

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de L'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Ibn-Khaldoun - Tiaret

Faculté Des Sciences Appliquées

Département De Génie Mécanique

THÈSE

En vue de l'obtention du

Diplôme de Doctorat L.M.D

Spécialité : Génie Mécanique

Option : Energétique

THÈME

Contribution à l'étude de la lubrification micropolaire :
Applications aux paliers hydrostatiques

Présentée par :

Monsieur. BENARIBA Aboubakeur

Soutenu publiquement le

Devant le jury composé de :

Qualité	Nom et prénom	Grade	Etablissement d'appartenance
Président	Hassaine Daoudji Tahar	Prof	UIK Tiaret
Directeur de thèse	Bouزيدane Ahmed	Prof	UIK Tiaret
Examineur	Sahli Ahmed	Prof	UIK Tiaret
Examineur	Sad Chemloul Nourddine	MCA	UIK Tiaret
Examineur	Zahloul Hammou	Prof	Univ.Chlef
Examineur	Meriem Benziane Madjid	Prof	Univ.Chlef

Année universitaire 2017/ 2018

*A la femme qui supporte ma
stupidité et ma folie, la femme
qui m'a donné l'amour d'une
manière très civilisée.*

Remerciements

En premier lieu et avant tout, je remercie Dieu le tout puissant qui m'a donné la volonté et le courage pour achever ce modeste travail.

Je remercie chaleureusement mon directeur de thèse, Professeur BOUZIDANE Ahmed, qui m'a accompagné depuis mon Master, pour sa disponibilité, son attention à mon travail, ses conseils avisés et ses encouragements ont été pour moi d'une grande importance dans le développement et dans la bonne réussite de cette recherche. Ses qualités scientifiques et ses qualités humaines m'ont été d'une grande utilité pour mener à terme ce travail. Je lui adresse toute ma gratitude et ma profonde reconnaissance.

Je suis très sensible à l'honneur que me font, le Professeur Hassaine Daoudji Tahar du département de Génie civil de l'université de Tiaret, d'avoir accepté de présider le jury, le Professeur Sahli Ahmed du département de Génie Mécanique de l'université de Tiaret, Monsieur Sad Chemloul Nourddine, maître de conférences classe A du département de Génie Mécanique de l'université de Tiaret, le Professeur Zahloul Hammou et le Professeur Meriem Benziane Madjid du département de Génie Mécanique de l'université de Chlef, d'avoir accepté d'examiner ce travail.

Mes remerciements s'adressent également aux enseignants et au personnel administratif du département de Génie Mécanique de l'université de Tiaret, où j'ai fait mes études de Licence et de Master, pour leurs conseils et encouragements.

A tous les membres du Laboratoire de recherche des technologies industriel, j'adresse ma sympathie.

Je voudrais remercier mes chers amis Mohamed Djallel Eddine et Omar Senouci qui m'ont aidé un peu, beaucoup et passionnément durant la réalisation de ce travail.

Ces remerciements seraient incomplets s'ils ne s'adressent pas aussi à mes ami(e)s, Hichem, Mohamed, Amina, les futurs docteurs et docteur abed Asma et qui m'ont beaucoup encouragé et soutenu pendant ces quatre années. Je leurs souhaite beaucoup de succès dans leurs études doctorales et dans leurs futures carrières.

Enfin, ma reconnaissance va à ceux qui ont plus particulièrement assuré le soutien affectif dans cette recherche : ma famille, ma mère et mon père, qui par leur présence et leur encouragements étaient pour moi les piliers fondateurs de ce que je suis et ce que je fais, mes chères sœurs Zineb, Ikram et mon cher frère mohamed, sa femme, sa petite touka fatima et le prince héritier Omar Elfarouk.

BENARIBA ABOUBAKEUR

ملخص

أثبتت البحوث التجريبية المتخصصة في دراسة المحامل أن الزيوت المستعملة في هذا المجال قد تغير من سلوكها نتيجة الجزيئات الصلبة والاوزاخ المتواجدة داخل المحامل، لهذا السبب فإن النظرية الكلاسيكية للسوائل النيوتونية غير دقيقة. على سبيل المثال، لا يمكن للنظرية الكلاسيكية تجسيد حركة السوائل التي تحتوي على جزيئات صلبة. هذا المشكل يتطلب تطبيق نظرية سائل الميكروبولار.

في هذه الأطروحة تم عرض دراسة رقمية بغرض دراسة تأثير الخصائص المميزة لسائل الميكروبولار وكذلك تأثير معامل الضغط داخل الخلية بالنسبة لضغط التغذية على أداء محمل هيدروستاتيكي مكون من أربع مساند هيدروستاتيكية يغذيها السائل عن طريق قناة شعيرية. حيث تم حل معادلة رينولدز المعدلة باستخدام طريقة غوس سيدال وهذا بعد أن تمت كتابتها على شكل طريقة الفروق المحدودة بغرض تحديد توزيع الضغط داخل المساند الأربعة.

أظهرت النتائج أن المحامل التي تعمل بزيوت التشحيم ميكروبولار يكون ضغط الخلية فيها أعلى، حيث تشير إلى أن تأثير سائل الميكروبولار على أداء المحمل يكون أساسا بدلالة معامل الضغط داخل الخلية بالنسبة لضغط التغذية، لذلك يجب على مستعمل المحمل أن يختار بحكمة قيمة معامل الضغط داخل الخلية بالنسبة لضغط التغذية وهذا لتحقيق أداء ممتاز.

إضافة إلى ذلك، تم تقديم دراسة عن سعة الاهتزاز و القوة المنتقلة من الحامل و هذا من خلال حل معادلات حركة الحامل الصلب باستخدام طريقة خطية.

حيث لوحظ أن الحامل الصلب الذي يعمل مع زيوت التشحيم ميكروبولار يظهر زيادة في قيمة قوة الاهتزازات المنتقلة و هذا عند السرعات العالية وانخفاض في قيمة الاهتزازات عند السرعات الحرجة مقارنة بنفس الحامل الذي يعمل بزيوت التشحيم النيوتونية.

الكلمات الدلالية

سائل الميكروبولار، حامل هيدروستاتيكي، معادلة رينولدز المعدلة، طريقة الفروق المحدودة.

Résumé

Des recherches expérimentales ont démontré que dans des conditions de fonctionnement standard, l'huile lubrifiante utilisée pour la lubrification des paliers est contaminée par des particules et des saletés de métaux en suspension et par conséquent, commence à présenter des comportements non newtoniens. Pour cette raison la théorie classique du liquide newtonien s'avère inexacte. Par exemple, la théorie classique ne peut pas décrire le mouvement des fluides contenant des microstructures. Ce problème de lubrification nécessite plutôt l'application de la théorie des fluides micropolaires. Le modèle micropolaire peut être utilisé avec succès dans les problèmes de lubrification des paliers, car le jeu des paliers sont de l'ordre de la taille moléculaire moyenne d'un lubrifiant non newtonien. Une étude numérique est présentée dans cette thèse afin d'étudier les effets des paramètres caractéristiques d'un fluide micropolaire ainsi que l'influence du rapport de pression sur la réponse d'un palier hydrostatique utilisé comme '*hydrostatic squeeze film damper*' composé de quatre patins hydrostatiques, alimentés par un fluide micropolaire à travers des résistances hydrauliques de type capillaire. Pour déterminer la distribution de pression dans les quatre patins du palier hydrostatique, l'équation de Reynolds modifiée est développée dans sa forme de différence finie et résolue par la méthode de Gauss Seidel.

Les résultats numériques ont montré que le palier fonctionnant avec un lubrifiant micropolaire montre une augmentation dans la pression d'alvéole. Ces résultats suggèrent que l'influence de l'effet micropolaire sur les performances du palier est principalement affectée par le rapport de pression. Par conséquent, l'opérateur du palier doit choisir judicieusement une valeur de rapport de pression appropriée afin d'obtenir une amélioration de performance du palier.

Le calcul de l'amplitude de vibration et de l'amplitude des forces transmises du rotor rigide a également été présenté en résolvant les équations du mouvement du rotor en utilisant une méthode linéaire. Il a été observé qu'un rotor rigide fonctionnant avec un lubrifiant micropolaire montre une augmentation de la valeur des forces transmises à des vitesses élevées et une réduction de la valeur de la réponse vibratoire à vitesse critique par rapport à un rotor rigide similaire fonctionnant avec un lubrifiant newtonien.

Mots clés

Lubrifiant micropolaire, palier hydrostatique, l'amortisseur hydrostatique à film écrasé, l'équation de Reynolds modifiée, méthode des différences finies.

Abstract

The use of non-Newtonian fluid as lubricants is of growing interest. Actually, experimental researches have demonstrated that under standard operating conditions, lubricating oil become contaminated with suspended metal particles and dirt, and as a result start exhibiting non-Newtonian behaviors. Therefore the classical theory of Newtonian fluid turns out to be inaccurate. For example, the classical theory cannot describe the motion of fluids containing coarse structures. This lubrication problem rather requires the application of micropolar fluid theory. Micropolar fluids represent fluids contains particles in suspension. These particles demonstrate individual motion where the deformation is ignored.

The work presented in this thesis deals with a numerical resolution of the modified Reynolds equation using micropolar lubrication theory to study the effects of coupling number and the characteristic length of the micropolar lubricant on the performance characteristics of hydrostatic squeeze film damper consists of four hydrostatic pads fed through four capillary restrictors.

In order to determine the pressure field generated on the hydrostatic bearing flat pads, the modified version of Reynolds equation is expanded into its finite difference form and solved by the Gauss Seidel method.

According to the results, the bearing operating with micropolar lubricant shows an increase in the value of pressure inside the recess. These results suggest that the influence of micropolar effect on bearing performance is predominantly affected by the pressure ratio. Therefore, the bearing operator must judiciously choose an appropriate value of pressure ratio in order to get an overall enhanced bearing performance.

The calculation of the dimensionless vibratory amplitude and amplitude of transmitted forces was also presented by resolving the equations of rotor motion using linear method.

It has been observed that a rigid rotor operating with micropolar lubricant shows an increase in the value of transmitted forces at high speeds and a reduction in the value of vibratory response at critical speed when compared to a corresponding similar rigid rotor operating with Newtonian lubricant.

Keywords

Micropolar lubricant, journal hydrostatic bearing, squeeze film damper, modified Reynolds equation, finite difference method.

Table des matières

Introduction générale -----	1
Chapitre 1. Étude bibliographique	
1.1. Introduction -----	5
1.2. Les Paliers -----	6
1.2.1. Les paliers à roulements -----	7
1.2.1.1. Définition -----	7
1.2.2. Paliers magnétiques -----	8
1.2.2.1. Définition -----	8
1.2.2.2. Principe de fonctionnement -----	8
1.2.3. Paliers hydrodynamiques -----	10
1.2.3.1. Définition -----	10
1.2.3.2. Principe de fonctionnement -----	10
1.2.4. Paliers hydrostatiques -----	12
1.2.4.1. Définition -----	12
1.2.4.3. Formation du film fluide hydrostatique -----	16
1.2.4.4. Avantages et inconvénients des paliers hydrostatiques -----	19
1.2.4.5. L'amortisseur à film écrasé hydrostatique, 'hydrostatic squeeze film damper' -----	20
1.3. Fluide complexe -----	23
1.3.1. Fluide micropolaire -----	24
1.3.2. Les équations de la lubrification micropolaire -----	25
1.3.2.1. Hypothèse et démonstration -----	27
1.3.3. Application de la lubrification micropolaire -----	31
1.4. Dynamique de rotor -----	34
1.4.1. Objectifs de l'analyse de la dynamique des rotors -----	35
1.4.2. Classifications des rotors -----	36
1.4.2.1. Rotor rigide -----	36
1.4.2.2. Rotor flexible -----	36
1.5. Conclusion -----	36
Chapitre 2. Etude numérique d'un rotor rigide monté sur un palier hydrostatique utilisé comme "Hydrostatic squeeze film damper" lubrifié par un fluide micropolaire	
2.1. Introduction -----	38

2.2.	Étude d'un hydrostatic squeeze film damper -----	38
2.2.1.	L'équation de Reynolds modifiée-----	41
2.2.1.1.	Les conditions aux limites -----	42
2.2.1.2.	Discrétisation de l'équation de Reynolds modifiée-----	42
2.2.1.3.	Résolution numérique du système d'équations-----	44
2.2.2	Les caractéristiques de performance -----	47
2.2.2.1.	La charge portante -----	47
2.2.2.2.	La pression d'alvéole-----	48
2.2.2.3.	Débit de lubrifiant total-----	51
2.2.2.4.	Caractéristiques dynamiques -----	51
2.3.	Validation du modèle numérique-----	54
2.4.	Dynamique de rotor-----	56
2.5.	Conclusion -----	57
Chapitre 3. Résultats et interprétations		
3.1.	Introduction -----	60
3.2	Résultats & discussions-----	60
3.2.1	Validation du modèle numérique -----	60
3.2.2	Effet du rapport de pression β_0 , du N et du Lm-----	62
3.2.2.1	Méthode numérique - organigramme -----	63
3.2.2.2	Influence des paramètres du fluide micropolaire sur le profil de pression-----	65
3.2.2.3	Influence des paramètres du fluide micropolaire sur la charge portante -----	67
3.2.2.4	Influence sur le débit -----	69
3.2.2.5	Influence sur le coefficient de raideur -----	71
3.2.2.6	Influence sur le coefficient d'amortissement-----	73
3.2.2.7	Influence sur le taux d'amortissement -----	75
3.5.	Analyse de vibration de rotor-----	77
3.5.1.	Organigramme de calcul-----	77
3.5.2.	Analyse de l'amplitude de vibrations-----	79
3.5.3.	Analyse de la force de transmissibilité -----	80
3.3	Conclusion -----	81
Conclusion générale -----		82
Référence bibliographiques-----		84
Annexe : les méthodes numériques-----		88

Liste des tableaux

Tableau 3.1	Comparaison de la charge portante prélevée à partir d'une solution analytique et numérique à $\beta_0 = 0,4$	61
Tableau 3.2	Paramètres de simulation	63
Tableau 3.3	Coefficients de raideur et d'amortissement.....	77

Liste des figures

Figure 1.1	Rotor monté sur un palier à roulement.....	08
Figure 1.2	Rotor supporté par des paliers magnétiques [6].....	09
Figure 1.3	un palier hydrodynamique à patins oscillants [7].....	10
Figure 1.4	Principe de la lubrification hydrodynamique [4].....	12
Figure 1.5	Palier hydrostatique circulaire à quatre alvéoles.....	13
Figure 1.6	Schématisation d'une butée hydrostatique.....	14
Figure 1.7	Alimentation à débit constant.....	15
Figure 1.8	Alimentation à pression constante.....	16
Figure 1.9	Formation du film fluide dans une butée hydrostatique [11].....	18
Figure 1.10	Rotor monté sur un palier a roulement utilisé comme 'hydrostatic squeeze film damper'.....	21
Figure 1.11	Géométrie et cinématique du contact.....	29
Figure 1.12	Rotor monté sur un palier à roulement [47].....	35
Figure 2.1	Schéma d'un palier à roulement monté sur un (HSFD).....	39
Figure 2.2	Schéma d'une butée hydrostatique à simple effet.....	40
Figure 2.3	Conditions aux limites d'une butée hydrostatique.....	41
Figure 2.4	Domaine de calcul.....	43
Figure 2.5	Description d'un nœud.....	44
Figure 2.6	Discrétisation d'un quart du domaine d'intégration.....	45
Figure 2.7	Débit sortant de l'alvéole.....	48

Figure 2.8	Schématisme de la raideur et l'amortissement pour une butée hydrostatique.	52
Figure 2.9	Patin de la butée hydrostatique infiniment longue.....	55
Figure 3.1	Étude comparative entre l'analyse analytique et numérique pour différentes valeurs de N^2 et L_m avec $\beta_0 = 0,4$	62
Figure 3.2	Organigramme générale de calcul des caractéristiques pour un HSFD lubrifié avec un fluide micropolaire.....	64
Figure 3.3	la distribution du champ de pression pour différentes valeurs de N^2 avec $L_m = 10$ et $\beta_0 = 0,4$	66
Figure 3.4	Variation de la charge portante W_p en fonction du L_m pour différentes valeurs de N^2 avec $\beta_0 = 0,4$	67
Figure 3.5	Variation de la charge portante W_p en fonction de L_m pour différentes valeurs de β_0 avec $N^2 = 0,5$	68
Figure 3.6	Variation du débit Q_T en fonction de L_m pour différentes valeurs de N^2 avec $\beta_0 = 0,4$	69
Figure 3.7	Variation du débit Q_T en fonction L_m pour différentes valeurs de β_0 avec $N^2 = 0,5$	70
Figure 3.8	Variation du coefficient de raideur en fonction de L_m pour différentes valeurs de N^2 avec $\beta_0 = 0,4$	71
Figure 3.9	Variation du coefficient de raideur en fonction L_m pour différentes valeurs de β_0 avec $N^2 = 0,5$	72
Figure 3.10	Variation du coefficient d'amortissement en fonction de L_m pour différentes valeurs de N^2 avec $\beta_0 = 0,4$	73
Figure 3.11	Variation du coefficient d'amortissement en fonction L_m pour différentes valeurs de β_0 avec $N^2 = 0,5$	74
Figure 3.12	Variation du taux d'amortissement en fonction de L_m pour différentes valeurs de N^2 avec $\beta_0 = 0,4$	75

Figure 3.13	Variation du taux d'amortissement en fonction L_m pour différentes valeurs de β_0 avec $N^2 = 0,5$	76
Figure 3.14	Organigramme de calcul de l'amplitude de vibration et de la force transmise	78
Figure 3.15	Amplitude de vibration adimensionnelle en fonction de la vitesse de rotation pour différentes valeurs du N et L_m	79
Figure 3.16	Force transmise en fonction de la vitesse de rotation pour différentes valeurs du N et L_m	80

Nomenclature

a	longueur d'alvéole [m]
A	longueur du patin [m]
b	largeur d'alvéole [m]
B	largeur du patin [m]
C_{pi}	coefficient d'amortissement relatif à chaque patin [N.s/m]
C_{eq}	coefficient d'amortissement équivalent [N.s/m]
dc	diamètre du capillaire [m]
e_x, e_y	excentricités suivant x et y respectivement [m]
h_0	épaisseur du film à excentricité égale à zéro [m]
h_i	épaisseur du film relatif à chaque patin [m]
\dot{h}_i	vitesse d'écrasement du film pour chaque patin [m/s]
I_0	la fonction de Bessel modifiée d'ordre zéro de première espèce
I_1	la fonction de Bessel modifiée d'ordre un de première espèce
K_{pi}	coefficient de raideur relatif à chaque patin [N/m]
K_{eq}	coefficient de raideur équivalent [N/m]
l_c	longueur du capillaire [m]
M	masse du rotor [Kg]
P_s	pression d'alimentation [Pa]
P_{ai}	pression d'alvéole relatif à chaque patin [Pa]
Q_{vi}	débit sortant de l'alvéole dans les directions x et z respectivement pour chaque patin [m ³ /s]

Q_{ri}	débit à travers le capillaire relatif à chaque patin [m^3/s]
Q_{xi}, Q_{zi}	Le débit dû à la variation du volume dans l'alvéole relatif à chaque patin [m^3/s]
Q_T	débit total du lubrifiant [m^3/s]
S_r	surface de l'alvéole [m^2]
R	rayon du capillaire [m]
$u_{xi}; u_{zi}$	vitesse de fluide dans les directions x et z respectivement pour chaque patin [m/s]
u_r	la vitesse dans le débit micropolaire [m/s]
W_{pi}	charge portante pour chaque patin hydrostatique [N]
(x_i, z_i, y_i)	système des coordonnées utilisé dans l'équation de Reynolds
ζ	taux d'amortissement
β_0	rapport de pression pour excentricité égale à zéro
μ	viscosité dynamique du fluide Newtonien [$Pa.s$]
μ_v	viscosité dynamique du fluide micropolaire [$Pa.s$]
$\varepsilon=e/h_0$	rapport d'excentricité
ω_e	Fréquence d'excitation [rad/s]
ω_n	Fréquence naturelle [rad/s]

Introduction générale

Les machines tournantes telles que les compresseurs, les pompes et les turbines sont devenues des éléments indispensables pour l'industrie moderne. La recherche accrue d'efficacité des machines tournantes engendre une tendance à l'assouplissement et à l'augmentation des vitesses des rotors. Le système mécanique devient ainsi plus susceptible à des problèmes vibratoires aigus, qui englobent des surtensions excessives au voisinage des résonances, l'apparition de plages de fonctionnement instables et l'amplification des charges dynamiques transmises au milieu environnant. En effet, une trop grande amplitude de vibration engendre un bruit trop important, un moindre rendement, et peut même aboutir à l'endommagement du système : frottement rotor/stator, rupture par fatigue ou bien endommagement des paliers. L'étude de la dynamique des machines tournantes est donc plus que jamais d'actualité.

Pour remédier à ces problèmes, l'amortisseur hydrostatique à film écrasé, traduction du terme anglais '*hydrostatic squeeze film damper*', constitue l'une des solutions techniques les plus intéressantes proposées ces dernières années, du fait de la forte capacité d'amortissement et de la relative simplicité de construction. La conception de ce type d'amortisseur reste toutefois problématique et délicate, à cause de la difficulté de compréhension et de maîtrise numérique de nombreux phénomènes intervenant dans le comportement hydrodynamique et hydrostatique du film. D'autre part et en raison de leur précision, de leur faible frottement et de leur rigidité, notamment dans la zone des vitesses critiques, '*hydrostatic squeeze film damper*' intégrés dans des paliers à roulement sont souvent incorporés dans des machines à charge élevée. Les recherches numériques et expérimentales étudient généralement la vitesse de l'arbre, la pression d'alimentation et le régime d'écoulement comme les principaux paramètres opérationnels affectant les performances des paliers hydrostatiques utilisés comme '*hydrostatic squeeze film damper*', nombreuses études indiquent que les performances de ce type de paliers sont également influencées par les caractéristiques des lubrifiants.

L'utilisation des fluides non newtoniens comme lubrifiants est de plus en plus intéressante. En fait, des recherches expérimentales ont démontré que dans des conditions de fonctionnement standard, l'huile lubrifiante est contaminée par des particules et des saletés de métaux en suspension et par conséquent, commence à présenter des comportements non newtoniens.

Pour cette raison la théorie classique du liquide newtonien s'avère inexacte. Par exemple, la théorie classique ne peut pas décrire le mouvement des fluides contenant des microstructures. Ce problème de lubrification nécessite plutôt l'application de la théorie des fluides micropolaires. Le modèle micropolaire peut être utilisé avec succès dans les problèmes de lubrification des paliers, car le jeu des paliers est de l'ordre de la taille moléculaire moyenne d'un lubrifiant non newtonien.

Dans cette thèse nous nous intéressons à l'équation de Reynolds modifiée qui est obtenue à partir des équations de fluide micropolaire. Ces équations représentent l'évolution d'un fluide portant en son sein des microstructures rigides et isotropes ayant une vitesse angulaire propre.

La forme de ses équations est assez proche de celles des équations de Navier-Stokes. Dans les équations de conservation de quantité de mouvement, on retrouve une nouvelle variable, la giration, qui représente la vitesse angulaire des microstructures. De plus, des équations représentant la conservation de la giration sont ajoutées.

Ce doctorat aborde l'aspect de la problématique de l'application de '*hydrostatic squeeze film damper*' dans un palier hydrostatique lubrifié par un fluide micropolaire, allant de la mécanique des fluides à la dynamique des machines tournantes, à savoir : les performances d'un rotor rigide monté sur un palier hydrostatique à quatre patins, la modélisation des forces générées par l'amortisseur et le comportement dynamique linéaire du rotor.

L'objectif de cette thèse est : premièrement d'étudier numériquement les effets des paramètres caractéristiques d'un fluide micropolaire ainsi que l'influence du rapport de pression sur la réponse d'un palier hydrostatique utilisé comme '*hydrostatic squeeze film damper*' composé de quatre patins hydrostatiques, alimentés par un fluide micropolaire à travers des résistances hydrauliques de type capillaire. Deuxièmement de calculer l'amplitude de vibration et l'amplitude des forces transmis qui sont déterminés en résolvant les équations de mouvement du rotor utilisant la méthode linéaire.

Le travail présenté dans cette thèse comprend une introduction générale, trois chapitres et une conclusion générale.

Le premier chapitre est consacré à l'étude bibliographique portant sur les paliers hydrostatiques, '*hydrostatic squeeze film damper*', les fluides micropolaires et les études effectuées sur l'application de ces fluides dans les paliers ainsi qu'une partie décrivant brièvement la discipline de la dynamique des rotors.

Le deuxième chapitre présente le modèle mathématique de l'étude des performances du palier à quatre patins alimenté avec un lubrifiant micropolaire à travers des alvéoles dans le palier, qui sont alimentés par une pression externe à travers des résistances hydrauliques de type capillaire.

Les résultats numériques et les interprétations concernant l'influence des paramètres caractéristiques du fluide micropolaire et le rôle du rapport de pression sur les performances statiques et dynamiques du palier font l'objet du troisième chapitre.

Cette thèse se termine par une conclusion générale sur les résultats obtenus avec quelques perspectives.

CHAPITRE 1

ÉTUDE BIBLIOGRAPHIQUE

CHAPITRE 1

ÉTUDE BIBLIOGRAPHIQUE

1.1. Introduction

A partir d'une recherche bibliographique, le premier chapitre présente une vision globale de l'état de l'art dans le domaine de la lubrification micropolaire des paliers hydrostatiques afin de réduire les vibrations et augmenter la productivité et le rendement des machines tournantes où l'état d'avancement des recherches scientifiques y est résumé de manière non exhaustive.

Ce chapitre est divisé en trois parties :

La première partie concerne les différents types des paliers et leurs principes de fonctionnement et l'application de '*hydrostatic squeeze film damper*' dans les paliers.

Dans la deuxième partie, nous présentons une étude sur le fluide micropolaire et la démonstration de l'équation de Reynolds modifiée pour ce fluide ainsi que l'état d'avancement des recherches scientifiques dans le domaine de la lubrification micropolaire.

La troisième partie décrivant brièvement la discipline de la dynamique des arbres et rotors, démontre les objectifs de l'analyse de la dynamique des rotors et la classification des rotors.

1.2. Les Paliers

Les Paliers sont des organes mécaniques fixes, supportant (les efforts dus aux inerties) et guidant l'arbre de transmission d'une machine (moteurs thermiques, compresseurs...). En général, on trouve les paliers sur les supports rigides des arbres en rotation, là où les frottements sont les plus importants. Aucun palier ne supprime totalement les frottements, mais tous ont une efficacité considérable dans l'atténuation de ces derniers.

On peut distinguer deux grandes familles de paliers :

- les paliers lisses : où l'arbre prend appui sur un coussinet et il est séparé de celui-ci par un film lubrifiant. Ils sont utilisés dans des conditions de fonctionnement très divers (charge, température, vitesse de rotation...) de plus en plus sévères, l'échauffement à l'intérieur du film lubrifiant devient important ce qui influera sur les performances des paliers.

- les paliers à roulements : dont les corps roulants (bille ou rouleaux) séparent la bague en rotation de l'alésage extérieur.

Selon la direction de la charge par rapport à l'arbre en rotation, on distingue les deux paliers porteurs, pour lesquels la charge est radiale, généralement appelés paliers, des paliers de butée ou butée pour lesquels la charge est axiale.

- les paliers à charges radiales sont généralement constitués par deux éléments de 180° d'arc, appelés plus communément demi coussinets et un élément de 360° d'arc, appelé bague.

- les paliers à charges axiales sont généralement constitués de demi-flasques ou de rondelles complètes.

Pour des applications sévères, les propriétés nécessaires au bon fonctionnement du palier sont bien souvent antagonistes et le moyen le plus élégant de contourner cette difficulté est d'utiliser des matériaux multicouches qui apportent à cœur ou en surface les propriétés recherchées.

Les paliers et les butées ont été peu utilisés vu la complexité de leur fabrication, mais leur emploi s'est généralisé aujourd'hui car, bien d'un coût élevé, ils présentent d'excellentes

caractéristiques de fonctionnement (capacité importante de charge et stabilité). Aussi, ils sont classés parmi les supports de ligne d'arbres les plus performants.

Vu l'importance de ces guidages en industrie pour des machines tournantes, plusieurs études sont consacrées pour analyser leur comportement ; ainsi, plusieurs recherches ont été menées à l'étude des différents paramètres qui ont une influence sur leur bon fonctionnement. Les paliers à roulements, magnétiques, hydrodynamiques et hydrostatiques sont les plus couramment utilisés.

