.

2.2 Relations constitutives

2.2.1 Fondements de l'élasticité linéaire

Il est d'une importance fondamentale pour le chercheur, de comprendre et de connaître exactement les caractéristiques géométriques et mécaniques du mélange fibre / matrice, qui est la structure de base du matériau composite. Lors de l'étude du comportement mécanique des corps élastiques sous charge (théorie de l'élasticité), il faut considérer ce qui suit ;

- Un corps élastique se déforme sous contrainte d'une manière réversible
- A chaque point dans le corps, on peut identifier les principaux plans dans lesquels existent seulement les contraintes normales.
- Directions normales dans ces plans sont appelés directions principales de contraintes.
- Une petite sphère de matériau autour d'un point du corps devient un ellipsoïde après le chargement.

La position spatiale relative à l'ellipsoïde par rapport aux principales directions de contraintes permet de caractériser, si le matériau est isotrope ou anisotrope, comme expliqué à la figure 2.1.

Pour les problèmes d'élasticité linéaire, l'équilibre d'un corps Ω avec un contour $\Gamma = \partial\Omega$ est considéré (Figure 2.2), le contour est composé de deux parties Γ_u et Γ_t tels que $\Gamma_u \cup \Gamma_t = \Gamma$. La condition à la limite de déplacement définie par les déplacements des composants connus u_i^b est imposée dans la partie Γ_u et dans la partie Γ_t , les composantes t_i^b sont données. Le corps peut également être chargé par les forces de volume résultant du poids propre b_i [40] par exemple.

Par conséquent, la relation de base de la théorie de l'élasticité dans le corps sont les rapports de contrainte déplacement, des relations constitutives et des conditions d'équilibre, qui sont données respectivement par les équations suivantes :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (2.1)$$

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (2.2)$$

$$\sigma_{i,j,j} + b_i = 0 \text{ avec } i, j = 1, 2, 3 \quad (2.3)$$

Où ε_{ij} sont les composantes du tenseur symétrique de déformations, u_i sont les composantes du vecteur de déplacement, σ_{ij} sont les composantes du tenseur symétrique de contraintes et C_{ijkl} est le tenseur d'ordre 4 pour caractériser la matière, connue sous le nom de tenseur de rigidité [41]

Substituer l'équation (2.1) dans l'équation (2.2) :

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) = C_{ijkl} u_{k,l} \quad (2.4)$$

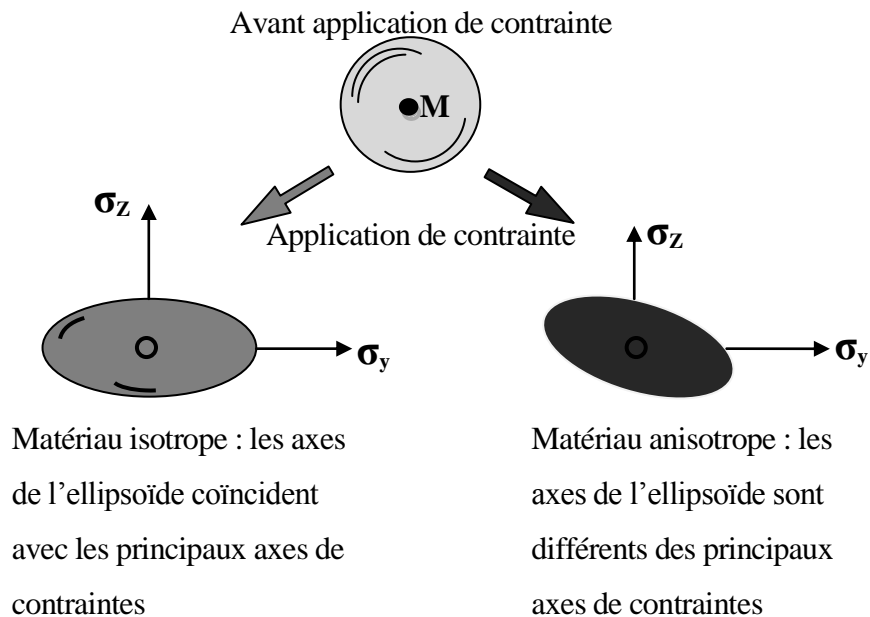


Figure 2.1: diagramme de déformation d'un matériau isotrope et anisotrope.

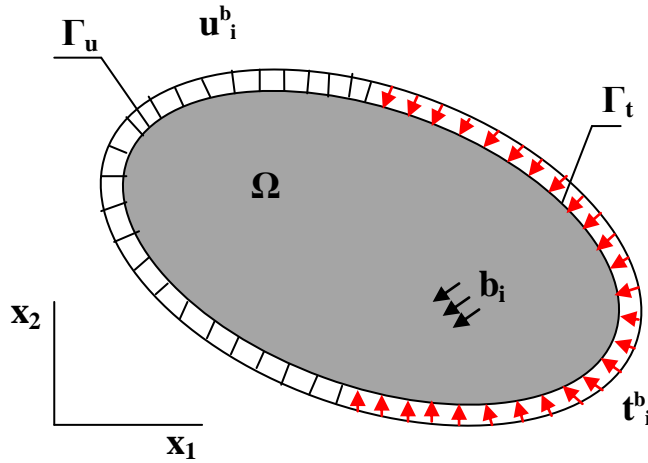


Figure 2.2: corps en deux dimensions (Ω) à l'équilibre et ses conditions aux limites.

L'équation (2.2) est la loi de Hooke généralisée, et le tenseur C_{ijkl} a une symétrie des contraintes et des déplacements qui permettent, grâce à la forme quadratique de l'énergie de déformation, écrire les relations suivantes :

$$C_{ijkl} = C_{jikl}, \quad C_{ijkl} = C_{ijlk}, \quad C_{ijkl} = C_{klij} \quad (2.5)$$

Ainsi, le nombre de constante réduite de 81 à uniquement 21 composantes à déterminer dans problèmes à trois dimensions, et la loi de Hooke est écrite comme suit [41] :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & C_{1123} & C_{1113} & C_{1112} \\ C_{1122} & C_{2222} & C_{2233} & C_{2223} & C_{2213} & C_{2212} \\ C_{1133} & C_{2233} & C_{3333} & C_{3323} & C_{3313} & C_{3312} \\ C_{1123} & C_{2223} & C_{3323} & C_{2323} & C_{2313} & C_{2312} \\ C_{1113} & C_{2213} & C_{3313} & C_{2313} & C_{1313} & C_{1312} \\ C_{1112} & C_{2212} & C_{3312} & C_{2312} & C_{1312} & C_{1212} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{12} \end{Bmatrix} \quad (2.6)$$

Une autre équation très importante en élasticité linéaire est le tenseur de Cauchy transformé, qui détermine les forces de surface t_i dans une direction particulière à un moment donné :

$$t_i = \sigma_{ij}n_j \quad (2.7)$$

n_j étant la composante du vecteur normal de surface.

Pour de nombreux problèmes pratiques d'élasticité, la section transversale du corps perpendiculaire à l'un des axes est constant, les conditions aux limites sont constantes le long de cet axe, et il n'y a aucune force agissant sur cet axe, cette structure est appelée plaque. Dans une telle situation, l'analyse peut être effectuée en utilisant le modèle à deux dimensions (figure 2.2) et, par conséquent, l'analyse peut être distinguée suivants les cas, les états de la matière [40] :

- L'état de déformation plane (EDP), qui se produit lorsque la taille du solide dans le sens de x_3 est très grande (épaisseur) et est soumis à des forces qui ne varient pas sur la longueur. Par conséquent, on suppose que toutes les sections transversales le long de la longueur sont dans les mêmes conditions, avec suffisamment pour l'étude d'adopter une tranche solide situé entre deux sections qui distancent d'une unité. Pour EDP, il a $\varepsilon_{ij} \neq 0$ pour $i, j = 1, 2$ et $\varepsilon_{i3} = 0$ pour $i = 1, 2, 3$.
- L'état de contrainte plane (ECP), qui se produit quand une plaque mince est sollicitée par une charge uniformément répartie sur toute son épaisseur, agissant parallèlement au plan de la plaque. Pour l'ECP, il a été $\sigma_{ij} \neq 0$ pour $i, j = 1, 2$ et $\sigma_{i3} = 0$ pour $i = 1, 2, 3$.

Les équations différentielles d'équilibre et des conditions aux limites définissent le problème de la valeur limite d'élasticité linéaire. Si seules les structures géométriques et des conditions aux limites simples sont considérées, des solutions analytiques peuvent être trouvées. Mais dans la plupart des cas, c'est l'application d'une méthode numérique qui permet d'obtenir une solution approchée [40]

Ainsi, après cette section on montrera les équations constitutives pour les types de matériaux qui composent un volume élémentaire représentatif EVR ou les matériaux composites stratifiés, formulées uniquement en cas d'ECP.

2.2.2 Matériaux isotropes

Les matériaux isotropes sont ceux qui maintiennent leurs propriétés constantes dans toutes les directions de la matière sous une sollicitation de charge donnée, qui est un matériau ayant une symétrie infinie de plans orthogonaux les uns aux autres, donc on peut dire qu'il n'y a pas de directions matériels préférées. Ainsi, on peut considérer qu'une contrainte normale appliquée à une plaque isotrope créer une extension dans la direction longitudinale et une contraction dans le sens transversal (figure 2.3), sans déformation de cisaillement. Toutefois, l'application d'une contrainte tangentielle

(figure 2.3) ne provoque qu'une déformation de cisaillement, sans aucune extension ou de contraction [42]

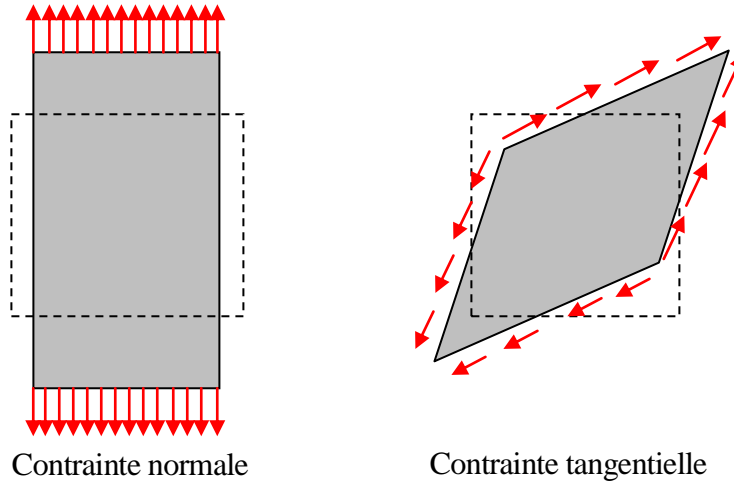


Figure 2.3: Comportement mécanique d'un matériau isotrope.

Ainsi, la relation constitutive d'un matériau isotrope élastique est écrite sous la forme matricielle suivante

$$\begin{cases} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ 2\varepsilon_{12} \end{cases} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & \frac{-\nu}{E} & 0 \\ \frac{-\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G} \end{bmatrix} \begin{cases} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_{12} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \varepsilon_3 \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \end{cases} = \begin{bmatrix} \frac{-\nu}{E} & \frac{-\nu}{E} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{cases} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_{12} \end{cases} \quad (2.9)$$

Où la matrice contenant des constantes E (de module élastique), ν (coefficient de Poisson) et G (module de cisaillement) est la matrice de la flexibilité du matériau.

L'inverse de l'équation (2.8) est la relation contrainte-déformation, où la matrice de rigidité du matériau est présenté [41]:

$$\begin{cases} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_{12} \end{cases} = \begin{bmatrix} E & E\nu & 0 \\ \frac{E\nu}{1-\nu^2} & \frac{E}{1-\nu^2} & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix} \begin{cases} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ 2\varepsilon_{12} \end{cases} \quad (2.10)$$

Pour G :

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (2.11)$$

L'équation (2.8) et l'équation (2.10) montre qu'un matériau isotrope est caractérisé par seulement deux constantes élastiques indépendantes, le module de E et le rapport de Poisson de ν . Les relations de contrainte-déformation peuvent être écrites sous une forme plus compacte, comme indiqué dans l'équation (2.12) et l'équation (2.13) :

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + 2\mu \varepsilon_{ij} \quad (2.12)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2\mu} \left[\sigma_{ij} - \frac{\lambda}{(2\mu+3\lambda)} \sigma_{kk} \delta_{ij} \right] \quad (2.13)$$

Où λ , μ sont les constantes de Lamé, δ_{ij} est le delta de Kronecker. Les constantes de Lamé peuvent être liés au rapport de Poisson ν de la manière suivante :

$$\lambda = \frac{2\mu\nu}{1-2\nu} \quad (2.14)$$

En plus des relations entre les constantes de Lamé et le coefficient de Poisson vu dans l'équation (2.14) L'équation (2.15) et l'équation (2.16) montrent d'autres relations entre ces constantes et des constantes E et G de l'ingénierie [41] :

$$E = \frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu} \quad (2.15)$$

$$G = \mu \quad (2.16)$$

2.2.3 Matériaux orthotropes

Quand il y a trois plans de symétrie orthogonaux les uns aux autres dans le matériau, cela augmente le nombre des constantes élastiques par rapport aux matériaux isotropes, en utilisant des arguments similaires à ceux donnés pour les matériaux avec un seul plan de symétrie, de tels matériaux sont appelés orthotrope [43] ou le matériau orthotrope a des propriétés qui sont différentes dans les trois directions perpendiculaires par rapport à un point de la matière, en outre Ils montrent trois plans de symétrie perpendiculaires entre eux, de sorte que leurs propriétés dépendent de l'orientation d'un point sur le corps.

Elasticité linéaire et formulation des stratifiés en composite

Comme avec des matériaux isotropes (Figure 2.3), en appliquant une contrainte normale dans une direction principale d'une plaque orthotrope (le long d'une intersection des trois plans orthogonaux la symétrie) se traduit par une extension dans la direction de la contrainte et une contraction perpendiculaire à la contrainte (figure 2.4). L'ampleur de l'extension dans la direction principale du matériau sous contrainte normale dans cette direction est différente de la grandeur de l'extension dans une autre direction principale du matériau sous la même contrainte standard dans cette autre direction, alors il y a un module d'élasticité dans chaque direction principale. En outre, en raison des propriétés différentes dans deux directions principales, la contraction peut être plus grande ou plus petite que la contraction d'un matériau isotrope qui est similairement chargé avec le même module d'élasticité dans la direction de la charge, de manière différente des coefficients de Poisson sont associés à différentes paires de directions principales. L'application d'une contrainte de cisaillement provoque une déformation de cisaillement (Figure 2.4), mais l'ampleur de cette déformation est entièrement indépendante des modules d'élasticité et des coefficients de Poisson [42]

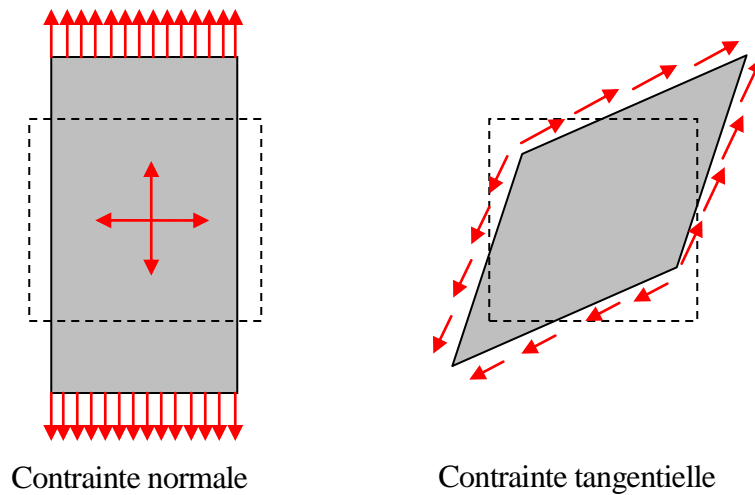


Figure 2.4: Comportement mécanique d'un matériau orthotrope.

Ainsi, les relations de contrainte-déformation pour un matériau orthotrope, ont les formes, respectivement suivantes :

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & \frac{E_1\nu_{21}}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & 0 \\ \frac{E_2\nu_{12}}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & \frac{E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & 0 \\ 0 & 0 & G_{12} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ 2\varepsilon_{12} \end{pmatrix} \quad (2.17)$$

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ 2\varepsilon_{12} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & \frac{-\nu_{21}}{E_2} & 0 \\ \frac{-\nu_{12}}{E_2} & \frac{1}{E_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} \quad (2.18)$$

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_3 \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-\nu_{13}}{E_1} & \frac{-\nu_{23}}{E_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} \quad (2.19)$$

Où les constantes E_1 , E_2 et E_3 sont les modules d'élasticité dans les directions principales 1, 2 et 3, respectivement ; ν_{12} , ν_{13} , ν_{21} et ν_{23} les coefficients de Poisson, défini comme le rapport entre la déformation transversale et la déformation longitudinale ; G_{12} et le module de cisaillement dans le plan 12, donné par la relation :

$$G_{ij} = \frac{E_i}{2(1+\nu_{ij})} \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (2.20)$$

Et aussi, par des conditions de symétrie :

$$\frac{\nu_{ji}}{E_j} = \frac{\nu_{ij}}{E_i} \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (2.21)$$

En conclusion, on peut noter pour les matériaux orthotropes [43]

- La déformation angulaire est indépendant des contraintes normales ;
- Déformation linéaire est indépendante de la contrainte de cisaillement ;
- La contrainte de cisaillement ne provoque qu'une déformation angulaire dans le plan dans lequel elle opère.

2.2.4 Matériaux transversalement isotropes

Un matériau transversalement isotrope est un matériau orthotrope qui a une isotropie dans l'un des plans de symétrie, ou ayant les mêmes propriétés dans toutes les directions, dans ce plan. En supposant que le plan d'isotropie est le plan 23, les relations de contrainte-déformation et contrainte-déformation sont données respectivement par [44] :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E_1 & E_1\nu_{21} & 0 \\ \frac{1-\nu_{12}\nu_{21}}{E_1} & \frac{1-\nu_{12}\nu_{21}}{E_2} & 0 \\ \frac{E_2\nu_{12}}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & \frac{E_2\nu_{21}}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & 0 \\ 0 & 0 & G_{12} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ 2\varepsilon_{12} \end{Bmatrix} \quad (2.22)$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ 2\varepsilon_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & \frac{-\nu_{21}}{E_2} & 0 \\ \frac{-\nu_{12}}{E_2} & \frac{1}{E_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} \quad (2.23)$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_3 \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-\nu_{12}}{E_1} & \frac{-\nu_{23}}{E_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} \quad (2.24)$$

2.2.5 Matériaux anisotropes

Un matériau anisotrope est un matériau qui n'a pas de plan de symétrie, c'est à dire, possède des propriétés différentes dans toutes les directions des plans. L'application d'une contrainte normale dans une plaque anisotrope, provoque non seulement une extension dans la direction de la contrainte et de contraction perpendiculaire à cette contrainte, ainsi qu'une déformation de cisaillement (figure 2.5). A l'inverse, l'application d'une contrainte de cisaillement provoque l'extension et la contraction, en plus de la déformation de la déformation de cisaillement (figure 2.5) [42]

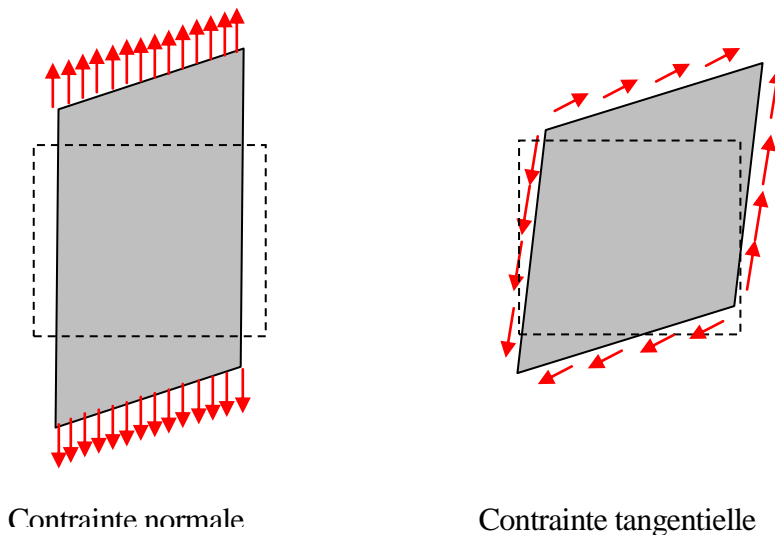


Figure 2.5: Comportement mécanique d'un matériau anisotrope.

Ainsi, la relation contrainte-déformation est donnée par [43] :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ 2\varepsilon_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & \frac{-\nu_{21}}{E_2} & \frac{\eta_{12,1}}{E_1} \\ \frac{-\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & \frac{\eta_{12,2}}{E_2} \\ \frac{\eta_{12,1}}{E_1} & \frac{\eta_{12,2}}{E_2} & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} \quad (2.25)$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_3 \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-\nu_{13}}{E_1} & \frac{-\nu_{23}}{E_2} & \frac{\eta_{12,3}}{E_3} \\ \frac{\eta_{23,1}}{E_1} & \frac{\eta_{23,1}}{E_2} & \frac{\zeta_{12,23}}{G_{23}} \\ \frac{\eta_{32,1}}{E_1} & \frac{\eta_{31,2}}{E_2} & \frac{\zeta_{12,32}}{G_{31}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} \quad (2.26)$$

où les constantes η_{jkl} sont appelés coefficients d'influence mutuelle du premier type, qui comportent des extensions dans les directions des axes principaux, produites par les contraintes de cisaillement agissant sur les plans principaux, et les constantes $\zeta_{ij,kl}$ sont des coefficients de Chentsov qui caractérisent les déformations tangentielles dans des plans parallèles aux plans principaux de l'élasticité, causées par des contraintes tangentielles qui agissent sur d'autres plans, parallèles aux plans principaux de l'élasticité [44]. La relation contrainte-déformation est obtenue en inversant l'équation (2.25), déterminant ainsi les composantes du tenseur des coefficients de raideurs élastiques.

2.3 Formulation des stratifiés en composite

2.3.1 Comportement élastique du pli en matériau composite

Un plan bidimensionnel dans le pli (1,2), dans lequel les fibres sont noyées dans une matrice et alignées d'une manière unidirectionnelle (Figure 2.5) est orthotrope [30], et puis la relation contrainte-déformation est donnée par l'équation (2.17), et réduite en utilisant la notation de tenseur proposé par [44] :

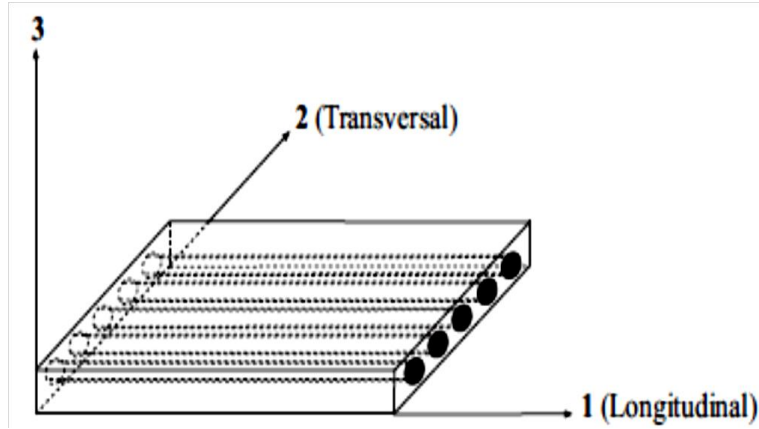


Figure 2.6: Pli uni directionnel et de ses principaux axes de coordonnées.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_6 \end{Bmatrix} \quad (2.27)$$

Où Q_{ij} sont maintenant les composants de la matrice de rigidité, à savoir :

$$Q = [Q_{ij}] = [a_{ij}]^{-1} \quad (2.28)$$

En termes de constantes d'ingénierie, composantes du tenseur de rigidité du pli peut être écrites comme:

$$Q_{11} = E_1 / (1 - \nu_{12}\nu_{21})$$

$$Q_{22} = E_2 / (1 - \nu_{12}\nu_{21})$$

$$Q_{66} = G_{12}$$

$$Q_{16} = Q_{26} = 0$$

$$Q_{12} = \nu_{21}E_1 / (1 - \nu_{12}\nu_{21}) = \nu_{12}E_2 / (1 - \nu_{12}\nu_{21})$$

Comme mentionné précédemment, pour les matériaux orthotropes, le pli est complètement caractérisé avec 4 constantes élastiques indépendantes, E_1 , E_2 , G_{12} et ν_{12} , et en étant constante ν_{21} est déterminée par l'équation (2.21) des conditions de symétrie.

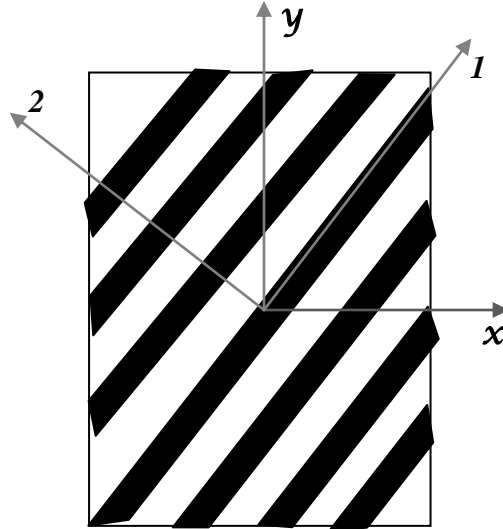


Figure 2.7: Système de coordonnées du pli (1 et 2) et du stratifié (x et y).

Souvent, les axes principaux du pli (1 et 2) ne coïncident pas avec l'axe du stratifié (x et y). Lorsque cela se produit, la relation constitutive pour chaque pli individuelle doit être transformée à l'axe de référence du stratifié (Figure 2.7), puis déterminer la relation constitutive. Pour que cette transformation se fasse, il suffit que le tenseur des contraintes et les déformations soient multipliés par la matrice de transformation, à savoir :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_s \end{Bmatrix} = T \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_6 \end{Bmatrix} \quad (2.30)$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_s \end{Bmatrix} = T \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_6 \end{Bmatrix} \quad (2.31)$$

Où $[\sigma]_y$ et $[\varepsilon]_{x,y}$ sont des tenseurs de contrainte et de déformation respectivement écrits dans le système de référence du stratifié, σ_{ij} et ε_{ij} sont les mêmes tenseurs écrit dans le système de référence du pli et T est une matrice de transformation donnée par:

$$T = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & 2mn \\ n^2 & m^2 & -2mn \\ -mn & mn & m^2 - n^2 \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

Où

$$m = \cos\theta \quad (2.33)$$

$$n = \sin\theta \quad (2.34)$$

Elle observe que la matrice inverse T^{-1} peut être obtenue en remplaçant l'angle positif θ , Figure 2.6, par l'angle négatif $-\theta$. L'équation constitutive peut être écrite comme :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_s \end{Bmatrix} = T^{-1} Q (T^{-1})' \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_s \end{Bmatrix} \quad (2.35)$$

Où $(T^{-1})'$ est la matrice transposée de la matrice inverse T et :

$$T^{-1} = T(-\theta) = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & -2mn \\ n^2 & m^2 & 2mn \\ mn & -mn & m^2 - n^2 \end{bmatrix} \quad (2.36)$$

Multipliant les matrices de l'équation (2.35) [30] :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{xx} & Q_{xy} & Q_{xs} \\ Q_{yx} & Q_{yy} & Q_{ys} \\ Q_{sx} & Q_{sy} & Q_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_s \end{Bmatrix} \quad (2.37)$$

Où

$$Q_{xx} = m^4 Q_{11} + n^4 Q_{22} + 2m^2 n^2 Q_{12} + 4m^2 n^2 Q_{66},$$

$$Q_{yy} = n^4 Q_{11} + m^4 Q_{22} + 2m^2 n^2 Q_{12} + 4m^2 n^2 Q_{66},$$

$$Q_{ss} = m^2 n^2 Q_{11} + m^2 n^2 Q_{22} + (m^4 + n^4) Q_{12} - 4m^2 n^2 Q_{66}, \quad (2.38)$$

$$Q_{xs} = m^3 n Q_{11} - mn^3 Q_{22} - mn(m^2 - n^2) Q_{12} - 2mn(m^2 - n^2) Q_{66},$$

$$Q_{ys} = m^3 n Q_{11} - mn^3 Q_{22} + mn(m^2 - n^2) Q_{12} + 2mn(m^2 - n^2) Q_{66},$$

$$Q_{ss} = m^2 n^2 Q_{11} - m^2 n^2 Q_{22} - 2m^2 n^2 Q_{12} + (m^2 - n^2) Q_{66}.$$

La matrice $[Q]$, est complètement remplie, avec les six constantes élastiques qui régissent le comportement du pli, deux, Q_{xs} et Q_{ys} sont des combinaisons linéaires des quatre autres. Dans le système de coordonnées transformé, le pli est dit généralement orthotrope et la matrice $[Q]$, est analogue à la matrice Q des plis entièrement anisotropes ($Q_{xs} \neq 0, Q_{ys} \neq 0$). Quand $Q_{16} = Q_{26} = 0$ on dit que le matériau particulier est orthotrope.

2.3.2 Contraintes et déformations dans un stratifié

Les stratifiés sont réalisés de manière à agir comme si elles étaient un élément d'un seul matériau. Le contact entre deux plis dans un stratifié est considéré comme parfait, qui est infiniment mince et n'a pas de déformation. Ainsi, les plis ne peuvent pas glisser les unes sur les autres, et les décalages en continu restent à l'interface entre les plis. Considérant la déformation d'une partie du stratifié dans le plan x - z comme représenté sur la figure 2.8.

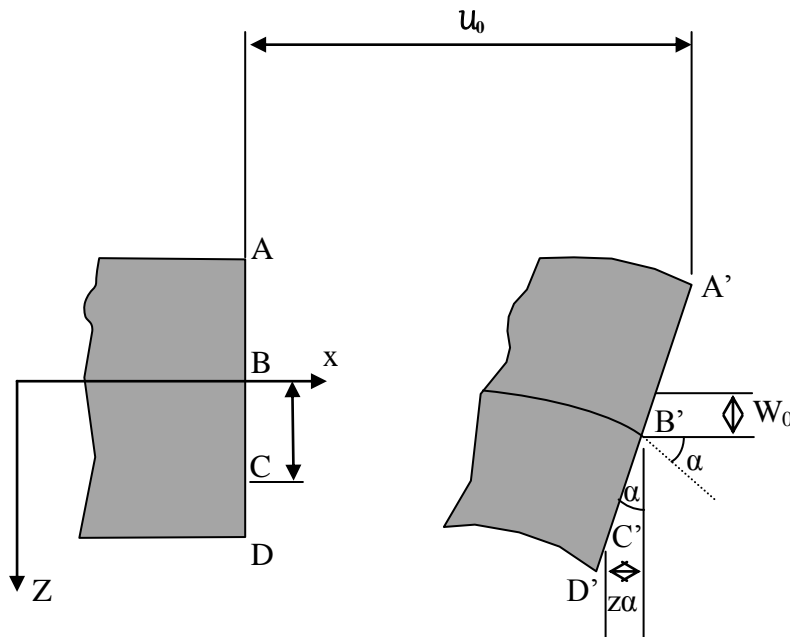


Figure 2.8: Flexion d'une ligne dans le plan x - z

En supposant que la ligne de $ABCD$, initialement rectiligne et perpendiculaire au plan médian du stratifié avant déformation reste droite et perpendiculaire au plan médian du stratifié après déformation. Cette hypothèse, l'hypothèse Kirchhoff est équivalente à la négligence des déformations de cisaillement γ_{xy} et γ_{yz} , et également équivalent à supposer que les plis constituant la section transversale ne glissent pas l'un sur l'autre. En outre, on suppose que le point de B situé dans le plan

médian, subit un déplacement u_0 , v_0 et w_0 le long des directions x , y et z respectivement. Le déplacement u dans la direction de x du point C, qui est situé sur la ligne $ABCD$, distant de z du plan médian, est donné par [29]:

$$u = u_0 - z\alpha \quad (2.39)$$

Où α est l'inclinaison du plan médian du stratifié dans la direction de x . Ainsi :

$$\alpha = \frac{\partial \omega_0}{\partial x} \quad (2.40)$$

Combinant l'équation (2,39) et l'équation (2.40), on obtient :

$$u = u_0 - z \frac{\partial \omega_0}{\partial x} \quad (2.41)$$

Similarité, le déplacement v dans le sens y d'un point arbitraire à une distance z par rapport au plan géométrique est :

$$v = v_0 - z \frac{\partial \omega_0}{\partial y} \quad (2.42)$$

Le déplacement w , dans la direction z de tout point de $ABCD$ est le déplacement w_0 du plan médian non déformé au plan médian déformé. Par conséquent, la vitesse normale en tout point du stratifié est supposé égale au déplacement w_0 . Ainsi, la déformation normale ε_z n'est pas considérée. Les déformations peuvent être obtenues en calculant les déplacements u et v :

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 \omega_0}{\partial x^2}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v_0}{\partial y} - z \frac{\partial^2 \omega_0}{\partial y^2} \quad (2.43)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} - 2z \frac{\partial^2 \omega_0}{\partial x \partial y}$$

Les relations de contrainte-déformation ci-dessus peuvent être écrites en termes de déformation du plan médian et les courbures des plaques :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.44)$$

Où les déformations dans le plan médian sont :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (2.45)$$

et les courbures des plaques sont [30] :

$$\begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 \omega_0}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 \omega_0}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 \omega_0}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \quad (2.46)$$

L'équation (2,44) indique que les déformations dans un stratifié varient linéairement le long de l'épaisseur. Les contraintes présentes sur un pli peuvent être obtenues en substituant l'équation (2.44) dans la relation contrainte-déformation pour un pli donné par l'équation (2.37) :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_k = \begin{Bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{Bmatrix}_k \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.47)$$

Ainsi, la variation des contraintes à travers l'épaisseur d'un stratifié est obtenue en calculant la variation des contraintes dans tous les plis. D'une manière générale, la variation des contraintes à travers l'épaisseur d'un stratifié est non linéaire. Les contraintes sont discontinues à l'interface de deux plis, et le gradient de contraintes sur deux plis adjacents est différent, les variations typiques dans les contraintes et déformations dans un stratifié à trois plis sont représentées sur la figure (2.9).

