

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique



Université Ibn Khaldoun – Tiaret
Faculté des Sciences Appliquées
Département de Génie Mécanique



THÈSE

En vue de l'obtention du
Diplôme de Doctorat LMD

Domaine : Sciences et Technologie

Filière : Génie Mécanique

Spécialité : Énergétique

Thème

Écoulement des fluides complexes
à travers un élargissement

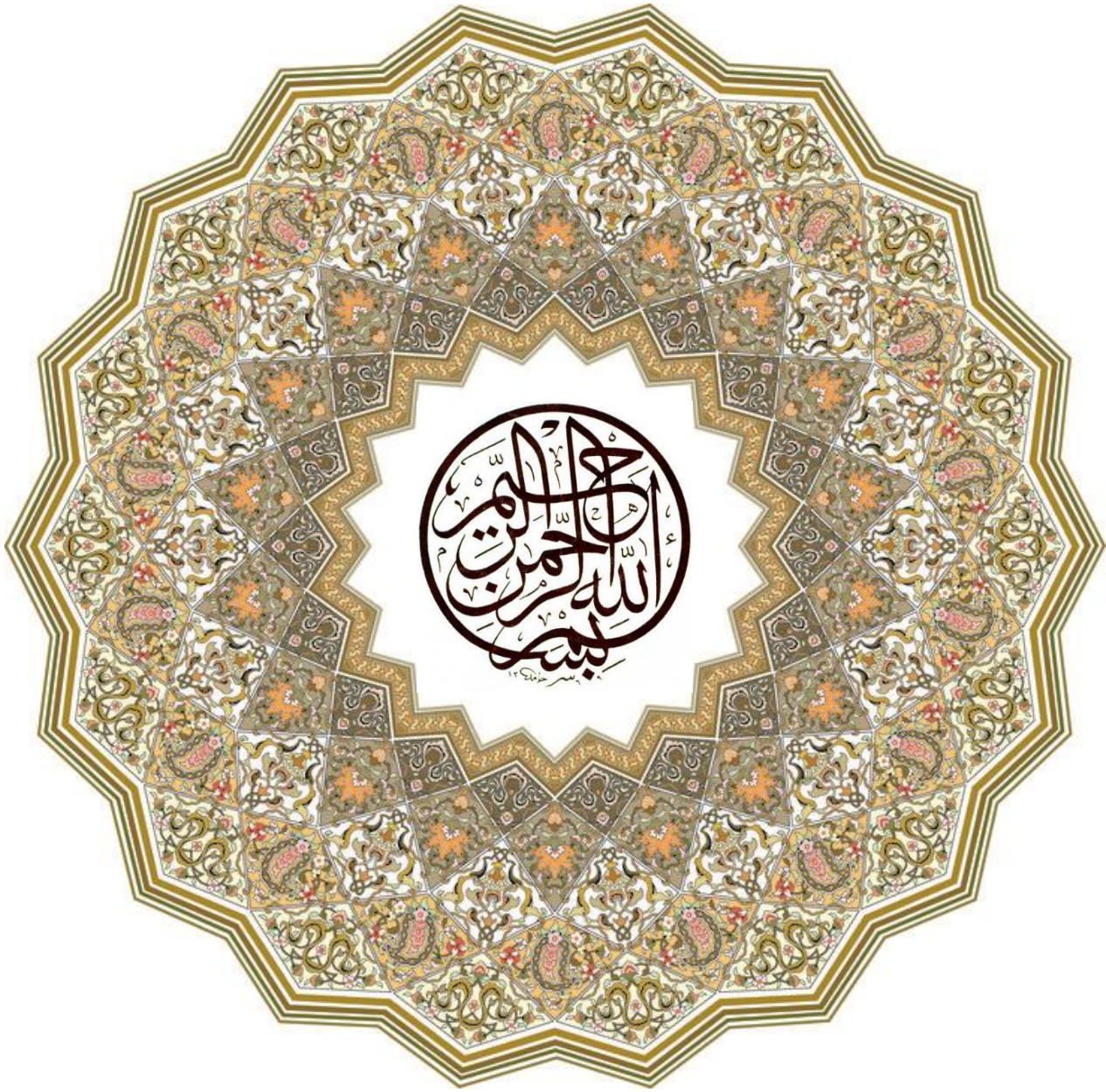
Présenté par :

Monsieur MENOUEUR Abdelfettah

Soutenu publiquement le : 14/06/2020, devant le Jury composé de :

HADDOUCHE Kamel	Pr	Univ. Ibn Khaldoun - Tiaret	Président
SAD CHEMLOUL Nord-Eddine	MCA	Univ. Ibn Khaldoun - Tiaret	Directeur de thèse
SAHLI Ahmed	Pr	Univ. Ibn Khaldoun - Tiaret	Examineur
BENRAHOU Kouider Halim	Pr	Université de Sidi Bel-Abbès	Examineur
DRIS Mohammed El-Amine	MCA	Université de Sidi Bel-Abbès	Examineur

Année universitaire 2019 - 2020





Dédicace

Je dédie ce mémoire

À mes très chers parents

À mes frères et sœurs

À ma famille

À mes Amis



MENOUER Abdelfettah

Remerciements

Avant tout, je remercie Allah le tout puissant de m'avoir donné la force et le courage afin que je puisse accomplir ce travail.

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude à mon Directeur de thèse Monsieur SAD CHEMLOUL Nord-Eddine, Maître de conférences "classe A" à l'université Ibn Khaldoun de Tiaret, de m'avoir confié ce travail et me faire bénéficier de ses qualités scientifiques, les conseils qu'il m'a prodigués, ses encouragements et surtout pour son temps précieux qu'il m'a réservé.

Mes sincères remerciements vont à Monsieur HADDOUCHE Kamel, Professeur à l'université Ibn Khaldoun de Tiaret et Directeur du laboratoire des Technologies Industrielles, qui a mis à ma disposition le matériel informatique nécessaire pour les simulations numériques, et pour l'honneur qu'il me fait d'avoir accepté d'expertiser ce travail et présider mon Jury de soutenance.

Mes remerciements vont à Monsieur SAHLI Ahmed Professeur à l'université Ibn Khaldoun de Tiaret, à Monsieur BENRAHOU Kouider Halim Professeur à l'université de Sidi Bel-Abbès, et à Monsieur DRIS Mohamed El-Amine Maître de conférences "classe A" à l'université de Sidi Bel-Abbès qui ont bien voulu rapporter sur mon travail et participer au Jury.

Des remerciements chaleureux sont adressés à Monsieur CHAIB Khaled, Maître de conférences "classe A" à l'université Ibn Khaldoun de Tiaret, pour son aide et ses conseils qu'il m'a accordés.

Sans oublier Monsieur KADARI Ahmed Docteur de l'université Ibn Khaldoun de Tiaret et Monsieur ABDI Mohamed Doctorant à l'université des Sciences et Technologie d'Oran pour leur aide précieuse apportée pendant toutes les étapes de ce travail.

Par ailleurs, je suis très reconnaissant envers premièrement ma famille, tous les amis et les collègues qui m'ont régulièrement ou occasionnellement apporté leur aide au cours de ces années.

ملخص

تمت الدراسة العددية للتدفق الصفائحي الخاص بالسوائل النيوتونية وغير النيوتونية (اوسفالد) عبر توسيع تدريجي تحت عوامل مختلفة كالمؤشرات الريولوجية، زوايا الاتساع وأعداد رينولدز المعممة. دراسة تأثير كل هذه العوامل على التدفق سمحت بتحديد عددي رينولدز المعممين الحرجين اللذان يمثلان الانتقال من التدفق المتناظر إلى التدفق غير المتناظر وظهور منطقة ثالثة لإعادة التدوير. أظهرت النتائج التي تم الحصول عليها ان أن تقليل مؤشر التدفق أو زاوية الاتساع يعمل على استقرار التدفق وذلك برفع قيمة كل من عددي رينولدز المعممين الحرجين بشكل ملحوظ. أيضا، تم اقتراح علاقتين من أجل التنبؤ بأعداد رينولدز المعممة الحرجة.

الكلمات المفتاحية: تدفق صفائحي، سائل غير نيوتوني، توسيع تدريجي، إعادة التدوير، عدد رينولدز الحرج.

Résumé

L'écoulement laminaire de fluides Newtonien et non-Newtonien d'Ostwald à travers un élargissement progressif a été étudié numériquement pour différents indices rhéologiques, angles d'élargissement et nombres de Reynolds généralisés. L'étude de la variation de ces paramètres a permis de déterminer deux nombres de Reynolds généralisés critiques qui correspondent respectivement au passage de l'écoulement symétrique à l'asymétrique et à l'apparition d'une troisième zone de recirculation. Les résultats obtenus ont montré que la diminution de l'indice d'écoulement ou de l'angle d'élargissement stabilise l'écoulement en augmentant de manière significative les deux nombres de Reynolds généralisés critiques. Aussi, deux corrélations ont été proposées pour prédire les nombres de Reynolds généralisés critiques.

Mots-clés : Ecoulement laminaire, Fluide non-Newtonien, Elargissement progressif, Recirculation, Nombre de Reynolds critique.

Abstract

Laminar flow of Newtonian and Ostwald's non-Newtonian fluids through progressive expansion has been numerically investigated for various rheological indices, expansion angles, and generalized Reynolds numbers. The study of the variation of these parameters allowed the determination of two critical generalized Reynolds numbers which correspond respectively to the transition from the symmetric to the asymmetric flow and the appearance of a third recirculation zone. The obtained results showed that decreasing the flow index or expansion angle stabilizes the flow by increasing significantly the two critical generalized Reynolds numbers. Also, two correlations have been proposed to predict the critical generalized Reynolds numbers.

Keywords: Laminar flow, Non-Newtonian fluid, Progressive expansion, Recirculation, Critical Reynolds Number.



Table des matières



Table des matières

Dédicace	i
Remerciements	ii
Table des matières	iii
Liste des figures	vii
Liste des tableaux	x
Nomenclature	xi
Introduction générale	1

CHAPITRE I : GENERALITES ET ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE

Introduction	3
I.1 Classification des fluides	3
I.1.1 Fluide Newtonien	3
I.1.2 Fluide non-Newtonien	4
I.1.2.1 Fluide purement visqueux	4
I.1.2.1.a Fluides sans contrainte de seuil	6
I.1.2.1.b Fluides à seuil (viscoplastique)	8
I.1.2.2 Fluides dépendant du temps	9
I.1.2.2.a Fluide thixotrope	9
I.1.2.2.b Fluide rhéopexe	10
I.1.2.3 Fluide viscoélastique	10
I.2 Régimes d'écoulement	11
I.3 Etude bibliographique	11
Conclusion	16

CHAPITRE II : MODELE PHYSIQUE ET FORMULATION MATHEMATIQUE

Introduction	17
II.1. Description du problème	17
II.2. Equations gouvernantes	17
II.2.1. Équation de continuité.....	17
II.2.2. Équations de conservation de la quantité de mouvement.....	18
II.3. Hypothèses simplificatrices	18
II.4 Conditions aux limites	19
II.5 Définition du nombre de Reynolds pour un fluide suivant une loi de puissance	19
II.6 Profil de vitesse	21
II.6.1 Ecoulement laminaire dans une conduite cylindrique.....	21
II.6.2 Ecoulement laminaire entre deux plaques parallèles.....	25
II.7 Perte de charge.....	27
II.7.1 Perte de charge linéaire	28
II.7.1.a Coefficient de perte de charge linéaire pour l'écoulement à travers un cylindre .	28
II.7.1.b Coefficient de perte de charge linéaire pour l'écoulement entre deux plaques parallèles.....	29
II.7.2 Correction de Couette.....	30
Conclusion	30

CHAPITRE III : METHODES NUMERIQUES ET ETUDE DE MAILLAGE

Introduction 32

III.1 Méthodes des différences finies (MDF)..... 32

III.2 Méthodes des éléments finis (MEF)..... 32

III.3 Méthodes des volumes finis (MVF)..... 33

III.4 Principe de la méthode des volumes finis 34

 III.4.1 Distribution des volumes de contrôle..... 34

 III.4.2 Discrétisation de l'équation générale de transport..... 35

III.4.3 Fonction $\mathbf{A}(|\mathbf{P}|)$ pour différents schémas numériques..... 39

III.5 Présentation du code ANSYS FLUENT 41

 III.5.1 Choix du solveur 41

 III.5.2 Couplage pression-vitesse 42

 III.5.3 Méthodes d'interpolation pour les gradients 43

 III.5.4 Méthodes d'interpolation pour la pression 43

 III.5.5 Discrétisation spatiale 43

 III.5.6 Convergence..... 44

III.6 Domaine d'étude et conditions aux limites 45

 III.6.1 Domaine d'étude 45

 III.6.2 Conditions aux limites..... 45

III.7 Etude du maillage..... 45

 III.7.1 Répartition du domaine d'étude en blocs..... 45

 III.7.2 Etude de l'influence du maillage..... 46

Conclusion 48

CHAPITRE IV : RESULTATS ET DISCUSSIONS

Introduction	50
IV.1 Validation des résultats	50
IV.2 Caractéristique des zones de recirculation	53
IV.2.1 Cas d'un élargissement brusque.....	53
IV.2.2 Cas d'un élargissement progressif	55
IV.2.2.1 Influence de l'indice d'écoulement	55
IV.2.2.2 Influence de l'angle d'ouverture de l'élargissement	58
IV.2.3 Variation du gradient de pression le long de l'axe de symétrie de l'élargissement....	60
IV.3 Structure de l'écoulement	61
IV.4 Détermination des modèles des deux nombres de Reynolds généralisés critiques.....	64
IV.5 Redéveloppement de l'écoulement	67
IV.6 Correction de Couette	69
Conclusion	70
Conclusion générale et perspectives	71
Annexes	73
Références bibliographiques	75
Résumé	



Liste des figures



Liste des figures

Figure	Titre	Page
Chapitre I		
Figure I.1	Cisaillement simple d'un fluide Newtonien entre deux plans parallèles [1].	3
Figure I.2	Les trois classes générales des fluides non-Newtoniens.	4
Figure I.3	Allure des courbes d'écoulement en contrainte des principaux types des fluides purement visqueux [1].	5
Figure I.4	Allure des courbes d'écoulement en viscosité des principaux types des fluides purement visqueux [3].	5
Figure I.5	Comportement d'un fluide dépendant du temps (contrainte de cisaillement - taux de cisaillement) [2].	9
Figure I.6	Données montrant la thixotropie dans une suspension de boue rouge à 59 % (en poids) [2].	10
Figure I.7	a), c) Visualisation par imagerie ; b), d) Lignes de courant (simulation) [14].	12
Figure I.8	La géométrie utilisée par Jotkar et Govindarajan [21].	13
Chapitre II		
Figure II.1	Géométrie du problème étudié.	17
Figure II.2	Relation entre le nombre de Reynolds généralisé en aval et en amont dans un élargissement de rapport 1:3 pour un fluide non-Newtonien qui suit la loi de puissance : a) fluide rhéofluidifiant, b) fluide rhéoépaississant.	21
Figure II.3	Écoulement dans une conduite cylindrique.	22
Figure II.4	Distribution de la vitesse et de la contrainte de cisaillement dans un écoulement laminaire pleinement développé à travers une conduite à section circulaire.	22
Figure II.5	Profils de vitesse d'écoulement laminaire dans une conduite cylindrique d'un fluide non-Newtonien qui suit une loi de puissance : a) fluide rhéofluidifiant, b) fluide rhéoépaississant.	25
Figure II.6	Écoulement entre deux plaques parallèles.	25
Figure II.7	Profils de vitesse d'écoulement laminaire entre deux plaques parallèles d'un fluide non-Newtonien qui suit une loi de puissance : a) fluide rhéofluidifiant, b) fluide rhéoépaississant.	27
Figure II.8	Variation du coefficient de friction pour l'écoulement laminaire d'un fluide non-Newtonien qui suit une loi de puissance.	29

Figure II.9	Variation de la pression le long d'un canal contenant une singularité (élargissement).	30
-------------	--	----

Chapitre III

Figure III.1	Distribution des volumes de contrôle avec maillage décalé.	35
Figure III.2	Volume de contrôle pour un écoulement bidimensionnel.	36
Figure III.3	Volume d'intégration de l'équation de continuité.	37
Figure III.4	La fonction $A(P)$ pour chacun des schémas.	40
Figure III.5	Prédiction de ϕ_p par les différents schémas en fonction du nombre de Peclet.	40
Figure III.6	Algorithme de résolution [39].	42
Figure III.7	Illustration de : a) les blocs utilisés pour le maillage ; b) distribution du maillage près du plan de l'élargissement (Maillage 1, $\alpha = 45^\circ$, $-1 < x/h < 13$ et $-1.5 < y/h < 1.5$).	46

Chapitre IV

Figure IV.1	Comparaison entre les profils de vitesse axiale obtenus numériquement dans la présente étude et ceux obtenus expérimentalement par [14] pour $n = 1.0$: (a) $Re_g = 34.7$, (b) $Re_g = 80$ et (c) $Re_g = 186.7$.	51
Figure IV.2	Variation des longueurs des zones de recirculation en fonction du nombre de Reynolds généralisé pour un fluide Newtonien dans l'élargissement brusque ($\alpha = 90^\circ$) -comparaison avec les travaux antérieurs-.	54
Figure IV.3	Variation des longueurs des zones de recirculation en fonction du nombre de Reynolds généralisé pour un fluide non-Newtonien ($n = 0.8$) dans l'élargissement brusque ($\alpha = 90^\circ$) -comparaison avec les travaux antérieurs-.	54
Figure IV.4	Variation des longueurs des zones de recirculation en fonction du nombre de Reynolds généralisé pour un fluide non-Newtonien ($n = 0.6$) dans l'élargissement brusque ($\alpha = 90^\circ$) -comparaison avec les travaux antérieurs-.	55
Figure IV.5	Variation des dimensions du Vortex en fonction du nombre de Reynolds généralisé Re_g , pour $n = 1, 0.8$ et 0.6 , et pour différents angles d'élargissement : a) $\alpha = 60^\circ$, b) $\alpha = 45^\circ$.	56
Figure IV.6	Variation des dimensions du Vortex en fonction du nombre de Reynolds généralisé Re_g , pour $n = 1, 0.8$ et 0.6 , et pour différents angles d'élargissement : a) $\alpha = 30^\circ$, b) $\alpha = 15^\circ$.	57
Figure IV.7	Variation des dimensions du Vortex en fonction du nombre de Reynolds généralisé Re_g , pour différents angles d'élargissement -cas du fluide Newtonien ($n = 1$)-.	58

Figure IV.8	Variation des dimensions du Vortex en fonction du nombre de Reynolds généralisé Re_g , pour différents angles d'élargissement et différents indices d'écoulement : a) $n = 0.6$, b) $n = 0.8$.	59
Figure IV.9	Variation de la pression normalisée le long de l'axe de symétrie de l'élargissement : a) $Re_g = 100$, b) $Re_g = 200$.	61
Figure IV.10	Structure d'écoulement dans un élargissement brusque ($\alpha = 90^\circ$) pour différents indices d'écoulement $n = 0.6$, $n = 0.8$ et $n = 1.0$.	62
Figure IV.11	Structure d'écoulement dans un élargissement progressif ($\alpha = 45^\circ$) pour différents indices d'écoulement $n = 0.6$, $n = 0.8$ et $n = 1.0$.	63
Figure IV.12	Structure d'écoulement dans un élargissement progressif ($\alpha = 15^\circ$) pour différents indices d'écoulement $n = 0.6$, $n = 0.8$ et $n = 1.0$.	64
Figure IV.13	Variation des deux nombres de Reynolds généralisés critiques en fonction : a) de l'indice d'écoulement (n) ; b) de l'angle d'élargissement (α).	66
Figure IV.14	Variation de la vitesse normalisée le long de l'axe de symétrie de l'élargissement brusque à $Re_g = 40$ pour différents indices d'écoulement.	67
Figure IV.15	Effet de l'indice d'écoulement (n) et de l'angle d'élargissement (α) sur la longueur de redéveloppement.	68
Figure IV.16	Comparaison du coefficient de Couette de la présente étude avec celui de [29] pour un élargissement brusque.	69
Figure IV.17	Variation du coefficient de Couette en fonction du Re_g pour différents indices d'écoulement $n = 0.6, 0.8$ et 1 : a) $\alpha = 60^\circ$, b) $\alpha = 45^\circ$, c) $\alpha = 30^\circ$ et d) $\alpha = 15^\circ$.	70



Liste des tableaux



Liste des tableaux

Tableau	Titre	Page
Chapitre I		
Tableau I.1	Viscosité dynamique de quelques fluides Newtoniens [2].	4
Tableau I.2	Paramètres du modèle à loi de puissance pour quelques fluides non-Newtoniens [2].	8
Chapitre III		
Tableau III.1	Expression de la fonction $A(P)$ pour chacun des schémas Patankar [38].	41
Tableau III.2	Domaine de calcul et caractéristiques du maillage de l'élargissement.	47
Tableau III.3	Tests d'influence du maillage pour $\alpha = 90^\circ$ et 15° .	48
Chapitre IV		
Tableau IV.1	Comparaison entre les travaux concernés par le phénomène d'asymétrie d'écoulement dans un élargissement brusque pour des fluides Newtoniens et non-Newtoniens.	52
Tableau IV.2	Comparaison des valeurs de $Re_{g,RA}$ pour différents angles d'élargissement et indices d'écoulement.	65



Nomenclature



Nomenclature

Symbole	Définition	Unité
A	Surface	[m ²]
<i>a</i>	Coefficient du modèle de Carreau-Yasuda	[-]
C	Correction de Couette	[-]
<i>cts</i>	Constante d'intégration	[-]
D	Diamètre de la conduite en aval de l'élargissement	[m]
d	Diamètre de la conduite en amont de l'élargissement	[m]
ER	Rapports d'élargissement	[-]
<i>Er</i>	Erreur relative	[%]
F	Force	[N]
<i>f</i>	Coefficient de frottement	[-]
H	Hauteur de la conduite en aval de l'élargissement	[m]
h	Hauteur de la conduite en amont de l'élargissement	[m]
K	Consistance	[Pa · s ⁿ]
L_1, L_u	Longueur de la conduite en amont de l'élargissement	[m]
L_2, L_d	Longueur de la conduite en aval de l'élargissement	[m]
L_{ex}	Longueur de la partie progressive de l'élargissement	[m]
n	Indice d'écoulement	[-]
P	Champ de pression	[Pa]
Q_v	Débit volumique	[m ³ / s]
R	Rayon de la conduite	[m]
Re_g	Nombre de Reynolds généralisé	[-]
r, z	Coordonnées cylindriques	[m]
u, v, w	Champ de vitesse	[m/s]
X	Longueur normalisée de rattachement et de séparation	[-]

X_d	Longueur de redéveloppement	[-]
x, y, z	Coordonnées cartésiennes	[m]

Symboles grecques

α	Angle d'élargissement	[°]
ϕ	Variable généralisée	[-]
$\dot{\gamma}$	Taux de cisaillement	[s ⁻¹]
λ	Constante de temps (modèle de Carreau)	[s]
μ, η	Viscosité dynamique moléculaire	[Pa · s]
ρ	Masse volumique	[Kg/m ³]
τ	Contrainte de cisaillement	[N/m ² ou Pa]
τ_0	Contrainte de seuil (fluide viscoplastique)	[N/m ² ou Pa]

Indices

c, cr	Critique
c	Centre
d	Longueur de redéveloppement
ext	Extrapolée
fd	Pleinement développée
g	Généralisé
MR	Metzner et Reed
m	Moyenne
max	Maximale
min	Minimale
mod	Modifié
PL	Modèle de Loi de puissance
RA	Apparition des zones de recirculation
w	A la paroi
wall	Basé sur la viscosité à la paroi



Introduction générale



De nombreux procédés industriels font intervenir des écoulements de fluides complexes en conduite tels que les industries alimentaires, pharmaceutiques et pétrochimiques, et dans de nombreuses autres applications ; en effet, la connaissance et la maîtrise de ces écoulements est primordiale pour assurer le bon fonctionnement des appareils de ces industries.

Dans les installations de telles industries, on peut trouver des conduites rectilignes ainsi que des singularités. Ces dernières peuvent être des coudes, vannes, élargissements, rétrécissements, etc. Pour le dimensionnement de ces installations, il faut bien connaître les phénomènes associés avec l'existence de ces singularités.

Malgré leur simplicité du point de vue géométrique, les élargissements peuvent conduire à des écoulements très complexes lors de leur existence dans les installations industrielles ; l'une des complexités est la présence des zones de recirculation pouvant provoquer des risques importants sur les installations particulièrement lorsque l'écoulement est accompagné d'un transfert de chaleur.

En plus, de la présence des zones de recirculation, il est bien connu que l'écoulement bidimensionnel laminaire d'un fluide à travers un élargissement brusque symétrique peut être symétrique ou asymétrique, et ce en fonction de la valeur du nombre de Reynolds par rapport à une valeur critique ; ce phénomène est appelé la bifurcation.

La simulation numérique des écoulements est devenue un outil incontournable et performant pour la prédétermination et la compréhension de certains phénomènes qui sont présents dans l'industrie ; ces phénomènes sont liés à la complexité du fluide ou à la géométrie. L'un des avantages de la simulation numérique est qu'elle permet d'accéder à certaines configurations et à des zones d'écoulement inaccessibles par la voie expérimentale.

Vu le grand nombre de fluides dits complexes et les phénomènes qui lui sont associés, nous nous sommes intéressés principalement dans la présente thèse à la simulation numérique de l'écoulement de fluides pouvant être représentés sur le plan rhéologique par le modèle d'Ostwald. L'objectif de ce travail de thèse consiste à étudier numériquement l'influence de l'angle d'ouverture de l'élargissement et de l'indice d'écoulement sur le phénomène de bifurcation, de redéveloppement de l'écoulement et sur la perte de charge.

La présente thèse est constituée de quatre chapitres. Dans le premier chapitre, une simple classification des fluides non-Newtoniens ainsi que quelques notions de base

concernant ces dernières est présenté, suivie par une étude bibliographique sur les phénomènes liés à l'écoulement des fluides à travers les élargissements brusques ou progressifs.

La modélisation du problème traité dans ce manuscrit est exposée dans le deuxième chapitre. Les équations gouvernantes, l'équation constitutive du modèle du fluide non-Newtonien choisi, les conditions aux limites, la définition du nombre de Reynolds, les profils de vitesse et les pertes de charge liés à ce type d'écoulement sont aussi présentés dans ce chapitre afin de bien situer notre problème.

Le troisième chapitre est consacré aux méthodes numériques pouvant être utilisées pour la résolution du problème par le code de calcul ANSYS (Fluent) ainsi que l'étude de l'influence du maillage.

Les résultats obtenus par les simulations numériques feront l'objet du quatrième chapitre. Des comparaisons de nos résultats avec ceux présentés dans la littérature concernant les zones de recirculation, la transition de l'écoulement symétrique à l'asymétrique, le redéveloppement de l'écoulement et la correction de Couette sont exposés dans ce chapitre aussi bien que les discussions, interprétations et analyses des divers résultats.

Pour finir, une conclusion générale récapitulant les principaux résultats obtenus est donnée à la fin de cette thèse.



Chapitre I

Généralités et étude bibliographique



Introduction

Dans ce chapitre, des généralités sur les fluides et leur modélisation ainsi que l'étude bibliographique des travaux consacrés à l'écoulement de fluides à travers un élargissement sont exposées. Ce chapitre a comme but l'introduction du lecteur aux notions de base de ce travail ainsi que pour situer notre travail par rapport à ceux de la littérature.

I.1 Classification des fluides :

On distingue deux grandes familles de fluides ; à savoir : les fluides Newtoniens et non-Newtoniens.

I.1.1 Fluide Newtonien :

La majorité des fluides rencontrés dans la nature sont Newtoniens. L'eau et l'air sont les exemples les plus représentatifs. Le comportement d'un fluide Newtonien est caractérisé par une dépendance linéaire entre les composantes du tenseur des contraintes et les valeurs instantanées du tenseur des déformations. Le coefficient de proportionnalité étant la viscosité dynamique. Celle-ci est par ailleurs indépendante du taux de cisaillement et constante en fonction du temps. Dans le cas d'un écoulement de cisaillement plan, la loi de comportement est celle donnée par l'équation (I.1) ; il s'agit de la loi la plus simple RIGAL [1].

$$\tau_{yx} = -\mu \left(\frac{dV_x}{dy} \right) = -\mu \dot{\gamma}_{yx} \quad (\text{I.1})$$

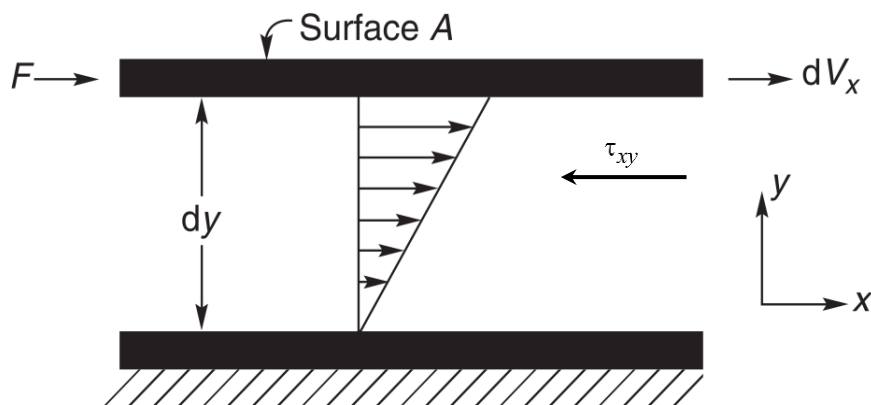


Figure I.1 : Cisaillement simple d'un fluide Newtonien entre deux plans parallèles [1].

Fluide	Viscosité μ (mPa.s)
Air	10^{-2}
Benzène	0.65
Eau	1
Mercure (293K)	1.55
Huile d'olive	10^2
Miel	10^4

Tableau I.1 : Viscosité dynamique de quelques fluides Newtoniens [2].

I.1.2 Fluide non-Newtonien :

Un fluide non-Newtonien est un fluide dont la courbe de l'écoulement (contrainte de cisaillement en fonction du taux de cisaillement) est non linéaire ou ne traverse pas l'origine ; c'est-à-dire où la viscosité apparente, contrainte de cisaillement divisée par le taux de cisaillement, n'est pas constante à une température et une pression données mais dépend des conditions d'écoulement telles que la géométrie de l'écoulement, le taux de cisaillement, etc. Chhabra et Richardson [2], et parfois même de l'historique cinématique de l'élément fluide considéré. Ces matériaux peuvent être commodément regroupés en trois classes générales comme le montre la figure qui suit.