1.2.1. Les paliers à roulements

1.2.1.1. Définition

Le roulement est constitué de deux bagues (une bague intérieure et une bague extérieure), d'éléments roulants (billes, rouleaux ou aiguilles) et d'une cage séparant les éléments roulants. Les roulements sont caractérisés par une rotation rapide avec un minimum de frottement et une capacité de supporter des charges radiales ou axiales importantes [1], avec des conditions de fonctionnement normales, les coefficients de frottement des roulements sont généralement entre 0.001 et 0.002 [2]. Pour une question de fiabilité et de sécurité, le guidage du rotor est généralement assuré par des roulements à billes ou à rouleaux lesquels ne fournissent qu'un amortissement très faible. Il en résulte des pics de vibration d'amplitude dangereusement importante lorsque des vitesses critiques sont traversées. La vitesse maximale d'un palier à roulement (figure 1.1) croît lorsque le diamètre du rotor et la charge diminuent [3]. A titre d'exemple, la vitesse maximale d'un palier à roulement ordinaire supporté par un arbre de diamètre de 100 mm ayant une charge maximale de 400 KN peut atteindre 30 krpm.

Les roulements peuvent être classés en deux types : le roulement à billes qui offre un faible frottement à des vitesses de rotation élevées, et le roulement à rouleaux qui offre une forte capacité de charge grâce au contact linéaire mais son frottement est plus élevé [4].

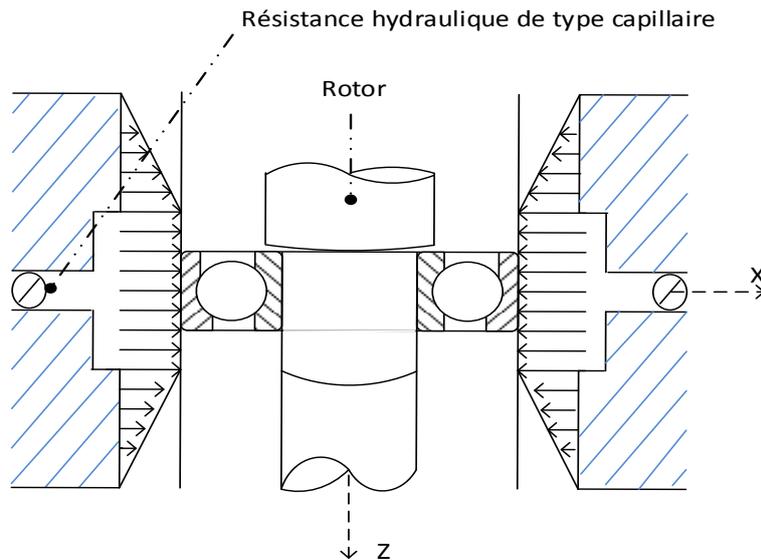


Figure 1.1. Rotor monté sur un palier à roulement.

1.2.2. Paliers magnétiques

1.2.2.1. Définition

Les paliers magnétiques (figure 1.2) sont utilisés lorsque les autres paliers ont atteint leur limite. Ils permettent à un rotor de tourner sans frottement. Leur domaine de prédilection concerne les applications à très haute vitesse de rotation, celles pour lesquelles il faut minimiser les pertes, éviter l'usure, ne pas polluer un environnement sensible par des poussières ou un lubrifiant, supprimer les vibrations, fonctionner à très basse ou très haute température ou limiter la maintenance.

1.2.2.2. Principe de fonctionnement

L'axe est constitué par un rotor ferromagnétique qui flotte dans le champ magnétique créé par des électro-aimants, la position du rotor par rapport au stator est asservie électroniquement. Ce type de palier autorise de grandes vitesses de rotation et convient pour des charges faibles à très fortes (plusieurs tonnes). Son fonctionnement est particulièrement silencieux et sans usure.

Il existe deux types de ces paliers ; les paliers passifs et les paliers actifs.

Les paliers passifs fonctionnent par les forces permanentes d'interaction entre deux aimants. Bien que leur système soit simple et facile à utiliser, leur inconvénient majeur est que l'amortissement fourni est très faible. Pour cela, les paliers magnétiques actifs sont favorisés à

cause de leur rigidité, amortissement et l'atténuation des forces de d'équilibrage dans les systèmes tournants [5].

Un palier actif est généralement constitué de :

- Des électroaimants où le courant est appliqué à chaque bobine pour produire des forces d'attraction ;
- Un capteur qui mesure le déplacement du rotor de sa position de référence ;
- Un microprocesseur en tant que contrôleur qui obtient un signal de contrôle à partir de la mesure ;
- Un amplificateur de puissance qui transforme ce signal en un courant de contrôle. Ce dernier génère un champ magnétique dans les électroaimants, ce qui entraîne des forces magnétiques d'une telle manière que le rotor reste dans sa position de vol stationnaire.

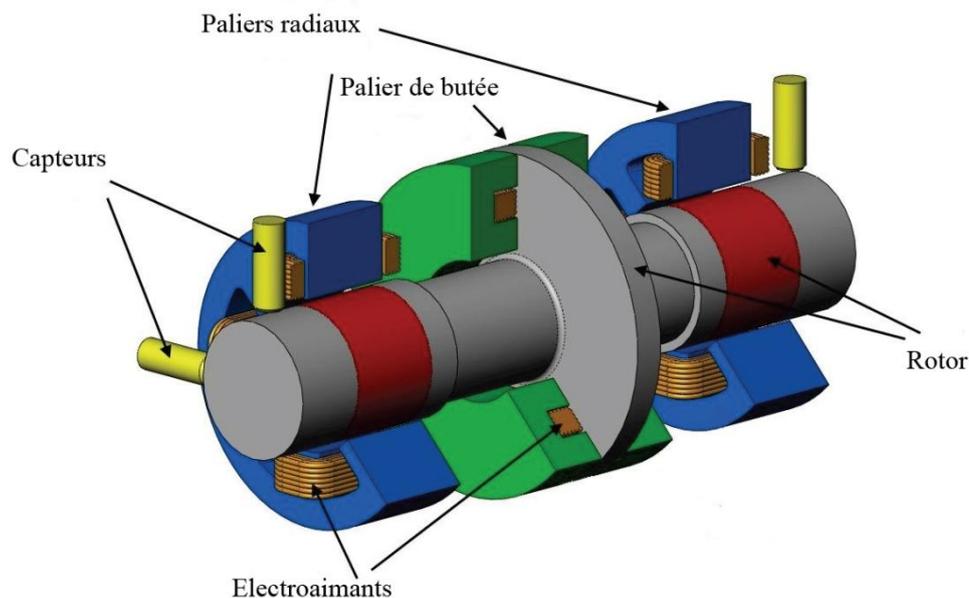


Figure 1.2. Rotor supporté par des paliers magnétiques [6].

Les avantages principaux des paliers magnétiques sont : une fiabilité plus élevée avec peu ou pas de maintenance, des frottements réduits, aucun lubrifiant contaminant, une réduction des vibrations, une surveillance améliorée et un diagnostic amélioré.

Malgré ces avantages, l'utilisation de ces paliers a été limitée par la complexité du système et le coût élevé. Cependant, les progrès dans la technologie des paliers magnétiques ont surmonté de nombreuses limitations en termes de miniaturisation, simplicité et intégration [6]. Par exemple, la taille des paliers magnétiques radiaux a été réduite pour plus de 30%.

En conséquence, ces avantages et ces progrès ont conduit à des applications réelles pour les paliers magnétiques telles que : les turbomachines, les techniques de vide, les machines-outils, suspensions sans contact pour microtechniques, etc.

1.2.3. Paliers hydrodynamiques

1.2.3.1. Définition

Un palier hydrodynamique est constitué d'un arbre qui tourne à l'intérieur d'un coussinet fixe séparé de celui-ci par un fluide lubrifiant. Lors d'un mouvement l'arbre présente un certain excentrement par rapport au coussinet, il forme ainsi un convergent et un divergent dans le fluide. La rotation de l'arbre entraîne le fluide dans le coin convergent et crée un champ de pression hydrodynamique qui s'oppose à la charge d'équilibre.

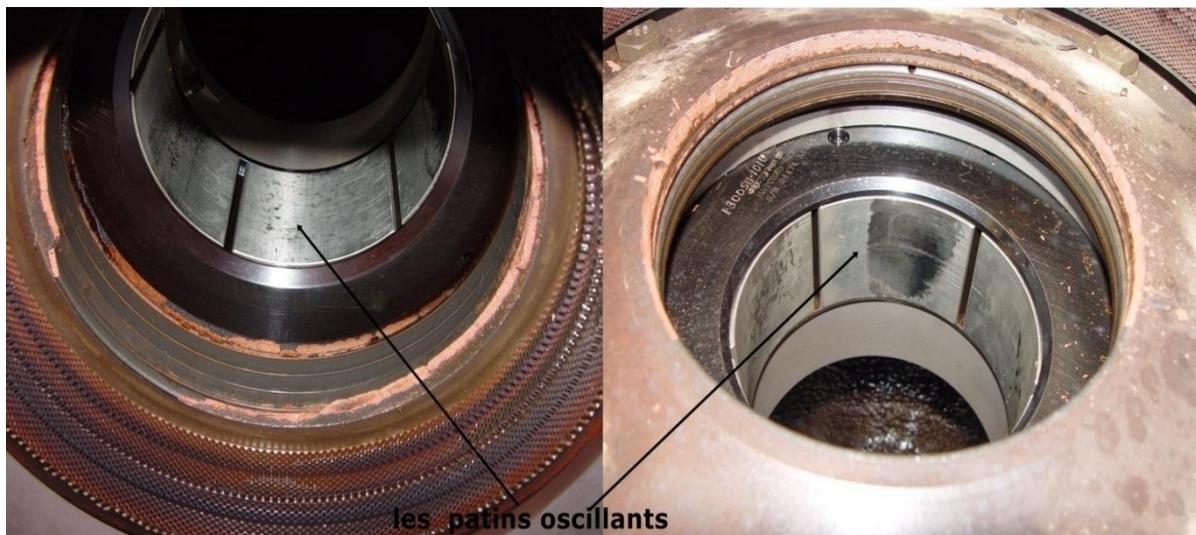


Figure 1.3. un palier hydrodynamique à patins oscillants [7].

1.2.3.2. Principe de fonctionnement

La lubrification est dite hydrodynamique ou parfaite lorsque l'épaisseur du lubrifiant est supérieure à la hauteur des aspérités métalliques et qu'un film d'huile sépare complètement les surfaces métalliques ; les forces de frottement correspondent seulement aux actions

tangentielles des diverses couches de lubrifiant. Elles sont alors indépendantes de la rugosité des deux corps et dépendent essentiellement de la viscosité de l'huile utilisée.

Pour obtenir une lubrification hydrodynamique, il faut un mouvement relatif entre les deux surfaces, la formation d'un convergent et d'un divergent par l'excentricité de l'arbre sous chargement, et la présence d'un lubrifiant visqueux qui va être entraîné par la rotation de l'arbre dans le coin convergent pour créer un champ de pression hydrodynamique s'opposant à la charge.

Le mécanisme de la lubrification hydrodynamique est présenté dans la figure 1.4 :

- Au repos, l'espace entre les deux surfaces du palier est rempli par le lubrifiant. Il est remarqué que la charge a écrasé le film d'huile en bas (figure 1.4.a).
- La rotation lente entraîne l'arbre à roller vers la droite (figure 1.4.b).
- Lorsque la rotation devient plus rapide, plus d'huile adhérant à la surface tente d'entrer dans la zone de contact jusqu'à ce qu'une pression suffisante soit créée juste avant la zone de contact pour soulever l'arbre (figure 1.4.c).

C'est dans la zone de portance (figure 1.4.c) que l'arbre est soutenu. La résultante des forces de pression sur toute la périphérie est égale et opposée à la charge W sur le palier.

Les alimentations (canal d'arrivée, rainure de graissage, bassin relais) sont généralement placées dans la zone où il y a dépression.

L'inconvénient majeur de palier hydrodynamique est que, lors de démarrage, il existe un contact métal-métal où il résulte en limitant la durée de vie du palier.

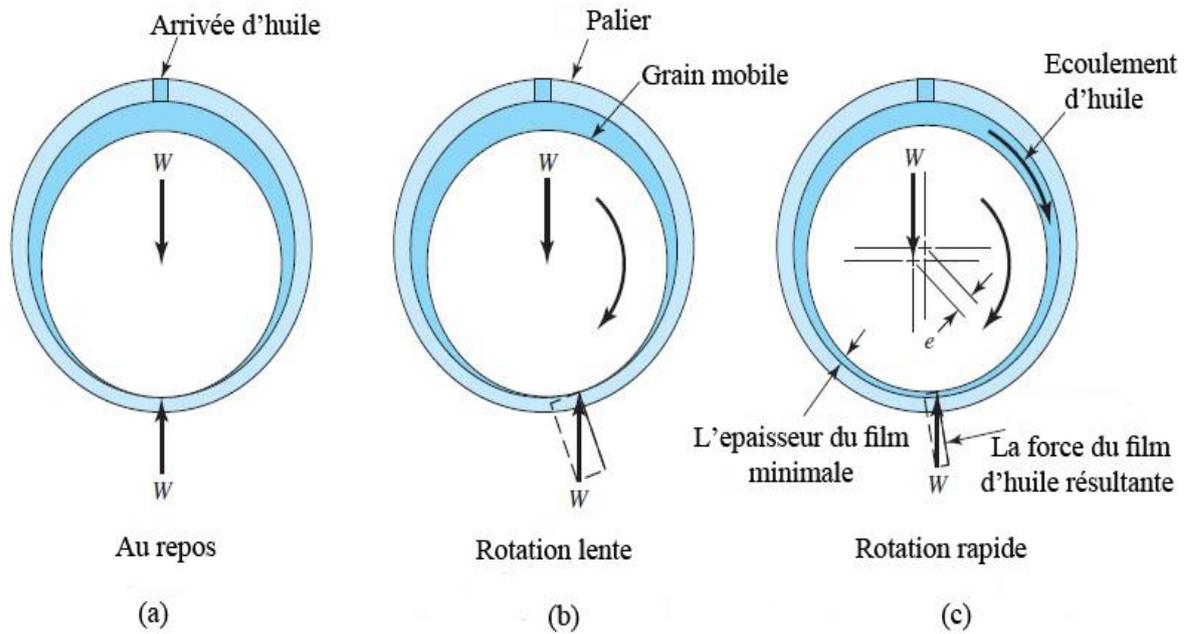


Figure 1.4. Principe de la lubrification hydrodynamique [4].

1.2.4. Paliers hydrostatiques

1.2.4.1. Définition

Un palier hydrostatique comporte deux surfaces, l'une est lisse tandis que l'autre comporte une ou plusieurs cavités (ou alvéoles) (figure 1.5). Dans un palier hydrostatique, la séparation des surfaces est faite par un fluide sous pression introduit par un système extérieur ce qui permet de supporter une charge et d'annuler tout contact métal-métal. Les paliers hydrostatiques peuvent supporter des fortes charges, même dans l'absence de la rotation du rotor, et ils fournissent une rigidité et un amortissement élevés.

Les principaux paramètres qui interviennent dans la définition de ces paliers sont nombreux dont on peut citer :

- les paramètres géométriques : nombre d'alvéole, longueur.
- les paramètres cinématiques : vitesse de rotation, charge.
- les paramètres dynamiques : charge variable, mode de rotation (continu ou alternatif), vibrations...etc.
- les paramètres caractéristiques du lubrifiant : viscosité dynamique, masse volumique, chaleur spécifique.
- la nature des matériaux formant les paliers.

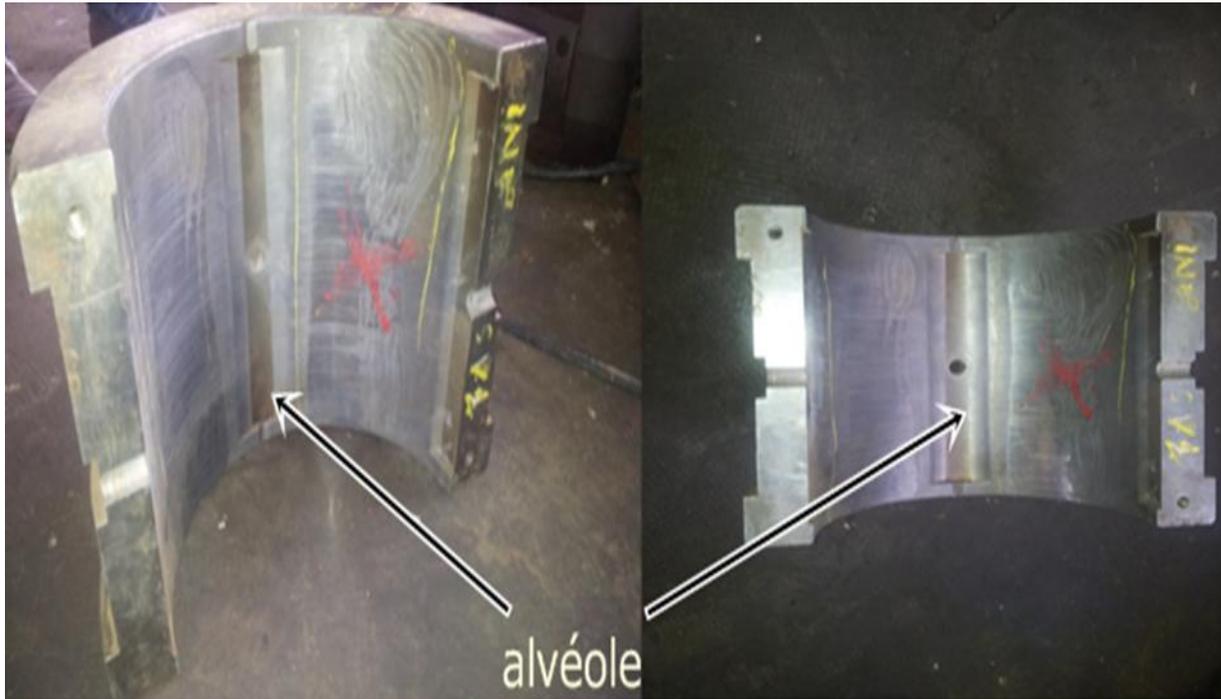


Figure 1.5. Palier hydrostatique circulaire à quatre alvéoles.

1.2.4.2.Principe de fonctionnement

Dans une butée hydrostatatique (figure1.6), on distingue deux régions :

- une zone où l'épaisseur h du film est mince $h/A < 1$.
- une zone, constituée par l'alvéole où l'épaisseur du film est grande $ha/h > 20$, dans cette région, la pression est supposée être constante.

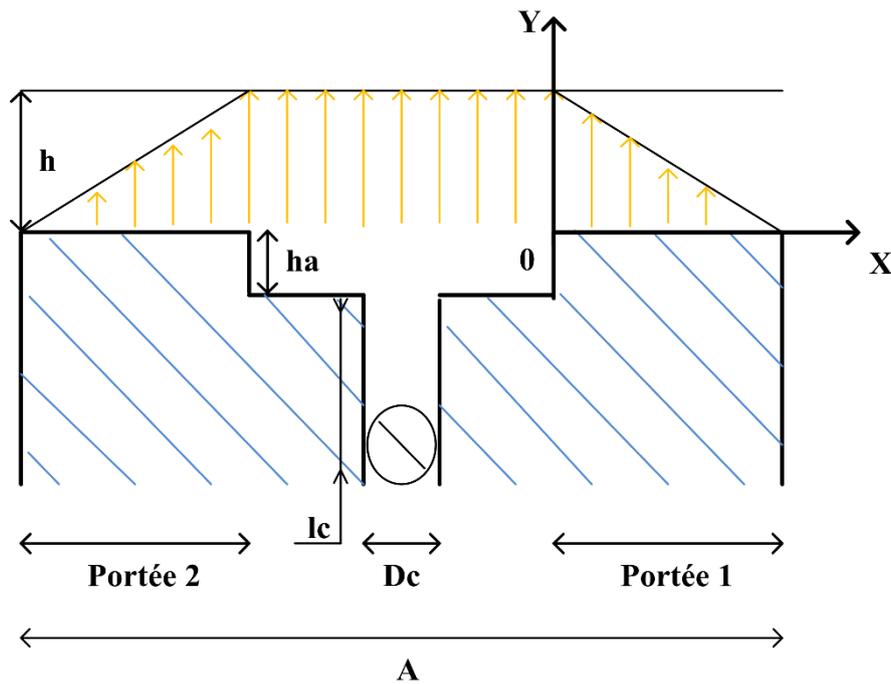


Figure 1.6. Schématisation d'une butée hydrostatique.

Les deux principales méthodes utilisées pour introduire le fluide à l'intérieur du palier sont :

- L'alimentation à débit constant (ce type de lubrification est seulement valable pour les liquides) (figure 1.7).
- L'alimentation à pression constante (figure 1.8).

Dans les systèmes à débit constant, on place une pompe à débit constant entre le réservoir et l'alvéole (figure 1.7). Lorsque le mécanisme comporte plusieurs alvéoles, on peut soit alimenter chaque butée par une pompe individuelle, soit utiliser des régulateurs à débit constant qui permettent de distribuer le fluide à partir d'une seule pompe. Cette solution qui assure une grande raideur est peu employée car elle est complexe et coûteuse. On préfère d'utiliser des systèmes à pression constante.

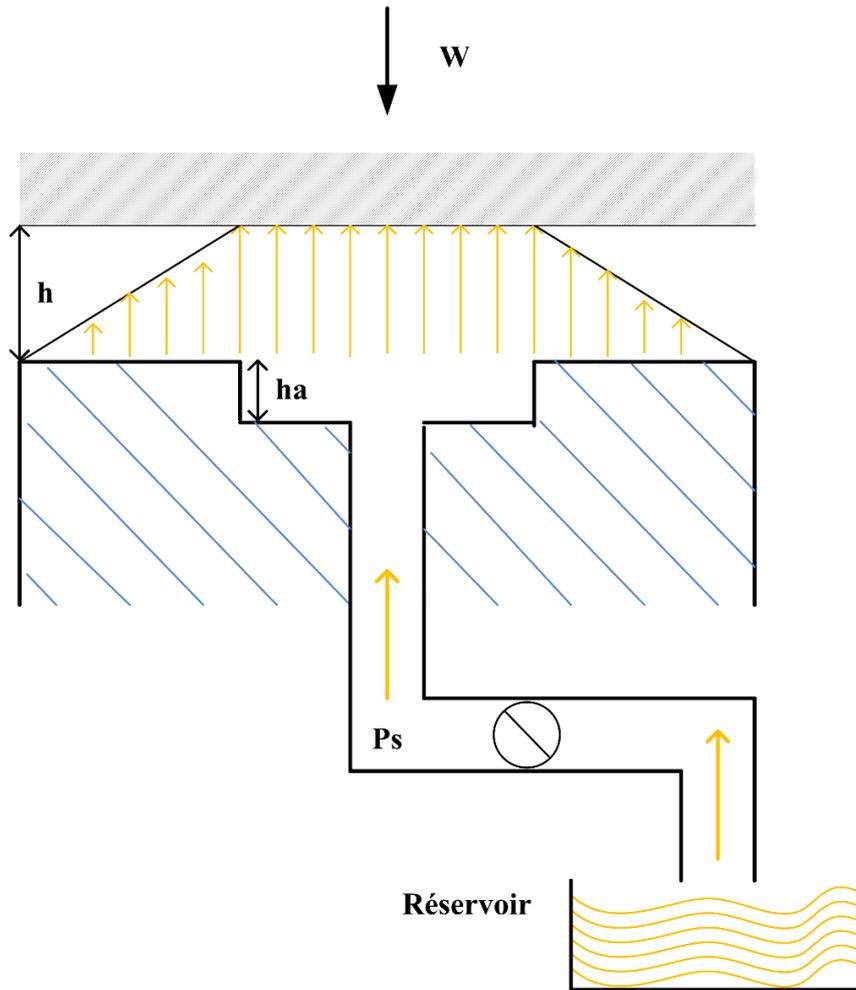


Figure 1.7. Alimentation à débit constant.

Dans les mécanismes à pression constante, on place une résistance hydraulique immédiatement en amont de l'alvéole (figure 1.8). Les types des résistances les plus fréquemment utilisés sont les tubes capillaires et les orifices en parois mince (diaphragme), on emploie parfois des gicleurs qui représentent un compromis entre les deux systèmes précédents. On utilise aussi des résistances auto régulatrices (de types servovalve) qui possèdent une résistance variable avec le débit, ceci permet d'accroître la raideur du palier. Théoriquement, il est possible de dessiner des résistances variables telles que la raideur du mécanisme soit infinie, en pratique, ces résistances variables sont parfois sources d'oscillations auto entretenues : le palier devient alors un générateur de vibration. On trouve peu de résultats publiés sur ce type de résistance hydraulique [8, 9]. Dans le cas des paliers hybrides, Rowe [10] propose de supprimer l'alvéole

et d'utiliser des orifices inhérents comme on le fait dans les paliers à gaz. Cette solution permet d'utiliser l'action hydrodynamique et de réduire les pertes par cisaillement à grande vitesse.

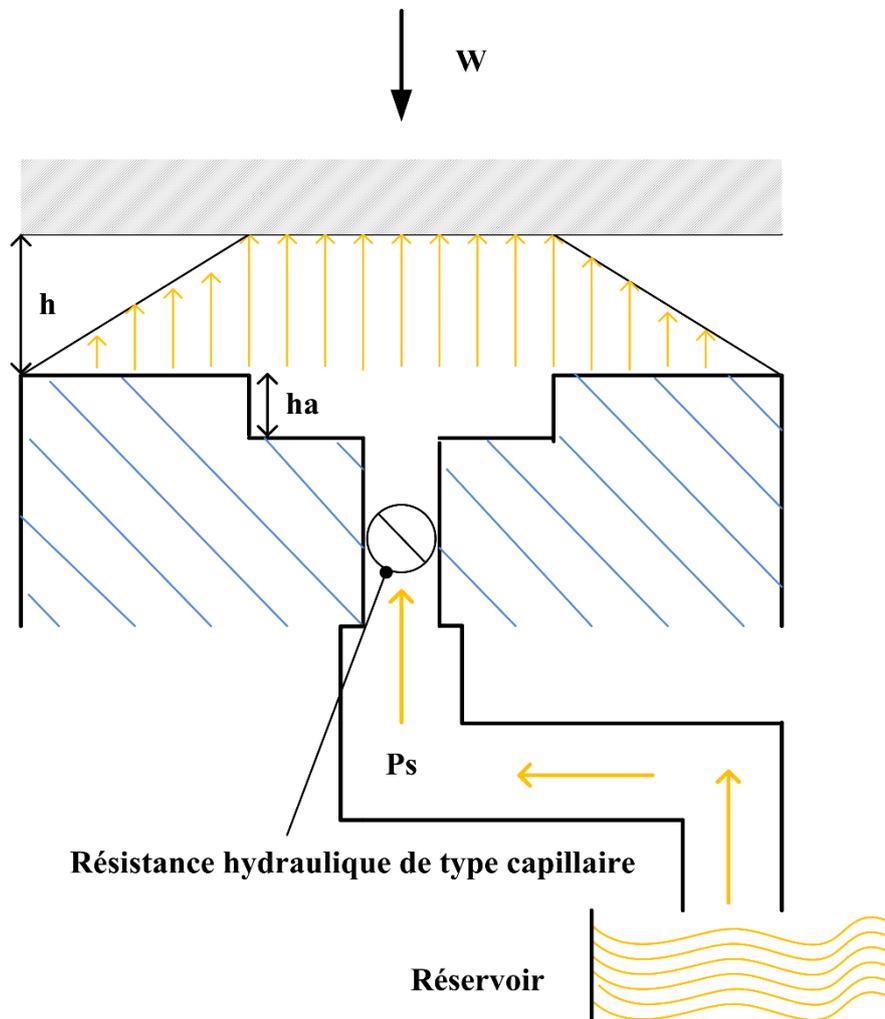


Figure 1.8. Alimentation à pression constante.

1.2.4.3. Formation du film fluide hydrostatique

La formation de film fluide dans une butée hydrostatique est présentée dans la figure 1.9.

- (a) : la pompe est en arrêt.
- (b) : Le fluide sous pression commence à écouler vers la butée et la pression dans l'alvéole augmente.

- (c): La pression d'alvéole augmente jusqu'à ce que la pression à travers la surface d'alvéole soit suffisante pour soulever la charge appliquée.
- (d) : Le palier commence à fonctionner, le fluide s'écoule à travers le système et une chute de pression existe entre la source de pression et le patin, et entre l'alvéole et la sortie du patin.
- (e) : Lorsque la charge augmente, l'épaisseur du film diminue et la pression d'alvéole augmente jusqu'à ce que la pression intégrée à travers les portées soit égale à la charge appliquée.
- (f) : Quand la charge diminue, l'épaisseur du film augmente et la pression d'alvéole diminue.