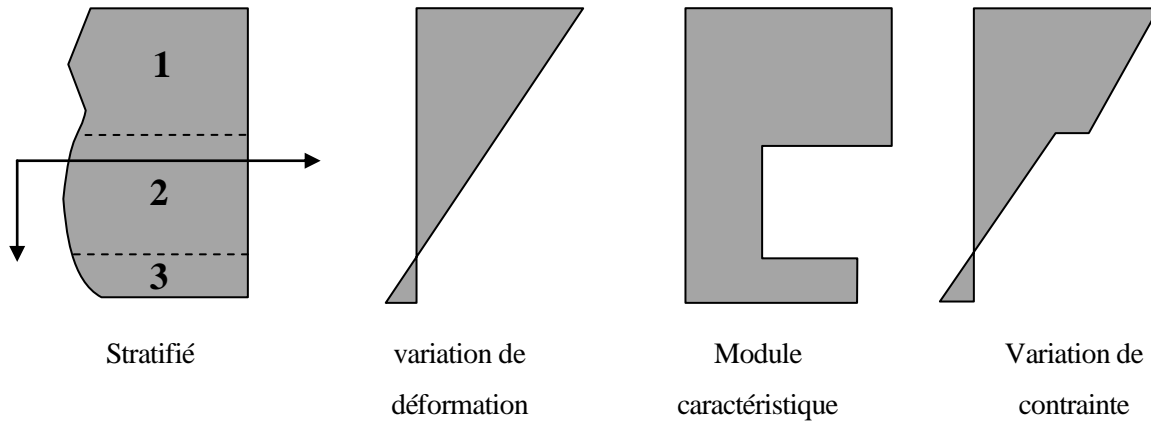


Figure 2.9 : Exemple de variation de la contrainte et de la déformation dans un stratifié à trois couches.

Les contraintes dans un stratifié varient d'une couche à l'autre. Par conséquent, il est commode de travailler avec un système simplifié de forces et de moments équivalent agissant dans une section transversale du stratifié. Ainsi, les forces et les moments agissant sur cette section qui en résultent sont définis ci-dessous. La force résultante est obtenue en intégrant les contraintes correspondantes dans l'épaisseur de la section transversale du stratifié, h [30] :

$$N_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x dz$$

$$N_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y dz \tag{2.48}$$

$$N_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} dz$$

De même, les moments résultant sont obtenus en intégrant, le long de l'épaisseur, produit entre la contrainte correspondante et la distance de la même par rapport au plan du stratifié, z :

$$M_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z dz$$

$$M_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y z dz \tag{2.49}$$

$$M_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} z dz$$

Dans les équations ci-dessus, N_x , N_y et N_{xy} ont des unités de force par unité de longueur et M_x , M_y et M_{xy} ont des unités de moments par unité de longueur. Le sens positif des forces et des moments résultants est conforme à la convention de signe montre dans la figure 2.10. Ensemble, ces six termes de forces et moments forment un système statiquement équivalent à un système de contraintes du stratifié, mais appliqué dans son plan médian.

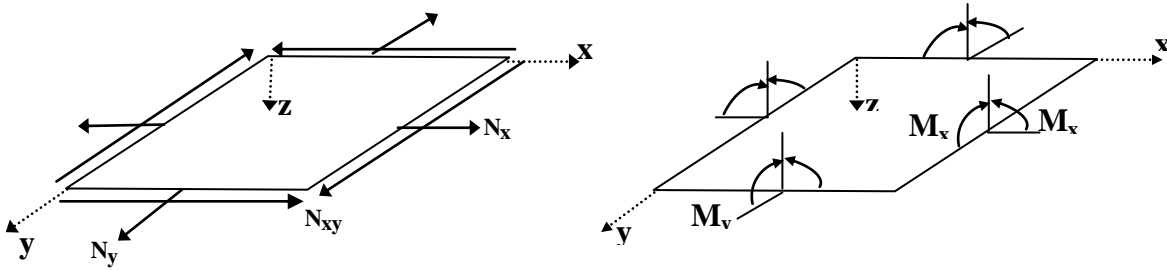


Figure 2.10: Sens positif des forces et des moments résultants.

Considérons maintenant un stratifié formé par n plis orthotropes, comme dans la figure (2.11). Le système des forces et des moments agissant sur le plan médian de ce stratifié peut être obtenu en remplaçant les intégrales continues dans l'équation (2.48) et l'équation (2.49) par les sommations d'intégrales qui représentent la contribution de chacun des plis séparément :

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} dz = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_k dz \quad (2.50)$$

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} z dz = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_k z dz \quad (2.51)$$

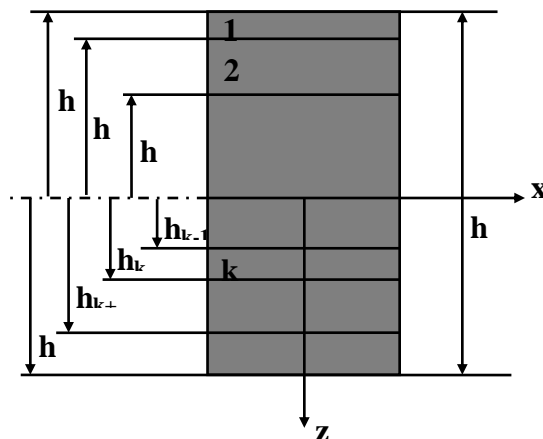


Figure 2.11: Géométrie d'un stratifié à plusieurs couches.

Les contraintes dans l'équation (2.50) et l'équation (2.51) peuvent être écrites en termes de déformation du plan médian et les courbures de la plaque, l'équation (2.47), et les forces et les moments résultants peuvent être directement liés aux déformations du plan médian et courbures de la plaque. Substituant l'équation (2.47) dans l'équation (2.50) et l'équation (2.51), nous aurons [30] :

$$\begin{pmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^n \left\{ \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \begin{pmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{pmatrix} dz + \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \begin{pmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{pmatrix} z dz \right\} \quad (2.52)$$

$$\begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^n \left\{ \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \begin{pmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{pmatrix} z dz + \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \begin{pmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{pmatrix} z^2 dz \right\} \quad (2.53)$$

L'évaluation de l'équation (2.52) et l'équation (2.53), peuvent être retirées de la somme les déformations du plan médian et les courbures de la plaque, puisque celles-ci restent constantes, non seulement sur un pli, mais dans le stratifié, ce qui simplifie les équations ainsi. En outre, la matrice de rigidité \bar{Q} reste constante pour chaque pli et peut donc être placée en dehors de l'intégrale. Ainsi, l'équation (2.52) et l'équation (2.53) deviennent :

$$\begin{pmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{pmatrix} = \left[\sum_{k=1}^n \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \int_{h_{k-1}}^{h_k} dz \right] \begin{pmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{pmatrix} + \left[\sum_{k=1}^n \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \int_{h_{k-1}}^{h_k} z dz \right] \begin{pmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{pmatrix} \quad (2.54)$$

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \left[\sum_{k=1}^n \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \int_{h_{k-1}}^{h_k} z dz \right] \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + \left[\sum_{k=1}^n \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \int_{h_{k-1}}^{h_k} z^2 dz \right] \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.55)$$

Définition de trois nouvelles matrices, l'équation (2.54) et l'équation (2.55) peuvent être écrites de manière simplifiée :

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.56)$$

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.57)$$

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^n (\bar{Q}_{ij})_k (h_k - h_{k-1})$$

$$B_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (\bar{Q}_{ij})_k (h_k^2 - h_{k-1}^2) \quad (2.58)$$

$$D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n (\bar{Q}_{ij})_k (h_k^3 - h_{k-1}^3)$$

En combinant l'équation (2.56) et l'équation (2.57), l'équation constitutive du stratifié dans son ensemble peut être écrite comme :

$$\begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon^0 \\ k \end{Bmatrix} \quad (2.59)$$

Dans l'équation (2.56) et l'équation (2.59) les matrices de A , B et D sont appelés matrice de rigidité de l'extension, matrice de rigidité du couplage, et la matrice de rigidité en flexion, respectivement. La matrice de rigidité de l'extension concerne la résultante des forces de déformation sur le plan médian,

et matrice de rigidité de la flexion associée à la résultante des moments avec la courbure du stratifié [30]

La présence de la matrice de couplage B dans l'équation constitutive du stratifié indique la relation entre la flexion et la déformation dans le stratifié. Ce sont les forces normales et de cisaillement agissant dans le plan médian de la plaque causant, non seulement, la déformation dans son plan médian, mais aussi la flexion et la torsion de la plaque. De même, flexion et moment de torsion sont accompagnés par des déformations dans le plan médian. Ainsi, la traction d'un stratifié dont les termes B_{ij} de la matrice de couplage sont non nuls, produira la flexion et / ou torsion du stratifié, ainsi que la déformation longitudinale et de cisaillement. Cette observation a été démontrée expérimentalement par [45] en utilisant un modèle fabriqué avec deux couches orthotropes en fibre de nylon renforcées avec du caoutchouc, de sorte que certains termes B_{ij} sont différents de zéro. Les extrémités ont été laissées libres de tourner de telle sorte que lorsque le modèle a été étiré, la seule force agissant non nul dans le stratifié était N_x , alors que toutes les autres forces et moments résultant sont nuls. Ce type d'essai montre clairement le couple produit par une force normale. La relation entre la déformation et la flexion du stratifié n'est pas attribuée aux plis orthotropes ou anisotropes, mais l'asymétrie d'empilement du stratifié. En effet, cette relation est valable pour un stratifié constitué de couches de différents matériaux isotropes.

2.3.3 Détermination des contraintes et déformations d'un stratifié

L'objectif de l'analyse d'un stratifié composite est de déterminer les contraintes et les déformations dans chacun des plis le constituant. Des déformations causées dans un pli par des charges externes sont en fonction des déformations dans le plan médian du pli, des courbures de la plaque et de la distance par rapport au plan médian du stratifié. L'équation (2.44) donne la relation entre ces valeurs. Les contraintes présentes sur un pli peuvent être déterminées à la fois du calcul de la déformation du pli, en utilisant la relation contrainte-déformation donnée par l'équation (2.37) ou directement à partir des déformations et de courbures du plan médian à l'aide de l'équation (2.47). Donc la première étape dans la détermination des contraintes et des déformations du pli est de calculer les déformations et courbures dans le plan médian.

Les relations entre les charges appliquées, la déformation du plan médian et les courbures de la plaque sont fournies par l'équation (2.56) et l'équation (2.57). Ces deux équations matricielles représentent six

équations algébriques, impliquant six inconnues (trois liés à des déformations dans le plan médian et trois aux courbures de la plaque). Pour chaque stratifié dont la matrice de couplage B est non nul, la solution de ces équations nécessite l'inversion de la matrice 6 x 6 de l'équation (2.59). Toutefois, cette inversion peut être réalisée en plusieurs étapes, et l'inversion complète peut être divisée par inversion et multiplication des matrices plus petites. Ci-dessous, les déformations et courbures sont dérivées en tant que fonctions explicites des charges appliquées, à savoir les contraintes et les moments qui en résultent.

Les équations constitutives générales pour un stratifié ont été tirées de l'équation (2.59). Compte tenu des équations pour N et M séparément [29]:

$$\begin{aligned} \{N\} &= [A]\{\varepsilon^0\} + [B]\{k\} \\ \{M\} &= [B]\{\varepsilon^0\} + [D]\{k\} \end{aligned} \quad (2.60)$$

Résolution de la première des équations de l'équation (2.60) pour les déformations dans le plan médian :

$$\{\varepsilon^0\} = [A^{-1}]\{N\} - [A^{-1}][B]\{k\} \quad (2.61)$$

Substitution de l'équation (3,61) dans la seconde relation de l'équation (2.60) :

$$\{M\} = [B][A^{-1}]\{N\} - [-[B][A^{-1}][B] + [D]]\{k\} \quad (2.62)$$

Les équations (2.61) et (2.62) peuvent être combinées pour obtenir une forme partiellement inversée de l'équation constitutive du stratifié:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon^0 \\ M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A^* & B^* \\ C^* & D^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N \\ k \end{Bmatrix} \quad (2.63)$$

Où

$$\begin{aligned} [A^*] &= [A^{-1}] \\ [B^*] &= -[A^{-1}][B] \\ [C^*] &= [B][A^{-1}] = -[B^*]^T \\ [D^*] &= [D] - [B][A^{-1}][B] \end{aligned} \quad (2.64)$$

Il convient de noter que, pour obtenir cette forme partiellement inversée de l'équation constitutive du stratifié, seulement une matrice 3x3 doit être inversée et deux multiplications effectuées.

Maintenant, l'équation (2.61) et l'équation (2.62) peut être réécrites comme :

$$\{\varepsilon^0\} = [A^*]\{N\} + [B^*]\{k\} \quad (2.65)$$

$$\{M\} = [C^*]\{N\} + [D^*]\{k\}$$

La résolution de la deuxième équation ci-dessus pour la courbure de la plaque :

$$\{k\} = [D^{*-1}]\{M\} - [D^{*-1}][C^*]\{N\} \quad (2.66)$$

Et en substituant l'équation (3.66) dans la première équation des équations (2.65) :

$$\{\varepsilon^0\} = [[A^*] - [B^*][D^{*-1}][C^*]]\{N\} + [B^*][D^{*-1}]\{M\} \quad (2.67)$$

L'équation (2.66) et l'équation (2.67) peuvent être combinées pour obtenir la forme complètement inversée de l'équation constitutive :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon^0 \\ k \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A' & B' \\ B' & D' \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} \quad (2.68)$$

Où,

$$[A'] = [A^*] - [B^*][D^{*-1}][C^*] = [A^*] + [B^*][D^{*-1}][B^*]^T$$

$$[B'] = [B^*][D^{*-1}]$$

$$[C'] = -[D^{*-1}][C^*] = [D^{*-1}][B^*]^T = [B']^T$$

$$[D'] = [D^{*-1}]$$

Par conséquent, la forme complètement inversée des équations constitutives pour un stratifié est obtenu en inversant la matrice de 3x3 et en outre par la multiplication de deux matrices.

CHAPITRE 03
Technique multi-échelle
Pour la défaillance.

CHAPITRE 03

Technique multi-échelle pour la défaillance.

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous présentons les définitions et les formulations de modélisation multi-échelle utilisée pour analyse l'échec de micro constituants, de la fibre et de la matrice, d'un stratifié composite unidirectionnel.

3.2 3568-

3.2.1 Analyse des échelles et Technique Homogénéisation / Localisation

L'analyse multi-échelle est un outil de calcul très efficace pour satisfaire pleinement les avantages offerts par les matériaux composites dans plusieurs applications spécifiques avancées et vérifiées expérimentalement. En outre, pour aider à la fois la conception structurelle de l'analyste avec ces matériaux comme le scientifique des matériaux dans le développement de celui-ci, cet outil devrait couvrir les différents niveaux d'échelle pour l'analyse d'un composite. Les niveaux d'échelle applicables en mécanique des milieux continus sont les micro-(niveau constitutive), la méso-échelle (composite stratifiée) et macroscopique (niveau global / structurel).

Dans le processus d'homogénéisation, ces échelles progressent de gauche à droite, et à l'emplacement du processus, les échelles progressent de droite à gauche comme indiqué sur la Figure 3.1. Par conséquent, avec les techniques d'homogénéisation, il est possible d'examiner l'influence de dommages au niveau macroscopique du comportement de la matière à travers d'un comportement microstructural, ou au contraire pour les techniques de localisation. Ces procédures exigent formellement les calculs des moyennes spécifiques en appliquant le théorème des champs moyens, c'ainsi qu'on détermine les propriétés réelles du matériau.

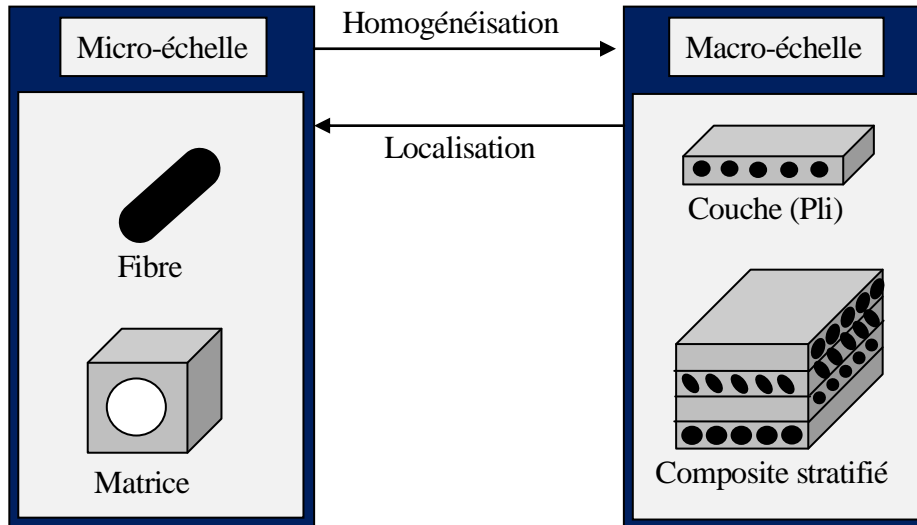


Figure 3.1 : Illustration des niveaux des échelles dans une analyse multi-échelle du composite.

Il existe différentes techniques d'homogénéisation (modèles) micromécaniques qui peuvent fournir le calcul des propriétés efficaces de matériaux composites. Le procédé d'homogénéisation directe est basé sur la moyenne volumétrique des quantités de champs de contraintes et de déformations. La méthode d'homogénéisation indirecte suit l'idée d'inclusion équivalente dans la solution proposée par [46] pour inclure un seul dans une matrice infinie, cette méthode n'utilise pas directement les quantités moyennes des champs, ainsi les propriétés efficaces peuvent être obtenues en fonction de la fraction volumique, de la géométrie de l'inclusion et des propriétés des couches composites [28].

Dans cette étude, la méthode d'homogénéisation directe, sur la base volumétrique moyenne et la construction de modèles de microstructure simples, est utilisée [47].

3.2.2 Approches macro mécanique et micromécanique

La caractéristique distinctive entre les approches macro mécanique et micromécanique, est le point de départ, et dans cette étude, l'analyse commence au niveau global (stratifié), qui dans ce cas est le méso- échelle, et se termine au niveau local (constituants), à savoir l'utilisation de la technique de l'emplacement. Ainsi, chaque approche a des exigences spécifiques pour la caractérisation expérimentale et la vérification.

L'approche micromécanique comprend la construction de modèles de stratifié, l'échelle macro (global), considéré comme un matériau anisotrope, où les détails des arrangements sous-jacents des

matériaux constitutifs sont ignorés. Dans le régime élastique linéaire, cette approche est simple et ne consiste à déterminer (habituellement expérimentalement) que les propriétés élastiques anisotropes du stratifié. Ceux-ci sont insérés dans un code d'analyse structurelle pour les stratifiés unidirectionnels anisotropes formulés dans ECM (qui sera discuté dans le chapitre 4), afin de déterminer la performance structurelle. Ainsi, les forces de surfaces et la structure des compensations sont calculées pour être ensuite utilisé dans une analyse plus poussée multi échelle, ou utilisés dans l'approche de la micromécanique.

L'approche micromécanique considère explicitement les matériels constitutifs et comment ils sont arrangés dans le composé. Le but de la micromécanique est de prévoir le comportement efficace d'un matériau composite basé sur le comportement des matériels constitutifs et leur arrangement géométrique. En déterminant le comportement efficace d'un composé par micromécanique, L'analyse peut être rendue à une échelle plus haute, et par conséquent être traitée d'une manière semblable à l'approche macro mécanique. Par conséquent, les propriétés effectives (efficaces) du matériau composite déterminées par la micromécanique sont utilisées pour représenter l'équivalence avec les propriétés macro structurelles, en somme, les propriétés effectives homogénéisées doivent être compatibles (en accord) avec les propriétés du laminés (l'échelle globale). Un des avantages de la micromécanique est que les propriétés de matériaux composites peuvent être déterminées, dans n'importe quelle direction, pour n'importe quelle fraction de volume de fibres renforcés ou d'architecture, même si le composé n'a pas été fabriqué. Il peut donc aider dans la conception des matériaux composites eux-mêmes aussi bien que les structures en composées par ces matériaux. En termes de non linéarité associée à l'inélasticité, des dégâts et des défaillances, l'approche micromécanique permet à la physique de ces mécanismes d'être capturée à l'échelle des constituants, où ils arrivent en réalité [28].

3.2.3 Représentation de l'élément de volume

La mécanique des milieux continus est basée sur le concept d'un solide homogène, qui peut être subdivisé à plusieurs reprises dans des sous-volumes infinitésimaux, dont chacun conserve les propriétés du volume vrac du matériau. Cependant, dans une certaine gamme, tous les matériaux sont hétérogènes. Le but de micromécanique est d'expliquer la microstructure hétérogène de la matière, lui permettant d'être traitée comme un continu efficace dans des échelles de longueur plus grandes (par

exemple, dans la structure). Pour représenter cette microstructure, la micromécanique est basée sur l'existence d'un volume élémentaire représentatif (EVR), qui peut être une cellule de l'unité, dans le cas des matériaux à microstructure périodique [28]. Un EVR est une représentation statistique des propriétés des matériaux, qui devrait contenir des informations sur le micrométrie et devrait être suffisamment plus petite que les dimensions structurelles macroscopiques, à savoir, toujours avec le rapport $D/L \ll 1$ qui doit être satisfait (Figure 3.1).

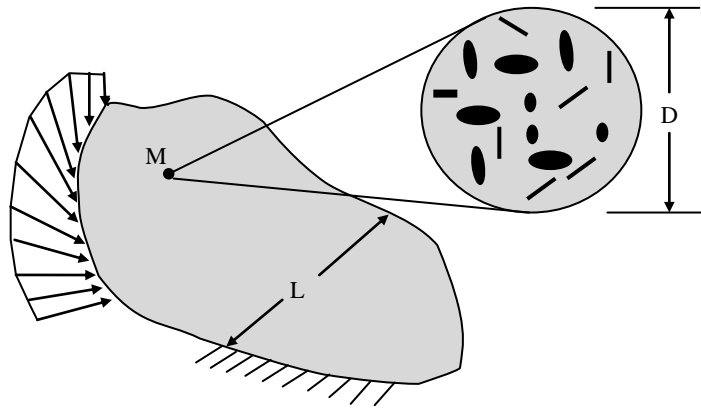


Figure 3.2: macrostructure continue et microstructure hétérogène associé à un point matériel macroscopique.

En micromécanique continu, chaque point matériel est considéré comme un volume fini d'un matériau homogène qu'il a des dimensions structurelles nulles du point de vue macroscopique, mais représente un volume de taille microscopique finie d'une certaine microstructure (Figure 3.2). Pour obtenir une microstructure non périodique, l'EVR est défini comme étant un volume contenant un grand nombre d'éléments microscopiques. Cette définition est valable uniquement pour le cas d'un matériau ergodique 1. Cela implique également que les éléments de volume suffisamment grand sélectionnés à des positions aléatoires au sein de l'échantillon du matériau considéré, sont arrangés de composants statistiquement équivalents qui contiennent les mêmes propriétés moyennes du matériau. Ces propriétés sont les propriétés moyennes effectives des matériaux hétérogènes [40]. Comme décrit, le volume du processus de localisation d'homogénéisation doit être choisi pour être un EVR convenable, avec une taille suffisante pour contenir toutes les informations nécessaires qui décrivent le comportement du composite [40]. Ainsi, le choix détermine en grande partie la précision d'un modèle de matériau hétérogène.

3.2.4 Théorèmes moyennes et conditions aux limites

Dans les techniques de modélisation multi-échelles en utilisant le processus d'homogénéisation, les champs de contrainte et de déformation de la microstructure hétérogène a une influence directe sur le comportement des macros échelle, à travers ses moyennes volumétriques. Ainsi, les moyennes du tenseur des champs de contrainte et de déformation décrivant l'état du point matériel macroscopique, sont calculées par les théorèmes de la théorie des champs moyens, comme suit :

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = \frac{1}{V} \int_V \sigma_{ij}(x) dV \quad (3.1)$$

$$\langle \varepsilon_{ij} \rangle = \frac{1}{V} \int_V \varepsilon_{ij}(x) dV \quad (3.2)$$

où V est le volume EVR et l'argument de x indique que les champs de contrainte et de déformation à l'échelle microscopique sont spatialement dépendantes.

Ainsi, il est postulé que les tenseurs de contraintes σ_{ij} et la déformation ε_{ij} infinitésimales macroscopiques sont les mêmes moyennes spatiales des tenseurs de contrainte et de déformation dans un EVR, respectivement, à travers les théorèmes de contraintes et des déformations moyennes.

Par conséquent, pour calculer les moyennes des champs de contraintes et de déformation d'un EVR, il est nécessaire de mettre en œuvre correctement les conditions aux limites homogènes sur votre contour Γ . Ces conditions aux limites sont essentiellement divisées en deux

- a) des conditions aux limites de déplacement linéaire :

$$u_i(\Gamma) = \bar{\varepsilon}_{ij} x_j \quad (3.3)$$

- b) conditions aux limites d'une force de surface uniforme :

$$t_i(\Gamma) = \bar{\sigma}_{ij} n_j \quad (3.4)$$

Où $\bar{\varepsilon}_{ij}$ et $\bar{\sigma}_{ij}$ sont respectivement les déformations et contraintes constantes, et n_j est le vecteur normal au contour Γ à l'EVR.

Pour calculer la déformation moyenne dans un matériau composite, il est nécessaire de résoudre le problème d'élasticité de l'EVR soumis à des conditions aux limites homogènes de déplacement linéaire, l'équation (4.3). Avec cette postulation que les moyennes des tenseurs des déformations $\langle \varepsilon_{ij} \rangle$ sont égales aux déformations infinitésimales macroscopiques $\bar{\varepsilon}_{ij}$ appliquées en Γ , Il est alors confirmée. Ceci caractérise le théorème de déformation moyenne, qui peut être mis en place en substituant l'équation (relations contraintes - déplacements) (2.1) dans l'équation (3.2) comme suit :

$$\langle \varepsilon_{ij} \rangle = \frac{1}{2V} \int_V (u_{i,j} + u_{j,i}) dV \quad (3.5)$$

et sachant que le volume V de EVR est composé du volume des fibres V_f et le volume V_m de la matrice, à savoir $V = V_f \cup V_m$, et aussi ce qui suit:

$$\langle \varepsilon_{ij} \rangle = \frac{1}{2V} \left[\int_{V_f} (u_{i,j}^{(f)} + u_{j,i}^{(f)}) dV + \int_{V_m} (u_{i,j}^{(m)} + u_{j,i}^{(m)}) dV \right] \quad (3.6)$$

En appliquant le théorème de Gauss:

$$\langle \varepsilon_{ij} \rangle = \frac{1}{2V} \left[\int_{\Gamma_f} (u_i^{(f)} n_j + u_j^{(f)} n_i) d\Gamma + \int_{\Gamma_m} (u_i^{(m)} n_j + u_j^{(m)} n_i) d\Gamma \right] \quad (3.7)$$

où Γ_f et Γ_m sont les surfaces de délimitation de la fibre et de la matrice, respectivement. Les surfaces de Γ_f et Γ_m contiennent des interfaces Γ_{f-m} et la surface extérieure Γ l'EVR. Si l'on suppose qu'il y a une parfaite adhérence entre la fibre et la matrice, à savoir :

$$u_i^{(f)} = u_i^{(m)} \text{ em } \Gamma_{f-m} \quad (3.8)$$

Ainsi, les contributions de Γ_{f-m} dans les deux intégrales de l'équation (3.7) annulent les uns des autres, ce qui conduit à:

$$\langle \varepsilon_{ij} \rangle = \frac{1}{2V} \int_{\Gamma} (u_i n_j + u_j n_i) d\Gamma \quad (3.9)$$

en notant que la condition de déplacement linéaire est utilisée et appliquons à nouveau le théorème de Gauss [28]:

$$\langle \varepsilon_{ij} \rangle = \bar{\varepsilon}_{ij} \quad (3.10)$$

De même, les contraintes moyennes d'un matériau composite sont calculées. La différence est dans les conditions aux limites appliquées à l'EVR, à savoir, tenir compte des conditions de contour homogène des forces de surface uniformes. Jusqu'à présent, la postulation que la moyenne des tenseurs des contraintes $\langle \sigma_{ij} \rangle$ est égale aux contraintes infinitésimales macroscopiques $\bar{\sigma}_{ij}$ appliqué sur Γ est confirmée. Ceci caractérise le théorème de la contrainte moyenne, qui peut être d'abord établie à partir de la dérivée temporelle de la contrainte :

$$(\sigma_{ik} x_j)_{,k} = \sigma_{ik,k} x_j + \sigma_{ij} x_{j,k} \quad (3.11)$$

Et par l'équation (2.3), les équations d'équilibre en l'absence de forces de volume :

$$\begin{aligned} (\sigma_{ik}x_j)_{,k} &= \sigma_{ij}x_{j,k} \\ &= \sigma_{ij}x_{j,k} \\ &= \sigma_{ik} \end{aligned} \quad (3.12)$$

Le remplacement de cette relation dans l'équation (3.1) :

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = \frac{1}{V} \int_V (\sigma_{ij}x_j)_{,k} dV \quad (3.13)$$

En appliquant le théorème de Gauss :

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = \frac{1}{V} \left[\int_{\Gamma_f} (\sigma_{ik}^{(f)} x_j n_k^{(f)}) d\Gamma + \int_{\Gamma_m} \sigma_{ik}^{(m)} x_j n_k^{(m)} d\Gamma \right] \quad (3.14)$$

Étant donné que les tractions sont continues dans l'interface Γ_{f-m} , à savoir:

$$\sigma_{ij}^{(f)} n_j^{(f)} = -\sigma_{ij}^{(m)} n_j^{(m)} \quad \text{em} \quad \Gamma_{f-m} \quad (3.15)$$

Les contributions de Γ_{f-m} dans deux intégrales de l'équation (3.14) s'annulent, et en se souvenant que la condition de la contrainte uniforme est utilisée, il en résulte que l'équation (3.14) se réduit à:

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = \frac{1}{V} \int_{\Gamma} \sigma_{ik} x_j n_k d\Gamma = \frac{1}{V} \bar{\sigma}_{ij} \int_{\Gamma} x_j n_k d\Gamma \quad (3.16)$$

Et en appliquant à nouveau le théorème de Gauss [28] :

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = \bar{\sigma}_{ij} \quad (3.17)$$

Dans cette étude, les conditions aux limites homogènes de déplacements linéaires sont utilisées pour la procédure d'homogénéisation directe. Cette technique connue sous le nom de déformation orientée [32]. ou l'analyse est réalisée comme suit: étant donné le tenseur des déformations $\langle \varepsilon_{ij} \rangle$, on calcule le tenseur des contraintes homogénéisé $\langle \sigma_{ij} \rangle$ en fonction de la réponse élastique de la microstructure [28].

3.2.5 Condition de l'énergie de Hill

Aussi connu sous condition de macro uniformité (macro-homogénéisation) ou condition de Hill-Mandell, la satisfaction de cette condition développée par Hill [14], est d'une importance fondamentale pour l'interprétation du problème de l'homogénéisation, à savoir le matériau homogénéisé doit être énergiquement équivalente à sa microstructure.

Ainsi, il en résulte que, comme précédemment dans les théorèmes des moyennes, le corps est supposé avoir une adhérence parfaite entre la fibre et la matrice, puis en l'absence de forces de volume :

$$\langle \sigma_{ij} : \varepsilon_{ij} \rangle = \frac{1}{V} \int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV \quad (3.18)$$

Sachant que le tenseur de déformation symétrique (équation (2.1)) est un tenseur de déformation infinitésimale Cauchy, le tenseur antisymétrique appelé tenseur des rotations infinitésimales ω_{ij} est défini comme suit :

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} - u_{j,i}) \quad (3.19)$$

Ainsi, le champ de déplacement peut être exprimé en fonction du tenseur des déformations et des rotations infinitésimales, comme suit :

$$u_{ij} = \varepsilon_{ij} + \omega_{ij} \quad (3.20)$$

Par conséquent, en substituant l'équation (2.1), l'équation (3.19) et l'équation (3.20) dans l'équation (3.18).