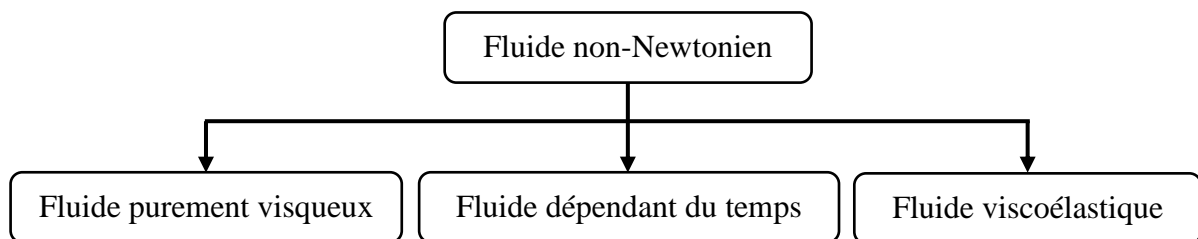


Figure I.2 : Les trois classes générales des fluides non-Newtoniens.

I.1.2.1 Fluide purement visqueux :

Ce sont des fluides pour lesquels le taux de cisaillement en un point donné n'est déterminé que par la valeur de la contrainte de cisaillement en ce point à cet instant ; ces fluides sont connus sous différentes appellations « indépendant du temps », « purement visqueux » ou « fluides Newtoniens généralisés ».

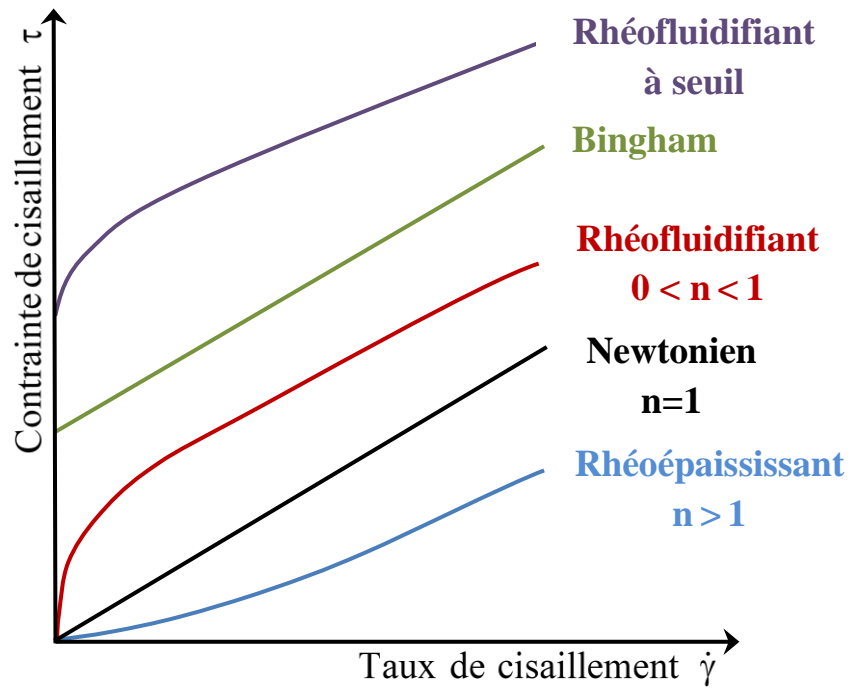


Figure I.3 : Allure des courbes d'écoulement en contrainte des principaux types de fluides purement visqueux [1].

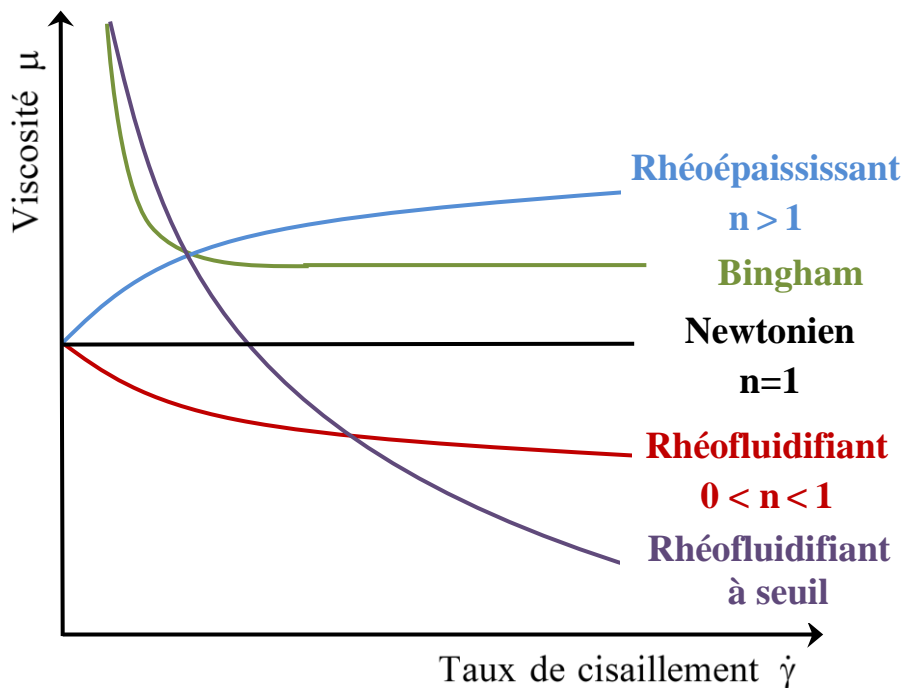


Figure I.4 : Allure des courbes d'écoulement en viscosité des principaux types de fluides purement visqueux [3].

I.1.2.1.a Fluides sans contrainte de seuil :

➤ Fluides rhéofluidifiants :

Les fluides rhéofluidifiants sont des fluides pour lesquels la viscosité diminue lorsque le cisaillement augmente. D'une manière générale, le comportement rhéofluidifiant traduit une modification de la structure interne du fluide lorsque le cisaillement augmente de manière à réduire la dissipation visqueuse et faciliter l'écoulement Carranza [4]. Dans le cas des solutions des polymères, le comportement rhéofluidifiant est associé à la rupture des liaisons d'hydrogène dans les agrégats de macromolécules Phillips et Williams [5]. Dans le cas d'une suspension de particules, le mécanisme physique décrivant le comportement rhéofluidifiant a été décrit par Quemada [6]. Globalement, la diminution de viscosité est liée à la déstructuration d'agrégats de particules par les forces hydrodynamiques. Plusieurs modèles rhéologiques ont été proposés dans la littérature pour décrire le comportement rhéofluidifiant d'un fluide non-Newtonien ; à savoir :

- **Le modèle d'Ostwald ou loi de puissance** : est probablement le plus populaire et il est donné par la relation suivante :

$$\mu = K (\dot{\gamma})^{n-1} \quad (\text{I.2})$$

Dans ce modèle, K représente la consistance du fluide et n ($0 < n < 1$) est un nombre sans dimension nommé indice d'écoulement.

Remarque : Dans la présente étude, nous avons a priori choisi le modèle d'Ostwald car il a été adopté par plusieurs auteurs pour l'étude et la simulation numérique de l'écoulement des fluides.

- **Le modèle de Carreau** [7] : est donné par la relation suivante :

$$\frac{\mu - \mu_{\infty}}{\mu_0 - \mu_{\infty}} = \left[1 + (\lambda \dot{\gamma})^2 \right]^{\frac{n-1}{2}} \quad (\text{I.3})$$

μ_0 est la viscosité pour un cisaillement nul, μ_{∞} est la viscosité pour un cisaillement infini, λ est une constante de temps telle que $1/\lambda$ détermine un cisaillement critique à partir duquel la viscosité diminue fortement avec le taux de déformation et n est l'indice de rhéofluidification du fluide.

- **Le modèle de Cross** [8] : peut être exprimé par la relation qui suit.

$$\frac{\mu - \mu_{\infty}}{\mu_0 - \mu_{\infty}} = \frac{1}{\left[1 + (\lambda \dot{\gamma})^m\right]} \quad (\text{I.4})$$

- **Le modèle de Carreau-Yasuda** : est un modèle intermédiaire entre les modèles de Cross et de Carreau exprimé par :

$$\frac{\mu - \mu_{\infty}}{\mu_0 - \mu_{\infty}} = \left[1 + (\lambda \dot{\gamma})^a\right]^{\frac{n-1}{a}} \quad (\text{I.5})$$

Où le paramètre a permet de généraliser les modèles de Cross et de Carreau ($a=1$ et $a=2$ respectivement). Ce dernier modèle à cinq paramètres permet de décrire le comportement rhéologique d'un grand nombre de solutions des polymères.

➤ **Fluides rhéoépaississants :**

Les fluides rhéoépaississants sont similaires aux systèmes pseudoplastiques qui ne montrent aucune contrainte d'écoulement mais leur viscosité apparente augmente avec l'augmentation du taux de cisaillement ; ainsi, ces fluides sont également appelés fluides dilatants.

Ce type de comportement de fluide a été initialement observé dans des suspensions concentrées et une explication possible de leur comportement rhéoépaississant est la suivante : au repos, l'espace interparticulaire est minimal et le liquide présent est suffisant pour combler cet espace ; à faible taux de cisaillement, le liquide lubrifie le mouvement de chaque particule par rapport aux autres et les contraintes qui en résultent sont par conséquent faibles. Par contre, à des taux de cisaillement élevés, le matériau se dilate ou se dilate légèrement (comme cela a également été observé lors du transport de dunes de sable) de sorte qu'il n'y a plus assez de liquide pour combler l'espace interparticulaire accru et éviter les contacts directs solides-solides ce qui peut entraîner l'augmentation des frottements et donc des contraintes de cisaillement plus élevées. Ce mécanisme provoque l'augmentation rapide de la viscosité apparente avec l'augmentation de la vitesse de cisaillement.

Pour décrire ce comportement, les mêmes modèles présentés dans le cas d'un fluide rhéofluidifiant sont utilisés, la seule différence est relative aux valeurs de l'indice d'écoulement n qui sont supérieures à 1.

Fluides	Température (K)	Indice d'écoulement n (-)	Consistance K (Pa.s ⁿ)
Purée d'abricot	300	0.3–0.4	5–20
Chocolat	303	0.5	0.7
Mayonnaise	298	0.6	5–100
Ketch Up de tomate	295	0.24	33
Yaourt	293	0.5–0.6	25
Sang humain	300	0.9	0,004
Polypropylène	453–473	0.40	4.5–7 x10 ³

Tableau I.2 : Paramètres du modèle à loi de puissance pour quelques fluides non-Newtoniens [2].

I.1.2.1.b Fluides à seuil (viscoplastique) :

Au fil des années, de nombreuses expressions empiriques ont été proposées à la suite d'ajustement de courbes de variation des paramètres rhéologiques, contrainte de cisaillement et viscosité apparente en fonction du gradient de vitesse. Trois modèles couramment utilisés pour les fluides viscoplastiques sont brièvement décrits comme suit.

➤ Le modèle de Bingham

C'est l'équation la plus simple décrivant le comportement d'un fluide avec contrainte de seuil :

$$\tau = \tau_0 + \mu \dot{\gamma} \quad (\text{I.6})$$

➤ Le modèle de Herschel-Bulkley

Ce modèle est exprimé par la relation qui suit :

$$\tau = \tau_0 + K (\dot{\gamma})^n \quad (\text{I.7})$$

➤ Le modèle de Casson

De nombreux produits alimentaires et biologiques, en particulier le sang, sont bien décrits par ce modèle à deux constantes :

$$\sqrt{\tau} = \sqrt{\tau_0} + \sqrt{K_c (\dot{\gamma})} \quad (\text{I.8})$$

I.1.2.2 Fluides dépendant du temps :

Ce sont des fluides plus complexes pour lesquels la relation entre contrainte de cisaillement et vitesse de cisaillement dépend, en outre, de la durée du cisaillement et de leur histoire cinématique.

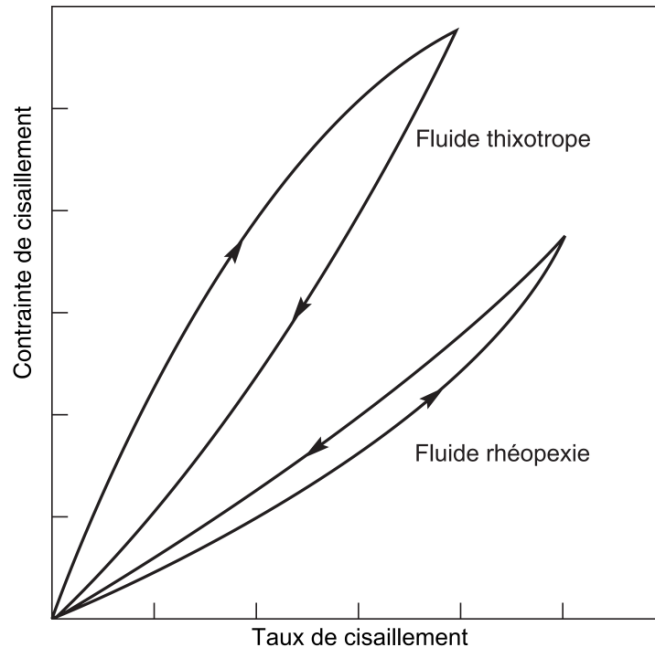


Figure I.5 : Comportement d'un fluide dépendant du temps (contrainte de cisaillement-taux de cisaillement) [2].

I.1.2.2.a Fluide thixotrope :

On dit qu'un fluide présente une thixotropie si, lorsqu'il est cisailé à vitesse constante, sa viscosité apparente (ou la contrainte de cisaillement correspondante) diminue avec le temps de cisaillement, comme on peut le voir dans la figure I.6, exemple pour une suspension de boue rouge (Nguyen et Uhlherr [9]). Si la courbe d'écoulement est mesurée dans une seule expérience dans laquelle le taux de cisaillement est régulièrement augmenté à un taux constant de zéro à une valeur maximale puis diminué au même taux jusqu'à zéro, une boucle d'hystérésis est obtenue.

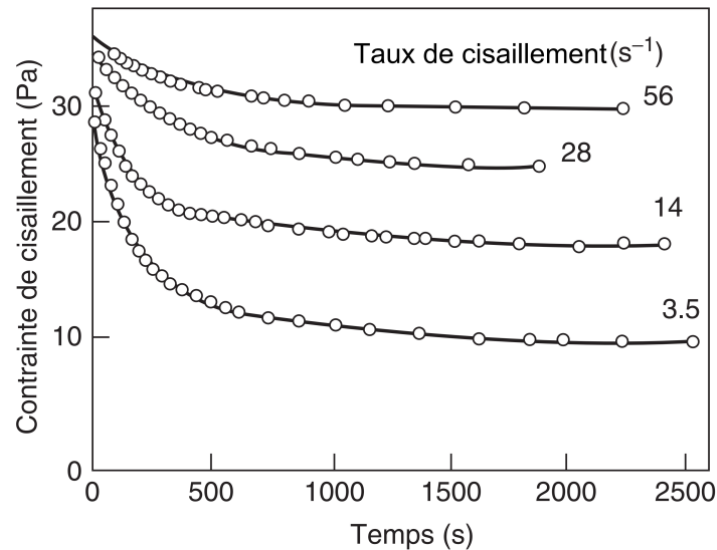


Figure I.6 : Données montrant la thixotropie dans une suspension de boue rouge à 59 % (en poids) [2].

I.1.2.2.b Fluide rhéopexe :

Ces fluides sont relativement rares, leur viscosité apparente (ou contrainte de cisaillement correspondante) augmente avec le temps de cisaillement. Là encore, des effets d'hystérésis sont observés sur la courbe d'écoulement, mais dans ce cas, ils sont inversés par rapport à un matériau thixotrope comme le montre la figure I.5.

I.1.2.3 Fluide viscoélastique :

Un fluide viscoélastique est un fluide qui possède à la fois des propriétés de viscosité et d'élasticité. Les lois de comportement pour ces fluides sont plus complexes et font intervenir une notion de mémoire liée à leur composante élastique. Celle-ci est généralement traduite par l'introduction de dérivées des tenseurs de contrainte et de vitesse de déformation. On peut citer les modèles de Maxwell et d'Oldroyd parmi les modèles les plus connus. La connaissance seule de leur viscosité est insuffisante pour les décrire, on utilise alors des caractérisations complémentaires comme le module élastique et le module de perte (mesures dynamiques en oscillation), des mesures de différences de contraintes normales ou encore des mesures de fluage et recouvrance.

Quel que soit la catégorie du fluide, avant d'étudier n'importe quel problème en mécanique des fluides, il faut connaître le régime d'écoulement.

I.2 Régimes d'écoulement :

Le passage du régime laminaire au turbulent est indiqué par le nombre de Reynolds critique Re_c . Cette valeur critique dépend de la loi rhéologique ; ainsi, pour le modèle d'Ostwald de Waele, Ryan et Johnson [10] ont établi la formule suivante :

$$Re_c = \frac{6464n(2+n)^{\frac{-(2+n)}{1+n}}}{(1+3n)^2} \quad (I.9)$$

Mais Ryan et Johnson [10] n'ont pas tenu compte du paramètre de stabilité (rapport entre l'énergie apportée par le fluide et l'énergie dissipée) de l'écoulement. L'importance de ce paramètre a été vérifiée par plusieurs travaux avec les fluides pseudoplastiques. Cependant, en se basant sur l'importance de ce critère de stabilité, Mishra et Tripathi [11] ont proposé une relation générale exprimée par :

$$Re_c = 2100 \frac{(4n+2)(5n+3)}{3(1+3n)^2} \quad (I.10)$$

Remarque : Ces dernières relations sont applicables pour des conduites à section circulaire ; pour les conduites à section transversale non circulaire, on utilise comme diamètre de la conduite, le diamètre hydraulique défini comme étant le rapport entre quatre fois la surface mouillée sur le périmètre mouillé.

Dans ce qui suit, une étude bibliographique sur l'écoulement des fluides à travers des élargissements sera présentée.

I.3 Etude bibliographique :

Plusieurs recherches présentées dans la littérature se sont intéressées par l'écoulement des fluides que soit Newtoniens ou non-Newtoniens à travers des singularités (rétrécissement, élargissement, coudes, vannes, etc.) à cause de leur grande importance dans plusieurs secteurs de notre vie quotidienne. Du fait des grands travaux antérieurs sur l'écoulement à travers des singularités et tenant compte du but de notre travail, l'étude bibliographique concerne uniquement les élargissements.

Pour les fluides Newtoniens, un certain nombre d'études expérimentales ont été intéressées par le phénomène de bifurcation de l'écoulement dans les canaux avec un élargissement brusque. Durst et al. [12] ont utilisé la visualisation de l'écoulement et des mesures d'anémométrie au laser pour examiner un élargissement brusque de rapport entrée-

sortie **1:3** dans un canal. Dans leurs expériences, deux tourbillons symétriques ont été observés le long des murs de l'élargissement à $Re = 56$ (Re basé sur la hauteur de la conduite en amont et sur la vitesse maximale). À $Re = 114$, une bifurcation de l'écoulement est observée avec des tourbillons de taille inégale (figure I.7). Un troisième tourbillon a été trouvé en aval du plus petit entre les deux tourbillons à $Re = 252$. Les mêmes méthodes expérimentales ont été utilisées par Cherdron et al. [13] pour donner une description détaillée de la vitesse dans un élargissement brusque plan avec différents rapports d'élargissement. Leurs mesures ont montré que la diminution des rapports d'élargissement et de largeur d'entrée a un effet stabilisant sur l'écoulement, ce qui étend la plage des nombres de Reynolds sur lesquels un écoulement symétrique peut exister. Fearn et al. [14] ont présenté une étude expérimentale et numérique de l'élargissement brusque. Ils ont trouvé que $Re_{cr} = 40.45$ avec Re basé sur la demi-hauteur en amont du canal et la vitesse d'entrée maximale.

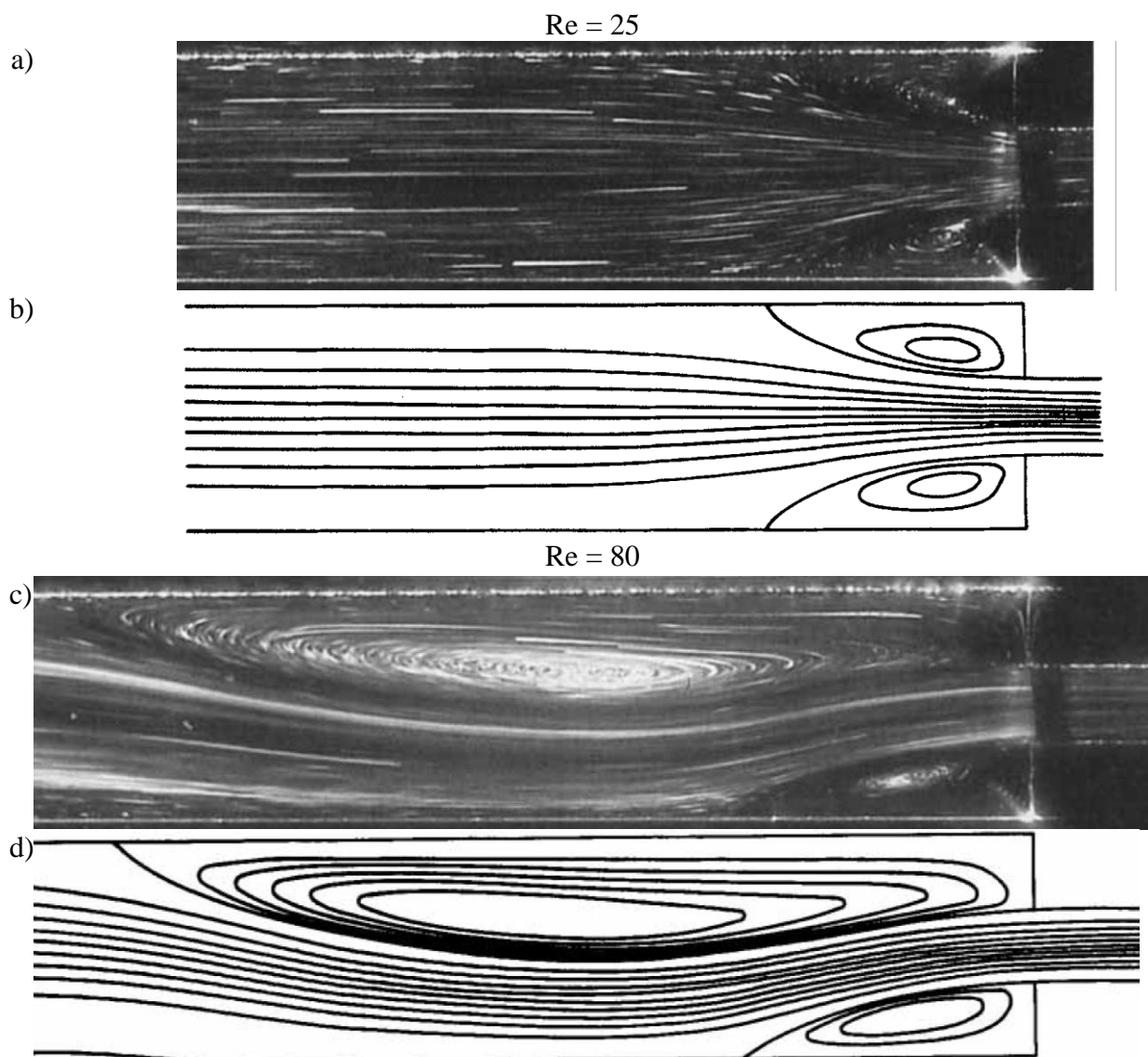


Figure I.7 : a), c) Visualisation par imagerie ; b), d) Lignes de courant (simulation) [14].

Il y a également beaucoup d'investigations numériques de l'écoulement à travers un élargissement. Battaglia et al. [15] et Drikakis [16] ont étudié numériquement l'effet du taux d'élargissement des canaux sur les écoulements symétriques et asymétriques dans des canaux bidimensionnels. Ils ont constaté que le nombre de Reynolds critique diminuait avec l'augmentation du taux d'élargissement du canal. À un nombre de Reynolds supercritique fixe, l'emplacement auquel le jet frappe pour la première fois sur la paroi du canal croît avec le taux d'élargissement. Chiang et al. [17] ont effectué de nombreuses investigations numériques tridimensionnelles afin d'étudier l'effet de paroi latérale sur l'écoulement du fluide en aval d'un élargissement planaire de canal. Le rapport d'élargissement est fixe à **3** et les rapports largeur-entrée sont compris entre **3** et **48**. Leurs résultats montrent que la diminution du rapport largeur-entrée a un effet stabilisant sur l'écoulement. Schreck et Schäfer [18] ont fait la même observation que celle de Chiang et al. [17], ceci confirme l'observation expérimentale de Cherdron et al. [13].

De Zilwa et al.[19] ont mis au point une méthode de calcul pour représenter les écoulements en aval des élargissements symétriques plans dont les dimensions et les vitesses englobent les écoulements laminaires et turbulents. Leurs résultats montrent que dans le cas d'un écoulement laminaire, l'augmentation de l'épaisseur de la couche limite de séparation conduit à des régions de séparation plus longues et à une fréquence non dominante pour les nombres de Reynolds jusqu'à celles où la troisième région de séparation a été observée.

Jotkar et al. [20] et Jotkar et Govindarajan [21] ont étudié les mécanismes d'instabilité linéaire des écoulements bidimensionnels à travers des canaux rectilignes divergents avec un angle de divergence α et à des rapports d'élargissement κ différents (figure I.8). Les résultats montrent que le rapport d'élargissement et l'angle de divergence ont un effet dramatique sur les valeurs des deux nombres de Reynolds critiques.

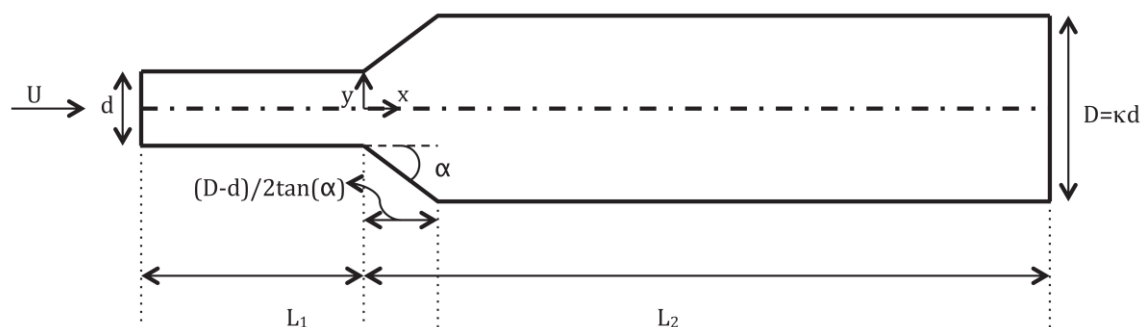


Figure I.8 : La géométrie utilisée par Jotkar et Govindarajan [21].

Pour les fluides non-Newtoniens, Mishra et Jayaraman [22] ont utilisé une méthode de continuation avec une grille d'éléments finis et une perturbation géométrique. Cette méthode est appliquée pour calculer deux transitions d'écoulement successives avec l'augmentation du nombre de Reynolds de l'écoulement des fluides Newtoniens généralisées à travers l'élargissement brusque planaire, le rapport d'élargissement est fixé à **1:16**. Les résultats montrent que lorsque le comportement pseudoplastique est renforcé (n faible), le premier nombre de Reynolds critique augmente et la récupération de l'énergie de pression est plus faible. Neofytou et Drikakis [23] ont utilisé trois modèles non-Newtoniens (Casson, loi de puissance et le modèle Quemada), pour étudier les instabilités qui se produisent dans l'écoulement à travers un élargissement brusque. Les calculs révèlent que de la même manière qu'un écoulement Newtonien dans un canal avec élargissement, l'instabilité se produit également dans des écoulements non-Newtoniens. L'instabilité se traduit par une rupture de symétrie de la séparation de l'écoulement. L'apparition de l'instabilité dépend des paramètres spécifiques impliqués dans l'équation constitutive de chaque modèle. Oliveira [24] a étudié numériquement l'écoulement des liquides viscoélastiques à viscosité sous cisaillement constante à travers un élargissement symétrique planaire (**ER=1:3**) pour des nombres de Reynolds allant de 0 à 100. Le modèle constitutif utilisé suit l'équation FENE-CR modifié (valable pour les solutions diluées relatives des fluides polymères). Il a constaté que l'élasticité avait pour effet de retarder l'apparition de la bifurcation et de réduire le degré d'asymétrie de l'écoulement. Manica et De Bortoli [25] ont proposés une solution numérique de l'écoulement laminaire incompressible à travers un canal avec élargissement brusque pour des fluides de loi de puissance. Les résultats montrent que des bifurcations se produisent dans la plage d'indices de la loi de puissance tel que $0.2 \leq n \leq 2$; pour un fluide rhéofluidifiant, la seconde bifurcation apparaît après celle du fluide Newtonien alors que le phénomène inverse se produit pour un fluide rhéoépaississant.

Ternik et al. [26] ont étudié numériquement l'écoulement de fluide non-Newtonien à travers un élargissement brusque planaire et symétrique afin d'obtenir les valeurs du nombre de Reynolds critique (**ER=1:3** est choisi dans cette étude). Le modèle quadratique est utilisé pour adapter le comportement rhéoépaississant. Les résultats indiquent que le comportement rhéoépaississant fait diminuer le seuil de transition de l'écoulement symétrique à l'asymétrique et augmente la longueur de rattachement.

Neofytou [27] étudia numériquement les effets des attributs de fluides Newtoniens généralisés sur le seuil de transition de la symétrie à l'asymétrie dans un élargissement

brusque planaire de **ER=1:2**. L'étude comprenait à la fois des fluides rhéofluidifiants et rhéoépaississants couvrant une gamme d'indices d'écoulement de 0.3 à 3, tandis que les fluides rhéofluidifiants ont également été étudiés avec l'utilisation du modèle de Casson. Leurs résultats montrent que, pour les modèles à loi de puissance comme pour les modèles de Casson, la valeur de Re_g critique du passage de la symétrie à l'asymétrie est linéairement liée au taux de cisaillement adimensionnel à la paroi.

Ternik [28] a étudié l'effet des fluides Newtoniens généralisés sur le seuil de transition de la symétrie d'écoulement à son asymétrie pour un élargissement brusque planaire. Il a examiné les fluides purement visqueux rhéofluidifiants en utilisant le modèle de loi de puissance pour $n=0.6$ et $n=0.8$, et les a comparé au fluide Newtonien ($n=1$) dans la gamme du nombre de Reynolds généralisé $10 \leq Re_g \leq 150$. Le rapport d'élargissement est **ER=1:3**. Les résultats indiquent que le comportement rhéofluidifiant augmente l'apparition des phénomènes de bifurcation et la valeur critique du nombre de Reynolds.