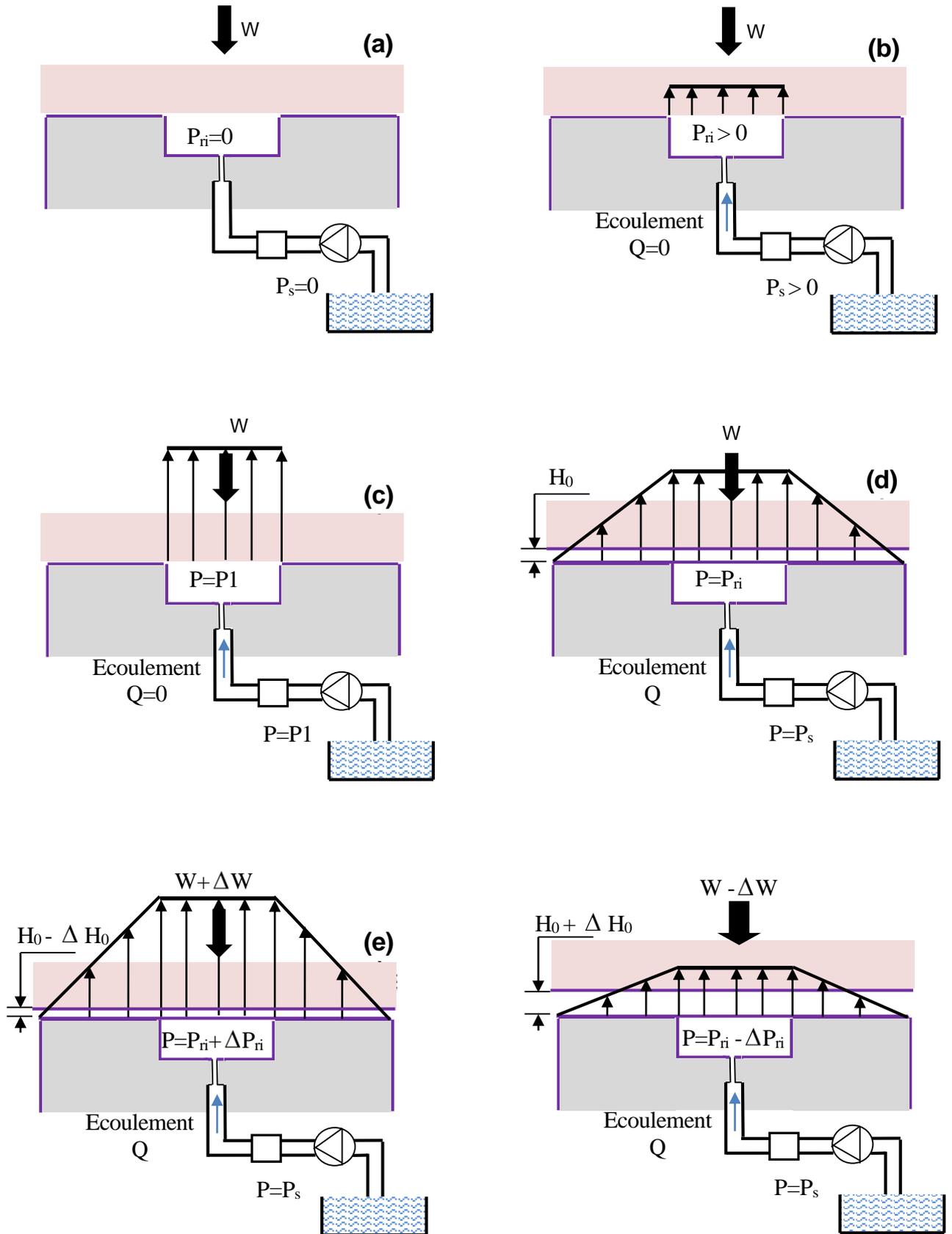


Figure 1.9. Formation du film fluide dans une butée hydrostatique [11].

1.2.4.4. Avantages et inconvénients des paliers hydrostatiques

Par rapport aux autres types de support, la différence essentielle est qu'il n'y a jamais de contact entre les deux surfaces puisqu'une pompe extérieure permet l'introduction de liquide sous pression à l'intérieur de la zone de contact et assure donc l'existence permanente d'un film lubrifiant même à vitesse nulle. Cela entraîne les avantages suivants :

- L'absence d'usure ;
- Un coefficient de frottement très faible ;
- Une très grande raideur, permettant de conserver un positionnement précis malgré des fluctuations de charge importantes ;
- L'inexistence de concentrations de contraintes car la pression étant sensiblement constante dans l'alvéole, la charge est supportée par une grande surface ;
- Des problèmes thermiques au sein du film lubrifiant très souvent secondaires, car on est en présence d'un écoulement forcé à débit important ainsi l'hypothèse d'un régime d'écoulement isotherme est justifiée.

Les inconvénients majeurs des dispositifs hydrostatiques sont leur coût, car ils nécessitent une pompe, des filtres, des régulateurs de pression, etc, ainsi que le moindre incident dans le système d'alimentation peut entraîner la destruction des surfaces.

Du fait de l'inconvénient majeur des dispositifs hydrostatiques sont leur coût de réalisation, on recourt à un système hydrostatique lorsqu'un roulement ou un palier hydrodynamique ne permet pas un fonctionnement correct.

Les avantages énumérés précédemment montrent que le domaine d'utilisation des butées et paliers hydrostatiques est très vaste. Citons quelques applications particulières :

- Les télescopes et grande antennes radars, qui doivent se déplacer très lentement et de façon régulière.
- Les cylindres pour broyeurs de minerai, dans lesquels les températures ambiantes sont très élevées.
- Les machines-outils de précision et les machines de contrôle, où une grande précision de centrage et une grande rigidité sont nécessaires.

- Les turbopompes, utilisées pour véhiculer des fluides cryogéniques à très basse température et animées de grandes vitesses de rotation.
- Les dispositifs de mesure sur machines d'essai, qui nécessitent d'isoler des éléments afin de mesurer précisément les efforts.

Un très grand nombre d'études ont été consacrées à la lubrification hydrostatique ; la plupart d'entre elles traitent des problèmes spécifiques et ont été publiées dans des revues spécialisées, Au cours des années 1990 à 2010 les publications ont été principalement axées sur le fonctionnement en régime non laminaire des lubrifiants non newtoniens, avec comme principale application les turbopompes utilisées dans le domaine spatial.

1.2.4.5. L'amortisseur à film écrasé hydrostatique, '*hydrostatic squeeze film damper*'

L'amortisseur hydrostatique à film écrasé, appelé également hydrostatique film fluide amortisseur (HSFD), constitue l'une des solutions techniques les plus intéressantes proposées ces dernières années, du fait de la relative simplicité de construction et de la forte capacité d'amortissement. Il consiste en une couche fluide interposée entre les paliers de la machine et le bâti, comme indiqué dans la figure 1.10. Les forces hydrostatiques générées par l'action d'écrasement du fluide, généralement une huile, s'avèrent capables d'atténuer les vibrations du rotor, d'améliorer la stabilité du système et de réduire la transmissibilité.

La structure du HSFD ressemble à celle des paliers hydrostatiques, la différence étant que ceux-ci assurent la portance du rotor outre la fonction d'amortissement et que le film fluide doit être inférieur à 0.250 mm [8] . L'écoulement dans ces derniers est induit par l'entraînement du fluide adhérent aux surfaces, effet dit de Couette, ainsi que par l'écrasement du film, effet dit de Poiseuille [12] . Les frontières solides délimitant le HSFD, par contre, ne subissent pas de mouvements relatifs tangentiels, si bien que l'effet de Couette est absent. Le HSFD est alors incorporé au système mécanique dans le but spécifique de dissiper de l'énergie, la portance du rotor devant être fournie par ailleurs.

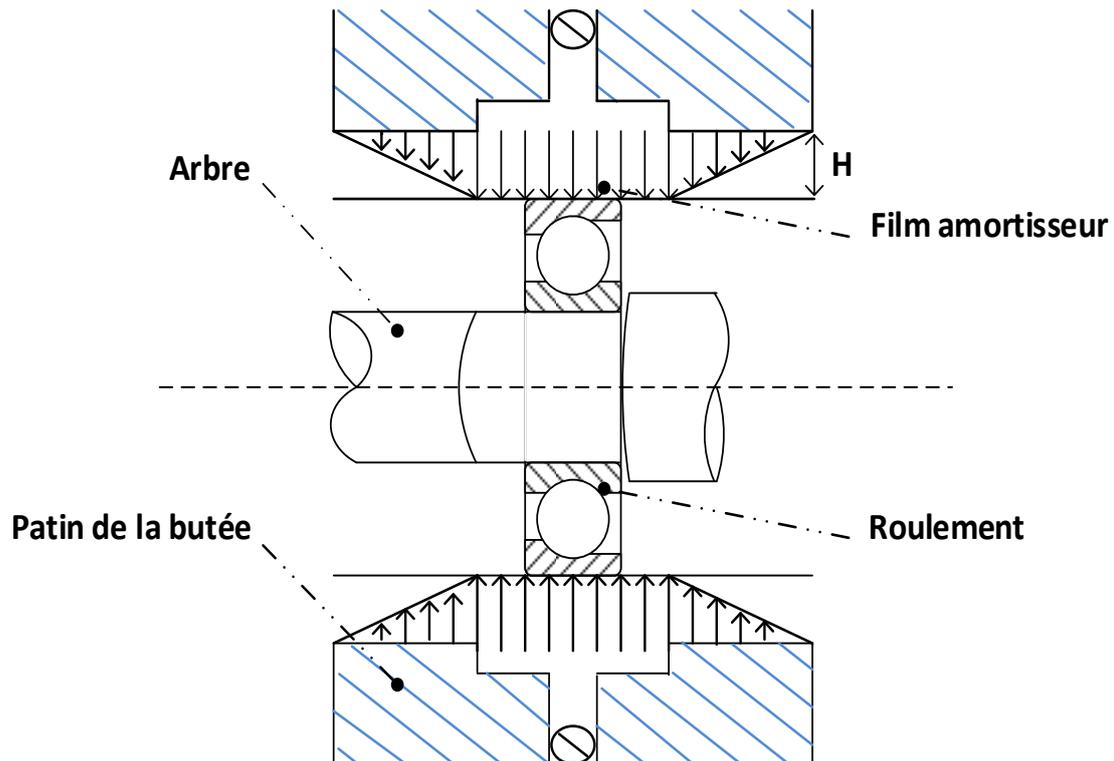


Figure 1.10. Rotor monté sur un palier à roulement utilisé comme 'hydrostatic squeeze film damper'.

- **Applications de l'amortisseur à film écrasé hydrostatique, 'hydrostatic squeeze film damper'**

L'objectif visé par l'utilisation du HSFD dépend de l'application à laquelle la machine tournante est destinée. Dans le cas des cylindres pour broyeurs de minerai, par exemple, l'isolation vibratoire est un critère de conception secondaire, du fait de la contrainte faible introduite par le poids des bâtis, qui peuvent être très solides et ainsi bien supporter les charges.

De toute façon le HSFD a été utilisé avec succès dans de nombreuses applications industrielles. Récemment, des recherches approfondies ont montré que les performances de HSFD sont affectées par la pression d'alimentation, la vitesse de rotation et les caractéristiques des lubrifiants.

En 1987 ADAMS et ZAHLOUL [13] ont étudié la vibration des rotors en contrôlant la pression dans un HSFD à quatre patins. Utilisant une méthode linéaire, ils ont montré que la rigidité est tout à fait contrôlable avec la pression d'alimentation alors que l'amortissement est presque insensible aux changements de pression d'alimentation.

L'utilisation de l'amortisseur à film écrasé hybride comme dispositif de contrôle actif pour contrôler les vibrations du rotor a été analysée par EL-SHAFEI et al. [14]. Ils ont trouvé que l'amortisseur à film écrasé hybride améliore la capacité d'isolation des vibrations du rotor et réduit l'amplitude de vibration.

Le contrôle des amortisseur à film écrasé hybride pour le contrôle actif des vibrations des rotors présentant des modes multiples est présenté par EL-SHAFEI et YOUSSEF [15]

BOUZIDANE et al [16] ont développé un modèle non linéaire de HSFD pour étudier l'effet du rapport de pression et de la vitesse de rotation sur la réponse vibratoire et la force transmise d'un rotor rigide supporté par un HSFD à quatre patins.

Le comportement dynamique non-linéaire des rotors rigides, supporté par un HSFD constitué de trois patins hydrostatiques, a été analysé par BOUZIDANE et al [17].

L'amortisseur à film écrasé hybride à contrôle actif est proposé dans l'étude de CHANG-JIAN et al [18].

RATTAN et al [19] ont étudié l'effet de l'orientation de la charge sur la stabilité d'un palier à trois lobes et ont constaté que la stabilité d'un palier à trois lobes supportait un rotor rigide ou flexible est augmenté pour les valeurs positives de l'orientation de la charge, c'est-à-dire lorsque la ligne de charge est décalée dans le sens de rotation opposé.

BOUZIDANE et THOMAS [20] ont étudié les effets des fluides électrorhéologiques sur la réponse et la transmissibilité d'un amortisseur électrorhéologique à film compressible négatif.

Le comportement dynamique non linéaire d'un arbre flexible supporté par des HSFD fut présenté dans BOUZIDANE et THOMAS [21], qui sont alimentés par un fluide électrorhéologique négatif. Un modèle non linéaire du HSFD a été développé afin d'étudier l'effet du fluide électrorhéologique sur le comportement dynamique d'un arbre flexible.

Un HSFD à trois patins compensé par des valve électrorhéologique ont été analysé par ABED et al [22]. Les résultats montrent que la viscosité d'un fluide intelligent à l'intérieur de chaque vanne électrorhéologique peut être contrôlée en utilisant un champ électrique afin de contrôler les caractéristiques statiques et dynamiques du HSFD.

Une étude numérique basée sur la théorie linéaire a été présentée dans la thèse de ABED ASMA [4] afin d'étudier l'effet de l'utilisation d'un fluide électrorhéologique négatif dans des valves électrorhéologiques appliquées à un palier hydrostatique utilisé comme '*hydrostatic squeeze film damper*'. Les caractéristiques statiques et dynamiques ont été étudiées en fonction du champ électrique pour différentes valeurs du rapport de pression et du rapport des dimensions du patin. Une étude sur l'amplitude de vibration et les forces transmises d'un rotor rigide supporté par le palier hydrostatique étudié a été aussi présentée. Les résultats numériques ont montré que les caractéristiques statiques et dynamiques peuvent être considérablement modifiées par l'application du champ électrique.

Dans l'étude de BELGACEM [23], une méthode non-linéaire a été réalisée en utilisant le modèle de Jenkins afin d'étudier l'effet de la lubrification des ferrofluides sur l'amplitude des vibrations et les forces transmises du HSFD. Les résultats ont montré que la lubrification au ferrofluide est utile pour contrôler les vibrations du roulement et les forces transmises.

1.3. Fluide complexe

Les fluides complexes sont des mélanges binaires présentant une coexistence entre deux phases : solide-liquide (suspensions ou solutions contenant des macromolécules telles que des polymères ou des micelles géantes), solide-gaz (milieux granulaires), liquide-gaz (mousses) et liquide-liquide (émulsions) [24].

Du point de vue rhéologique, contrairement aux fluides simples (newtoniens) qui sont définis par une viscosité constante, les fluides complexes sont généralement non-newtoniens et peuvent présenter une grande variété de comportements en écoulement.

Leur viscosité peut ainsi varier avec le taux de cisaillement ou la contrainte, varier dans le temps (thixotropie) par des mécanismes de structuration ou d'agrégation internes, et ils peuvent également développer des contraintes élastiques (viscoélasticité).

Les fluides complexes, dont la structure, les propriétés d'écoulement et les lois de comportement restent un sujet de recherche très actif tant du point de vue fondamental que de celui des applications, sont omniprésents dans de nombreux domaines : alimentaire (crèmes, pâtes, mousses, sauces, purées), cosmétique (shampoings, dentifrices, gels...), produits industriels (peintures, matières plastiques, aérosols...), fluides biologiques (sang, mucus...) et les lubrifiants industriels.

Le physico-chimiste doit se munir d'outils expérimentaux et conceptuels qui permettent d'appriivoiser cette grande richesse de comportements et de propriétés. C'est à la physique statistique de proposer des modèles prédisant les propriétés macroscopiques de l'écoulement à partir de sa structure microscopique. Plus globalement, la rhéologie donnera des principes de description généraux de la mécanique des écoulements. Une fois la réponse macroscopique du fluide connue, l'histoire n'est pas terminée, et, à plus grande échelle, la physique des phénomènes dynamiques, classiquement liée aux instabilités hydrodynamiques, pourra nous dire comment les écoulements de fluides complexes présentent des instabilités qui leurs sont propres.

1.3.1. Fluide micropolaire

Les théories de la lubrification appliquées à l'analyse des paliers par différents chercheurs n'ont pris en compte que la modification macroscopique des propriétés du lubrifiant. Les particules individuelles dans le lubrifiant peuvent changer leur forme ou leur mouvement et devenir efficace dans la région équivalente de jeux de palier. Par conséquent, le postulat newtonien classique n'est pas valable pour les fluides considérant l'effet des molécules. La mécanique des fluides newtoniens doivent être généralisées lorsque l'échelle de longueur extérieure devient comparable aux dimensions moyennes des particules de matière dans les fluides complexes tels que les suspensions polymériques, sang animal, et les cristaux liquides. La présence des microstructures dans le fluide peut se fait sentir de plusieurs façons, dans le cas des cristaux liquides par exemple, l'orientation de celles-ci a un impact sur l'écoulement global. Ces microstructures peuvent aussi avoir une vitesse angulaire propre, ce qui entraîne l'apparition de nouvelles contraintes dont il faut tenir compte.

Les fluides micropolaires [25] proviennent d'une simplification de la théorie des microfluides [26] de 22 coefficients de viscosité à 6 coefficients de viscosité (α , β , γ_v , k_v , μ et λ) on considère des microstructures ne se déformant pas et n'ayant pas d'orientation propre, on

conserve alors uniquement les effets dus à leur rotation où un nouveau vecteur de vitesse angulaire des particules et les coefficients de viscosité correspondants ont été ajoutés aux équations de Navier-Stokes. Ceci constitue une généralisation substantielle de ces équations et ouvre un nouveau champ d'applications incluant un grand nombre de fluide complexe.

L'application du modèle des fluides micropolaires dans nombreuses cas classiques est très simple, tels que l'écoulement à travers un capillaire ou entre deux plaques parallèle sous les hypothèses géométriques et dynamiques habituelles. La simplicité du modèle du fluide micropolaire ne signifie évidemment pas la trivialité mathématique. Le modèle classique Navier-stokes lui-même est un cas particulier du modèle du fluide micropolaire, est loin d'être trivial. Dans ce contexte, la simplicité signifie l'élégance et la beauté de la théorie mathématique.

1.3.2. Les équations de la lubrification micropolaire

Les équations de fluide micropolaire compressible proposé par Eringen sous la forme vectorielle sont [25]:

Conservation de masse

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho V) = 0 \quad (1.1)$$

Conservation de quantité de mouvement linéaire

$$-\nabla P + (\lambda + 2\mu)\nabla \nabla \cdot V + k_v \nabla \times \omega - \left(\mu + \frac{k_v}{2}\right)\nabla \times \nabla \times V + \rho f_v = \rho \frac{DV}{Dt} \quad (1.2)$$

Conservation de quantité de mouvement angulaire

$$(\alpha + \beta + \gamma_v)\nabla \nabla \cdot \omega - \gamma_v \nabla \times \nabla \times \omega + k_v \nabla \times V - 2k_v \omega + \rho f_c = \rho j \frac{D\omega}{Dt} \quad (1.3)$$

Il faut noter que le système (1.1-1.3) comporte 7 équation pour les 7 fonctions $P(x,y,z)$,

$$V = (u_1(x,y,z), u_2(x,y,z), u_3(x,y,z)) \text{ et } \omega = (\omega_1(x,y,z), \omega_2(x,y,z), \omega_3(x,y,z))$$

μ et λ ce sont les coefficients de viscosité du fluide newtonien. Les forces volumiques sont regroupées ici sous le terme f_v , ce sont des forces dont l'effet s'exprime à distances ; la force volumique f_c est une force de couple, ce genre de force apparaît, par exemple lorsque le domaine est

en rotation ; ω est le vecteur de giration ; ρ est la masse volumique ; V est le vecteur de vitesse ; P est la pression statique ; j représente la dimension caractéristique des microstructures qui composent un fluide micropolaire. Certains auteurs appellent ce dernier, le coefficient de microinertie d'autres, le rayon de giration.

La nature compressible du fluide est caractérisée par la première équation. Si en considérant un fluide incompressible l'équation (1.1) devient $\nabla \cdot V = 0$. Cette relation indique que si une quantité de matière pénètre à l'intérieur d'un volume donné, une quantité équivalente doit en ressortir.

La partie droite de l'équation (1.2) exprime la variation totale du champ de vitesse V par rapport au temps [27]

$$\frac{DV}{Dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + V \cdot \nabla V \quad (1.4)$$

La variation de la quantité de mouvement linéaire dépend de deux types de force agissant sur le fluide : les forces de surfaces et les forces volumiques.

Les forces de surfaces sont représentées par trois termes : le terme $-\nabla P$ qui quantifie les forces normales et le terme visqueux $(\lambda + 2\mu)\nabla \nabla \cdot V$ qui provient des effets de cisaillement, le troisième terme $k_v \nabla \times \omega - (\mu + \frac{k_v}{2})\nabla \times \nabla \times V$ est nouveau, il représente les effets produits par la rotation des microstructures.

Ce nouveau terme contient une différence entre la giration ω et la vitesse angulaire locale. Ainsi si la giration induite par la rotation des microstructures a la même intensité et la même direction que la vitesse angulaire locale du fluide, ce terme s'annule. L'impact des microstructures sur l'écoulement est alors nul. D'un autre côté, une différence entre le sens ou l'intensité de la rotation des microstructures et la vitesse angulaire du fluide amène une modification du champ de vitesse. [27]

L'équation (1.3) décrit l'évolution de la giration, on considère la variation totale de cette variable :

$$\frac{D\omega}{Dt} = \frac{\partial\omega}{\partial t} + V \cdot \nabla\omega \quad (1.5)$$

Pour tenir compte les différents effets de rotation, nous nous retrouvons avec quatre nouveaux coefficients α , β , γ_v et k_v . Pour les deux premiers coefficients (α et β) aucun sens physique clair n'a été donné. γ_v est un coefficient de viscosité du fluide micropolaire. Le coefficient k_v permet l'échange de quantité de mouvement angulaire entre le milieu et les microstructures, certains auteurs [28] ; [29] appellent ce dernier 'the spin viscosity'. D'après Grad [30] le seul mécanisme par lequel ce genre d'échange est possible c'est la collision moléculaire. La fréquence de ces collisions dépend de la surface de contact des microstructures ainsi que de la surface de la frontière de la zone qu'une microstructure peut parcourir avant d'entrer en collision avec une autre microstructure.

Grad [30] propose une relation de proportionnalité entre k_v et μ

$$k_v \propto \frac{j^2}{l^2} \mu \quad (1.6)$$

l est la *mean free path*, la distance moyenne parcourue par une microstructure avant d'entrer en collision avec une autre microstructure. Si l est grande une microstructure parcourt un long trajet avant d'en rencontrer une autre, ce qui signifie qu'il y a peu de microstructure dans le milieu. Donc on peut le considérer comme un indicateur de la concentration en microstructures du fluide.

$$\alpha \propto j^2 \mu, \beta \propto j^2 \mu, \gamma_v \propto j^2 \mu \quad (1.7)$$

1.3.2.1. Hypothèse et démonstration

Pour établir l'équation de Reynolds modifiée pour un fluide micropolaire incompressible, nous allons faire les hypothèses suivantes :

- 1) Tous les coefficients caractéristiques sont indépendants.
- 2) Les forces de couple et les forces volumiques sont négligées.

3) Le film est suffisamment mince par rapport à la longueur et à la portée du palier pour permettre d'ignorer la courbure du film fluide.

4) L'écoulement est laminaire : le vortex et la turbulence ne se produisent pas dans le film.

5) Il n'y a pas de glissement sur les surfaces du palier.

Trois autres hypothèses sont faites :

1) Les surfaces des patins sont lisses, c'est-à-dire qu'il n'y a pas de rugosité de surface.

2) Les surfaces de palier ne sont pas poreuses.

3) Les surfaces des patins sont rigides, c'est-à-dire qu'elles ne sont pas déformées sous la pression du fluide.

Maintenant supposons que la vitesse et la giration ont la forme suivante :

$$V = (u_1, u_2, u_3) \text{ et } \omega = (\omega_1, 0, \omega_3) \quad (1.8)$$

nous obtenons les équations différentielles suivantes pour l'écoulement de lubrifiant :

$$\frac{1}{2}(2\mu + k_v) \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} + k_v \frac{\partial \omega_3}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial x} = 0 \quad (1.9)$$

$$\frac{1}{2}(2\mu + k_v) \frac{\partial^2 u_3}{\partial y^2} - k_v \frac{\partial \omega_1}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial z} = 0 \quad (1.10)$$

$$\gamma_v \frac{\partial^2 \omega_3}{\partial y^2} - k_v \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} - 2k_v \omega_3 = 0 \quad (1.11)$$

$$\gamma_v \frac{\partial^2 \omega_1}{\partial y^2} + k_v \frac{\partial^2 u_3}{\partial y^2} - 2k_v \omega_1 = 0 \quad (1.12)$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial u_3}{\partial z} = 0 \quad (1.13)$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 0 \quad (1.14)$$

pour la couche du lubrifiant (figure 1.11) les conditions aux limites sont :

$$\begin{aligned}
 y = 0 & \quad \begin{cases} \mathbf{u}_1 = \mathbf{U}_1 \\ \mathbf{u}_2 = 0 \\ \mathbf{u}_3 = 0 \end{cases} \quad ; \quad \omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 0 \\
 y = h & \quad \begin{cases} \mathbf{u}_1 = \mathbf{U}_2 \\ \mathbf{u}_2 = V_2 + U_2 \frac{\partial h}{\partial x} \\ \mathbf{u}_3 = 0 \end{cases} \quad ; \quad \omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 0
 \end{aligned} \quad (1.15)$$

Où h représente l'épaisseur du film d'huile, U_1 est la vitesse tangente de la surface 1, U_2 et V_2 sont la vitesse tangente et la vitesse normale de la surface 2, respectivement.

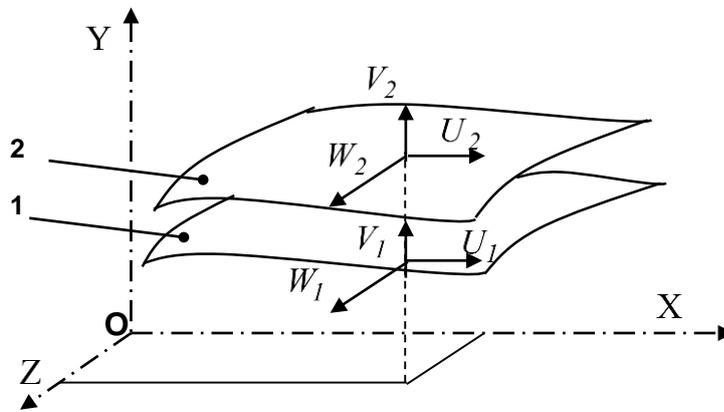


Figure 1.11. Géométrie et cinématique du contact.

Les expressions des vitesses u_1 , u_3 et les vitesses angulaires des microstructures ω_1 , ω_3 comme résultat de la résolution des équations (1.09-1.14) prendre en compte les conditions aux limites (1.15) sont :

$$u_1 = \frac{1}{\mu} \frac{\partial P}{\partial x} \left[\frac{y^2}{2} - \frac{N^2}{m} \frac{h}{sh(mh)} \frac{ch(my)-1}{sh(mh)} \right] + U_1 + \frac{D_1}{1-N^2} \left(y - \frac{N^2}{m} \left[sh(my) - \frac{(ch(my)-1)(ch(mh)-1)}{sh(mh)} \right] \right) \quad (1.16)$$

$$u_3 = \frac{1}{\mu} \frac{\partial P}{\partial z} \left[\frac{y^2}{2} - \frac{N^2}{m} \frac{h}{sh(mh)} \frac{ch(my)-1}{sh(mh)} \right] + \frac{D_2}{1-N^2} \left(y - \frac{N^2}{m} \left[sh(my) - \frac{(ch(my)-1)(ch(mh)-1)}{sh(mh)} \right] \right) \quad (1.17)$$

$$\omega_1 = - \left[\frac{D_2}{2(1-N^2)} (ch(my)-1) + \frac{sh(my)}{sh(mh)} \left[\frac{h}{2\mu} \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{D_2}{2(1-N^2)} (ch(mh)-1) \right] - \frac{1}{2\mu} \frac{\partial P}{\partial z} y \right] \quad (1.18)$$

$$\omega_3 = \frac{D_1}{2(1-N^2)} (ch(my)-1) + \frac{sh(my)}{sh(mh)} \left[\frac{h}{2\mu} \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{D_1}{2(1-N^2)} (ch(mh)-1) \right] - \frac{1}{2\mu} \frac{\partial P}{\partial x} y \quad (1.19)$$

Où

$$D_1 = - \frac{(1-N^2)}{2} \left(\frac{h}{\mu} \frac{\partial P}{\partial x} + (U_1 - U_2) \right) / \left[\frac{h}{2} - \frac{N^2}{m} \frac{ch(mh)-1}{sh(mh)} \right] \quad (1.20)$$

$$D_2 = - \frac{(1-N^2)}{2} \frac{h}{\mu} \frac{\partial P}{\partial z} \quad (1.21)$$

$$N = \left(\frac{k_v}{2\mu + k_v} \right)^{0.5} ; l_m = \left(\frac{\gamma_v}{4\mu} \right)^{0.5} ; m = \frac{N}{l_m} \quad (1.22)$$

N et l_m deux paramètres qui caractérisent un fluide micropolaire d'un fluide newtonien, N caractérise le couplage de l'équation de la quantité du mouvement linéaire et l'équation de la quantité du mouvement angulaire, il est appelé "the coupling number" et l_m caractérise la longueur de l'élément du fluide micropolaire. Ce paramètre peut être identifié comme la taille des microstructures présentes dans le lubrifiant.