La micro énergie élastique peut être écrite comme [36] :

$$\langle \sigma_{ij} : \varepsilon_{ij} \rangle = \frac{1}{V} \int_V \sigma_{ij} u_{i,j} dV \quad (3.21)$$

Et l'équation d'équilibre (équation (2.2)) en l'absence de forces de volume :

$$\langle \sigma_{ij} : \varepsilon_{ij} \rangle = \frac{1}{V} \int_V (\sigma_{ij} u_i)_{,j} dV \quad (3.22)$$

Et en appliquant le théorème de Gauss :

$$\langle \sigma_{ij} : \varepsilon_{ij} \rangle = \frac{1}{V} \int_{\Gamma} \sigma_{ij} u_i n_j d\Gamma \quad (3.23)$$

En utilisant les conditions aux limites linéaires de déplacement données par l'équation (3.3) dans l'équation (3.23) :

$$\langle \sigma_{ij} : \varepsilon_{ij} \rangle = \frac{1}{V} \int_{\Gamma} \bar{\varepsilon}_{ij} x_j \sigma_{ik} n_k d\Gamma \quad (3.24)$$

Encore une fois en utilisant le théorème de Gauss :

$$\langle \sigma_{ij} : \varepsilon_{ij} \rangle = \frac{1}{V} \int_V (\bar{\varepsilon}_{ij} x_j \sigma_{ik})_{,k} dV \quad (3.25)$$

Compte tenu de nouveau l'équation d'équilibre (équation (2.2)) en l'absence de forces de volume

$$\begin{aligned} \langle \sigma_{ij} : \varepsilon_{ij} \rangle &= \frac{1}{V} \int_V (\bar{\varepsilon}_{ij} x_j)_{,k} \sigma_{ik} dV = \frac{1}{V} \int_V (\bar{\varepsilon}_{ij,k} x_j + \bar{\varepsilon}_{ij} x_{j,k}) \sigma_{ik} dV = \\ &= \frac{1}{V} \int_V (\bar{\varepsilon}_{ij} \delta_{jk}) \sigma_{ik} dV = \frac{1}{V} \int_V \bar{\varepsilon}_{ik} \sigma_{ik} dV = \frac{\bar{\varepsilon}_{ik}}{V} \int_V \sigma_{ik} dV = \bar{\varepsilon}_{ik} \langle \sigma_{ij} \rangle \end{aligned} \quad (3.26)$$

Et ensuite, le théorème de déformation moyenne, $\langle \varepsilon_{ij} \rangle = \bar{\varepsilon}_{ij}$, la condition de Hill est satisfaite [35]

$$\langle \sigma_{ij} : \varepsilon_{ij} \rangle = \langle \sigma_{ij} \rangle : \langle \varepsilon_{ij} \rangle \quad (3.27)$$

Maintenant, le remplacement de la condition à la limite de la résistance uniforme de la surface, donnée par l'équation (3.4) dans l'équation (3.23) et en l'absence de forces de volume :

$$\langle \sigma_{ij} : \varepsilon_{ij} \rangle = \frac{1}{V} \int_{\Gamma} u_i t_i d\Gamma = \frac{1}{V} \int_{\Gamma} u_i \bar{\sigma}_{ij} n_j d\Gamma \quad (3.28)$$

En appliquant le théorème de Gauss :

$$\langle \sigma_{ij} : \varepsilon_{ij} \rangle = \frac{1}{V} \int_V (u_i \bar{\sigma}_{ij})_{,j} dV \quad (3.29)$$

Comme $\bar{\sigma}_{ij}$ est constant et en utilisant le même raisonnement utilisé pour trouver l'équation (4.21):

$$\langle \sigma_{ij} : \varepsilon_{ij} \rangle = \frac{1}{V} \int_V u_{i,j} \bar{\sigma}_{ij} dV = \frac{\bar{\sigma}_{ij}}{V} \int_V u_{i,j} dV = \bar{\sigma}_{ij} \langle \varepsilon_{ij} \rangle \quad (3.30)$$

Ainsi, le théorème des contraintes moyennes, $\langle \sigma_{ij} \rangle = \bar{\sigma}_{ij}$, [35] :

$$\langle \sigma_{ij} : \varepsilon_{ij} \rangle = \langle \sigma_{ij} \rangle : \langle \varepsilon_{ij} \rangle \quad (3.31)$$

Donc, la condition de Hill est satisfaite à la fois la par le théorème de contrainte moyenne et le théorème de déformation moyenne, qui est, selon l'équation (3.27) et l'équation (3.31), une moyenne volumétrique macroscopique de variation du travail effectué dans le EVR est égale à la variation locale du travail à l'échelle macroscopique, ce qui affecte la condition de macro uniformité, essentielle pour les modèles multi-échelles en utilisant certaines des théories d'homogénéisation [32].

3.3 Critères de défaillance

3.3.1 Introduction

Les matériaux composites ont des mécanismes de défaillance bien plus complexe que les matériaux ordinaires, il doit être tenu compte de tous les types de défaillances de chacun des matériaux constitutifs, augmentant les défaillances de dégradation du composite [30] Les défaillances dans les structures composites comprennent des fibres et la matrice, se produisent essentiellement de quatre façons (Figure 3.3):

- La rupture par traction et par flambage par compression des fibres ;
- La rupture de la matrice ;
- Perte d'adhérence entre les fibres et la matrice ;
- Délamination (séparation des couches du stratifié).

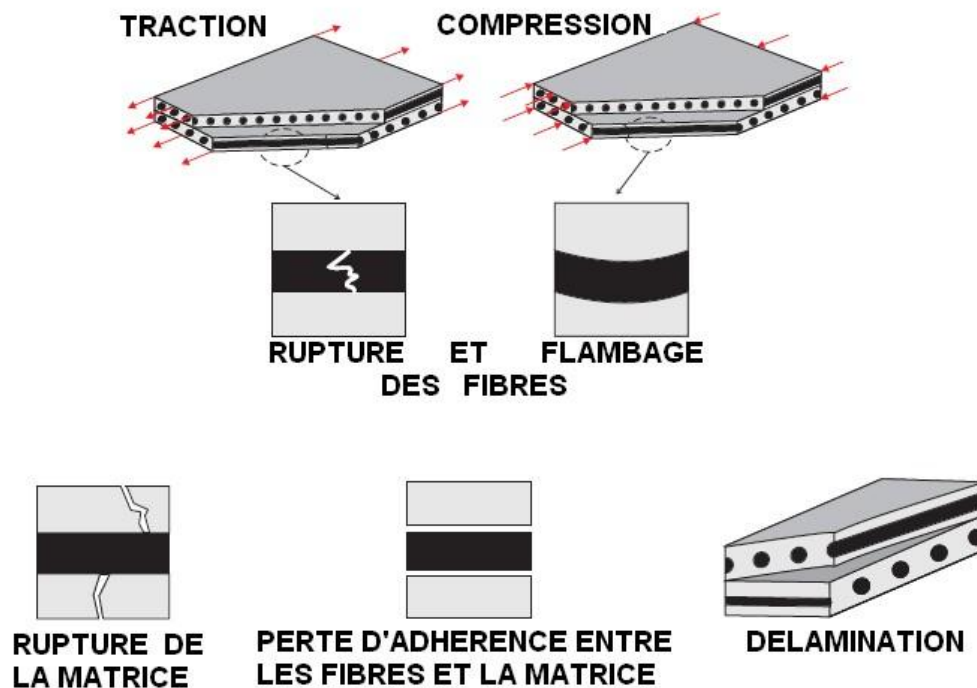


Figure 3.3: modes de défaillance des matériaux composites.

Dans les trois premiers procédés, la défaillance est liée aux propriétés et caractéristiques des matériaux constituant les plis, tandis que dans le dernier, il y a la dépendance du régime de lamination et les contraintes interlaminaire générées.

Cependant, une façon de détecter l'apparition probable de défauts dans les matériaux composites, est d'adopter les concepts de critères de défaillance. Ainsi, pour évaluer la défaillance multi échelle d'un stratifié unidirectionnel, les travaux pertinents présentent une analyse erronée de la microstructure, en utilisant des critères développés des plis, pour détecter les dommages dans un EVR de micro constituants. Ces critères ont été formulés, à savoir le critère de défaillance Tsai-Hill, et le critère de déformation maximale, et utilisés pour détecter les défauts découlaient de la matrice et de fibres, respectivement, qui ont été utilisés en raison de leurs simplicités dans l'évaluation des défaillances des micros constituants du EVR, séparément et individuellement.

Et à la fin, une section présente une brève description du critère LaRC03 (Langley Research Center), utilisé pour comparer avec l'analyse multi-échelle de la défaillance, à savoir, l'analyse de la défaillance multi-échelle a été comparé avec seulement une analyse structurelle du stratifié à l'aide du critère de défaillance LaRC03 pour l'évaluation des défauts.

3.3.2 Critère de Tsai-Hill critère – Défaillance de la matrice

La théorie connue de Tsai-Hill a été créée grâce au travail développé par [49] où ils ont adapté la théorie [50], qui a été initialement développée pour les matériaux homogènes, ductilité et anisotrope, pour des matériaux composites orthotropes, comme dans le cas de stratifiés unidirectionnels.

Ainsi, le critère de Tsai-Hill est ici utilisé pour prédire la défaillance de la matrice de l'EVR, avec l'intention de représenter en raison de charge transversale, à la fois la compression et la traction. L'équation (3.32) est une adaptation de l'équation d'origine du critère de Tsai-Hill pour d'élasticité en trois dimensions, comme suit [37] :

$$\frac{\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 - \sigma_{11}\sigma_{22}}{Y_{mt}^2} + \frac{\tau_{12}^2}{T_m^2} = d_m^2, \quad \sigma_{22} > 0 \quad (3.32)$$

Où ce mode de défaillance est en chargement de traction, à savoir, le mode 1.

De même, pour le mode de rupture en chargement de compression, le mode 2 :

$$\frac{\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 - \sigma_{11}\sigma_{22}}{Y_{mc}^2} + \frac{\tau_{12}^2}{T_m^2} = d_m^2, \quad \sigma_{22} > 0 \quad (3.33)$$

Où les constantes dans les deux équations ci-dessus, et Y_{mt} et Y_{mc} sont respectivement la résistance à la limite en traction et en compression de la matrice et T_m est la résistance à la limite en cisaillement de la matrice. Le défaut de mourir quand $d_m \geq 0$.

3.3.3 Critère de Déformation maximale – Défaillance de la fibre

Pour caractériser la défaillance de la fibre de l'EVR en raison d'une charge longitudinale, à la fois en compression et en traction, le critère de la déformation maximale est utilisé. Ce critère est l'un des critères les plus simples de rupture pour les matériaux composites. Il considère que la défaillance se produit lorsque l'une des déformations calculées sur les principaux axes de la matière (ε_{11} , ε_{22} ou ε_{12}) dépasse les limites obtenues par les tests expérimentaux.

Ainsi, l'adoption de ce critère pour éviter la défaillance de la fibre due à la rupture de la fibre en traction longitudinale [37] :

$$\frac{\varepsilon_{11}}{\varepsilon_{ft}^u} = d_f^2, \quad \varepsilon_{11} > 0 \quad (3.34)$$

Et de même, pour le mode de défaillance en chargement de compression est :

$$\frac{\varepsilon_{11}}{\varepsilon_{fc}^u} = d_f^2, \quad \varepsilon_{11} > 0 \quad (3.35)$$

où ε_{ft}^u et ε_{fc}^u sont respectivement la déformation finale de compression et de traction de la fibre. La défaillance de la fibre née lorsque $d_f \geq 0$.

3.3.4 Critère LaRC03 pour l'analyse structurale de stratifié

Comme il est mentionné ci-dessus, pour comparer l'analyse de défaillance multi-échelle présentée ici, Il a été utilisé comme critère de comparaison LaRC03 dans l'analyse impliquant seule la gamme de stratifié structurel en question, à savoir sans rechercher la contribution des micros constituants.

En plus d'une brève description du critère de défaillance LaRC03 proposé par Davila et al[50], qui a été fondée sur les concepts proposés par Hashin et Rotem [51] et le principe de plan de faille proposé par Puck et Schürmann [52], ayant son nom originaire à partir des études dans le centre de recherche de la National Aeronautics and Space Administration (NASA) dans lequel le critère a été développé. C'est un nouveau critère de défaillance basé sur des phénomènes physiques et il se résume à six indices de défaillance, chacun sur la base d'un type différent de défaillance des microstructures,

dont trois liés à la rupture des fibres et trois en ce qui concerne la défaillance de la matrice, et qui ne sont pas reliés entre eux.

Dans cette théorie, dans le cas d'une défaillance de la matrice en compression transversale, l'angle du plan de défaillance est plan de défaillance. Calculé à partir de la contrainte effective maximale de Mohr-Coulomb. Et le critère pour le pliage des fibres est obtenu en calculant le désalignement des fibres en raison du chargement et l'application du critère de défaillance de la matrice dans les coordonnées de la structure désaligné. En outre, les modèles de mécanique de la rupture sont utilisés pour développer un critère pour la défaillance de la matrice en traction et de calculer la résistance limite sur le

Faire seulement une simplification du critère des indices de défaillance de LaRC03, notant que cela a été seulement utilisé comme comparaison, et sa formulation complète ne fait pas partie de ce travail, et donc pour le lecteur qui veut plus de détails sur ce critère, sont données pour référence [50], ou puis les références [51] et [52] qui ont appliqué les critères LaRC03 dans leur travail, en utilisant la MEF et la BEM, respectivement. Nous avons donc :

- Mode 1 : Défaillance de la matrice en raison de la fissuration en compression transversale.
- Mode 2 : Défaillance de la matrice due à la fissuration sous traction transversale.
- Mode 3 : Défaillance de la fibre due à la rupture de la fibre en traction longitudinale.
- Mode 4 : Défaillance de la fibre en raison du pliage de la fibre sous compression longitudinale et transversale.
- Mode 5 : Défaillance de la fibre en raison de pliage de la fibre sous compression longitudinale et traction transversale.
- Mode 6 : défaillance de la matrice en compression bi axiale.

Chapitre 04

Modélisation et mise en œuvre numérique

CHAPITRE 04

Modélisation et mise en œuvre numérique

4.1 Introduction

Dans ce chapitre, les formulations de la Méthode des éléments de frontière (BEM) tant pour la résolution élastique des problèmes macroscopiques que pour les problèmes microscopiques sont présentés, ainsi que la construction du code de calcul utilisé dans l'analyse multi échelle de la défaillance.

4.2 Méthode des éléments de frontière (BEM)

4.2.1 Théorème de Betti et Identité de Somigliana

L'identité de Somigliana est une méthode de formulation des équations intégrales de frontière obtenue à partir du théorème de Betti pour des problèmes d'élasticité, à savoir les équations de la BEM peuvent être dérivées par la méthode des résidus pondérés, en commençant par l'équation d'équilibre (équation (3.3)), sans tenir compte des forces de volume (b_i) [40] :

$$\int_{\Omega} (\sigma_{ji,j}) W_i d\Omega = 0 \quad (4.1)$$

Où W_i sont les fonctions de pondération. L'intégration par parties de l'équation (4.1) :

$$\int_{\Omega} (\sigma_{ij} W_i)_{,j} d\Omega = \int_{\Omega} \left([\sigma_{ij} W_i]_{,j} - \sigma_{ij} W_{i,j} \right) d\Omega \quad (4.2)$$

L'application du théorème de Gauss au premier terme du côté droit de l'égalité de l'équation (5.2), en le remplaçant dans l'équation (4.1) et en application le concept du tenseur de Cauchy (équation (3.7)), nous aurons :

$$\int_{\Gamma} t_i w_i d\Gamma = \int_{\Omega} \sigma_{ij} W_{i,j} d\Omega \quad (4.3)$$

L'équation (5.3) peut être interprétée comme l'équation intégrale de l'équilibre, elle concerne les termes de forces de surface et des contraintes. Ainsi, en utilisant la relation contrainte-déformation (équation (3.4)) et en sélectionnant la fonction $W_i = u_i^{(2)}$, où $u_i^{(2)}$ est un champ de déplacement arbitraire, et intégrant par parties le terme à droite de l'équation (4.3) :

$$\int_{\Omega} C_{ijkl} u_{k,l} u_{i,j}^{(2)} d\Omega = \int_{\Omega} C_{ijkl} \left([u_k u_{i,j}^{(2)}]_{,l} - u_k u_{i,jl}^{(2)} \right) d\Omega \quad (4.4)$$

Substituant l'équation (4.4) dans l'équation (4.3) et en utilisant l'équation d'équilibre (équation 2.3)) et le tenseur de Cauchy transformé (équation (2.7)) en même temps que l'application du théorème de la divergence, nous aurons l'expression connue comme théorème réciproque de Betti :

$$\int_{\Gamma} t_i^{(1)} u_i^{(2)} d\Gamma = \int_{\Gamma} t_i^{(2)} u_i^{(1)} d\Gamma \quad (4.5)$$

Dans l'équation ci-dessus, les quantités statiques et dynamiques indiqués par les indices supérieurs (1) et (2) sont associées à deux états stables différents. L'un d'eux peut être défini par la solution Kelvin, soit le champ de déplacement qui satisfait problème Kelvin :

$$\sigma_{ji,j} - \delta(X - X') \delta_{ik} = 0 \quad (4.6)$$

Où $\delta(x-x')$ est la distribution de Dirac et δ_{ij} est le delta Kronecker. La solution Kelvin (x', x), aussi connue comme la solution fondamentale, décrit le déplacement d'un point x dans un champ infini long de la j -ème direction, provoqué par une force unité agissant au point x' dans la direction de i -ème. La solution dépend de la longueur du vecteur lien de x' à x [40]

$$r = |X - X'| \quad (4.7)$$

En appliquant les équations géométriques (équation (3.1)), l'équation constitutive (équation (3.2)), et tenseur des contraintes de Cauchy transformé (équation (2.7)), on peut en déduire les forces de surface correspondant à la solution Kelvin, liée à surface définie par le vecteur normal n_i . Ainsi, la solution fondamentale pour les forces de surface $T_{ij}(x', x)$ est définie.

On peut supposer que les Etats $u_i^{(1)}, t_i^{(1)}$ dans l'équation (4.5) sont des états réels $u_i(x), t_i(x)$ du corps, et les états $u_i^{(2)}, t_i^{(2)}$ sont décrits par les solutions fondamentales. Ainsi, l'équation (4.5) peut être réécrite comme :

$$C_{ij} u_j(X') + \int_{\Gamma} T_{ij}(X', X) u_j(X) d\Gamma(X) = \int_{\Gamma} U_{ij}(X', X) t_j(X) d\Gamma(X) \quad (4.8)$$

Par conséquent, l'identité de Somigliana, qui est l'équation de base de la BEM a été ainsi obtenue. Les symboles x' et x désigne le point de placement et de point d'intégration, respectivement, et les valeurs des coefficients d'influence c_{ij} dépendent de l'emplacement du point x' :

$$C_{ij} = \begin{cases} \delta_{ij}, & \text{para } X' \in \text{int}\Omega \\ 0, & \text{para } X' \notin \Omega \end{cases} \quad (4.9)$$

Les valeurs sont implicites dans les propriétés de distribution de Dirac, qui définit le volume du champ de force du problème de Kelvin (équation (4.6)). Définitions généralement utilisées pour décrire les problèmes potentiels peuvent être généralisés à appliquer sur les problèmes d'élasticité linéaire. Ainsi, dans l'identité de Somigliana, les termes suivants peut être répertorié [40] :

- Densité potentielle d'une simple couche $t_j(x)$:

$$\int_{\Gamma} U_{ij}(X', X) t_j(X) d\Gamma(X), X' \in \Omega, X \in \Gamma \quad (4.10)$$

- Densité potentielle de double couche $u_j(x)$:

$$\int_{\Gamma} T_{ij}(X', X) u_j(X) d\Gamma(X), X' \in \Omega, X \in \Gamma \quad (4.11)$$

L'identité Somigliana peut être utilisée pour calculer les déplacements des points à l'intérieur du domaine que si les déplacements et les dérivées sont connus dans le contour. Toutefois, si le point de placement converge sur la limite, les potentiels dépendent des quantités inconnues à ce stade. De plus, si $x = x'$, les solutions fondamentales (x', x) et (x, x') sont uniques car elles dépendent de $\ln(r)$ (faible singularité) et r^{-1} (forte singularité), respectivement. Par conséquent, tous les potentiels sont tout à fait inappropriés.

Le potentiel de densité double couche peut être interprétée comme la valeur principale de Cauchy et a une influence directe sur les coefficients de c_{ij} . Si les limites x' est lisse, les coefficients sont définis comme suit :

$$C_{ij} = \frac{1}{2} \delta_{ij} \quad (4.12)$$

En outre, si le contour n'est pas lisse, les coefficients peuvent être déterminés de manière explicite par la fonction d'angles entre les coins. Cependant, d'une manière plus commode par application de la méthode de mouvement de corps rigides. C'est la formulation directe de la BEM, pour les déplacements et les forces de surface qui se produisent dans l'équation intégrale.

4.2.2 Discrétisation

La solution de l'équation intégrale à la frontière est obtenue par approximation de la géométrie du corps analysé et ses grandeurs physiques. Le contour du corps peut être divisé en éléments définis comme illustré sur la figure (4.1).

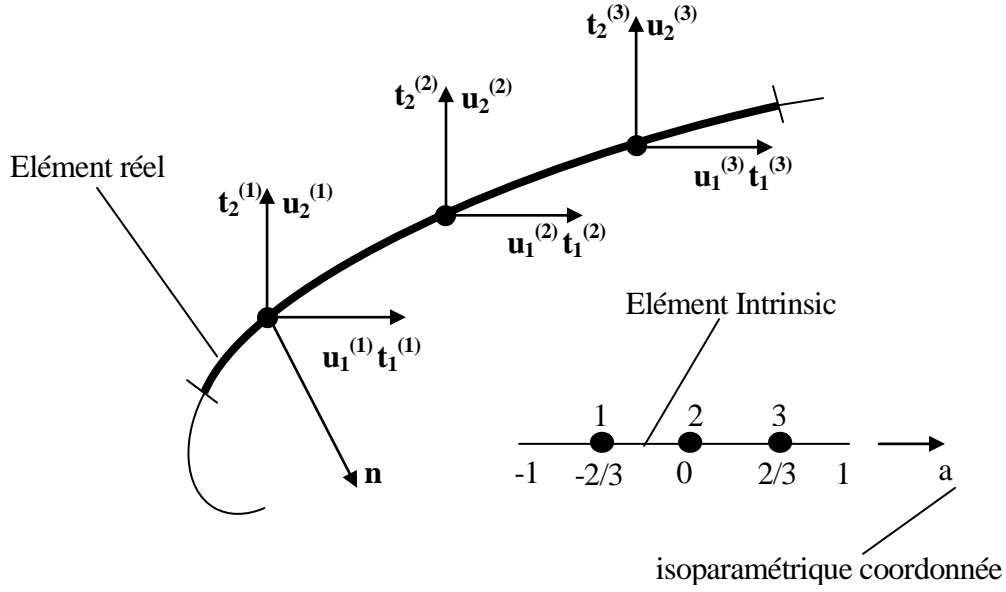


Figure 4.1: contour Discrétisation en éléments quadratiques discontinus.

Les coordonnées des points de la frontière x_i , les déplacements u_i et les forces de tractions t_i sont approchées par :

$$x_i = \sum_{n=1}^N h_n(\xi) x_i^{en} \quad (4.13)$$

$$u_i = \sum_{n=1}^N h_n(\xi) u_i^{en} \quad (4.14)$$

$$t_i = \sum_{n=1}^N h_n(\xi) t_i^{en} \quad (4.15)$$

Ou élargies sous une forme de matrice, respectivement [55]:

$$X = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1(\xi) & 0 & h_2(\xi) & 0 & h_3(\xi) & 0 \\ 0 & h_1(\xi) & 0 & h_2(\xi) & 0 & h_3(\xi) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1^{(e1)} \\ x_2^{(e1)} \\ x_1^{(e2)} \\ x_2^{(e2)} \\ x_1^{(e3)} \\ x_2^{(e3)} \end{Bmatrix} \quad (4.16)$$

$$U = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1(\xi) & 0 & h_2(\xi) & 0 & h_3(\xi) & 0 \\ 0 & h_1(\xi) & 0 & h_2(\xi) & 0 & h_3(\xi) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^{(e1)} \\ u_2^{(e1)} \\ u_1^{(e2)} \\ u_2^{(e2)} \\ u_1^{(e3)} \\ u_2^{(e3)} \end{Bmatrix} \quad (4.17)$$

$$t = \begin{Bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1(\xi) & 0 & h_2(\xi) & 0 & h_3(\xi) & 0 \\ 0 & h_1(\xi) & 0 & h_2(\xi) & 0 & h_3(\xi) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t_1^{(e1)} \\ t_2^{(e1)} \\ t_1^{(e2)} \\ t_2^{(e2)} \\ t_1^{(e3)} \\ t_2^{(e3)} \end{Bmatrix} \quad (4.18)$$

Où : $h_n(\xi)$ - sont les fonctions de forme définies par rapport aux coordonnées locales (isoparamétriques) ξ associée à un élément de contour e , N est le nombre de nœuds dans élément et x_i^{en} , u_i^{en} et t_i^{en} sont les coordonnées, les composantes de déplacement et composantes de contraintes mesurées sur le $n^{\text{ième}}$ nœud du $e^{\text{nième}}$ élément, respectivement.

Dans cette étude, le type d'élément utilisé pour la discrétisation du problème, est l'élément à trois nœuds avec des fonctions de forme quadratique discontinues (Figure 4.1), celles-ci permettent la modélisation des éléments courbes et sont particulièrement adaptés pour des problèmes qui présentent des gradients élevés et sont définies par :

$$h_1 = \xi \left(\frac{9}{8}\xi - \frac{3}{4} \right), h_2 = 1 - \frac{9}{4}\xi^2, h_3 = \xi \left(\frac{9}{8}\xi + \frac{3}{4} \right) \quad (4.19)$$

Pour réaliser la transformation de coordonnées globales de x_i aux coordonnées locales ξ , la limite de l'équation différentielle est utilisée :

$$d\Gamma(X) = J(X)d\xi \quad (4.20)$$

Où le Jacobien de la transformation est égale à :

$$J(x) = \left[\left(\frac{\partial x_1}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial \xi} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (4.21)$$

Les composantes du vecteur unitaire normal à la frontière, présente dans la solution fondamentale des forces surfaciques Les composantes de la normale à la limite vecteur unitaire présente dans la solution fondamentale de force surfacique :

$$n_1 = \frac{1}{J(\xi)} \frac{\partial x_2}{\partial \xi}, n_2 = -\frac{1}{J(\xi)} \frac{\partial x_1}{\partial \xi} \quad (4.22)$$

4.2.3 Système équation

L'équation (4.8) se réfère à l'équation de base de la BEM, et c'est à partir d'elle qu'on assemble le système d'équations à résoudre, par la méthode. Ainsi, la BEM constitue la discrétisation de l'équation (5.8) approche la frontière Γ en E éléments, ce qui entraîne :

$$c_{ij}u_j(X') + \sum_{e=1}^E \sum_{n=1}^N u_i^{en} \int_{-1}^1 T_{ij}[(X', X(\xi))] h_n(\xi) J(\xi) d\xi = \sum_{e=1}^E \sum_{n=1}^N t_i^{en} \int_{-1}^1 U_{ij}[(X', X(\xi))] h_n(\xi) J(\xi) d\xi \quad (4.23)$$

Chaque nœud est considéré comme un point de placement, en outre, le nombre total qui coïncide avec les nœuds numérotés localement dans un élément dans l'équation (4.23), avec les chiffres globaux respectifs 1, 2, ..., S devraient être introduits, avec S indiquant le nombre total de nœuds dans le contour. Dérivation ainsi, l'ensemble du système d'équations :

$$\begin{bmatrix} \bar{H}^{11} & \dots & H^{1b} & \dots & H^{1S} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ H^{a1} & \dots & \bar{H}^{ab} & \dots & H^{aS} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ H^{S1} & \dots & H^{Sb} & \dots & \bar{H}^{SS} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u^1 \\ \vdots \\ u^b \\ \vdots \\ u^S \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G^{11} & \dots & G^{1e} & \dots & G^{1E} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G^{a1} & \dots & G^{ae} & \dots & G^{aE} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G^{S1} & \dots & G^{Se} & \dots & G^{SE} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t^1 \\ \vdots \\ t^e \\ \vdots \\ t^E \end{Bmatrix} \quad (4.24)$$

H^{ab} pour $a \neq b$ sont les sous-matrices contenant les intégrales dépendantes de la solution fondamentale $T_{ij}(x', x)$ calculées pour le $a^{\text{ième}}$ nœud qui est le point de placement, sur b -ième élément qui contient les points d'intégration. Le bloc diagonal \bar{H}^{ab} contient les sommations des intégrales précitées et les coefficients d'influence c_{ij} , pour le cas du point de placement appartenant à l'élément sur lequel l'intégration est effectuée. Les vecteurs u^b contiennent les composants de déplacement du b -ième élément.

G^{ae} contient les intégrales dépendantes de la solution fondamentale $U_{ij}(x', x)$, calculée pour le a ième nœud qui est le point de placement, sur e -ième élément qui contient les points d'intégration. Les vecteurs t^e contiennent les composantes des forces de surface des nœuds du e -ième élément.

Il est intéressant de noter que la matrice sur le côté droit est de forme rectangulaire, le fait que les éléments de frontière sont considérés séparément, à savoir, les intégrales calculées sur les deux éléments adjacents et le point de placement chevauchant le nœud de connexion, ne sont pas ajoutées, elles sont stockées comme des entrées différentes, de sorte que vous pouvez modéliser une discontinuité de forces de surface de correspondance à deux éléments adjacents.

Le bloc diagonal \bar{H}^{aa} dans l'équation (4.24) peut être calculé en utilisant le mouvement de la méthode du corps rigide, par exemple, s'il n'y a pas de résistance de surface ($t^e = 0$, pour tous e) et tous les déplacements dans v -ième direction sont égaux à 1 ($u^a = v = [\delta_{1v}\delta_{2v}]^T$ pour tous les a et $v = 1,2$), l'équation suivante est satisfaite [40] :

$$(\bar{H}^{aa} + \sum_{a \neq b} H^{ab})v = 0, v = 1,2; a = 1,2, \dots, S \quad (4.25)$$

Cela implique :

$$\bar{H}^{aa} = -\sum_{a \neq b} H^{ab}, a = 1,2, \dots, S \quad (4.26)$$

La forme compacte de l'équation (4.24) est écrite comme suit :

$$Hu = Gt \quad (4.27)$$

Les conditions aux limites sont imposées par le réarrangement du système d'équations consistant à regrouper des quantités inconnues sur le côté gauche et le côté droit en des quantités connues. En pratique, les colonnes sélectionnées de la matrice H sont remplacées (avec le signe inversé) dans les colonnes correspondantes de la matrice G, sont également additionnés, si besoin est (par exemple, de correspondance d'éléments adjacents). Par conséquent, le système prend la forme :

$$Ay = f \quad (4.28)$$

Où la matrice **A** contient les colonnes sélectionnées des matrices H et G, respectivement, avec des signes appropriés, le vecteur **y** contient les quantités inconnues du contour et le vecteur **f** contient les quantités connues du contour multipliées par les colonnes sélectionnées de la matrice H et G, ce qui correspond aux valeurs connues. Il est intéressant de noter que les matrices du système d'équations

sont complètement remplies et non symétriques, ce qui peut être un inconvénient significatif de la BEM classique.

4.2.4 Équations intégrales Singulières

L'équation (4.8) pour une source ponctuelle dans le champ est écrite comme suit :

$$u_j + \int_{\Gamma} T_{ij} u_i d\Gamma = \int_{\Gamma} U_{ij} t_i d\Gamma \quad (4.29)$$

Ainsi, une fois que la source ponctuelle est interne, l'équation contient uniquement des intégrands réguliers. Considérons maintenant la limite de la transition lorsque le point source tend vers le contour. Cette opération peut être réalisée en plaçant le point de source sur la frontière et en réduisant le domaine du problème par une région semi-circulaire avec le contour Γ_l^* et de rayon l , centré sur le point d'origine, comme le montre la figure (4.2) Avec cette configuration, le contour complet est divisé en deux parties sous la forme :

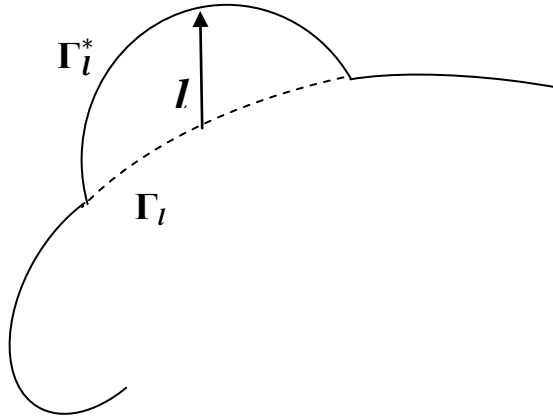


Figure 4.2: Point source situé sur la frontière, entouré d'une zone semi-circulaire.

$$\Gamma = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (\Gamma - \Gamma_l + \Gamma_l^*) \quad (4.30)$$

Où l est le rayon du demi-cercle de centre la source ponctuelle, appartenant à contour Γ . L'équation (4.29) est alors réécrite comme :

$$u_k + \lim_{l \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma_l + \Gamma_l^*} T_{ki} u_i d\Gamma = \lim_{l \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma_l + \Gamma_l^*} U_{ki} t_i d\Gamma \quad (4.31)$$

L'intégrale du côté droit de l'équation (4.31) contient un intégrand de singularité faible, de l'ordre $\ln(1/r)$, est intégrable comme une intégrale impropre. L'intégrale du côté gauche a une forte

singularité, de l'ordre $1/r$, qui peut être corrigée avec le premier terme du développement de Taylor autour de la source ponctuelle, à savoir :

$$\begin{aligned} \lim_{l \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma_l + \Gamma_l^*} T_{ki} u_i(X) d\Gamma &= \lim_{l \rightarrow 0} \int_{\Gamma_l^*} T_{ki} [u_i(X) - u_i(X')] d\Gamma + \\ &u_i(X') \lim_{l \rightarrow 0} \int_{\Gamma_l^*} T_{ki} d\Gamma + \\ &\lim_{l \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma_l} T_{ki} d\Gamma \end{aligned} \quad (4.32)$$

En supposant que les déplacements sont continus au niveau de la source ponctuelle, le premier terme du côté droit de l'équation (4.32) est intégrable et disparaît dans le processus de limite. Le second terme de l'équation représente un saut de déplacement donné par $(x')(x')$, dans lequel $A_{ij}(x')$ est une constante qui dépend de la géométrie locale et de la constante élastique. Enfin, le troisième terme du côté droit de l'équation résultat de l'intégrale impropre est calculé dans le sens de la valeur principale de Cauchy. Ainsi, lorsque $l \rightarrow 0$, le point source tend vers le contour et, en fin de compte, l'équation (4.29) peut être écrite comme :

$$c_{ki} u_i + \oint T_{ki} u_i d\Gamma = \int_{\Gamma} U_{ki} t_i d\Gamma \quad (4.33)$$

Où \oint représente l'intégrale dans le sens de la valeur principale de Cauchy. La géométrie de l'élément iso paramétrique quadratique (figure 5.1) définit l'ensemble du contour, qui peut être écrite comme suit :

$$H^{(j)} = \oint_{\Gamma_j} T_{ki} h_j d\Gamma_j = \oint_{-1}^1 T_{ki} h_j |J| d\xi \quad (4.34)$$

$$G^{(j)} = \int_{\Gamma_j} U_{ki} h_j d\Gamma_j = \int_{-1}^1 U_{ki} h_j |J| d\xi \quad (4.35)$$

Où $|J|$ étant le jacobien du module de transformation $(x_1, x_2) \rightarrow \xi$ donné par l'équation (4.21).

