



UNIVERSITÉ DE REIMS CHAMPAGNE-ARDENNE



ÉCOLE DOCTORALE SCIENCES TECHNOLOGIE SANTE (547)

THÈSE EN CO-TUTELLE

Pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ IBN KHALDOUN DE TIARET

Spécialité : Modélisation des Matériaux et des Structures

Et

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE REIMS CHAMPAGNE-ARDENNE

Discipline : MÉCANIQUE DES SOLIDES, GÉNIE MÉCANIQUE, PRODUCTIQUE, TRANSPORT ET GÉNIE CIVIL

Spécialité : Science de l'ingénieur

Présentée et soutenue publiquement par

Mohamed Amine BEN HENNI

Le 8 juillet 2019

CONTRIBUTION A L'ETUDE DE LA VIBRATION DES PLAQUES EN MATERIAUX COMPOSITES SOUS CHARGEMENTS MECANIQUE ET THERMOMECHANIQUE

Thèse dirigée par M. Tahar HASSAINE DAOUADJI, Professeur, **Université Ibn Khaldoun de Tiaret**

Et par M. Yuming LI, Maître de Conférences HDR et Boussad ABBÈS, Professeur, **UNIVERSITE DE REIMS
CHAMPAGNE-ARDENNE**

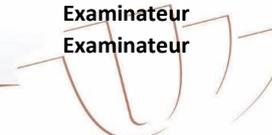
JURY

M.MohamedAIT AMAR MEZIANE,
M.TaharHASSAINE DAOUADJI,
M.YumingLI,
M.AhmedBOUZIDANE,
M.HamidZAHROUNI,
M.BoussadABBÈS,
M.HassenAIT ATMAN,
MmeFazilayABBÈS,

Maître de Conférences A,
Professeur,
Maître de Conférences HDR,
Professeur,
Professeur,
Professeur,
Professeur,
Maître de Conférences,

Université Ibn Khaldoun de Tiaret,
Université Ibn Khaldoun de Tiaret,
Université de Reims Champagne-Ardenne,
Université Ibn Khaldoun de Tiaret,
Université de Lorraine, Metz,
Université de Reims Champagne-Ardenne,
Université Hassiba Benbouali de Chlef,
Université de Reims Champagne-Ardenne,

Président
Directeur de thèse
Directeur de thèse
Co-Directeur de thèse
Examineur
Examineur
Examineur
Examineur



Production scientifique

En plus de ce mémoire de thèse, ces travaux ont conduit aux publications et communications suivantes :

M. A. Ben Henni, B. Adim, T. Hassaine Daouadji, B. Abbès, F. Abbès, Y. Li, et A. Bouzidane. A comparison of closed-form and finite-element solutions for the free vibration of hybrid cross-ply laminated plates. *Mechanics of Composite Materials*, Vol. 55, No. 2 (May 2019).

M.A. Ben Henni, T. Hassaine Daouadji, B. Abbès, B. Adim, Y. Li et F. Abbès. Dynamic analysis for anti-symmetric cross-ply and angle-ply laminates for simply supported thick hybrid rectangular plates. *Advances in Materials Research*, Vol. 7 No. 2 (2018) 119-136.

M. A. Ben Henni, T. H. Daouadji, B. Abbès, Y. M. Li and F. Abbès. Analytical and Numerical Results for Free Vibration of Laminated Composites Plates. *International Journal of Chemical and Molecular Engineering*, 12(6)(2018) 300-304.

M. A. Ben Henni, T. Hassaine Daouadji, B. Abbès, F. Abbès, Y. Li and B. Adim. Numerical analysis for free vibration of hybrid laminated composite plates for different boundary conditions. *Structural Engineering and Mechanics*, Vol. 70 No. 4(2019).

A. Belkacem, H. D. Tahar, R. Abderrezak, **M. A. Ben Henni**, Z. Mohamed, B. Abbès. Mechanical buckling analysis of hybrid laminated composite plates under different boundary conditions. *Structural Engineering and Mechanics*, 66(6)(2018) 761-769.

M. A. Ben Henni, T. Hassaine Daouadji, B. Abbès, Y. Li, F. Abbès. Analytical and Numerical Results for Free Vibration of Laminated Composites Plates, ICPP 2018: 20th International Conference on Polymers and Polymerization, Paris, France, June 25-26, 2018.

M. A. Ben Henni, B. Abbès, F. Abbès, Y. Li, T. Hassaine Daouadji. Modèles analytique et numérique pour l'analyse vibratoire de plaques composites hybrides. CSMA 2019, 14ème Colloque National en Calcul des Structures 13-17 mai 2019, Presqu'île de Giens (Var), France.