Récemment, Dhinakaran et al. [29] ont utilisé la méthode des volumes finis pour étudier numériquement l'écoulement laminaire d'un fluide non-Newtonien inélastique obéissant au modèle de la loi de puissance à travers un élargissement brusque planaire (**ER=1:3**). Une large gamme d'indices de loi de puissance ($0.2 \leq n \leq 4$) et de nombre de Reynolds généralisé ($0.01 \leq Re_g \leq 600$) a été considérée. Ils ont constaté que le comportement rhéofluidifiant augmente la valeur de Re_g critique, tandis que le comportement rhéoépaississant a l'effet inverse.

Norouzi et al. [30] ont étudié numériquement l'écoulement de fluide viscoélastique à travers élargissement progressive planaire. Trois angles de 30° , 45° et 60° sont sélectionnés pour clarifier l'effet des angles d'élargissement. Le modèle exponentiel de Phan Thien-Tanner (EPTT) est utilisé comme équation constitutive. Les résultats ont montré qu'une augmentation des angles d'expansion déstabilise le régime d'écoulement.

Di Ilio et al. [31] ont fait une comparaison des méthodes numériques pour investiguer l'écoulement d'un fluide non-Newtonien (fluide d'Ostwald) à travers un élargissement brusque. Les méthodes utilisées sont la méthode de projection semi-implicite de Chorin (SICPM), un algorithme explicite basé sur la méthode de Runge–Kutta de quatrième ordre (ERKM) et la méthode de Lattice Boltzmann (LBM). Le but de l'étude est de tester les

capacités de la méthode LBM à résoudre les écoulements complexes. Ils ont trouvé que la méthode LBM peut bien prédire le comportement de l'écoulement dans la géométrie étudiée.

Hegajand et Borzenko [32] utilisent un algorithme basé sur la méthode de relaxation et la procédure SIMPLE pour étudier l'écoulement d'un fluide décrit par le modèle de Herschel-Bulkley à travers un élargissement brusque. Leurs résultats montrent qu'une zone quasi-solide est présente lorsque le paramètre de viscoplasticité est différent de zéro et que cette zone disparaît avec l'augmentation de nombre de Reynolds.

Conclusion

De part de leurs applications, les fluides non-Newtoniens sont beaucoup utilisés dans les procédés industriels. Ces fluides représentent plus de 20 % des produits de notre quotidien Gnamode [33]. Les généralités qui viennent d'être présentées dans ce chapitre ne sont pas exhaustives car il existe de nombreux paramètres qui permettent de caractériser les fluides non-Newtoniens. Les procédés de synthèse permettent de donner naissance à d'autres fluides ou produits à comportement rhéologique complexe, ce qui élargit leurs familles.

Il ressort clairement de la synthèse bibliographique présentée dans ce chapitre qu'une étude approfondie sur l'écoulement des fluides non-Newtoniens dans les élargissements manque pour des angles d'élargissement inférieurs à 90° (élargissement progressif).

Dans le chapitre qui suit, nous allons voir la théorie de base nécessaire pour la modélisation et la simulation de l'écoulement d'un fluide non-Newtonien à travers un élargissement.



Chapitre II

Modélisation et Formulation Mathématique



Introduction

Le but de ce chapitre est de présenter le modèle physique régissant l'écoulement d'un fluide non-Newtonien à travers un élargissement. Dans un premier temps, nous présenterons une description du problème étudié ; ensuite, nous décrirons les équations gouvernantes ainsi que les hypothèses simplificatrices et les conditions aux limites. Enfin, nous introduisons les principales grandeurs qui ont une relation avec le problème traité.

II.1 Description du problème :

L'écoulement d'un fluide non-Newtonien dans un élargissement progressif plan de rapport entrée-sortie 1:3 a été considéré comme il est illustré à la figure II.1. Selon cette dernière figure, les longueurs et les hauteurs des sections amont et aval relatives aux première et troisième parties sont respectivement représentées par h , l , H et L . La longueur et l'angle d'expansion de la deuxième partie sont désignés par L_{ex} et α , où $L_{ex} = h / \tan(\alpha)$ et $L_d = 75h - L_{ex}$.

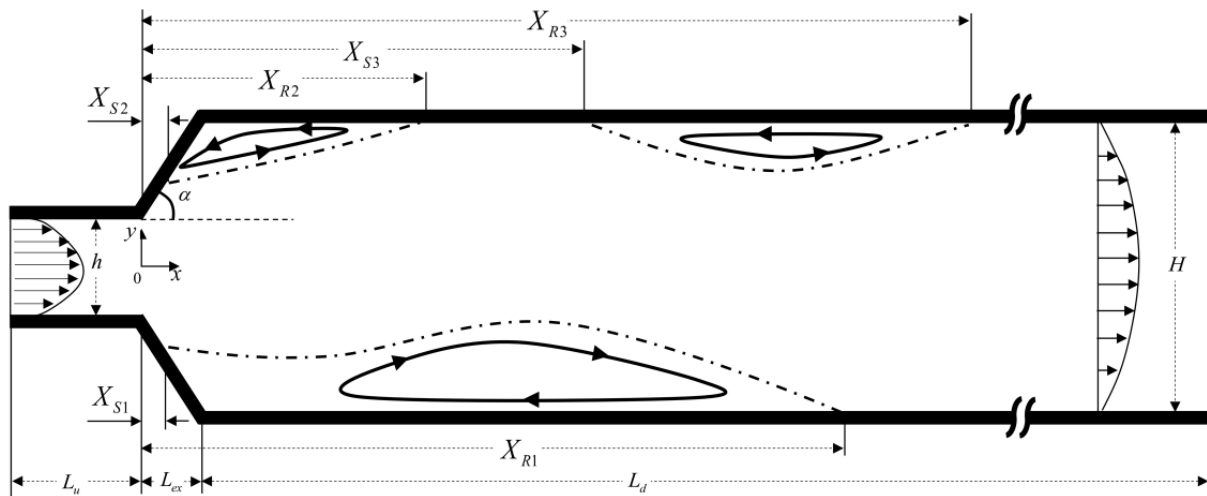


Figure II.1 : Géométrie du problème étudié.

II.2 Equations gouvernantes :

L'écoulement laminaire d'un fluide non-Newtonien dans un élargissement progressif est gouverné par les équations suivantes (Bird et al. [34]) :

II.2.1 Équation de continuité :

L'équation de continuité, traduisant le principe de conservation de masse dans le cas

d'un écoulement incompressible et stationnaire, est donnée par :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (\text{II.1})$$

II.2.2 Équations de conservation de la quantité de mouvement :

Les équations, traduisant le principe de conservation de quantité de mouvement dans le cas d'un écoulement incompressible et stationnaire, sont données par :

$$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = -\frac{\partial P}{\partial x} + \left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) \quad (\text{II.2})$$

$$\rho \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) = -\frac{\partial P}{\partial y} + \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \right) \quad (\text{II.3})$$

$$\rho \left(u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = -\frac{\partial P}{\partial z} + \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \right) \quad (\text{II.4})$$

Le tenseur des contraintes est donné par la relation suivante :

$$\tau_{ij} = 2\eta(\dot{\gamma})D_{ij} \quad (\text{II.5})$$

Où D_{ij} est le tenseur de taux de déformation exprimé par :

$$D_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (\text{II.6})$$

En adoptant le modèle de loi de puissance, la viscosité du fluide peut être exprimée par :

$$\eta(\dot{\gamma}) = K \dot{\gamma}^{n-1} \quad (\text{II.7})$$

Où le taux de cisaillement ($\dot{\gamma}$) est lié au deuxième invariant du tenseur de taux de déformation (D_{ij}) par :

$$\dot{\gamma} = \sqrt{2D:D} = \sqrt{2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2} \quad (\text{II.8})$$

II.3 Hypothèses simplificatrices :

Les hypothèses simplificatrices retenues pour notre étude sont les suivantes :

- L'écoulement est plan (2D).

- Le fluide suit le modèle de loi de puissance.

Après la simplification, on trouve :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (\text{II.9})$$

$$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial P}{\partial x} + \left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \right) \quad (\text{II.10})$$

$$\rho \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{\partial P}{\partial y} + \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} \right) \quad (\text{II.11})$$

II.4 Conditions aux limites :

Les conditions aux limites spécifiques au problème étudié sont :

➤ **Parois :**

La condition de non glissement est appliquée à toutes les parois solides.

➤ **Entrée :**

Le profil de vitesse d'un écoulement pleinement développé dans un canal d'un fluide qui suit la loi de puissance (Bird et al. [34], Ternik [28]) est imposé l'entrée de l'élargissement.

➤ **Sortie :**

À la sortie, une condition de pression constante est imposé ; cette dernière correspond à la pression atmosphérique.

II.5 Définition du nombre de Reynolds pour un fluide suivant une loi de puissance :

Le nombre adimensionnel le plus important de l'écoulement est le nombre de Reynolds, il existe plusieurs définitions de ce nombre dans la littérature, les trois définitions les plus connues sont :

- Nombre de Reynolds généralisé Re_g qui découle de la relation de Metzner et Reed [35] est donné par :

$$Re_g = \frac{6\rho\bar{u}^{2-n}h^n}{K[(4n+2)/n]^n} \quad (\text{II.12})$$

Cette définition sera adoptée dans tout le reste de ce travail par ce qu'elle est utilisée par la majorité des auteurs cités dans la littérature.

- Nombre de Reynolds modifié Re_{mod}

$$Re_{mod} = \frac{\rho \bar{u}_{max}^{2-n} (h/2)^n}{K} \quad (II.13)$$

- Nombre de Reynolds basé sur la viscosité à la paroi Re_{wall}

Il est défini par : $Re_{wall} = (\rho \bar{u} h) / \eta_{wall}$, puisque $\eta_{wall} = K (\dot{\gamma}_{wall})^{n-1}$ et $\dot{\gamma}_{wall} = [(4n+2)/n](\bar{u}/h)$ pour un écoulement laminaire pleinement développé d'un fluide qui suit la loi de puissance. On peut donc écrire :

$$Re_{wall} = \frac{\rho \bar{u}^{2-n} h^n}{K [(4n+2)/n]^{n-1}} \quad (II.14)$$

Ces trois nombres de Reynolds sont reliés entre eux par les relations suivantes :

$$Re_{mod} = \frac{1}{6} \left(\frac{2n+1}{n+1} \right)^2 \left(\frac{n+1}{n} \right)^n Re_g \quad (II.15)$$

$$Re_{wall} = \frac{1}{6} \left(\frac{4n+2}{n} \right) Re_g \quad (II.16)$$

Le nombre de Reynolds généralisé de l'écoulement du fluide en amont de l'élargissement est différent de celui en aval ; dans le cas d'un écoulement planaire, on a : $E_r = H/h = \bar{u}_{amont} / \bar{u}_{aval}$. Donc :

$$Re_{g,aval} = E_r^{2(n-1)} Re_{g,amont} \quad (II.17)$$

Pour un fluide Newtonien ($n = 1$), les deux nombres de Reynolds généralisés en amont et en aval sont égaux comme la montre la figure II.2.

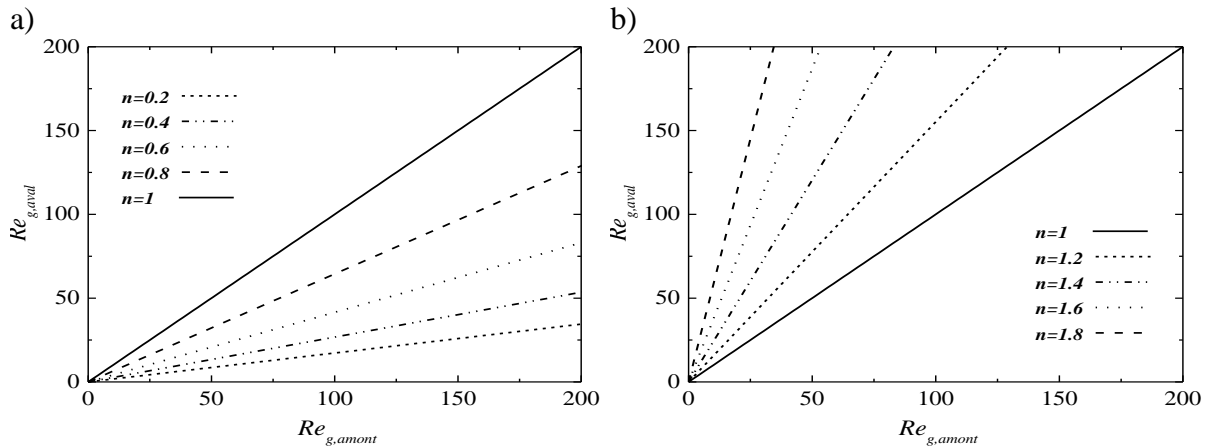


Figure II.2 : Relation entre le nombre de Reynolds généralisé en aval et en amont dans un élargissement de rapport 1:3 pour un fluide non-Newtonien qui suit la loi de puissance :
a) fluide rhéofluidifiant, b) fluide rhéoépaississant.

II.6 Profil de vitesse :

Les profils de vitesse pour un écoulement pleinement développé d'un fluide non-Newtonien qui suit la loi de puissance est utilisée dans la suite de ce travail, deux configurations sont considérées, une conduite cylindrique et deux plaques parallèles. L'étude considérée s'intéresse uniquement à l'écoulement laminaire, et donc les profils de vitesses sont présentés uniquement pour ce type d'écoulement.

II.6.1 Ecoulement laminaire dans une conduite cylindrique :

On considère l'écoulement laminaire, stationnaire, incompressible et pleinement développé d'un fluide indépendant du temps dans un tube circulaire de rayon R comme illustré à la figure II. 3. Comme il n'y a pas de vitesse angulaire, l'équilibre des forces dans la direction (z) sur un élément fluide situé à une distance (r) s'écrit comme suit:

$$p(\pi r^2) - (p + \Delta p)\pi r^2 = \tau_{rz} 2\pi r L \quad (\text{II.18})$$

Soit :

$$\tau_{rz} = \left(\frac{-\Delta p}{L} \right) \frac{r}{2} \quad (\text{II.19})$$

Ceci montre la répartition des contraintes de cisaillement linéaire sur la section transversale de la conduite ; comme illustré à la figure II.4, la contrainte de cisaillement étant

nulle au niveau de l'axe du cylindre ($r=0$) et maximale à la paroi ($r=R$). Notons que l'équation (II.19) est applicable à la fois aux écoulements laminaire et turbulent de tout fluide car elle basée sur un simple équilibre des forces, et qu'aucune hypothèse n'a été émise jusqu'à présent concernant le type d'écoulement ou le comportement du fluide.

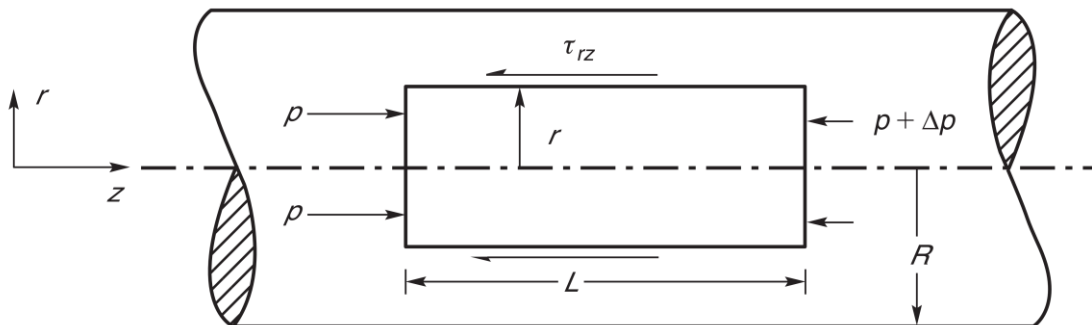


Figure II. 3 : Ecoulement dans une conduite cylindrique.

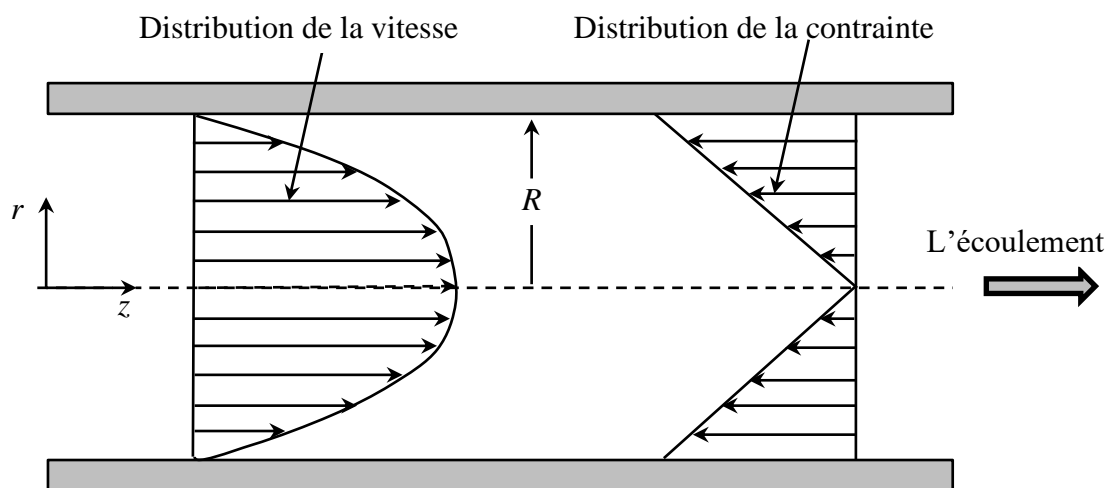


Figure II.4 : Distribution de la vitesse et de la contrainte cisaillement dans un écoulement laminaire pleinement développé à travers une conduite à section circulaire.

Pour un fluide non-Newtonien qui suit la loi de puissance dans une conduite, la contrainte de cisaillement est liée au taux de cisaillement selon la relation de Coulson et Richardson [36] :

$$\tau_{rz} = K \left(-\frac{du}{dr} \right)^n \quad (\text{II.20})$$

Où u est la vitesse axiale ; la combinaison des équations (II.19) et (II.20) et la séparation des variables conduit à :

$$du = - \left\{ \frac{1}{2K} \left(\frac{-\Delta p}{L} \right) \right\}^{1/n} r^{1/n} dr \quad (\text{II.21})$$

L'équation (II.21) peut maintenant être intégrée par rapport à r pour obtenir l'expression de la distribution de vitesse suivante :

$$u = - \left(\frac{n}{n+1} \right) \left\{ \frac{1}{2K} \left(\frac{-\Delta p}{L} \right) \right\}^{1/n} r^{(n+1)/n} + cts \quad (\text{II.22})$$

Au niveau des parois du cylindre (c'est-à-dire lorsque $r = R$), la vitesse u doit être nulle pour satisfaire à la condition de non-glissement. En substituant la valeur $u = 0$ lorsque $r = R$ dans l'équation (II.22), on obtient :

$$cts = - \left(\frac{n}{n+1} \right) \left\{ \frac{1}{2K} \left(\frac{-\Delta p}{L} \right) \right\}^{1/n} R^{(n+1)/n} \quad (\text{II.23})$$

Et par conséquent, la distribution de vitesse dans la conduite cylindrique est donnée par :

$$u = \left(\frac{n}{n+1} \right) \left\{ \frac{R}{2K} \left(\frac{-\Delta p}{L} \right) \right\}^{1/n} R \left\{ 1 - \left(\frac{r}{R} \right)^{(n+1)/n} \right\} \quad (\text{II.24})$$

Le profil de vitesse peut être exprimé en termes de vitesse moyenne U_m qui est donné par :

$$U_m = \frac{Q_v}{\pi R^2} = \frac{1}{\pi R^2} \int_0^R 2\pi r u \, dr \quad (\text{II.25})$$

Où Q_v est le débit volumique du fluide. En remplaçant u de l'équation (II.24) et en intégrant suivant r , on peut écrire :

$$\begin{aligned}
U_m &= \frac{2\pi}{\pi R^2} \left(\frac{n}{n+1} \right) \left\{ \frac{R}{2K} \left(\frac{-\Delta p}{L} \right) \right\}^{1/n} R \int_0^R r \left\{ 1 - \left(\frac{r}{R} \right)^{(n+1)/n} \right\} dr \\
&= 2 \left(\frac{n}{n+1} \right) \left\{ \frac{R}{2K} \left(\frac{-\Delta p}{L} \right) \right\}^{1/n} R \int_0^R \frac{r}{R} \left\{ 1 - \left(\frac{r}{R} \right)^{(n+1)/n} \right\} d \left(\frac{r}{R} \right) \\
&= 2 \left(\frac{n}{n+1} \right) \left\{ \frac{R}{2K} \left(\frac{-\Delta p}{L} \right) \right\}^{1/n} R \left[\frac{1}{2} - \frac{n}{3n+1} \right]
\end{aligned} \tag{II.26}$$

Et donc :

$$U_m = \left(\frac{n}{3n+1} \right) \left\{ \frac{R}{2K} \left(\frac{-\Delta p}{L} \right) \right\}^{1/n} R \tag{II.27}$$

L'équation (II.24) peut maintenant être réécrite en termes de vitesse moyenne comme suit :

$$u = U_m \left(\frac{3n+1}{n+1} \right) \left\{ 1 - \left(\frac{r}{R} \right)^{(n+1)/n} \right\} \tag{II.28}$$

Les profils de vitesse calculés à partir de l'équation (II.28) sont illustrés dans la figure II.5 pour différentes valeurs de n . Comparé à la distribution parabolique pour un fluide Newtonien ($n=1$), le profil est plus plat pour un fluide rhéofluidifiant ($n < 1$) et plus pointu pour un fluide rhéoépaississant ($n > 1$). La vitesse est maximale sur l'axe de la conduite, c'est à dire $r=0$, elle est donnée par l'équation :

$$u_{\max} = \left(\frac{3n+1}{n+1} \right) U_m \tag{II.29}$$

De cette équation, on peut remarquer que la vitesse au centre de la conduite diminue de $2.286U_m$ à $1.333U_m$ lorsque l'indice d'écoulement n diminue de 1.8 à 0.2. En effet, comme prévu, ce rapport est de 2 pour un fluide Newtonien ($n=1$) comme le montre la figure II.5.

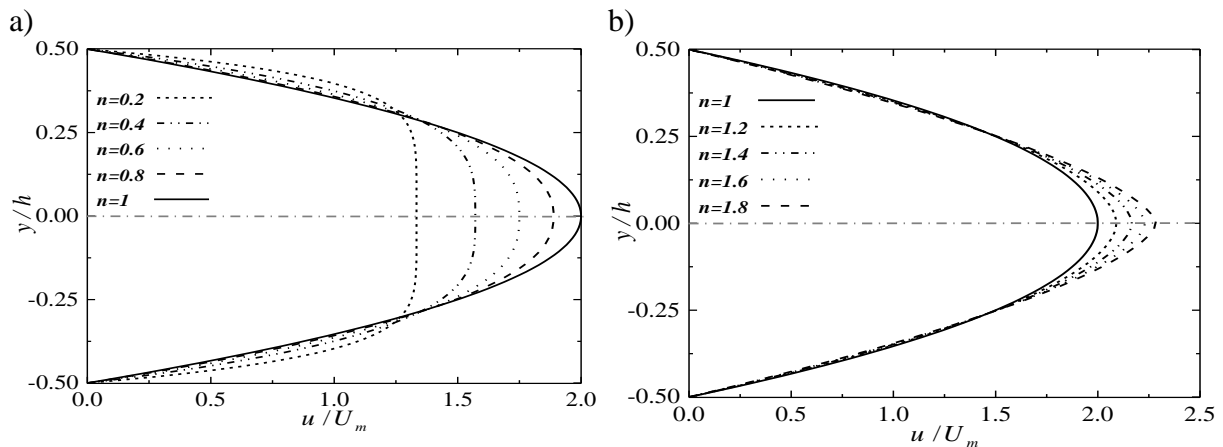


Figure II.5 : Profils de vitesse d'écoulement laminaire dans une conduite cylindrique d'un fluide non-Newtonien qui suit une loi de puissance : a) fluide rhéofluidifiant, b) fluide rhéoépaississant.

II.6.2 Ecoulement laminaire entre deux plaques parallèles :

L'écoulement stationnaire d'un fluide incompressible non-Newtonien qui suit la loi de puissance entre deux plaques parallèles est considéré ; les deux plaques s'étendant à l'infini dans les directions x et z comme indiqué dans la figure II.6. Le plan moyen entre les plaques est pris comme origine avec le domaine d'écoulement allant de $y = -h$ à $y = h$. L'équilibre des forces sur l'élément fluide ABCD situé à une distance $\pm y$ du plan médian peut être configuré de la même manière que pour l'écoulement dans des conduites à section circulaires.

$$p2Wy - (p + \Delta p)2Wy = \tau_{yz}2WL \tag{II.30}$$

C'est-à-dire :

$$\tau_{yz} = \left(\frac{-\Delta p}{L} \right) y \tag{II.31}$$

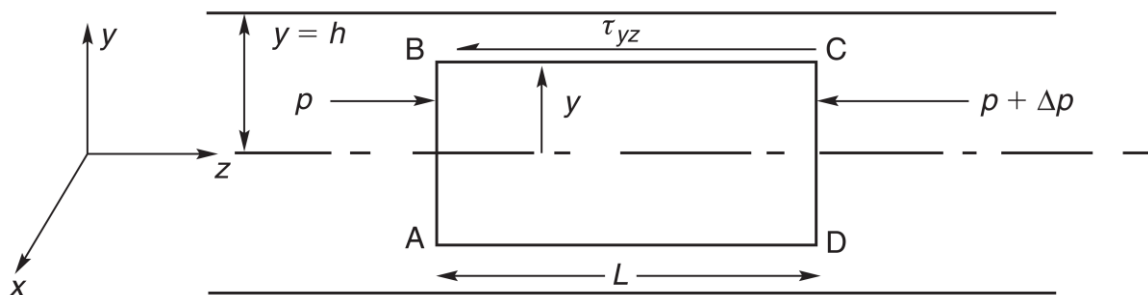


Figure II.6 : Ecoulement entre deux plaques parallèles.

Comme dans le cas d'un écoulement à travers une conduite, la contrainte de cisaillement varie linéairement de zéro au milieu du plan à une valeur maximale à la surface de la plaque. Le système est symétrique par rapport au plan moyen ($y = 0$) et l'équation (II.31) ne doit être résolue que pour $0 < y < h$. La contrainte de cisaillement pour un fluide qui suit la loi de puissance est donnée par:

$$\tau_{yz} = K \left(-\frac{du}{dy} \right)^n \quad (\text{II.32})$$

La combinaison entre les équations (II.31) et (II.32), suivie d'une intégration de la distribution de la vitesse par rapport à y , donne :

$$u = -\left(\frac{n}{n+1} \right) \left\{ \frac{1}{K} \left(\frac{-\Delta p}{L} \right) \right\}^{1/n} y^{(n+1)/n} + cts \quad (\text{II.33})$$

Au niveau des parois du canal (c'est-à-dire lorsque $y = h$), la vitesse u doit être nulle pour satisfaire à la condition de non-glissement. En substituant la valeur $u = 0$ quand $y = h$, on obtient:

$$cts = \left(\frac{n}{n+1} \right) \left\{ \frac{1}{K} \left(\frac{-\Delta p}{L} \right) \right\}^{1/n} h^{(n+1)/n} \quad (\text{II.34})$$

et donc:

$$u = \left(\frac{n}{n+1} \right) \left\{ \frac{1}{K} \left(\frac{-\Delta p}{L} \right) \right\}^{1/n} h^{(n+1)/n} \left\{ 1 - \left(\frac{y}{h} \right)^{(n+1)/n} \right\} \quad (\text{II.35})$$

La vitesse moyenne du fluide en fonction de débit volumique :

$$U_m = \frac{Q_v}{2hW} = \frac{1}{2hW} \int_0^h 2W u dy \quad (\text{II.36})$$

En remplaçant u par l'équation (II.35) et après intégration, on obtient :

$$\begin{aligned}
U_m &= \frac{2\pi}{\pi R^2} \left(\frac{n}{n+1} \right) \left\{ \frac{R}{2K} \left(\frac{-\Delta p}{L} \right) \right\}^{1/n} R \int_0^R r \left\{ 1 - \left(\frac{r}{R} \right)^{(n+1)/n} \right\} dr \\
&= 2 \left(\frac{n}{n+1} \right) \left\{ \frac{R}{2K} \left(\frac{-\Delta p}{L} \right) \right\}^{1/n} R \int_0^R \frac{r}{R} \left\{ 1 - \left(\frac{r}{R} \right)^{(n+1)/n} \right\} d \left(\frac{r}{R} \right) \\
&= 2 \left(\frac{n}{n+1} \right) \left\{ \frac{R}{2K} \left(\frac{-\Delta p}{L} \right) \right\}^{1/n} R \left[\frac{1}{2} - \frac{n}{3n+1} \right]
\end{aligned} \tag{II.37}$$

En remplaçant U_m dans l'équation (II.35) on trouve que :

$$u = U_m \left(\frac{2n+1}{n+1} \right) \left\{ 1 - \left(\frac{y}{h} \right)^{(n+1)/n} \right\} \tag{II.38}$$

Les profils de vitesse calculés à partir de l'équation (II.38) sont illustrés à la figure II.7. Les mêmes remarques, pour la forme de ces profils comme pour celle d'une conduite cylindrique, peuvent être faites mais la seule différence est les valeurs de rapport entre la vitesse maximale et la vitesse moyenne. En effet, la valeur de ce rapport diminue de 1.643 à 1.67 lorsque n diminue de 1.8 à 0.2, passant bien sûr par la valeur 1.5 qui correspond à un fluide Newtonien.