4.3 Méthode des éléments de frontière à l'échelle macro

4.3.1 Introduction

D'abord, il est nécessaire de résoudre le problème de l'élastique à l'échelle macro, pour déterminer les tenseurs macroscopiques utilisés comme données d'entrée, pour commencer l'analyse à l'échelle micro. Ainsi, le modèle structurelle macro-échelle utilisée est un stratifié de matériaux composites

unidirectionnels, qui présente un comportement isotrope transversal (en particulier orthotrope). Dans le présent travail, la modélisation numérique du stratifié utilise la formulation BEM pour l'élasticité anisotrope, grâce à des programmes adaptés développés par l'équipe ASTREF (Analyse des Structures par Éléments de Frontière) du Laboratoire de Mécanique Appliqué de l'Université des Sciences et de la Technologie d'Oran Mohamed Boudiaf.

4.3.2 Elasticité pour matériaux anisotropes

Les relations constitutives des matériaux anisotropes ont été décrites dans le chapitre 2, mais pour formuler les solutions fondamentales anisotropes, il est nécessaire de faire une étude plus détaillée de l'élasticité anisotrope.

Afin de garantir l'unicité des déplacements, les composantes du tenseur de déformation (équation (2.1)) ne peuvent pas être désigné de façon arbitraire et doivent satisfaire aux conditions de compatibilité et d'intégrabilité. La compatibilité est donnée par l'équation

$$\varepsilon_{ij,kl} + \varepsilon_{kl,ij} - \varepsilon_{ik,jl} - \varepsilon_{jl,ik} = 0 \quad (4.36)$$

Pour le cas 2D elle est réduite à la forme :

$$\varepsilon_{11,22} + \varepsilon_{22,11} = \varepsilon_{12,12} \quad (4.37)$$

Dans le cas d'un matériau élastique linéaire, la relation entre le tenseur de déformations et tenseur de contraintes peut être écrite en inversant la loi de Hooke généralisée (équation (2.2)), comme suit :

$$\varepsilon_{ij} = S_{ijkl}\sigma_{kl} \quad (4.38)$$

Où S_{ijkl} est le tenseur du 4^{eme} ordre qui caractérise la matière, connue sous le nom de tenseur de flexibilité, qui, en raison des mêmes simplifications données par les relations de symétrie (équation (2.5)), dispose de 21 composantes, dont 18 sont indépendantes.

L'équation (4.38) peut être écrite sous forme matricielle :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{1111} & S_{1112} & S_{1133} & 2S_{1123} & 2S_{1113} & 2S_{1112} \\ S_{1112} & S_{2222} & S_{2233} & 2S_{2223} & 2S_{2213} & 2S_{2212} \\ S_{1133} & S_{2233} & S_{3333} & 2S_{3323} & 2S_{3313} & 2S_{3312} \\ 2S_{1123} & 2S_{2223} & 2S_{3323} & 4S_{2323} & 4S_{2313} & 4S_{2312} \\ 2S_{1113} & 2S_{2213} & 2S_{3313} & 4S_{2313} & 4S_{1313} & 4S_{1312} \\ 2S_{1112} & 2S_{2212} & 2S_{3312} & 4S_{2312} & 4S_{1312} & 4S_{1212} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} \quad (4.39)$$

En utilisant la notation tensorielle donnée par [44], l'équation (4.39) peut être écrite comme :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} \\ a_{14} & a_{24} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} \\ a_{15} & a_{25} & a_{53} & a_{54} & a_{55} & a_{56} \\ a_{16} & a_{26} & a_{63} & a_{64} & a_{65} & a_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} \quad (4.40)$$

Où :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{12} \end{Bmatrix} \quad (4.41)$$

Et :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} \quad (4.42)$$

Les coefficients élastiques peuvent être exprimés en termes de constantes techniques comme [44]

$a_{11} = 1/E_1,$	$a_{12} = \nu_{12}/E_1 = -\nu_{21}/E_2,$
$a_{13} = \nu_{31}/E_1 = -\nu_{13}/E_3,$	$a_{14} = \eta_{23,1}/E_1 = \eta_{1,23}/G_{23},$
$a_{15} = \eta_{32,1}/E_1 = \eta_{1,32}/G_{23},$	$a_{16} = \eta_{12,1}/E_1,$
$a_{22} = 1/E_2,$	$a_{23} = \nu_{32}/E_3 = -\nu_{23}/E_2,$
$a_{24} = \eta_{23,1}/E_2 = \eta_{23,3}/G_{23},$	$a_{25} = \eta_{31,2}/E_2 = \eta_{2,31}/G_{13},$
$a_{26} = \eta_{12,2}/E_2 = \eta_{2,12}/G_{12},$	$a_{33} = 1/E_3,$
$a_{34} = \eta_{23,3}/E_3 = \eta_{3,23}/G_{23},$	$a_{35} = \eta_{31,1}/E_3 = \eta_{3,31}/G_{13},$
$a_{36} = \eta_{12,3}/E_3 = \eta_{3,12}/G_{12},$	$a_{44} = 1/G_{23},$
$a_{45} = \zeta_{32,23}/G_{23} = \zeta_{23,31}/G_{13},$	$a_{46} = \zeta_{12,23}/G_{23} = \zeta_{23,12}/G_{12},$

Où E_k sont les modules d'élasticité longitudinaux ou modules de Young, se référant aux axes de x_k , G_{ij} sont les modules d'élasticité transversaux, ou modules Coulomb, définis par les axes $x_i x_j$. Les coefficients ν_{ij} sont les coefficients de Poisson. Les constantes η_{jk} , sont les coefficients d'influence mutuelle du premier type, qui présentent des extensions dans les directions des axes principaux, produits par les contraintes de cisaillement agissant sur les plans principaux. Les constantes η_l sont les coefficients d'influence mutuelle du deuxième type, exprimant des déformations tangentielles sur les plans principaux, causées par des contraintes normales agissant sur les plans principaux. Enfin, ζ_{ij} , sont les coefficients de Chentsov qui caractérisent la déformation de cisaillement dans des plans parallèles aux plans principaux de l'élasticité, causées par des contraintes tangentielles qui agissent sur d'autres plans, parallèles aux plans principaux de l'élasticité.

Dans l'ECP, un matériau peut être décrit en utilisant seulement six constantes élastiques indépendantes. Ainsi, l'équation (4.40) peut être écrite comme la relation contrainte-déformation (équation (2.25)), en utilisant uniquement la notation donnée par [44], pour la matrice de flexibilité :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{22} & a_{16} \\ a_{12} & a_{22} & a_{26} \\ a_{16} & a_{26} & a_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{Bmatrix} \quad (4.44)$$

En substituant la relation de contrainte-déplacement (équation (2.1)) et la loi de Hooke généralisée (équation (2.2)), l'équation d'équilibre (équation (2.3)), et en intégrant sur l'épaisseur, on obtient l'équation d'équilibre écrite en fonction du déplacement :

$$C_{ijkl} u_{k,jl} + p_i = 0 \quad (4.45)$$

où $p_i = (b_i - \ddot{u})$ est le terme qui contient les forces de volume.

Le tenseur de contraintes peut être écrit en termes de fonctions (x_1, x_2) , appelées fonction de contraintes d'Airy [44], donné par:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= F_{,22} + U, \\ \sigma_{22} &= F_{,11} + U, \\ \sigma_{12} &= -F_{,12} \end{aligned} \quad (4.46)$$

Où \mathcal{U} est une fonction potentielle dans laquelle :

$$U_{,i} = p_i \quad (4.47)$$

En substitution les équations (4.46) dans l'équation (4.44), puis dans l'équation (4.37), résultant dans l'équation différentielle pour les fonctions de contraintes $F(x_1, x_2)$ donnée par :

$$\begin{aligned} a_{11}F_{,2222} - 2a_{16}F_{,1222} + (2a_{12} + a_{66})F_{,1112} + a_{22}F_{,1111} = \\ -(a_{12} + a_{22})U_{,11} + (a_{16} + a_{26})U_{,12} - (-a_{11} + a_{12})U_{,22} \end{aligned} \quad (4.48)$$

En l'absence des forces du volume, l'équation (4.48) peut être écrite comme suit :

$$a_{11}F_{,2222} - 2a_{16}F_{,1222} + (2a_{12} + a_{66})F_{,1112} - 2a_{26}F_{,1112} + a_{22}F_{,1111} = 0 \quad (4.49)$$

Création de l'opérateur différentiel :

$$\Delta_k = \frac{\partial}{\partial x_2} - \mu_k \frac{\partial}{\partial x_1} \quad (4.50)$$

Appliquant cet opérateur dans la fonction de contraintes (x_1, x_2) sous la forme

$$\Delta_1 \Delta_2 \Delta_3 \Delta_4 F = 0 \quad (4.51)$$

Et l'expansion de l'équation (4.51) :

$$\begin{aligned} F_{,2222} - (\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4) F_{,1222} + (\mu_1 \mu_2 + \mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4 + \mu_2 \mu_3 + \mu_2 \mu_4 + \mu_3 \mu_4) F_{,1122} \\ - (\mu_1 \mu_2 \mu_3 + \mu_1 \mu_2 \mu_4 + \mu_1 \mu_3 \mu_4 + \mu_2 \mu_3 \mu_4) F_{,1112} + (\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4) F_{,1111} = 0 \end{aligned} \quad (4.52)$$

L'équation (4.49) et l'équation (4.52) seront identiques si μ_1, μ_2, μ_3 et μ_4 sont les racines de l'équation

$$: a_{11}\mu^4 - 2a_{16}\mu^3 + (2a_{12} + a_{66})\mu^2 - 2a_{26}\mu + a_{22} = 0 \quad (4.53)$$

Les racines de l'équation (4.53) sont toujours complexes ou imaginaires purs, se produisant par paires μ_k et $\bar{\mu}_k$ comme indiqué par [44]. Création de la variable :

$$z_k = x_1 - \mu_k x_2 \quad k = 1, 2 \quad (4.54)$$

Nous avons ce qui suit

$$\Delta_k = \frac{\partial}{\partial x_2} - \mu_k \frac{\partial}{\partial x_1} = \frac{d}{dz_k} \quad (4.55)$$

Exiger que la fonction de contraintes soit réelle, nous avons :

$$F(x_1, x_2) = 2Re[F_1(z_1) + F_2(z_2)] \quad (4.56)$$

Introduisant la notation

$$\frac{F_k(z_k)}{dz_k} = \psi_k(z_k) \quad (4.57)$$

Lorsque la convention de sommation ne soit pas utilisée dans k , et la substitution de l'équation (4.56) dans l'équation (4.46), on obtient les composantes des contraintes :

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= 2Re[\mu_1^2 \psi_1^{(1)}(z_1) + \mu_2^2 \psi_2^{(1)}(z_2)], \\ \sigma_{22} &= 2Re[\psi_1^{(1)}(z_1) + \psi_2^{(1)}(z_2)], \\ \sigma_{12} &= -2Re[\mu_1 \psi_1^{(1)}(z_1) + \mu_2 \psi_2^{(1)}(z_2)], \end{aligned} \quad (4.58)$$

Où $\psi_k^{(1)}$ est la dérivée première de k .

Substituant l'équation (4.58) dans l'équation (4.44), puis l'équation (4.45), sans tenir compte du mouvement des corps rigides et en intégrant, on obtient :

$$\begin{aligned} u_1 &= 2Re[q_{11}\psi_1(z_1) + q_{12}\psi_2(z_2)], \\ u_2 &= 2Re[q_{21}\psi_1(z_1) + q_{22}\psi_2(z_2)] \end{aligned} \quad (4.59)$$

Où

$$q_{ik} = \begin{bmatrix} a_{11}\mu_k^2 + a_{12} - a_{16}\mu_k \\ a_{12}\mu_k + a_{22}/\mu_k - a_{26} \end{bmatrix} \quad (4.60)$$

C'est une matrice de paramètres complexes.

Une fois que les conditions aux limites sont connues, déterminer la fonction de contraintes, donnée par les équations (4.46) avec des dérivés donnés par l'équation (4.57), qui satisfait à ces conditions, déterminant ainsi les champs de déplacement, donnés par les relations équation (4.59), et des contraintes, données par les relations de l'équation (4.58).

4.3.3 Solutions fondamentales anisotropes

Pour obtenir les solutions fondamentales statiques pour des problèmes à deux dimensions dans les matériaux anisotropes, le domaine sera mappé dans un plan complexe en utilisant le changement de variable suivant :

$$z' = \begin{Bmatrix} z'_1 \\ z'_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x'_1 + \mu_1 x'_2 \\ x'_1 + \mu_2 x'_2 \end{Bmatrix} \quad (4.61)$$

Et

$$z = \begin{Bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_1 + \mu_1 x_2 \\ x_1 + \mu_2 x_2 \end{Bmatrix} \quad (4.62)$$

Où μ_k sont les racines complexes de l'équation (4.53), x'_1 et x'_2 sont les coordonnées de la source ponctuelle (point de la charge de l'unité d'application) et x_1 et x_2 sont les coordonnées du point champ (le point d'obtention de la réponse due à l'application de la charge de l'unité). Si en considérant un contour fermé Γ autour de la limite du point de source et s'il est utilisé comme forces surfaciques définies par l'équation (2.7) et comme les contraintes définies par l'équation (4.58), on aura :

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} t_1 d\Gamma &= 2Re[[\mu_1 \psi_1 + \mu_2 \psi_2]], \\ \int_{\Gamma} t_2 d\Gamma &= 2Re[[\psi_1 + \psi_2]] \end{aligned} \quad (4.63)$$

Où des doubles crochets représentent le saut dans la fonction pour une boucle fermée autour de la source ponctuelle. Si le contour Γ englobe z' , alors les résultats des équations (4.63) seront non nuls.

Les solutions fondamentales dans un plan infini anisotrope peuvent être trouvées en utilisant la fonction de contraintes d'Airy résultante des forces de surface fondamentales, données par l'équation (4.63) et l'équation (2.3), en tenant compte des forces volumiques et des effets d'inertie nulle.

La fonction d'Airy d'un point chargé dans le sens de x_i peut être représentée par ψ_{ik} . Comme les équations intégrales du contour (4.63) ont un signe opposé à la charge appliquée, il peut être exprimé en une source de point comme suit :

$$\begin{aligned} 2Re[[\mu_1 \psi_{i1} + \mu_2 \psi_{i2}]] &= -\delta_{i1}, \\ 2Re[[\psi_{i1} + \psi_{i2}]] &= \delta_{i2} \end{aligned} \quad (4.64)$$

L'équation (4.64) peut être satisfaite pour toute boucle fermée z' , prendre :

$$\psi_{ik} = A_{ik} \ln(z - z') \quad (4.65)$$

Où A_{ik} sont des constantes complexes. En utilisant les propriétés des fonctions complexes, il peut être démontré que pour tout contour fermé le point z' :

$$\ln(z - z') = 2\pi i \quad (4.66)$$

En utilisant les équations (4.64), (4.65) et (4.66), deux équations peuvent être obtenues pour les constantes inconnues A_{ik} :

$$\begin{aligned} A_{i1} - \bar{A}_{i1} + A_{i2} - \bar{A}_{i2} &= \delta_{i2}/(2\pi i), \\ \mu_1 A_{i1} - \bar{\mu}_1 \bar{A}_{i1} + \mu_2 A_{i2} - \bar{\mu}_2 \bar{A}_{i2} &= -\delta_{i1}/(2\pi i) \end{aligned} \quad (4.67)$$

Les deux autres équations nécessaires pour déterminer A_{ik} par l'exigence que les déplacements ont des valeurs uniques, à savoir :

$$[[u_i]] = 0 \quad (4.68)$$

En utilisant les équations de déplacements de l'équation (4.59), l'équation (4.65) et l'équation (4.66), peuvent être étendues à l'équation (4.68) par exemple :

$$\begin{aligned} q_{11}A_{i1} - \bar{q}_{11}\bar{A}_{i1} + q_{12}A_{i2} - \bar{q}_{12}\bar{A}_{i2} &= 0, \\ q_{21}A_{i1} - \bar{q}_{21}\bar{A}_{i1} + q_{22}A_{i2} - \bar{q}_{22}\bar{A}_{i2} &= 0 \end{aligned} \quad (4.69)$$

Ecrivant les équations (4.67) et (4.69) sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ \mu_1 & -\mu_1 & \mu_2 & -\mu_2 \\ q_{11} & -\bar{q}_{11} & q_{12} & -\bar{q}_{12} \\ q_{21} & -\bar{q}_{21} & q_{22} & -\bar{q}_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_{j1} \\ \bar{A}_{j1} \\ A_{j2} \\ \bar{A}_{j2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \delta_{j2}/(2\pi i) \\ -\delta_{j1}/(2\pi i) \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.70)$$

Ce qui est suffisant pour trouver les constantes complexes A_{ik} .

Les solutions fondamentales des déplacements sont obtenues en insérant la fonction de contraintes donnée par l'équation (4.58) dans l'équation (4.59). Ainsi, nous avons :

$$U_{ji}(z', z) = 2Re[q_{i1}A_{j1} \ln(z_1 - z'_1) + q_{i2}A_{j2} \ln(z_2 - z'_2)] \quad (4.71)$$

De même, les solutions fondamentales des forces de surface sont obtenues en substituant l'équation (4.65) dans l'équation (4.58) et en utilisant l'équation (2.7). Par conséquent, on obtient

$$T_{ji}(z', z) = 2Re \left[\frac{1}{(z_1 - z'_1)} g_{i1}(\mu_1 n_1 - n_2) A_{j1} + \frac{1}{(z_2 - z'_2)} g_{i2}(\mu_2 n_1 - n_2) A_{j2} \right] \quad (4.72)$$

Et :

$$g_{ji} = \begin{bmatrix} \mu_1 & \mu_2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \quad (4.73)$$

Notez qu'aussi bien que la solution fondamentale de déplacement que celle les forces de surface sont singulières lorsque le point source tend vers le champ du point. Pour la solution fondamentale de déplacement la singularité est faible ($\ln r$). Dans le cas de la solution fondamentale des forces de surface la singularité est forte ($1/r$).

4.3.4 Intégration numérique

Dans ce travail, l'intégration des termes singuliers des matrices H et G macroscopique, nous avons utilisé la quadrature gaussienne standard (équation (4.74)) avec 10 points d'intégration.

$$\int_{-1}^1 F(x) dx \approx \sum_{i=1}^{PG} F(x_i) \omega_i \quad (4.74)$$

Où x_i et w_i sont les coordonnées et les poids de Gauss, respectivement. Le nombre de points de Gauss PG , détermine l'ordre du polynôme utilisé pour l'approche de l'intégration (l'ordre est égal à $2PG - 1$). Les termes singuliers de G sont du type $\ln(r)$ étant intégré à l'aide de la quadrature logarithmique de Gauss (équation (4.75)) avec 10 points d'intégration. Pour ce cas, l'intégrale dans l'intervalle normalisé $[0; 1]$ est approchée par:

$$\int_0^1 \ln(x) F(x) dx \approx \sum_{i=1}^{PG} F(x_i) \omega_i \quad (4.75)$$

Les termes singuliers de H sont du type $1/r$ et doivent être calculés dans le sens de la valeur principale de Cauchy. Un moyen très simple pour faire face à cette unicité est par des considérations de corps rigides [56].

4.3.5 Calcul des déformations et contraintes dans les points internes

Les tenseurs de déformations et de contraintes dans un point interne z' d'un domaine anisotrope sont obtenus par la dérivée de l'identité de Somigliana en z' , puis en appliquant la loi de Hooke généralisée pour le matériau anisotrope :

$$u_{i,k}(z') + \int_{\Gamma} T_{ij,k}(z', z) u_j(z) d\Gamma(z) = \int_{\Gamma} U_{ij,k}(z', z) t_j(z) d\Gamma(z) \quad (4.76)$$

Où les dérivées des solutions fondamentales des tractions sont données par :

$$T_{ij,k}(z', z) = 2Re \left[\frac{1}{(z_1 - z'_{12})^2} R_{k1} g_{j1} (\mu_1 n_1 - n_2) A_{i1} + \frac{1}{(z_2 - z'_{12})^2} R_{k2} g_{j2} (\mu_2 n_1 - n_2) A_{i2} \right] \quad (4.77)$$

Et les dérivées des solutions fondamentales des déplacements sont données par :

$$U_{ij,k}(z', z) = 2Re \left[\frac{1}{(z_1 - z'_{11})} R_{k1} q_{j1} A_{i1} + \frac{1}{(z_2 - z'_{12})} R_{k2} q_{j2} A_{i2} \right] \quad (4.78)$$

Où :

$$R_{kl} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ \mu_1 & \mu_2 \end{bmatrix} \quad (4.79)$$

Par conséquent, le remplacement du tenseur du gradient des déplacements (équation (4.76)) dans la relation déformation-déplacement (équation (2.1)):

$$2\varepsilon_{ik}(z') = \int_{\Gamma} [T_{ij,k}(z', z) + T_{kj,i}(z', z)] u_j(z) d\Gamma(z) + [U_{ij,k}(z', z) + U_{kj,i}(z', z)] t_j(z) d\Gamma(z) \quad (4.80)$$

Les tractions peuvent être déterminées en substituant l'équation (4.80), dans la loi de Hooke généralisée pour le stratifié composite (équation (2.37)).

4.4 Méthode des éléments de frontière pour Micro-échelle.

4.4.1 Introduction

Comme mentionné précédemment, un élément ayant des dimensions beaucoup plus petites que les dimensions de la structure, peut statistiquement représenter cette structure (macro-échelle), cet élément est appelé volume élémentaire représentatif EVR (micro-échelle). Dans cette étude, l'EVR est composé d'une matrice isotrope et une fibre transversalement isotrope, donc la formulation de la

solution de MEC élastique de ce type de microstructure, utilise la notion de sous-régions, également mis en œuvre dans un environnement de programmation MATLAB, en utilisant les solutions fondamentales individuelles correspondantes au type du matériau constituant le EVR. En rappelant que pour la solution de la fibre élastique transversalement isotrope, on utilise la même formulation par la BEM pour l'anisotropie, utilisé pour résoudre les problèmes des plis orthotropes des matériaux composites.

4.4.2 Solutions fondamentales isotropes

Pour un problème isotrope, la relation compacte contrainte-déformation (équation (2.12)) est substituée dans l'équation d'équilibre (équation (2.3)), obtenant ainsi l'équation de Navier-Lamé :

$$\frac{\mu}{1-2\nu} u_{j,ji} + \mu u_{i,jj} + b_i = 0 \quad (4.81)$$

L'équation de Navier-Lamé peut maintenant être écrite pour une force ponctuelle unitaire appliquée au corps au point de colocation x' et dans la direction e_i :

$$\frac{\mu}{1-2\nu} u_{j,ji} + \mu u_{i,jj} + \delta(x - x') e_i = 0 \quad (4.82)$$

Pour résoudre l'équation (4.82), la technique la plus populaire utilisée, c'est par le vecteur Galerkin de G_i . Ainsi, l'approche par le vecteur Galerkin sera utilisée pour obtenir les solutions fondamentales en raison d'une force ponctuelle unitaire dans un milieu infini. Les déplacements sont exprimés en termes de vecteur Galerkin [55], en tant que:

$$u_i^* = G_{i,kk} - \frac{1}{2(1-\nu)} G_{k,ik} \quad (4.83)$$

Substituant l'équation (4.83) dans l'équation (4.82), on obtient :

$$\mu G_{i,kkjj} - \frac{\mu}{2(1-\nu)} G_{k,ikjj} + \frac{\mu}{(1-\nu)} \left(G_{k,ikjj} - \frac{1}{2(1-\nu)} G_{k,jkij} \right) + \delta(x - \xi) e_i = 0 \quad (4.84)$$

qui peut être simplifié à :

$$\mu G_{i,kkjj} + \delta(X - X') e_i = 0 \quad (4.85)$$

Puisque

$$G_{k,ikjj} = G_{k,jjki}, G_{j,kkjj} = G_{k,jjki} e G_{k,jkjj} = G_{k,jjki} \text{ L'équation (4.85) peut aussi être écrite comme:} \\ \mu \nabla^2 (\nabla^2 G_i) + \delta(X - X') e_i = 0 \quad (4.86)$$

[5] montre qu'en faisant $F_i = \nabla^2 G_i$, l'équation (4.86) peut être écrite en tant que :

$$\nabla^2 F_i + \frac{1}{\mu} \delta(X - X') e_i = 0 \quad (4.87)$$

Pour des problèmes bidimensionnels, la solution de l'équation (4.87) est donnée par :

$$F_i = -\frac{1}{2\pi\mu} \ln(R) e_i \quad (4.88)$$

où $R = xU$ est le module du vecteur du point d'intégration . Le vecteur de Galerkin est donné par :

$$G_i = -\frac{1}{8\pi\mu} R^2 \ln(R) e_i \quad (4.89)$$

Substituant l'équation (4.89) dans l'équation (4.83):

$$u_i^* = -\frac{1}{8\pi\mu} \left[(R^2 \ln(R))_{,kk} e_i - \frac{1}{2(1-\nu)} (R^2 \ln(R))_{,ik} e_k \right] \quad (4.90)$$

Sachant que $:R, ik = (\delta_{ik} - R_{,i}R_{,k})/R$ et $R_{,kk} = 2/R$, l'équation (4.90) peut être réécrite en tant que:

$$u_i^* = \frac{1}{8\pi\mu(1-\nu)} \left[(3 - 4\nu) \ln\left(\frac{1}{R}\right) \delta_{ij} + R_{,i}R_{,j} \right] e_j \quad (4.91)$$

Par la suite :

$$u_i^* = U_{ij}(X', X) e_j \quad (4.92)$$

Le déplacement dans la direction j du point x en raison d'une force unitaire agissant dans la direction i au point x' , à savoir, la solution fondamentale de déplacement est donnée par :

$$U_{ij}(X', X) = \frac{1}{8\pi\mu(1-\nu)} \left[(3 - 4\nu) \ln\left(\frac{1}{R}\right) \delta_{ij} + R_{,i}R_{,j} \right] \quad (4.93)$$

La solution fondamentale de la traction de surface est obtenue par l'équation (4.91), en utilisant les relations contrainte-déplacement et de contrainte-déformation $t_i^* = \sigma_{ij}^* n_j$:

$$t_i^* = -\frac{1}{4\pi(1-\nu)R} \left\{ \frac{\partial R}{\partial n} [(1 - 2\nu)\delta_{ij} + 2R_{,i}R_{,j}] - (1 - 2\nu)(R_{,i}n_j - R_{,j}n_i) \right\} e_j \quad (4.94)$$

Où n_j sont les composantes de la normale extérieure au point d'intégration x . Donc, l'équation suivante:

$$t_i^* = T_{ij}(X', X) e_j \quad (4.95)$$

La traction à la surface dans la direction j au point x en raison d'une force unitaire agissant dans la direction i au point x' , à savoir, la solution fondamentale pour la force de surface est donnée par:

$$T_{i,j}(X', X) = -\frac{1}{4\pi(1-\nu)R} \left\{ \frac{\partial R}{\partial n} [(1 - 2\nu)\delta_{ij} + 2R_{,i}R_{,j}] - (1 - 2\nu)(R_{,i}n_j - R_{,j}n_i) \right\} \quad (4.96)$$

4.4.3 Méthode de sous-régions

La procédure pour la solution du problème élastique microscopique, en utilisant les formulations de la BEM pour de multiples régions, c'est à dire, la méthode des sous-régions est utilisée dans des problèmes où les propriétés du matériau varient tout au long de la structure, comme dans l'ERV traité ce travail, qui présente toujours 3 sous-régions, comme illustré par un modèle générique de la figure 4.3, dont 2 (régions 1 et 3) représentent la matrice isotrope (solutions fondamentales isotrope) et l'autre (région 2) est une fibre transversalement isotrope (solutions fondamentales anisotropes, comme expliqué dans la section 5.3.1). Ainsi, le procédé permet d'optimiser le stockage des éléments de matrice H et G étant donné que ces matrices affichent des blocs clairsemés.

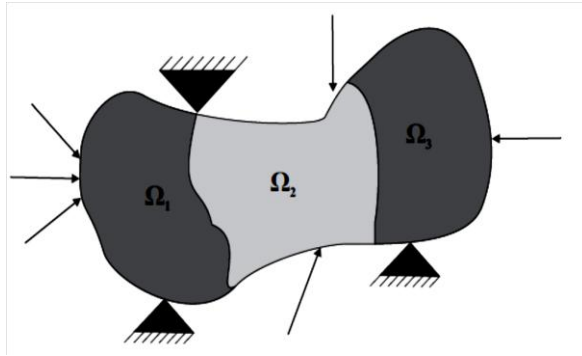


Figure 4.3: Structure composée de trois sous-régions soumises à des charges et des liaisons.

Les matrices $[H]$ et $[G]$ peuvent être écrites sur un ensemble d'emplacements de points de charge des solutions fondamentales, qui se produisent dans les équations intégrales correspondantes au point nodal pour la sous-région concernée. Ainsi, le système d'équations de la matrice pour chaque sous-région est donné par :

$$[H]_i \{u\}_i = [G]_i \{t\}_i \quad (4.97)$$

Où $[H]$ et $[G]_i$ sont des matrices carrées des coefficients, pour la sous-région i correspondante et $\{t\}_i$ et $\{u\}_i$ sont les vecteurs colonnes de points nodaux de déplacement et de traction de surface, respectivement, pour la sous-région i .

Chaque réseau peut alors être divisé comme suit :

$$\begin{aligned} [G]_i &= [G_E \quad G_I]_i \\ [H]_i &= [H_E \quad H_I]_i \end{aligned} \quad (4.98)$$

Où l'indice E représente les éléments qui ne sont pas à l'interface, c'est-à-dire, les variables qui appartiennent à une seule sous-région, I l'ensemble des variables liées aux éléments d'interface. Le système modifié est :

$$[H_E \ : \ H_I]_i \begin{Bmatrix} u^E \\ \dots \\ u^I \end{Bmatrix}_i = [G_E \ : \ G_I]_i \begin{Bmatrix} t^E \\ \dots \\ t^I \end{Bmatrix}_i \quad (4.99)$$

Dans l'interface, on peut écrire les relations d'équilibre et de compatibilité des déplacements :

$$\{t_I\}_1 = -\{t_I\}_2 = t_I \quad (4.100)$$

$$\{t_I\}_2 = -\{t_I\}_3 = t_I \quad (4.101)$$

$$\{u_I\}_1 = -\{u_I\}_2 = u_I \quad (4.102)$$

$$\{u_I\}_2 = -\{u_I\}_3 = u_I \quad (4.103)$$

Avec $\{t\}_A$ et $\{u\}_A$ sont les conditions préétablies de forces de surface et les déplacements imposés à l'interface.

En combinant de l'équation (4.98) et l'équation (4.99), pour 3 sous-régions, et en imposant les conditions d'équilibre et de la compatibilité des déplacements, on aura le système suivant :

$$\begin{bmatrix} H_E^1 & H_I^1 & 0 \\ 0 & H_I^3 & H_E^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_E^1 \\ u_I \\ u_E^3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G_E^1 & G_I^1 & 0 \\ 0 & -G_I^3 & G_E^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t_E^1 \\ t_I \\ t_E^3 \end{Bmatrix} \quad (4.104)$$

Les déplacements étant inconnus et les forces de surface dans l'interface utilisateur, le système résultant peut être réordonné comme suit :

$$\begin{bmatrix} H_E^1 & H_I^1 & -G_I^1 & 0 \\ 0 & H_I^3 & G_I^3 & H_E^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_E^1 \\ u_I \\ t_I \\ u_E^3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G_E^1 & 0 \\ 0 & G_E^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t_E^1 \\ t_E^3 \end{Bmatrix} \quad (4.105)$$

Enfin, après la modification des conditions aux limites, le système se traduit par :

$$[\bar{H}][\bar{u}] = [\bar{G}][\bar{t}] \quad (4.106)$$

Où maintenant les matrices $[\bar{H}]e[\bar{G}]$ ont des blocs de zéros. Bien que la formulation semble être simple, sa mise en œuvre est assez complexe, et doit fournir une routine de formatage des données antérieures [57]

4.4.4 Intégration numérique - Transformation de Telles

Pour l'intégration des termes singuliers des matrices **H** et **G** micrométrique, on utilise la transformation de Telles. Telles [58] a présenté une méthode efficace pour calculer des intégrales singulières ou quasi-singulière que l'on trouve actuellement dans les applications de la BEM dans les problèmes axisymétriques à deux dimensions et trois dimensions. C'est une transformation polynomiale de troisième degré qui améliore l'approximation de la quadrature de Gauss dans la plage proche de la singularité. Cette procédure peut être facilement mise en œuvre dans la BEM et constitue une caractéristique importante d'être auto-adaptative, à savoir, la méthode produit une variable qui dépend de la distance minimale entre le point source et l'élément. L'auto-adaptation de la méthode la marque inactive lorsqu'il est inutile, ou à grande distance de la source ponctuelle, ce qui rend la méthode très sûre pour une utilisation en général.

Considérons l'intégrale :

$$I = \int_{-1}^1 f(\xi) d\eta \quad (4.107)$$

$f(\eta)$ est singulière au point $\bar{\eta}$.

L'idée est maintenant de faire une transformation de coordonnées η pour γ où le jacobien $d\eta / d\gamma$ s'annule au point η où $f(\eta)$ est singulière.