M. A. Ben Henni, B. Adim, T. Hassaine Daouadji, A. Bouzidane, Y. Li, B. Abbès. Vibration libre des plaques en matériau composite. CIMA 2016, International Conference on Mechanics and Aeronautics, October 18-20, 2016 Algiers, Algeria.

M. A. Ben Henni, B. Adim, T. Hassaine Daouadji, A. Bouzidane, Y. Li, B. Abbès. Contribution à l'étude de la vibration libre des plaques en matériaux composites. Workshop International Plasturgie (WIP'1) 2016, 29-30 Octobre 2016 à Oran, Algérie.

B. Adim, **M. A. Ben Henni**, Hassaine Daouadji T., A. Rabahi, M. Zidour. Vibration des plaques stratifiées en matériaux composites sous divers conditions aux limites. CIMA 2016, International Conference on Mechanics and Aeronautics, October 18-20, 2016 Algiers, Algeria.

Remerciements

Ce travail de thèse a été réalisé conjointement entre l'Université Ibn Khaldoun de Tiaret (Algérie) et l'Université de Reims Champagne-Ardenne (France). L'ensemble des travaux de thèse ont été effectués au laboratoire de Géomatique et Développement Durable (LGéo2D) à Tiaret et le laboratoire GRESPI (Groupe de Recherche En Science Pour L'ingénieur) à Reims.

Je tiens tout d'abord à remercier le Ministère des Affaires Etrangères et du Développement International (MAEDI), le Ministère de l'Education Nationale de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche (MENESR) et le Ministère Algérien de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique pour le financement du projet PHC Tassili n° 17MDU992 qui m'a permis de mener à bien ces travaux de thèse.

J'adresse mes remerciements à l'ensemble de mon équipe d'encadrement, le Professeur HASSAINE DAOUADJI Tahar le directeur de thèse en Algérie pour m'avoir fait confiance et lancer le projet de cette thèse et sa contribution pour mener à bien ce travail, Monsieur Li YuMing directeur de thèse en France et Maître de conférences HDR à l'Université de Reims de m'avoir donné la possibilité de faire cette thèse. Un grand merci également à mon co-directeur de thèse Monsieur Boussad ABBES Professeur à l'Université de Reims pour ses conseils, sa patience et son encouragement, à mon co-encadrante Fazilay ABBES Maître de conférences à l'Université de Reims pour tout le soutien et l'accompagnement.

Je tiens aussi à remercier l'ensemble des membres du jury qui ont accepté de juger mon travail de thèse : M. Ahmed BOUZIDANE Professeur à l'Université Ibn Khaldoun de Tiaret, M. Hassen AIT ATMAN Professeur à l'Université Hassiba Benbouali de Chlef, M. Hamid ZAHROUNI Professeur à l'Université de Lorraine, Metz et M. Mohamed AIT AMAR MEZIANE Maître de Conférences HDR à l'Université Ibn Khaldoun de Tiaret

Je suis très reconnaissant envers Monsieur Belkacem ADIM Maître de conférences au centre Universitaire El Wancharissi -Tissemsilt, Algérie pour son soutien aux moments difficiles et pour ses qualités humaines.

Mes remerciements s'adressent à toute personne ayant contribué d'une manière ou d'une autre à l'achèvement de ce travail.

À mes chers parents

À mes frères et sœurs

À tous ceux qui me sont chers

ملخص

الهدف من هذا العمل هو تحليل سلوك الاهتزاز الحر للصفائح المركبة الهجينة باستخدام نظرية جديدة للقص العرضي باستخدام أربع متغيرات والتي تأخذ في عين الاعتبار تأثير القص العرضي عند حساب التشوهات. ومن ناحية أخرى تحليل بواسطة طريقة العناصر المحدودة. يتم الحصول على معادلة حركة اللوحة الطبقيّة باستخدام مبدأ هاملتون. يتم الحصول على التعبيرات الرياضية باستخدام حل Navier لظروف الحدود المختلفة. من أجل التحقق من صحة النماذج المقترحة، قمنا أولاً بمقارنة نتائجنا مع النماذج الموجودة في الأدبيات الخاصة بالمواد المركبة الغير هجينة. يتم حساب خصائص المرونة للوحة الهجينة باستخدام قانون المزوج. بعد ذلك، درسنا تأثيرات حجم اللوحة، حجم ونوع الألياف، وموضع الطبقة (في حالة تهجين الطبقات) وكذلك الظروف الحدودية على الترددات الأساسية للوحات. نظراً لعدم توفر بيانات في الأدبيات الخاصة بالصفائح المركبة الهجينة، تم استخدام حلول العناصر المحدودة للتحقق من النتائج التي حصلنا عليها باستخدام نظرية الترتيب العالي. أظهرت النتائج دقة جيدة للنموذج المقترح للتنبؤ بالترددات الأساسية للصفائح الطبقيّة الهجينة. نظراً لأن الحرارة والرطوبة تؤدي إلى انخفاض صلابة الهياكل عمومًا، فقد درسنا تأثيرات درجة الحرارة والرطوبة على ثبات الألواح المركبة الهجينة وغير الهجينة. تظهر النتائج التي تم الحصول عليها بالنسبة للترددات الأساسية أن الظروف الحرارية الجوفية تؤثر على سلوك اللوحات المركبة ولكن على نطاق أقل.