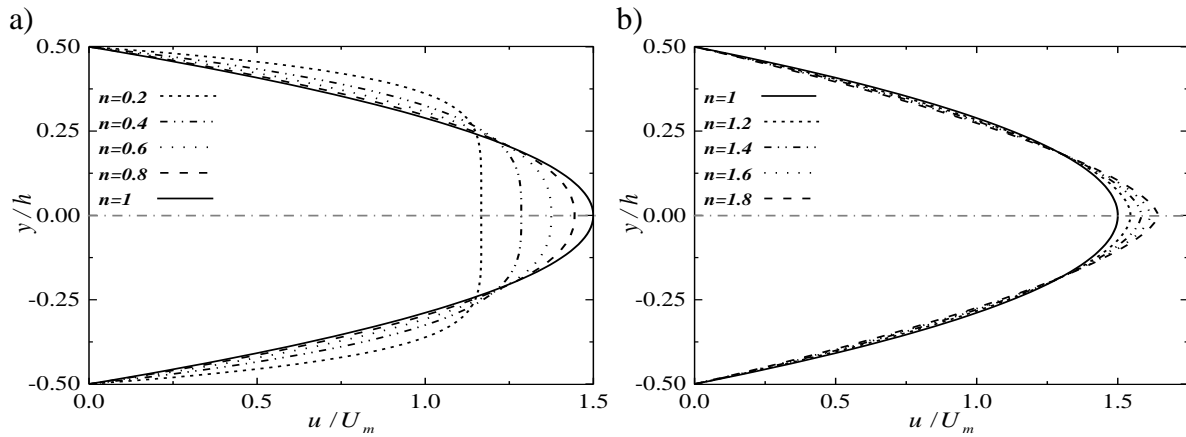


Figure II.7 : Profils de vitesse d'écoulement laminaire entre deux plaques parallèles d'un fluide non-Newtonien qui suit une loi de puissance : a) fluide rhéofluidifiant, b) fluide rhéoépaississant.

II.7 Perte de charge :

Dans l'écoulement d'un fluide à travers une singularité, on distingue deux types de perte de charge linéaire et singulière ; la perte de charge linéaire est produite par le frottement,

et la perte de charge singulière est due au changement de direction ou de section. Dans notre cas, cette perte de charge est présentée sous la forme d'une correction appelée correction de Couette qui traduit la chute de pression due au redéveloppement de l'écoulement.

II.7.1 Perte de charge linéaire :

Comme pour les profils de vitesse, le coefficient de perte de charge linéaire est calculé dans les deux cas considérés : conduite cylindrique et deux plaques parallèles.

II.7.1.a Coefficient de perte de charge linéaire pour l'écoulement à travers un cylindre :

La contrainte de cisaillement à la paroi, qui est en fonction de coefficient de frottement, est donnée par :

$$\tau_w = \frac{1}{2} \rho V^2 f \quad (\text{II.39})$$

Avec :

$$\tau_w = \left(\frac{-\Delta p}{L} \right) \left(\frac{D}{4} \right) \quad (\text{II.40})$$

De (II.39) et (II.40) on peut écrire :

$$\frac{-\Delta p}{L} = \frac{2f \rho V^2}{D} \quad (\text{II.41})$$

En remplaçant $(-\Delta p / L)$ par l'équation (II.41) dans l'équation (II.26) et en l'écrivant en fonction du diamètre du cylindre, on obtient :

$$U_m = \left(\frac{n}{3n+1} \right) \left\{ \frac{D}{4K} \frac{2f \rho U_m^2}{D} \right\}^{1/n} \left(\frac{D}{2} \right) \quad (\text{II.42})$$

Cette équation peut se mettre sous la forme suivante :

$$f = \frac{16}{\text{Re}_{PL}} \quad (\text{II.43})$$

Où le nouveau nombre de Reynolds Re_{PL} est défini par :

$$\text{Re}_{PL} = \frac{\rho U_m^{2-n} D^n}{8^{n-1} K \left(\frac{3n+1}{4n} \right)^n} \quad (\text{II.44})$$

Cette définition du nombre de Reynolds coïncide avec celle de Metzner et Reed [35] noté Re_{MR} , soit : $\text{Re}_{PL} = \text{Re}_{MR}$.

II.7.1.b Coefficient de perte de charge linéaire pour l'écoulement entre deux plaques parallèles :

De la même manière que l'écoulement à travers un cylindre, pour les plaques parallèles, on peut trouver la relation entre le coefficient de frottement et le nombre de Reynolds :

$$f = \frac{12}{\text{Re}_{PL}} \quad (\text{II.45})$$

Avec Re_{PL} est le nombre de Reynolds généralisé donné par :

$$\text{Re}_{PL} = \frac{6\rho U_m^{2-n} h^n}{K \left(\frac{4n+2}{n} \right)^n} \quad (\text{II.46})$$

L'équation (II.46) coïncide avec le nombre de Reynolds défini par Metzner et Reed [35] pour un écoulement entre deux plaques parallèles, et qui est donnée par l'équation (II.12) comme étant le nombre de Reynolds généralisé ; donc : $\text{Re}_{PL} = \text{Re}_g$.

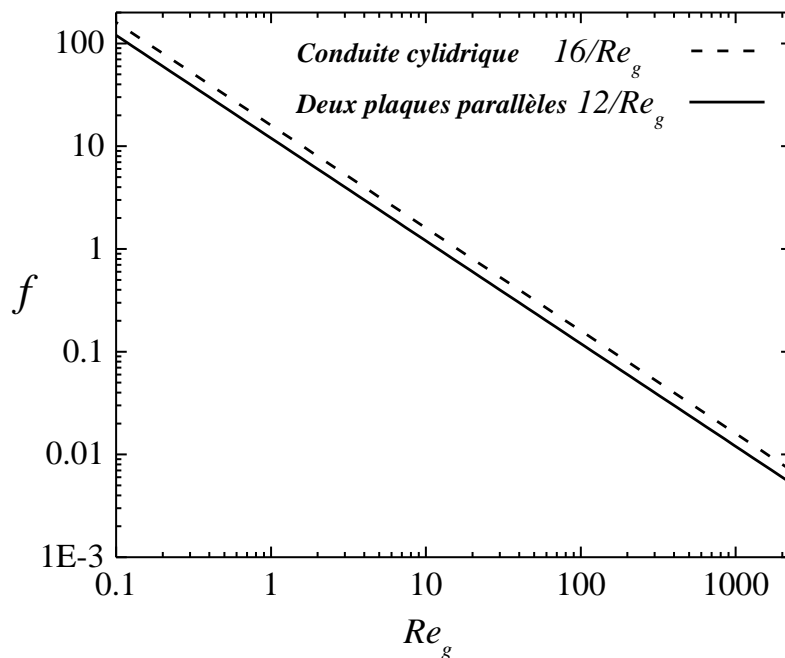


Figure II.8 : Variation du coefficient de friction pour l'écoulement laminaire d'un fluide non-Newtonien qui suit une loi de puissance.

II.7.2 Correction de Couette :

La correction de Couette C représente la chute de pression associée au redéveloppement de l'écoulement lors de l'élargissement (voir figure II.9), cette dernière est normalisée par la contrainte de cisaillement moyenne à la paroi τ_w en amont où l'écoulement est pleinement développée :

$$C = \frac{\Delta p - (\Delta p_{fd,amont} + \Delta p_{fd,aval})}{2\tau_w} \quad (\text{II.47})$$

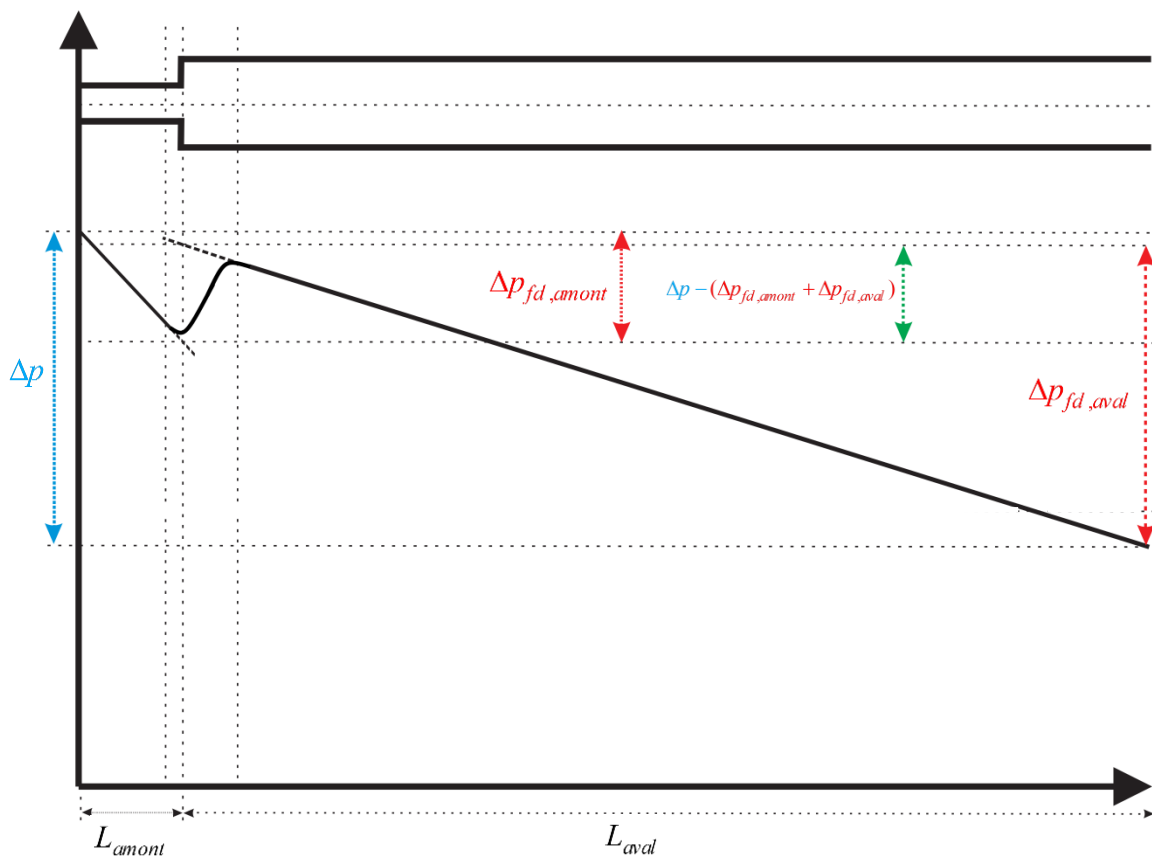


Figure II.9 : Variation de la pression le long d'un canal contenant une singularité (élargissement).

Conclusion

Nous avons présenté dans ce chapitre une description détaillée du problème considéré ainsi que les équations gouvernant l'écoulement d'un fluide non-Newtonien à travers un élargissement planaire avec des conditions aux limites appliquées.

Les profils de vitesse sont déterminés dans deux cas d'écoulement : écoulement en conduite cylindrique et écoulement entre deux plaques parallèles. De même, les coefficients de perte de charge régulière et la correction de Couette sont aussi définis pour ces deux cas d'écoulement.

Dans le chapitre suivant, nous allons présenter les méthodes numériques utilisées dans le code de calcul ainsi que le processus de calcul numérique en dynamique des fluides. Cette étape est nécessaire avant de passer à la résolution numérique du problème et la présentation des résultats dans le dernier chapitre.



Chapitre III

Méthodes numériques et étude de maillage



Introduction

Avant d'évoquer de manière plus détaillée la méthode des volumes finis adoptée pour notre travail, nous décrivons succinctement les différentes approches numériques utilisées pour résoudre un problème de mécanique des fluides en indiquant les faiblesses et les avantages de chacune d'elles. Puis, nous allons présenter le code de calcul ANSYS (Fluent) utilisé pour la simulation numérique, et nous finirons par une étude d'influence du maillage pour le problème traité.

III.1 Méthodes des différences finies (MDF) :

La méthode des différences finies est la première méthode utilisée pour résoudre des équations différentielles (utilisée pour la première fois par Euler dans la seconde moitié du 18^{ème} siècle). La méthode est directement appliquée à la forme différentielle des équations. Pour cela, on utilise un développement en série de Taylor pour la discrétisation des dérivées associées aux variables du fluide GALON [37].

Démarche :

- On part des équations écrites sous leurs formes différentielles.
- Le domaine de calcul est couvert par une grille.
- On discrétise les équations différentielles en chaque point de la grille en approximant les dérivées partielles à partir des valeurs aux nœuds de la fonction, ce qui donne une équation algébrique pour chaque nœud de la grille.
- Puis, on résout le système d'équation algébrique pour toute la grille.

Un avantage important de cette méthode est sa simplicité de mise en œuvre et d'obtenir de manière relativement simple des schémas de précision élevée. Par contre, la méthode nécessite un maillage structuré ; son application pour des problèmes industriels reste limitée. Elle est en général limitée à des géométries simples même dans le cas où l'on utilise une transformation de l'espace physique à un système de coordonnées cartésiennes. De plus, la méthode n'est pas toujours conservative.

III.2 Méthodes des éléments finis (MEF) :

La technique des éléments finis discrétise l'espace à l'aide d'éléments géométriques simples (généralement des triangles ou des rectangles). Ensuite, la forme forte des équations est remplacée par la forme faible dans laquelle les inconnues sont approximées par une combinaison linéaire de fonctions de base dont le support est un des éléments.

La méthode des éléments finis est intéressante car elle est utilisable pour des géométries complexes et est basée sur des fondements mathématiques rigoureux. Par contre, elle est beaucoup plus difficile à mettre en œuvre que la méthode des volumes finis et souvent bien plus coûteuse.

III.3 Méthodes des volumes finis (MVF) :

La méthode des volumes finis (MVF) ou "méthode du volume de contrôle" provient des travaux de Patankar [38]. Dans cette méthode, le domaine est divisé en un nombre fini de volumes de contrôle qui recouvrent le domaine de calcul. Sur chaque volume de contrôle ou cellule, les lois de conservation sont appliquées pour déterminer les différentes variables associées au problème en des points (ou nœuds) qui ne correspondent pas forcément avec les points du maillage ou de la grille. Dans cette méthode, les choix des volumes de contrôle et des nœuds sont très nombreux (cell-centered, cell-vertex, node-vertex, ...) et seront discutés plus loin dans ce travail. Le maillage associé au calcul peut être structuré ou non comme par exemple en éléments finis, ce qui donne une grande souplesse à la méthode.

Un des principaux avantages de cette méthode est que la discrétisation spatiale est faite directement sur le domaine physique. Il n'y a ainsi aucune transformation entre différents systèmes de coordonnées comme par exemple c'est le cas en éléments finis où l'on doit effectuer une transformation de l'élément réelle à l'élément de référence pour lequel les fonctions de formes sont connus ou bien encore pour les différences finis lorsque l'on n'utilise pas une grille cartésienne.

Contrairement aux différences finies cette méthode peut être utilisé sur des maillages structurés ou non. La formulation de type volumes finis étant basée sur une discrétisation des lois de conservation ; ces dernières se trouvent alors naturellement satisfaites sur les volumes de contrôles par le schéma numérique. Cette propriété est très importante lorsque l'on doit traiter des chocs (ou d'autres types de discontinuités) puisqu'elle permet de garantir que les relations de Rankine-Hugoniot seront satisfaites par la méthode.

La simplicité de mise en œuvre alliée à la souplesse pour représenter des géométries complexes est en fait la méthode la plus utilisée actuellement en mécanique des fluides dans les codes de calcul commerciaux (FLUENT, CFX, STAR CD, PHOENICS, CFD-FASTRAN, CFD2000, KIVA, ...).

III.4 Principe de la méthode des volumes finis :

Dans le but de ne pas trop alourdir cette partie, nous allons évoquer les bases de la méthode des volumes finis et pour de plus amples détails l'ouvrage de Patankar [38] constitue un excellent guide.

La résolution d'un problème par la méthode des volumes finis passe par les étapes suivantes :

- Maillage du domaine physique de calcul (distribution des volumes de contrôle).
- Discrétisation des différentes équations régissant le phénomène considéré.
- Choix d'un algorithme de résolution des systèmes d'équations obtenues après discrétisation.

III.4.1 Distribution des volumes de contrôle :

Dans la méthode des volumes finis, la zone d'intégration est divisée en un certain nombre de volumes élémentaires (voir figure III-1). Il faut bien distinguer les indices en lettres majuscules qui désignent des grandeurs attachées au point situé au centre du volume et les indices en lettres minuscules qui désignent les grandeurs attachées aux faces des volumes. Si nous appelons P le nœud considéré alors les points qui lui sont adjacents sont dénommés : East (E), West (W), North (N), et South (S) pour des écoulements bidimensionnels.

Les faces du volume de contrôle seront dénommées de la même façon. Dans le but d'assurer une expression correcte du bilan de conservation d'une entité physique quelconque, cette méthode utilise un maillage décalé (staggered grid) en fonction de la nature même de l'entité considérée.

La pression et la température sont calculées en considérant un volume de contrôle centré autour du point P, donc entre les faces e, w, n, et s (en bidimensionnel). Les vitesses seront estimées dans un volume centré sur la face et entre deux plans passant par les nœuds P et E et limité par les faces sud et nord. Il découle directement de cette localisation que le calcul des flux de masse à travers des interfaces ($F_e = (\rho u)_e \Delta y$) se fera sans aucune interpolation de la vitesse sur ces interfaces.

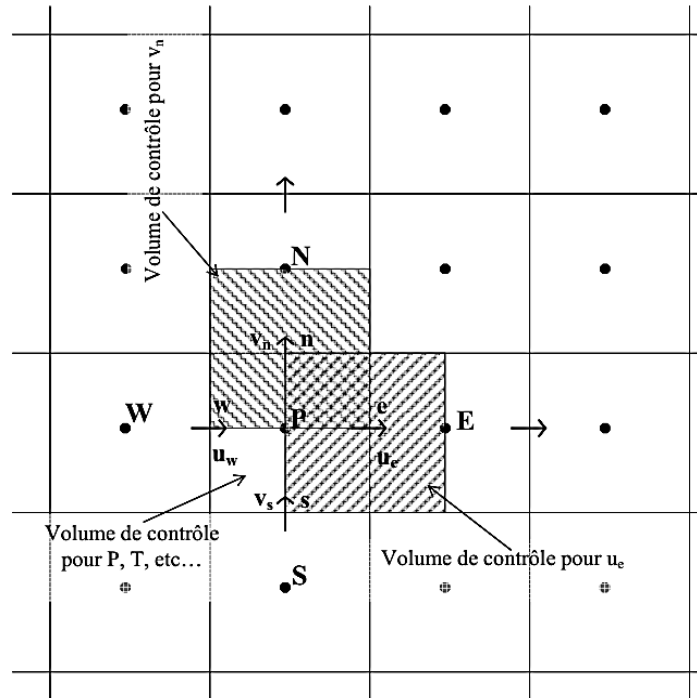


Figure III.1 : Distribution des volumes de contrôle avec maillage décalé.

L'avantage de cet arrangement est nettement plus important au niveau de l'équation de continuité car celle-ci, étant intégrée sur le volume de contrôle principal, fera apparaître la différence entre deux vitesses adjacentes en éliminant ainsi les problèmes d'interpolation. D'autre part, au niveau de l'équation de la quantité de mouvement, la différence de pression prise en compte sera elle aussi issue de deux nœuds adjacents et sera donc la force motrice naturelle pour la vitesse.

Du point de vue physique, la pression et la température sont des grandeurs scalaires plus facilement calculables en un point (supposé représentatif du volume), tandis que la vitesse est plutôt liée à un flux (que nous considérons constant) à travers une surface. Conformément aux hypothèses faites précédemment (grandeurs et flux constants), il conviendra de prendre des maillages suffisamment raffinés de façon à ce que les moyennes effectuées soient représentatives.

III.4.2 Discrétisation de l'équation générale de transport :

Les phénomènes physiques impliquant l'écoulement d'un fluide et le transfert de chaleur sont régis par les équations de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie.

Ces équations peuvent être écrites selon [32] sous la forme généralisée suivante :

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_j \phi) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \right) + S_\phi \quad (\text{III.1})$$

Ou encore :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}(\rho U \phi) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho V \phi) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho W \phi) = \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) + S_\phi \end{aligned} \quad (\text{III.2})$$

Considérons le volume de contrôle représenté sur la figure (III.2).

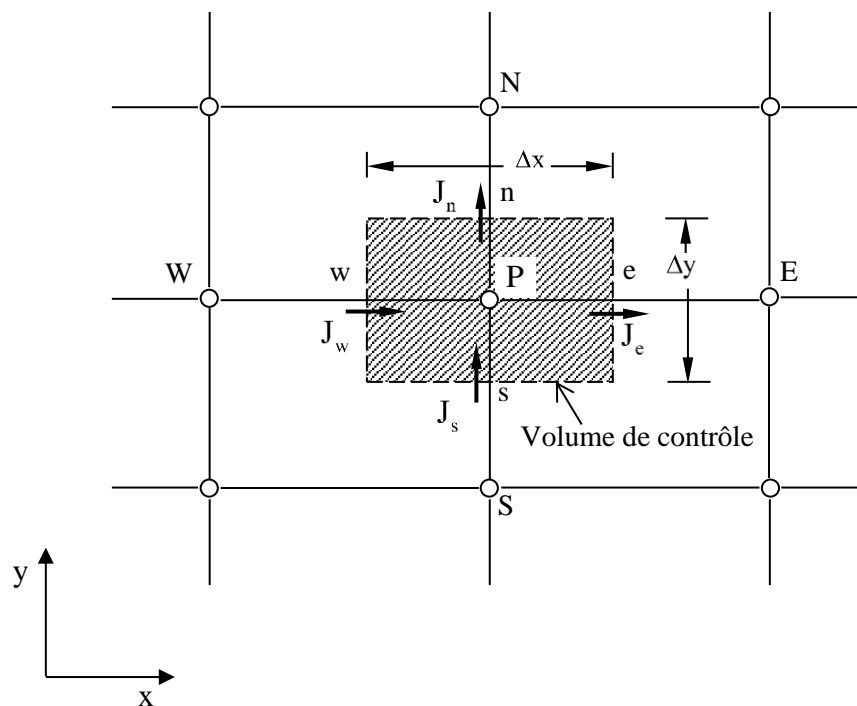


Figure III.2 : Volume de contrôle pour un écoulement bidimensionnel.

L'intégration de l'équation (III.2) sur le volume de contrôle de la figure (III.2) donne :

$$J_e - J_w + J_n - J_s = \iiint_V S_\phi dV \quad (\text{III.3})$$

Où les indices (e, w, n, s) indiquent que les quantités correspondantes sont respectivement évaluées aux faces est, ouest, nord et sud du volume de contrôle, et les quantités J_e , J_w , J_n et J_s sont les flux totaux intégrés sur les faces du volume de contrôle dont leurs expressions sont données par :

$$\begin{aligned}
J_e &= \int_s^n \left(\rho U \phi - \Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_e dy = \left[(\rho U)_e \phi_e - \frac{\Gamma_{\phi,e}}{\Delta x_{EP}} (\phi_E - \phi_P) \right] \Delta y_{ns} \\
J_w &= \int_s^n \left(\rho U \phi - \Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_w dy = \left[(\rho U)_w \phi_w - \frac{\Gamma_{\phi,w}}{\Delta x_{WP}} (\phi_P - \phi_W) \right] \Delta y_{ns} \\
J_n &= \int_w^e \left(\rho V \phi - \Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)_e dx = \left[(\rho V)_n \phi_n - \frac{\Gamma_{\phi,e}}{\Delta x_{NP}} (\phi_N - \phi_P) \right] \Delta x_{ew} \\
J_s &= \int_w^e \left(\rho V \phi - \Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)_s dx = \left[(\rho V)_s \phi_s - \frac{\Gamma_{\phi,n}}{\Delta x_{PS}} (\phi_P - \phi_S) \right] \Delta x_{ew}
\end{aligned} \tag{III.4}$$

La tâche la plus difficile dans l'évaluation de J_e , J_w , J_n et J_s est celle de l'approximation des quantités ϕ_e , ϕ_w , ϕ_n et ϕ_s .

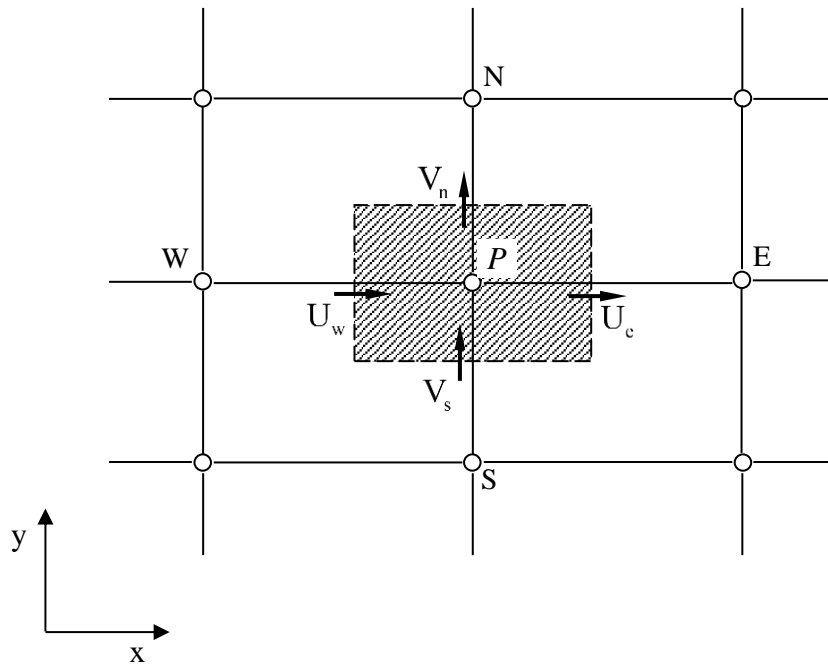


Figure III.3 : Volume d'intégration de l'équation de continuité

De la même façon, l'intégration de l'équation de continuité sur le volume de contrôle de la figure (III.3) conduit à :

$$F_e - F_w + F_n - F_s = 0 \tag{III.5}$$

où F_e , F_w , F_n et F_s sont les flux de masse de l'écoulement à travers les faces du volume de contrôle définis par :

$$\begin{aligned}
F_e &= (\rho U)_e \Delta y_{ns} \\
F_w &= (\rho U)_w \Delta y_{ns} \\
F_n &= (\rho V)_n \Delta y_{ew} \\
F_s &= (\rho U)_s \Delta y_{ew}
\end{aligned} \tag{III.6}$$

L'intégration du terme source est obtenue en supposant que S_ϕ est uniforme sur le volume de contrôle.

$$\iint_V S_\phi dV \cong S_U + S_P \phi_P \tag{III.7}$$

En effectuant l'opération $((III.3) - (III.5) \times \phi_P)$ et en remplaçant le terme source par son expression (III.7) dans l'équation (III.3), on obtient :

$$(J_w - F_w \phi_P) + (J_n - F_n \phi_P) - (J_s - F_s \phi_P) = S_U + S_P \phi_P \tag{III.8}$$

On utilise de nouvelles notations D (D représente la diffusion) définies par :

$$\begin{aligned}
D_e &= \frac{\Gamma_e}{\delta x_e} \Delta y_{ns} \\
D_w &= \frac{\Gamma_w}{\delta x_w} \Delta y_{ns} \\
D_n &= \frac{\Gamma_n}{\delta y_n} \Delta x_{ew} \\
D_s &= \frac{\Gamma_s}{\delta y_s} \Delta x_{ew}
\end{aligned} \tag{III.9}$$

L'équation discrétisée complète peut alors s'écrire sous la forme :

$$a_P \phi_P = a_E \phi_E + a_W \phi_W + a_N \phi_N + a_S \phi_S + b \tag{III.10}$$

Cette équation peut être réarrangée comme suit :

$$a_P \phi_P = \sum_{i=N,S,E,W} a_i \phi_i + b \tag{III.11}$$

Où :

$$\begin{aligned}
a_E &= D_e A(|P_e|) + F_e, 0 \\
a_W &= D_w A(|P_w|) + F_w, 0 \\
a_N &= D_n A(|P_n|) + F_n, 0 \\
a_S &= D_s A(|P_s|) + F_s, 0 \\
a_P &= a_E + a_W + a_N + a_S - S_P \\
b &= S_U
\end{aligned} \tag{III.12}$$

P_i est le nombre de Peclet défini pour les différentes faces par :

$$P_e = \frac{F_e}{D_e} \quad ; \quad P_w = \frac{F_w}{D_w} \quad ; \quad P_n = \frac{F_n}{D_n} \quad ; \quad P_s = \frac{F_s}{D_s} \tag{III.13}$$

La fonction $A(|P|)$ est choisie en fonction du schéma de discrétisation désiré.

III.4.3 Fonction $A(|P|)$ pour différents schémas numériques :

Nous introduisons maintenant quelques schémas d'interpolation servant à déterminer la valeur de la variable dépendante ϕ qui représente l'une des valeurs (u, v) aux interfaces du volume de contrôle. Parmi ces schémas, on distingue le schéma aux différences centrées (Central Difference Scheme) qui utilise une procédure d'interpolation linéaire mais qui reste, cependant, limité pour des valeurs de $|P| < 2$.

Une autre alternative à ce schéma est la procédure aux différences décentrées (Upwind Scheme). Ce schéma est moins précis que celui aux différences centrées pour les écoulements qui ne sont pas à convection dominée. Par conséquent, un certain nombre d'auteurs ont proposé des combinaisons des deux schémas précédents. Spalding a développé le schéma hybride (Hybrid Scheme) qui rejoint le schéma aux différences centrées pour $|P| < 2$ et le schéma aux différences décentrées pour $|P| > 2$ [38].

L'inconvénient majeur du schéma hybride est l'erreur introduite au voisinage de $|P| = 2$ (voir figure III.4). Ainsi, un certain nombre de méthodes ont été développées afin de représenter un changement plus graduel et qui sont en bon accord avec la solution exacte d'un problème monodimensionnel.

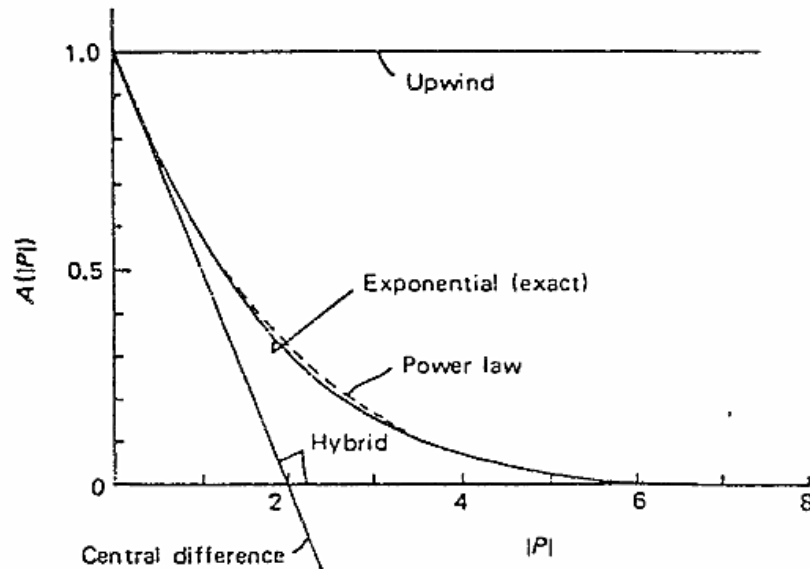


Figure III.4 : La fonction $A(|P|)$ pour chacun des schémas.