Si une relation est choisie de deuxième degré (une relation du troisième degré est également possible), nous avons :

$$\xi(\gamma) = a\gamma^2 + b\gamma + c \quad (4.108)$$

Les conditions suivantes doivent être remplies :

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\xi}{d\gamma} \right|_{\xi} &= 0, \\ \xi(1) &= 1, \\ \xi(-1) &= -1. \end{aligned} \quad (4.109)$$

Ensuite, les solutions suivantes sont obtenues :

$$a = -c$$

$$b = 1, \tag{4.110}$$

$$c = \frac{\bar{\xi} \pm \sqrt{(\bar{\xi}^2 - 1)}}{2}.$$

Dans lequel la condition $|\bar{\xi}| \geq 1$ est nécessaire pour éviter que les racines complexes.

Si $|\bar{\xi}| = 1$, l'équation (4.108) peut être écrite comme:

$$I = \int_{-1}^1 f \left[(1 - \gamma^2) \frac{\bar{\xi}}{2} + \gamma \right] (1 - \gamma \xi) dy \tag{4.111}$$

Ce traitement est utilisé pour calculer les intégrales avec une singularité logarithmique à une extrémité. Le principal avantage est que, puisque la jacobéenne annule la singularité, l'intégration de Gauss normale peut être appliquée sans avoir à séparer la partie régulière du singulier [59]

4.4.5 Calcul des contraintes et déformations à la frontière

Pour calculer le tenseur des contraintes d'un nœud donné à la frontière, on considère un nœud où les directions des vecteurs tangent et normale à la frontière ne coïncident pas avec les directions des axes (figure 4.4). Ce nœud est créé dans un nouveau système de référence $x'1x'2$ ayant des directions qui coïncident avec les vecteurs tangentiels et normaux au contour de ce nœud. Écrivons les déplacements et les tractions dans ce système de localisation, vous avez :

$$u'_i = l_{ij} u_j,$$

$$t'_i = l_{ij} t_j \tag{4.112}$$

Où l_{ij} sont les cosinus directeurs.

Dans le système local a la relation suivante :

$$\sigma'_{22} = t'_2,$$

$$\sigma'_{12} = t'_1 \tag{4.113}$$

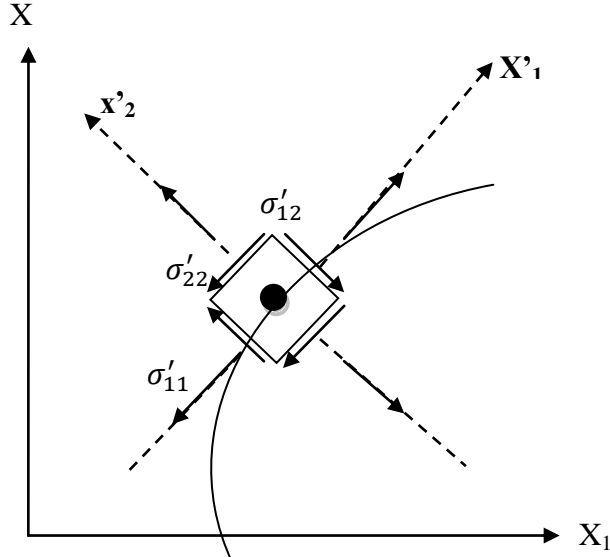


Figure 4.4: Les contraintes à la frontiè...

La déformation ε'_{11} peut être calculée, sachant que :

$$\varepsilon'_{11} = \frac{1}{2}(u'_{1,1} + u'_{1,1}) = u'_{1,1},$$

$$u'_{1,1} = \frac{du_1}{dx'_1} = \frac{du_1}{d\xi'_1} \frac{d\xi'_1}{dx'_1} \quad (4.114)$$

En utilisant la géométrie différentielle dans l'équation (4.115), on peut noter que la direction locale x'_1 est tangente à la longueur infinitésimale d'arc ds donnée par :

$$ds = \sqrt{dx'^2_1 + dx'^2_2} = \sqrt{\left(\frac{dx'_1}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{dx'_2}{d\xi}\right)^2} d\xi \quad (4.115)$$

Où

$$\frac{ds}{s\xi} = J \quad (4.116)$$

Un petit mouvement le long de s correspond à un petit mouvement en x'_1 . Ceci ne permet que x'_1 dans l'équation (4.115) d'être remplacé par l'équation (4.117), à savoir :

$$\varepsilon'_{11} = \frac{du'_1}{d\xi} \frac{d\xi}{ds'}$$

$$\varepsilon'_{11} = \frac{du_1}{d\xi} J^{-1} \quad (4.117)$$

Où

$$u_1 = \sum_{i=1}^3 h^{(i)} u_1^{(i)},$$

$$\frac{du_1}{d\xi} = \sum_{i=1}^3 \frac{dh^{(i)}}{d\xi} u_1^{(i)} \quad (4.118)$$

Où $h^{(i)}$ sont les fonctions de forme. On peut alors obtenir la déformation par :

$$\varepsilon'_{11} = \sum_{i=1}^3 \frac{h^{(i)}}{d\xi} u_1^{(i)} J^{-1} \quad (4.119)$$

La relation contrainte-déformation :

$$\begin{pmatrix} \sigma'_{11} \\ \sigma'_{22} \\ \sigma'_{12} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A'_{11} & A'_{12} & A'_{16} \\ A'_{12} & A'_{22} & A'_{26} \\ A'_{16} & A'_{26} & A'_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon'_{11} \\ \varepsilon'_{22} \\ \varepsilon'_{12} \end{pmatrix} \quad (4.120)$$

Où A_{ij} sont les composantes du tenseur de rigidité dans la référence locale.

Dans l'équation (4.121) on a trois inconnues σ'_{11} , ε'_{22} , ε'_{12} que maintenant peuvent alors être calculées.

Enfin, le tenseur des contraintes doit être écrit dans la référence globale x_1, x_2 , à savoir :

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = T^{-1} \begin{pmatrix} \sigma'_{11} \\ \sigma'_{22} \\ \sigma'_{12} \end{pmatrix} \quad (4.121)$$

Ainsi, il est également possible de monter le tenseur des déformations, comme suivant la procédure les composantes les déformations sont obtenues pour le système local, il suffit seulement de le transformer pour le système global.

4.5 Le code de calcul multi-échelle

Le code de calcul développé générale est illustré par l'organigramme de la Figure 4.5, et est divisé en ordre chronologique ; la saisie des données, l'analyse complète, analyse locale et la sortie de données. Il est facile de voir à travers l'organigramme, le programme essentiellement divisé en deux parties essentielles pour son fonctionnement, l'analyse globale en utilisant un modèle, le composite unidirectionnel stratifié, et l'analyse locale, qui avait le modèle, le EVR comprenant deux phases, la matrice et la fibre.

Ainsi, le programme multi-échelle commence avec l'entrée des deux échelles, et pour commencer l'analyse de l'échelle macro, c'est à dire, sur la base de la technique de localisation, des données d'entrée de l'échelle macro sont produites automatiquement de la plupart des données micro-échelle. Ceci est dû au fait que, l'EVR qui décrit l'échelle local, a sa géométrie donnée en conformité avec

l'orientation des fibres du stratifié, qui décrit l'échelle globale, et en outre présente des propriétés mécaniques également données pour des matériaux qui composent le stratifié. La différence, est que dans EVR ces matériaux sont considérés individuellement, c'est à dire, les propriétés mécaniques de la matrice et la fibre sont fournies séparément, et qui comprend en outre, les propriétés mécaniques utilisées pour évaluer la défaillance microstructurale. Dans le stratifié, comme on le voit ci-dessus, les propriétés sont données par la combinaison de la matrice et des fibres, résultant en une matière orthotrope.

L'entrée de données les deux échelles qui ne dépendent l'une de l'autre, est la discrétisation du contour de chaque modèle, i.e., chaque modèle peut avoir un maillage d'éléments de contour différent. Se rappeler que, dans l'étape d'entrée de données aussi il a été choisi la charge appliquée à l'échelle globale parce que, comme expliqué ci-dessus pour la théorie multi-échelle, l'échelle locale peut être soumise à deux types de conditions aux limites, un déplacement linéaire ou une traction uniforme, et que les deux dépendent de la réponse élastique obtenue par le comportement mécanique de l'échelle globale en raison de chargement global utilisé.

En procédant à l'analyse multi-échelle, la solution élastique du problème à l'échelle macro (unidirectionnel composite stratifié) entame l'analyse globale du programme. Par conséquent, la modélisation numérique de macro échelle a été faite par la formulation de la BEM pour l'élasticité anisotrope, par laquelle ont été déterminés les déplacements et les tractions au contour du stratifié, et ceux-ci sont utiles pour le calcul des tenseurs macroscopiques.

Ainsi, les déplacements et les tractions sur la frontière du stratifié ont été utilisés pour le calcul des tenseurs des déformations et les contraintes des points internes conformément au paragraphe (5.2.5), et ce sont des tenseurs macroscopiques de l'analyse. Dans cette étude, parce que l'utilisation de la condition linéaire de déplacement dans la micro-échelle (EVR), les tenseurs de déformations dans les points internes du stratifié sont tenseurs macroscopiques utilisés dans l'analyse, c'est à dire, selon le théorème de la déformation moyenne, on doit avoir $\bar{\epsilon}_{ij} = \langle \epsilon_{ij} \rangle$, Par conséquent, l'analyse globale est finalisée par la détermination d'un tel tenseur de déformation, et ceux-ci sont essentiels pour l'analyse des séquences, ou au début de l'analyse du problème local.

L'analyse locale a commencé avec l'application des conditions aux limites de déplacement linéaire dans EVR, c'est à-dire, la possession de tenseurs macroscopiques, Il était possible de calculer les valeurs des déplacements linéaires $u_i = \bar{\epsilon}_{ij}x_j$, et ainsi faire la solution de son comportement élastique.

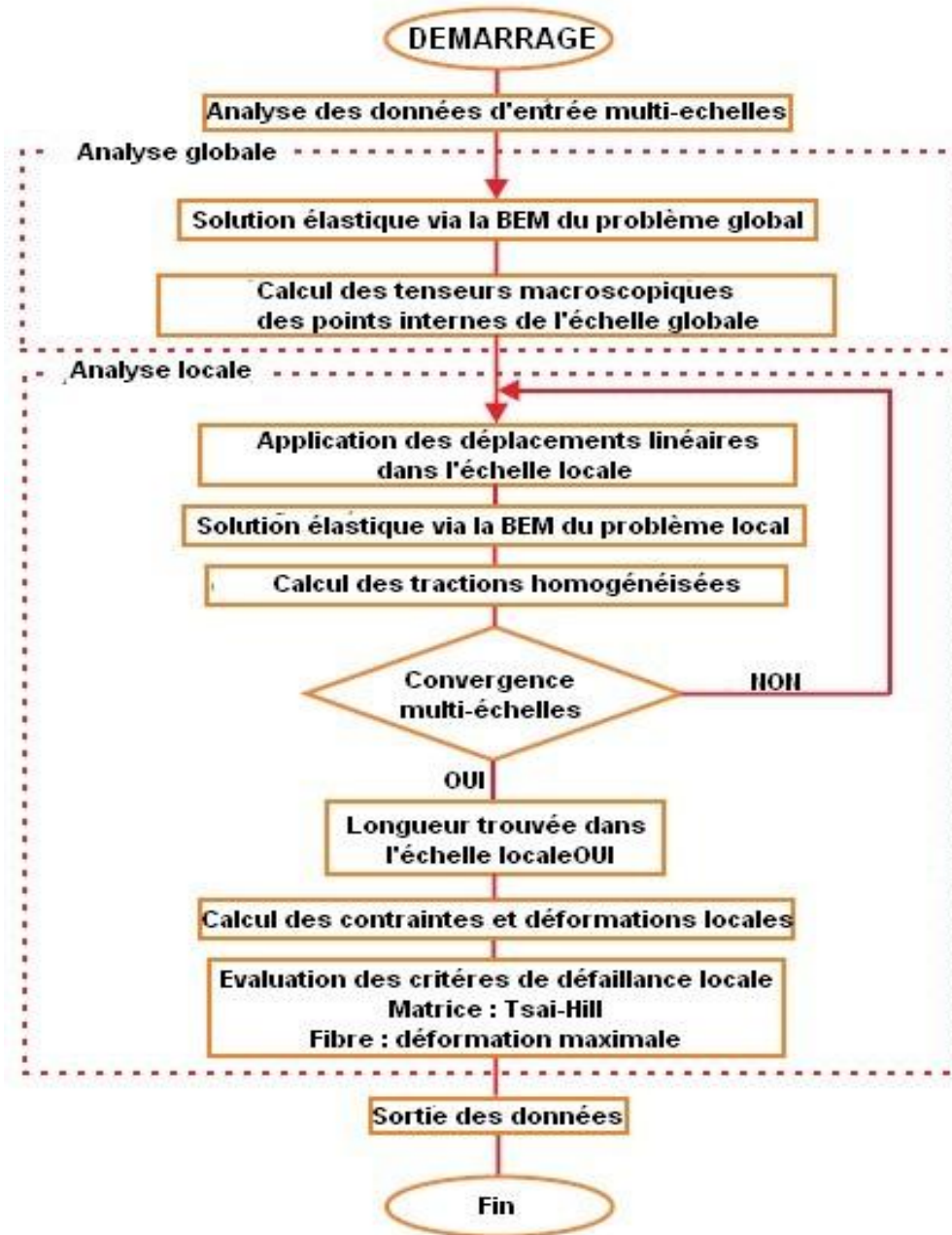


Figure 4.5: Organigramme de calcul programme multi-échelles.

La solution du problème élastique de l'ERV, a été fait grâce à la modélisation numérique en utilisant les sous-régions dans la formulation par la BEM, c'est à dire, l'EVR comprend trois domaines différents, qui représentent la matrice et la fibre, analysées individuellement par la BEM, déterminant ainsi les tractions et les déplacements sur la frontière de l'EVR.

Après la solution élastique locale et sachant que la technique utilisée est la technique dite de déformation orientée [32], où il a été donné le tenseur de déformation macroscopique et ils ont été déterminés le tenseur des contraintes homogénéisé et de la matrice de rigidité homogénéisée. Pour calculer le tenseur de contrainte homogénéisé, nous avons utilisé l'équation (3.1) du théorème de champ moyen, où les tractions et l'espace de coordonnées ont été discrétisées en conformité avec les fonctions formes de la formulation de la BEM [35] :

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = \frac{1}{V} \sum_{n=1}^E \left\{ [T_i^1 \quad T_i^2 \quad T_i^3]_n \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} h_1(\xi)h_1^c(\xi) & h_1(\xi)h_2^c(\xi) & h_1(\xi)h_3^c(\xi) \\ h_2(\xi)h_1^c(\xi) & h_2(\xi)h_2^c(\xi) & h_2(\xi)h_3^c(\xi) \\ h_3(\xi)h_1^c(\xi) & h_3(\xi)h_2^c(\xi) & h_3(\xi)h_3^c(\xi) \end{bmatrix} J d\xi \begin{bmatrix} x_j^1 \\ x_j^2 \\ x_j^3 \end{bmatrix}_n \right\} \quad (4.122)$$

Où T^N_i sont les composantes du vecteur des tractions dans les nœuds de l'élément, $h_N(\xi)$ sont les fonctions de forme quadratique discontinue (équation (4.19)), $h^c_N(\xi)$ sont les fonctions de forme quadratique continue donnée par l'équation (4.124), J est le jacobien de la transformation des coordonnées intrinsèques ξ et x^N_j les coordonnées des nœuds.

$$h_1^c = \frac{1}{2} \xi(\xi - 1), h_2^c = 1 - \xi^2, h_3^c = \frac{1}{2} \xi(\xi + 1) \quad (4.123)$$

Pour résoudre l'équation intégrale (4.123), nous avons utilisé la quadrature de Gauss standard avec 3 points de Gauss, pour traiter les fonctions polynôme de quatrième degré. On voit clairement, que la BEM a une meilleure capacité à calculer les propriétés homogénéisées de matériaux en utilisant le théorème de champ moyen, car ils ne dépendent que du calcul des tractions ou des mouvements dans le contour, qui sont les variables clés de la BEM, et sont obtenus avec une plus grande précision que par la méthode des éléments finis (FEM), par exemple.

La convergence multi-échelles, a eu lieu à travers l'analyse statistique des résultats des composantes de la matrice de rigidité homogénéisée, obtenue par des expériences numériques pour différentes longueurs de l'EVR, à savoir, la condition de convergence implique que la valeur de la composante de

la matrice de rigidité homogénéisé de l'EVR (micro) devrait approcher la valeur correspondante composante de rigidité stratifié unidirectionnel (macro). Pour calculer les composantes de la matrice de rigidité homogénéisée en micro-échelle, dans l'hypothèse de l'ECP, 2 cas ont été considérés de conditions aux limites de déplacements linéaires dans EVR ou conditions de déplacements linéaires en x et y respectivement données par [35] :

$$\begin{Bmatrix} \langle \sigma_{11} \rangle \\ \langle \sigma_{22} \rangle \\ \langle \sigma_{12} \rangle \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11}^* & C_{12}^* & 0 \\ C_{21}^* & C_{22}^* & 0 \\ 0 & 0 & C_{66}^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \langle \varepsilon_{11} \rangle \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{cases} C_{11}^* = \frac{\langle \sigma_{11} \rangle}{\langle \varepsilon_{11} \rangle} \\ C_{21}^* = \frac{\langle \sigma_{22} \rangle}{\langle \varepsilon_{11} \rangle} \end{cases} \quad (4.124)$$

$$\begin{Bmatrix} \langle \sigma_{11} \rangle \\ \langle \sigma_{22} \rangle \\ \langle \sigma_{12} \rangle \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11}^* & C_{12}^* & 0 \\ C_{21}^* & C_{22}^* & 0 \\ 0 & 0 & C_{66}^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ \langle \varepsilon_{22} \rangle \\ 0 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{cases} C_{12}^* = \frac{\langle \sigma_{11} \rangle}{\langle \varepsilon_{22} \rangle} \\ C_{22}^* = \frac{\langle \sigma_{22} \rangle}{\langle \varepsilon_{22} \rangle} \end{cases} \quad (4.125)$$

Ainsi, la convergence de la méthode multi échelle atteinte, Il a une longueur idéale du EVR à chaque cas de condition aux limites de déplacement linéaire.

Avec les longueurs des EVRS bien trouvées, les champs de déformations et de tractions locales sont calculés à travers le post-traitement de la BEM, décrit au paragraphe (4.3.5), où à partir de ces champs, Il faut évaluer la présence probable de la défaillance sur l'EVR, en raison de des concentrations plus élevées de contraintes dans la matrice ou de la fibre.

Suite à l'analyse, l'évaluation de la défaillance dans ERV a été réalisée en utilisant le critère de défaillance de Tsai-Hill et le critère de déformation maximale, qui indiquent des modes de défaillance respectivement, pour la matrice et de la fibre selon le type de la charge appliquée. Ainsi, l'analyse locale a été achevée, ce qui indique quel type de défaillance est le plus probable, d'après les indices obtenus par les critères de défaillance en question.

Pour mettre fin à l'analyse multi-échelle, le programme continu avec les données de sortie, où tous les résultats de l'analyse globale et l'analyse locale sont donnés, et donc sont analysés et discutés.

Chapitre 05

Résultat numérique et discussion.

CHAPITRE 05**Résultats numérique et discussion.****A - Modélisation multi-échelle de la défaillance****5.1 Introduction**

Ce chapitre présente les résultats numériques et discussions de l'analyse de la défaillance multi-échelle réalisée dans cette étude. Au départ, la solution a été faite du problème élastique de l'échelle macro. Peu après, l'analyse du problème élastique a été faite en micro-échelle, ainsi que l'appréciation de la défaillance en elle-même. Enfin, la modélisation multi-échelle a été validée par des comparaisons avec les résultats numériques obtenus en utilisant une autre méthode.

5.2 Analyse du problème à l'échelle macroscopique**5.2.1 Modèle macroscopique**

L'étude de modèle structural étudié dans cette analyse macroscopique est un stratifié avec un trou central unidirectionnel, avec les mesures respectives représentées sur la figure 5.1.

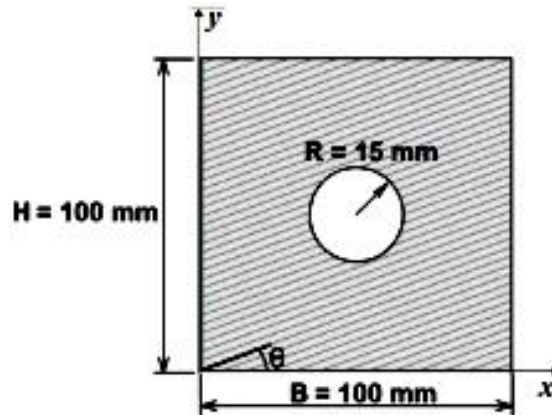


Figure 5.1: stratifié unidirectionnel avec alésage central soumis à un déplacement positif, θ étant l'angle d'orientation des fibres.

Les propriétés mécaniques analysées pour les stratifiés unidirectionnels ont été obtenus par Soden et al. [60] pour une fraction volumique donnée de fibres (V_f) dans chaque stratifié, et sont énumérées dans le tableau 5.1.

Type de fibre	AS4	T300	de verre E Gevetex	de verre E Silenka
matériau de la matrice	Epoxy 3501-6	Epoxy BSL914C	Epoxy LY556	Epoxy MY750
V_f	0.6	0.6	0.62	0.6
E_{11} (GPa)	126	138	53.48	45.60
E_{22} (GPa)	11	11	17.7	16.2
G_{12} (GPa)	6.6	5.5	5.83	5.83
ν_{12}	0.280	0.280	0.278	0.278
ν_{23}	0.400	0.400	0.400	0.400

Tableau 5.1: Propriétés mécaniques des stratifiés unidirectionnels analysés.

5.2.2 Calcul des tenseurs de déformations macroscopiques

En utilisant les données géométriques représentées sur la figure 5.1, les propriétés du tableau 5.1 se référant au stratifié AS4 époxy 3501-6 avec respect de l'orientation des fibres et avec une épaisseur de 1 mm, l'analyse a été réalisée dans le plan du stratifié, en utilisant la BEM pour l'élasticité anisotrope, et on déduit les tenseurs de déformations associés à des points matériels internes. Pour cela, on considère le stratifié avec le contour extérieur et le trou central discrétisés par 7 des éléments quadratiques discontinus et 52 points matériels internes.

- Fibres $\theta = 0^\circ$

Pour un stratifié avec des fibres à $\theta = 0^\circ$ soumis à un déplacement positif dans le bord droit le long de l'axe x de 0,20 mm et restrictions des déplacements dans des directions de x et y du bord gauche, comme le montre la figure 5.2, les tenseurs de déformations ont été obtenus de chaque point matériel interne, qui se réfèrent aux tenseurs des déformations macroscopiques, qui sont identiques aux tenseurs des déformations EVRS homogénéisés. Les graphes illustrés par la figure 5.3, la figure 5.4 et figure 5.5, montrent les valeurs obtenues à partir des tenseurs de déformations pour les points internes du stratifié, par rapport aux mêmes valeurs obtenues en utilisant le logiciel d'éléments finis ABAQUS, où le stratifié a été discrétisé par un maillage d'élément fini quadrangulaire linéaire à 4 nœuds, d'une longueur de chaque élément de 2mm. Les chiffres montrent également le pourcentage moyen des erreurs relatives obtenues pour chaque point, qui note que les résultats sont cohérents et le pourcentage moyen d'erreurs le plus bas.

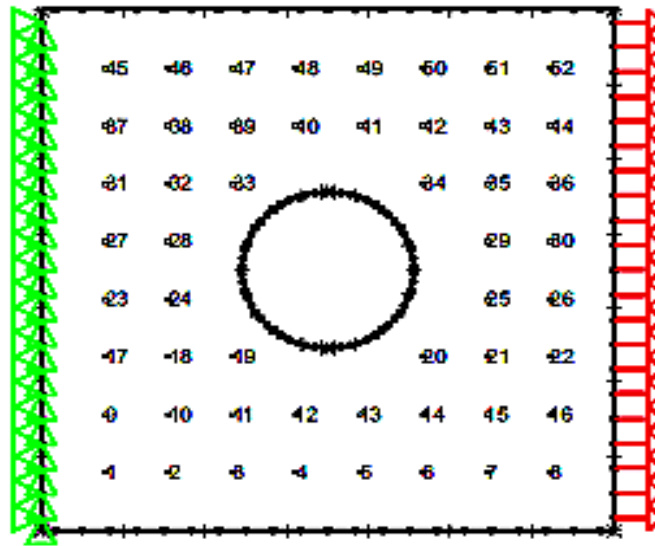
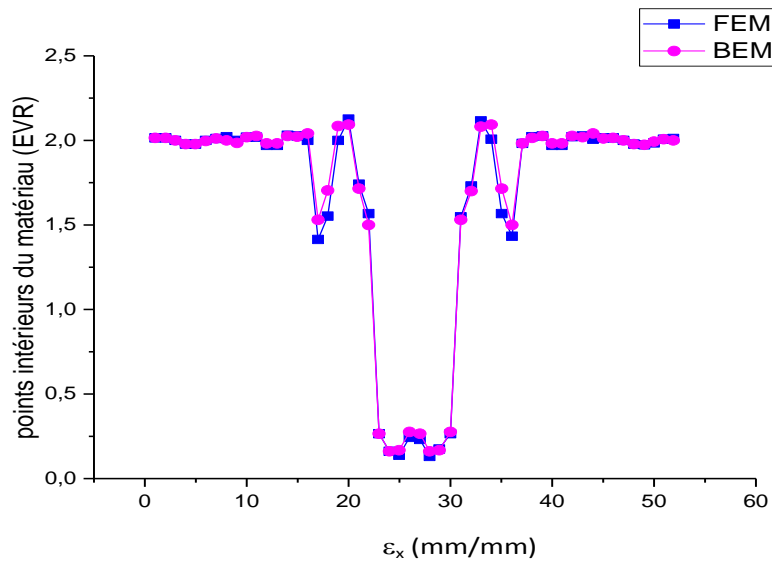
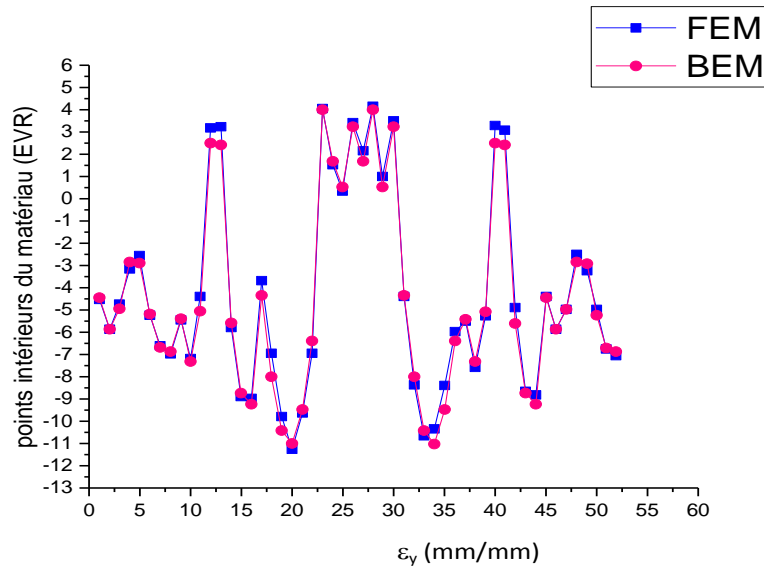


Figure 5.2: discrétisation du stratifié et des conditions aux limites.



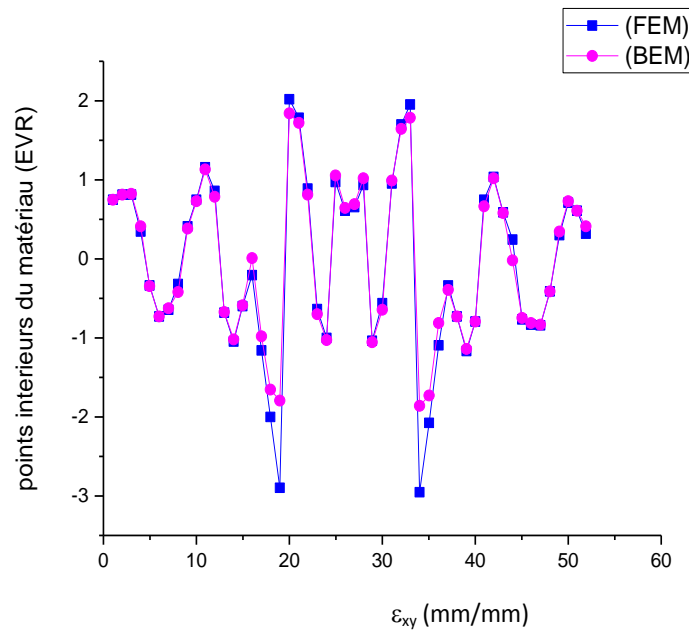
Pourcentage moyen d'erreur relatif = 2,82%

Figure 5.3: Déformation de points internes dans la direction de x .



Pourcentage moyen d'erreur relatif = 8,32%

Figure 5.4: Déformation de points internes dans la direction de y.



Pourcentage moyen d'erreur relatif = 11,81%

Figure 5.5: Déformation de points internes dans la direction de xy.

Rappelez-vous que ces valeurs ont ensuite été utilisées comme données d'entrée pour l'analyse du problème dans la micro échelle, parce que les tenseurs de déformations macroscopiques de la structure sont nécessaires pour calculer les valeurs des conditions aux limites de déplacement linéaires de EVRS, soit $u_i(\Gamma) = \overline{\varepsilon_{ij}}x_j$.

5.3 Analyse du problème dans l'échelle micro

5.3.1 Détermination de la géométrie et de la longueur de l'EVR

Une géométrie appropriée de EVR a été déterminée en fonction de l'orientation des fibres dans le stratifié, à savoir le EVR copié fidèlement la géométrie de la microstructure du stratifié. Pour déterminer la longueur d'EVR, une méthode similaire à celle proposée par Gitman et al [36] a été utilisée, la différence réside ici dans le fait que les valeurs statistiques utilisées, obtenues par des expériences numériques sont l'écart-type et le pourcentage d'erreur relative, liées à la propriété de la matière choisie pour homogénéiser, cette propriété a servi comme critère de convergence du procédé, à savoir, l'élément de volume représentatif, analogue à celui effectué par Souza [34]. Pour cela, une propriété choisie est ici la propriété constitutive de matériaux élastiques linéaires, tels que les composants de la matrice de rigidité EVR.

Ainsi, la procédure de détermination de la longueur appropriée de la VRS et correctement mise en œuvre dans l'analyse multi-échelle, a été réalisée sur la base de combinaisons entre, les longueurs des rayons EVRS et longueurs des fibres dans les EVRS, selon les étapes suivantes:

1. Fixer une longueur initiale de l'ERV, qui satisfait à la condition $D/L \ll 1$, avec $D =$ longueur caractéristique de EVR (microscopique) et $L =$ longueur caractéristique du stratifié (macroscopique).
2. Pour chaque longueur fixe, quatre longueurs différentes de rayons de fibres ont été testées dans EVR, qui, par conséquent a abouti à 4 concentrations différentes de la fraction de fibres EVR.
3. L'analyse a été effectuée par sous-régions de la BEM pour chaque incrément de longueur dans la longueur de l'EVR, totalisant 4 longueurs différentes, et les résultats obtenus présentés sous la forme d'un graphique (propriété homogénéisée) x (longueur de l'EVR), pour chaque rayon de fibre correspondant.
4. L'analyse statistique des propriétés homogénéisées a été développée, au moyen de l'écart-type et de l'erreur de pourcentage relatif à chacune.
5. . La précision des résultats de l'analyse statistique a été comparée, ce qui a permis de déterminer la longueur moyenne appropriée de l'EVR.

Les propriétés mécaniques individuelles de la fibre isotrope AS4 et de la matrice isotropique 3501-6 Epoxy, qui constituent chaque EVR utilisé dans cette analyse, ont également été obtenues par Soden et al. [60] et sont listés respectivement au tableau 5.2 et au tableau 5.3, et l'épaisseur de tous les EVR est identique à celle du stratifié unidirectionnel (1 mm).

Type de fibre	AS4	T300	De verre E Gevetex	De verre E Silenka
E_{f1} (GPa)	225	230	80	74
E_{f2} (GPa)	15	15	80	74
G_{f12} (GPa)	15	15	33.33	30.8
ν_{f12}	0.2	0.2	0.2	0.2
G_{f23} (GPa)	7	7	33.33	30.8
ϵ_{f1T} (%)	1.488	1.086	2.687	2.905
ϵ_{f1C} (%)	1.111	0.869	1.813	1.959

Tableau 5.2: 4 Propriétés mécaniques des fibres analysées.

matériau de la matrice	Epoxy 3501-6	Epoxy BSL914C	Epoxy LY556	Epoxy MY750
E_m (GPa)	4.2	4	3.35	3.35
G_m (GPa)	1.567	1.481	1.24	1.24
ν_m	0.34	0.35	0.35	0.35
Y_{mT} (MPa)	69	75	80	80
Y_{mC} (MPa)	250	150	120	120
S_m (MPa)	50	70	-	-

Tableau 5.3: Propriétés mécaniques des quatre matrices analysées.