Résumé

Ce travail a pour objectif d'analyser le comportement en vibrations libres decomposites stratifiés à fibres hybrides en utilisant d'une part, une théorie d'ordre élevé à quatre variables qui prend en considération l'effet de cisaillement transverse lors du calcul des déformations ; et d'autre part une analyse par la méthode des éléments finis. L'équation du mouvement de la plaque stratifiée est obtenue en utilisant de principe d'Hamilton. Les expressions mathématiques sont obtenues en utilisant la solution de Navier pour différentes conditions aux limites. Afin de valider les modèles proposés nous avons d'abord comparé nos résultats avec des modèles existants dans la littérature pour les matériaux non hybrides. Les modules élastiques de la plaque hybride sont calculés en utilisant la loi des mélanges. Ensuite, nous avons étudié les effets des dimensions de la plaque, de la fraction volumique et du type de fibres, de la position des couches (pour le cas de l'hybridation intercouche) ainsi que les conditions aux limites sur les fréquences fondamentales des plaques composites hybrides. Comme il n'y a aucune donnée disponible dans la littérature pour les plaques composites hybrides, la solution en éléments finis a été utilisée pour valider les résultats obtenus par la théorie d'ordre élevé. Les résultats montrent la bonne précision de la solution analytique proposée pour la prévision des fréquences fondamentales des plaques stratifiées hybrides. Comme les conditions hygrothermiques généralement dégradent la rigidité des structures, nous avons étudié les effets de température et de l'humidité sur la stabilité des plaques composites hybrides et non hybrides. Les résultats obtenus pour les fréquences fondamentales montrent que les conditions hygrothermiques affectent le comportement des plaques composites mais à moindre échelle.

Mots-clefs : Plaques composites hybrides, théorie des plaques d'ordre élevé, vibrations libres, méthode des éléments finis, effets hygrothermiques.

Contribution to the study of vibration of composite material plates under mechanical and thermomechanical loadings

Abstract

The aim of this work is to analyze the vibration behavior of hybrid fiber composite laminates by using, on the one hand, the four-variable high order theory taking into account the transverse shear effect for strain calculation; and on the other hand by the finite element method analysis. The equation of motion of the laminated plate is obtained using Hamilton's principle. The mathematical expressions are obtained using the Navier solution for different boundary conditions. In order to validate the proposed models, we compared our results with existing models in the literature for non-hybrid composites. The elastic moduli of the hybrid plate were calculated using the law of mixtures. Then, we studied the effects of the plate dimensions, the volume fraction, the type of fiber, the position of layers (in the case of interlayer hybridization) on the fundamental frequencies of hybrid composite plates. Since, there is no data available in the literature for hybrid composite plates, the finite element solution is used to validate the results obtained by the high order theory. The results show good accuracy of the proposed analytical solution for the prediction of the fundamental frequencies of hybrid stratified plates. Hygrothermal conditions generally degrade the rigidity of structures, we studied the effects of temperature and humidity on the stability of hybrid and non-hybrid composite plates. The results obtained for the fundamental frequencies show that the hygrothermal conditions can affect the behavior of composite plates but with a lesser effect.