Maintenant en intégrant l'équation de continuité (1.13) le long de y on obtient :

$$V_2 = - \left(\frac{\partial}{\partial x} \int_0^h u_1 \partial y + \frac{\partial}{\partial z} \int_0^h u_3 \partial y + U_2 \frac{\partial h}{\partial x} \right) \quad (1.23)$$

puis en remplaçant u_1 et u_3 de l'équation (1.16), (1.17) et considérant V_2 comme la vitesse d'écrasement c'est-à-dire $V_2 = \frac{\partial h}{\partial t}$ on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(G(h, l_m, N) \frac{\partial p}{\partial x} \right) + G(h, l_m, N) \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = 12 \frac{\partial h}{\partial t} + 6(U_1 + U_2) \frac{\partial h}{\partial x} \quad (1.24)$$

Où

$$G(h, l_m, N) = \frac{h}{\mu} \left[h^2 + 12l_m^2 - 6Nl_m h \frac{1 + \operatorname{ch}(Nh/l_m)}{\operatorname{sh}(Nh/l_m)} \right] \quad (1.25)$$

L'équation (1.24) est l'équation de Reynolds modifiée pour le fluide micropolaire et quand lm est mis à zéro. L'équation (1.24) se réduit à la forme classique de l'équation de Reynolds.

1.3.3. Application de la lubrification micropolaire

Les investigations théoriques sur la lubrification micropolaire des paliers ont été initiées par Allen [31]. Ils ont constaté que la charge portante d'un palier incliné augmente et son coefficient de frottement réduit par un lubrifiant micropolaire.

SHUKLA et al [32] ont étudié le profil d'épaisseur de film pour maximiser la charge portante. Cette analyse a révélé que la charge maximale augmente à mesure que le paramètre caractérisant la microstructure de la suspension augmente.

PRAKASH et al [33] proposent un palier infiniment long avec des lubrifiants micropolaires. Ils ont constaté que ces fluides augmentent la viscosité dynamique, surtout en présence des films minces.

ZAHEERUDDIN et al [34] étudié des paliers infiniment longs, ainsi que des paliers infiniment courts, fonctionnant avec des lubrifiants micropolaires. L'étude a montré que par rapport aux lubrifiants newtoniens, les lubrifiants micropolaires peuvent augmenter la charge des paliers et le moment de frottement, tout en réduisant le coefficient de frottement. Des effets similaires ont été trouvés par TIPEI [35] avec des paliers courts.

Une étude détaillée par SINGH et al [36] a porté sur les trois équations de Reynolds pour la lubrification micropolaire.

Les caractéristiques d'un palier long sous divers paramètres dynamiques, géométriques et micropolaires ont été analysées par ZU-GAN et ZHANG-JI [37].

L'étude de KHONSARI et BREWE [38] sur les performances d'un palier infiniment long lubrifié avec des fluides micropolaires a confirmé plus tard les avantages des lubrifiants micropolaires par rapport aux newtoniens. Ils ont indiqué que l'importance de l'augmentation de la charge portante dépend de la taille des microstructures présentes dans le lubrifiant et 'the coupling number'.

Utilisant la technique de perturbation de premier ordre, DAS et al [39] décrit les caractéristiques dynamiques des paliers hydrodynamiques lubrifiés avec des fluides micropolaires. Leurs résultats montrent que les fluides micropolaires présentent une meilleure stabilité par rapport aux fluides newtoniens.

WANG et KE-QIN [40] ont utilisé une approche numérique pour étudier le comportement non-newtonien d'un fluide micropolaire lubrifier un palier fini. Ils ont considéré les effets thermiques et les effets de cavitation.

VERMA et al [41] ont analysé l'influence de la lubrification micropolaire dans les paliers de différentes configurations : hydrostatique, un roulement à lobes elliptiques et non circulaires. Ils ont notamment étudié l'influence des paramètres micropolaires sur les performances d'un palier hydrostatique à quatre poches compensé par une vanne à débit constant.

En 2010, NICODEMUS et SHARMA [42] ont étudié l'influence de l'usure sur les performances des paliers hydrostatiques à quatre poches fonctionnant avec des lubrifiants micropolaires. Ils ont examiné deux dispositifs de chargement différents.

En même temps, RAHMATABADI et al [43] ont analysé la réponse des paliers lisses fonctionnant avec des lubrifiants micropolaires en utilisant la méthode GDQ. Ils ont utilisé une résolution numérique pour résoudre la version modifiée de l'équation de Reynolds et ont établi la performance des paliers hydrodynamiques circulaires et non circulaires fonctionnant avec des lubrifiants micropolaires. Leurs résultats montrent que la micro-polarité des lubrifiants améliore les performances des paliers. Le niveau d'amélioration est également affecté par la non-circularité du palier.

Récemment NICODEMUS et SHARMA [28] ont présenté une étude analytique des systèmes de paliers hydrostatiques / hybrides à quatre orifices, incorporant diverses formes d'alvéoles et lubrifiés avec des fluides micropolaires. Ils ont conclu que l'influence des lubrifiants micropolaires sur les performances des paliers dépend également de la forme de l'alvéole ainsi que la conception de la résistance hydraulique.

Basé sur les modèles de fluide micropolaire des théories d'Eringen et Christensen, l'analyse des effets de la rugosité de surface et les problèmes de lubrification entre des paliers coniques sont présentés par RAO et al [44]. L'équation de Reynolds est résolue avec des conditions aux limites appropriées sans dimension pour trouver la distribution de pression, qui est ensuite utilisée pour obtenir l'expression de la charge, ouvrant la voie au calcul du temps de réponse. Les valeurs calculées de pression, de la charge et de temps de réponse sont affichées sous forme graphique. Cette recherche révèle que le système de palier admet une performance améliorée par rapport à celle d'un système de palier travaillant avec un lubrifiant conventionnel. Selon les résultats, les effets de la rugosité transversale augmentent les caractéristiques du palier par rapport au palier lisse lubrifié avec un fluide micropolaire alors que les influences de la rugosité longitudinale donnent une tendance inverse. Les effets des surfaces rugueuses et des fluides non newtoniens sur les performances des paliers sont plus prononcés pour les paramètres de rugosité et micropolaires.

L'étude de KHATAK et GARG [45] a noté que La dissipation visqueuse du lubrifiant micropolaire entraîne une augmentation de la température du palier hybride où les caractéristiques de performance thermohydrostatique (THS) sont calculées par la solution de l'équation de Reynolds modifiée pour un fluide micropolaire, de l'énergie micropolaire et des équations de conduction. Les résultats obtenus numériquement indiquent que le palier est significativement affecté par l'augmentation de la température. Par conséquent, il est essentiel de prendre en compte les effets

thermiques du palier fonctionnant avec un lubrifiant micropolaire pour produire des données réalistes du palier.

1.4. Dynamique de rotor

La dynamique des rotors étudie la stabilité des mouvements des machines tournantes. Elle joue un rôle important dans la sécurité et l'amélioration des performances des systèmes [46].

La prévision des caractéristiques d'amortissement et de leurs effets est fondamentale pour la conception des machines tournantes afin de fournir une idée précise des plages de rotation "sécurisées". Pour cela, au cours des dernières années, beaucoup d'études dynamiques se sont concentrées sur la modélisation des effets dissipatifs, la prévision des vitesses critiques, des réponses au balourd et enfin sur la prévision des seuils d'instabilité.

Les constructeurs sont amenés à améliorer leurs produits. Les progrès effectués dans la conception et la fabrication des rotors permettent aujourd'hui d'augmenter à la fois les performances et le rendement des machines tournantes en les faisant fonctionner dans des gammes de vitesse de rotation de plus en plus élevées. Cependant, les efforts générés, de plus en plus importants, sollicitent fortement le comportement dynamique global de la machine et les amplitudes vibratoires deviennent souvent trop élevées pour que la structure puisse les supporter. Pour cela, l'amplitude de déformation de l'arbre doit être maîtrisée et ses fréquences de résonance connues afin d'éviter qu'une trop grande vibration engendre un moindre rendement, un bruit trop important ; et cette vibration peut même aboutir à l'instabilité et à l'endommagement du système : rupture par fatigue, endommagement des paliers, frottement rotor/stator. L'étude de la dynamique des rotors est donc plus que jamais d'actualité.

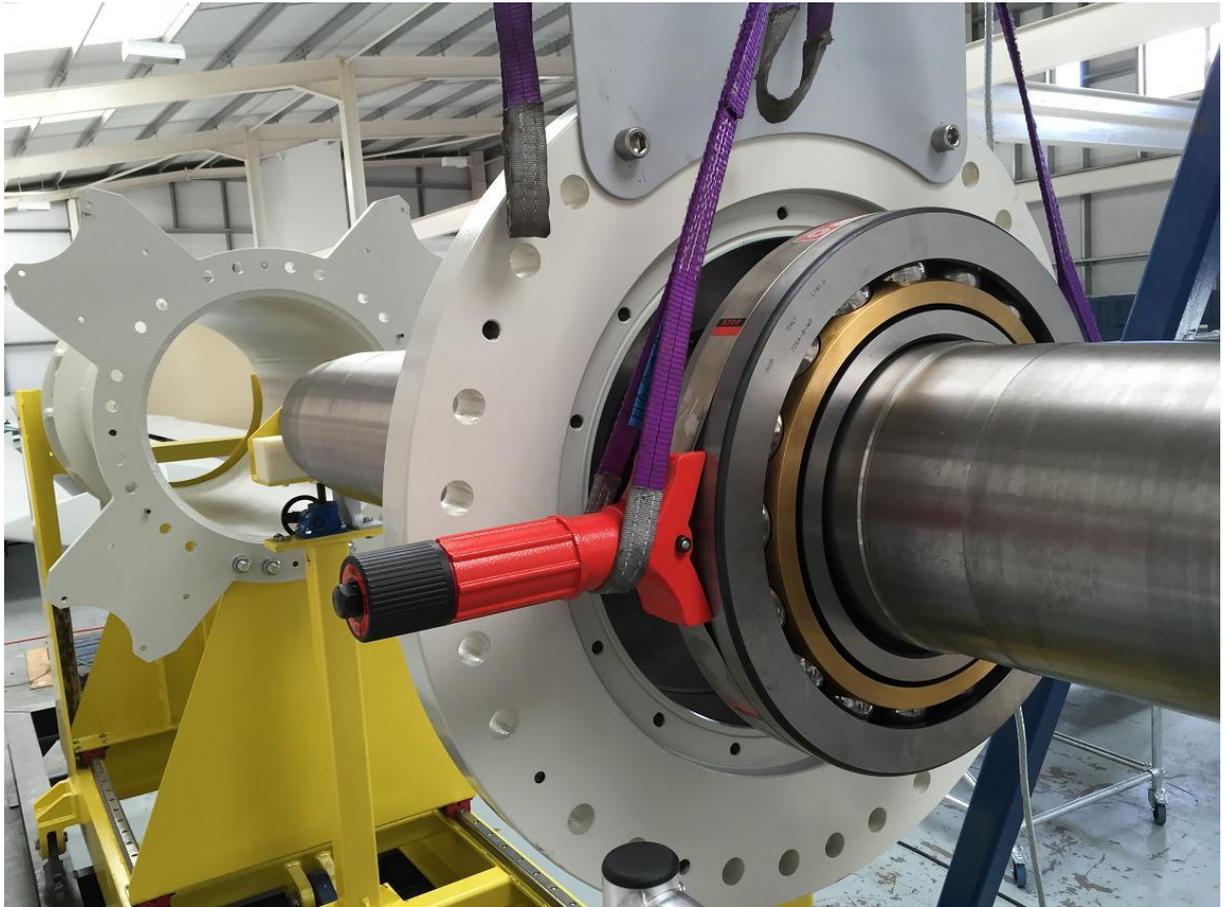


Figure 1.12. Rotor monté sur un palier à roulement [47].

1.4.1. Objectifs de l'analyse de la dynamique des rotors

L'analyse dynamique des rotors peuvent aider à atteindre les objectifs suivant :

- Calculer les valeurs et les positions des masses du balourd à partir des données de vibration mesurées pendant l'opération d'équilibrage.
- Prédire les vitesses auxquelles les vibrations dues au déséquilibre du rotor est maximum (vitesses critiques).
- Déterminer les modifications de conception pour changer les vitesses critiques.
- Prédire les fréquences propres de vibration en torsion, flexion et couplage. Cet objectif s'applique généralement au système de chaîne de transmission.
- Prévoir les amplitudes de vibration provoquée par le déséquilibre du rotor.
- Prédire les vitesses et les fréquences de vibration de seuil d'instabilité dynamique.

Cet objectif est un autre défi à l'heure actuelle, car un certain nombre de forces de déstabilisation ne sont pas encore assez bien compris pour la modélisation mathématique [48].

1.4.2. Classifications des rotors

Les rotors des machines tournantes sont classés en fonction de leurs caractéristiques, comme suit :

1.4.2.1. Rotor rigide

Si la déformation de l'arbre de rotation est négligeable dans la plage de vitesse de fonctionnement, il est appelé un rotor rigide [46].

1.4.2.2. Rotor flexible

Un rotor est généralement considéré comme étant souple ou flexible quand il fonctionne à proximité ou au-dessus de sa fréquence naturelle (vitesse critique). La règle de base est de considérer un rotor flexible s'il fonctionne à 70% de la 1ère critique ou plus rapide. Si l'arbre commence à se déformer sensiblement au début de la plage des vitesses de fonctionnement, il est appelé un rotor flexible. La déformation la plus élevée d'un rotor est en général au voisinage de la vitesse critique. Donc la plage de la vitesse de fonctionnement par rapport aux vitesses critiques détermine si le rotor est rigide ou flexible [49].

1.5. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons décrit les différents types des paliers couramment utilisés dans l'industrie avec la remarque que chaque type a des avantages et inconvénients, et que chaque type a son rôle dans les applications industrielles comme nous avons présenté une brève étude sur la dynamique des rotors.

Une étude concernant les fluides micropolaires a été aussi réalisée où nous avons constaté que ces fluides ont des applications réelles dans le domaine de la lubrification des paliers ainsi que ces fluides ont été étudiés par plusieurs chercheurs récemment où il convient de noter que jusqu'à présent aucune étude n'a examiné les effets de la lubrification micropolaire sur les caractéristiques de performance de '*hydrostatic squeeze film damper*'. Par conséquent, le présent document est consacré à ce problème.

CHAPITRE 2

**ETUDE NUMÉRIQUE D'UN ROTOR
RIGIDE MONTÉ SUR UN PALIER
HYDROSTATIQUE UTILISÉ
COMME “ *HYDROSTATIC SQUEEZE
FILM DAMPER* ” LUBRIFIÉ PAR UN
FLUIDE MICROPOLAIRE**

CHAPITRE 2

ETUDE NUMÉRIQUE D'UN ROTOR RIGIDE MONTÉ SUR UN PALIER HYDROSTATIQUE UTILISÉ COMME “*HYDROSTATIC SQUEEZE FILM DAMPER*” LUBRIFIÉ PAR UN FLUIDE MICROPOLAIRE

2.1. Introduction

L'objectif de ce chapitre est de calculer les performances d'un rotor rigide monté sur un palier hydrostatique utilisé comme “*hydrostatic squeeze film damper*” (HSFD) à quatre patins lubrifié avec un fluide micropolaire.

Les caractéristiques statiques et dynamiques sont déterminées à partir de la résolution de l'équation de Reynolds modifiée pour la lubrification micropolaire. L'écoulement du fluide en régime laminaire est supposé incompressible, isotherme et permanent.

2.2. Étude d'un hydrostatic squeeze film damper

La figure 2.1 montre un palier à roulement supporté sur un palier hydrostatique utilisé comme (HSFD) constitué de quatre patins. Comme le montre cette illustration, tous les patins sont identiques. Les indices 1, 2, 3 et 4 se rapportent respectivement aux caractéristiques des patins plats hydrostatiques inférieur, droit, supérieur et gauche. Le HSFD est alimenté avec un lubrifiant micropolaire à travers des alvéoles dans le palier. Celles-ci sont alimentées par une pression externe P_s à travers des résistances hydrauliques de type capillaire.

Chapitre 2. Étude Numérique d'un Rotor Rigide Monté sur un Palier Hydrostatique lubrifié par un fluide micropolaire

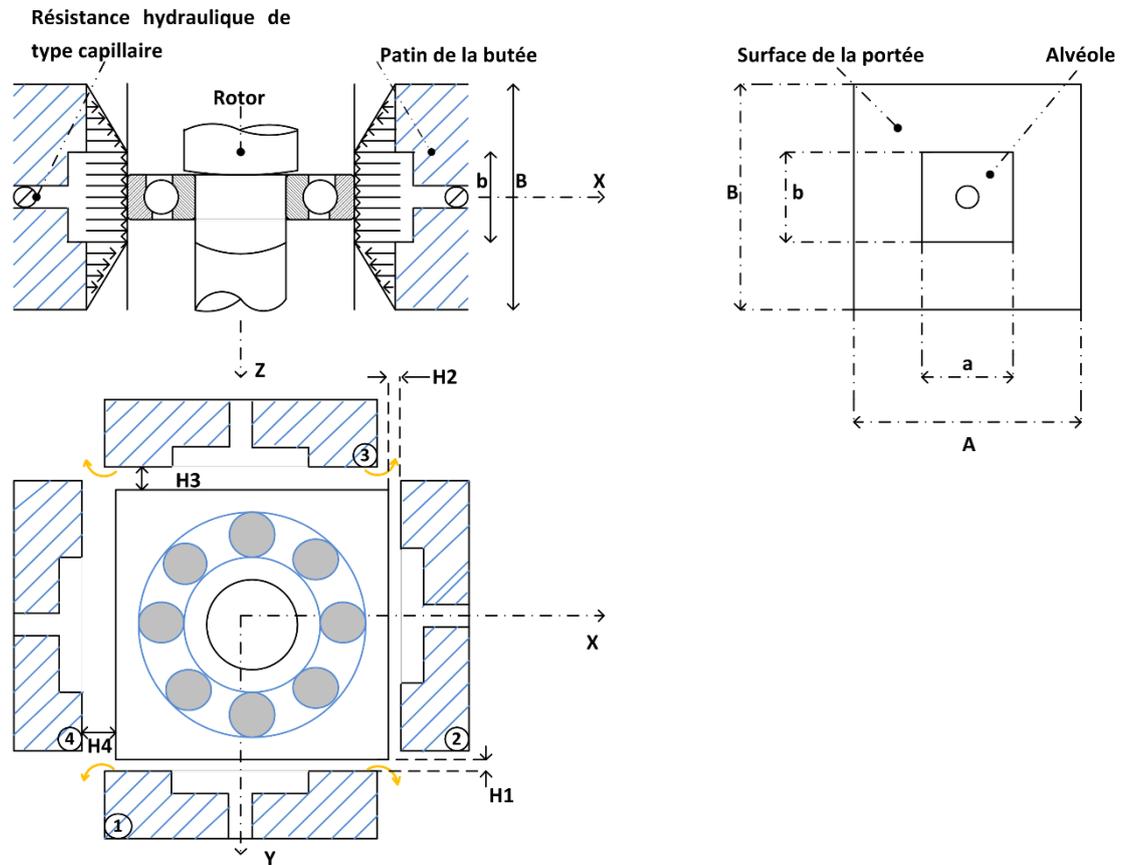


Figure 2.1. Schéma d'un palier à roulement monté sur un (HSFD).

Où :

h_i : représente l'épaisseur du film lubrifiant relative à la butée à simple effet $n^{\circ}i$.

\dot{h}_i : représente la vitesse d'écrasement du grain mobile relative à la butée à simple effet $n^{\circ}i$.

La figure 2.2 montre une butée hydrostatique à simple effet $n^{\circ}i$, qui est constituée par une partie fixe appelée patin à une alvéole centrale et une partie mobile qui est le palier à roulement. Ce dernier est mobile et animé d'une vitesse linéaire \dot{h} .

Chapitre 2. Étude Numérique d'un Rotor Rigide Monté sur un Palier Hydrostatique lubrifié par un fluide micropolaire

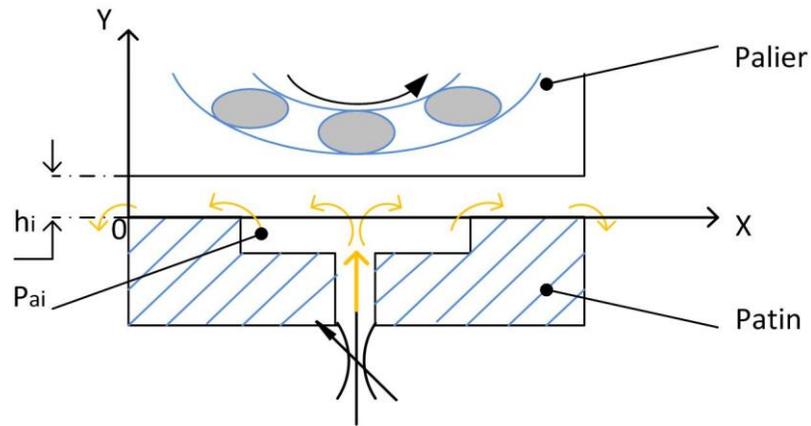


Figure 2.2. Schéma d'une butée hydrostatique à simple effet.

Soit h_0 l'épaisseur du film en position centrée :

L'épaisseur du film de la butée hydrostatique à simple effet n°1 :

$$h_1 = h_0 - e_y \quad (2.1)$$

L'épaisseur du film de la butée hydrostatique à simple effet n°2 :

$$h_2 = h_0 - e_x \quad (2.2)$$

L'épaisseur du film de la butée hydrostatique à simple effet n°3 :

$$h_3 = h_0 + e_y \quad (2.3)$$

L'épaisseur du film de la butée hydrostatique à simple effet n°4 :

$$h_4 = h_0 + e_x \quad (2.4)$$

Où : e_x et e_y sont les excentricités suivant x et y respectivement.

Chapitre 2. Étude Numérique d'un Rotor Rigide Monté sur un Palier Hydrostatique lubrifié par un fluide micropolaire

2.2.1. L'équation de Reynolds modifiée

La résolution de l'équation de Reynolds nous permet de calculer la distribution de pression. Le travail ci-dessous montre l'obtention de la solution de cette équation par la méthode des différences finies. La procédure intègre les hypothèses suivantes : a) il n'y a pas de glissement entre le fluide et les patins du palier, et b) les conditions aux limites associées au champ de vitesse sont représentées sur (figure 2.3) :

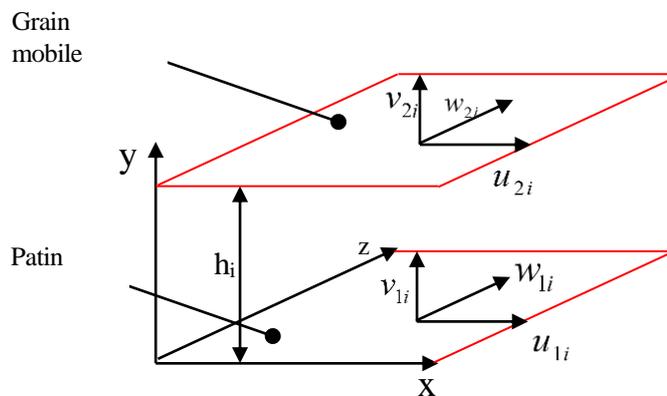


Figure 2.3. Conditions aux limite d'une butée hydrostatique.

Sur le patin ($y = 0$) : $U_{1i} = 0$; $V_{1i} = 0$; $W_{1i} = 0$

Sur le grain mobile ($y = h_i$) : $U_{2i} = 0$; $V_{2i} = \dot{h}$; $W_{2i} = 0$

Où :

U_{1i} ; V_{1i} et W_{1i} sont respectivement les vitesses de surface du patin relatives à la butée à simple effet n°i dans les directions X, Y et Z.

U_{2i} ; $V_{2i} = \dot{h}$ et W_{2i} sont respectivement les vitesses de surface du grain mobile relatives à la butée à simple effet n°i dans les directions X, Y et Z.

Chapitre 2. Étude Numérique d'un Rotor Rigide Monté sur un Palier Hydrostatique lubrifié par un fluide micropolaire

Avec ces conditions et pour un fluide incompressible, laminaire, et isovisqueux, l'équation de Reynolds modifiée pour un fluide micropolaire (1.24) peut être écrite comme :

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(G(h_i, l_m, N) \frac{\partial p_i}{\partial x_i} \right) + G(h_i, l_m, N) \frac{\partial^2 p_i}{\partial z_i^2} = 12 \dot{h}_i \quad (2.5)$$

Où :

$$G(h_i, l_m, N) = \frac{h_i}{\mu} \left[h_i^2 + 12l_m^2 - 6Nl_m h_i \frac{1 + \text{ch}(Nh_i / l_m)}{\text{sh}(Nh_i / l_m)} \right] \quad (2.6)$$

$$N = \left(\frac{k_v}{2\mu + k_v} \right)^{1/2} ; \mu_v = \mu + \frac{1}{2} k_v ; l_m = \left(\frac{\gamma_v}{4\mu} \right)^{1/2} \quad (2.7)$$

P_i est le champ de pression micropolaire pour chaque patin ; μ et μ_v représentent le coefficient de viscosité du fluide newtonien et le coefficient de viscosité dynamique du fluide micropolaire, respectivement.

- **Les conditions aux limites**

Afin de résoudre l'équation de Reynolds modifiée, on suppose que :

- À la limite externe, les pressions des nœuds sont nulles ;
- La pression dans l'alvéole est constante et égal à P_{ai} ;
- Afin d'éviter la cavitation, la pression négative est mise à zéro lors du processus de calcul itératif ;
- Le débit sortant est égal au débit entrant.

2.2.1.1. Discrétisation de l'équation de Reynolds modifiée

La discrétisation de l'équation de Reynolds modifiée est faite en subdivisant le domaine en un réseau de rectangles élémentaires (maillage). Les variables continues X et Z sont remplacés par des variables discrètes I et J.

Chapitre 2. Étude Numérique d'un Rotor Rigide Monté sur un Palier Hydrostatique lubrifié par un fluide micropolaire

Le domaine d'étude est illustré dans la figure 2.4.

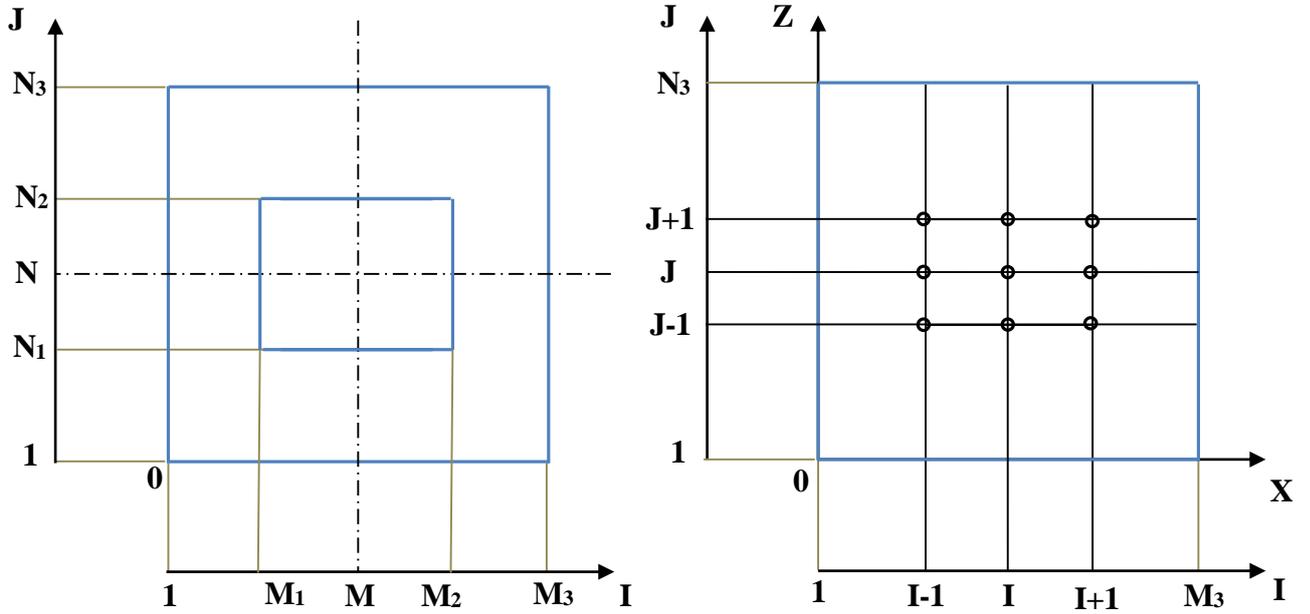


Figure 2.4. Domaine de calcul.