Patankar propose le schéma d'approximation de la loi de puissance (Power Law Scheme) qui s'avère très efficace puisqu'il approche beaucoup mieux la solution exacte (voir figure III.5). Ce schéma a été développé à partir du schéma exponentiel exact (Exponential Scheme). Ce dernier n'a pas été utilisé à cause du temps de calcul important nécessaire au calcul des exponentielles [38].

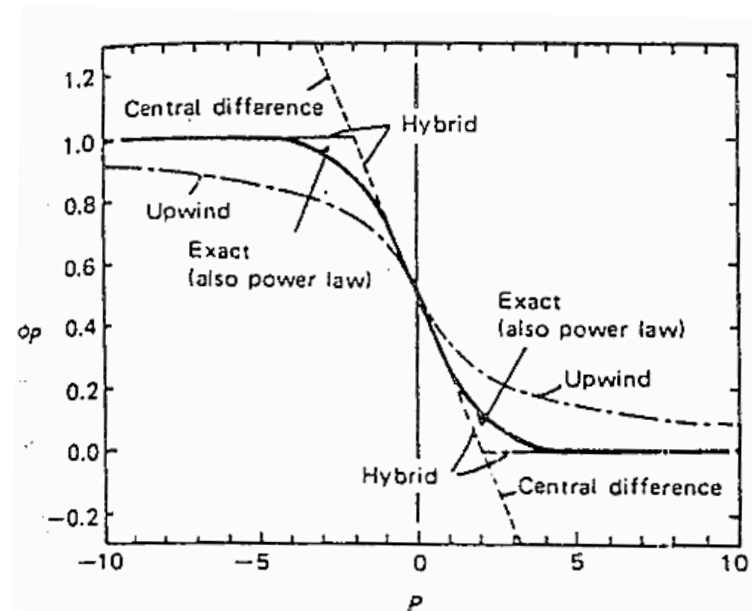


Figure III.5 : Prédiction de ϕ_p par les différents schémas en fonction du nombre de Peclet.

Le schéma de la loi de puissance est le plus recommandé dans la littérature. On note aussi que le temps de calcul pour ce schéma est légèrement plus important que le schéma hybride. Par ailleurs, les schémas préalablement définis peuvent être vus comme des choix particuliers de la fonction $A(|P|)$ reportés dans le tableau suivant :

Schéma	Expressions de $A(P)$
Centré	$1 - 0.5 P $
Upwind	1
Hybride	$\max\left\ 0, (1 - 0.5 P)\right\ $
Loi de puissance	$\max\left\ 0, (1 - 0.5 P)^5\right\ $
Exponentiel	$ P / \left[\exp(P) - 1\right]$

Tableau III.1 : Expression de la fonction $A(|P|)$ pour chacun des schémas Patankar [38].

III.5 Présentation du code ANSYS FLUENT :

À l'heure actuelle, il existe un certain nombre de codes industriels conviviaux aux maillages performants, permettant la prédiction d'écoulement des fluides par la résolution des équations de Navier-Stokes grâce aux méthodes des volumes finis, des différences finies ou des éléments finis (ANSYS CFX, PHOENICS, STAR-CD, TrioCFD). Pour notre travail, nous avons eu recours au code ANSYS FLUENT.

C'est un code écrit avec le langage de programmation (C) qui utilise pleinement la flexibilité et la puissance offertes par ce langage (allocation de la mémoire dynamique). En outre, il utilise une architecture qui lui permet de s'exécuter avec plusieurs processeurs simultanés sur le même poste de travail ou sur des postes séparés, et ce pour une exécution plus efficace.

Dans ce qui suit, nous évoquerons essentiellement les options qu'il propose pour des problèmes tel que le notre. Pour un supplément d'informations sur ses capacités de modélisation, il est conseillé de se référer à la documentation du logiciel [41].

III.5.1 Choix du solveur :

Le code ANSYS FLUENT contient deux solveurs : Pressure Based et Density Based ; dans notre cas, le solveur Pressure Based est choisi et qui suit l'algorithme suivant :

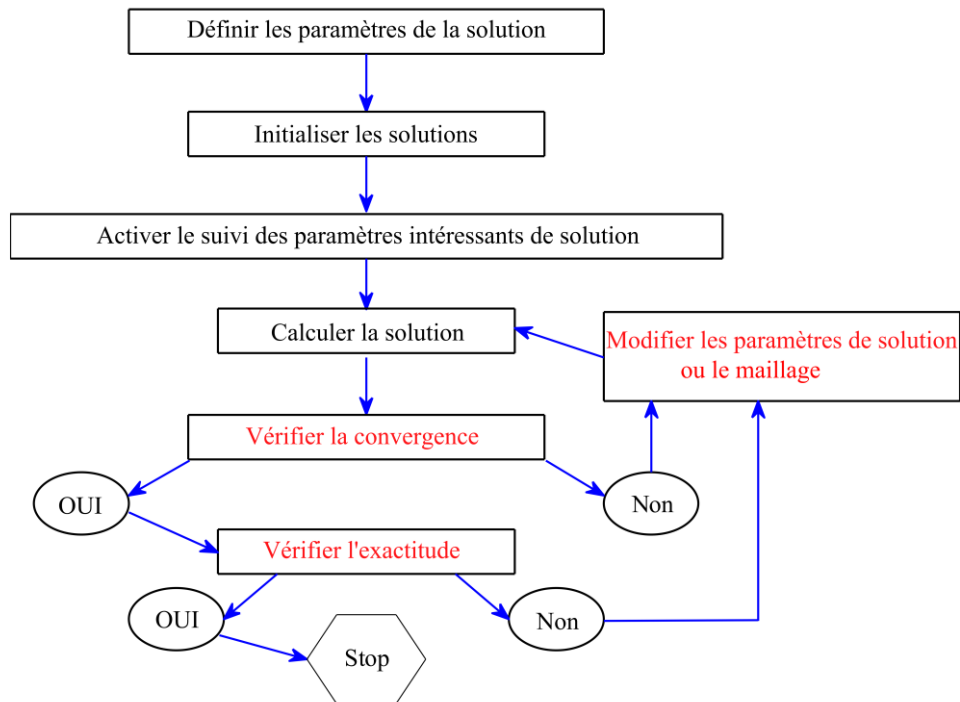


Figure III.6 : Algorithme de résolution [39].

III.5.2 Couplage pression-vitesse :

Cette méthode indique l'algorithme numérique qui utilise une combinaison d'équations de continuité et de quantité de mouvement pour dériver une équation de pression (ou de correction de la pression) lors de l'utilisation du solveur basé sur la pression. Il existe différents algorithmes tels que :

- **SIMPLE** (Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equations) qui est un schéma robuste.
- **SIMPLEC** (SIMPLE-Consistent) ce qui permet une convergence plus rapide pour des problèmes simples.
- **PISO** (Pressure-Implicit with Splitting of Operators) ce qui est utile et recommandé pour un flux instable ou pour des mailles contenant des cellules avec une asymétrie supérieure à la moyenne.
- **Coupled** ce qui est également un schéma pour résoudre ce couplage mais si le solveur couplé et basé sur la pression est activé.

III.5.3 Méthodes d'interpolation pour les gradients :

Les gradients des variables de la solution au centre de la cellule peuvent être déterminés en utilisant trois approches :

- **Green-Gauss cell-Based** : c'est la moins intensive en calcul.
- **Green-Gauss Node-Based** : cette méthode est plus précise et minimise la fausse diffusion. Elle est spécialement recommandée pour les maillages non structurés.
- **Least-Squares cell-Based** : cette méthode a la même précision que les gradients basés sur les nœuds (**Node-Based**) et nécessite moins de calcul.

Dans notre cas, le calcul des gradients est effectué à l'aide de la méthode des moindres carrés à base de cellules (**Least-Squares cell-Based**).

III.5.4 Méthodes d'interpolation pour la pression :

Lorsqu'on utilise le solveur basé sur la pression, plusieurs schémas d'interpolation permettant de calculer les pressions sur les faces du volume de contrôle sont disponibles ; à savoir :

- **Standard** : cette méthode est acceptable dans la plupart des cas.
- **Second-Order** : cette méthode est recommandée pour les écoulements compressibles.
- **Body force weighted** : lorsqu'un problème impliquant des forces massiques importantes est étudié, il est recommandé de choisir **Body force weighted**.
- **PRESTO** : il est préférable pour les structures d'écoulement qui incluent des fortes courbures de lignes de courant et de rotation.
- **Linear** : si l'une de ces méthodes n'est pas adaptée, le schéma linéaire est utilisé

Pour l'interpolation de la pression sur les faces des cellules, la méthode **Standard** est utilisée pour toutes nos simulations.

III.5.5 Discrétisation spatiale :

Pour résoudre les équations de quantité de mouvement, les variables de champ au centre de la cellule doivent être interpolées sur les faces du volume de contrôle. Les schémas d'interpolation sont les suivants :

- **First-Order Upwind** : Dans cette méthode, la convergence est plus facile, mais la précision est de premier ordre.

- **Power Law** : cette méthode est plus précise que **First-Order Upwind** pour les écoulements où $Re_{cell} < 5$.

- **Second-Order Upwind** : dans le cas d'un maillage triangulaire / tétraédrique ou lorsque l'écoulement n'est pas aligné avec la grille, ce schéma est recommandé.

- **MUSCL** (Monotone Upstream-Centered Schemes for Conservation Laws) : il est plus précis dans la prévision des écoulements secondaires, des tourbillons, des forces, etc. Il est conseillé pour les maillages non structurés.

- **QUICK** (Quadratic Upwind Interpolation) : est appliqué aux maillages quadrilatéraux/hexaédrique et hybrides, utiles pour les écoulements en rotation / tourbillonnants, sur un maillage uniforme ; la précision de ce schéma est de 3ème ordre.

Pour toutes nos simulations, le schéma QUICK a été choisi pour la discrétisation spatiale.

III.5.6 Convergence :

Dans cette thèse, la convergence de la solution numérique est jugée en se basant sur les changements des résidus de la continuité et de la quantité de mouvement. La forme discrétisée de l'équation de transport linéarisée est :

$$a_p \phi_p = \sum_{nb} a_{nb} \phi_{nb} + b_p \quad (\text{III.14})$$

Les coefficients a_p et a_{nb} dépendent de la solution. Ces coefficients varient à chaque itération. L'égalité n'est pas exacte, l'écart entre les deux termes est appelé le résidu R_p donné par :

$$R_p = \sum_{nb} a_{nb} \phi_{nb} + b_p - a_p \phi_p \quad (\text{III.15})$$

Le résidu total R^ϕ est la somme des résidus des cellules R_p :

$$R^\phi = \sum_{cell} |R_P| \quad (III.16)$$

III.6 Domaine d'étude et conditions aux limites :

III.6.1 Domaine d'étude :

Le maillage est une représentation discrète du domaine de calcul divisant ce dernier en un nombre fini de cellules. Les différentes configurations présentées dans ce travail sont maillées à l'aide du logiciel ANSYS GAMBIT version 2.4.6 [40]. Ce mailleur nous offre un large choix de création de géométrie et de génération de maillage. Ce logiciel offre aussi la spécification des types de conditions aux limites appliquées au problème.

III.6.2 Conditions aux limites :

➤ **Parois : "Wall"**

La condition de non glissement est appliquée à toutes les parois solides.

➤ **Entrée : "Velocity inlet"**

Le profil de vitesse d'un écoulement pleinement développé dans un canal d'un fluide rhéofluidifiant qui suit la loi de puissance est imposé l'entrée de l'élargissement ; cette condition est introduite dans FLUENT à l'aide de la fonctionnalité "User Define Function" UDF qui est un programme C [41] (voir annexe I).

➤ **Sortie : "Pressure outlet"**

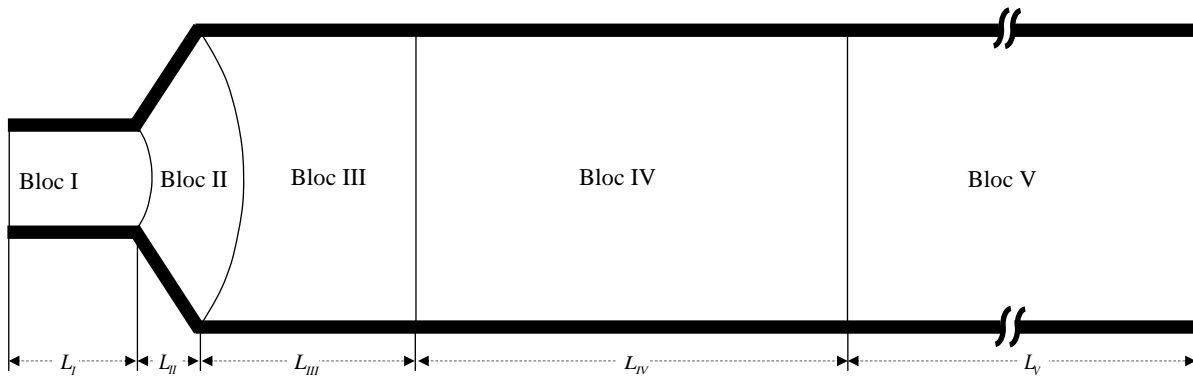
À la sortie, une condition de pression constante est imposée ; cette dernière correspond à la pression atmosphérique.

III.7 Etude du maillage :

III.7.1 Répartition du domaine d'étude en blocs :

Pour notre investigation, nous avons considéré cinq blocs pour le domaine d'étude ; aussi, trois sortes de maillage ont été étudiées pour voir leur influence. La figure III.7 représente les différents blocs composant le domaine d'étude et son maillage.

a)



b)

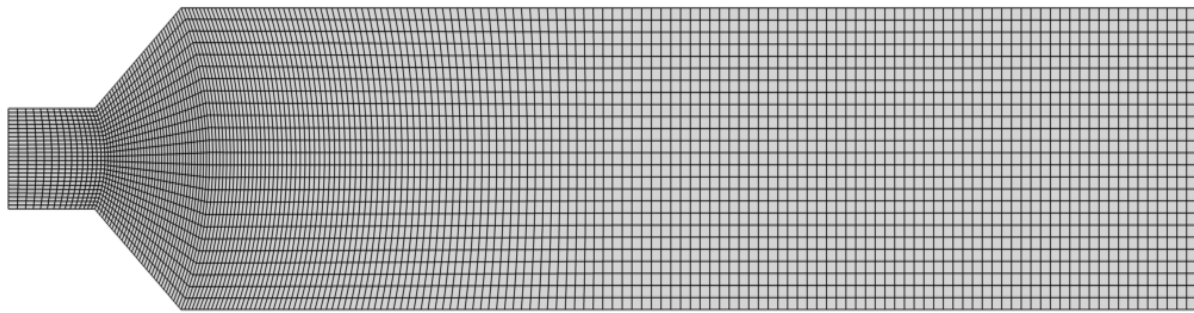


Figure III.7 : Illustration de : a) les blocs utilisés pour le maillage ; b) distribution du maillage près du plan de l'élargissement (Maillage 1, $\alpha = 45^\circ$, $-1 < x/h < 13$ et $-1.5 < y/h < 1.5$).

III.7.2 Etude de l'influence du maillage :

L'indépendance des résultats par rapport au maillage a été établie sur la base d'une analyse détaillée de trois maillages différents : fin, moyen et grossier (voir tableau III.2, [44]). Pour la variable primitive générale ϕ -longueurs de séparation et de rattachement-, la valeur de la grille convergée (c'est-à-dire extrapolée à la taille d'élément zéro) selon l'extrapolation de Richardson (Roache [42]) est :

$$\phi_{ext} = \phi_{M3} - \frac{(\phi_{M2} - \phi_{M3})}{(r^{p_r} - 1)} \quad (\text{III.17})$$

Où ϕ_{M3} est obtenue sur la base du maillage le plus fin ; ϕ_{M2} est la solution basée sur le prochain niveau de maillage grossier. $r = 2$ représente le rapport entre les espacements de maillage grossier et fin, et p_r correspond à l'ordre de précision actuel.

Avec p_r est calculé par la relation suivante :

$$p_r = \frac{\ln\left(\frac{\phi_{M3} - \phi_{M2}}{\phi_{M2} - \phi_{M1}}\right)}{\ln(r)} \quad (\text{III.18})$$

Bloc	N _x					N _y	R _x	R _y	N _c				
	α= 90°	α= 60°	α= 45°	α= 30°	α= 15°				α= 90°	α= 60°	α= 45°	α= 30°	α= 15°
M 1													
bloc I	16	16	16	16	16	26	0.935	1	375	375	375	375	375
bloc II	26	30	36	51	98	26	1	1	625	725	875	1250	2425
bloc III	71	71	71	71	71	26	1.0145	1	1750	1750	1750	1750	1750
bloc IV	267	267	267	267	267	26	1	1	6650	6650	6650	6650	6650
bloc V	71	71	71	71	71	26	1.0394	1	1750	1750	1750	1750	1750
N _{c,total}									11150	11250	11400	11775	12950
M 2													
bloc I	31	31	31	31	31	51	0.9675	1	1500	1500	1500	1500	1500
bloc II	51	59	71	101	195	51	1	1	2500	2900	3500	5000	9700
bloc III	141	141	141	141	141	51	1.0072	1	7000	7000	7000	7000	7000
bloc IV	533	533	533	533	533	51	1	1	26600	26600	26600	26600	26600
bloc V	141	141	141	141	141	51	1.0197	1	7000	7000	7000	7000	7000
N _{c,total}									44600	45000	45600	47100	51800
M 3													
bloc I	61	61	61	61	61	101	0.9837	1	6000	6000	6000	6000	6000
bloc II	101	117	141	201	389	101	1	1	10000	11600	14000	20000	38800
bloc III	281	281	281	281	281	101	1.0036	1	28000	28000	28000	28000	28000
bloc IV	1065	1065	1065	1065	1065	101	1	1	106400	106400	106400	106400	106400
bloc V	281	281	281	281	281	101	1.0098	1	28000	28000	28000	28000	28000
N _{c,total}									178400	180000	182400	188400	207200

Tableau III.2 : Domaine de calcul et caractéristiques du maillage de l'élargissement.

L'effet de la taille des éléments du maillage sur les paramètres de sortie adimensionnels tels que les longueurs de rattachements et de séparation (X_{R1} , X_{R2} , X_{R3} et X_{S3}) est testé sur trois niveaux de maillage (représentés symboliquement par *M1*, *M2* et *M3* avec : $\Delta x_{min} / h = \Delta y_{min} / h = 0.04$, 0.02 et 0.01 respectivement). Trois nombres de Reynolds généralisés ($Re_g = 360$, $Re_g = 280$ et $Re_g = 200$ pour $n = 0.6$, 0.8 et 1.0 respectivement) et deux angles d'élargissement ($\alpha = 90^\circ$ et $\alpha = 15^\circ$) ont été pris en compte (voir tableau III.3, [44]).

La valeur Er donnée dans le tableau III.3 est une quantification de la différence relative entre les longueurs de séparation et de rattachement calculées avec $M2$ et celle extrapolée. L'erreur relative maximale dans le tableau III.3 s'est avérée être d'environ 3% à $n=0.6$, $Re_g = 360$ et $\alpha = 90^\circ$ pour X_{S3} ; cette erreur est réduite à environ 2% lorsque l'angle d'élargissement est réduit à 15° . Pour $n=1$, $Re_g = 200$ et $\alpha = 90^\circ$, l'erreur relative maximale de X_{S3} s'est avérée être d'environ 1.7% et se réduit à environ 1.3% lorsque l'angle d'élargissement est réduit à 15° . Comme le montre le tableau III.3, les résultats trouvés en se basant sur le maillage $M2$ et $M3$ sont proches les uns des autres. En raison du temps de calcul particulièrement proche des deux valeurs des nombres de Reynolds généralisés critiques, le maillage $M2$ indique un bon compromis entre la précision et le temps de calcul. À noter que tous les résultats présentés ici sont basés sur l'utilisation du maillage $M2$.

Mesh	$\alpha = 90^\circ$				$\alpha = 15^\circ$			
	X_{R1}	X_{R2}	X_{S3}	X_{R3}	X_{R1}	X_{R2}	X_{S3}	X_{R3}
$n = 0.6$ et $Re_g = 360$								
$M1$	17.9336	4.6771	15.4343	25.8221	18.9735	4.5594	16.9332	24.5262
$M2$	19.8004	5.1587	17.3618	26.7936	19.8617	4.6669	18.1306	24.4165
$M3$	20.1927	5.2686	17.8060	26.8736	20.0466	4.6874	18.4244	24.3230
Extrapolée	20.2971	5.3011	17.9390	26.8808	20.0952	4.6922	18.5199	23.7834
Er (%)	2.4470	2.6861	3.2177	0.3243	1.1620	0.5398	2.1022	2.6621
$n = 0.8$ et $Re_g = 280$								
$M1$	16.3530	4.5425	13.5150	27.4222	17.6100	4.4066	14.8478	26.5802
$M2$	17.8900	4.9116	14.9962	28.5642	18.5375	4.4881	15.8010	26.8235
$M3$	18.1722	4.9840	15.2808	28.7052	18.7302	4.5035	16.0096	26.8242
Extrapolée	18.2357	5.0017	15.3485	28.7251	18.7807	4.5071	16.0680	26.8242
Er (%)	1.8955	1.8007	2.2953	0.5600	1.2951	0.4213	1.6619	0.0026
$n = 1.0$ et $Re_g = 200$								
$M1$	14.5267	4.3051	11.6985	26.3726	15.7988	4.1874	12.9551	25.7068
$M2$	15.5840	4.5662	12.6757	27.3675	16.4739	4.2479	13.6112	25.9772
$M3$	15.7670	4.6128	12.8548	27.4997	16.6133	4.2600	13.7542	25.9947
Extrapolée	15.8053	4.6229	12.8950	27.5200	16.6496	4.2630	13.7941	25.9959
Er (%)	1.4002	1.2270	1.7006	0.5540	1.0551	0.3548	1.3256	0.0720

Tableau III.3 : Tests d'influence du maillage pour $\alpha = 90^\circ$ et 15° .

Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons évoqué succinctement les différentes méthodes numériques ; puis, nous avons reporté avec plus de détails la méthode des volumes finies qui

est adoptée pour notre étude ainsi que les différents schémas de discrétisation. Aussi, nous avons présenté le code de calcul ANSYS (Fluent) utilisé pour la simulation numérique, et nous avons finalisé le chapitre par une étude d'influence du maillage pour le problème traité.

Dans le prochain chapitre, nous présenterons nos résultats de simulation numérique, leurs discussions et leur validation.



Chapitre IV

Résultats et discussions



Introduction

Dans ce chapitre, nous allons présenter les résultats de la simulation numérique de l'écoulement, d'une part, d'un fluide non-Newtonien de type d'Ostwald avec les indices d'écoulement : $n = 0.6$ et $n = 0.8$, et, d'autre part, d'un fluide Newtonien ($n = 1$), et ce en régime laminaire à travers un élargissement ayant différents angles d'ouverture (15° , 30° , 45° , 60° et 90°). Les résultats de simulation seront confrontés à des résultats obtenus par d'autres chercheurs.

IV.1 Validation des résultats :

Rappelons que pour nos simulations numériques, le solveur « Pressure Based » utilisant l'algorithme SIMPLE a été adopté ; l'organigramme de résolution est reporté dans l'annexe II.

Afin de vérifier la conformité des résultats numériques obtenus dans cette étude, une comparaison a été réalisée entre les profils de vitesse axiale obtenus dans cette étude pour un fluide Newtonien avec les résultats expérimentaux obtenus par Fearn et al. [14]. Trois valeurs du nombre de Reynolds généralisé sont testées à savoir : 34.7, 80 et 186.7 ; ces valeurs correspondent à deux Vortex symétriques, deux Vortex de taille différente et trois Vortex respectivement. Pour notre étude, le nombre de Reynolds est basé sur la hauteur à l'amont de l'élargissement et la vitesse moyenne d'entrée. La comparaison montre un excellent accord entre les résultats de la simulation et les résultats expérimentaux. Notons que pour les résultats de Fearn et al. [14], les valeurs de ces trois nombres de Reynolds sont 26, 60 et 140 respectivement où le nombre de Reynolds est basé sur la demi-hauteur à l'amont de l'élargissement et la vitesse maximale d'entrée.

Pour $Re_g = 34.7$ et pour les quatre positions (figure IV.1-a), le profil reste symétrique par rapport à la ligne de centre de l'élargissement. Les résultats montrent qu'après $x/h = 4$, les deux zones de recirculation n'ont aucun effet sur le profil de vitesse qui redevient parabolique après $x/h = 10$. Pour un nombre de Reynolds $Re_g = 80$ (figure IV.1-b), l'écoulement reste asymétrique jusqu'à $x/h = 10$ où il est à nouveau symétrique et à $x/h = 21.82$, le profil de vitesse est à nouveau parabolique. Pour $Re_g = 186.7$ (figure IV.1-c), nous observons l'existence d'une troisième zone de recirculation entre $x/h = 12.36$ et 25.80 ; à partir de $x/h = 52.06$, la vitesse retrouve son profil parabolique.

La plupart des auteurs cités dans cette étude expliquent le phénomène d'écoulement asymétrique par l'effet Coanda [14, 24, 26, 29 et 30] où toute perturbation du champ d'écoulement poussant l'écoulement principal à s'écarter de l'axe de symétrie de l'élargissement, où les vitesses sont plus grandes et les pressions sont plus petites, et, par conséquent l'asymétrie (c.-à-d. deux zones de recirculations de taille différente) tendra naturellement à augmenter [24]. Il convient également de souligner que l'apparition du plus grand Vortex sur la paroi supérieure ou inférieure est purement aléatoire [23, 24, 26, 43 et 44].

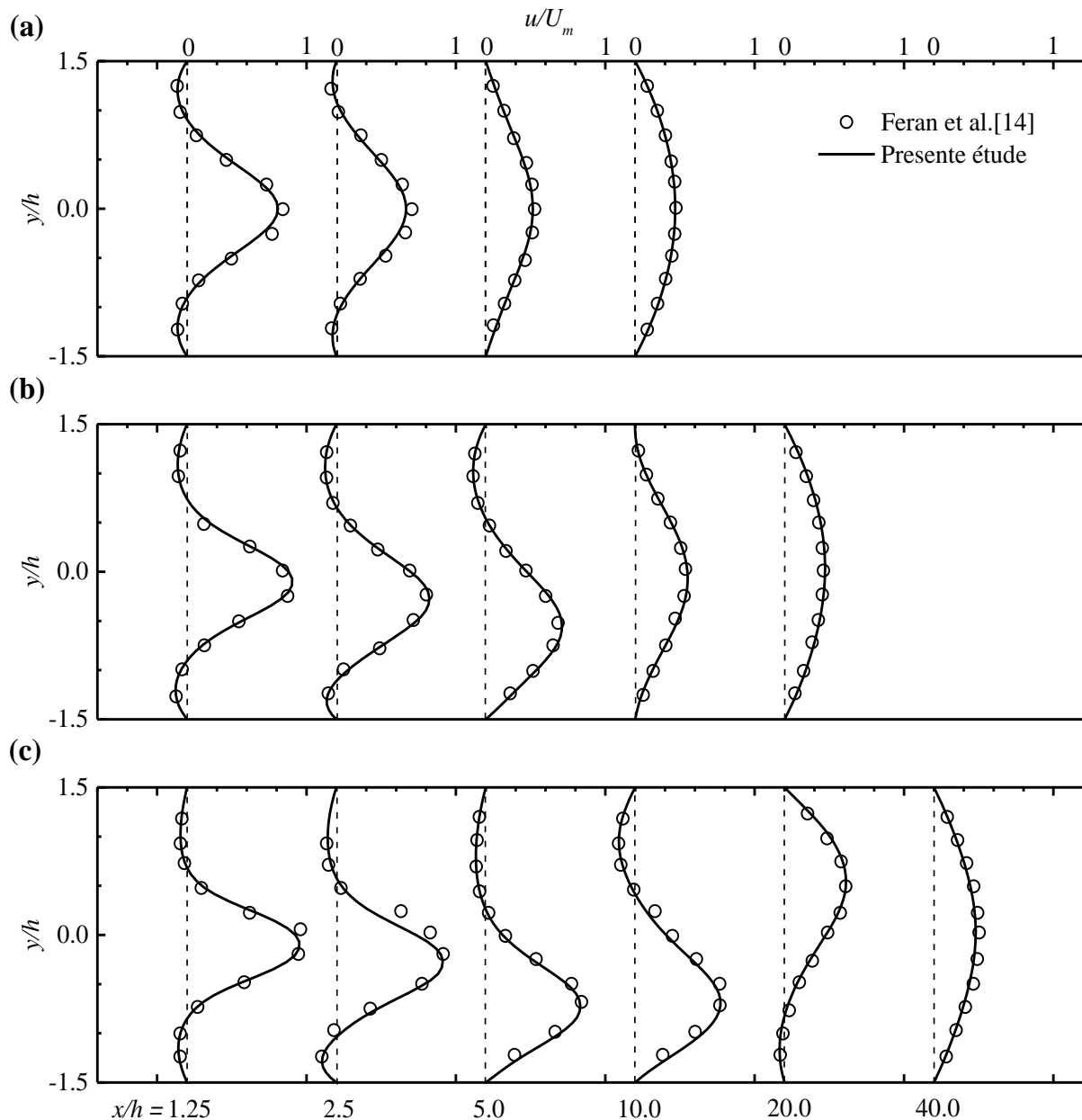


Figure IV.1 : Comparaison entre les profils de vitesse axiale obtenus numériquement dans la présente étude et ceux obtenus expérimentalement par [14] pour $n = 1.0$: (a) $Re_g = 34.7$, (b) $Re_g = 80$ et (c) $Re_g = 186.7$.

Le tableau IV.1 présente une comparaison entre les valeurs des nombres de Reynolds généralisés critiques obtenues dans cette étude et celles obtenues par certains auteurs. Pour cette comparaison, les colonnes 4 et 6 donnent les valeurs converties de Re_{gr} (respectivement $Re_{gr1}(U_m, h)$ et $Re_{gr2}(U_m, h)$). Cette conversion est effectuée pour obtenir des nombres de Reynolds généralisés basés sur la vitesse moyenne et la hauteur à l'entrée de l'élargissement. Pour les différentes valeurs de l'indice d'écoulement (n), les nombres de Reynolds généralisés critiques obtenus dans cette étude sont très proches de ceux des travaux rapportés par d'autres auteurs.