Keywords: Hybrid composite plates, high order plate theory, free vibrations, FEM, hygrothermal effects

Notations

a	Longueur de la plaque
b	Largeur de la plaque
h	Epaisseur de la plaque
E	Module de Young
E_{11}	Module de Young longitudinal
E_{22}	Module de Young transversal
G_{12}, G_{13}, G_{23}	module de cisaillement
ν	Coefficient de Poisson
E_c	Module d'élasticité du composite
E_f	Module d'élasticité des fibres
E_m	Module d'élasticité de la matrice
V	Fraction volumique du composite
V_m	Fraction volumique de la matrice
V_f	Fraction volumique de la fibre
K_L	Module de compressibilité latéral total du composite
K_m	Module de compressibilité latéral de la matrice
K_f	Module de compressibilité latéral de la fibre
u, v, w	Déplacements suivant les directions x, y et z
u_0, v_0	Composantes du champ de déplacement sur le plan moyen de la plaque
$f(z)$	Fonction de gauchissement (fonction de cisaillement transverse)
$f'(z)$	Première dérivée de la fonction de gauchissement par rapport à z
$\omega, \bar{\omega}$	Fréquences naturelles
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$	Contraintes normales suivant les directions x, y et z
$\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$	Contraintes de cisaillement
$\varepsilon_x, \varepsilon_y$	Déformations dans les directions x et y
$\gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$	Déformations de distorsion
$\delta u_0, \delta v_0, \delta w_b, \delta w_s$	Champ virtuel de déplacement
w_b	Composante de la flèche due à la flexion
w_s	Composante de la flèche due au cisaillement
N_x, N_y, N_{xy}	Efforts normaux de membrane

M_x^b, M_y^b, M_{xy}^b	Moments de flexion pure
M_x^s, M_y^s, M_{xy}^s	Moments de flexion supplémentaire due au cisaillement transverse
K_x^b	Courbure de flexion suivant x
K_x^s	Courbure de cisaillement suivant x
K_y^b	Courbure de flexion suivant y
K_y^s	Courbure de cisaillement suivant y
K_{xy}^b	Courbure de flexion suivant xy
K_{xy}^s	Courbure de cisaillement suivant xy
Q_{yz}^s, Q_{xz}^s	Effort de cisaillement pur
m, n	Nombres de modes
A_{ij}	Termes de rigidité en membrane de la plaque
B_{ij}	Termes de rigidité de couplage de la plaque
D_{ij}	Termes de rigidité de flexion de la plaque
A_{ij}^s	Termes de rigidité de la plaque en cisaillement
B_{ij}^s	Termes de rigidité de la plaque en cisaillement
D_{ij}^s	Termes de rigidité de la plaque en cisaillement
H_{ij}^s	Termes de rigidité de la plaque en cisaillement
Q_{ij}	Coefficients de rigidité
\bar{Q}_{ij}	Coefficients de rigidité en fonction de l'orientation des fibres
s_{ij}	Valeurs propres
$\{\Delta\}$	Vecteur des déplacements

TABLE DES MATIERES

Introduction Générale	10
Chapitre I Analyse bibliographique.....	14
Résumé du chapitre.....	16
1 Généralités sur les matériaux composites	17
1.2. Les renforts.....	20
1.3. Charges et additifs.....	24
1.4. Structures du composite	25
1.5. Procédés de fabrication des structures composites	27
2. Théories des plaques.....	31
2.1. Théorie classique des plaques minces de Love-Kirchhoff (CLPT)	31
2.2. Théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT)	32
2.3. Théories de déformation en cisaillement d'ordre élevé (HSDT)	33
2.4. Théorie zig-zag.....	36
3. Effet de l'hybridation.....	38
4. Effet hygrothermique	41
5. Conclusion	44
Chapitre II Comportement vibratoire des plaques composites	45
Résumé du chapitre.....	47
1. Modèle analytique	48
1.1. Les hypothèses de la théorie raffinée d'ordre élevé.....	48
1.2. Cinématique et équations constitutives	49
1.3. Equations gouvernantes.....	51
1.4. Solution de Navier pour les plaques stratifiées simplement appuyées	55
2. Modélisation par éléments finis.....	62
2.1. Logiciel Abaqus	62
2.2. Modèles numériques.....	63
3. Résultats et discussions.....	67
3.1. Validation des modèles	67
3.2. Effet des dimensions de la plaque sur les fréquences propres.....	69
3.3. Effet de l'orientation des fibres sur les fréquences propres	73
3.4. Effet des conditions aux sur les fréquences propres	76
4. Conclusion	79