La localisation des nœuds est présentée dans la figure 2.5. Par l'utilisation de développement de Taylor, la valeur de la pression P en un point de coordonnées I et J est en fonction des valeurs des pressions aux points situés au voisinage de ce même point. On obtient les relations suivantes :

$$\frac{\partial P_i(I, J)}{\partial X} = \frac{P_i(I+1, J) - P_i(I-1, J)}{2\Delta X} \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial P_i(I, J)}{\partial Z} = \frac{P_i(I, J+1) - P_i(I, J-1)}{2\Delta Z} \quad (2.9)$$

$$\frac{\partial^2 P_i(I, J)}{\partial X^2} = \frac{P_i(I+1, J) - 2P_i(I, J) + P_i(I-1, J)}{\Delta X^2} \quad (2.10)$$

$$\frac{\partial^2 P_i(I, J)}{\partial Z^2} = \frac{P_i(I, J+1) - 2P_i(I, J) + P_i(I, J-1)}{\Delta Z^2} \quad (2.11)$$

Chapitre 2. Étude Numérique d'un Rotor Rigide Monté sur un Palier Hydrostatique lubrifié par un fluide micropolaire

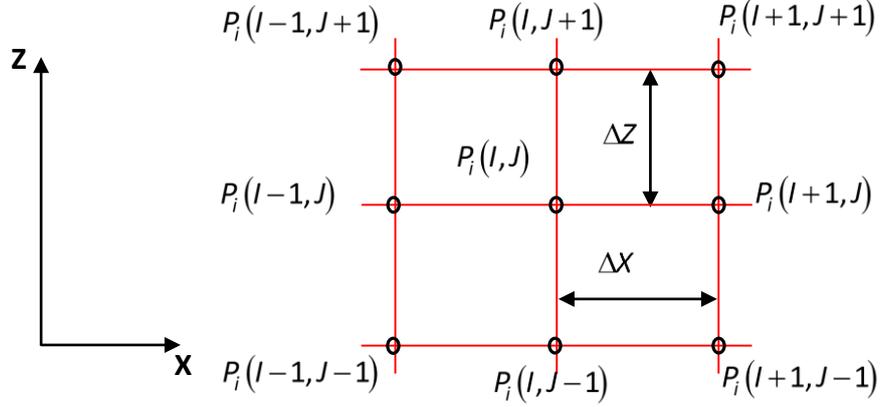


Figure 2.5. Description d'un nœud.

ΔX et ΔZ représentent les pas, c'est-à-dire les distances séparant deux points consécutifs suivant X et Z respectivement.

En remplaçant les expressions obtenues dans l'équation de Reynolds (Eq 2.5), on obtient la relation suivante pour chaque nœud dans le domaine d'intégration :

$$\begin{aligned}
 -2\left(\frac{1}{\Delta X^2} + \frac{1}{\Delta Z^2}\right)P_i(I, J) + \frac{1}{\Delta X^2}(P_i(I+1, J) + P_i(I-1, J)) + \\
 + \frac{1}{\Delta Z^2}(P_i(I, J+1) + P_i(I, J-1)) = \frac{12\dot{h}_i}{G(h_i, l_m, N)}
 \end{aligned} \tag{2.12}$$

2.2.1.2. Résolution numérique du système d'équations

Pour résoudre le système de $(M3 \ N3)$ équations, on choisit la méthode itérative de Gauss-Seidel avec un coefficient de sur-relaxation. Pour appliquer cette méthode, il suffit d'écrire l'équation aux différences finies sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}
 P_i(I, J)^{(K+1)} = (1-\Omega)P_i(I, J)^{(K)} + \Omega \left[CR_i + CJ_i \left(P_i(I+1, J)^{(K+1)} + P_i(I-1, J)^{(K+1)} \right) + \right. \\
 \left. + CI_i \left(P_i(I, J+1)^{(K+1)} + P_i(I, J-1)^{(K+1)} \right) \right]
 \end{aligned} \tag{2.13}$$

Ici : CR_i , CJ_i et CI_i sont des coefficients obtenus par identification où :

Chapitre 2. Étude Numérique d'un Rotor Rigide Monté sur un Palier Hydrostatique lubrifié par un fluide micropolaire

$$CR_i = \frac{12 \dot{h}_i}{G(h_i, l_m, N)} CP, \quad CJ_i = \frac{CP}{\Delta X^2}, \quad CI_i = \frac{CP}{\Delta Z^2} \quad \text{et} \quad CP = \frac{\Delta X^2 \times \Delta Z^2}{2(\Delta X^2 + \Delta Z^2)} \quad (2.14)$$

Ω est le coefficient de sur-relaxation ($1.4 < \Omega < 1.8$) et K le nombre d'itération.

Afin de réduire les dimensions du problème, et par conséquent le temps et l'espace nécessaire pour le calcul, la symétrie du domaine d'intégration par rapport aux axes X et Z est utilisée en ne prenant que le quart du domaine d'étude (figure 2.6).

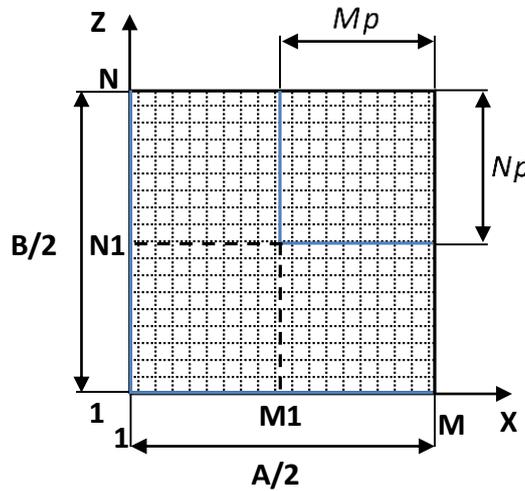


Figure 2.6. Discrétisation d'un quart du domaine d'intégration.

- Les pas ΔX et ΔZ sont déterminés en utilisant les relations suivantes :

$$\Delta X = \frac{A}{2CA(MP-1)} \quad \text{et} \quad \Delta Z = \frac{B}{2CB(NP-1)} \quad \text{avec} \quad CA = A/a \quad \text{et} \quad CB = B/b. \quad (2.15)$$

- M et N représentent les nombres des mailles du domaine suivant X et Z respectivement où ;

$$M = CA(MP-1) + 1 \quad \text{et} \quad N = CB(NP-1) + 1. \quad (2.16)$$

Chapitre 2. Étude Numérique d'un Rotor Rigide Monté sur un Palier Hydrostatique lubrifié par un fluide micropolaire

- MP et NP représentent les nombres des mailles du domaine d'alimentation (l'alvéole) suivant X et Z respectivement.

L'application de la méthode de Gauss-Seidel avec coefficient de sur-relaxation passe par les étapes suivantes :

- Choisir au début un ensemble de valeurs $P(I,J)$, qu'on affecte à la variable $P(I,J)$, correspondant aux nœuds de l'intérieur du domaine d'intégration (l'initialisation du champ de pression);
- Les valeurs $P(I, J)$ à la frontière sont données par les conditions aux limites ;
- Après, en reportant les valeurs $P(I,J)^0$ dans le second membre de l'équation (2.13) pour tous $I = 2, M - 1$ et $J = 2, N - 1$, on obtient les valeurs $P(I,J)^1$, l'exposant 1 correspond à la première itération;
- On refait la même opération jusqu'à ce que les valeurs $P(I, J)^{(K)}$ et $P(I, J)^{(K+1)}$ en chaque nœud soient suffisamment voisines et le système converge, ainsi on arrête le processus itératif si: $\left| P_i(I, J)^{(K+1)} - P_i(I, J)^{(K-1)} \right| < \varepsilon_T$, avec $I=2, M-1, J=2, N-1$ et ε_T est la marge d'erreur tolérée sur la pression.

- **Conditions aux limites**

Afin d'intégrer l'équation de Reynolds modifiée, il faut tenir compte de la pression de l'alvéole et les conditions aux limites des pressions sur les parois :

$$1) \text{ Pour } \begin{cases} I = 1 \text{ et } J = 1, N \Rightarrow P_i(I, J) = P_0 \\ J = 1 \text{ et } I = 1, M \Rightarrow P_i(I, J) = P_0 \end{cases} \text{ avec } P_0 : \text{ la pression ambiante.}$$

$$2) \text{ Pour } \begin{cases} I \geq M1 \\ J \geq N1 \end{cases} \Rightarrow P_i(I, J) = P_{ai} \quad \text{avec } P_{ai} : \text{ la pression d'alvéole.}$$

$$3) \text{ Pour } \begin{cases} J = N, I \in]1, M[\\ \left. \frac{\partial P_i(I, J)}{\partial x} \right|_N = 0 \end{cases} \Rightarrow P_i(I, J) \text{ est déterminé par la résolution de l'équation de}$$

Reynolds modifiée.

Chapitre 2. Étude Numérique d'un Rotor Rigide Monté sur un Palier Hydrostatique lubrifié par un fluide micropolaire

$$4) \text{ Pour } \begin{cases} I = M, J \in]1, N[\\ \left. \frac{\partial P_i(I, J)}{\partial Z} \right|_N = 0 \end{cases} \Rightarrow P_i(I, J) \text{ est déterminé par la résolution de l'équation de}$$

Reynolds modifiée.

2.2.2 Les caractéristiques de performance

2.2.2.1. La charge portante

La charge portante pour chaque butée hydrostatique est obtenue en intégrant le champ de pression suivant la surface de la butée.

$$W_{pi} = \int_s P_i dS = \int_0^A \int_0^B P_i dx dy \quad (2.17)$$

Ici S est la surface de contact et dS est un élément de surface.

La charge portante est déterminée par l'intégration du champ de pression en utilisant la méthode d'intégration numérique des Trapèzes, on obtient :

$$W_{pi} = 4 \left[\sum_{J=2}^{N-1} \sum_{I=2}^{M-1} P_i(I, J) \Delta X \Delta Z + \frac{1}{2} \left[\sum_{I=2}^{M-1} (P_i(I, 1) + P_i(I, N)) \right] \Delta X \Delta Z + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \left[\sum_{j=2}^{N-1} (P_i(1, j) + P_i(M, j)) \right] \Delta X \Delta Z + \right. \\ \left. + \frac{1}{4} [P_i(1, 1) + P_i(1, N) + P_i(M, 1) + P_i(M, N)] \Delta X \Delta Z \right] \quad (2.18)$$

La charge portante W_p de l'ensemble des patins est déterminée comme suit :

$$W_p = \sqrt{W_{Px}^2 + W_{Py}^2} \quad (2.19)$$

Alors que :

$$\begin{cases} W_{Px} = W_{P2} - W_{P4} \\ W_{Py} = W_{P1} - W_{P3} \end{cases} \quad (2.20)$$

Chapitre 2. Étude Numérique d'un Rotor Rigide Monté sur un Palier Hydrostatique lubrifié par un fluide micropolaire

2.2.2.2. La pression d'alvéole

La pression d'alvéole pour chaque butée n°i est déterminée en résolvant l'équation de conservation du débit volumique suivant :

$$Q_{ri} = Q_{vi} + Q_{si} \quad (2.21)$$

- Le débit dû à la variation du volume dans l'alvéole Q_{vi} relatif à la butée n°i est donné par :

$$Q_{vi} = S_r \dot{h}_i \quad (2.22)$$

- Q_{si} désigne le débit volumique sortant de l'alvéole relatif à la butée à simple effet n°i (figure 2.7)

Où :

$$Q_{si} = Q_{xi}^- + Q_{xi}^+ + Q_{zi}^- + Q_{zi}^+ \quad (2.23)$$

et en raison de symétrie, le débit sortant peut être s'écrit comme suit :

$$Q_{si} = 2(Q_{xi}^- + Q_{zi}^-) \quad (2.24)$$

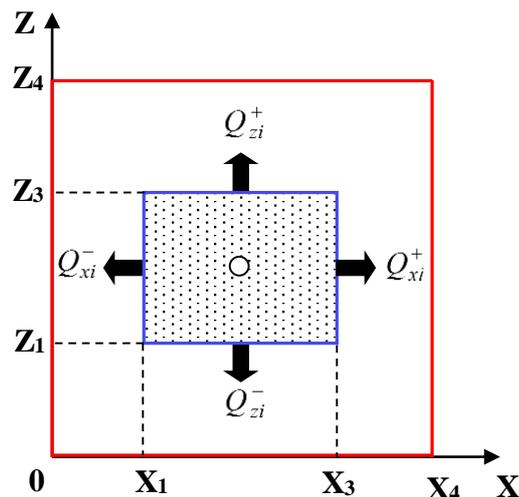


Figure 2.7. Débit sortant de l'alvéole.

Chapitre 2. Étude Numérique d'un Rotor Rigide Monté sur un Palier Hydrostatique lubrifié par un fluide micropolaire

- le débit sortant de chaque butée dans la direction x_i est obtenu en intégrant l'équation (2.25)

$$Q_{x_i}^- = 2 \int_{z_1}^{z_2} \int_0^{h_i} u_{x_i} dy_i dz_i \quad (2.25)$$

- le débit sortant de chaque butée dans la direction z_i est obtenu en intégrant l'équation (2.26)

$$Q_{z_i}^- = 2 \int_{x_1}^{x_2} \int_0^{h_i} u_{z_i} dy_i dx_i \quad (2.26)$$

Les vitesses u_{x_i} , u_{z_i} dans la direction x_i et z_i seront respectivement [37] :

$$u_{x_i} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial P_i}{\partial X_i} \left[\frac{y_i^2}{2} - \frac{N^2 h_i}{m} \frac{ch(m y_i) - 1}{sh(m h_i)} \right] + U_{1i} + \frac{D_1}{1 - N^2} \left(y_i - \frac{N^2}{m} \left[sh(m y_i) - \frac{(ch(m y_i) - 1)(ch(m h_i) - 1)}{sh(m h_i)} \right] \right) \quad (2.27)$$

$$u_{z_i} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial P_i}{\partial Z_i} \left[\frac{y_i^2}{2} - \frac{N^2 h_i}{m} \frac{ch(m y_i) - 1}{sh(m h_i)} \right] + \frac{D_2}{1 - N^2} \left(y_i - \frac{N^2}{m} \left[sh(m y_i) - \frac{(ch(m y_i) - 1)(ch(m h_i) - 1)}{sh(m h_i)} \right] \right) \quad (2.28)$$

Avec :

$$D_1 = -\frac{(1 - N^2)}{2} \left(\frac{h_i}{\mu} \frac{\partial P_i}{\partial X_i} + (U_{1i} - U_{2i}) \right) / \left[\frac{h_i}{2} - \frac{N^2}{m} \frac{ch(m h_i) - 1}{sh(m h_i)} \right] \quad (2.29)$$

$$D_2 = -\frac{(1 - N^2)}{2} \frac{h_i}{\mu} \frac{\partial P_i}{\partial Z_i} \quad (2.30)$$

$$m = \frac{N}{l_m} \quad (2.31)$$

Les débits sortant de l'alvéole peuvent être calculés en utilisant la méthode d'intégration numérique des Trapèzes, on obtient pour un quart du domaine d'intégration :

Chapitre 2. Étude Numérique d'un Rotor Rigide Monté sur un Palier Hydrostatique lubrifié par un fluide micropolaire

$$Q_{xi}^- = \frac{G(h_i, l_m, N)}{6} \left[\frac{\Delta Z}{2\Delta X} \left[(P_i(M1, N1) - P_i(M1-1, N1)) + (P_i(M1, N) - P_i(M1-1, N)) \right] \right] + \frac{G(h_i, l_m, N)}{6} \left[\frac{\Delta Z}{\Delta X} \left[\sum_{J=N1+1}^{N-1} (P_i(M1, J) - P_i(M1-1, J)) \right] \right] \quad (2.32)$$

$$Q_{zi}^- = \frac{G(h_i, l_m, N)}{6} \left[\frac{\Delta X}{2\Delta Z} \left[(P_i(M1, N1) - P_i(M1, N1-1)) + (P_i(M, N1) - P_i(M, N1-1)) \right] \right] + \frac{G(h_i, l_m, N)}{6} \left[\frac{\Delta X}{\Delta Z} \left[\sum_{I=M1+1}^{M-1} (P_i(I, N1) - P_i(I, N1-1)) \right] \right] \quad (2.33)$$

Q_{ri} est le débit à travers une résistance hydraulique de type capillaire, où :

$$Q_{ri} = \int_0^R 2\pi r u(r) dr \quad (2.34)$$

La vitesse de l'écoulement micropolaire est donnée par [25]:

$$u(r) = u_{\max} \left(1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 + \Upsilon \left[\frac{I_0(K r)}{I_0(K R)} - 1 \right] \right) \quad (2.35)$$

Où :

$$u_{\max} = -\frac{1}{2} R^2 (2\mu_v + k_v)^{-1} \frac{\partial P}{\partial y} \quad (2.36)$$

$$\Upsilon = \frac{k_v}{\mu_v + k_v} \frac{1}{K R} \frac{I_0(K R)}{I_1(K R)} \quad (2.37)$$

$$K = \left(\frac{2\mu_v + k_v}{\mu_v + k_v} \frac{k_v}{\gamma_v} \right)^{1/2} \quad (2.38)$$

Le débit du fluide micropolaire à travers une résistance hydraulique de type capillaire est obtenu en intégrant l'équation (2.34) :

Chapitre 2. Étude Numérique d'un Rotor Rigide Monté sur un Palier Hydrostatique lubrifié par un fluide micropolaire

$$Q_{ri} = \frac{\pi R^4}{8 \mu l_c} (P_s - P_{ri}) \varphi(R) \quad (2.39)$$

$$\text{où : } \varphi(R) = 1 + \frac{4\Upsilon}{R^2} \left[\frac{\left(I_0(K R) (3K^2 R^2 - 1) + 1 \right)}{6 K^2 I_0(K R)} - \frac{R^2}{2} \right] \quad (2.40)$$

Lorsque $kv = 0$, l'équation (2.39) se réduit au débit de Hagen-Poiseuille.

2.2.2.3. Débit de lubrifiant total

Le débit total Q_T est obtenu en sommant les débits Q_{si} relatifs à chaque butée, on obtient alors :

$$Q_T = \sum_{i=1}^4 Q_{si} \quad (2.41)$$

2.2.2.4. Caractéristiques dynamiques

Une étude linéaire est faite en supposant que l'arbre est parfaitement rigide et en se limitant aux petits déplacements au voisinage d'une position d'équilibre statique, pour cela on doit passer par deux étapes :

- Une analyse statique permettant de déterminer la position d'équilibre de l'arbre à l'intérieur de la butée sous une charge extérieure ;
- Une analyse dynamique linéarisée pour le mouvement du grain mobile (la ligne d'arbre) au voisinage de la position d'équilibre statique O.

Cette analyse linéaire du comportement d'une butée autour de la position d'équilibre statique permet de modéliser le film lubrifiant par des coefficients de raideur et d'amortissement (figure 2.8).

Chapitre 2. Étude Numérique d'un Rotor Rigide Monté sur un Palier Hydrostatique lubrifié par un fluide micropolaire

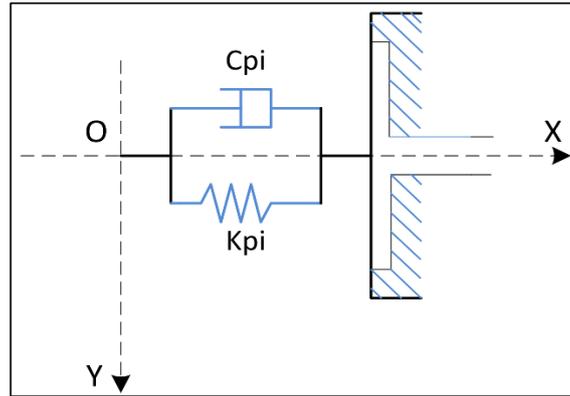


Figure 2.8. Schématisation de la raideur et l'amortissement pour une butée hydrostatique.

La détermination de ces coefficients permet de :

- connaître la stabilité d'un point de fonctionnement (masse critique) ;
- introduire l'effet du film fluide sur la réponse d'une structure (ligne d'arbre soumis à des sollicitations dynamiques de faible amplitude) ;
- rechercher les vitesses critiques de la ligne d'arbre.

a) Coefficients dynamique d'une butée hydrostatique à simple effet

Le calcul des coefficients dynamiques se fait par une méthode dite de petits déplacements et de petites vitesses. Si on impose un petit déplacement x_i et une petite vitesse de déplacement \dot{x}_i au voisinage de la position d'équilibre statique (x_0, y_0) colinéaire à l'axe (o, x) , on peut écrire [3] :

$$W_{pi} \left(x_0 + x_i, y_0, \dot{x}_i, \dot{y}_i = 0 \right) = W_{pi} (x_0, y_0, 0, 0) + x_i \left(\frac{\partial W_{pi}}{\partial x_i} \right)_0 + \dot{x}_i \left(\frac{\partial W_{pi}}{\partial \dot{x}_i} \right)_0 + \dots \quad (2.42)$$

On se limitant au premier ordre, on peut écrire la relation (2.42) comme suit :

$$W_{pi} \left(x_0 + x_i, y_0, \dot{x}_i, \dot{y}_i = 0 \right) - W_{pi} (x_0, y_0, 0, 0) = -K_{pi} x_i - C_{pi} \dot{x}_i \quad (2.43)$$

Les coefficients K_{pi} et C_{pi} représentent les coefficients de raideur et d'amortissement dus à l'existence du film lubrifiant dans la butée hydrostatique à simple effet n^oi, au voisinage du point

Chapitre 2. Étude Numérique d'un Rotor Rigide Monté sur un Palier Hydrostatique lubrifié par un fluide micropolaire

d'équilibre statique. Ils sont obtenus après identification des équations (2.42) et (2.43) comme suit [50]:

$$K_{pi} = - \left(\frac{\partial W_{pi}}{\partial x_i} \right)_0 \quad (2.44)$$

$$C_{pi} = - \left(\frac{\partial W_{pi}}{\partial \dot{x}_i} \right)_0 \quad (2.45)$$

Les coefficients de raideur et d'amortissement sont calculés en utilisant la méthode de différentiation numérique où les dérivées partielles sont calculées numériquement.

L'application de cette méthode passe par les étapes suivantes :

- Recherche de la position d'équilibre statique caractérisée par (x_0, y_0) ;
- Calcul de la dérivée $\left(\frac{\partial W_{p1}}{\partial x_1} \right)_0$, l'équation est résolue pour position du centre du grain mobile défini par : $\left(x_1 = \Delta x_0, y_1 = 0, \dot{x}_1 = 0, \dot{y}_1 = 0 \right)$

L'intégration du champ de pression permet de calculer W_{p1} en cette position, donc :

$$K_{p1} = - \frac{\partial W_{p1}}{\partial x_1} = - \frac{W_{p1}(x_0 + \Delta x_0, y_0, 0, 0) - W_{p1}(x_0, y_0, 0, 0)}{\Delta x_0} \quad (2.46)$$

- Calcul de la dérivée $\left(\frac{\partial W_{p1}}{\partial \dot{x}_1} \right)_0$, l'équation est résolue pour chaque position définie par : $\left(x_1 = 0, y_1 = 0, \dot{x}_1 \neq 0, \dot{y}_1 = 0 \right)$, donc :

Chapitre 2. Étude Numérique d'un Rotor Rigide Monté sur un Palier Hydrostatique lubrifié par un fluide micropolaire

$$C_{p1} = -\frac{\partial W_{p1}}{\partial \dot{x}_1} = -\frac{W_{p1}\left(x_0, y_0, \dot{x}_1, 0\right) - W_{p1}\left(x_0, y_0, 0, 0\right)}{\dot{x}_1} \quad (2.47)$$

2.2.1.3. Les Coefficients dynamiques équivalents

Les caractéristiques dynamiques équivalentes du palier sont écrites comme suit :

$$K_{eqx} = K_{p2} + K_{p4} \quad ; \quad K_{eqy} = K_{p1} + K_{p3} \quad (2.48)$$

$$C_{eqx} = C_{p2} + C_{p4} \quad ; \quad C_{eqy} = C_{p1} + C_{p3} \quad (2.49)$$

Où K_{eqx} et K_{eqy} représentent les coefficients de raideur équivalents dans les directions x et y, respectivement. Alors que C_{eqx} et C_{eqy} représentent les coefficients d'amortissement équivalents dans les directions x et y, respectivement.

Le taux d'amortissement ζ dans les directions x et y est exprimé comme suit :

$$\zeta_x = \frac{C_{eqx}}{2\sqrt{MK_{eqx}}} \quad ; \quad \zeta_y = \frac{C_{eqy}}{2\sqrt{MK_{eqy}}} \quad (2.50)$$

2.3. Validation du modèle numérique

Pour valider le modèle numérique proposé dans cette étude , un modèle analytique est développé pour un HSFD avec un fluide incompressible. Le HSFD est supposé être infiniment long dans la direction OX (Figure 2.9). La distribution de la pression et la charge portante peuvent être obtenues à partir d'une solution analytique pour les lubrifiants Newtoniens et micropolaires. Par conséquent, et sous les hypothèses adoptées pour un palier hydrostatique utilisé comme “ *hydrostatic squeeze film damper*” opérant avec des lubrifiants Newtoniens ou micropolaire, l'équation de Reynolds (2.5) se réduit à:

$$G(h_i, l_m, N) \frac{\partial^2 p_i}{\partial z_i^2} = 12 \dot{h}_i \quad (2.51)$$

Chapitre 2. Étude Numérique d'un Rotor Rigide Monté sur un Palier Hydrostatique lubrifié par un fluide micropolaire

Par double intégration de l'équation (2.51) et avec les conditions aux limites de la pression (comme représenté sur la figure 2.9) :

$$\begin{cases} p_i = p_{ai} & \text{pour } -b \leq Z \leq 0 \\ p_i = 0 & \text{pour } Z = (B-b)/2 \text{ et } Z = -(B+b)/2 \end{cases} \quad (2.52)$$

La pression du patin de n^oi, dans la portée et l'alvéole est exprimée comme suit :

$$P = \begin{cases} \Phi(h, \dot{h}, l, N) Z - \left(\frac{2P}{B-b} + \frac{\Phi(h, \dot{h}, l, N)}{2} (B-b) \right) Z + P & \text{pour } 0 \leq Z \leq (B-b)/2 \\ P_{ai} & \text{pour } -b \leq Z \leq 0 \\ \Phi(h, \dot{h}, l, N) Z + \left(\frac{2P}{B-b} + \frac{\Phi(h, \dot{h}, l, N)}{2} (B+3b) \right) Z + \left(\frac{P}{B-b} + \frac{\Phi(h, \dot{h}, l, N)}{2} b \right) (B+b) & \text{pour } -(B+b)/2 \leq Z \leq -b \end{cases} \quad (2.53)$$

Avec : $\Phi(h_i, \dot{h}_i, l_m, N) = (6 \dot{h}_i / G(h_i, l_m, N))$.

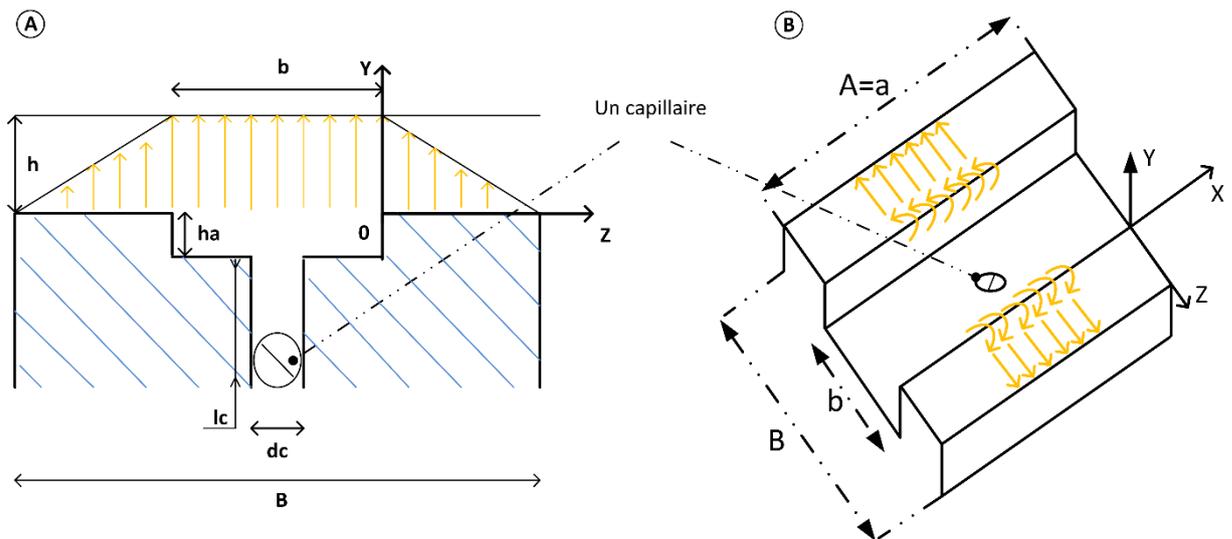


Figure 2.9. Patin de la butée hydrostatique infiniment longue.