Auteur	Définition de Re	Re_{gr1}	$Re_{gr1}(U_m, h)$	Re_{gr2}	$Re_{gr2}(U_m, h)$
Newtonien ($n = 1.0$)					
Fearn et al. [14]	$U_{max}, h / 2$	40.5	53.9	-	-
Battaglia et al. [15]	U_m, h	53.8	53.8	-	-
Drikakis [16]	U_{max}, h	80	53.3	-	-
Foumeny et al. [43]	U_{max}, h	≈ 80	≈ 53.3	-	-
Schreck and Schäfer [18]	U_{max}, h	81.2	54.1	-	-
Ternik [28]	U_m, h	54	54	103.9	103.9
Dhinakaran et al. [29]	U_m, h	54.5	54.5	102.2	102.2
Présent travail [44]	U_m, h	54.4	54.4	99.4	99.4
Indice d'écoulement ($n = 0.8$)					
Ternik [28]	U_m, h	76	76	-	-
Dhinakaran et al. [29]	U_m, h	74.1	74.1	158.3	158.3
Présent travail [44]	U_m, h	78.1	78.1	152.1	152.1
Indice d'écoulement ($n = 0.6$)					
Ternik [28]	U_m, h	110	110	-	-
Dhinakaran et al. [29]	U_m, h	≈ 110	≈ 110	≈ 252	≈ 252
Présent travail [44]	U_m, h	113.1	113.1	246.9	246.9

Tableau IV.1 : Comparaison entre les travaux concernés par le phénomène d'asymétrie d'écoulement dans un élargissement brusque pour des fluides Newtoniens et non-Newtoniens.

IV.2 Caractéristique des zones de recirculations :

IV.2.1 Cas d'un élargissement brusque :

Dans cette section, nous présentons une analyse détaillée des résultats concernant l'effet de l'angle d'expansion et du comportement rhéologique sur les caractéristiques des zones de recirculations obtenues pour des Reynolds généralisés allant de 1 à 400.

Les figures IV.2 à IV.4 montrent un excellent accord entre nos prédictions et celles de Ternik [28] et de Dhinakaran et al. [29] ; cela inclut également les bifurcations observées sur ces figures dont l'apparition dépend du nombre de Reynolds généralisé et de l'indice d'écoulement.

La figure IV.2 montre la variation des longueurs des zones de recirculation supérieure et inférieure avec le nombre de Reynolds généralisé pour $n=1$ (fluide Newtonien). Lorsque $Re_g < Re_{gr1}$ ($Re_{gr1} = 54.4$), l'écoulement reste stable et symétrique (c.-à-d. $X_{R1} = X_{R2}$). La longueur des zones de recirculation croît linéairement avec Re_g .

Quand Re_g dépasse cette valeur critique, l'écoulement devient asymétrique (c.-à-d. $X_{R1} \neq X_{R2}$) et la longueur de la zone de recirculation inférieure continue à augmenter contrairement à la zone de recirculation supérieure qui continue à diminuer jusqu'à $Re_g \approx 80$. Au-delà de cette valeur, X_{R1} continue à augmenter tandis que X_{R2} varie légèrement jusqu'à $Re_g = 99.4$ (Re_{gr2}). Cette valeur correspond à l'apparition d'une troisième zone de recirculation en aval de la plus petite zone de recirculation.

En effet, la troisième zone de recirculation commence à se développer et les deux autres Vortex continuent à augmenter. Notant que la croissance de X_{R1} et X_{R3} est plus intensive que X_{R2} et X_{S3} .

Les mêmes remarques ont été observées pour les figures IV.3 et IV.4. En comparant ces deux figures avec la figure IV.2, on trouve que pour les fluides ayant des indices d'écoulement ($n = 0.6$ et $n = 0.8$), les deux transitions de l'écoulement sont retardées en raison de la diminution de la sensibilité de l'écoulement à la perturbation quand le comportement rhéologique est renforcé (n diminue) ; ceci est également trouvé par Ternik [28] et Dhinakaran et al. [29].

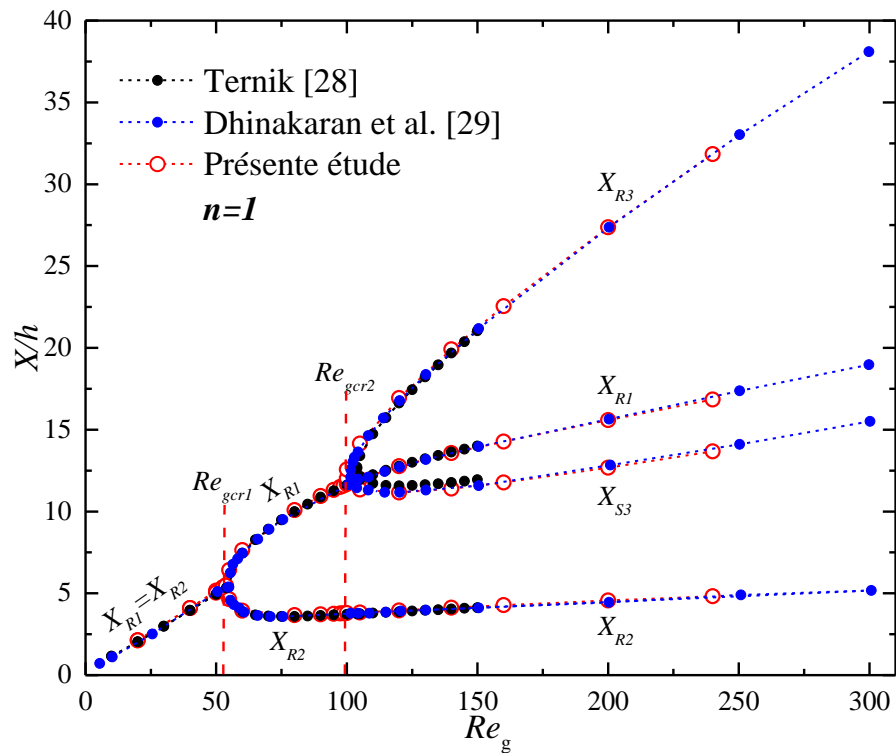


Figure IV.2 : Variation des longueurs des zones de recirculation en fonction du nombre de Reynolds généralisé pour un fluide Newtonien dans l'élargissement brusque ($\alpha = 90^\circ$) -comparaison avec les travaux antérieurs-.

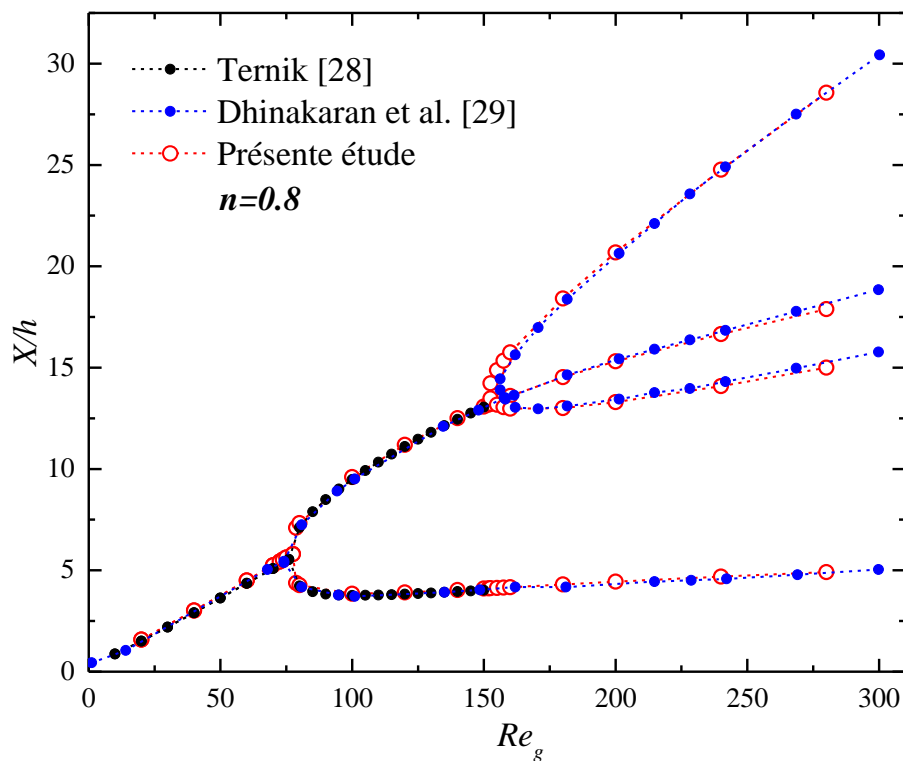


Figure IV.3 : Variation des longueurs des zones de recirculation en fonction du nombre de Reynolds généralisé pour un fluide non-Newtonien ($n = 0.8$) dans l'élargissement brusque ($\alpha = 90^\circ$) -comparaison avec les travaux antérieurs-.

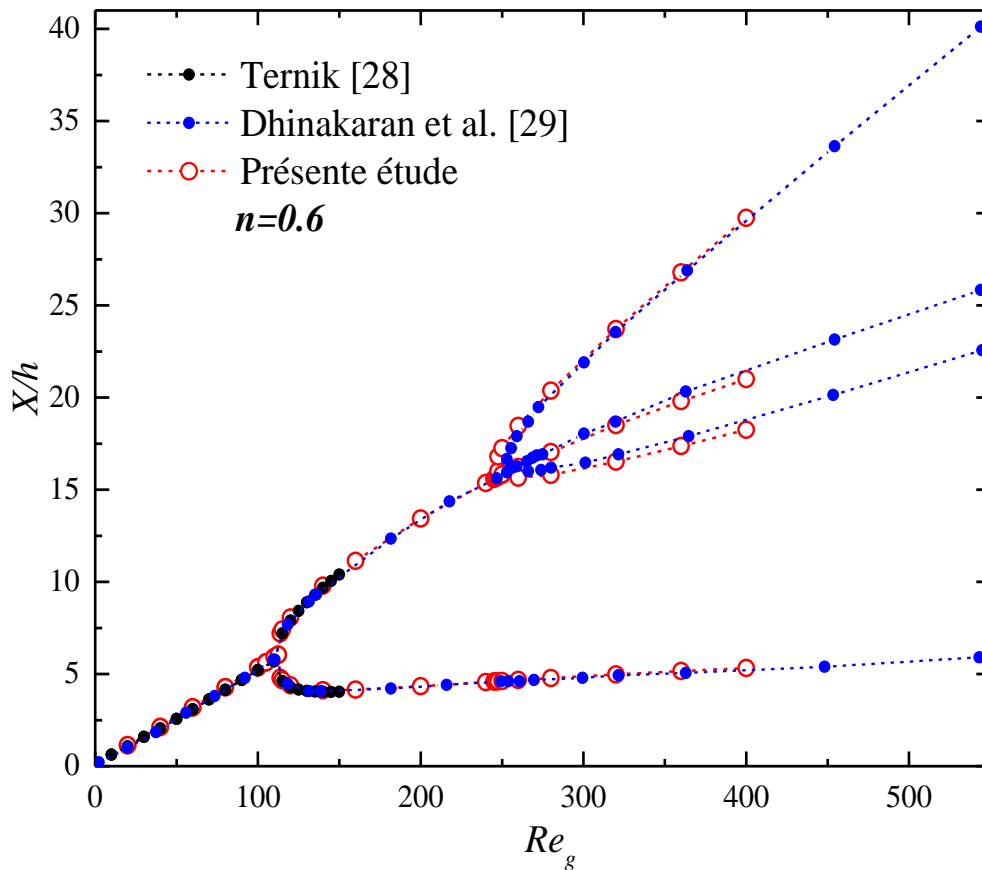


Figure IV.4 : Variation des longueurs des zones de recirculation en fonction du nombre de Reynolds généralisé pour un fluide non-Newtonien ($n = 0.6$) dans l'élargissement brusque ($\alpha = 90^\circ$) -comparaison avec les travaux antérieurs-.

IV.2.2 Cas d'un élargissement progressif :

IV.2.2.1 Influence de l'indice d'écoulement :

Les figures IV.5 et IV.6 illustrent l'influence du comportement rhéologique sur les longueurs de séparation et de rattachement des zones de recirculation pour différents angles d'ouverture. Ces figures montrent que la diminution de l'indice d'écoulement retarde les deux transitions quel que soit l'angle d'ouverture et affecte les caractéristiques des zones de recirculations.

Il est à noter que pour un même nombre de Reynolds généralisé, la distance x/h à partir de laquelle il n'y a pas de zone de recirculation diminue avec la diminution de l'indice d'écoulement. Ceci est dû à la diminution de la viscosité du fluide lorsque l'indice d'écoulement diminue ; ce résultat est similaire pour tous les angles d'ouverture.

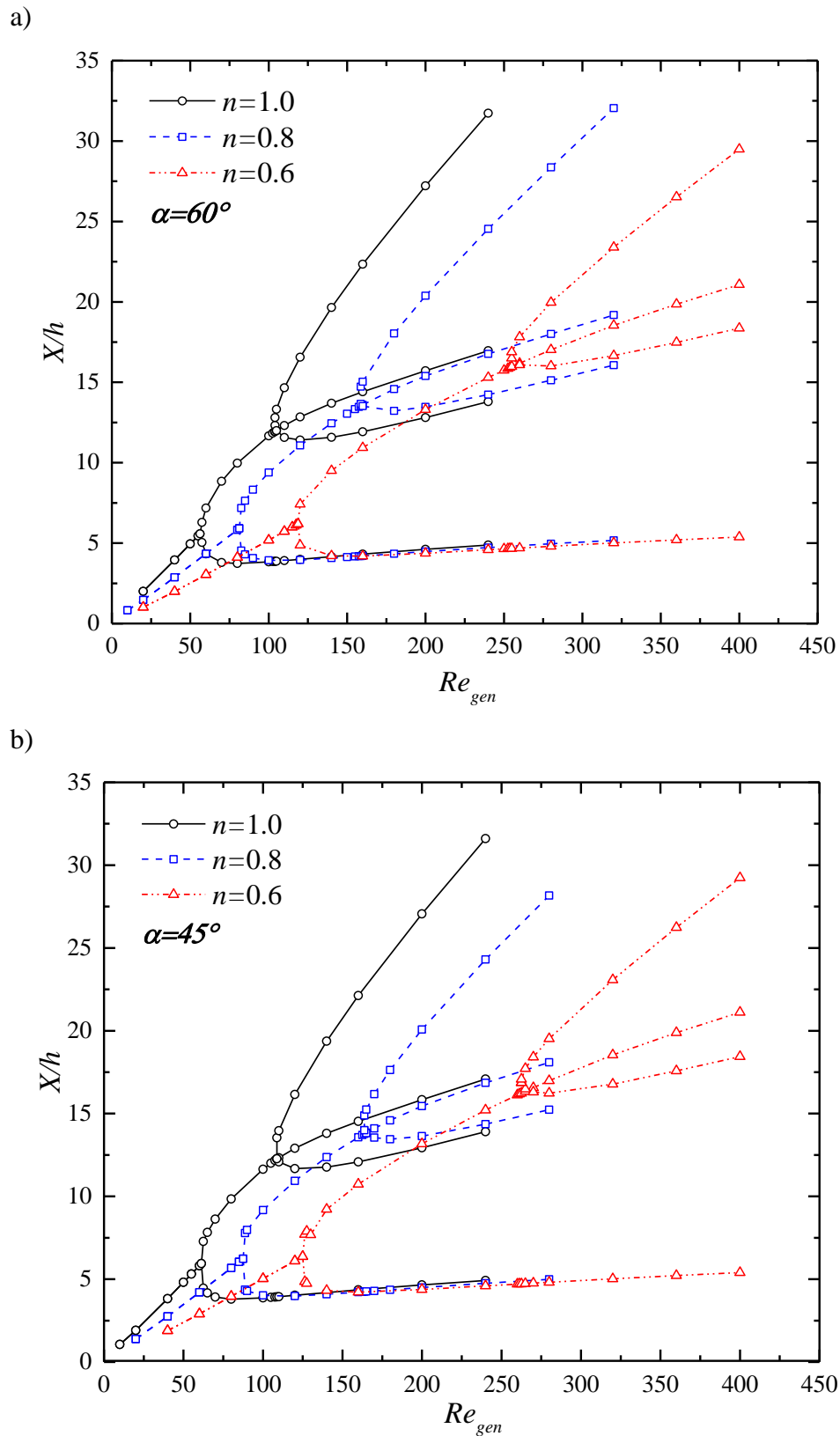


Figure IV.5 : Variation des dimensions du Vortex en fonction du nombre de Reynolds généralisé Re_g , pour $n = 1.0, 0.8$ et 0.6 , et pour différents angles d'élargissement :

a) $\alpha = 60^\circ$, b) $\alpha = 45^\circ$.

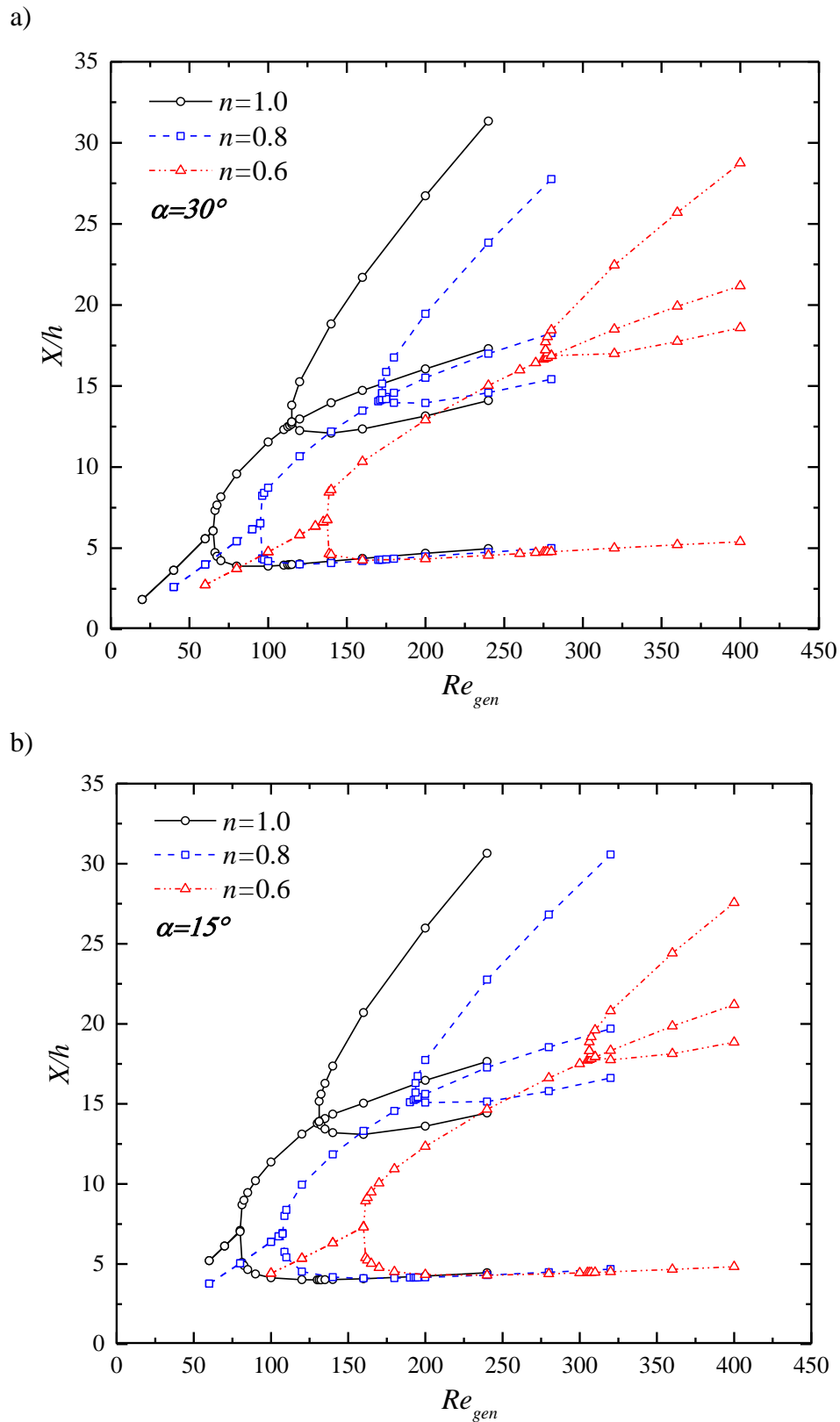


Figure IV.6 : Variation des dimensions du Vortex en fonction du nombre de Reynolds généralisé Re_g , pour $n = 1.0, 0.8$ et 0.6 , et pour différents angles d'élargissement :

a) $\alpha = 30^\circ$, b) $\alpha = 15^\circ$.

IV.2.2.2 Influence de l'angle d'ouverture de l'élargissement :

Pour observer l'effet de l'angle d'ouverture sur les longueurs de séparation et de rattachement des zones de recirculation ; ces longueurs sont tracées en fonction du nombre de Reynolds généralisé pour différents angles d'élargissement et pour le même indice d'écoulement (figures IV.7 et IV.8). Ces figures IV.7 et IV.8 montrent que la diminution de l'angle d'ouverture retarde à la fois la transition de l'écoulement symétrique à l'écoulement asymétrique et l'apparition de la troisième zone de recirculation. Ce résultat est valable pour les trois indices d'écoulement utilisés dans cette étude.

Les figures IV.5 à IV.8 montrent que la différence entre les deux nombres de Reynolds généralisés critiques ΔRe_{ger} augmente soit avec la diminution de l'indice d'écoulement, soit avec celle de l'angle d'ouverture. Pour les différents angles d'élargissement et indices de loi de puissance utilisés, on peut noter que le nombre de Reynolds généralisé n'a aucune influence sur la longueur X_{R2} à partir de certaines valeurs (en fonction de n et de α).

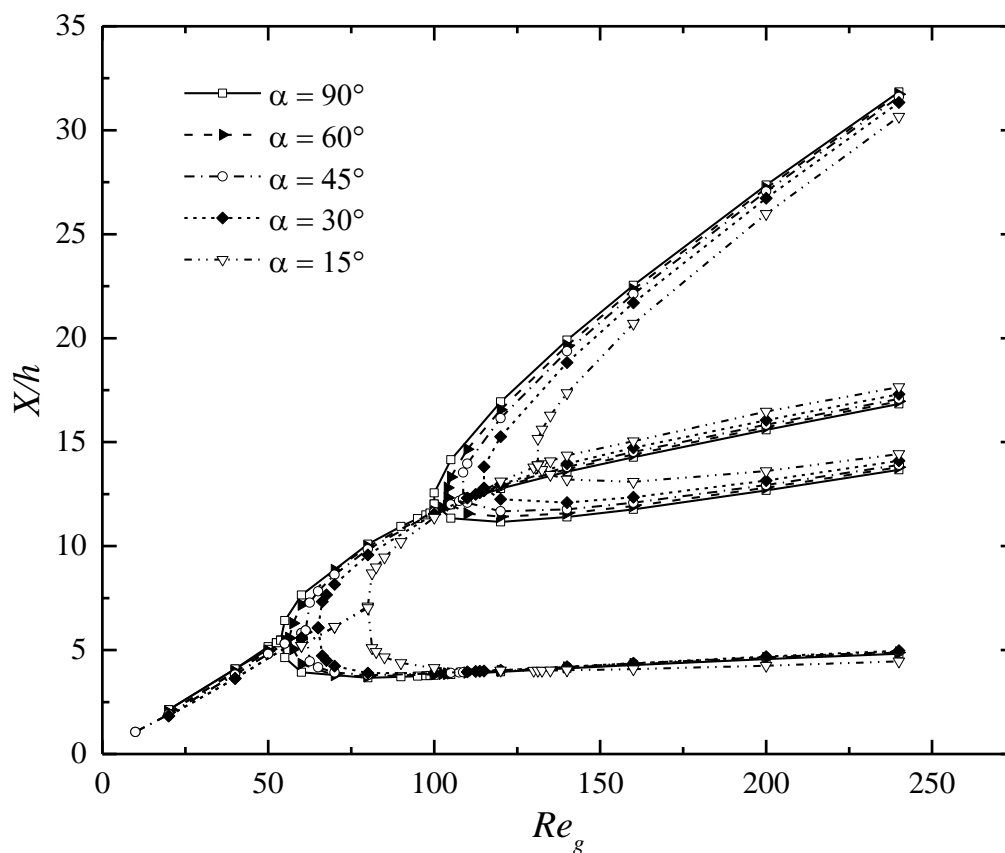


Figure IV.7 : Variation des dimensions du Vortex en fonction du nombre de Reynolds généralisé Re_g , pour différents angles d'élargissement -cas du fluide Newtonien ($n = 1$)-.

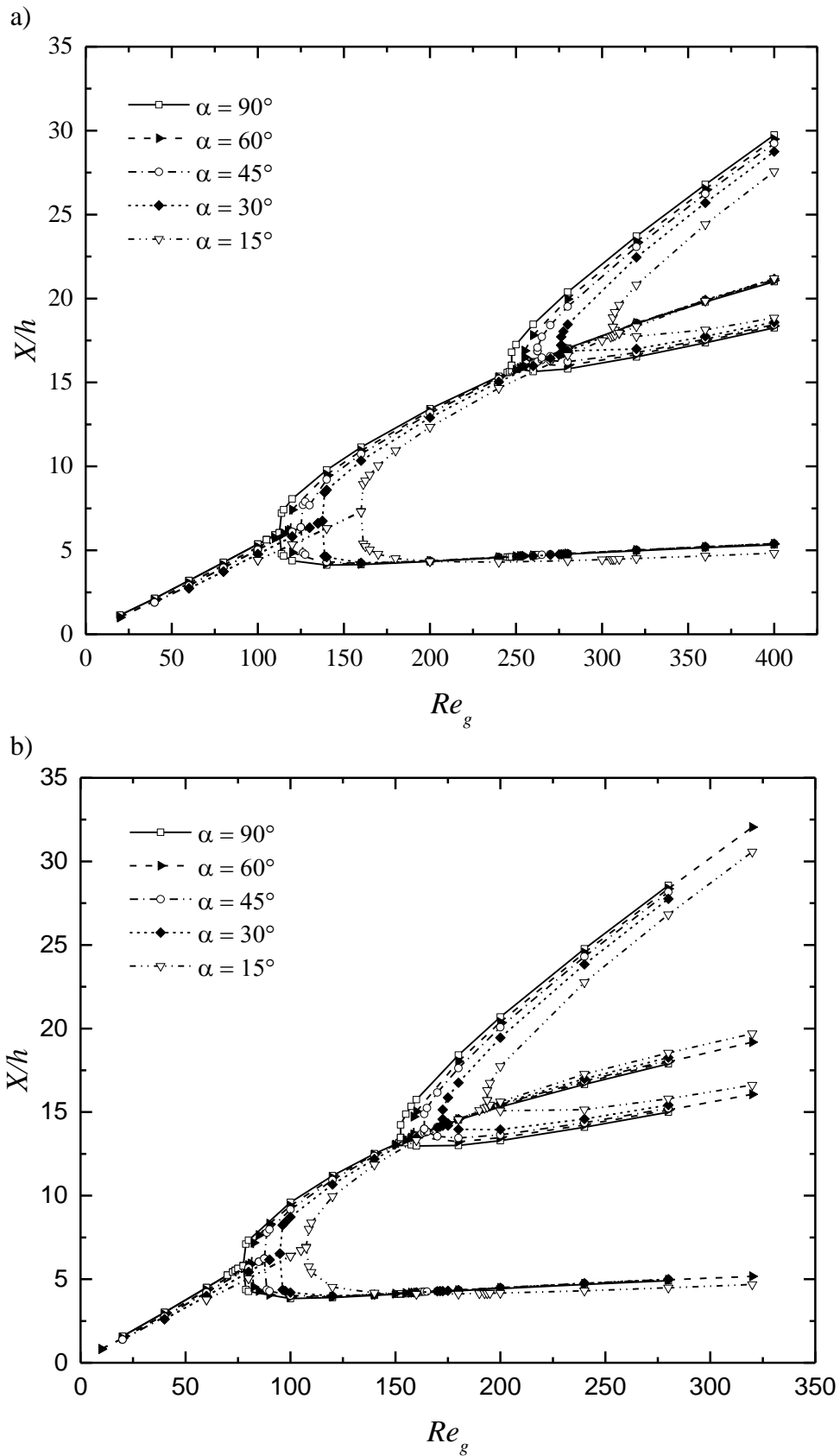


Figure IV.8 : Variation des dimensions du Vortex en fonction du nombre de Reynolds généralisé Re_g , pour différents angles d'élargissement et différents indices d'écoulement :

a) $n = 0.6$, b) $n = 0.8$.

IV.2.3 Variation du gradient de pression le long de l'axe de symétrie de l'élargissement :

La variation du gradient de pression avec la distance axiale, pour différents indices d'écoulement et angles d'ouverture, est illustrée sur la figure IV.9 à deux Re_g (100, 200). Cette variation est représentée par les courbes de la chute de pression adimensionnelle (normalisée par la pression dynamique $0.5\rho U_m^2$) le long de l'axe de symétrie.

En amont de l'élargissement ($x/h < 0$), la chute de pression est linéaire indiquant que l'écoulement est pleinement développé pour les différents indices d'écoulement.

Lorsque le fluide passe dans le plan de l'élargissement ($x/h \geq 0$), la pression locale augmente en raison de la décélération du fluide dans la section avale. Par la suite, la distribution de la pression revient à la variation linéaire dans la section avale de l'élargissement.

Pour l'écoulement à Re_g élevé, la variation de pression est plus complexe et reflète les différentes longueurs de rattachement de petits et de grands Vortex asymétriques définis par les points d'inflexion visible dans les courbes comme suggéré dans les références [12, 16].

Par rapport au fluide Newtonien, la distribution de pression dans le cas d'un fluide non-Newtonien présente des gradients plus grands. La récupération de pression après l'élargissement est plus faible lorsque (n) diminue.

Pour le même indice d'écoulement, l'augmentation du nombre de Reynolds critique lorsque l'angle d'ouverture diminue est due au changement de pression.

Aussi, la réduction de l'angle d'élargissement entraîne une diminution progressive de la section et donc une augmentation progressive de la pression, ce qui stabilise l'écoulement.