Chapitre III Analyse et modélisation du comportement dynamique des plaques composites à fibres hybrides.....	80
Résumé du chapitre.....	82
1. Hybridation Intrafils.....	83
1.1. Propriétés matérielles des composites hybrides	83
1.2. Formulation de la théorie raffinée pour les plaques stratifiées à fibres hybrides.....	86
2. Résultats et discussions.....	89
2.1. Hybridation intrafils.....	89
2.2. Hybridation Intercouche	97
3. Conclusion	104
Chapitre IV Modélisation numérique du comportement dynamique et hygrothermique des plaques composites.....	105
Résumé du chapitre.....	107
1. Effet hygrothermique	108
1.1. Propriétés matérielles de composites sous conditions hygrothermiques	108
1.2. Propriétés matérielles du composite hybride	109
1.3. Propriétés matérielles du composite non hybride.....	110
1.4. Formulation de la théorie raffinée pour les plaques stratifiées.....	111
2. Résultats et discussions.....	112
2.1. Effet hygrothermique sur le comportement des plaques composites non hybrides	113
2.2. Effet hygrothermique sur le comportement des plaques composites à fibres hybrides	121
2.3. Effet hygrothermique sur le comportement de plaques hybrides intercouches.....	122
3. Conclusion	124
Conclusion Générale.....	125
Bibliographie.....	128

INTRODUCTION GENERALE

Les matériaux composites sont de plus en plus utilisés dans de nombreux domaines industriels tels que : l'aérospatiale, l'aéronautique, l'automobile et les équipements sportifs. Ils offrent des solutions technologiques innovantes par rapport aux matériaux traditionnels grâce à leurs avantages tels que : légèreté, résistance mécanique et chimique, maintenance réduite, liberté de forme, isolation thermique et électrique. Néanmoins, leur prix et l'impact sur l'environnement restent parmi les principaux inconvénients. Des travaux ont été menés ces dernières années pour apporter des solutions aux problèmes environnementaux où des chercheurs ont suggéré l'hybridation des fibres afin d'obtenir des propriétés optimales du composite pour certaines applications en mélangeant par exemple des matériaux bio-sourcés qui sont écologiques et renouvelables avec des matériaux synthétiques.

L'objectif de ce travail de thèse est d'étudier le comportement en vibration libres de plaques stratifiées antisymétriques en matériaux composites à fibres hybrides : carbone/kevlar, carbone/verre et kevlar/verre. Les fréquences propres sont calculées en utilisant d'une part, la théorie d'ordre élevé à quatre variables qui donne une variation parabolique des contraintes de cisaillement à travers l'épaisseur sans facteurs de correction de cisaillement et satisfait les conditions de nullité de ces contraintes de cisaillement sur les faces supérieure et inférieure de la plaque ; et d'autre part une analyse par la méthode des éléments finis à l'aide du code commercial ABAQUS.

Le manuscrit résumant les travaux effectués dans le cadre de la thèse s'articule autour de quatre chapitres :

Le premier chapitre présente quelques généralités sur les matériaux composites, les théories des plaques les plus utilisées qui décrivent le comportement statique, dynamique et thermomécanique de plaques stratifiées. Ce chapitre comporte également un état de l'art des différents travaux réalisés sur les matériaux composites à renforts hybrides. Nous avons également présenté dans ce chapitre quelques études sur les effets hygrothermiques qui peuvent dégrader les propriétés élastiques et la rigidité des structures.

Le deuxième chapitre présente l'étude du comportement vibratoire de plaques stratifiées à couches croisées (cross-ply $0^\circ/90^\circ$) et à couches alternées (angle-ply $\theta^\circ/\theta^\circ$) en composite non hybride sous différentes conditions aux limites. Les résultats obtenus par la théorie proposée sont comparés avec les résultats existants dans la littérature et ceux obtenus par la méthode des éléments finis. Ensuite, une étude paramétrique a été réalisée afin de déterminer les différents facteurs qui affectent la stabilité de la plaque.

Le troisième chapitre est consacré à l'étude du comportement mécanique de plaques composites à fibres hybrides intrafils (Carbone, Verre et Kevlar) en utilisant la loi des mélanges et la théorie des plaques proposée dans ce travail. Comme il n'y a aucune donnée disponible dans la littérature pour les plaques composites hybrides, les solutions obtenues par la méthode des éléments finis ont été utilisées pour valider les résultats obtenus par la théorie d'ordre élevé. Enfin, les plaques composites hybrides intercouche (ou couche par couche) ont été étudiées numériquement par la méthode des éléments finis à l'aide du code Abaqus.

Le quatrième chapitre a été consacré à l'étude des effets hygrothermiques sur la stabilité des plaques composites hybrides et non hybrides à l'aide de l'approche analytique de Bouakaz et al. Les propriétés élastiques sont calculées en utilisant la loi des mélanges, l'équation du mouvement de la plaque stratifiée est obtenue en utilisant de principe d'Hamilton. Les expressions mathématiques sont obtenues en utilisant la solution de Navier pour différentes conditions aux limites. L'étude des effets hygrothermiques nous permettent une meilleure compréhension et une meilleure caractérisation du comportement des plaques composites stratifiées soumises à des charges combinées.