Chapitre 2. Étude Numérique d'un Rotor Rigide Monté sur un Palier Hydrostatique lubrifié par un fluide micropolaire

2.4. Dynamique de rotor

Afin d'étudier le comportement dynamique linéaire du rotor, il faut calculer l'amplitude de vibrations et les forces transmises au bâti.

L'équation du mouvement du rotor en coordonnées cartésiennes s'écrit comme suit :

$$\begin{cases} M \ddot{x} = F_x + M e_x \omega_e^2 \cos \omega t \\ M \ddot{y} = F_y + M e_y \omega_e^2 \sin \omega t \end{cases} \quad (2.54)$$

Où :

- M est la masse du rotor ;
- e_x et e_y sont les excentricités suivant x et y respectivement ;
- ω_e est la fréquence d'excitation ;
- F_x et F_y sont les forces hydrostatiques suivant x et y respectivement.

Les forces hydrostatiques sont déterminées comme suit :

$$\begin{cases} F_x = -K_{eqx} h_i - C_{eqx} \dot{h}_i \\ F_y = -K_{eqy} h_i - C_{eqy} \dot{h}_i \end{cases} \quad (2.55)$$

Alors, l'amplitude des vibrations obtenue par la relation suivante :

$$\tilde{A} = \sqrt{|X|^2 + |Y|^2} \quad (2.56)$$

Où :

$$X = \frac{M e_x \omega_e^2 / K_{eqx}}{\sqrt{(1 - r_x^2)^2 + (2\zeta_x r_x)^2}} \quad (2.57)$$

Chapitre 2. Étude Numérique d'un Rotor Rigide Monté sur un Palier Hydrostatique lubrifié par un fluide micropolaire

$$Y = \frac{M \varepsilon_y \omega_e^2 / K_{eqy}}{\sqrt{(1-r_y^2)^2 + (2\zeta_y r_y)^2}} \quad (2.58)$$

La force transmise au bâti est obtenue comme suit :

$$F_t = \sqrt{F_{tx}^2 + F_{ty}^2} \quad (2.59)$$

Où :

$$F_{tx} = \frac{M \varepsilon_x h_0 \omega_e^2 \sqrt{1 + (2\zeta_x r_x)^2}}{\sqrt{(1-r_x^2)^2 + (2\zeta_x r_x)^2}} \quad (2.60)$$

$$F_{ty} = \frac{M \varepsilon_y h_0 \omega_e^2 \sqrt{1 + (2\zeta_y r_y)^2}}{\sqrt{(1-r_y^2)^2 + (2\zeta_y r_y)^2}} \quad (2.61)$$

Avec

$$r_x = \frac{\omega_e}{\omega_{nx}}, r_y = \frac{\omega_e}{\omega_{ny}}, \zeta_x = \frac{C_{eqx}}{2\sqrt{MK_{eqx}}}, \zeta_y = \frac{C_{eqy}}{2\sqrt{MK_{eqy}}} \quad (2.62)$$

Où ζ est le taux d'amortissement et ω_n est la fréquence naturelle.

2.5. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté une étude statique et dynamique d'un palier hydrostatique utilisé comme “*hydrostatic squeeze film damper*” constitué de quatre patins alimentés par un lubrifiant micropolaire. Les alvéoles sont alimentées sous pression externe à travers des résistances hydrauliques de type capillaire.

Les caractéristiques statiques calculées sont : la charge portante et le débit de lubrifiant. Quant aux caractéristiques dynamiques ce sont les coefficients de raideur, les coefficients d'amortissement et le taux d'amortissement. Une validation du modèle numérique par la résolution

Chapitre 2. Étude Numérique d'un Rotor Rigide Monté sur un Palier Hydrostatique lubrifié par un fluide micropolaire

analytique des équations qui régissent le comportement de la configuration infiniment longue a été aussi présentée.

Enfin, nous avons présenté une étude sur la dynamique de rotor afin de calculer l'amplitude de vibration et la force transmise au bâti.

CHAPITRE 3

RÉSULTATS ET INTERPRÉTATIONS

CHAPITRE 3

RÉSULTATS ET INTERPRÉTATIONS

3.1. Introduction

Dans ce chapitre, nous allons présenter et interpréter les résultats obtenus dans notre étude qui porte sur l'influence des paramètres caractéristiques d'un fluide micropolaire N et lm . Ainsi que l'influence de ces paramètres sur l'amplitude des vibrations et les forces transmises aux bâtis. Le rôle du rapport de pression β_0 sur la réponse d'un palier hydrostatique utilisé comme "*hydrostatic squeeze film damper*" composé de quatre patins hydrostatiques, alimentées par des résistances hydrauliques de type capillaire est aussi discuté.

3.2 Résultats & discussions

Dans cette étude un modèle numérique basé sur la méthode des différences finies a été développé autour de l'équation de Reynolds modifiée. Pour résoudre le problème mathématique obtenu nous avons écrit un code en langage de programmation Fortran.

3.2.1 Validation du modèle numérique

Avant de présenter l'influence des paramètres caractéristiques d'un fluide micropolaire sur les performances d'un HSFD, une validation du modèle numérique a été menée. La validation est faite sur la base de la solution analytique obtenue pour le HSFD supposé être infiniment long dans la direction OX. Dans ce modèle, largement utilisé dans la littérature, on peut négliger le débit sortant dans la direction OX devant le débit sortant dans la direction OZ.

Le tableau 3.1 présente la comparaison de la charge portante calculée analytiquement et celle calculée numériquement pour différentes valeurs de rapport d'excentricité.

Tableau 3.1 : Comparaison de la charge portante prélevée à partir d'une solution analytique et numérique à $\beta_0 = 0,4$.

La charge portante W_p [N], pour $A/B=6$, $a/A=1$, $b/B=0.5$ et $\beta_0=0.4$

ϵ	Newtonien			$N^2=0.3$ $Lm=10$			$N^2=0.7$ $Lm=10$			$N^2=0.7$ $Lm=50$		
	Analy	Num	Err [%]	Analy	Num	Err [%]	Analy	Num	Err [%]	Analy	Num	Err [%]
0.2	872.41	857,37	1.72	931.10	915,05	1.72	1010.52	993,10	1.72	913.20	897,45	1.72
0.4	1700.46	1671,14	1.72	1757.92	1727,61	1.72	1844.18	1812,39	1.72	1755.26	1725,00	1.72
0.6	2346.26	2305,81	1.72	2348.40	2307,91	1.72	2372.41	2331,51	1.72	2377.48	2336,49	1.72
0.8	2689.88	2643,51	1.72	2653.57	2607,82	1.72	2627.52	2582,22	1.72	2687.59	2641,25	1.72

La figure 3.1 compare les prédictions numériques de la distribution de pression obtenue pour diverses valeurs de N^2 et Lm avec les résultats analytiques. Il est clair que la comparaison est très étroite entre les deux approches. En effet, l'écart maximal observé dans la Figure 3.1 est inférieur à 0,5% pour le lubrifiant micropolaire alors qu'il est inférieur à 0,6% pour le Newtonien. D'autre part, le tableau 3.1 montre la variation de la charge portante pour diverses valeurs de rapport d'excentricité. Il est à noter que l'erreur est définie comme la différence entre les valeurs obtenues à partir des solutions numériques et analytiques divisées par celle de la solution analytique. La comparaison a été effectuée en employant les valeurs suivantes : $P_s = 5$ Bar, $\mu = 0,05$ Pa.s et $\beta_0 = 0,4$.

Il convient de noter dans le tableau 3.1 que pour toutes les valeurs de N^2 et Lm , la charge portante tend à augmenter avec le rapport d'excentricité. On constate que pour toute valeur du rapport d'excentricité, l'erreur est réduite à 1,72% pour les lubrifiants newtoniens et micropolaires.

Comme le montrent la figure 3.1 et le tableau 3.1, les résultats numériques obtenus à partir de la présente étude concordent très bien avec ceux obtenus avec le modèle analytique. Par conséquent, on peut considérer que la procédure numérique est validée et considérée offrant un haut niveau de précision pour les lubrifiants newtoniens et micropolaires.

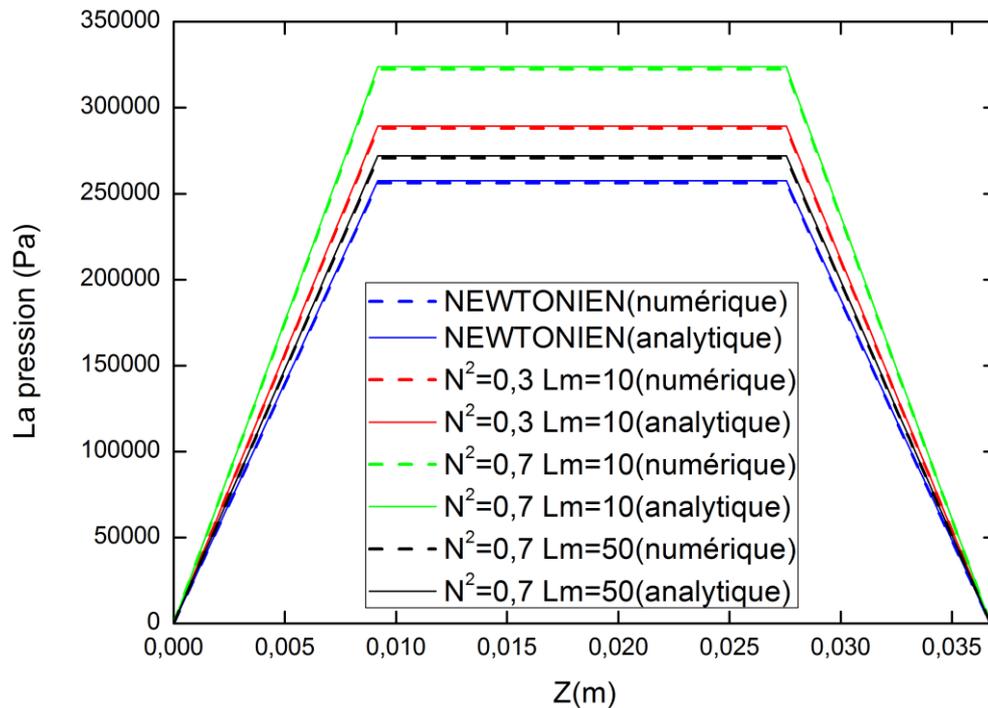


Figure 3.1. Étude comparative entre l'analyse analytique et numérique pour différentes valeurs de N^2 et Lm avec $\beta_0 = 0,4$.

3.2.2 Effet du rapport de pression β_0 , du N et du Lm

L'analyse décrite dans le présent travail a été utilisée pour calculer les caractéristiques de performance d'un HSFDF à quatre patins en utilisant la théorie de la lubrification micropolaire. Il ressort de l'équation de Reynolds modifiée (2.5) que le champ de pression dépend des paramètres N et lm . Ces deux paramètres sont utilisés pour distinguer un lubrifiant micropolaire d'un lubrifiant newtonien. Les paramètres numériques considérés dans le calcul sont présentés dans le tableau 3.2.

Tableau 3.2 : Paramètres de simulation.

Paramètres	SI
A/B	1
$a/A=b/B$	0.5
dc	0.0012 m
l_c	0.058 m
μ	0.05 Pa.s
P_s	5 Bar
M	1 Kg

3.2.2.1. Méthode numérique - organigramme

L'équation de Reynolds modifiée (2.5) pour un fluide micropolaire est une équation aux dérivées partielles du second ordre de type elliptique dont l'inconnue principale est la pression. Elle est déterminée en utilisant la méthode des différences finies et en résolvant le système d'équations linéaires ainsi obtenu par la méthode de Gauss-Seidel avec coefficient de sur-relaxation. La pression dans l'alvéole est déterminée en résolvant l'équation de conservation du débit volumique par la méthode de la sécante. Le calcul de cette pression est fait pour différentes valeurs du rapport de pression β_0 , N et Lm .

lm est déterminée par la relation $lm = (h_0 / Lm)$, et l'épaisseur du film h_0 par la résolution (la méthode de la sécante) de l'équation de conservation du débit volumique (2.21).

Les valeurs des tolérances pour la convergence pour la pression, la pression d'alvéole et l'épaisseur du film ont été fixées à : $0.01 \left(\left(\frac{P_{i,j}^n - P_{i,j}^{n-1}}{100 P_{ai}} \right)_{\max} = 0.01 \right)$, 10^{-6} et 10^{-6} , respectivement.

Remarque : $P_{i,j}^n$ désignent la pression calculée à chaque point du maillage (i,j) , et n est le nombre d'itérations réalisées.

La figure 3.2 présente l'organigramme de calcul numérique pour un HSF_D à quatre patins lubrifié avec un fluide micropolaire.

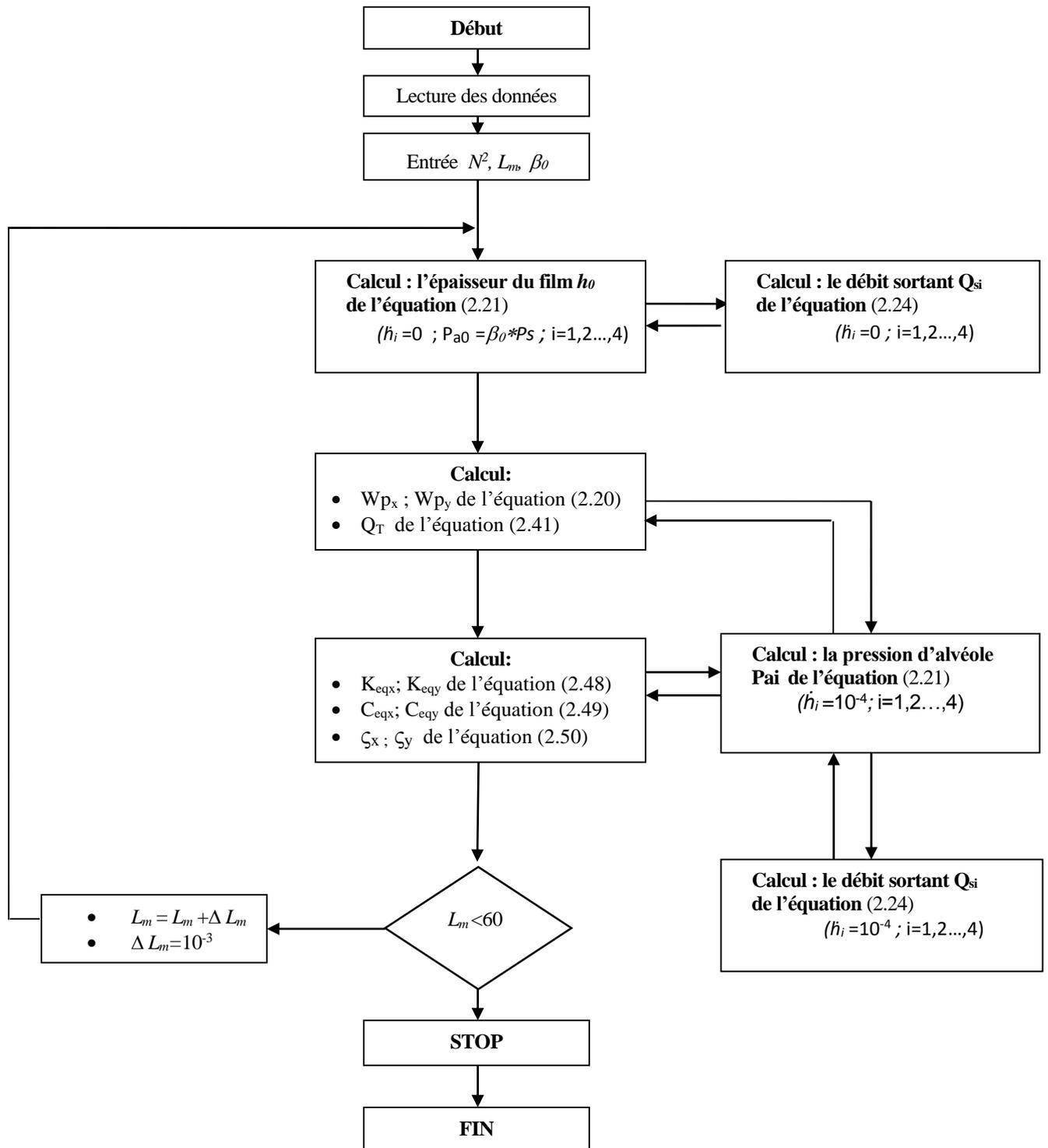


Figure 3.2. Organigramme générale de calcul des caractéristiques pour un HSF_D lubrifié avec un fluide micropolaire.

3.2.2.2 Influence des paramètres du fluide micropolaire sur le profil de pression

Les variations de la répartition de pression pour différentes valeurs de N^2 avec $Lm = 10$ et $\beta_0 = 0,4$ sont présentées dans la figure 3.3. Ces courbes montrent que la répartition de la pression couvre l'ensemble de la zone de patin, ne démontre aucune concentration de pression et diminue suite à une variation linéaire pour toutes les différentes valeurs de N^2 . On constate que les paramètres du fluide micropolaire font augmenter la pression à l'intérieur de l'alvéole.

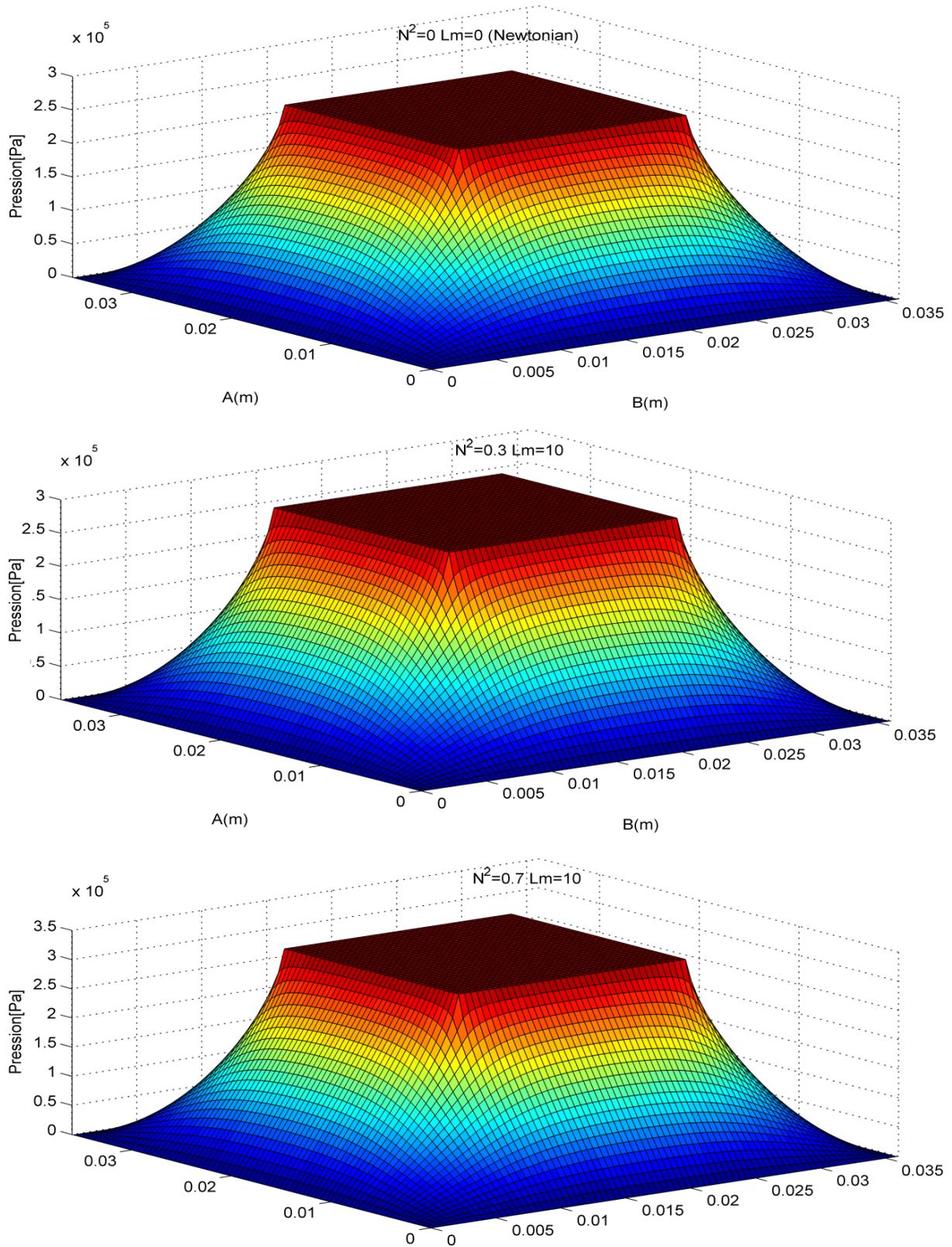


Figure 3.3. La distribution du champ de pression pour différentes valeurs de N^2 avec $Lm = 10$ et $\beta_0 = 0,4$.

3.2.2.3 Influence des paramètres du fluide micropolaire sur la charge portante

La figure 3.4 présente les variations de la charge portante W_p en fonction de Lm pour différentes valeurs de N^2 en gardant $\beta_0 = 0,4$. On observe que W_p est proportionnelle avec N^2 , tandis que la réponse du fluide micropolaire se réduit à une forme caractéristique au fluide newtonien lorsque Lm augmente. Le graphe sur la figure 3.4 suggère également qu'il existe une valeur optimale de Lm pour laquelle la charge portante pour toutes les valeurs de N^2 est maximale. On peut aussi remarquer que la valeur maximale augmente avec l'augmentation de N^2 . On peut expliquer physiquement cette observation par le fait qu'une augmentation de N^2 signifie des effets de couplage plus forts entre le moment angulaire et linéaire. Cet effet de couplage conduit à une amélioration dans la viscosité effective, et donc à des augmentations de la charge portante.

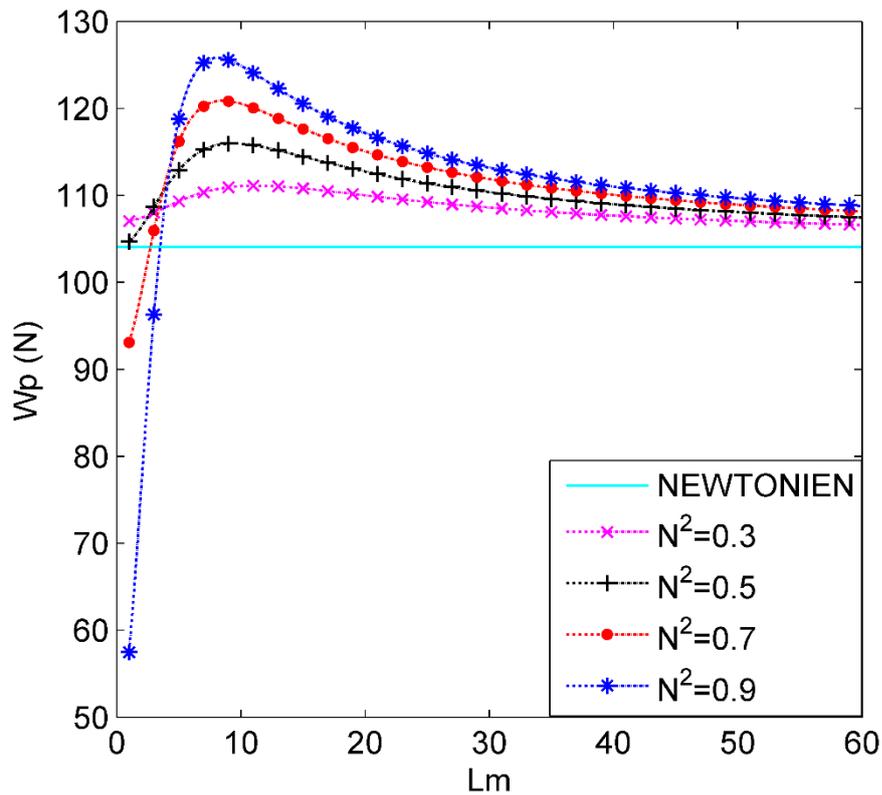


Figure 3.4. Variation de la charge portante W_p en fonction de Lm pour différentes valeurs de N^2 avec $\beta_0 = 0,4$.

La figure 3.5 montre les effets générés par les variations de β_0 sur W_p . Cette figure montre que pour un HSFD opérant avec des lubrifiants micropolaires, il existe une valeur optimale pour β_0 produisant la valeur maximale de la charge portante. De plus, les courbes de la figure 3.5 montrent que pour $\beta_0 < 0,6$ et $Lm > 10$ W_p est inversement proportionnel à Lm .

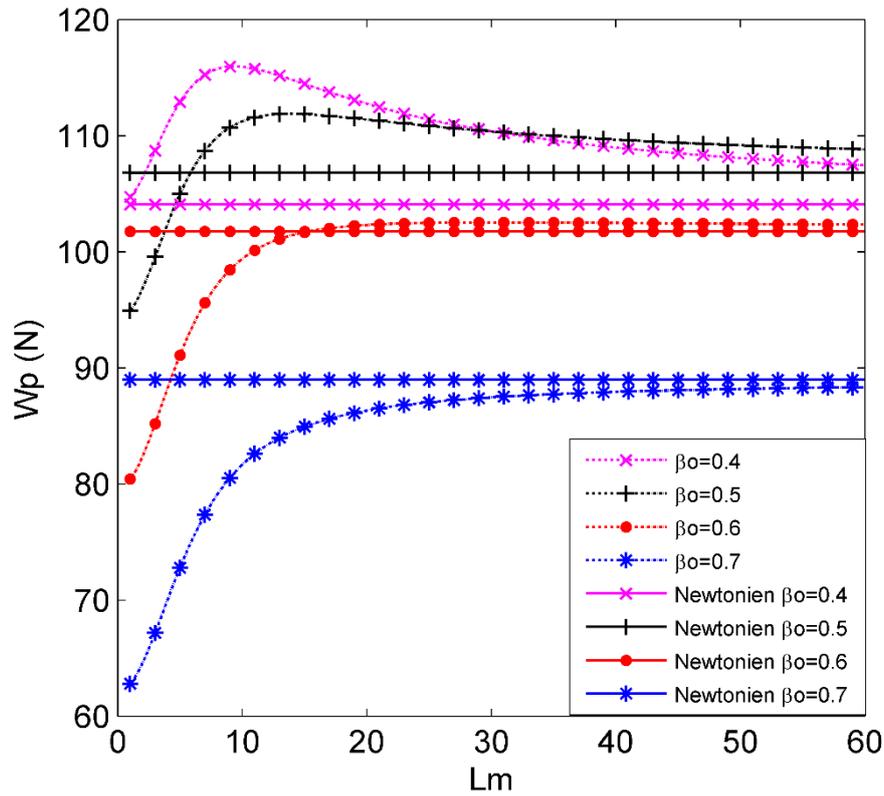


Figure 3.5. Variation de la charge portante W_p en fonction de Lm pour différentes valeurs de β_0 avec $N^2 = 0,5$.

3.2.2.4 Influence sur le débit

La figure 3.6 montre les effets de N^2 sur le débit lorsque $\beta_0 = 0,4$ et Lm variant entre 0 et 60. Pour toute valeur de N^2 le débit diminue avec la diminution de Lm et les valeurs minimales apparaissent quand Lm s'approche de zéro. D'autre part, pour les faibles valeurs de Lm , il peut être démontré que, renvoyée à la viscosité newtonienne le débit associé à des lubrifiants micropolaires diminue suivant $((\mu+0.5 k_v)/\mu)$.