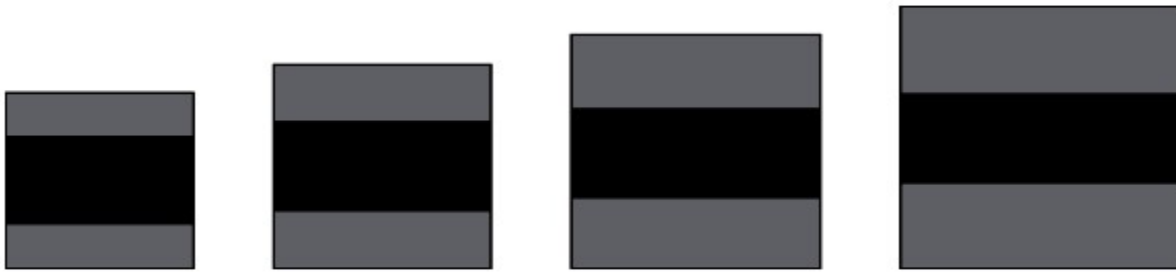
- Les fibres à $\theta = 0^\circ$

Comme indiqué précédemment, la géométrie des EVR dépend toujours de l'orientation des fibres dans le stratifié, ainsi la géométrie du EVR pour un stratifié avec des fibres à $\theta = 0^\circ$ est représenté sur la figure 5.6, où l'on peut voir clairement que la fibre AS4 (région foncée) à 0° est orientée vers l'axe x tel que requis par la combinaison des matériaux dans le stratifié. Avec la géométrie donnée de l'EVR, la longueur est déterminée en utilisant des conditions aux limites de déplacement linéaire divisé en deux cas. Le premier cas est la condition aux limites de déplacement linéaire x et le second est la

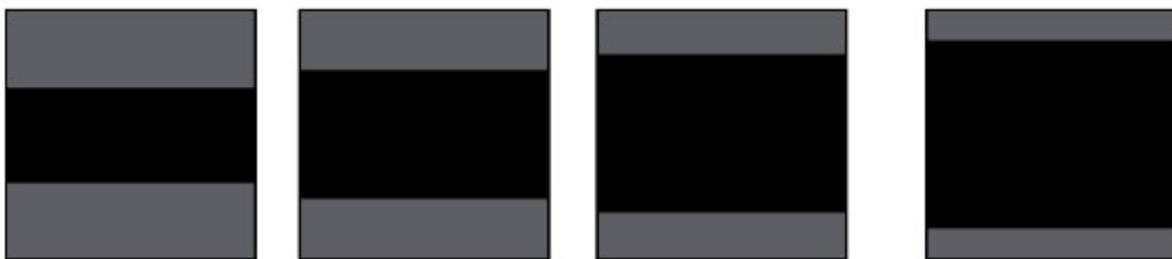
condition aux limites de déplacement linéaire y . Pour ces deux cas de déplacement linéaire, la figure 5.7 montre les variations des longueurs de l'EVRS et les rayons des fibres des EVRS utilisées dans l'analyse.



Figure 5.6: géométrie EVR pour un stratifié ayant l'orientation des fibres à $\theta = 0^\circ$.



Les longueurs (L_{evr}) des EVR, de gauche à droite $0,15 \times 0,15 \text{ mm}^2$; $0,18 \times 0,18 \text{ mm}^2$; $0,21 \times 0,21 \text{ mm}^2$; $0,24 \times 0,24 \text{ mm}^2$; ($r_f = 0,0413 \text{ mm}$)



Pour la même longueur de l'EVRS ($L_{\text{evr}} = 0,15 \times 0,15 \text{ mm}^2$), différentes longueurs de rayon de la fibre (r_f), de gauche à droite $0,0413 \text{ mm}$; $0,0486 \text{ mm}$; $0,0560 \text{ mm}$; $0,0633 \text{ mm}$;

Figure 5.7: Combinaisons des longueurs des EVRS avec des longueurs des rayons des fibres des EVRS.

Il convient de rappeler que cette étape du travail a été le stade qui exigeait un effort de calcul plus important, car pour chaque EVR, 16 analyses ont été réalisées, c'est-à-dire pour les différentes combinaisons de longueurs (4 longueurs d'EVR) x (4 Longueur des rayons fibreux des EVR).

Ainsi, l'analyse micromécanique pour déterminer la longueur adéquate de l'EVR a été lancée selon la technique de localisation, figure 5.8, dans laquelle chaque point interne du stratifié correspond à un EVR de la macro-échelle, où pour chacun d'eux, plusieurs valeurs initiales des problèmes aux frontières ont été construits et résolus.

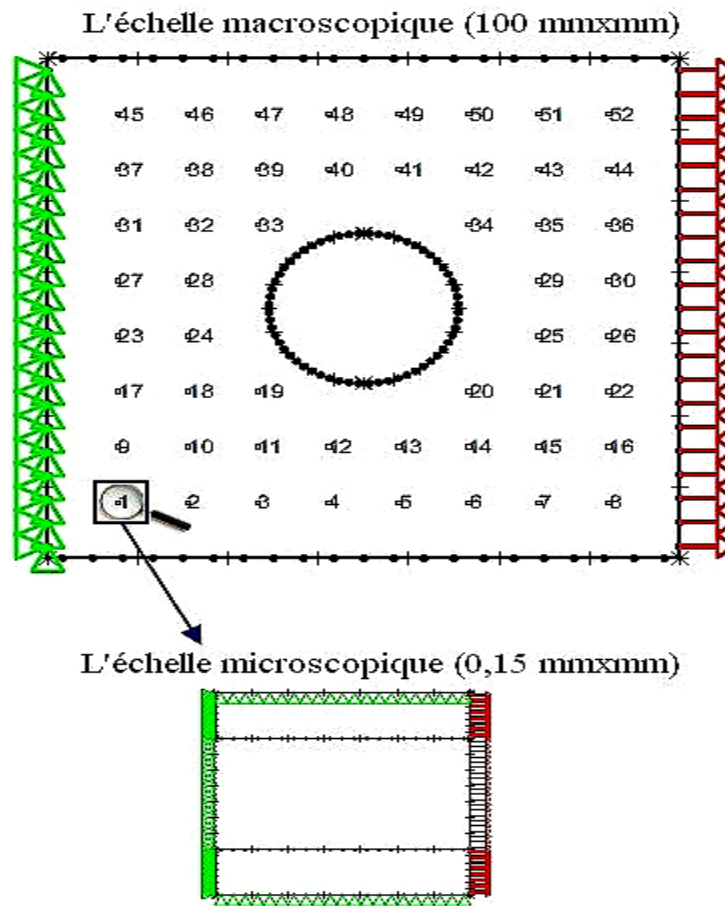


Figure 5.8: technique de localisation; Première combinaison de longueur pour EVR 1 sous déplacement linéaire en x .

Pour le déplacement linéaire en x correspondant à une déformation uniforme, la Figure 5.8 montre l'EVR 1 avec le contour discrétisé dans 7 éléments quadratiques discontinus, pour la première des

combinaisons des longueurs de l'EVR, illustrée à la Figure 5.7, c'est-à-dire, $Levr = 0.1500$ mm x mm avec $rf = 0.0413$ mm.

Par conséquent, après avoir effectué les analyses pour toutes les combinaisons de longueurs pour EVR 1, dans un total de 16 analyses micromécaniques, les résultats obtenus par l'équation (4.125), des composants rigides homogénéisés dans la direction x en fonction de la variation des longueurs de l'EVR 1, pour chaque longueur du rayon de la fibre analysée, figurent dans le graphique de la Figure 5.9. Dans le cas où il est possible d'observer qu'il existe une longueur différente du rayon de fibre pour chaque longueur de l'EVR, avec la valeur de la composante homogénéisée très proche de la valeur exacte, c'est-à-dire des valeurs proches de la courbe $C_{11} = 1.2687 \text{ e}+005$ du graphique, Ce qui correspond à la valeur de la composante de la matrice de rigidité du stratifié dans la direction x .

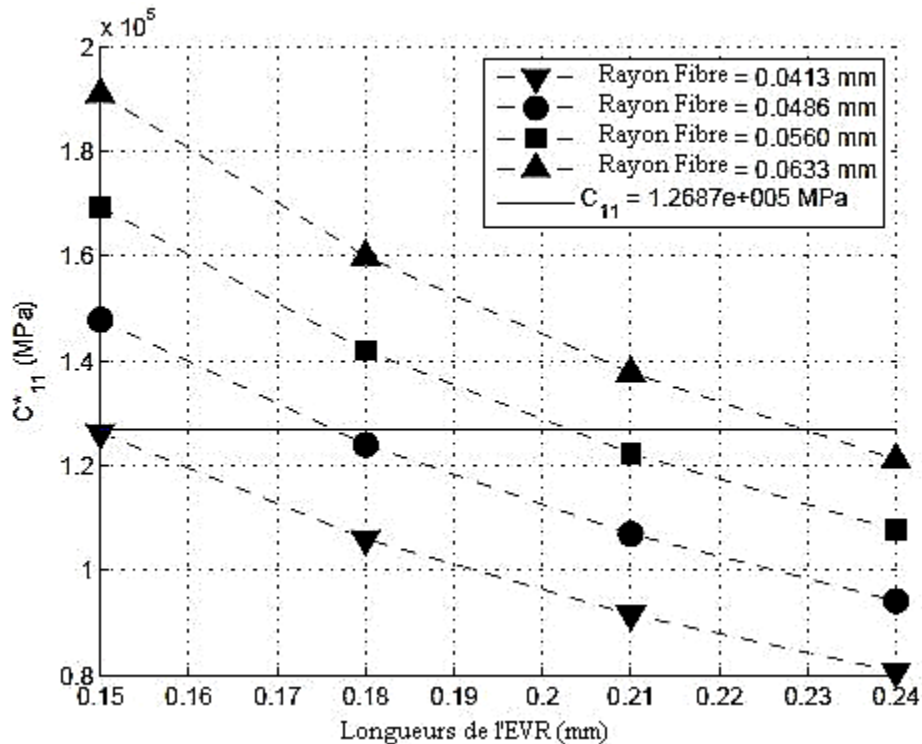


Figure 5.9: Composants homogénéisés suivant la direction x en fonction de la longueur EVR 1, Pour chaque rayon de la longueur des fibres.

Les valeurs des dispersions statistiques du composant homogénéisé, obtenues par des combinaisons de longueurs qui ont atteint des valeurs proches de la valeur exacte, c'est-à-dire l'écart type le plus bas pour chaque longueur d'EVR 1 associée à chaque longueur du rayon de fibre est affiché dans le graphique de la figure 5.10.

Il a été vérifié à partir du graphique de la figure 5.10 que la valeur de l'écart type obtenu par la première combinaison de longueur d'EVR 1 est légèrement inférieure à celle des autres, ce qui a été prouvé en analysant le pourcentage d'erreurs relatives obtenues par chacun, ou puisque l'objectif II s'agit ici de trouver uniquement une combinaison appropriée de longueur, l'étude des erreurs de pourcentage relatif obtenues par ces 4 combinaisons a été effectuée et le tableau 5.4 montre les valeurs de ces erreurs.

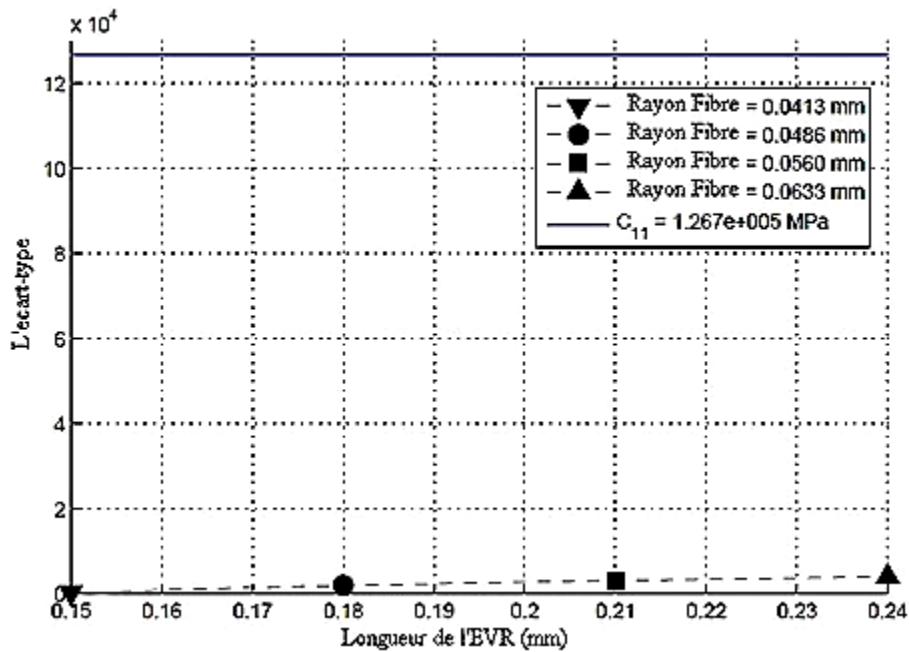


Figure 5.10: Les valeurs des écarts types de l'EVR 1 pour un déplacement linéaire en x .

Longueur de l'EVR (mm.mm)	Longueur du rayon fibre (mm)	Erreur relative (%)
0.1500	0.0413	0.4903
0.1800	0.0486	2.2806
0.2100	0.0560	3.5594
0.2400	0.0633	4.5148
Erreur relative mineure (%)		0,4903

Tableau 5.4: pourcentage d'erreurs relatives à la composante de rigidité homogénéisée dans la direction de x

Ainsi, selon le tableau 5.4, le pourcentage le plus bas d'erreur relative de 0,4903% a été atteint par la combinaison correspondant à la longueur EVR de $Levr = 0,15 \text{ mm} \times \text{mm}$, avec un rayon de fibre mesurant $rf = 0,0413 \text{ mm}$ (diamètre $df = 0,0826 \text{ mm}$), Ce qui correspond à une concentration de fraction de volume de fibres dans l'EVR égale à $cf = 3,5724\%$. Par conséquent, c'est la combinaison qui présente la longueur appropriée de l'EVR 1, pour le premier cas de condition à la limite du déplacement linéaire dans x , à utiliser dans la poursuite de l'analyse des défaillances à plusieurs échelles.

Pour le deuxième cas d'état limite appliqué dans EVR 1, avec un déplacement linéaire en y correspondant à la déformation uniforme, $\langle \varepsilon_{22} \rangle$ les mêmes combinaisons utilisées dans le premier cas de condition à la limite ont été utilisées, et la figure 5.11 montre l'EVR 1 avec le contour discrétisé en 7 éléments quadratiques discontinus, pour la première des combinaisons des longueurs de l'EVR.

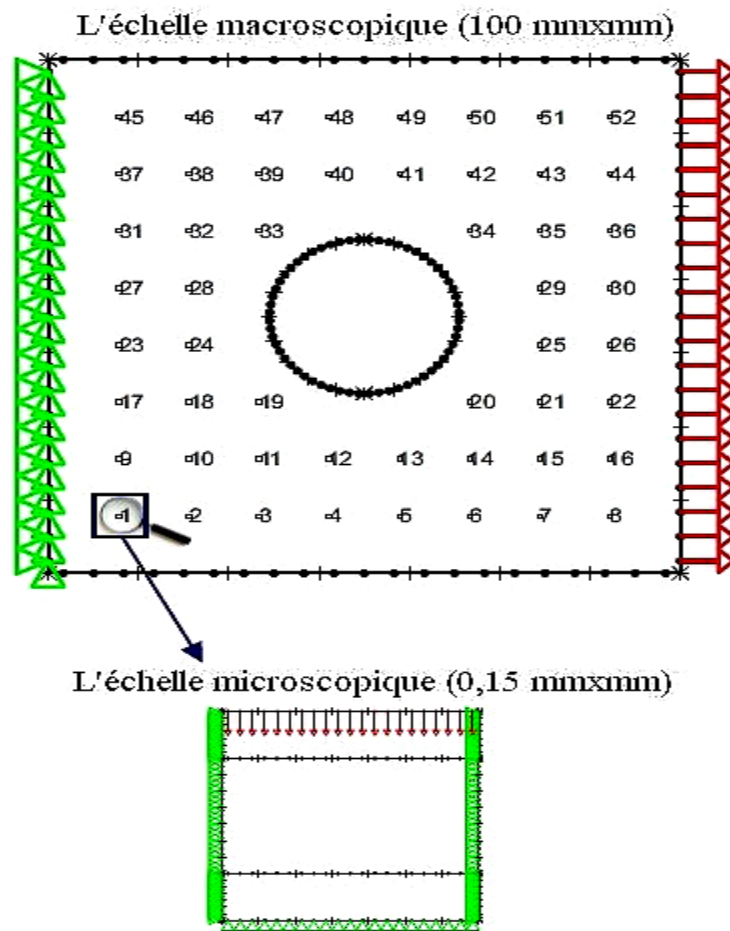


Figure 5.11: technique de localisation; Première combinaison de longueur pour EVR 1 sous déplacement linéaire en y .

Comme cela a été fait dans le premier cas de condition de contour, après avoir effectué toutes les analyses des combinaisons de longueurs pour EVR 1, avec un total de 16 analyses micromécaniques, les résultats obtenus par l'équation (5.126) des composants rigides homogénéisés dans la direction y En fonction de la variation des longueurs de l'EVR 1, pour chaque longueur du rayon de la fibre analysée, sont représentés dans le graphique de la figure 6.12. Dans ce cas, la longueur du rayon de la fibre, $r_f = 0,0633$ mm ($df = 0,1226$ mm), pour toutes les longueurs de l'EVR, est claire et il est clair que la longueur appropriée de l'EVR, avec la valeur Du composant homogénéisé plus proche de la valeur exacte, est $Levr = 0,15$ mm xmm, cette combinaison correspond à une concentration de fraction de volume de fibre dans l'EVR égale à $cf = 3,5724\%$.

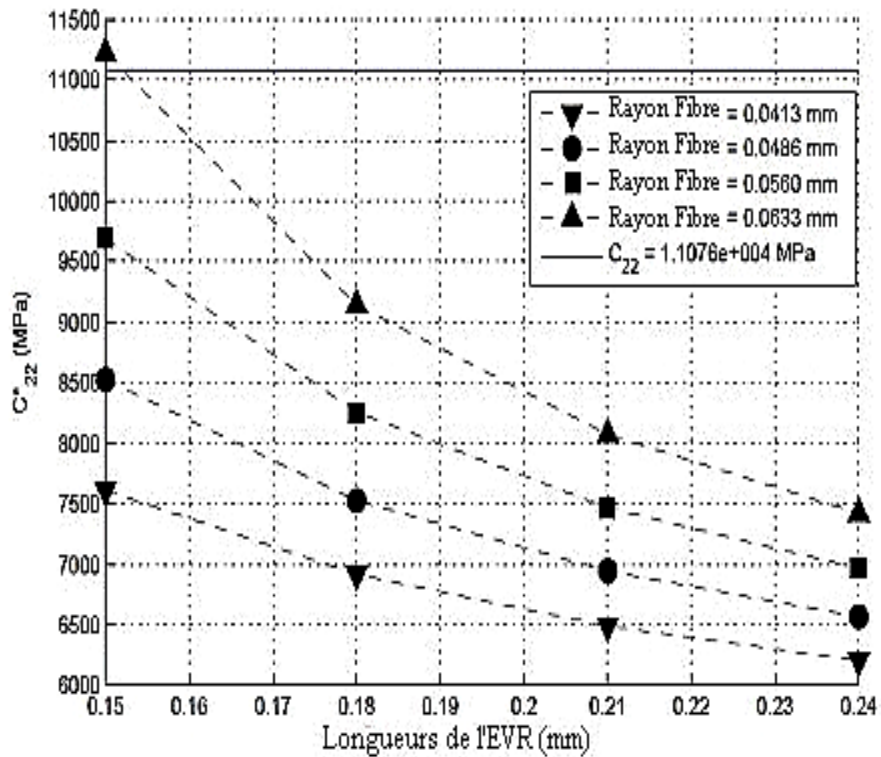


Figure 5.12: Composants homogénéisés dans la direction y en fonction des longueurs de l'EVR 1, pour chaque longueur de rayon de la fibre.

Toutefois, le graphique des écarts types figurant à la figure 5.13 et l'erreur de pourcentage relatif obtenue de 1,2816%, indiqué dans le tableau 5.5, confirment ce résultat.

Longueur de l'EVR (mm.mm)	Longueur du rayon fibre (mm)	Erreur relative (%)
0.1500	0.0413	31.2980
0.1800	0.0486	23.0468
0.2100	0.0560	15.5429
0.2400	0.0633	1.2816
Erreur relative mineure (%)		1.2816

Tableau 5.5: Pourcentage d'erreurs relatives pour la composante de rigidité homogénéisée dans la direction y.

Cette même procédure a été répétée pour les autres 51 EVR, et donc la longueur idéale de chaque EVR a été trouvée, basée sur des études de petites valeurs d'écart types et de très faible pourcentage d'erreurs relatives, généralement inférieures à 1,5%, comme cela a été montré pour EVR 1. Dans le tableau 5.7, les valeurs moyennes obtenues par l'analyse, c'est-à-dire la longueur moyenne des EVR et la longueur moyenne des rayons des fibres présentes dans les EVR, ce qui représente la longueur de référence idéale des rayons des fibres présents dans le stratifié.

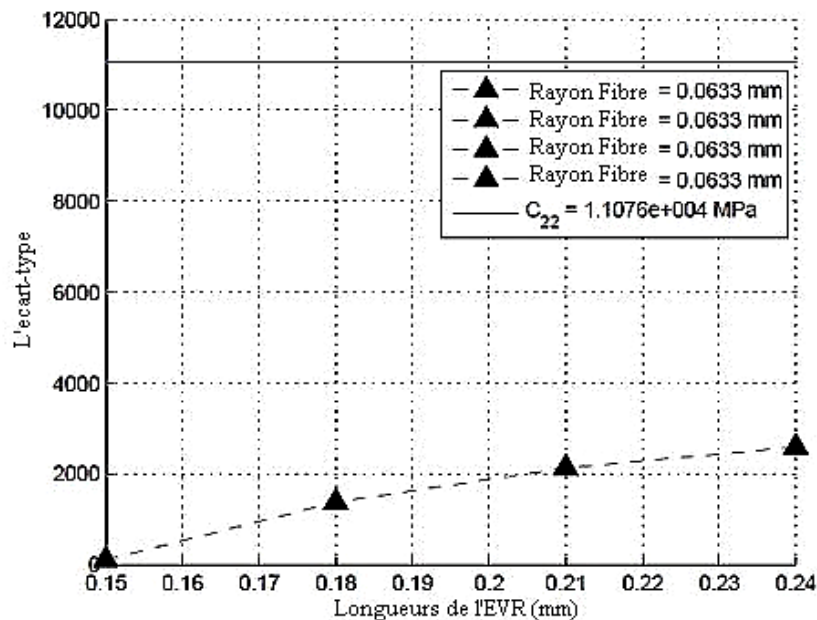


Figure 5.13: Valeurs des écarts types de l'EVR 1, pour le déplacement linéaire en y.

Type de condition limite appliquée à l'EVR	longueurs moyennes	
	EVR ($mm \times mm$)	rayon de la fibre (mm)
déplacement linéaire x	0.1623	0.0447
déplacement linéaire y	0.1577	0.0647

Tableau 5.6: longueurs moyennes trouvées par analyse à plusieurs échelles.

À ce stade, en plus de déterminer les longueurs des EVR, les champs de contrainte et de déformations de la micro échelle, les mêmes utilisés pour l'évaluation des défaillances, ont également été obtenus pour le calcul des propriétés efficaces ou homogénéisées de l'EVR, et pour les calculs des tenseurs des contraintes et des déformations moyennes. Dans la figure 5.14, les champs de déformations subis par EVR 1 sont illustrés, selon le cas du déplacement appliqué, où l'on peut remarquer que les déformations linéaires étaient plus grandes pour la condition à la limite du déplacement linéaire en x et ce qui devrait fournir une défaillance fibreuse longitudinale, qui a été prouvée et sera présentée dans la section suivante de ce chapitre.

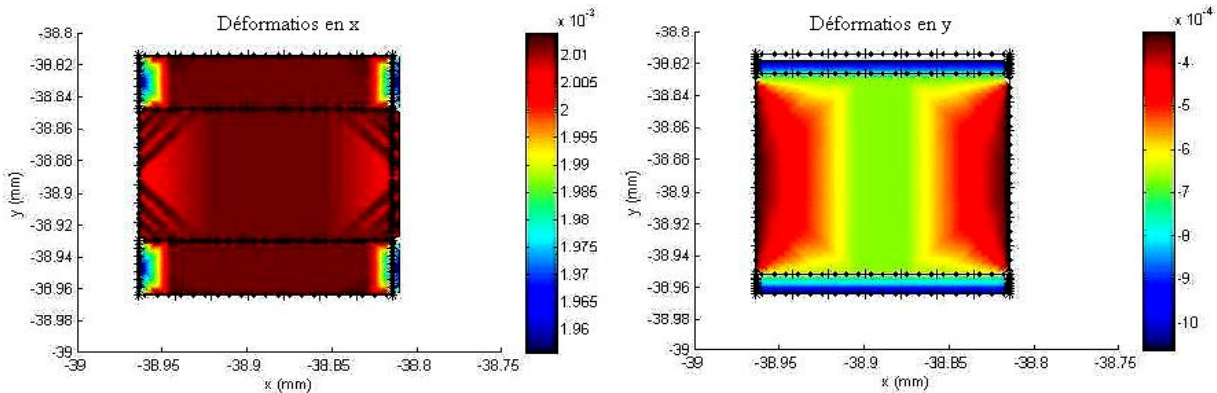


Figure 5.14: EVR 1 déformé en raison du déplacement linéaire en x et y .

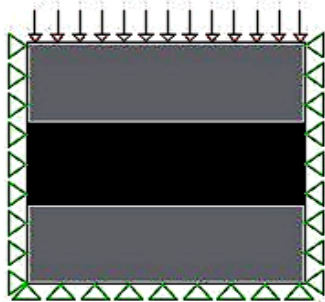
5.3.2 Évaluation de la défaillance dans l'EVR

Avec les longueurs appropriées de tous les EVRs de l'analyse multi-échelle, l'évaluation de la défaillance de la microstructure comme décrit au chapitre (3) a été effectuée en utilisant les critères de Tsai-Hill pour détecter la défaillance de la matrice et le critère de déformation maximum pour détecter la défaillance des fibres, similaire à la procédure effectuée par Pineda et al. [37] Pour cette raison, les chiffres attribués aux modes de défaillance pour chaque composant, matrice et fibre, dans la section (3.2), sont illustrés par la Figure 5.15, où les deux cas de conditions de déplacement ont également

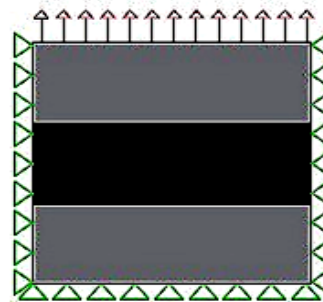
servi à faciliter la prédiction de la défaillance à chaque phase de LEVR, c'est-à-dire que l'état du déplacement linéaire dans x a caractérisé la défaillance de la fibre, qui s'est produite en raison d'un chargement positif ou négatif (traction ou compression), selon le problème microscopique en question, et le même a eu lieu avec la défaillance dans la matrice, caractérisée par le déplacement linéaire en y .

Après avoir analysé tous les EVR, la figure 5.16 présente le stratifié avec les modes respectifs de défaillance de la microstructure, qui ont été comparés aux modes obtenus par les évaluations de défaillance du critère LaRC03, en effectuant des modélisations uniquement sur l'échelle structurelle du stratifié. L'analyse effectuée uniquement sur l'échelle structurelle du stratifié, utilisée pour la comparaison, a été effectuée en utilisant la même procédure effectuée par Panosso [53] qui a généré les modes de défaillance du critère LaRC03 pour l'ensemble du stratifié, comme le montre la Figure 5.17, Où ici la taille a été considérablement augmentée des éléments finis qui ont la même position géométrique des EVR dans le stratifié, uniquement dans le but de souligner et de faciliter la visualisation et la comparaison entre les modes obtenus par les deux analyses.

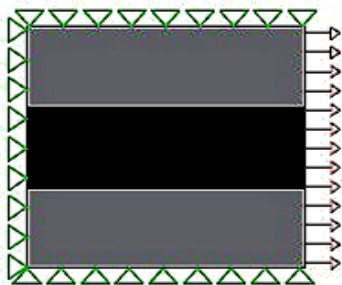
**Mode défaillance = 1: défaillance de la matrice
Par compression transversale**



**Mode défaillance = 2: défaillance de la matrice
Par traction transversale**



**Mode défaillance = 3: défaillance de la fibre
Par traction transversale**



**Mode défaillance = 4: défaillance de la fibre
Par compression transversale**

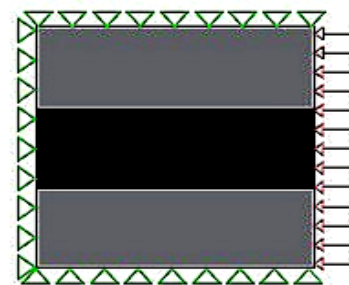


Figure 5.15: Modes de défaillance des EVRs.

Par conséquent, selon la comparaison entre la figure 5.16 et la figure 5.17, nous pouvons clairement voir que les modes de défaillance obtenus par les EVR sont identiques à ceux obtenus par l'analyse structurale via LaRC03, car les modes de l'analyse des défaillances à plusieurs échelles ont une signification similaire aux modes du critère LaRC03, c'est-à-dire dans l'analyse multi-échelle, deux modes de défaillance ont été trouvés, et la plupart des EVR ont présenté le mode 3, ce qui signifie une plus grande probabilité de défaillance de la fibre due à une traction longitudinale, alors que dans l'analyse structurale via The LARC03 critère et l'utilisation de l'ABAQUS, les éléments finis correspondants avec la position de ces EVR, ont également présenté le mode 3, ce qui indique également une défaillance de la fibre due à une rupture sous traction longitudinale. L'autre partie des EVR qui a présenté le mode 2, défaut dans la matrice par traction transversale, a également eu des confirmations avec les modes d'analyse structurale via le critère LaRC03, c'est-à-dire que les éléments finis correspondants ont également présenté le mode 2, qui indique également la défaillance dans la matrice en raison de la fissuration sous traction longitudinale.

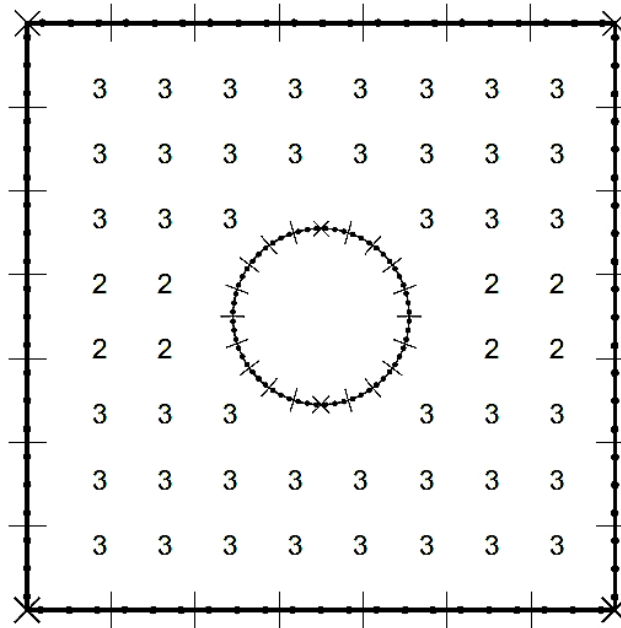


Figure 5.16: modes de défaillance multi-échelles dans le stratifié.

La figure 5.18 montre le graphique avec les valeurs des indices de défaillance obtenus par les deux analyses, et on a également observé que les valeurs étaient très proches.

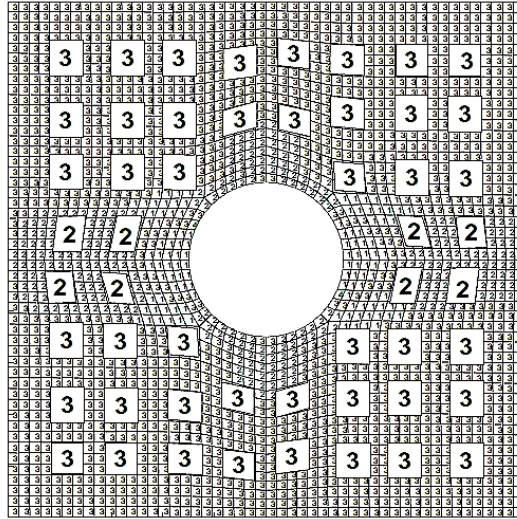


Figure 5.17: modes de défaillance pour le critère LARC03 le stratifié obtenu par ABAQUS.

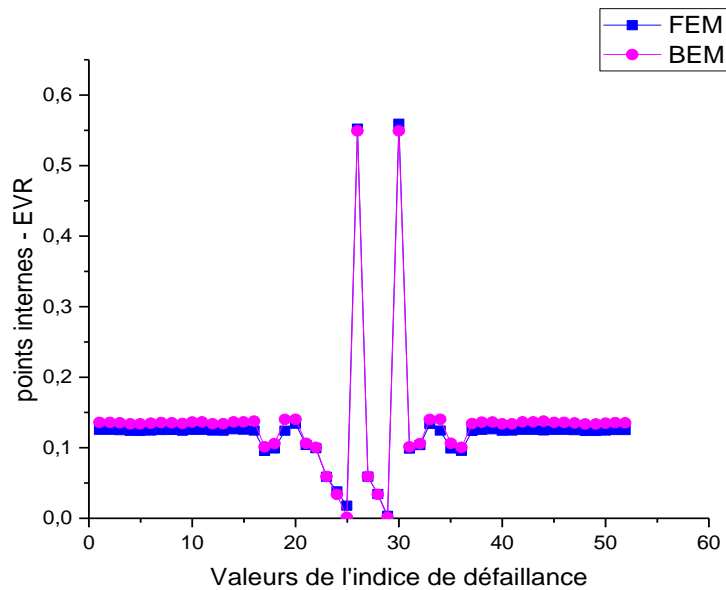


Figure 5.18: Valeurs de l'indice de défaillance pour les deux analyses

Afin d'avoir une analyse plus détaillée en plusieurs échelles de la discontinuité géométrique du stratifié, une évaluation a été effectuée dans seulement 8 EVR de la région centrale près du trou du stratifié, comme le montre la figure 5.19, où il a indiqué que dans cette région se trouve une prédominance de la défaillance de la matrice, dans ce cas, par les modes 1 et 2, la défaillance de la matrice par compression transversale et par traction transversale respectivement, et en comparaison, la figure 5.20 montre le trou donné en détail dans la figure 5.17 pour l'analyse structurale en utilisant le critère LaRC03, en soulignant en rouge les éléments finis correspondants avec la position de ces EVR, où l'on a également remarqué une équivalence entre les modes pour les deux analyses.