Enfin, nous achevons notre travail par une conclusion générale relative aux résultats obtenus incluant des perspectives pour des travaux futurs.

CHAPITRE I

ANALYSE BIBLIOGRAPHIQUE

RESUME DU CHAPITRE

Ce chapitre a pour but de donner une revue bibliographique sur les matériaux composites, les théories des plaques stratifiées, les effets de l'hybridation des fibres et les effets hygrothermiques sur le comportement des plaques composites stratifiées. Les matériaux composites sont et seront de plus en plus utilisés dans des nombreux domaines industriels comme les industries aérospatiale et aéronautique, automobile, secteur médical et les équipements sportifs. Ils offrent des solutions technologiques innovantes grâce à leurs avantages tels que : légèreté, résistance mécanique et chimique, maintenance réduite, liberté de forme, isolation thermique et électrique.

Les plaques composites stratifiées sont largement utilisées dans l'industrie, dans ce chapitre nous présentons les théories des plaques les plus utilisées qui décrivent leur comportement statique, dynamique et thermomécanique.

Les matériaux composites sont renforcés par des fibres synthétiques telles que la fibre de verre, de carbone et de Kevlar ou par des fibres naturelles comme la fibre de lin, chanvre, palmier... etc. Les deux types de renforts présentent des avantages et des inconvénients. En effet, plusieurs études ont suggéré l'hybridation des fibres pour améliorer le comportement du composite sous différents types de sollicitations.

Les matériaux composites sont utilisés sous différentes conditions aux limites. Ils sont également soumis à des variations de la température et d'humidité qui peuvent dégrader les propriétés élastiques et la rigidité des structures. Nous présenterons donc quelques études sur les effets hygrothermiques pour une meilleure compréhension et une meilleure caractérisation du comportement des plaques composites stratifiées sous de telles conditions.

Généralités sur les matériaux composites

Un matériau composite résulte généralement de l'assemblage d'au moins deux matériaux de natures différentes se complétant pour former un matériau qui a des propriétés plus performantes que celles de ses constituants pris séparément. Les constituants du matériau composite sont appelés renfort et matrice. Le renfort, sous forme de fibres ou de particules, assure la tenue mécanique. La matrice a pour rôle de protéger les fibres ou les particules et de transmettre les sollicitations auxquelles sont soumises les pièces. Les renforts fibreux peuvent être utilisés sous différentes formes : fibres longues ou fibres courtes, avec différentes natures telles que les fibres de carbone, de verre, naturelles... etc. Les matrices sont classées généralement en trois familles en fonction de sa nature : organique, céramique ou métallique. Nous pouvons également distinguer quelques familles de composites en fonction du type de matrice et de renforts utilisés telles que :

- Les matériaux composites de grande diffusion (GD) qui représentent 95% des composites utilisés. Ce sont généralement des résines thermoplastiques ou thermodurcissables renforcées par des fibres courtes où le taux de renfort avoisine 30%. Leurs propriétés mécaniques sont faibles. Ils sont produits en grande série avec un coût faible.
- Les matériaux composites de haute performance (HP) qui présentent des propriétés mécaniques spécifiques élevées. Ce sont les matériaux les plus utilisés en aéronautique et dans le spatial. Contrairement aux matériaux de grande diffusion, les renforts sont plutôt des fibres longues et le taux de renfort est supérieur à 50% ce qui influe sur le coût [1].