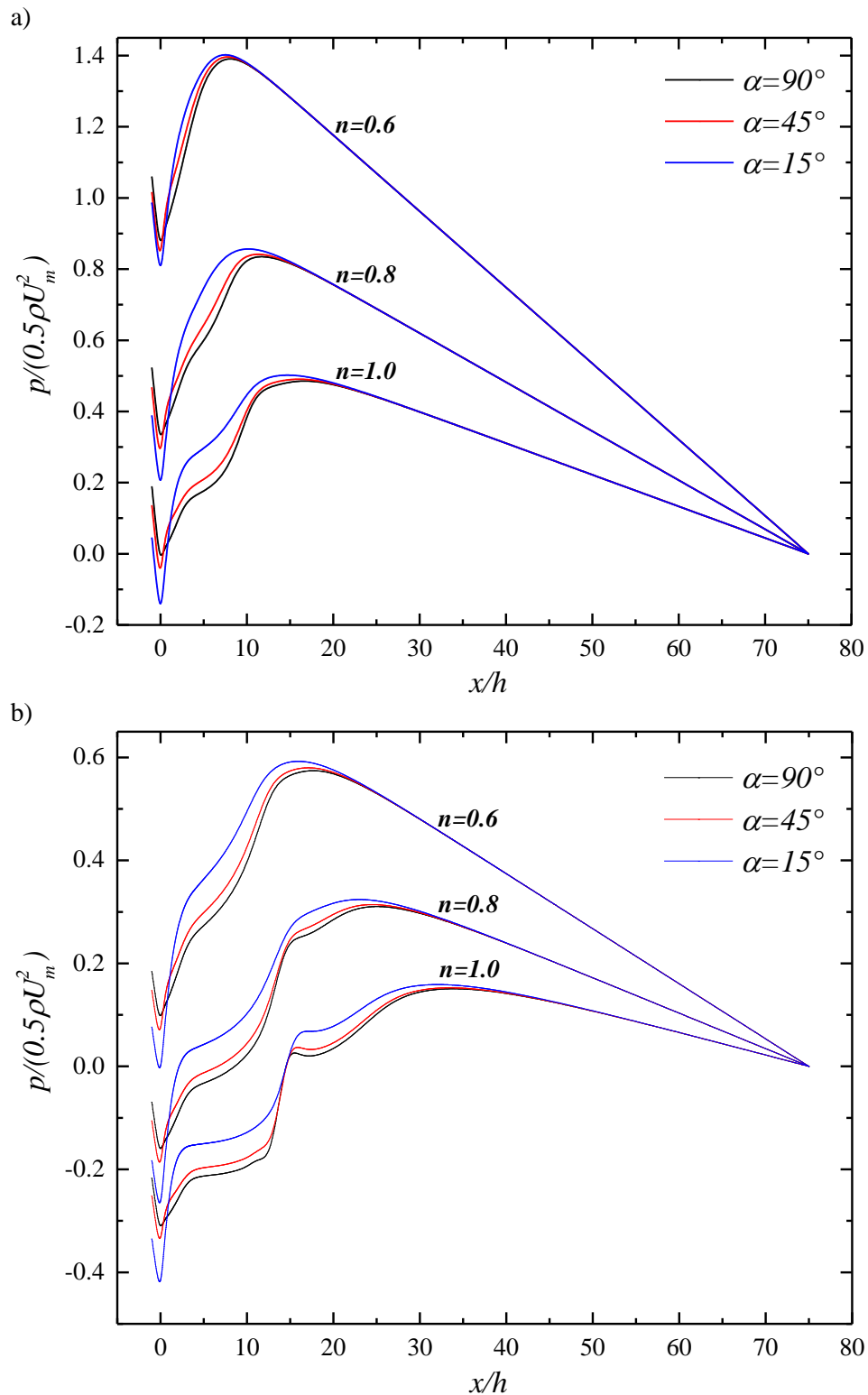


Figure IV.9 : Variation de pression normalisée le long de l'axe de symétrie de l'élargissement : a) $Re_g = 100$, b) $Re_g = 200$.

IV.3 Structure de l'écoulement :

Pour illustrer l'effet du comportement rhéologique et de l'angle d'élargissement sur la structure d'écoulement, les tracés des lignes de courant sont présentés sur les figures IV.10 à

IV.12 pour des angles d'ouverture différents : 90° , 45° et 15° respectivement. Pour toutes ces figures, les lignes de courant sont tracées pour trois indices de loi de puissance (n) et pour trois régimes différents ; ces derniers sont choisis comme ceux adoptés par Dhinakaran et al. [29] ; à savoir :

- i) un écoulement symétrique ($Re_g = 0.8Re_{gcr1}$),
- ii) un écoulement asymétrique : [$Re_g = 0.5(Re_{gcr1} + Re_{gcr2})$],
- iii) un écoulement asymétrique avec une troisième zone de recirculation ($Re_g = 1.2Re_{gcr2}$).

Le choix de ces trois régimes est dû aux fortes variations des deux valeurs du nombre de Reynolds généralisé critique avec l'indice d'écoulement.

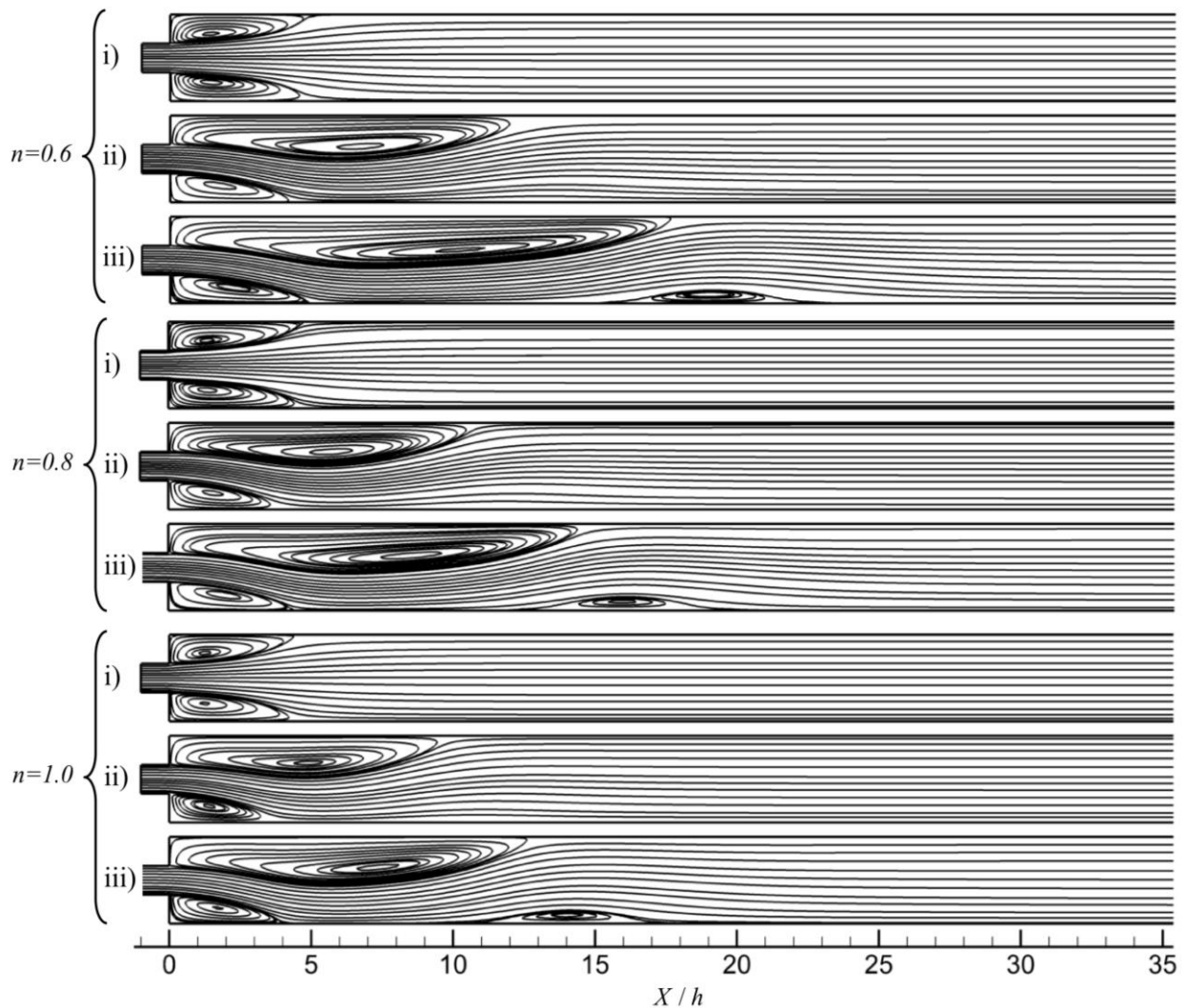


Figure IV.10 : Structure d'écoulement dans un élargissement brusque ($\alpha = 90^\circ$) pour différents indices d'écoulement $n = 0.6$, $n = 0.8$ et $n = 1.0$.

Pour l'élargissement brusque (figure IV.10), il est visible que pour les trois régimes mentionnés ci-dessus, les longueurs des trois Vortex augmentent avec la diminution de l'indice d'écoulement. La même observation est valable pour les élargissements graduels $\alpha = 45^\circ$ et 15° (figures IV.11 et IV.12).

En comparant les figures IV.10, IV.11 et IV.12, nous pouvons observer que la diminution de l'angle d'élargissement fait augmenter les longueurs de tous les Vortex. On peut voir aussi que la largeur de la petite zone de recirculation « coin » diminue dans le cas du troisième régime à la fois avec la diminution de l'angle d'ouverture ou avec l'augmentation de l'indice d'écoulement.

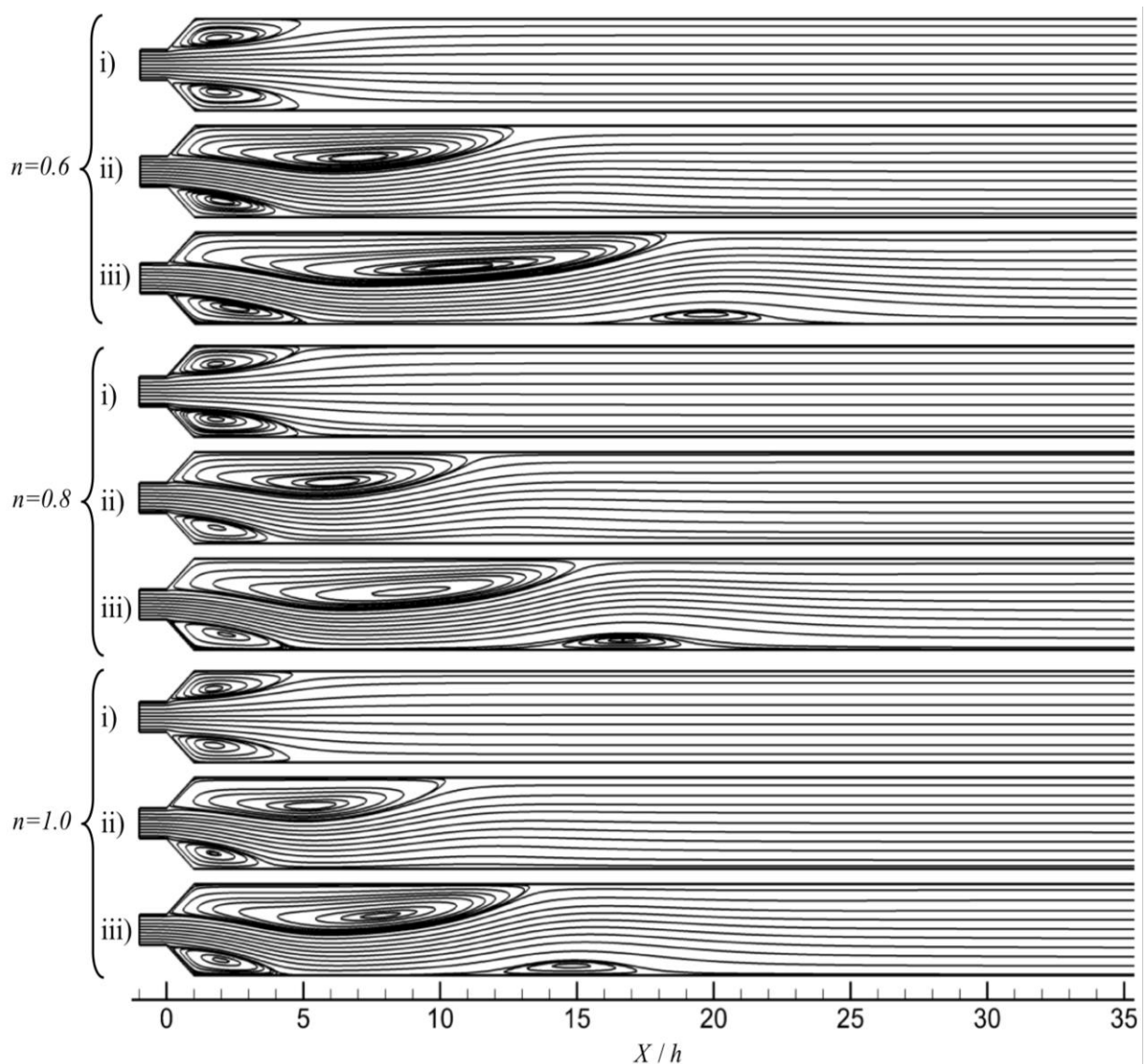


Figure IV.11 : Structure d'écoulement dans un élargissement brusque ($\alpha = 45^\circ$) pour différents indices d'écoulement $n = 0.6$, $n = 0.8$ et $n = 1.0$.

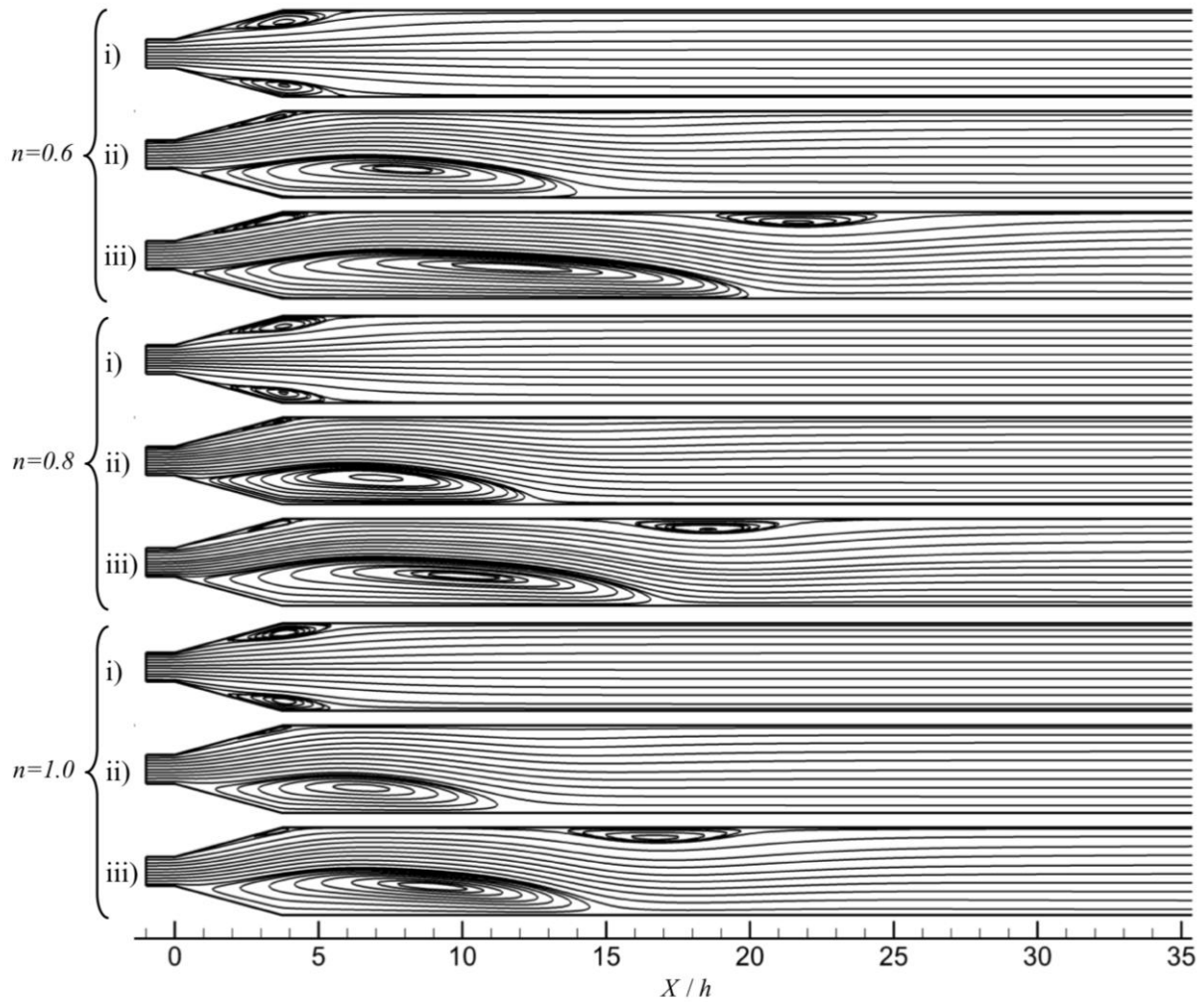


Figure IV.12 : Structure d'écoulement dans un élargissement brusque ($\alpha = 15^\circ$) pour différents indices d'écoulement $n = 0.6$, $n = 0.8$ et $n = 1.0$.

IV.4 Détermination des modèles des deux nombres de Reynolds généralisés critiques :

Afin de déterminer les corrélations des deux nombres de Reynolds généralisés critiques en fonction de n et α , une modification prenant en compte l'effet de l'angle d'élargissement a été effectuée sur les deux modèles de Dhinakaran et al. [29] proposés pour un élargissement brusque. Ces deux corrélations (équations (IV.1) et (IV.2)) sont déterminés à partir des données des simulations numériques [44] ; à savoir :

$$Re_{gcr1} = \frac{112 + 92e^{-0.038\alpha}}{\sinh(1.5n)} + \frac{1}{\cosh(0.5n)} \quad (\text{IV.1})$$

$$Re_{gcr2} = \frac{565 + 162e^{-0.046\alpha}}{\sinh(3n)} + \frac{66 + 74.5e^{-0.048\alpha}}{\cosh(n)} \quad (\text{IV.2})$$

La comparaison entre les données numériques et les deux modèles proposés est représentée sur la figure IV.13 où l'erreur maximale obtenue est de 3.2 % et 1.24 % pour les équations (IV.1) et (IV.2) respectivement.

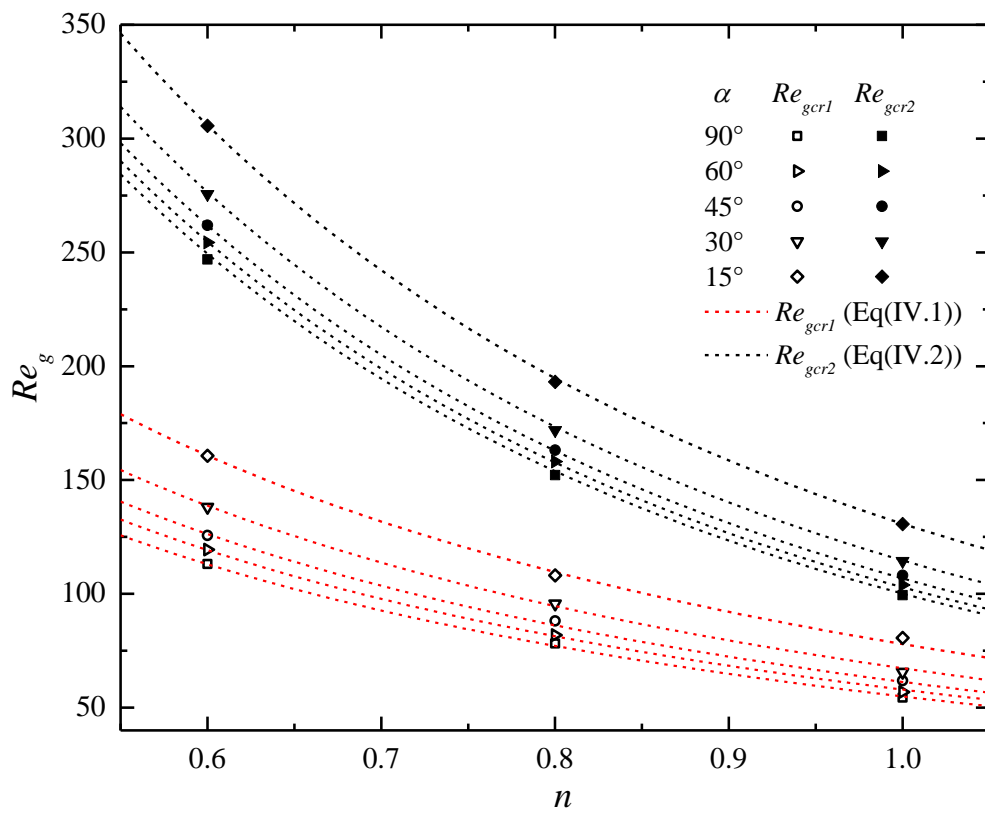
La figure IV.13 montre aussi la variation des deux nombres de Reynolds généralisés critiques Re_{gcr1} et Re_{gcr2} en fonction de n et α . Dans cette figure, comme il est indiqué précédemment, la diminution de l'indice de la loi de puissance ou de l'angle d'ouverture stabilise l'écoulement en augmentant de manière significative les deux nombres de Reynolds généralisés critiques. Ainsi, on peut voir que la variation de Re_{gcr2} en fonction de n est plus rapide que celle de Re_{gcr1} .

Les résultats obtenus précédemment ont montré l'effet de l'indice d'écoulement et de l'angle d'élargissement sur la structure d'écoulement (zones de recirculation) mais aucune indication des valeurs du nombre de Reynolds à partir duquel ces zones apparaissent ($Re_{g,RA}$). À cet effet, le tableau IV.2 montre les valeurs de $Re_{g,RA}$ en fonction de n et de α où on remarque la valeur de $Re_{g,RA}$ augmente avec la diminution de l'indice d'écoulement ou de l'angle d'élargissement [44]. Les résultats obtenus dans cette étude montrent que pour l'élargissement brusque ($\alpha = 90^\circ$), l'écoulement s'accompagne toujours d'une zone de recirculation. Ce résultat est similaire à celui trouvé par Dhinakaran et al. [29] et Ternik [45] qui ont constaté que ces zones sont présentes même pour de très faibles valeurs du nombre de Reynolds généralisé (jusqu'à 0.01).

$\alpha(^{\circ})$	$Re_{g,RA}$			
	60	45	30	15
$n = 1.0$	1.88	9.38	19.38	43.13
$n = 0.8$	5.63	14.38	27.13	59.38
$n = 0.6$	10.63	23.13	40.63	85.63

Tableau IV.2 : Comparaison des valeurs de $Re_{g,RA}$ pour différents angles d'élargissement et indices d'écoulement.

a)



b)

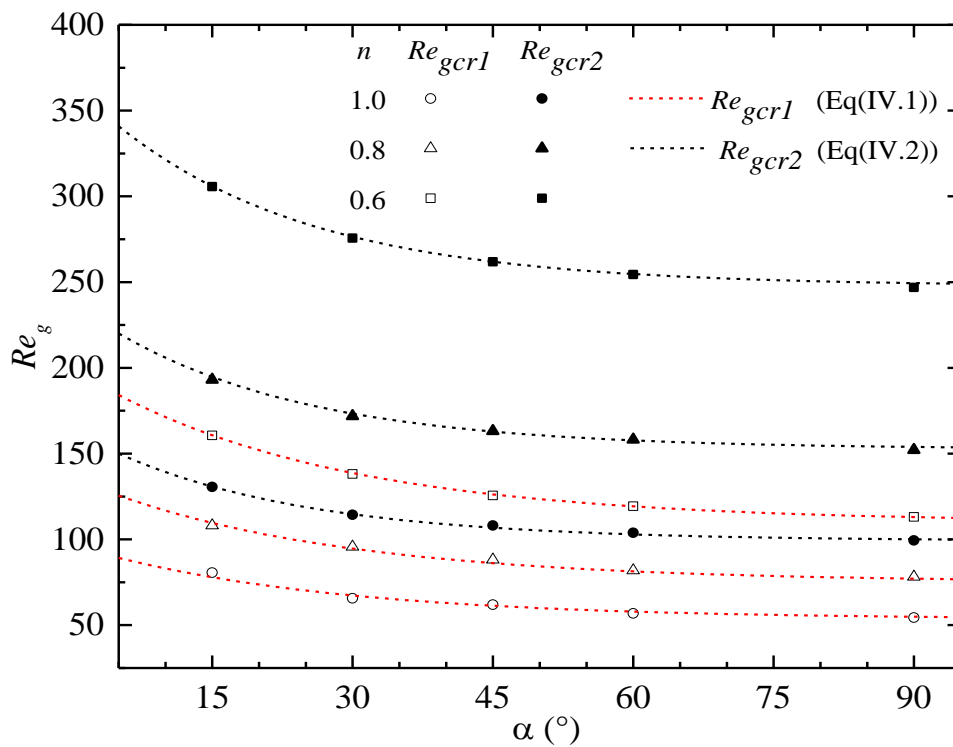


Figure IV.13 : Variation des deux nombres de Reynolds généralisés critiques en fonction :
 a) de l'indice d'écoulement (n) ; b) de l'angle d'élargissement (α).

IV.5 Redéveloppement de l'écoulement :

La longueur de redéveloppement X_d est définie ici comme étant la longueur (d'après le plan d'élargissement) requise pour que la vitesse sur l'axe de symétrie diminue jusqu'à 101% de sa valeur pleinement développée ($U_{c,fd}$). Ce pourcentage est choisi au lieu de 99%, car la vitesse sur l'axe de symétrie en aval de l'élargissement est toujours diminuée et n'augmente pas comme dans une conduite ou un canal (voir la figure IV.14).

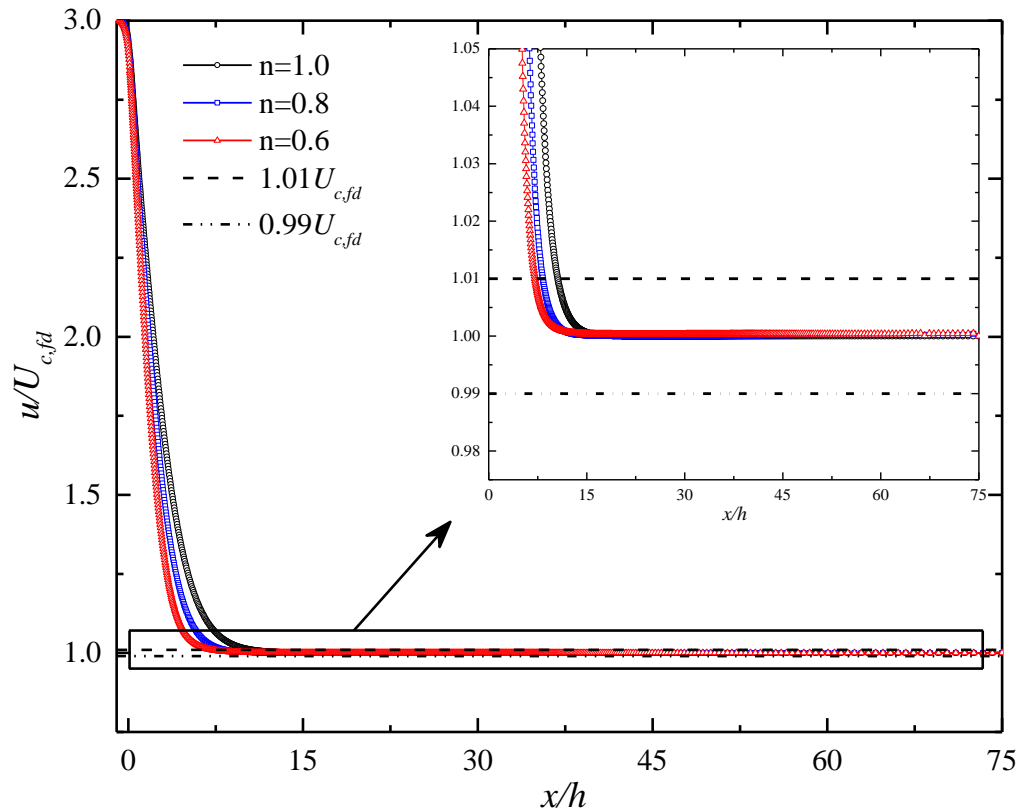


Figure IV.14 : Variation de la vitesse normalisée le long de l'axe de symétrie de l'élargissement brusque à $Re_g = 40$ pour différents indices d'écoulement.

Comme le montre la figure IV.15, le comportement rhéologique a un effet significatif sur la longueur de redéveloppement tandis que l'angle d'élargissement a un léger effet. La longueur de redéveloppement est réduite avec la diminution de l'indice de la loi de puissance ou de l'angle d'ouverture.

Afin de prédire la longueur de redéveloppement adimensionnelle dans un élargissement brusque ($\alpha = 90^\circ$) d'un fluide qui suit la loi de puissance, nous présentons la corrélation suivante dérivée des données de simulations numériques et inspirée des travaux de Durst et al. [46] ; soit :

$$X_d / h = \left[(1.29 + 5.89e^{-0.91n})^{1.6} + (0.057e^{1.6n} Re_g - 2)^{1.6} \right]^{1/1.6} \quad (IV.3)$$

À noter que cette corrélation est testée pour les valeurs de n et de α utilisées dans cette étude. La longueur de redéveloppement adimensionnelle, obtenue à partir de simulations numériques est comparée à celle de l'équation (IV.3), est représenté sur la figure IV.15. Un excellent accord est observé entre les résultats des simulations numériques et ceux de l'équation IV.3 avec une erreur moyenne d'environ 2%. Aussi, cette figure montre également une comparaison entre nos résultats et ceux trouvés par Ternik et al. [26] dans le cas du fluide Newtonien. La comparaison montre un bon accord et confirme la conformité de nos résultats numériques.

Pour l'élargissement progressif avec les différents angles, la figure IV.15 montre aussi que l'angle d'ouverture n'a pas d'effet significatif sur la longueur de redéveloppement pour un fluide Newtonien ($n=1$). Lorsque (n) diminue, les résultats numériques s'écartent légèrement du modèle avec la diminution de l'angle d'élargissement et l'augmentation du nombre de Reynolds généralisé.