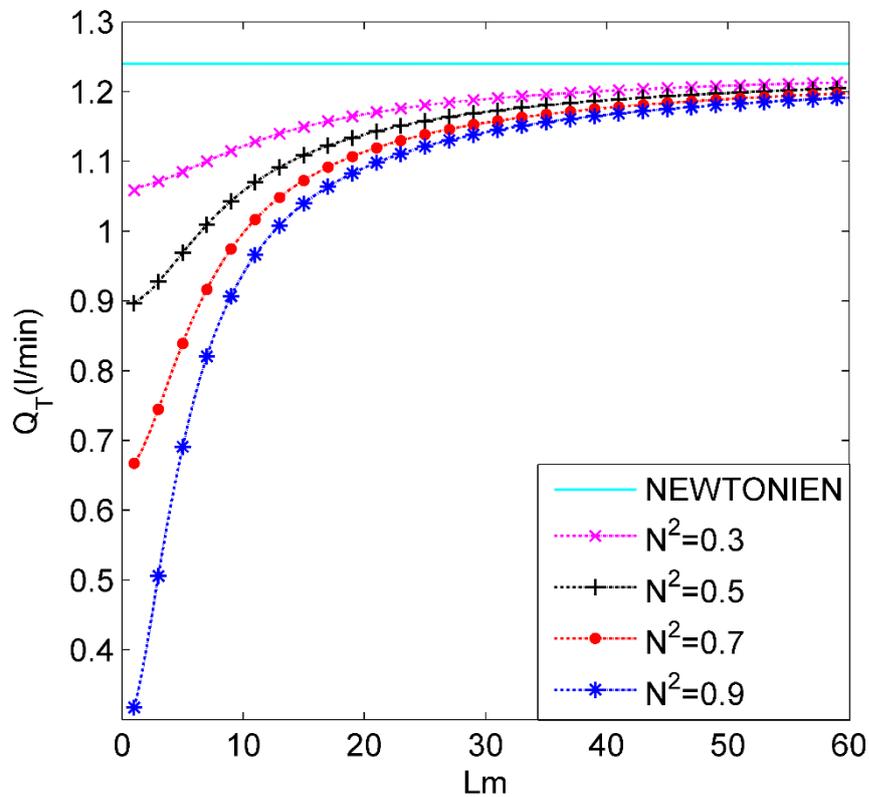


Figure 3.6. Variation du débit Q_T en fonction de Lm pour différentes valeurs de N^2 avec $\beta_0 = 0,4$.

La figure 3.7 montre la variation du débit pour différentes valeurs de β_0 lorsque $N^2 = 0,5$. Cette figure indique que Q_T a une forte diminution avec l'augmentation de β_0 pour les lubrifiants micropolaires et newtoniens. Cette observation peut être expliquée comme suit : l'augmentation du rapport de pression est associée à une augmentation de la viscosité, alors que le débit est inversement proportionnel à la viscosité du lubrifiant.

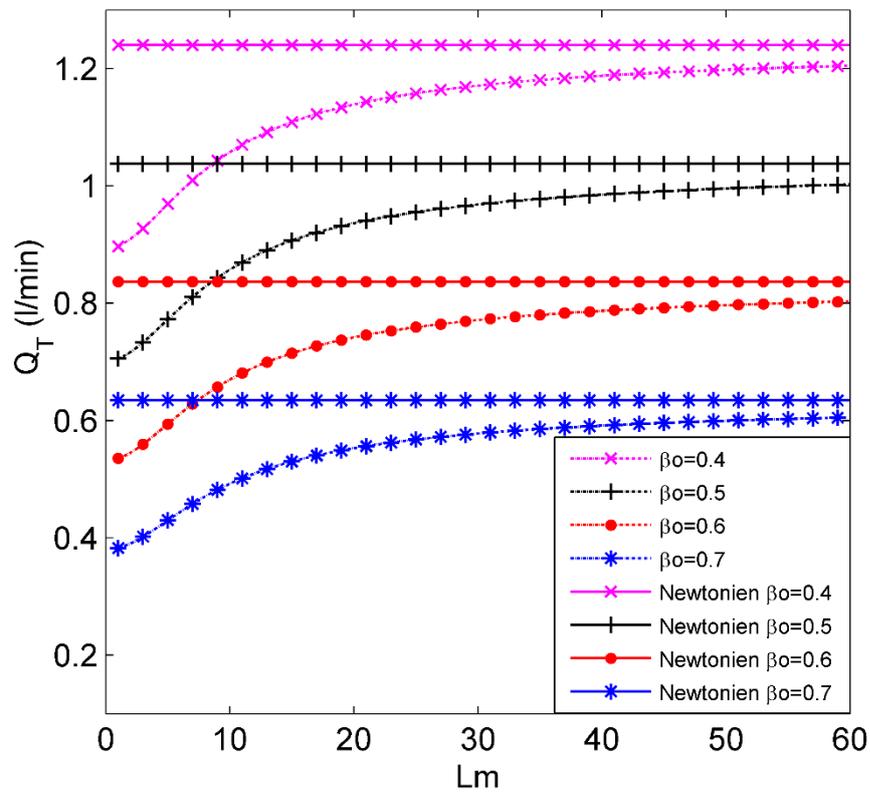


Figure 3.7. Variation du débit Q_T en fonction de Lm pour différentes valeurs de β_0 avec $N^2 = 0,5$.

3.2.2.5 Influence sur le coefficient de raideur

La figure 3.8 montre la variation du coefficient de raideur pour différentes valeurs de N^2 et $\beta_0 = 0,4$. Ces courbes indiquent que, par rapport au lubrifiant newtonien, la valeur du coefficient de raideur pour le lubrifiant micropolaire est plus élevée. Le coefficient de raideur augmente rapidement avec des valeurs de Lm inférieures à 10, alors que pour des valeurs plus importantes de Lm , le coefficient de raideur diminue pour s'approcher de la valeur newtonienne.

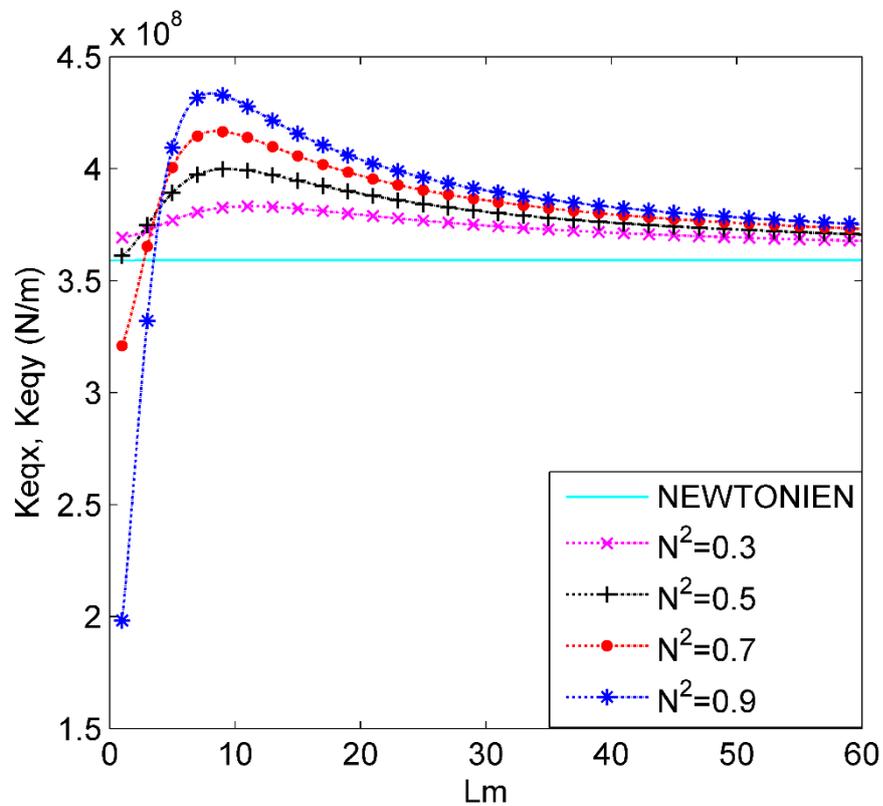


Figure 3.8. Variation du coefficient de raideur en fonction de Lm pour différentes valeurs de N^2 avec $\beta_0 = 0,4$.

La figure 3.9 présente les effets de Lm et β_0 sur le coefficient de raideur lorsque N^2 est fixé à 0,5. Les courbes révèlent que le coefficient de raideur produit dans le HSFD par un lubrifiant micropolaire augmente avec β_0 . Le coefficient de raideur augmente également avec Lm dans la zone inférieure à 10. En outre, les rapports de pression $\beta_0 = 0,4$ et $\beta_0 = 0,5$ présentent leur valeurs maximales du coefficient de raideur lorsque $Lm \approx 10$. D'autre part, $\beta_0 = 0,6$ donne un coefficient de raideur maximale autour de $Lm = 25$. Enfin, le graphe de la figure 3.9 montre qu'avec des lubrifiants newtoniens, $\beta_0 = 0,7$ génère la rigidité maximale.

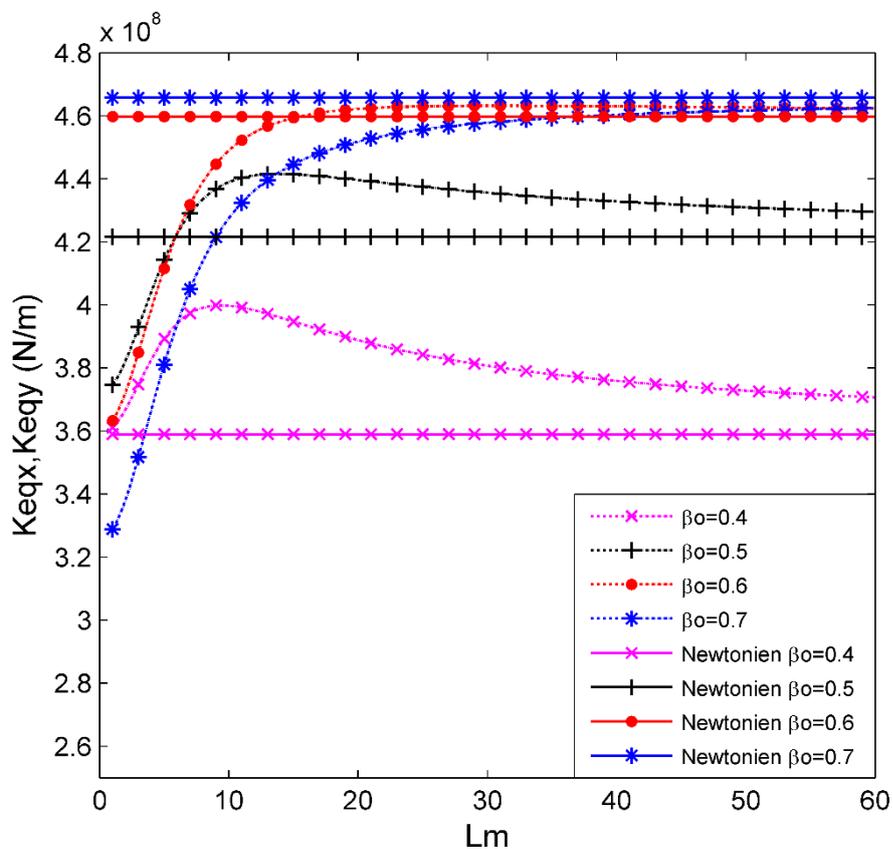


Figure 3.9. Variation du coefficient de raideur en fonction de Lm pour différentes valeurs de β_0 avec $N^2 = 0,5$.

3.2.2.6 Influence sur le coefficient d'amortissement

L'effet de Lm sur le coefficient d'amortissement est présenté dans la figure 3.10 pour les variations de N^2 lorsque β_0 reste fixé à 0,4. Les résultats présentés indiquent qu'indépendamment de N^2 le coefficient d'amortissement augmente avec la diminution de Lm . ils indiquent aussi que la valeur maximale C_{eq} augmente avec N^2 , cette augmentation résulte d'une augmentation de pression à l'intérieur de l'alvéole associée à la réduction de Lm .

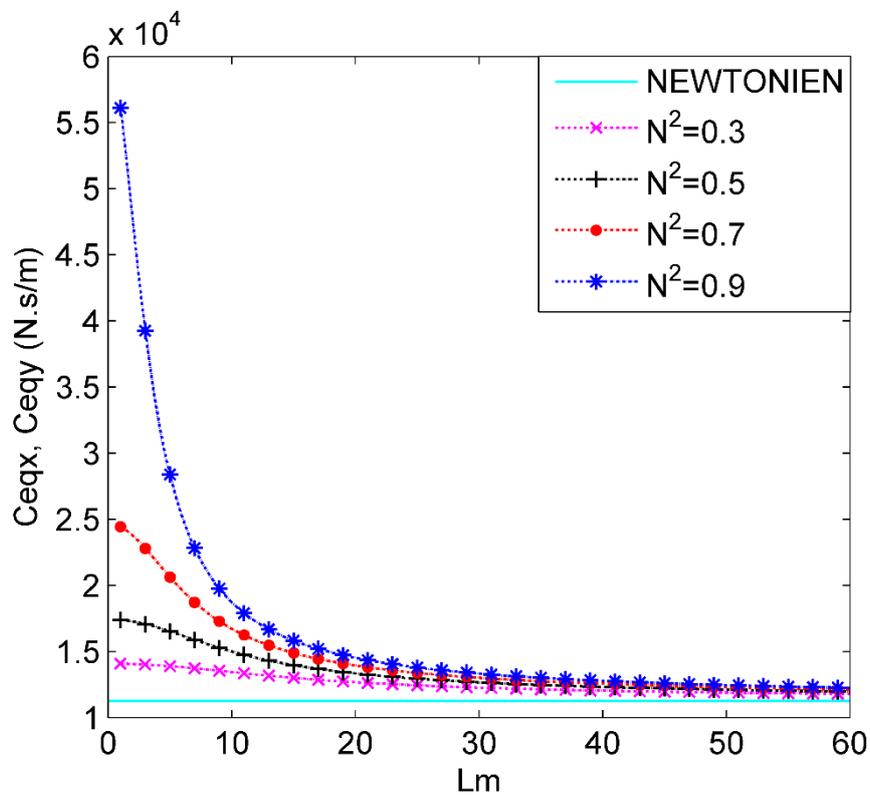


Figure 3.10. Variation du coefficient d'amortissement en fonction de Lm pour différentes valeurs de N^2 avec $\beta_0 = 0,4$.

La figure 3.11 montre la variation du coefficient d'amortissement pour différentes valeurs de β_0 et $N^2 = 0,5$. Ces courbes montrent que le coefficient d'amortissement dans le HSFd diminue avec Lm , et s'approche asymptotiquement de la réponse newtonienne pour tous les rapports de pression. Ce comportement résulte du fait qu'avec l'augmentation de Lm , la longueur de la microstructure devient plus petite et par conséquent, les caractéristiques micropolaires sont perdues. D'autre part, les valeurs faibles de Lm conduisent à des valeurs croissantes de C_{eq} . Enfin, l'augmentation maximale du coefficient d'amortissement à faible valeurs de Lm reste limitée entre 40 et 60% et semble être maximale avec un rapport de pression $\beta_0 = 0,4$, parce que la viscosité du fluide diminue avec la diminution de β_0 ,

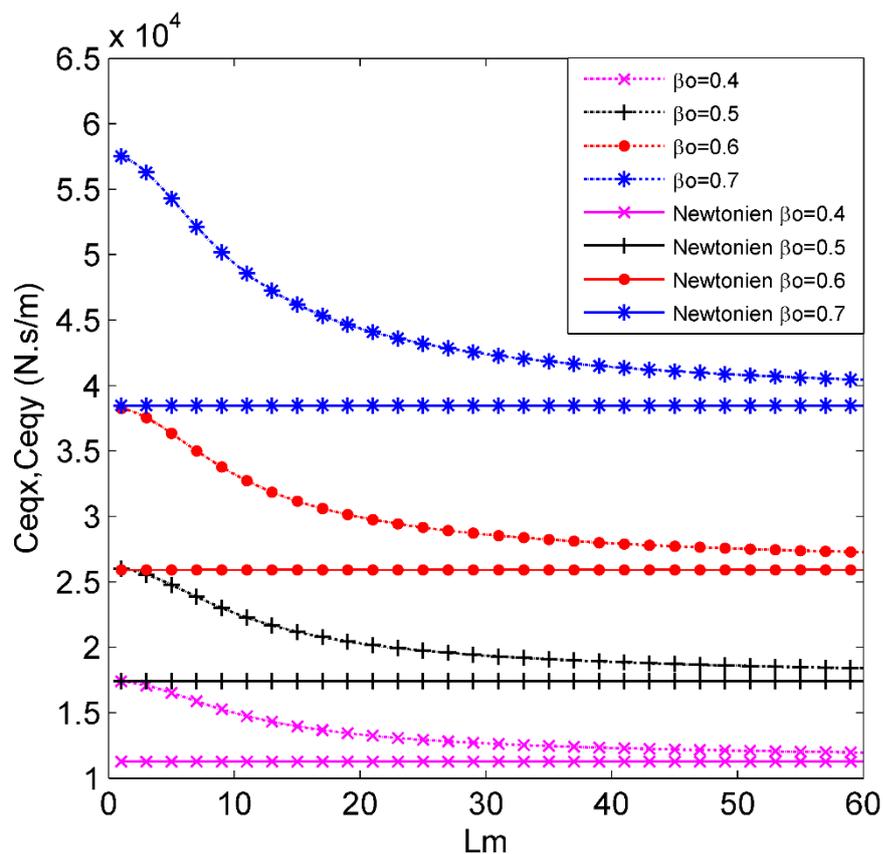


Figure 3.11. Variation du coefficient d'amortissement en fonction de Lm pour différentes valeurs de β_0 avec $N^2 = 0,5$.

3.2.2.7 Influence sur le taux d'amortissement

La figure 3.12 présente la variation du taux d'amortissement avec Lm et diverses valeurs de N^2 . Les résultats présentés révèlent que le taux d'amortissement diminue avec les augmentations de Lm et augmente avec N^2 . Cette réponse résulte d'une diminution de la viscosité provoquant des réductions de l'épaisseur du film.

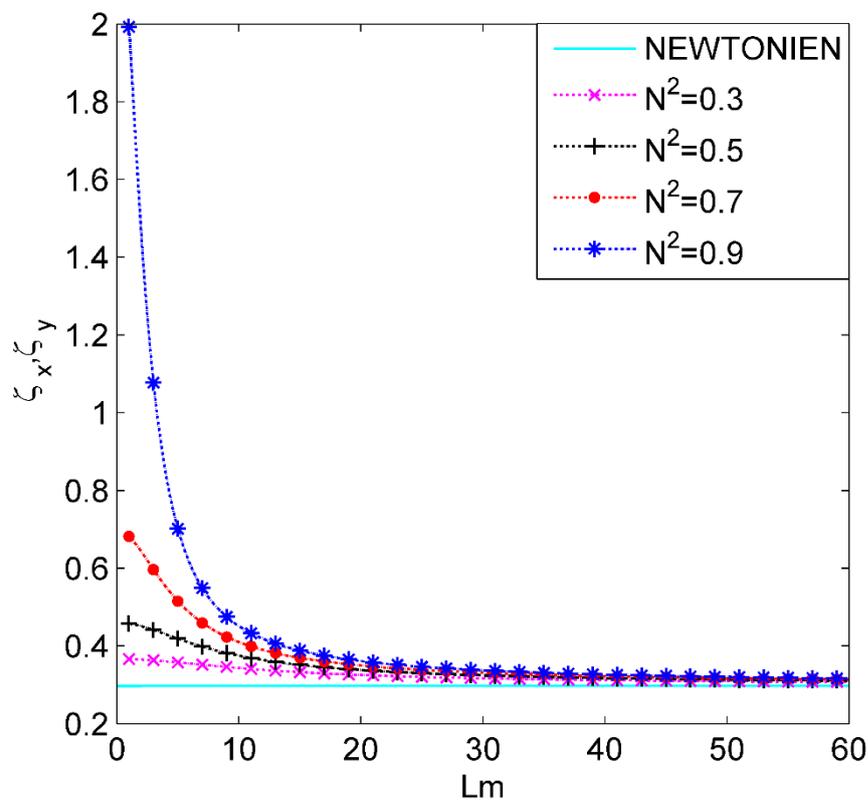


Figure 3.12. Variation du taux d'amortissement en fonction de Lm pour différentes valeurs de N^2 avec $\beta_0 = 0,4$.

La figure 3.13 représente graphiquement le taux d'amortissement contre Lm pour différentes valeurs de β_0 et $N^2 = 0,5$. Cette figure montre que les hauts rapports de pression fournissent la plus grande valeur du taux d'amortissement pour les lubrifiants micropolaires et newtoniens. Cette réponse du taux d'amortissement résulte de l'augmentation de la pression dans les alvéoles associées à des réductions d'épaisseur de film. Le taux d'amortissement augmente également rapidement avec une réduction de Lm , en particulier inférieure à 10.

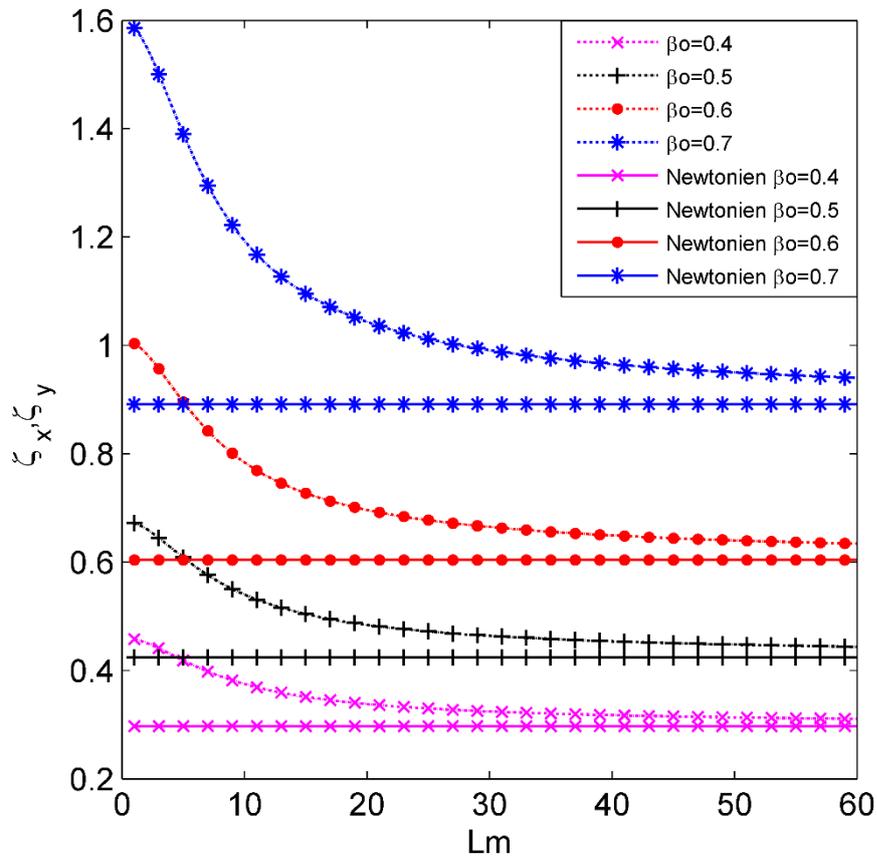


Figure 3.13. Variation du taux d'amortissement en fonction de Lm pour différentes valeurs de β_0 avec $N^2 = 0,5$.

3.5. Analyse de vibration de rotor

L'amplitude de vibration et les forces transmises sont calculées pour une excentricité ($\varepsilon = 0.2$) utilisant les valeurs des coefficients de raideur et d'amortissement obtenues pour un rapport de pression $\beta_0 = 0.58$. (Tableaux 3.3)

Tableaux 3.3 : Coefficients de raideur et d'amortissement pour $\beta_0 = 0.58$.

	K_{eq} (N/m)	C_{eq} (N.s/m)
NEWTONIEN	4.544241 E+08	23974.90105
N²=0.3 Lm=10	4.48599 E+08	27909.7979
N²=0.7 Lm=10	4.5000982 E+08	34025.6993
N²=0.7 Lm=50	4.596334 E+08	25828.1442

3.5.1. Organigramme de calcul

L'organigramme de calcul de l'amplitude de vibrations et la force transmise au bâti en fonction de la vitesse de rotation pour différentes valeurs du N et Lm est présenté dans la figure 3.14.

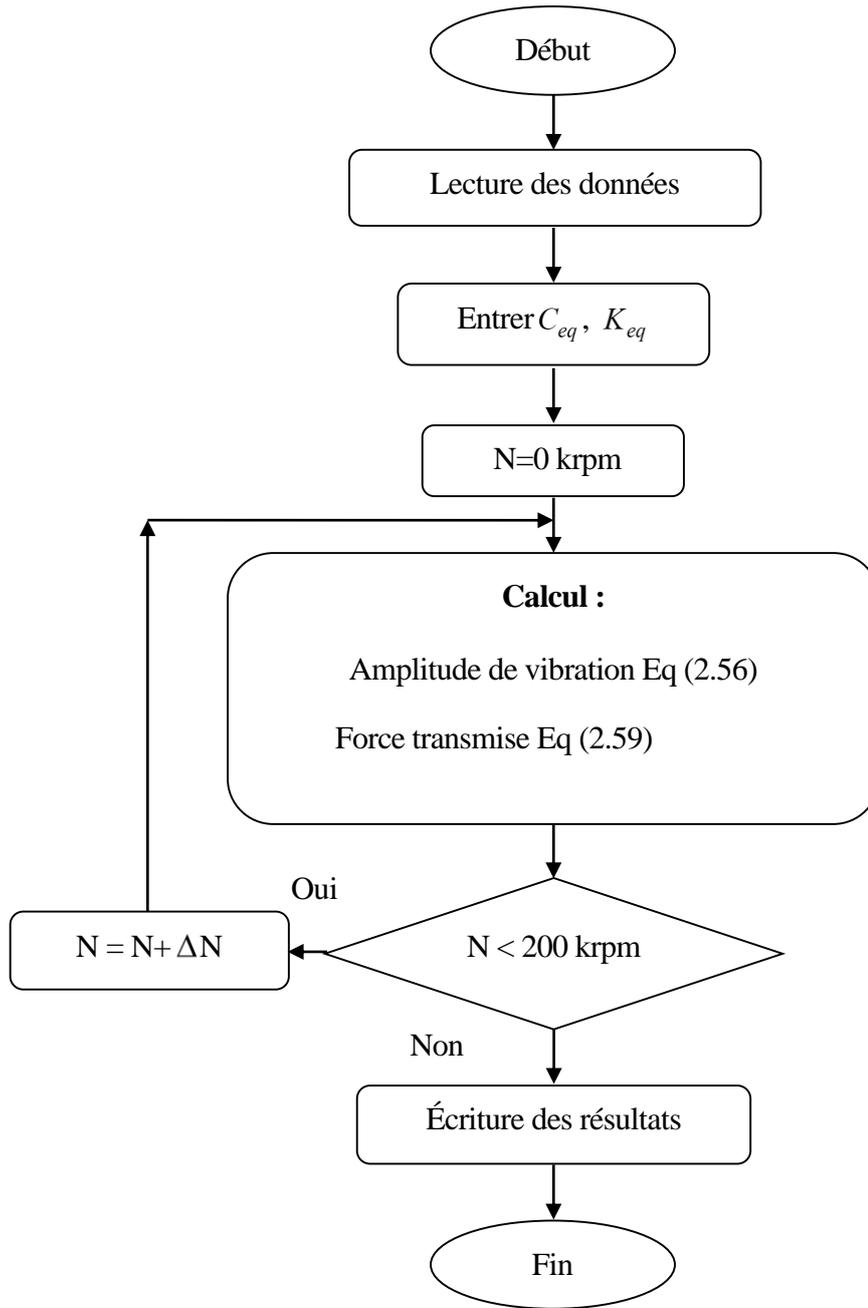


Figure 3.14. Organigramme de calcul de l'amplitude de vibration et de la force transmise.

3.5.2. Analyse de l'amplitude de vibration

L'effet de N et Lm sur l'amplitude de vibration est présenté dans la figure 3.15. Les courbes montrent une meilleure stabilité pour les fluides micropolaires par rapport à celle du fluide newtonien où on remarque une réduction de la valeur de l'amplitude de vibration autour la vitesse critique.

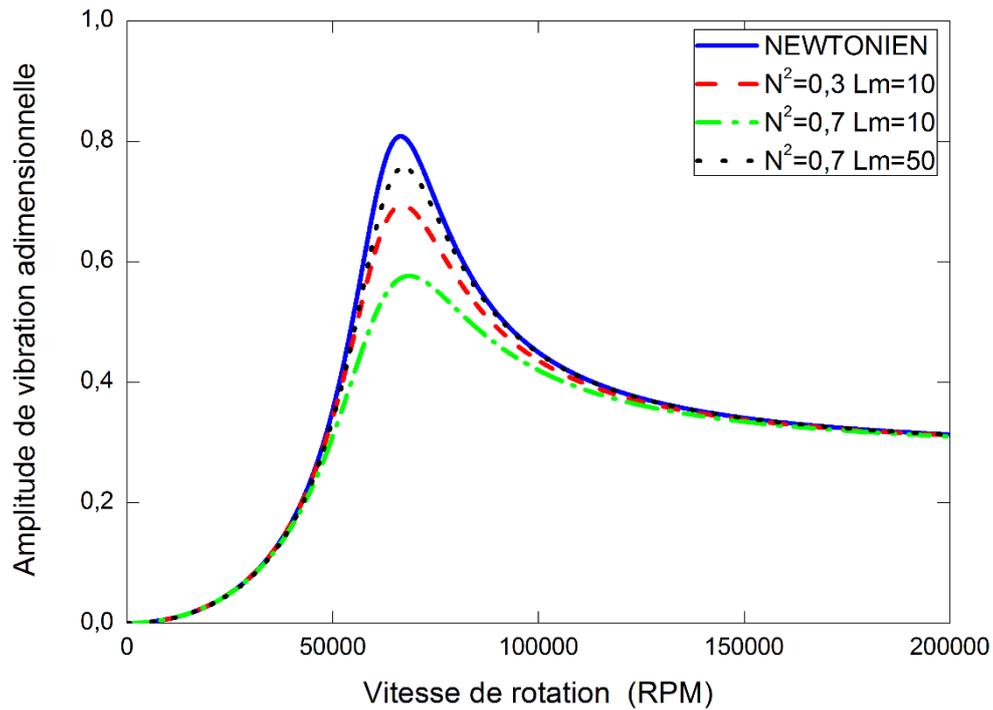


Figure 3.15. Amplitude de vibration adimensionnelle en fonction de la vitesse de rotation pour différentes valeurs du N et Lm .