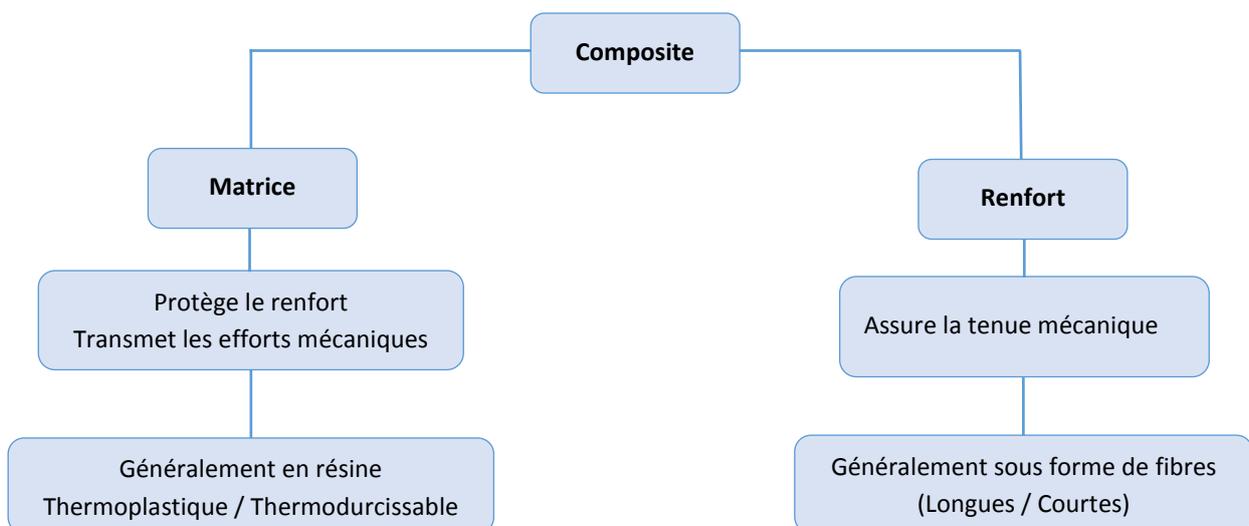


Figure 1.1 Description d'un matériau composite

1.1.1. Les matrices

La matrice a pour rôle principal dans les matériaux composites de protéger les fibres de l'environnement et leur fournir un support latéral. Elle permet également de transmettre les efforts aux renforts. En fonction de la nature de la matrice, les matériaux composites sont classés en trois familles, les composites à matrices organiques (CMO) les plus répandues, les composites à matrices céramiques (CMC) réservés aux applications de très haute technicité comme le spatial, le nucléaire et le militaire, la troisième famille c'est les composites à matrices métalliques (CMM).

1.1.1.11. Les composites à matrices organiques (CMO)

Il s'agit des composites les plus répandus car c'est les seuls ayant des coûts unitaires suffisamment réduits pour pouvoir être produits en grandes séries. On distingue généralement deux types de CMO: les composites à résines thermodurcissables (TD) et les composites à résines thermoplastiques (TP).

- Thermodurcissables (TD)

Les résines thermodurcissables, qui se présentent sous forme d'un liquide visqueux ont des propriétés mécaniques élevées. Ces résines durcissent après un cycle de chauffage appelé « cycle de polymérisation ». Les résines thermodurcissables les plus répandues sont les polyesters, les époxydes, les polyamides et les phénoliques (voir tableau 1.1). Les thermodurcissables sont des polymères qui ne peuvent être mis en forme qu'une seule fois mais possèdent des propriétés mécaniques et thermomécaniques élevées par rapport aux thermoplastiques

Tableau 1.1. Les thermodurcissables

Matrices TD	Avantages	Inconvénients
Polyesters insaturés	- Bonne accroche sur fibres de verre - Translucidité - Bonne résistance chimique - Mise en œuvre facile - Tenue en température (> 150 °C) - Prix réduit	- Inflammabilité (sauf résines chlorées) - Tenue à la vapeur et à l'eau bouillante - Retrait important (6 à 15 %) - Durée de conservation en pot limitée - Emission de styrène
Les époxydes	- Tenue mécanique, thermique et chimique - Faible retrait (1 à 2 %) - Excellente adhérence sur les fibres - Mise en œuvre facile	- Prix élevé - Sensibilité à l'humidité - Vieillesse sous température - Sensibilité aux chocs - Temps de polymérisation
Les phénoliques	- Bonne tenue au feu - Prix souvent très bas - Dureté élevée - Structure très condensée	- Fragiles, sensibles à l'humidité - Se dégradent rapidement - Toxicité en cours de fabrication - Difficiles à mettre en œuvre
Polyimides	- bonne stabilité sous hautes températures (> 250 °C).	- Difficiles à mettre en œuvre

- **Thermoplastiques (TP)**

Les résines thermoplastiques sont des chaînes polymères reliées entre elles par de faibles liaisons. A l'inverse des thermodurcissables, ces résines sont recyclables. La mise en œuvre des thermoplastiques est réalisée soit par injection pour obtenir des objets moulés, soit par extrusion pour obtenir (des films, des plaques, des tubes, des profilés, etc.). Les pièces obtenues conservent leur forme après refroidissement. Grâce à leur facilité de mise en œuvre et de leur faible coût, les TP représentent le plus grand tonnage en termes de production. Cependant, leurs propriétés mécaniques et thermomécaniques sont faibles. Parmi les résines thermoplastiques, nous citerons : le polychlorure de vinyle (PVC), les polyéthylènes (PEBD, PEHD), le polypropylène (PP), le polystyrène (PS), le polyamide (PA) et le polycarbonate (PC).