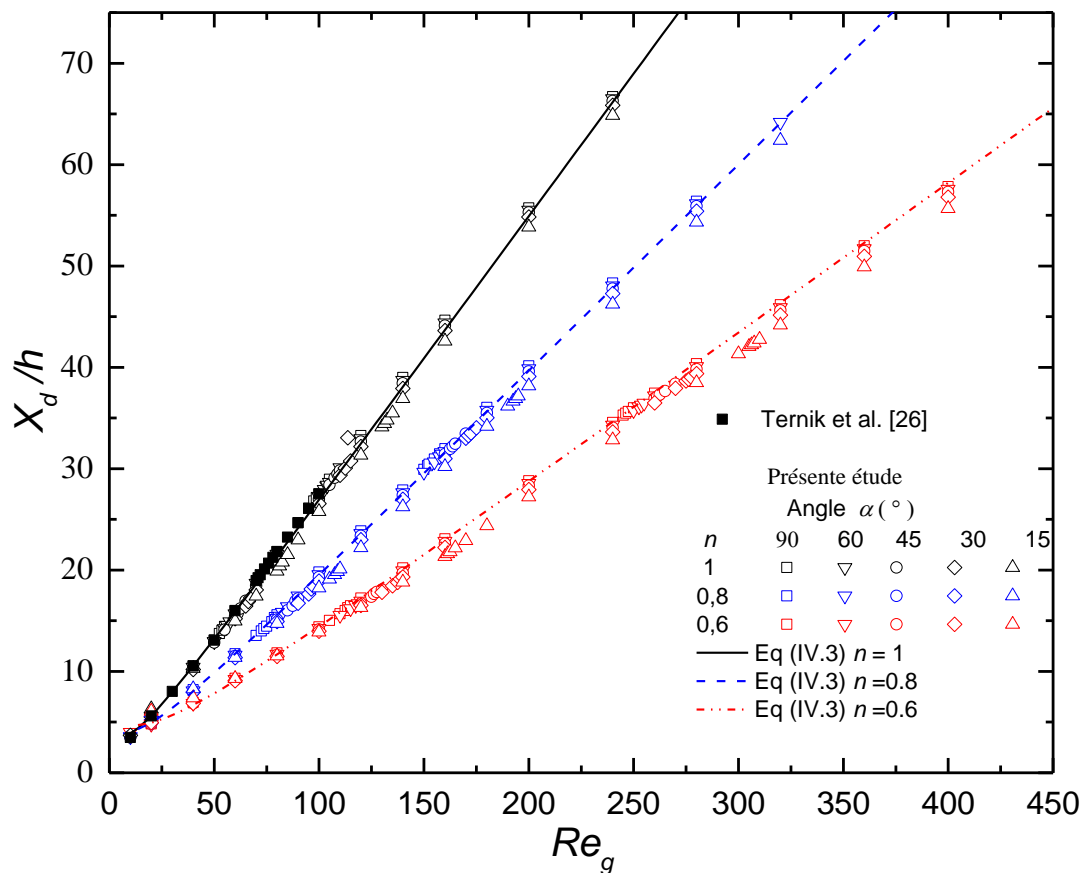


Figure IV.15 : Effet de l'indice d'écoulement (n) et de l'angle d'élargissement (α) sur la longueur de redéveloppement.

Lorsque l'équation (IV.3) est appliquée pour calculer la longueur de redéveloppement pour des angles d'ouvertures inférieure à 90° , l'erreur est de l'ordre d'environ 7%. Afin de réduire cette erreur, il faut appliquer l'équation qui suit :

$$X_d / h = \left[(1.29 + 5.89 e^{-0.91n})^{1.6} + f(\alpha) (0.057 e^{1.6n} Re_g - 2)^{1.6} \right]^{1/1.6} \quad (IV.4)$$

Où

$$f(\alpha) = 1.0027 - 0.1316 e^{-0.04618\alpha} \quad (IV.5)$$

À noter que l'équation (IV.4) prend en compte l'angle d'élargissement et offre une erreur de 1.7%.

IV.6 Correction de Couette :

La variation du coefficient de correction de Couette C en fonction du nombre de Reynolds généralisé Re_g est illustrée sur la figure IV.16 pour un élargissement brusque ($\alpha = 90^\circ$) et pour différentes valeurs d'indice d'écoulement. Cette figure montre aussi une comparaison de nos résultats avec ceux de Dhinakaran et al. [29] ; la comparaison montre un excellent accord et confirme la conformité de nos résultats numériques.

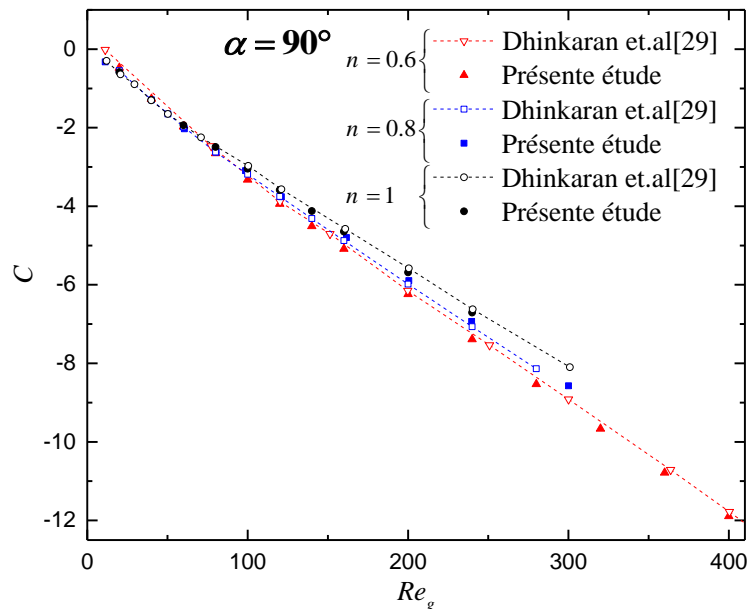


Figure IV.16 : Comparaison du coefficient de Couette de la présente étude avec celui de [29] pour un élargissement brusque.

D'après cette figure, on remarque que le coefficient de correction de Couette est toujours en diminution avec l'augmentation Re_g et que cette diminution est légèrement plus grand lorsque (n) diminue, ceci est dû à la diminution de la viscosité du fluide.

Pour l'élargissement progressif ($\alpha < 90^\circ$), les mêmes remarques restent valables sauf pour l'angle $\alpha = 15^\circ$ où on remarque une petite augmentation de (C) lors de l'apparition des zones de recirculation puis une diminution avec l'augmentation Re_g .

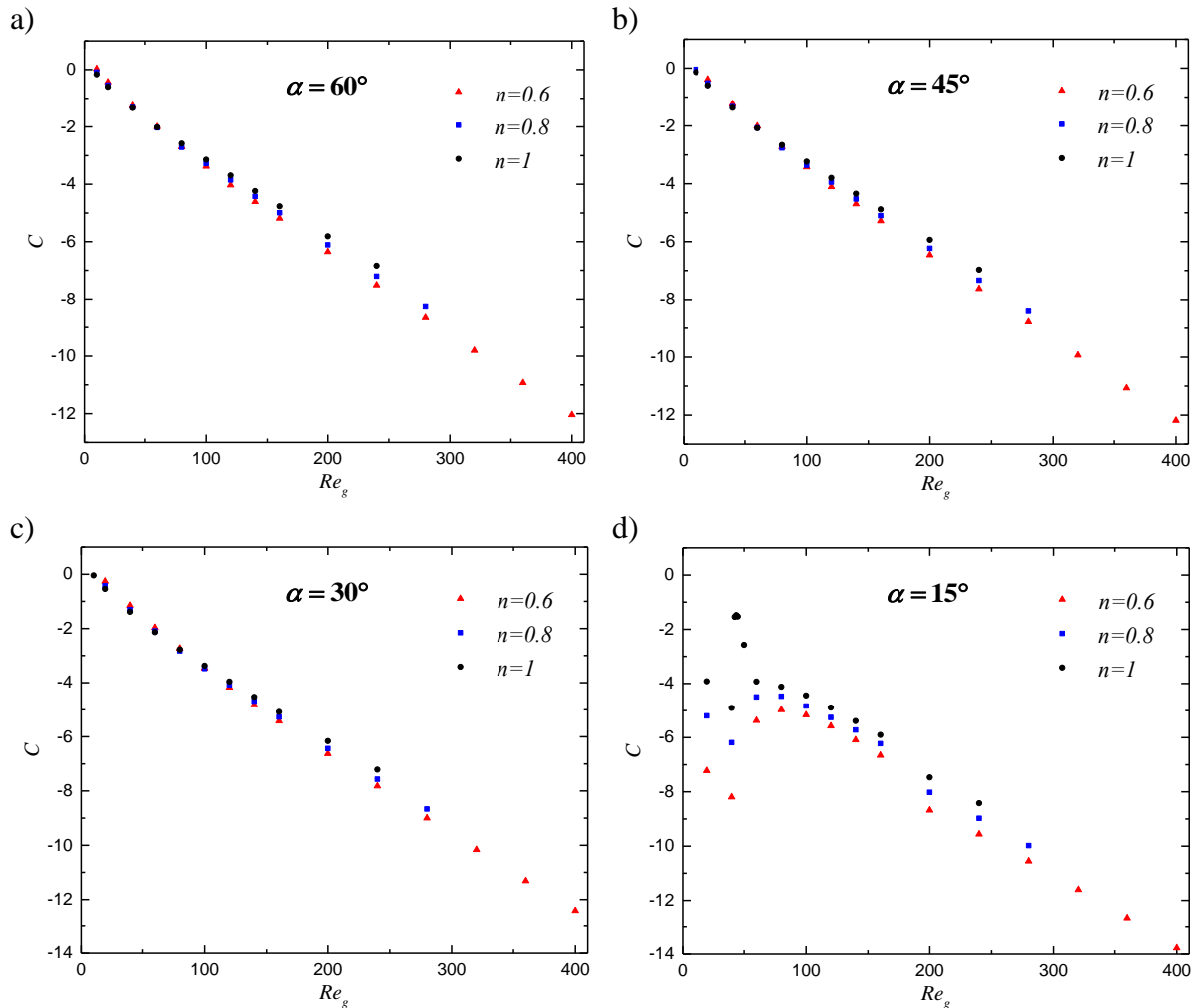


Figure IV.17 : Variation du coefficient de Couette en fonction du Re_g pour différents indices d'écoulement $n = 0.6, 0.8$ et 1 : a) $\alpha = 60^\circ$, b) $\alpha = 45^\circ$, c) $\alpha = 30^\circ$ et d) $\alpha = 15^\circ$.

Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons procédé à la simulation numérique de l'écoulement de fluides Newtonien et non-Newtonien. Les résultats que nous avons obtenus ont montré un très bon accord avec ceux validés par d'autres chercheurs. Plusieurs simulations numériques ont été réalisées pour différents angles d'ouverture et indices d'écoulement. Les résultats, objet de la confrontation, concernent les zones de recirculations, la longueur de redéveloppement de l'écoulement ainsi que le coefficient de correction de Couette. Finalement, des corrélations ont été proposées pour modéliser les deux nombres de Reynolds généralisés critiques ainsi que la longueur de redéveloppement de l'écoulement.



Conclusion générale et perspectives



Dans la présente thèse, nous avons mené une étude numérique de l'écoulement laminaire, à travers un élargissement progressif de rapport 1:3, de fluides Newtonien et non-Newtonien ; ce dernier pouvant être représenté sur le plan rhéologique par le modèle d'Ostwald. La validation de nos simulations, effectuées sous le code de calcul ANSYS (Fluent), a montré une bonne concordance entre nos résultats et ceux obtenus par d'autres chercheurs.

Pour notre travail, nous avons considéré la variation de différents paramètres tels que l'indice d'écoulement, l'angle d'élargissement et le nombre de Reynolds généralisé. À cet effet, nous avons considéré trois valeurs (0.6, 0.8 et 1.0) pour l'indice d'écoulement (n), cinq valeurs (15° , 30° , 45° , 60° et 90°) pour l'angle d'élargissement (α), et un intervalle ($1 \leq Re_g \leq 400$) pour le nombre de Reynolds généralisé.

La prise en charge de la variation de ces paramètres, nous a conduit à un nombre et un temps de simulations importants. Aussi, les résultats de simulation indiquent une grande dépendance de la structure de l'écoulement avec la variation de ces paramètres et nous permettent de dégager ce qui suit :

- * La diminution de l'indice d'écoulement ou de l'angle d'élargissement stabilise l'écoulement en augmentant de manière significative les deux nombres de Reynolds généralisés critiques en raison de la diminution du gradient de pression transverse.

- * La valeur du nombre de Reynolds généralisé à partir duquel apparaît la zone de recirculation augmente lorsque l'indice d'écoulement ou l'angle d'élargissement sont réduits. Tandis que l'écoulement à travers un élargissement brusque ($\alpha = 90^\circ$) est toujours accompagné d'une zone de recirculation.

- * Le comportement rhéologique a un effet significatif sur la longueur de redéveloppement tandis que l'angle d'élargissement a un léger effet.

De plus, l'étude nous a permis de déterminer deux nombres de Reynolds généralisés critiques qui correspondent respectivement au passage de l'écoulement symétrique à l'asymétrique et à l'apparition de la troisième zone de recirculation. Afin de prédire ces deux nombres de Reynolds généralisés critiques, deux corrélations ont été proposées.

Aussi à travers la présente étude, nous espérons fournir des données de référence, pour cette gamme d'écoulement et de fluide, relatives aux longueurs des zones de recirculation, la longueur de redéveloppement, le coefficient de Couette, et aux deux nombres de Reynolds

critiques marquant le début de la première transition de symétrie à l'écoulement asymétrique et marquant le deuxième passage de l'écoulement asymétrique à l'écoulement asymétrique avec un troisième Vortex.

Perspectives :

Ce travail mérite d'être élargi par des études complémentaires pour mieux comprendre les phénomènes accompagnant l'écoulement d'un fluide à travers un élargissement ; pour cela, nous suggérons ce qui suit :

- L'étude de l'écoulement d'autres types de fluide (Bingham, Herschel–Bulkley).
- Analyser la transition de régime d'écoulement du laminaire au turbulent.
- L'intégration de l'effet thermique.
- De mener une étude tridimensionnelle.



Annexe



Annexe I

UDF pour Re = 100 et n = 0.6

```

/*****
Concatenated UDFs for fully-developed laminar inlet profiles
*****/

#include "udf.h"

#define YMIN -0.5 /* constants */
#define YMAX 0.5
#define UMEAN 0.32303313
#define n 0.6

/* profile for x-velocity */
DEFINE_PROFILE(x_velocity,t,i)
{
    real y, del, h, x[ND_ND], ufree; /* variable declarations */
    face_t f;
    h = YMAX - YMIN;
    del =0.5*h;
    ufree = UMEAN;
    begin_f_loop(f,t)
    {
        F_CENTROID(x,f,t);
        y = x[1];
        F_PROFILE(f,t,i) = ufree*((2.*n+1.)/(n+1.))*(1.-pow((pow(pow((y/del),2.),0.5)),(n+1.)/n));
    }
    end_f_loop(f,t)
}

```

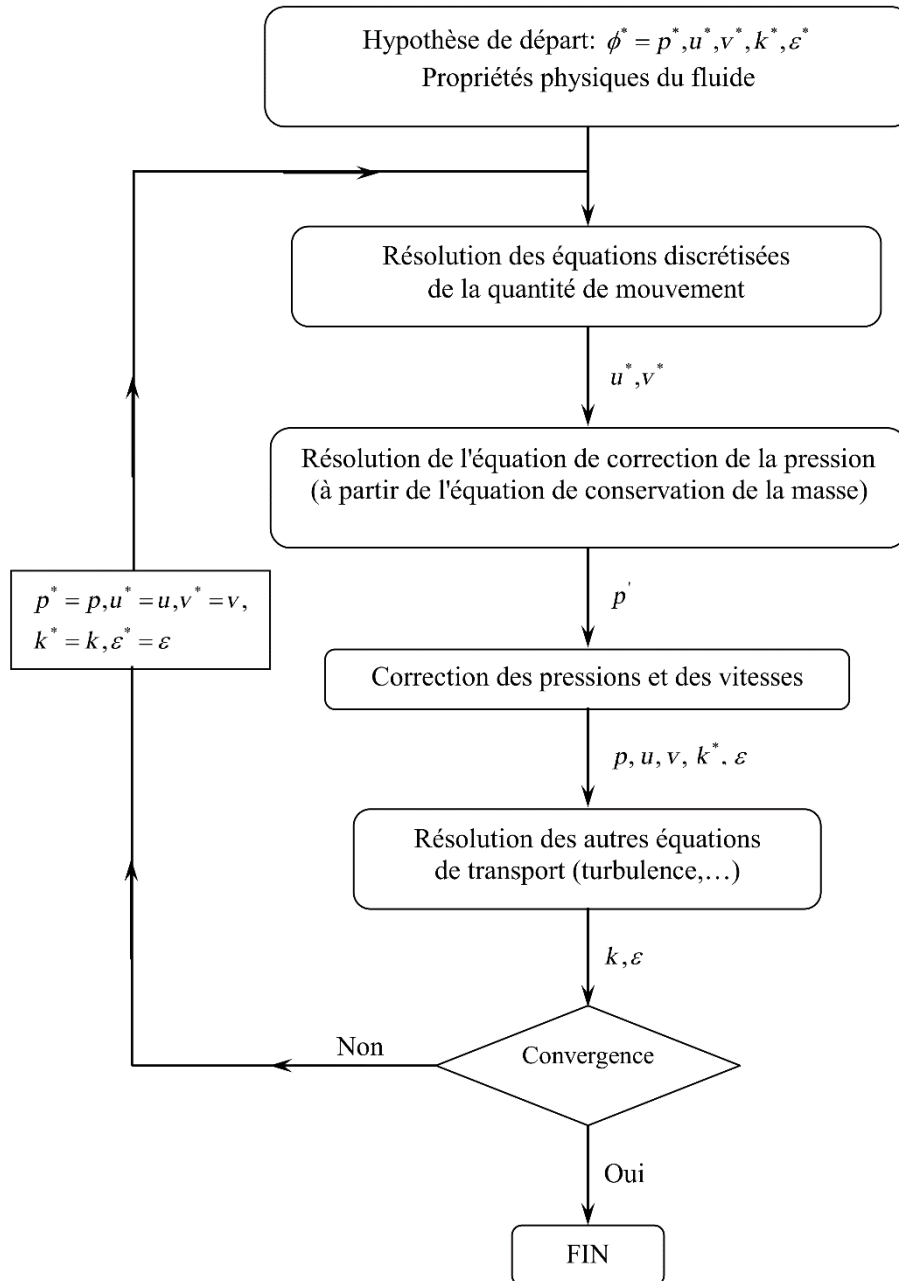
Annexe II

Schéma représentatif de l'algorithme SIMPLE.



**Références
bibliographiques**



- [1] RIGAL, Claire. Comportement de fluides complexes sous écoulement: Approche expérimentale par résonance magnétique nucléaire et techniques optiques et simulations numériques. 2012. Thèse de doctorat. Université de Lorraine.
- [2] CHHABRA, Raj P. et RICHARDSON, John Francis. Non-Newtonian flow and applied rheology: engineering applications. Butterworth-Heinemann, 2008.
- [3] HOT, Julie. Influence des polymères de type superplastifiants et agents entraîneurs d'air sur la viscosité macroscopique des matériaux cimentaires. 2013. Thèse de doctorat, Université Paris-Est France.
- [4] CARRANZA, Santiago Nicolas Lopez. Transition laminaire-turbulent en conduite cylindrique pour un fluide non Newtonien. 2012. Thèse de doctorat. Université de Lorraine France.
- [5] IMESON, A. P., PHILLIPS, G. O., et WILLIAMS, P. A. Handbook of hydrocolloids. In : *Carrageenan*. Woodhead Publishing Limited Cambridge, UK, 2000. p. 87-102.
- [6] QUEMADA, D. Rheology of concentrated disperse systems II. A model for non-newtonian shear viscosity in steady flows. *Rheologica Acta*, 1978, vol. 17, no 6, p. 632-642.
- [7] CARREAU, Pierre J. Rheological equations from molecular network theories. *Transactions of the Society of Rheology*, 1972, vol. 16, no 1, p. 99-127.
- [8] CROSS, M. M. Relation between viscoelasticity and shear-thinning behaviour in liquids. *Rheologica Acta*, 1979, vol. 18, no 5, p. 609-614.
- [9] NGUYEN, Q. D. et UHLHERR, P. H. T. Thixotropic behavior of concentrated red mud suspensions. In : *JOURNAL OF RHEOLOGY. CIRCULATION FULFILLMENT DIV, 500 SUNNYSIDE BLVD, WOODBURY, NY 11797-2999 : AMER INST PHYSICS*, 1985. p. 815-815.
- [10] RYAN, N. W. et JOHNSON, M. M. Transition from laminar to turbulent flow in pipes. *AIChE Journal*, 1959, vol. 5, no 4, p. 433-435.
- [11] MISHRA, P. et TRIPATHI, G. Transition from laminar to turbulent flow of purely viscous non-Newtonian fluids in tubes. *Chemical Engineering Science*, 1971, vol. 26, no 6, p. 915-921.
- [12] DURST, F., MELLING, A., et WHITELAW, J. H. Low Reynolds number flow over a plane symmetric sudden expansion. *Journal of fluid mechanics*, 1974, vol. 64, no 1, p. 111-128.

- [13] CHERDRON, Wolfgang, DURST, Franz, et WHITELAW, James H. Asymmetric flows and instabilities in symmetric ducts with sudden expansions. *Journal of Fluid Mechanics*, 1978, vol. 84, no 1, p. 13-31.
- [14] FEARN, R. M., MULLIN, T., et CLIFFE, K. A. Nonlinear flow phenomena in a symmetric sudden expansion. *Journal of Fluid Mechanics*, 1990, vol. 211, p. 595-608.
- [15] BATTAGLIA, Francine, TAVENER, Simon J., KULKARNI, Anil K., et al. Bifurcation of low Reynolds number flows in symmetric channels. *AIAA journal*, 1997, vol. 35, no 1, p. 99-105.
- [16] DRIKAKIS, Dimitris. Bifurcation phenomena in incompressible sudden expansion flows. *Physics of Fluids*, 1997, vol. 9, no 1, p. 76-87.
- [17] CHIANG, T. P., SHEU, Tony WH, et WANG, S. K. Side wall effects on the structure of laminar flow over a plane-symmetric sudden expansion. *Computers & fluids*, 2000, vol. 29, no 5, p. 467-492.
- [18] SCHRECK, E. et SCHÄFER, M. Numerical study of bifurcation in three-dimensional sudden channel expansions. *Computers & fluids*, 2000, vol. 29, no 5, p. 583-593.
- [19] DE ZILWA, S. R. N., KHEZZAR, L., et WHITELAW, J. H. Flows through plane sudden-expansions. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 2000, vol. 32, no 3, p. 313-329.
- [20] JOTKAR, Mamta, PÉREZ, José Miguel, THEOFILIS, Vassilis, et al. Instability mechanisms in straight-diverging-straight channels. *Procedia IUTAM*, 2015, vol. 14, p. 236-245.
- [21] JOTKAR, Mamta et GOVINDARAJAN, Rama. Two-dimensional modal and non-modal instabilities in straight-diverging-straight channel flow. *Physics of fluids*, 2019, vol. 31, no 1, p. 014102.
- [22] MISHRA, Sanjay et JAYARAMAN, K. Asymmetric flows in planar symmetric channels with large expansion ratio. *International journal for numerical methods in fluids*, 2002, vol. 38, no 10, p. 945-962.
- [23] NEOFYTOU, Panagiotis et DRIKAKIS, Dimitris. Non-Newtonian flow instability in a channel with a sudden expansion. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 2003, vol. 111, no 2-3, p. 127-150.

- [24] OLIVEIRA, Paulo J. Asymmetric flows of viscoelastic fluids in symmetric planar expansion geometries. *Journal of non-newtonian fluid mechanics*, 2003, vol. 114, no 1, p. 33-63.
- [25] MANICA, R. et DE BORTOLI, A. L. Simulation of sudden expansion flows for power-law fluids. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 2004, vol. 121, no 1, p. 35-40.
- [26] TERNIK, Primož, MARN, Jure, et ŽUNIČ, Zoran. Non-Newtonian fluid flow through a planar symmetric expansion: Shear-thickening fluids. *Journal of non-newtonian fluid mechanics*, 2006, vol. 135, no 2-3, p. 136-148.
- [27] NEOFYTOS, Panagiotis. Transition to asymmetry of generalised Newtonian fluid flows through a symmetric sudden expansion. *Journal of non-newtonian fluid mechanics*, 2006, vol. 133, no 2-3, p. 132-140.
- [28] TERNIK, Primož. Planar sudden symmetric expansion flows and bifurcation phenomena of purely viscous shear-thinning fluids. *Journal of non-newtonian fluid mechanics*, 2009, vol. 157, no 1-2, p. 15-25.
- [29] DHINAKARAN, S., OLIVEIRA, M. S. N., PINHO, F. T., et al. Steady flow of power-law fluids in a 1: 3 planar sudden expansion. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 2013, vol. 198, p. 48-58.
- [30] NOROUZI, Mahmood, SHAHMARDAN, Mohammad Mohsen, et ZAHIRI, Amin Shahbani. Bifurcation phenomenon of inertial viscoelastic flow through gradual expansions. *Rheologica Acta*, 2015, vol. 54, no 5, p. 423-435.
- [31] ILIO, G. Di, CHIAPPINI, D., et BELLA, G. A comparison of numerical methods for non-Newtonian fluid flows in a sudden expansion. *International Journal of Modern Physics C*, 2016, vol. 27, no 12, p. 1650139.
- [32] HEGAJ, Efim et BORZENKO, Evgeny. Numerical Simulation of the Steady-State Herschel-Bulkley Fluid Flow in a Channel with Sudden Expansion. In : *Key Engineering Materials*. Trans Tech Publications, 2017. p. 474-479.
- [33] GNAMBODE, Sourou. Simulation des grandes échelles des transferts thermo-convectifs dans les écoulements turbulents d'un fluide non-newtonien en conduite cylindrique. 2015. Thèse de doctorat, Université Paris-Est France.
- [34] BIRD, R. B., STEWART, W. E., et LIGHTFOOT, E. N. *Transport Phenomena* second edition John Wiley & Sons. 2002.

- [35] METZNER, A. B. et REED, J. C. Flow of non-newtonian fluids—correlation of the laminar, transition, and turbulent-flow regions. *Aiche journal*, 1955, vol. 1, no 4, p. 434-440.
- [36] CHHABRA, Raj P. et RICHARDSON, John Francis. *Non-Newtonian flow in the process industries: fundamentals and engineering applications*. Butterworth-Heinemann, 1999.
- [37] GALON, P. Méthode des Volumes Finis pour les écoulements compressibles: Analyse Bibliographique. Tech. Rep. RAPPORT DM2S, SEMT/DYN/RT/03-013/A, Commissariata l'Énergie Atomique (CEA), Gif-sur-Yvette, France, 2004.
- [38] PATANKAR, Suhas V. *Numerical heat transfer and fluid flow*, Hemisphere Publ. Corp., New York, 1980, vol. 58.
- [39] AL-MUHAMMAD, Jafar. *Ecoulement dans un canal millimétrique: étude numérique et expérimentale*. 2016. Thèse de doctorat. Ecole centrale de Marseille France.
- [40] GAMBIT User's guide. Version 2.4.6. Fluent. Incorporated, 2007.
- [41] FLUENT User's guide. Version 16.0. Fluent. Incorporated, 2015.
- [42] ROACHE, Patrick J. Quantification of uncertainty in computational fluid dynamics. *Annual review of fluid Mechanics*, 1997, vol. 29, no 1, p. 123-160.
- [43] FOUMENY, E. A., INGHAM, D. B., et WALKER, A. J. Bifurcations of incompressible flow through plane symmetric channel expansions. *Computers & fluids*, 1996, vol. 25, no 3, p. 335-351.
- [44] MENOUEUR, A., SAD CHEMLOUL, N., CHAIB, K., et al. Steady Flow of Purely Viscous Shear-Thinning Fluids in a 1:3 Planar Gradual Expansion. *Journal of Applied Fluid Mechanics*, 2019, vol. 12, no 3, p. 789-801.
- [45] TERNIK, Primož. New contributions on laminar flow of inelastic non-Newtonian fluid in the two-dimensional symmetric expansion: Creeping and slowly moving flow conditions. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 2010, vol. 165, no 19-20, p. 1400-1411.
- [46] DURST, F., RAY, S., ÜNSAL, B., et al. The development lengths of laminar pipe and channel flows. *Journal of fluids engineering*, 2005, vol. 127, no 6, p. 1154-1160.

ملخص

تمت الدراسة العددية للتدفق الصفائحي الخاص بالسوائل النيوتونية وغير النيوتونية (اوسفالد) عبر توسيع تدريجي تحت عوامل مختلفة كالمؤشرات الريولوجية، زوايا الاتساع وأعداد رينولدز المعممة. دراسة تأثير كل هذه العوامل على التدفق سمحت بتحديد عددي رينولدز المعممين الحرجين اللذان يمثلان الانتقال من التدفق المتناظر إلى التدفق غير المتناظر وظهور منطقة ثالثة لإعادة التدوير. أظهرت النتائج التي تم الحصول عليها ان أن تقليل مؤشر التدفق أو زاوية الاتساع يعمل على استقرار التدفق وذلك برفع قيمة كل من عددي رينولدز المعممين الحرجين بشكل ملحوظ. أيضا، تم اقتراح علاقتين من أجل التنبؤ بأعداد رينولدز المعممة الحرجة.

الكلمات المفتاحية: تدفق صفائحي، سائل غير نيوتوني، توسيع تدريجي، إعادة التدوير، عدد رينولدز الحرج.

Résumé

L'écoulement laminaire de fluides Newtonien et non-Newtonien d'Ostwald à travers un élargissement progressif a été étudié numériquement pour différents indices rhéologiques, angles d'élargissement et nombres de Reynolds généralisés. L'étude de la variation de ces paramètres a permis de déterminer deux nombres de Reynolds généralisés critiques qui correspondent respectivement au passage de l'écoulement symétrique à l'asymétrique et à l'apparition d'une troisième zone de recirculation. Les résultats obtenus ont montré que la diminution de l'indice d'écoulement ou de l'angle d'élargissement stabilise l'écoulement en augmentant de manière significative les deux nombres de Reynolds généralisés critiques. Aussi, deux corrélations ont été proposées pour prédire les nombres de Reynolds généralisés critiques.

Mots-clés : Ecoulement laminaire, Fluide non-Newtonien, Elargissement progressif, Recirculation, Nombre de Reynolds critique.

Abstract

Laminar flow of Newtonian and Ostwald's non-Newtonian fluids through progressive expansion has been numerically investigated for various rheological indices, expansion angles, and generalized Reynolds numbers. The study of the variation of these parameters allowed the determination of two critical generalized Reynolds numbers which correspond respectively to the transition from the symmetric to the asymmetric flow and the appearance of a third recirculation zone. The obtained results showed that decreasing the flow index or expansion angle stabilizes the flow by increasing significantly the two critical generalized Reynolds numbers. Also, two correlations have been proposed to predict the critical generalized Reynolds numbers.

Keywords: Laminar flow, Non-Newtonian fluid, Progressive expansion, Recirculation, Critical Reynolds Number.