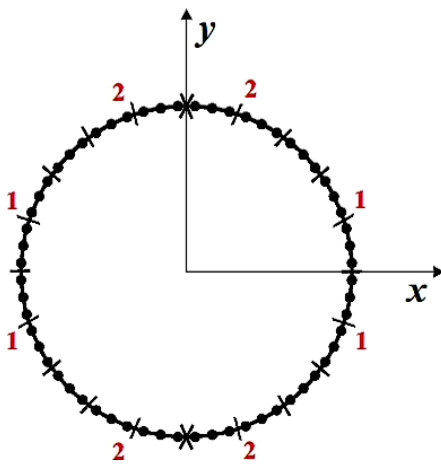


Figure 5.19: Mode de défaillance multi-échelle à proximité du trou Central.

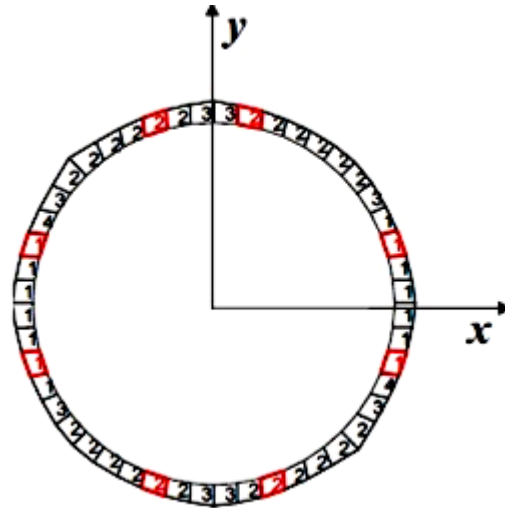


Figure 5.20: mode de défaillance multi-échelle pour les critères LaRC03 à proximité Du trou central obtenu par ABAQUS.

Et le tableau 5.7 montre les valeurs maximales et minimales des indices de défaut multi-échelles obtenues pour les EVR centraux, ainsi que les valeurs maximales et minimales des indices obtenus par l'analyse structurale en utilisant le critère LaRC03 correspondant à la même position géométrique, montrant un accord raisonnable et indiquant une plus grande probabilité de défaillance de la matrice en raison d'une charge de traction transversale.

	Analyse Multi-échelles		Analyse structurale	
Indices	0.0387	0.9864	0.0034	1.0317
Modes	1	2	1	2

Tableau 5.7: Valeurs maximales et minimales des indices de défaillance au voisinage de l'alésage du stratifié pour les deux analyses.

5.4 Conclusion A

Une analyse des défaillances multi- échelles a été réalisée dans des stratifiés composites à l'aide des formulations de la méthode des éléments de frontière (BEM) pour résoudre le problème élastique des deux échelles, macro et micro, où les critères de défaillance de Tsai-Hill et de déformation maximum ont été évalués dans la microstructure, respectivement pour détecter les défaillances dans la matrice et la fibre de l'élément de volume représentatif (EVR), les résultats ont été comparés à une analyse structurale du stratifié en utilisant la méthode des éléments finis (FEM) à l'aide du logiciel ABAQUS, qui fait une évaluation de la défaillance par le critère de laRC03.

Pour cela, nous avons développé un programme qui évalue la défaillance des microstructures du stratifié composite à base de la modélisation multi-échelles. Le programme est essentiellement divisé en deux parties: analyse globale (stratifié composite unidirectionnel) et l'analyse locale (EVR). L'analyse globale initiée par la solution du problème élastique global via la BEM pour l'élasticité anisotrope, selon la théorie de la localisation, et se terminant par la détermination pour chaque point interne de cette plage, le tenseur des déformations macroscopiques, qui, selon le théorème de déformation moyenne est égal au tenseur des déformations homogénéisées.

L'analyse locale a commencé par l'application des conditions aux limites dans l'échelle locale et a permis de résoudre le problème élastique local via la BEM pour les sous-régions où, par les résultats obtenus, il a été possible de déterminer les tenseurs des contraintes homogénéisés, à partir desquels on a trouvé des propriétés constitutives homogénéisées.

La convergence de la méthode a donné une continuité à l'analyse locale, de sorte que les longueurs appropriées de l'échelle locale avec ses champs de contraintes et de déformations ont été trouvées, de sorte que finalement l'analyse se termine par les évaluations locales des défaillances.

En général, les résultats obtenus ici ont montré un bon accord avec les résultats obtenus par analyse en utilisant le critère LaRC03, en utilisant ABAQUS, et ont également souligné la capacité des modèles multi-échelles pour simuler le comportement des matériaux hétérogènes, tels que les composites.

B - Analyse des défaillances des plaques stratifiées

5.5 Critères de dégradation d'un pli

Dans l'analyse numérique, après une défaillance d'un pli, il résulte la détermination des propriétés de dégradation à travers leurs lois.

À ce jour, il n'y a pas d'approche universellement acceptée des propriétés et des facteurs de réduction de la rigidité à utiliser après la défaillance d'un pli.

S'il y a une défaillance de traction dans la direction 2 d'un stratifié unidirectionnel, il existe des chercheurs qui rendent nulles les propriétés E_2 et ν_{12} , et d'autres dégradent respectivement de 50% et 90% des valeurs de ces propriétés. Les lois de dégradation peuvent varier en fonction du matériau et de l'agencement des fibres. L'hypothèse de dégradation la plus simple, mais pas très réaliste, est la dégradation totale des propriétés mécaniques d'une couche lors de la défaillance.

Dans cette étude, quatre formes différentes de dégradation matérielle sont proposées et analysées. Elles seront simulées numériquement combinées avec les deux critères de la défaillance: le critère de contrainte maximale et les critères modifiés de Hashin.

On a supposé que le coefficient de Poisson ν_{12} sera toujours dégradé lorsqu'une défaillance se produit dans la direction 1 ou 2 du pli, à la fois avec des charges de compression ou de traction.

La dégradation du module de cisaillement transversal dans le plan du pli (G_{12}) se produira en cas de défaillance avec la traction de charge axiale vers 1 ou 2, ou la charge de cisaillement dans le plan.

Un premier modèle de dégradation, appelé D01 suppose que chaque mode de défaillance entraîne une dégradation totale du module d'élasticité dans la direction de chargement correspondante. Le tableau 5.8 montre les propriétés dégradées par ce critère.

Dans les lamelles tissulaires bidirectionnelles, lorsque la défaillance se produit par contrainte de cisaillement dans le plan du pli, il est raisonnable de considérer que cela créera une défaillance superficielle perpendiculaire à la direction de leurs fibres plus faibles. Un deuxième modèle, appelé D02, ajoute la défaillance dans le module d'élasticité dans la direction 2 et la dégradation du rapport de Poisson alors que ce mode de défaillance se produit. Les propriétés dégradées dans les tableaux 5.8 et 5.9 définissent la dégradation du critère D02.

mode de défaillance	propriétés dégradées		
Traction vers 1	$E_1=0$	$\nu_{12}=0$	$G_{12}=0$
Compression vers 1	$E_1=0$	$\nu_{12}=0$	
Traction vers 2	$E_2=0$	$\nu_{12}=0$	$G_{12}=0$
Compression vers 2	$E_2=0$	$\nu_{12}=0$	
Cisaillement dans le plan 12			$G_{12}=0$

Tableau 5.8 : propriétés dégradées selon le critère de dégradation D01.

mode de défaillance	propriétés dégradées		
Cisaillement dans le plan 12	$E_2=0$	$\nu_{12}=0$	$G_{12}=0$

Tableau 5.9 : propriétés dégradées par le mode de rupture par cisaillement dans le plan 12 selon le critère de dégradation D02.

Une visualisation du critère de dégradation D02 est illustrée à la figure 5.21 Les cinq types d'expéditions simples sur la plaque sont illustrés. A l'intérieur de la plaque, les fibres dans les deux sens sont représentées par des lignes perpendiculaires l'une à l'autre. Lorsque la dégradation d'un module élastique E se produit dans une direction, les fibres sont séparées. Quand la dégradation de la propriété G_{12} se produit, cette dégradation de la matrice est représentée en couleur.

Une autre hypothèse raisonnable est de dégrader le module d'élasticité dans la direction 2 lorsqu'une défaillance se produit pour la traction dans la direction 1. Ce type de dégradation est plus attendu dans des stratifiés unidirectionnels. Les propriétés dégradées des tableaux 6.8 et 6.10 définissent la dégradation du critère D03.

Alors que les modes de défaillance de compression ou de traction suivant la direction 1 dégradent également le module d'élasticité dans la direction 2, cela peut être défini comme le quatrième modèle D04 de dégradation dans les tableaux 5.8 et 5.11.

mode de défaillance	propriétés dégradées			
Traction vers 1	$E_1=0$	$E_2=0$	$\nu_{12}=0$	$G_{12}=0$

Tableau 5.10 : propriétés dégradées par le mode de défaillance pour la traction dans la direction 1 selon le critère de dégradation D03.

mode de défaillance	propriétés dégradées			
Traction vers 1	$E_1=0$	$E_2=0$	$\nu_{12}=0$	$G_{12}=0$
Compression vers 1	$E_1=0$	$E_2=0$	$\nu_{12}=0$	

Tableau 5.11 : propriétés dégradées par les modes de défaillance pour la traction et la compression dans la direction 1 selon le critère de dégradation D04.

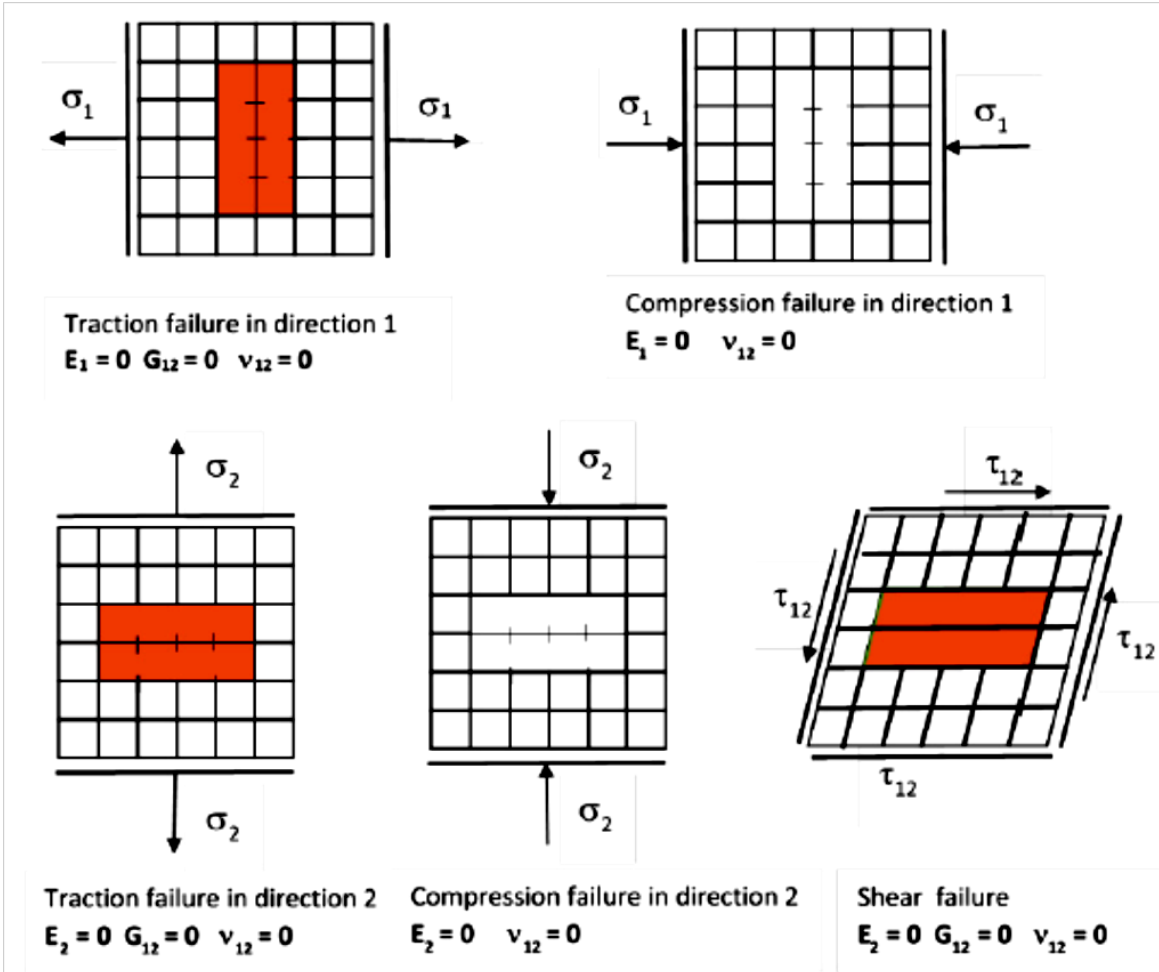


Figure 5.21: Critère de dégradation de la lamelle D02.6.4. Modèles par éléments finis des tests ²

la simulation numérique des essais d'impact a tiré parti de la méthode des éléments finis, mise en œuvre dans un logiciel capable de simuler des structures stratifiées dans des conditions de charges transitoires grâce à une solution méthodologique explicite et applique des théories de défaillance et de dégradation des propriétés des éléments.

Le stratifié a été modélisé avec des éléments de grille. Cet élément se comporte comme s'il y avait une séquence d'éléments de plaque qui forment chaque lamelle, se chevauchant et reliés entre eux, suivant la théorie cinématique également appelée théorie de Mindlin-Reissner.

La matrice constitutive d'une lamelle aux propriétés orthotropes est modélisée en tenant compte d'un état plan des contraintes. Cinq constantes élastiques sont utilisées : E_1 , E_2 , ν_{12} , ν_{21} et G_{12} . Comme le matériau de la lamelle de ce travail est un tissu bidirectionnel, l'hypothèse de E_1 est supposée être égale à E_2 . Cette approximation est tout à fait raisonnable, puisque la différence entre ces modules d'élasticité est faible. Par conséquent, ν_{12} sera égal à ν_{21} selon la théorie de réciprocité de Maxwell. Lorsqu'il est désiré de considérer l'influence des contraintes de cisaillement sur les déformations d'une plaque, il est nécessaire de déterminer les valeurs de G_{23} et G_{13} . Dans ce travail, ces constantes ont été approximées par les valeurs de G_{12} .

Une cartographie de la zone endommagée dans chaque modèle numérique a été réalisée en projetant dans un plan les éléments qui avaient des couches avec l'une de leurs propriétés dégradées. Il a été constaté que les éléments qui ont dégradé la propriété G_{12} dans la couche opposée à la face d'impact définissent généralement cette zone d'endommagement du stratifié. En effet, les quatre critères numériques de dégradation rendent nulle la propriété G_{12} lorsqu'il y a une rupture par traction dans les deux directions de la lamelle ou une rupture par cisaillement dans le plan de la lamelle. Dans certains cas, la zone d'endommagement numérique peut comporter des éléments qui n'ont dégradé E_1 ou E_2 qu'avec des charges de compression. Ce type de dégradation se produit habituellement dans la couche la plus proche de la face d'impact.

L'élément de plaque est Lagrangien, avec 4 nœuds, avec une formulation simple basée sur l'interpolation bilinéaire en déplacement. En conséquence, la tension axiale dans la direction X de l'élément varie linéairement dans la direction Y, et vice versa. La contrainte de cisaillement XY est constante dans l'élément. L'intégration numérique réalisée pour chaque couche d'éléments utilise un seul point Gauss, situé dans son centroïde.

L'utilisation d'éléments aux formulations plus complexes (éléments paraboliques ou ordre supérieur) n'est pas recommandée car l'efficacité de la solution est plus faible. Pour réduire le coût de calcul de la solution, il est préférable d'utiliser des éléments plus simples en utilisant moins d'éléments avec une formulation plus complexe.

Dans le modèle utilisé, la force de contact sur la face avant de l'élément de plaque est constante. Cette simplification convient pour les plaques minces, avec un maillage raffiné.

Étant donné que la pointe de l'élément de frappe a un diamètre de 25,0 mm et que les dimensions des endommagements attendus sont de cet ordre de grandeur, la plaque a été discrétisée avec des éléments de plaque avec une extension de 5,0 mm dans la région proche de l'impact.

Nous avons étudié trois différentes conditions numériques aux limites de la plaque appelée : en porte-à-faux, supportée et vissée avec des supports rigides.

Le maillage utilisé pour la simulation de deux conditions limites : Le sertissage a limité les translations et les rotations des nœuds situés sur le bord du disque. Le support ne restreignait que les traductions de ces mêmes nœuds.

Le maillage par éléments finis avec condition de limite de vis avec des supports rigides : les déplacements en translation nulle sont imposés sur les nœuds de plaque positionnés sur la fixation du boulon.

Les éléments de la plaque représentant les supports inférieur et supérieur de la plaque stratifiée : Ce sont des éléments rigides qui sont retenus à tout mouvement. La simulation numérique représente le contact de la plaque avec les supports, sans présence de jeu et l'existence de forces de frottement n'a pas été prise en compte.

Étant donné que les fréquences significatives des trois plaques laminées ne sont pas très inférieures à la fréquence des premiers impacts axiaux, à savoir 11 kg (3100 Hz) et 5 kg (6300 Hz) respectivement, la flexibilité axiale de l'élément de frappe doit être prise en compte. Le corps de l'élément de frappe a été modélisé numériquement à l'aide d'éléments de barre avec un degré de liberté axiale. Ces éléments ont une longueur de 8 mm.

Après avoir choisi la meilleure condition aux limites, on poursuit l'analyse pour prédire les endommagements sur la plaque. Les deux critères de défaillance retenus pour l'analyse numérique sont : le critère de contrainte maximale et le critère appelé "Hashin modifié". Les quatre critères de dégradation (D01, D02, D03 et D04) sont évalués. Pour faciliter l'analyse des résultats, des simulations ont également été effectuées sans tenir compte de la défaillance du matériau.

Le taux d'échantillonnage des données issues des simulations numériques dans le temps était de 100 kHz. Au total, 135 simulations sont effectuées et évaluées.

5.6. Résultats

Les résultats des essais numériques et expérimentaux des simulations d'impact à basse vitesse sont présentés et analysés dans cette section.

Dans un premier temps, nous sélectionnons les conditions les plus appropriées de la limite numérique et évaluons la flexibilité structurelle de chaque plaque.

Les forces agissant sur l'impacteur dans le temps (expérimentale et numérique) sont présentées et comparées.

Dans un premier temps, il s'agit d'une analyse qualitative des courbes des forces agissant sur l'élément de frappe de 11 kg avec deux critères de rupture (contrainte maximale et Hashin Modifié), et les quatre types d'endommagement (D01, D02, D03 et D04).

Pour analyser quantitativement les résultats numériques, il était nécessaire d'évaluer les paramètres qui dépendent de ces

courbes de puissance. Il s'agit de la force d'amorçage de l'endommagement (F_{th}), de la force maximale dans l'événement (F_{max}), du temps d'impact (T_{imp}) et de l'énergie de retour de l'impacteur (E_r). Des lignes de tendance de ces paramètres en fonction de l'énergie d'impact sont également tracées pour l'analyse des résultats expérimentaux.

Après l'analyse, vérifier expérimentalement la faible influence de la masse de l'élément de frappe sur la résistance à l'endommagement de la plaque stratifiée aux chocs à faible vitesse.

En réglant la masse de l'élément de frappe et la condition limite du modèle numérique, les forces agissant sur la plaque et les endommagements sont obtenues numériquement en utilisant différents critères de défaillance et d'endommagement. Ces résultats sont présentés et comparés aux résultats expérimentaux. Pour le prochain niveau d'énergie E_{th} de chaque plaque, nous avons également fait des comparaisons avec les résultats analytiques.

Dans le présent document, les résultats des forces agissant sur l'élément de frappe sont normalisés par rapport aux forces d'amorçage (F_{th}) de chaque épaisseur de plaque, obtenues expérimentalement. Ces valeurs sont données dans le tableau 5.9.

Les longueurs des endommagements et les zones endommagées sont également normalisées. Cette normalisation a été effectuée par rapport aux valeurs d'extension h_{ref} . (31 mm) et la zone endommagée A_{dref} . (550 mm²) obtenu lors de l'essai de choc expérimental 44J avec un poids de 11 kg en plaque [0,90]30.

Les cartes d'endommagement des résultats expérimentaux et les simulations numériques dans la plaque à 10 couches : Avec les énergies d'impact plus faibles, les formes géométriques d'endommagement expérimental sont d'un disque de diamètre h_m . Au fur et à mesure que l'énergie augmente, la forme de dommage est un disque sur une croix avec extension h_m . La géométrie la plus proche de la zone expérimentale est un carré de diagonale h_m . La forme d'endommagement des résultats numériques est plus proche de la surface d'un carré de côté h_m .

Endommagement sur la plaque de 20 couches : Les endommagements expérimentaux mesurés pour les énergies inférieures se présentent sous la forme d'un carré avec h_m en diagonale. Au fur et à mesure que l'énergie d'impact augmente, une épaisse croix d'extension h_m se forme, dont la surface est très proche de celle d'un carré de diagonale h_m . Dans la solution numérique, la forme du dommage est proche d'une croix de dimension h_m , avec un carré central.

Dommage sur la plaque de 30 couches : Expérimentalement, pour les énergies d'impact plus faibles, la forme de dommage est un disque de diamètre h_m . Au fur et à mesure que l'énergie augmente, un carré de diagonale h_m se forme. Par le résultat numérique, la forme du dommage est la plus proche d'une croix de dimension h_m avec un carré au centre.

Les dimensions h_m sur la plaque à 10 couches sont supérieures d'au moins 34 % pour les trois premiers niveaux d'énergie et de 8 % pour le dernier niveau d'énergie. Il est proposé que la superficie des endommagements soit estimée par une diagonale carrée de $0,75 h_m$ du résultat numérique.

Les dimensions numériques h_m de la plaque de 20 couches sont au moins 98 % plus grandes que les extensions expérimentales. Il est proposé d'estimer la superficie des endommagements par une diagonale carrée de $0,5 h_m$ du résultat numérique.

Les dimensions numériques h_m de la plaque de 30 couches sont au moins 70 % plus grandes que les extensions expérimentales. Il est proposé que la superficie des endommagements soit une diagonale carrée de $0,6 h_m$ du résultat numérique.

Le tableau 5.12 montre les facteurs de correction (CA) qui ont multiplié les valeurs de h_m du résultat numérique pour estimer la surface d'endommagement de la plaque, donnée par l'équation

$$A_d = \frac{(C_A h_m)^2}{2}$$

plaque	Facteurs de correction (C_A)
[0,90] ₁₀	0.75
[0,90] ₂₀	0.5
[0,90] ₃₀	0.6

Tableau 5.12 : Facteurs de correction de h_m

Plaque	Expérimental Fth (N)	Solution analytique Fth_a (N)	Solution numérique tension maximale Fth_n (N)	Solution numérique Hashin Modifié Fth_n (N)
[0.90] ₁₀	2200	2018	2830	2820
[0.90] ₂₀	5750	5708	6080	6080
[0.90] ₃₀	11000	10486	11620	11620

Tableau 5.13 : Résistance Valeurs seuil d'endommagement des plaques.

Les résultats expérimentaux des impacts qui ne causent aucun endommagement sur les plaques [0.90]₁₀ et [0.90]₃₀ sont présentés aux tableaux 5.14 et 5.15 respectivement.

CDP	m (kg)	V_i (m/s)	E_i (J)	F_{max}/F_{th}	T_{imp} (ms)	$\Delta t_{F=0}$ (ms)
06-10	5	1.27	4.0	0.66	17.7	0.59
08-10	5	1.71	7.3	0.95	15.8	0.29
06-10	11	0.91	4.6	0.66	26.1	2.54
08-10	11	1.15	7.3	0.98	28.6	2.05

Tableau 5.14 : mesures expérimentales de V_i , E_i , F_{max} , T_{imp} et $\Delta t_{F=0}$ dont les impacts n'ont causé aucun endommagement à la plaque [0.90]₁₀.

CDP	m (kg)	V_i (m/s)	E_i (J)	F_{max}/F_{th}	T_{imp} (ms)	$\Delta t_{F=0}$ (ms)
06-30	5	3.51	31.35	0.96	5.6	0.10
06-30	11	2.48	34.00	0.94	8.2	0.20

Tableau 5.15 : mesures expérimentales de V_i , E_i , F_{max} , T_{imp} et $\Delta t_{F=0}$ dont les impacts n'ont causé aucun endommagement à la plaque [0.90]₃₀.

5.6.1 L'endommagement de la plaque : résultats expérimentaux

La figure 5.22 montre les résultats expérimentaux et les équations des courbes de tendance des zones d'endommagement délaminiées (A_d) en fonction de l'énergie d'impact, on observe une relation linéaire entre l'énergie d'impact et la surface d'endommagement.

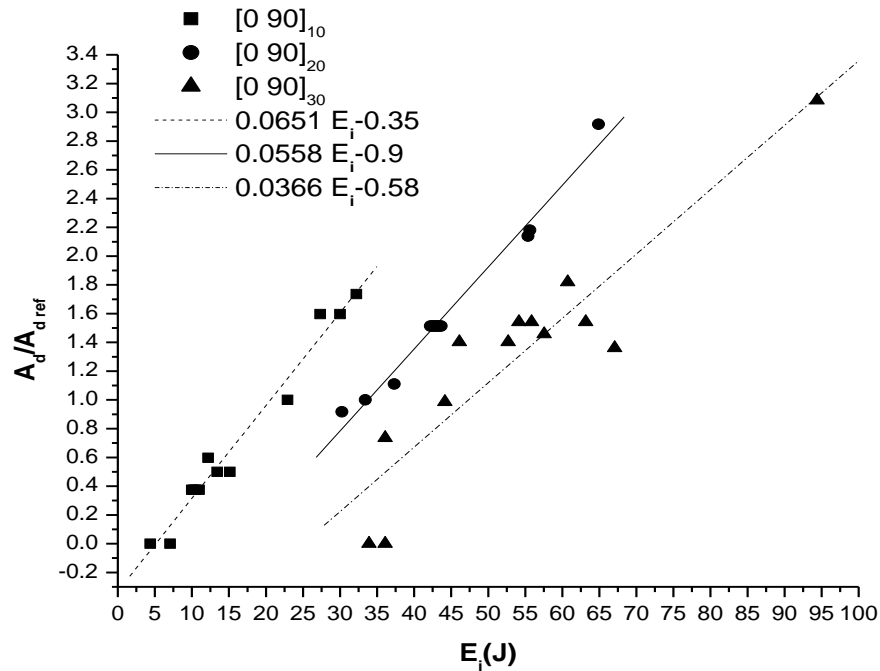


Figure 5.22 : zones d'endommagement expérimental sur les plaques.

Les valeurs de l'extension maximale des endommagements expérimentaux h_m sont présentées à la figure 5.23. Il est à noter que les courbes linéaires et tendancielle représentent les résultats expérimentaux h_m pour les plaques de 10 et 20 couches. Cependant, pour les couches de plaques 30, une courbe polynomiale quadratique a été utilisée. Comme il n'y a qu'un seul point d'essai avec l'énergie d'impact 94J, il serait recommandé d'effectuer des essais sur les niveaux d'énergie d'impact entre 70 et 90J pour confirmer la ligne de tendance.

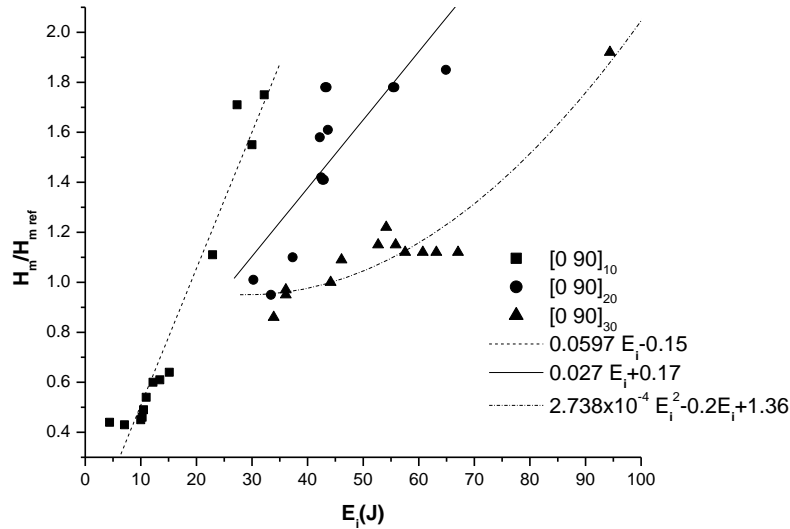


Figure 5.23 : Extensions des endommagements expérimentaux (h_m) sur les plaques.

On observe que dans les simulations numériques avec la plaque à 10 couches, les erreurs des zones endommagées (A_d) augmentent au fur et à mesure que l'énergie d'impact augmente. Toutefois, l'étendue des endommagements (h_m) tend à présenter des valeurs plus proches de celles de l'essai. Les résultats numériques avec les critères modifiés de rupture duashin et les critères d'endommagement D01 et D02 sont ceux qui ont obtenu les résultats d'essai les plus proches. Même le comportement de croissance linéaire de A_d et (h_m) en fonction de l'énergie d'impact observée dans les résultats expérimentaux est également vérifié dans les modèles numériques.

5.6.2 Résultats des solutions numériques

Une cartographie de la zone endommagée dans chaque modèle numérique a été faite par projection sur un plan des éléments qui avaient des couches avec l'une de ses propriétés dégradées. Il a été constaté que les éléments qui montraient une dégradation de la propriété à la couche G12 (module de cisaillement transversal du plan du laminé) opposée à la face d'impact du laminé définissent typiquement cette zone d'endommagement. En effet, les quatre critères de décomposition numérique rendent nulle la propriété G12 lorsqu'il y a une rupture avec contrainte de traction dans les deux sens de la plaque ou une rupture par cisaillement dans le plan de la plaque. Dans certains cas, la zone numérique endommagée peut avoir des éléments qui n'ont dégradé E1 ou E2 qu'avec des charges de compression. Ce type de dégradation se produit souvent dans la couche la plus proche de la face d'impact.

La figure 5.24 compare les zones d'endommagement obtenues à partir des simulations numériques et des expériences avec des plaques à 10 couches. La figure 5.25 montre l'étendue des endommagements h_m .

Il est à noter que les simulations numériques avec la plaque à 10 couches, les erreurs de surface d'endommagement (A_d) augmentent au fur et à mesure que l'énergie augmente l'impact de l'impact. Cependant, l'étendue h_m des endommagements tend à des valeurs plus proches de l'essai.

Les résultats numériques avec les critères de défaillance de Hashin et les endommagements aux critères modifiés D01 et D02 sont ceux qui ont obtenu les résultats les plus proches des tests. L'inclusion de la croissance linéaire du comportement de A_d et h_m en fonction de l'énergie d'impact observée dans les résultats expérimentaux est également observée dans les modèles numériques.

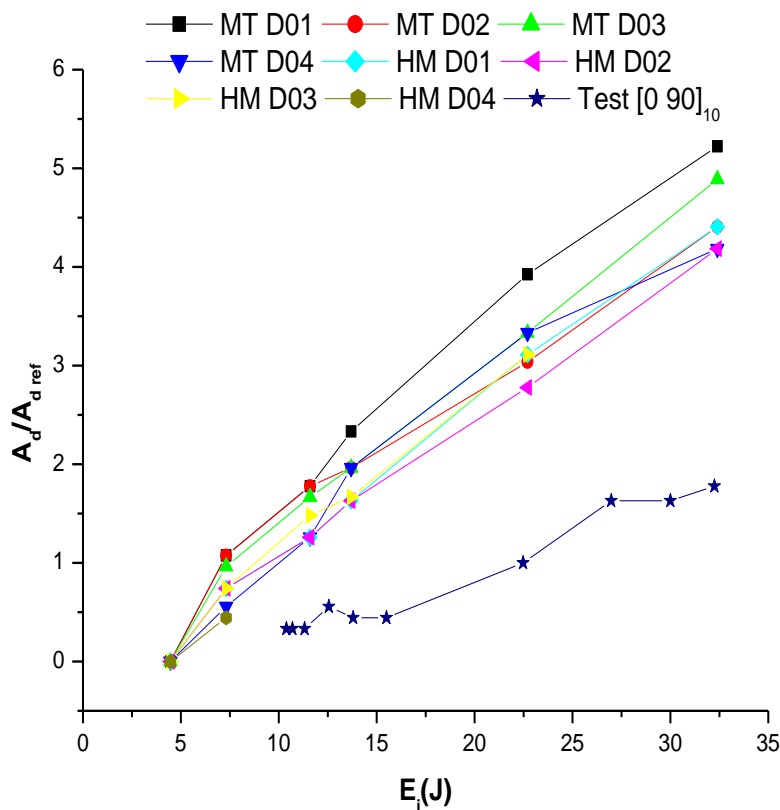


Figure 5.24 : simulation numérique de la zone d'endommagement avec les différents modèles de défaillance et d'endommagement de la plaque $[0.90]_{10}$.