3.5.3. Analyse de la force de transmissibilité

La figure 3.16 présente l'influence de N et Lm sur la force transmise au bâti. Nous remarquons une diminution maximale de l'amplitude des forces transmises autour la vitesse critique et une augmentation autour les hautes vitesses avec une augmentation de N^2 ou une diminution de Lm , révélant l'effet de la micropolarité sur les amplitudes de force transmises.

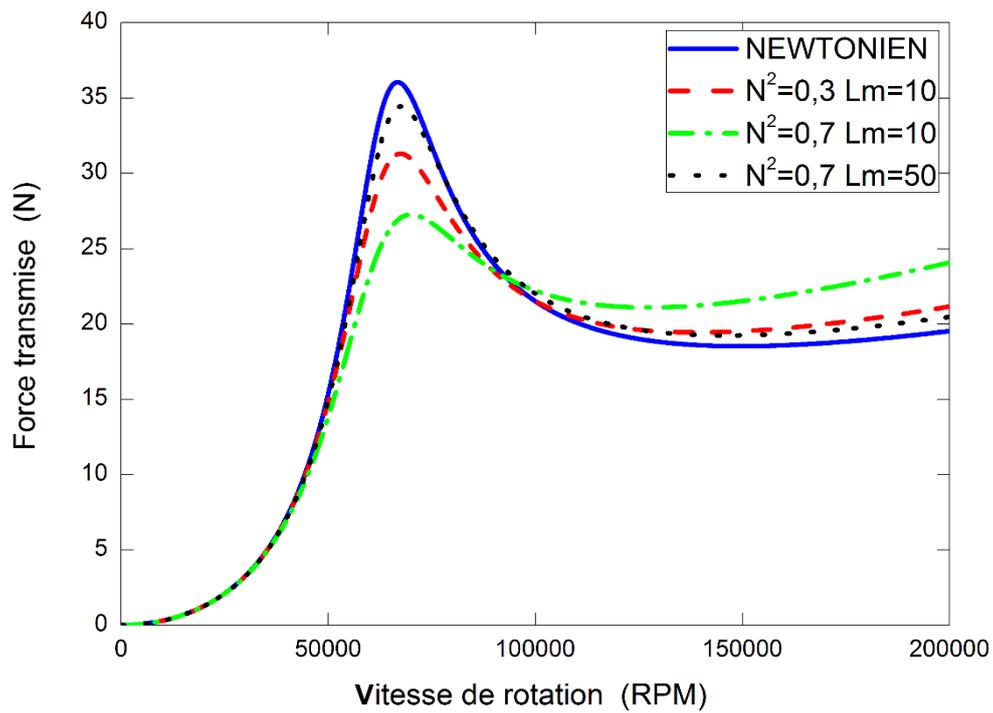


Figure 3.16. Force transmise en fonction de la vitesse de rotation pour différentes valeurs du N et Lm .

3.3 Conclusion

Nous avons présenté et interprété dans ce chapitre les résultats obtenus concernant l'influence des paramètres d'un fluide micropolaire ainsi que celle du rapport de pression β_0 sur les performances du HSFD en terme de : répartition de pression, charge portante, coefficient de raideur, coefficient d'amortissement et de taux d'amortissement.

Les résultats de la validation du modèle numérique avec le modèle analytique ont été aussi présentés et nous avons trouvé que la comparaison a confirmé la validité du modèle numérique.

Les résultats suggèrent que l'influence de l'effet du fluide micropolaire sur les performances du HSFD est principalement affectée par le rapport de pression. Par conséquent, l'opérateur du palier doit judicieusement choisir une valeur appropriée du rapport de pression afin d'obtenir des meilleures performances du palier.

Conclusion générale et perspectives

L'objectif de cette thèse est d'étudier les caractéristiques de performance d'un palier hydrostatique utilisé comme "*hydrostatic squeeze film damper*" lubrifié par un fluide micropolaire à travers des résistances hydrauliques de type capillaire en utilisant une résolution numérique basée sur la méthode des différences finies.

Les caractéristiques statiques et dynamiques ont été étudiées en fonction des paramètres d'un fluide micropolaire ainsi que l'influence du rapport de pression β_0 sur la réponse du palier hydrostatique utilisé comme "*hydrostatic squeeze film damper*".

Une étude sur l'amplitude de vibration et la force transmise en fonction de la vitesse de rotation pour différentes valeurs du N et Lm a été aussi présentée.

Les résultats obtenus peuvent être résumés comme suit :

- Comparé aux lubrifiants newtoniens correspondants, les fluides micropolaires augmentent significativement la pression d'alvéole ;
- Comparé aux paliers lubrifiés avec des lubrifiants newtoniens fonctionnant à des faibles rapports de pression, les lubrifiants micropolaires améliorent les indicateurs de performance Wp , Keq , Ceq et ζ des paliers ;
- Avec les lubrifiants micropolaires, les indicateurs de performance des paliers Keq , Ceq et ζ s'améliorent avec les augmentations de β_0 ;
- Le palier fonctionnant avec des lubrifiants newtoniens présentent des valeurs maximales du débit quel que soit le rapport de pression. D'autre part, lorsqu'il est lubrifié avec des lubrifiants micropolaires, le débit de palier diminue avec une augmentation du N .
- Pour les paliers lubrifiés avec un lubrifiant micropolaire, les petites valeurs de β_0 conduisent à des charges portantes plus importantes.

- L'influence des lubrifiants micropolaires sur le coefficient de raideur équivalent du HSFD semble être essentiellement contrôlée par le rapport de pression. Par conséquent, une procédure de sélection appropriée pour les lubrifiants micropolaires doit incorporer ce paramètre.
- Le coefficient d'amortissement équivalent augmente avec une augmentation de N et une réduction de Lm .
- Enfin, l'étude a démontré qu'autour des vitesses critiques, la réponse vibratoire diminue avec une augmentation de N ou diminution de Lm tandis qu'à des vitesses élevées, les forces transmises augmentent avec une augmentation de N .

Perspectives

Comme perspectives, nous allons envisager de faire :

Une étude sur l'effet du fluide micropolaire sur le comportement dynamique non-linéaire d'une ligne d'arbre montée sur un palier hydrostatique utilisé comme "*hydrostatic squeeze film damper*".

Une contribution à l'étude des paliers hydrostatique, prise en compte de la compressibilité du fluide micropolaire dans les alvéoles.

Une étude numérique sur la réponse d'un palier hydrostatique utilisé comme '*hydrostatic squeeze film damper*' composé de quatre patins hydrostatiques, alimentés par un fluide micropolaire à travers des résistances hydrauliques de type capillaire dans des conditions d'écoulement turbulent.

Une étude sur les performances d'un palier hydrostatique utilisé comme '*hydrostatic squeeze film damper*' sous la lubrification micropolaire en régime non laminaire.

Une contribution à l'étude des paliers hydrostatique utilisé comme '*hydrostatic squeeze film damper*', prise en compte les effets thermique du fluide micropolaire.

Référence bibliographiques

- [1] Michel MORET PG. Roulements - Les différents types et montages,. Technique de l'ingénierie, BM 5 370.
- [2] Juvinall RC, Marshek KM. Fundamentals of machine component design: J. Wiley; 1991.
- [3] Bouzidane A. Conception d'un palier hydrostatique intelligent pour contrôler les vibrations de rotors: École de technologie supérieure; 2007.
- [4] Abed A. Étude du comportement statique et dynamique de paliers fluides à patins hydrostatiques intelligents; 2017.
- [5] Bleuler H, Cole M, Keogh P, Larssonneur R, Maslen E, Okada Y, et al. Magnetic bearings: theory, design, and application to rotating machinery: Springer Science & Business Media; 2009.
- [6] Iannello V. Advances in magnetic bearings. sur le site *synchrony*. Consulté le 25 oct. 2018. <http://www.synchrony.com/knowledge/how-magnetic-bearings-work.php>
- [7] Benariba A, Kechra A. Lubrification par palier hydrodynamique : Université Ibn-Khaldoun de Tiaret; 2013.
- [8] O'donoghue J, Rowe W. Compensation methods for externally pressurized bearings. *Engineers' Digest*. 1969;30:49.
- [9] Ms CC. Characteristics of Externally Pressurized Journal Bearings with Membrane-Type Variable-Flow Restrictors as Compensating Elements. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers*. 2006.
- [10] Rowe W, Koshal D, Stout K. Investigation of recessed hydrostatic and slot-entry journal bearings for hybrid hydrodynamic and hydrostatic operation. *Wear*. 1977;43:55-69.
- [11] Rippel HC. Design of hydrostatic bearings. *Machine Design*. 1963;35:108-17.
- [12] Assis Rodrigues F. Étude de la dynamique non linéaire d'amortisseurs du type squeeze film: Ecole centrale de Lyon; 2003.
- [13] Adams M, Zahloul H. Attenuation of rotor vibration using controlled-pressure hydrostatic squeeze-film dampers. *Rotating machinery dynamics*. 1987:99-108.
- [14] El-Shafei A, Massoud A, El-Hakim M, Hatbout J, Youssef R. Control of Rotor Vibrations Using Hybrid Squeeze Film Dampers. DTIC Document; 1997.

- [15] El-Shafei A, Youssef R. Active control of multi-mode rotor-bearing systems using HSFDs. *Journal of tribology*. 1997;119:49.
- [16] Bouzidane A, Thomas M, Lakis A. Nonlinear dynamic behavior of a rigid rotor supported by hydrostatic squeeze film dampers. *Journal of tribology*. 2008;130:041102.
- [17] Bouzidane A, Thomas M, Ghezali F. Dynamic Behavior of a Rigid Rotor Supported by a New Three-Pad Hydrostatic Squeeze Film Damper.
- [18] Chang-Jian C-W, Yau H-T, Chen J-L. Nonlinear dynamic analysis of a hybrid squeeze-film damper-mounted rigid rotor lubricated with couple stress fluid and active control. *Applied mathematical modelling*. 2010;34:2493-507.
- [19] Rattan S, Mehta N, Bhushan G. Effect of load orientation on the stability of a three-lobe pressure dam bearing with rigid and flexible rotors. *Journal of Engineering and Technology*. 2011;1:10.
- [20] Bouzidane A, Thomas M. Non linear transient response of a flexible shaft controlled by electro-rheological hydrostatic squeeze film dampers. *Condition Monitoring of Machinery in Non-Stationary Operations*: Springer; 2012. p. 33-40.
- [21] Bouzidane A, Thomas M. Nonlinear dynamic behavior of a flexible shaft supported by smart hydrostatic squeeze film dampers. *Journal of tribology*. 2013;135:031701.
- [22] Abed A, Bouzidane A, Thomas M, Zahloul H. Performance characteristics of a three-pad hydrostatic squeeze film damper compensated with new electrorheological valve restrictors. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part J: Journal of Engineering Tribology*. 2016:1350650116683622.
- [23] Belgacem S, Bouzidane A, Abed A. Dynamic analysis of a rigid rotor supported by three-pad hydrostatic squeeze film damper lubricated with ferrofluid. *Tribology-Materials, Surfaces & Interfaces*. 2017;11:136-44.
- [24] Fluide_complexe. sur le site *wikipedia*. Consulté le 25 oct. 2018. https://fr.wikipedia.org/wiki/Fluide_complexe
- [25] ERINGEN AC. Theory of micropolar fluids. *Math Mech*. 1966;16:1-18.
- [26] ERINGEN AC. Simple microfluids. *International Journal of Engineering Science*. 1964;2:205-17.
- [27] Martin G. Étude numérique des équations d'un fluide micropolaire 2001.
- [28] Nicodemus ER, Sharma SC. Orifice compensated multirecess hydrostatic/hybrid journal bearing system of various geometric shapes of recess operating with micropolar lubricant. *Tribology International*. 2011;44:284-96.

- [29] Sharma SC, Ram N. Influence of micropolar lubricants on the performance of slot-entry hybrid journal bearing. *Tribology International*. 2011;44:1852-63.
- [30] Grad H. Statistical mechanics, thermodynamics, and fluid dynamics of systems with an arbitrary number of integrals. *Communications on Pure and Applied Mathematics*. 1952;5:455-94.
- [31] Allen S, Kline K. Lubrication theory for micropolar fluids. *Journal of Applied Mechanics*. 1971;38:646-50.
- [32] Shukla J, Isa M. Externally pressurised optimum bearing with micropolar fluid as lubricant. *Japanese Journal of Applied Physics*. 1975;14:275.
- [33] Prakash J, Sinha P. Lubrication theory for micropolar fluids and its application to a journal bearing. *International Journal of Engineering Science*. 1975;13:217-32.
- [34] Zaheeruddin K, Isa M. Micropolar fluid lubrication of one-dimensional journal bearings. *Wear*. 1978;50:211-20.
- [35] Tipei N. Lubrication with micropolar liquids and its application to short bearings. *Journal of tribology*. 1979;101:356-63.
- [36] Singh C, Sinha P. The three-dimensional Reynolds equation for micro-polar-fluid-lubricated bearings. *Wear*. 1982;76:199-209.
- [37] Zu-gan Q, Zhang-ji L. Lubrication theory for micropolar fluids and its application to a journal bearing with finite length. *Applied Mathematics and Mechanics*. 1987;8:655-65.
- [38] Khonsari M, Brewe D. On the performance of finite journal bearings lubricated with micropolar fluids. *Tribology Transactions*. 1989;32:155-60.
- [39] Das S, Guha SK, Chattopadhyay AK. Linear stability analysis of hydrodynamic journal bearings under micropolar lubrication. *Tribology International*. 2005;38:500-7.
- [40] Wang X-L, Zhu K-Q. Numerical analysis of journal bearings lubricated with micropolar fluids including thermal and cavitating effects. *Tribology International*. 2006;39:227-37.
- [41] Verma S, Kumar V, Gupta K. Analysis of multirecess hydrostatic journal bearing operating with micropolar lubricant. *Journal of tribology*. 2009;131:021103.
- [42] Nicodemus ER, Sharma SC. Influence of wear on the performance of multirecess hydrostatic journal bearing operating with micropolar lubricant. *Journal of tribology*. 2010;132:021703.
- [43] Rahmatabadi A, Mehrjardi MZ, Fazel M. Performance analysis of micropolar lubricated journal bearings using GDQ method. *Tribology International*. 2010;43:2000-9.

- [44] Rao P, Murmu B, Agarwal S. Effects of Surface Roughness and Non-Newtonian Micropolar Fluid Squeeze Film between Conical Bearings. *Zeitschrift für Naturforschung A*. 2017;72:1151-8.
- [45] Khatak P, Garg H. Performance Analysis of Capillary Compensated Hybrid Journal Bearing by Considering Combined Influence of Thermal Effects and Micropolar Lubricant. *Journal of tribology*. 2017;139:011707.
- [46] Benadda M. Modélisation et analyse du comportement dynamique d'une ligne d'arbre flexible supportée par des paliers hydrostatiques. Université Ibn-Khaldoun de Tiaret; 2014-2015.
- [47] Équilibrage dynamique en atelier. 2017. sur le site *ATELIER DU MARAIS*. Consulté le 17 DEC. 2017. <https://www.adm-vib.fr/equilibrage-dynamique/equilibrage-atelier.html>
- [48] BELAHRACHE S. Analyse dynamique des corps continus en rotation : application aux arbres moteurs mentouri; 2007.
- [49] SAIMI A. Comportement vibratoire des roues aubagées: Aboubekr Belkaid– Tlemcen; 2012-2013.
- [50] Bouzidane A, Thomas M. Equivalent stiffness and damping investigation of a hydrostatic journal bearing. *Tribology Transactions*. 2007;50:257-67.

ANNEXE

LES MÉTHODES NUMÉRIQUES

A1. Méthode des différences finies

La méthode des différences finies (FDM) est une procédure numérique utilisée pour résoudre des équations différentielles ou équations aux dérivées partielles dans laquelle les dérivés sont approximés par des fonctions linéaires utilisant des équations de différences finies. Cette méthode est dérivée de la série de Taylor.

Le principe de la méthode des différences finies est de remplacer les dérivées d'équations différentielles par des termes de différences finies équivalents extraits de l'expansion de Taylor.

Soit $u(x, z)$ une fonction continue. Le développement en série de Taylor autour un point (x, z) est donné comme suit :

$$u(x + \Delta x, z) = u(x, z) + \Delta x \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\Delta x^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + O(\Delta x^3) \quad (\text{A.1})$$

$$u(x - \Delta x, z) = u(x, z) - \Delta x \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\Delta x^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - O(\Delta x^3) \quad (\text{A.2})$$

La soustraction [(A.1)-(A.2)] donne :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u(x + \Delta x, z) - u(x - \Delta x, z)}{2\Delta x} \quad (\text{A.3})$$

L'addition [(A.1) + (A.2)] donne :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u(x + \Delta x, z) - 2u(x, z) + u(x - \Delta x, z)}{\Delta x^2} \quad (\text{A.4})$$

On calcul de la même manière suivant z , on obtient :

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{u(x, z + \Delta z) - u(x, z - \Delta z)}{2\Delta z} \quad (\text{A.5})$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{u(x, z + \Delta z) - 2u(x, z) + u(x, z - \Delta z)}{\Delta z^2} \quad (\text{A.6})$$

Soit le domaine de résolution suivant (figure A.1) :

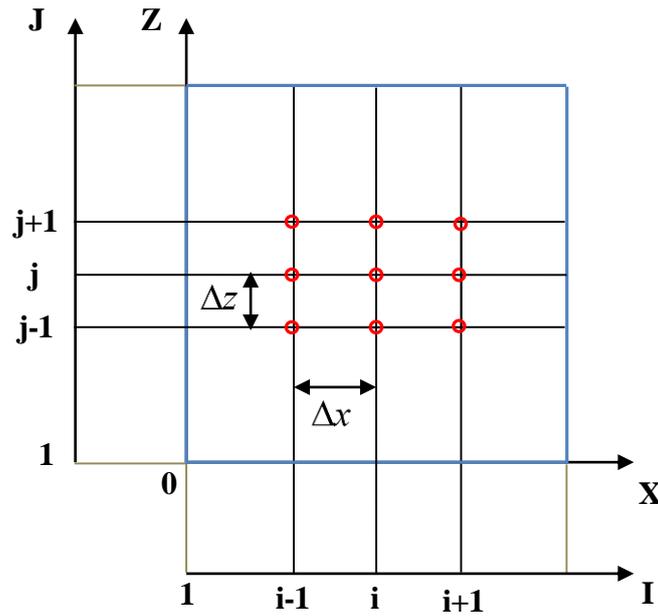


Figure A.1. Domaine de résolution par la méthode des différences finies.

On discrétisons le domaine de résolution, les variables continues x et z sont remplacées par des variables discrètes i et j . On obtient donc les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{u(i+1, j) - u(i-1, j)}{2\Delta x} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{u(i+1, j) - 2u(i, j) + u(i-1, j)}{\Delta x^2} \\ \frac{\partial u}{\partial z} &= \frac{u(i, j+1) - u(i, j-1)}{2\Delta z} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} &= \frac{u(i, j+1) - 2u(i, j) + u(i, j-1)}{\Delta z^2} \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

A2. Méthode de Gauss-Seidel

La méthode de Gauss-Seidel est une méthode itérative pour résoudre les systèmes linéaires $AX = B$ dont le principe est d'utiliser la valeur de la nouvelle itération dès qu'elle est connue.

Soit le système linéaire suivant :

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \cdot & \\ \cdot & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned} \tag{A.8}$$

Si les éléments diagonaux sont différents de zéro, on peut résoudre l'inconnu correspondant pour chaque équation du système suivant comme suit :

$$\begin{aligned} x_1^{k+1} &= \frac{b_1 - a_{12}x_2^k - a_{13}x_3^k - \dots - a_{1n}x_n^k}{a_{11}} \\ x_2^{k+1} &= \frac{b_2 - a_{21}x_1^{k+1} - a_{23}x_3^k - \dots - a_{2n}x_n^k}{a_{22}} \\ \cdot & \\ \cdot & \\ x_n^{k+1} &= \frac{b_n - a_{n1}x_1^{k+1} - a_{n2}x_2^{k+1} - \dots - a_{nn-1}x_{n-1}^{k+1}}{a_{nn}} \end{aligned} \tag{A.9}$$

Où k est le nombre d'itérations.

On peut écrire les équations précédentes comme suit :

$$\begin{aligned}
 x_1^{k+1} &= \frac{b_1 - \sum_{j=2}^n a_{1j} x_j^k}{a_{11}} \\
 x_2^{k+1} &= \frac{b_2 - a_{21} x_1^{k+1} - \sum_{j=3}^n a_{2j} x_j^k}{a_{22}} \\
 &\cdot \\
 &\cdot \\
 x_n^{k+1} &= \frac{b_n - \sum_{j=1}^{n-1} a_{nj} x_j^{k+1}}{a_{nn}}
 \end{aligned} \tag{A.10}$$

Donc, la forme générale de la méthode de Gauss-Seidel s'écrit comme suit :

$$x_i^{k+1} = \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{k+1} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^k}{a_{ii}} \tag{A.11}$$

Lorsque la méthode de Gauss-Seidel converge très lentement, on peut utiliser la méthode de sur-relaxation successive qui est obtenue en modifiant l'itération comme suit :

$$x_i^{k+1} = \Omega x_i^{k+1} + (1 - \Omega) x_i^k \tag{A.12}$$

$$x_i^{k+1} = \Omega \left[\frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{k+1} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^k}{a_{ii}} \right] + (1 - \Omega) x_i^k \tag{A.13}$$

Où Ω , ($0 < \Omega < 2$) est le coefficient de sur-relaxation.

A3. Méthode de sécante

Soit une fonction $f(x) = y$ qui définit sur l'intervalle $[a, b]$ où $f(a), f(b) < 0$.

L'idée de la méthode de sécante est de remplacer la fonction f par la droite passant par les deux points $(a, f(a)), (b, f(b))$. Ensuite, la prochaine itération est obtenue en calculant la valeur de x à laquelle la droite sécante a une coordonnée y de zéro (figure A.2).

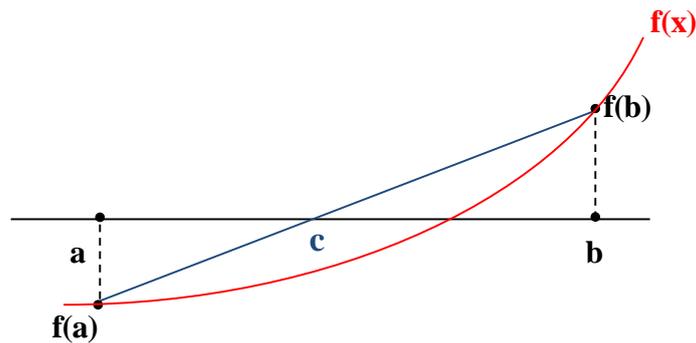


Figure A.2. Méthode de sécante.

On a donc l'équation suivante :

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}(c - b) + f(b) = 0 \quad (\text{A.14})$$

Qui a la solution suivante :

$$c = b - \frac{f(b)(b - a)}{f(b) - f(a)} \quad (\text{A.15})$$

On peut écrire l'équation précédente comme suit:

$$\begin{aligned} c &= b - \frac{f(b)(b - a)}{f(b) - f(a)} = b \frac{f(b) - f(a)}{f(b) - f(a)} - \frac{f(b)(b - a)}{f(b) - f(a)} \\ &= \frac{b(f(b) - f(a)) - f(b)(b - a)}{f(b) - f(a)} = \frac{bf(b) - bf(a) - bf(b) + af(b)}{f(b) - f(a)} \\ &= \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)} \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

Donc, la forme générale de la méthode de sécante s'écrit comme suit :

$$x_{k+1} = \frac{x_{k-1}f(x_k) - x_k f(x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})} \quad (\text{A.17})$$

Où k est le nombre d'itérations.

A4. La convergence des méthodes itératives

Puisque les méthodes itératives nécessitent un nombre infini d'itérations pour converger vers la solution, il faut définir un critère d'arrêt pour ces méthodes où l'erreur devient suffisamment petite.

L'erreur peut être calculée comme suit :

$$\frac{|x_i^{k+1} - x_i^k|}{|x_i^k|} < \varepsilon \quad (\text{A.18})$$

Où ε est une tolérance donnée.

A5. Méthode des trapèzes

Le principe de la méthode des trapèzes est de calculer des valeurs approchées d'intégrales.

Soit $f(x) = y$ une fonction continue sur l'intervalle $[a, b]$, on veut calculer l'intégrale définie $\int_a^b f(x) dx$.

On subdivise l'intervalle $[a, b]$ en n intervalles de même longueur $\Delta x = \frac{b-a}{n}$, où pour tout $i \in \{0, 1, \dots, n\}$, $x_i = a + i\Delta x$, $f(x_i) = y_i$.

On remplace la courbe représentative de f sur chaque segment de la subdivision par le segment qui joint $(x_i, f(x_i))$ à $(x_{i+1}, f(x_{i+1}))$ (figure A.3).

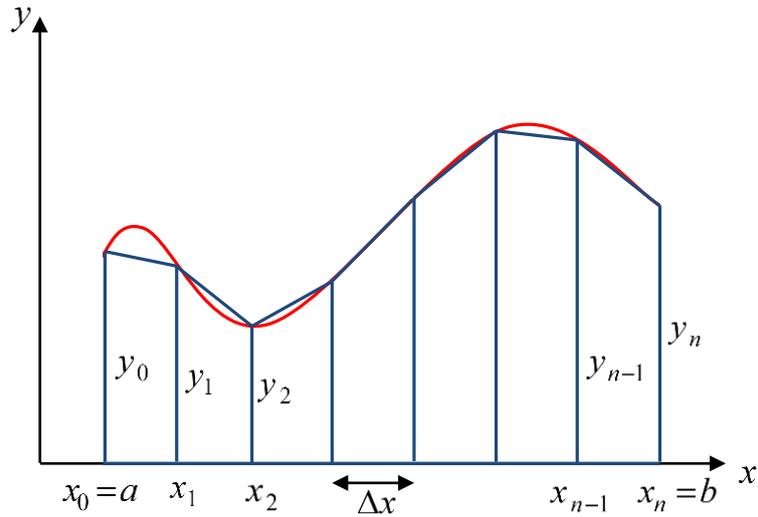


Figure A.3. Description de la méthode des trapèzes.

La surface du trapèze est obtenue en calculant la surface d'un triangle et d'un rectangle comme illustré dans la figure A.4.

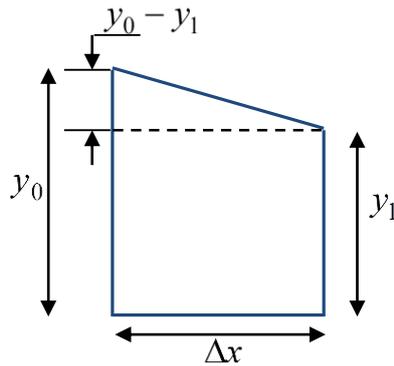


Figure A.4. Schématisation d'un trapèze.

$$A = y_1 \Delta x + \frac{1}{2} (y_0 - y_1) \Delta x = \frac{y_0 + y_1}{2} \Delta x \quad (\text{A.19})$$

En ajoutant les surfaces des n trapèzes, on obtient l'approximation suivant :

$$\int_a^b f(x) = \frac{y_0 + y_1}{2} \Delta x + \frac{y_1 + y_2}{2} \Delta x + \frac{y_2 + y_3}{2} \Delta x + \dots + \frac{y_{n-1} + y_n}{2} \Delta x \quad (\text{A.20})$$

On peut écrire la formule générale des trapèzes comme suit :

$$\int_a^b f(x) = \frac{\Delta x}{2} (y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \dots + 2y_{n-1} + y_n) \quad (\text{A.21})$$

On peut l'écrire aussi sous la forme suivant :

$$\int_a^b f(x) = \frac{b-a}{n} \left(\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_1^{n-1} f(x_i) \right) \quad (\text{A.22})$$