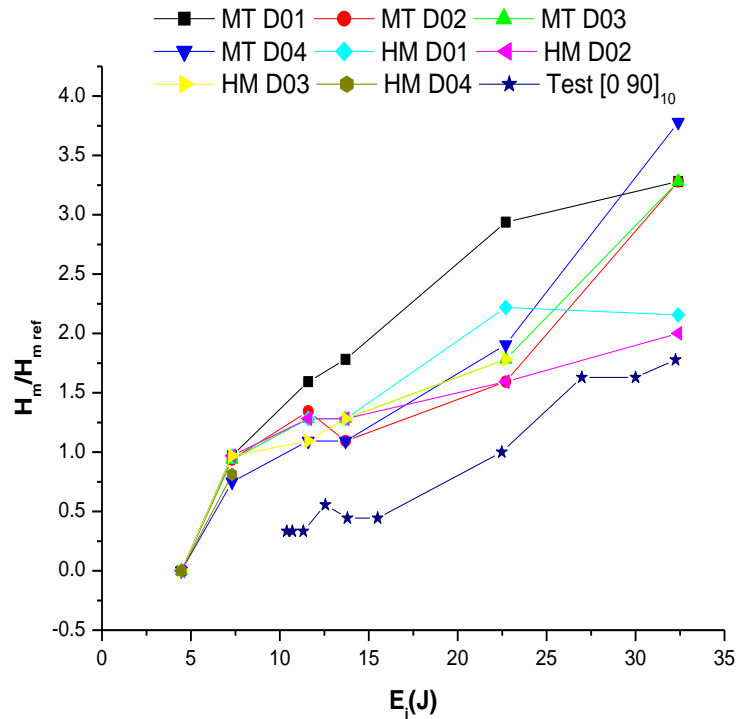


Figure 5.25 : simulation numérique de h_m avec les différents modèles de défaillance et d'endommagement de la plaque $[0.90]_{10}$.

Les résultats de Ad et h_m obtenus avec l'impact sur la plaque de 20 couches sont illustrés aux figures 5.26 et 5.27.

Dans le panneau de 20 couches, les résultats numériques de Ad et h_m avec les différents critères sont très similaires l'un à l'autre, sauf ceux obtenus en utilisant le Hashin Modifié D03 au niveau d'énergie le plus élevé. Les lignes de tendance linéaire des résultats expérimentaux de Ad et h_m sont également observées dans les résultats numériques.

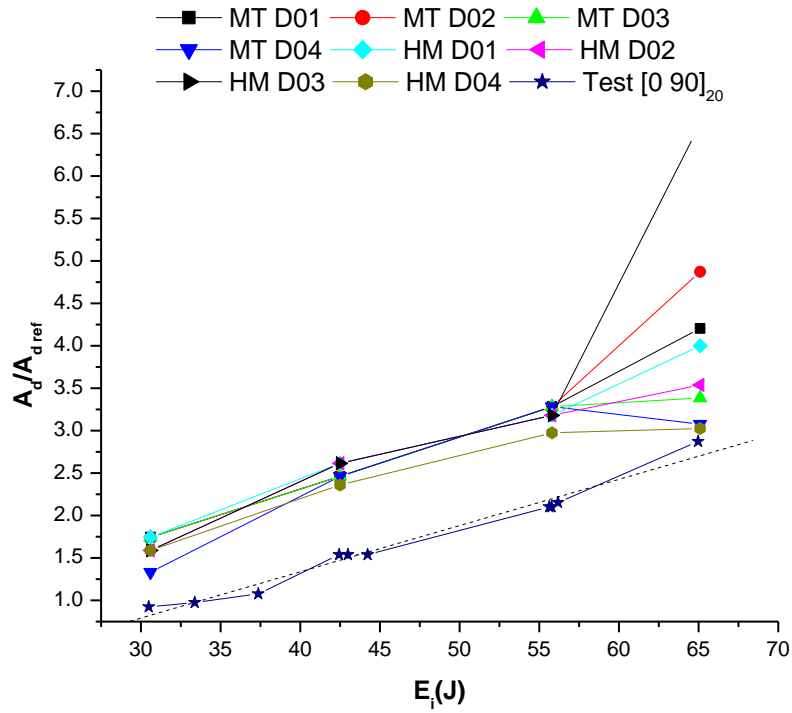


Figure 5.26 : simulation numérique de la zone endommagée avec les différents modèles Et des endommagements à la plaque $[0.90]_{20}$.

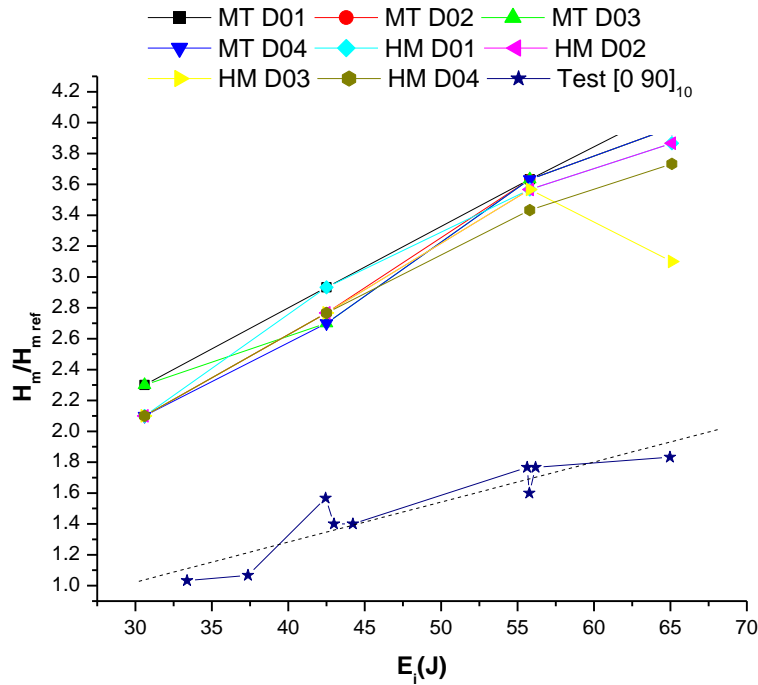


Figure 5.27 : simulation numérique de h_m avec les différents modèles de défaillance et d'endommagement de la plaque $[0.90]_{20}$.

Dans la plaque de 30 couches, les résultats numériques de A_d et h_m sont présentés aux figures 5.28 et 5.29.

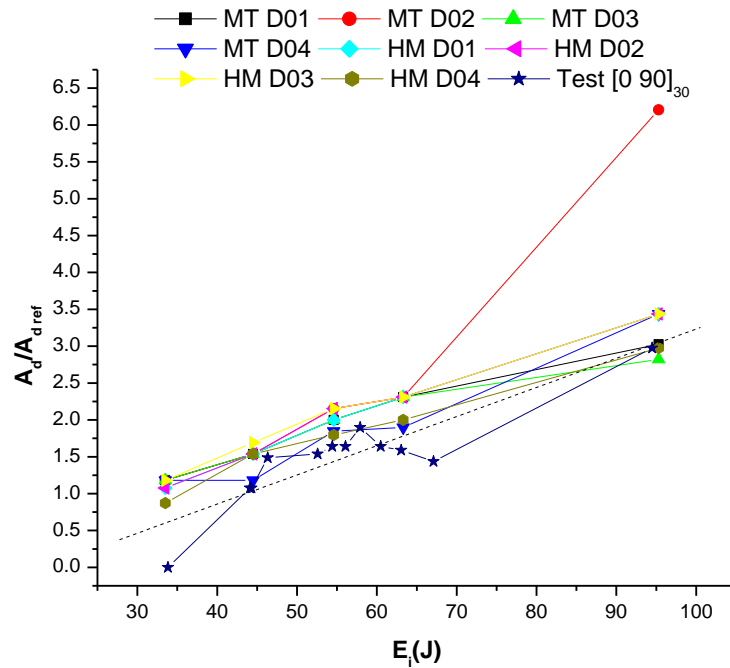


Figure 5.28 : simulation numérique de la zone endommagée avec les différents modèles de défaillance et d'endommagement à la plaque [0.90]30.

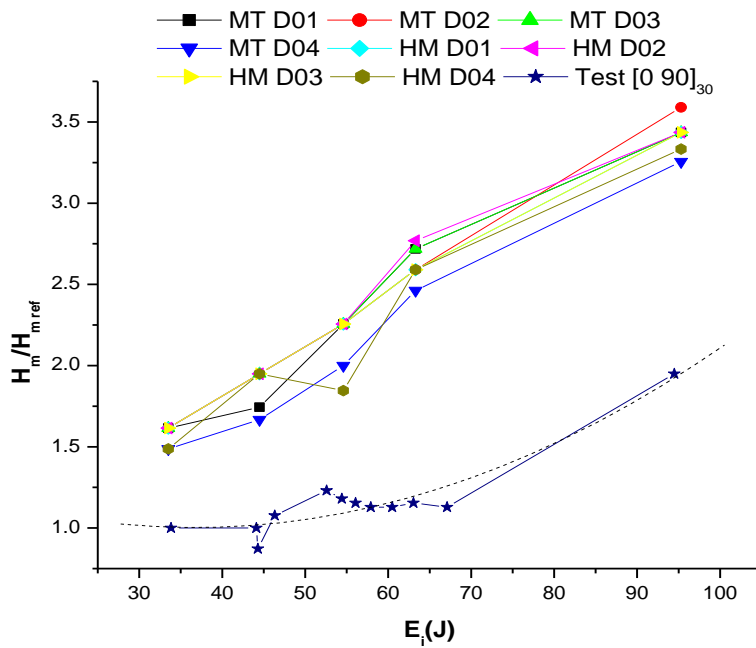


Figure 5.29 : simulation numérique de h_m avec les différents modèles de défaillance et de d'endommagement de la plaque [0.90]30.

Dans la plaque de 30 couches, les résultats numériques de A_d et h_m obtenus avec les différents critères sont très proches l'un de l'autre, à l'exception de ceux obtenus en utilisant la tension maximale D02 au niveau d'énergie le plus élevé. Le taux de croissance linéaire de A_d et un taux de croissance quadratique de h_m en fonction de l'énergie d'impact, vérifiée expérimentalement, sont également enregistrés dans les résultats numériques.

Dans les simulations numériques avec les plaques de 20 et 30 couches, les erreurs des zones endommagées (A_d) tendaient à diminuer au fur et à mesure que l'énergie d'impact augmentait. Toutefois, l'étendue des endommagements (h_m) tend à maintenir le même pourcentage d'erreur par rapport à l'essai.

En comparant la figure 6.24 à la figure 6.26 et la figure 6.28, on constate que les erreurs de zones donnant (A_d) des simulations numériques par rapport à l'expérience diminuent au fur et à mesure que l'épaisseur de la plaque augmente. Cependant, en comparant la figure 6.24, la figure 6.26 et la figure 6.30, quand l'épaisseur de la plaque est plus grande, l'erreur augmente de l'étendue numérique h_m des endommagements par rapport à l'expérience.

En comparant les courbes de surface d'endommagement (A_d) et l'étendue des endommagements (h_m) obtenus par des méthodes numériques, ces modèles sont généralement ceux qui ont approché les résultats expérimentaux. A la plaque de 10 couches, les critères de défaillance Hashin Modifié D02 et D03 se distinguent par leur bon comportement. Dans la plaque de 30 couches avec une énergie d'impact de 94,3 J, la méthode de la déformation maximale D02, c'est aussi la méthode qui diffère des résultats obtenus à la figure 6.25. Cette concordance avec les résultats de différents types d'analyse corrobore les critères de défaillance et de dégradation.

Dans la plaque à 10 couches, les valeurs d'extension d'endommagement h_m obtenues numériquement ont montré de meilleurs résultats par rapport aux valeurs des zones d'endommagement A_d . Sur la plaque de 20 et 30 couches, les zones d'endommagement A_d avaient de meilleures approximations que les extensions d'endommagement h_m .

Tous les résultats numériques des zones (A_d) et des extensions (h_m) sont égaux ou supérieurs à ceux trouvés expérimentalement.

5.6.3 Correction des résultats des solutions numériques

Une correction des résultats pour une meilleure estimation des endommagements est proposée. Le seul critère qui est sélectionné dans toutes les situations d'impact étudiées est le critère de défaillance Hashin modifié par la loi des endommagements D02.

Les résultats de l'application des facteurs de correction des résultats numériques sur les plaques $[0.90]_{10}$ $[0.90]_{20}$ $[0.90]_{30}$ sont illustrés aux figures 5.30, 5.31 et 5.32 respectivement.

Dans la figure 5.34, les résultats des annonces avec application des facteurs de correction des résultats numériques sur les plaques $[0.90]_{10}$ $[0.90]_{20}$ $[0.90]_{30}$ obtenus avec le critère de défaillance de Hashin Modifié et le critère de dommage D02 sont comparés graphiquement avec les résultats expérimentaux. Des résultats satisfaisants sont simulés pour tous les niveaux de puissance.

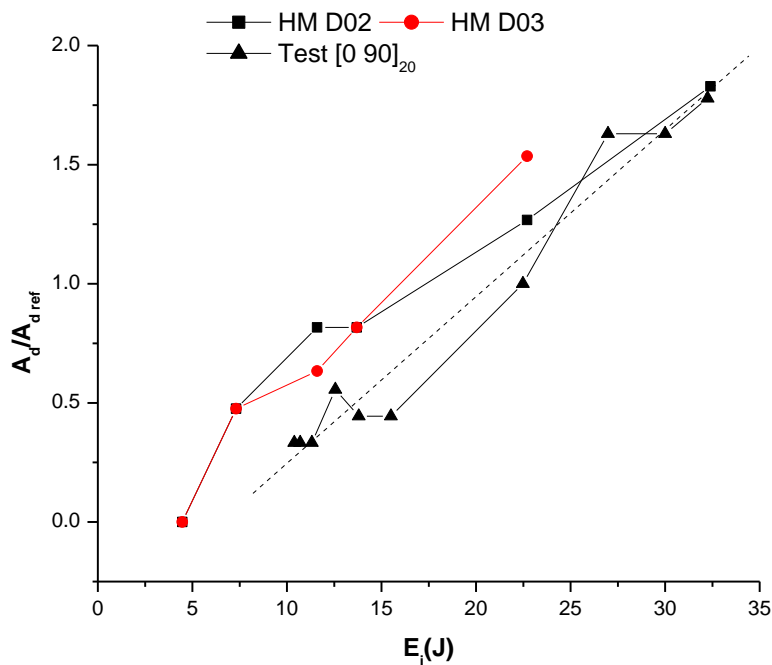


Figure 5.30 : La méthodologie A_d avec correction des résultats sur la plaque. $[0.90]_{10}$.

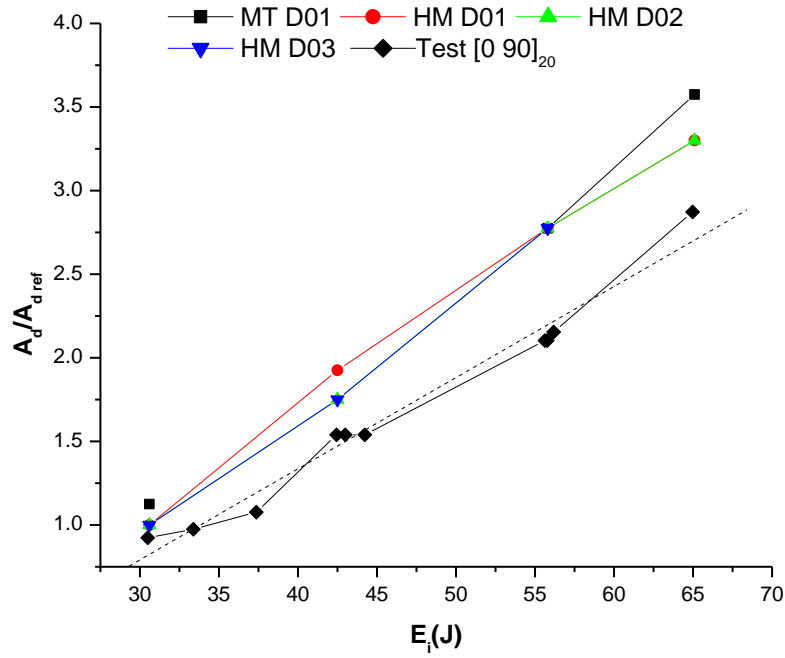


Figure 5.31 : La méthodologie A_d avec correction des résultats sur la plaque $[0.90]_{20}$.

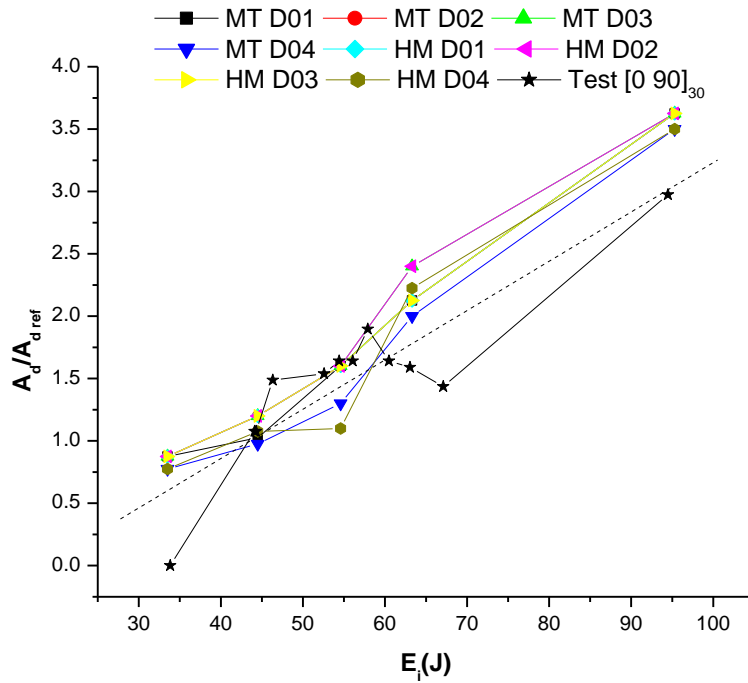


Figure 5.32 : La méthodologie A_d avec correction des résultats sur la plaque $[0.90]_{30}$.

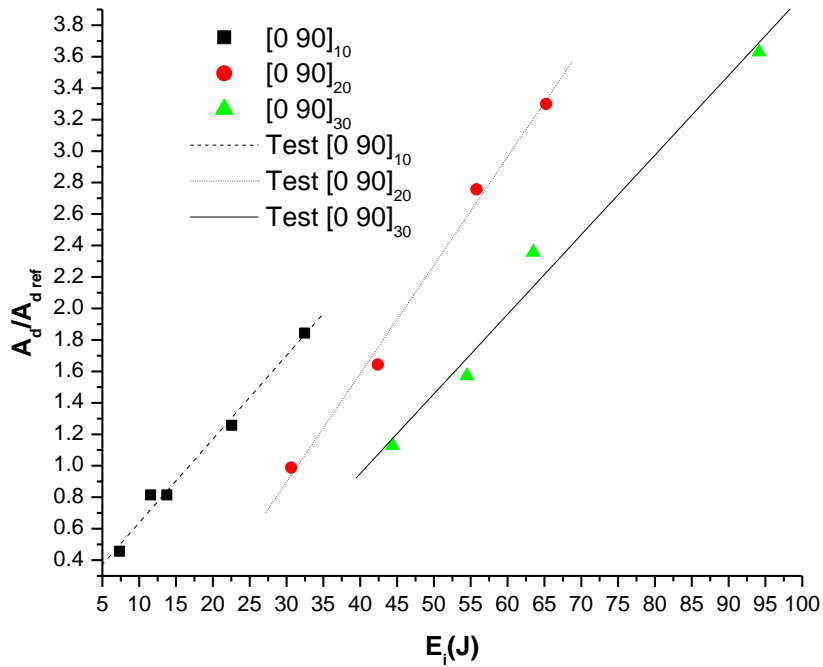


Figure 5.33 : Comparaison entre A_d expérimentale et A_d corrigée obtenue numériquement avec critère de défaillance de Hashin Modifié et critères D02 endommagement.

5.7 Conclusion B

Les modèles numériques pour représenter la résistance structurale du matériau stratifié ont généralement des limites pour représenter son comportement non linéaire et les modes de défaillance complexes de la plaque et du stratifié.

La méthode numérique mise au point pour simuler la résistance à l'endommagement de la plaque stratifiée renforcée de fibres de carbone tissé bidirectionnel et de résine époxy a donné de bons résultats. Toutefois, il a également montré des limites dans son application.

Le choix approprié d'un critère de défaillance et de dégradation dépend de l'épaisseur de la plaque laminée et du niveau d'énergie d'impact que l'on souhaite évaluer. Cependant, le critère de défaillance basé sur la théorie de Hashin, avec le critère de dégradation appelé D02, était le modèle numérique qui peut être utilisé pour toutes les épaisseurs de plaques et tous les niveaux de puissance évalués dans cette étude.

CONCLUSION GENERALE.

Conclusion générale

L'utilisation de matériaux composites dans les applications d'ingénierie, en particulier dans les industries aéronautique, automobile et navale, s'est beaucoup démarquée ces dernières décennies. En raison des nombreux avantages obtenus grâce à la combinaison de ses micros constituants, c'est-à-dire ses composants microscopiques, tels que matrice et fibre, qui visent à optimiser ses propriétés mécaniques, les rendant plus élevées que lorsque les micros constituants sont considérés isolément. Des propriétés optimisées telles que la légèreté, la résistance mécanique et la flexibilité, rendent le matériau adapté au type d'application structurelle spécifique.

Il est bien établi que les propriétés mécaniques des matériaux composites sont contrôlées par les propriétés et la distribution spatiale des différentes phases et interphases à l'échelle de μm . Cette circonstance conduit naturellement à une stratégie ascendante pour déterminer les propriétés macroscopiques à partir des mécanismes de déformation à l'échelle microscopique, et les modèles micromécaniques ont toujours été considérés comme supérieurs aux modèles purement phénoménologiques en termes de précision et de capacités prédictives. Néanmoins, le développement de modèles micromécaniques robustes a été entravé par deux faits, à savoir le manque de données précises sur les propriétés mécaniques des phases et des interphases à l'échelle nm- μm et la complexité de la microstructure tridimensionnelle (3D), qui exclut l'utilisation d'approximations analytiques simples dans la plupart des cas.

Les résultats présentés dans cette thèse montrent que la micromécanique computationnelle est devenue un outil puissant pour relier les caractéristiques microstructurales des composites renforcés de fibres unidirectionnelles avec les propriétés des couches macroscopiques. Ces capacités ont été rassemblées dans une trousse d'outils de calcul pour Abaqus, BEM, Larco3, Matlab qui nous permet d'effectuer la conception des composites stratifiés en calculant les propriétés macroscopiques (rigidité, force) à partir des propriétés mécaniques des fibres, de la matrice et de l'interface et de la fraction volumique, de la forme et de la distribution spatiale des fibres. Cet outil est très utile du point de vue industriel pour sélectionner de nouvelles configurations de matériaux avec des propriétés optimisées pour des applications spécifiques et pour fournir les données d'entrée pour l'analyse structurelle des stratifiés dans le cadre de méso mécanique computationnelle.

D'autres développements dans le domaine de la micromécanique computationnelle sont attendus dans diverses directions. Les propriétés multifonctionnelles (conductivité thermique et électrique,

l'amortissement, le comportement acoustique) peuvent être inclus dans le courant dans la mesure où la stratégie régissant les équations de ces phénomènes peut être résolue en utilisant la méthode des éléments finis. De plus, des RVE complexes correspondant à différentes architectures fibreuses (tissées, tressées, cousues, etc.) peuvent être simulées en raison de la puissance accrue des calculateurs numériques, de sorte que la force, la ténacité et le lieu de défaillance dans des états de contrainte multiaxiaux peuvent être prédits avec précision. de la micromécanique computationnelle. Enfin, les modèles actuels de fracture de matrice et d'interface sont purement phénoménologiques et les paramètres du modèle sont équipés de données expérimentales obtenues par nano mécanique. Bien que cette stratégie soit très utile, le développement de modèles de fractures à base physique de polymères et d'interfaces (provenant de simulations de dynamique moléculaire) apportera la chimie dans la stratégie de conception des polymères renforcés par des fibres, posant les bases d'un véritable modèle multi-échelle qui va des atomes aux structures.

Suggestions pour des travaux futurs

- Effectuer une analyse multi-échelle dans des stratifiés de matériaux composites multidirectionnels.
- Utilisez la propagation de fissure 2D pour le modèle multi-échelle, où la fissure est traitée comme une échelle d'analyse.
- Développer d'autres cas de conditions aux limites appliquées dans l'EVR.
- Utilisez d'autres formulaires ou d'autres critères d'échec pour évaluer l'échec EVR.
- Effectuer des études pour homogénéiser les propriétés de tout stratifié, en commençant par l'analyse microstructurale, c'est-à-dire la technique d'homogénéisation.
- Implémentez une méthode d'optimisation structurelle topologique dans l'analyse multi-échelle.

Implémentez le modèle de calcul multi-échelle à l'aide des techniques d'informatique parallèle et de programmation orientée objet, afin de réduire le temps de calcul de l'analyse.

Références bibliographiques

- [1] D. H. Allen(2001) Homogenization principles and their application to continuum damage mechanics. *Composites Science and Technology*, 61:2223 – 2230.
- [2] P. Fedelinski.(2013)Advanced computer modelling in micromechanics. Wydawnictwo Politechniki Slaskiej, Gliwice,.
- [3] E. J. Pineda, A. M. Waas, B. A. Bednarczyk, and C. S. Collier.(2009)Multiscale model for Progressive damage and failure of laminated composites using an explicit finite element method. In 50th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference, California,.
- [4] P. Proch´azka. (2001)Homogenization of linear and of debonding composite using the BEM. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 25:753 – 769,.
- [5] G. K. Sfantos and M. H. Aliabadi.(2000)Multi-scale boundary element modelling of material degradation and fracture. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 196:1310–1329,.
- [6] EW, Engquist B, Li X, RenW, Vanden-Eijnden E (2007) Heterogeneous multiscale methods: a review. *Commun Comput Phys* 2:367–450
- [7] Voigt W (1889) Sur la relation entre les deux constantes élastiques du corps isotrope. *Wied Ann*, 38: 573-587
- [8] Reuss A (1929) Calcul de la limite d'écoulement des cristaux mixtes sur la base de la condition de plasticité des monocristaux. *Z Angew Math Mech* 9: 49-58
- [9] Hashin Z, Shtrikman S (1962) A variational approach to the theory of the elastic behaviour of polycrystals. *J Mech Phys Solids* 10:343–352 .
- [10] Hashin Z, Shtrikman S (1963) A variational approach to the theory of the elastic behaviour of multiphase materials. *JMech Phys Solids* 11:127–140.
- [11] Bruggeman DAG (1935) Calcul de diverses constantes physiques de substances hétérogènes. I. Constantes diélectriques et conductivité des substances isotropes. *Ann Phys* 24: 636-679
- [12] Budiansky B (1965) On the elastic moduli of some heterogeneous materials. *J Mech Phys Solids* 13:223–227

- [13] Hershey AV (1954) The elasticity of an isotropic aggregate of anisotropic cubic crystals. *ASME J Appl Mech* 21:236–240
- [14] Hill R (1965) A self-consistent mechanics of composite materials. *J Mech Phys Solids* 13:213–222
- [15] Kröner E (1958) Calcul des constantes élastiques des polycristaux à partir des constantes du monocristal. *Z Phys* 151: 504-518
- [16] Bishop JFW, Hill R (1951) A theory of the plastic distortion of a polycrystalline aggregate under combined stresses. *Philos Mag* 42:414–427
- [17] Bishop JFW, Hill R (1951) A theoretical derivation of the plastic properties of a polycrystalline face-center metal. *Philos Mag* 42:1298–1307
- [18] Hill R (1965) Continuum micromechanics of elastoplastic polycrystals. *J Mech Phys Solids* 13:89–101
- [19] Hutchinson JW (1976) Bounds and self-consistent estimates for creep and polycrystalline materials. *Proc R Soc Lond A* 348:101–127
- [20] Berveiller M, Zaoui A (1979) An extension of the self-consistent scheme to plastically flowing polycrystals. *J Mech Phys Solids* 26:325–344
- [21] Talbot DRS, Willis JR (1985) Variational principles for inhomogeneous non-linear media. *J Appl Math* 35:39–54.
- [22] Willis JR (1986) Variational estimates for the overall response of an inhomogeneous nonlinear dielectric. In: Ericksen JL et al (eds) *Homogeneization and effective moduli of materials and media*. Springer, New York, pp 247–263
- [23] Ponte Castañeda P (1991) The effective mechanical properties of nonlinear isotropic composites. *J Mech Phys Solids* 39:45–71
- [24] Ponte Castañeda P (1992) New variational principles in plasticity and their application to composite materials. *J Mech Phys Solids* 40:1757–1788
- [25] Talbot DRS, Willis JR (1992) Some explicit bounds for the overall behaviour of nonlinear composites. *Int J Solids Struct* 29:1981–1987
- [26] Suquet P (1993) Overall potentials and extremal surfaces of power law or ideally plastic composites. *J Mech Phys Solids* 41:981–1002

- [27] Olson T (1994) Improvements on a Taylor's upper bound for rigid-plastic composites. *Mater Sci Eng A* 175:15–19
- [28] J. Aboudi, S. M. Arnold, and B. A. Bednarczyk. (2013) *Micromechanics of Composite Materials: A generalized multiscale analysis approach*. Butterworth-Heinemann, Oxford, 1st edition,.
- [29] Agarwal, B. D. and Broutman, L. J. (1990). *Analysis and Performance of Fiber Composites*. John Wiley & Sons Inc., New York, 2nd edition.
- [30] Daniel, I. M. and Ishai, O. (1994). *Engineering Mechanics of Composite Materials*. Oxford University Press, New York, 1st edition.
- [31] Neto, F. L. and Pardini, L.C. (2006). *Structural Composites - Science and Technology*. Editora Edgard Blücher, São Paulo
- [32] Kouznetsova, V. G. (2002). *Computational homogenization for the multi-scale analysis of multiphase materials*. PhD thesis, Technische Universiteit Eindhoven.
- [33] Yang, Q. and Qin, Q. (2004). Micro-mechanical analysis of composite materials by BEM. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 28:919–926.
- [34] Souza, F. V. (2005). *Multi-scale model for structural analysis of viscoelastic composites susceptible to damage*. Master's thesis, UFC - Federal University of Ceará.
- [35] Buroni, F.C. (2006). *Modeling and computational design of micro-porous materials with random distribution using a contour element formulation*. Master's thesis, UFRGS – Federal University of Rio Grande do Sul.
- [36] Gitman, I. M., Askes, H., and Sluys, L. J. (2007). Representative volume: Existence and size determination. *Engineering Fracture Mechanics*, 74:2518 – 2534.
- [37] Pineda, E. J., Waas, A. M., Bednarczyk, B. A., Collier, C. S., and Yarrington, P. W. (2008). A novel multiscale physics based progressive failure methodology for laminated composite structures. In 49th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference, 120 Illinois
- [38] Cunha, F. M., Mazzucchelli, P., Rabelo, J.M.G., Farage, M. C. R., and Bastos, F. S. (2012). Multiscale analysis of dental enamel structure. In *Anais do X Mineral Symposium of Computational Mechanics - SIMMEC*.

- [39] Ivančević, D. and Smojver, I. (2012). Multiscale approach to damage analysis of laminated composite structures. In 3DS SIMULIA Community Conference Proceedings.
- [40] Czyż, T., Działkiewicz, G., Fedeliński, P., Górski, R., and Ptaszny, J. (2013). Advanced Computer Modelling in Micromechanics. Wydawnictwo Politechniki Śląskiej, Gliwice.
- [41] LE Malvern (1969) Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium , trid.trb.org
- [42] Jones, R. M. (2014). Mechanics of composite materials. CRC press.
- [43] WF Chen, AF Saleeb, (1982) Constitutive Equations for Engineering Materials, < ol. 1. Elasticity and Modeling , Wiley New York
- [44] Lekhnitskii, S. G. (1963). Theory of Elasticity of an Anisotropic Elastic Body. Holden-Day, San Francisco.
- [45] JE Ashton, ME Waddoups (1969) Analysis of anisotropic plates - Journal of composite materials, journals.sagepub.com
- [46] JD Eshelby - Proc. R. Soc. Lond. A (1957), The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion, and related problems , - rspa.royalsocietypublishing.org.
- [47] MHori, S Nemat-Nasser (1999) On two micromechanics theories for determining micro–macro relations in heterogeneous solids - Mechanics of Materials, Elsevier
- [48] VD Azzi, SWTsai (1948), Anisotropic strength of composites - Experimental mechanics, 1965- Springer
- [49] R Hill - Proc. R. Soc. Lond. (1948) A A theory of the yielding and plastic flow of anisotropic metals , rspa.royalsocietypublishing.org
- [50] C.G. D'ávila, P.P. Camanho, M.F. Moura, (2001) Mixed-Mode Decohesion Elements for Analyses with progressive Delamination. 42nd Structures, Structural Dynamics and Materials Conference. 2001 Apr; Seattle, Washington.
- [51] Z. Hashin, A. Rotem, ((1973)) A Fatigue Failure Criterion for Fiber Reinforced Materials , Compos. Struct. 448-464
- [52] A Puck, H Schürmann (1998), Failure analysis of FRP laminates by means of physically based phenomenological models, Composite Science Technology- V58.
- [53] Panosso, G.B. (2011). Analyse des critères de défaillance basés sur des phénomènes physiques pour les matériaux composites stratifiés. Mémoire de maîtrise, Université Campinas.

- [54] Costa, Ligia Maria Manzine; de Olyveira, Gabriel Molina, Bacterial Cellulose Towards Functional Green Composites Materials, Journal of Bionanoscience (2011)
- [55] Kane, J. H. (1994). Boundary Element Analysis in Engineering Continuum Mechanics. Prentice Hall, New Jersey.
- [56] A Sahli, S Boufeldja, S Kebdani, O Rahmani,(2014) - Failure Analysis of Anisotropic Plates by the Boundary Element Method, Journal of Mechanics, Cambridge.
- [57] MC Paiva, CA Bernardo, M Nardin , (2000)Mechanical, surface and interfacial characterisation of pitch and PAN-based carbon fibres- Carbon, Elsevier
- [58] J. C. F. Telles (1987) A self-adaptive co-ordinate transformation for efficient numerical evaluation of general boundary element integrals , International journal for numerical methods
- [59] Santana, A. P. (2013). Formulations de la méthode des éléments de contour pour l'analyse des plaques isotropes et orthotropiques. Thèse de doctorat, Université de Brasilia.
- [60] M.J Hinton,P.D Soden(1998), Predicting failure in composite laminates: the background to the exercise ,composite science and technology- Elsevier.