1.1.1.21. Les composites à matrices céramiques (CMC)

Les composites à matrices céramiques sont généralement constitués de multicouches superposées avec des fibres longues ou courtes. Les renforts et la matrice sont souvent constitués de carbure de silicium (SiC), de carbone (C) ou d'alumine (Al_2O_3). Les CMC sont moins répandus que les CMO pour des raisons de coût élevé. Comme ils ont une très bonne résistance à la température, les CMC sont généralement utilisés dans l'industrie spatiale et l'aéronautique militaire, et également dans l'industrie automobile pour la fabrication des disques ou des plaquettes de freins. Les céramiques possèdent de nombreux atouts tels que la résistance à des températures très élevées, plus légères que de nombreux métaux, et une bonne stabilité chimique. Toutefois, leur coût de fabrication très élevé et leur fragilité limitent leur domaine d'utilisation.

1.1.1.31. Les composites à matrices métalliques (CMM)

Les composites à matrices métalliques sont des matériaux performants, ils ont été développés pour mettre en harmonie les qualités des métaux avec les structures composites qui ont de bonnes caractéristiques mécaniques. La matrice dans les CMM est généralement en métal léger (aluminium et ses alliages, magnésium, titane...) et le renfort peuvent être des particules ou des fibres courtes céramiques, des fibres longues céramiques ou métalliques avec des propriétés mécaniques supérieures à celle du métal formant la matrice. Malheureusement, les CMM ont une grande réactivité chimique car la matrice et le renfort peuvent réagir entre eux et avec le milieu extérieur. Ils sont destinés à des applications exigeantes à cause de leur coût élevé.

1.2. Les renforts

Le renfort contribue à améliorer la tenue mécanique (résistance et rigidité) du matériau composite. Les fibres se présentent sous forme linéique (fils, mèches), tissus surfaciques (tissus, mats), multidirectionnelle (tresse, tissus complexes, tissage tri directionnel ou plus) [2]. Les fibres de carbone, de verre et d'aramide sont les plus courantes. Les fibres naturelles d'origine animale ou végétale sont également utilisées dans certains produits.

La figure 2 montre les différents types de renforts selon leurs origines :

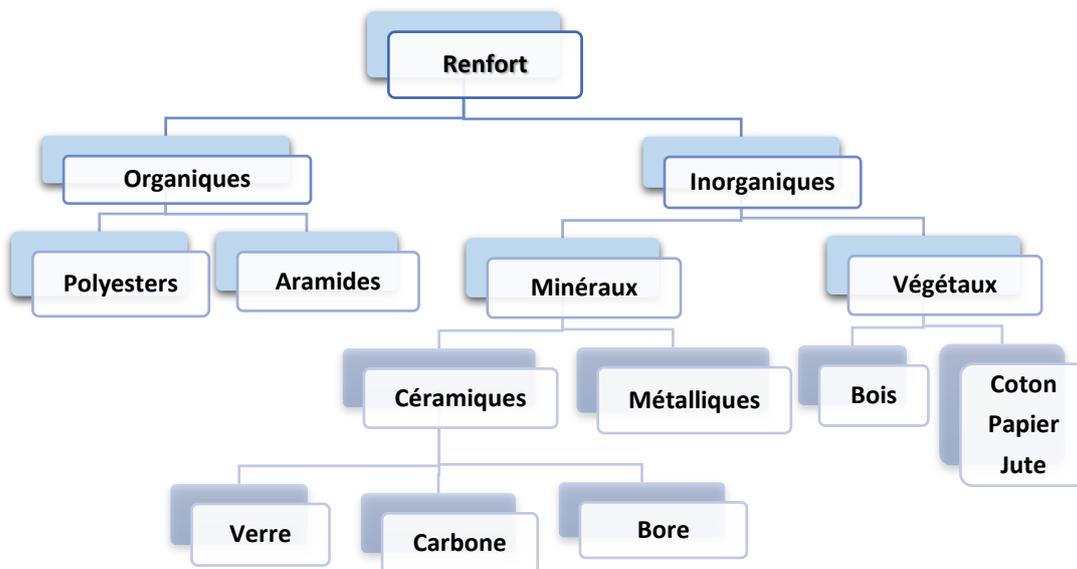


Figure 1. 2Types de renforts

1.2.1. Fibre de verre

L'expression fibre de verre désigne un filament de verre extrêmement fin (figure 1.3). Les fibres de verre sont les plus anciennes (1940), les moins chères du marché et les plus couramment utilisées dans le renforcement des matériaux composites (95%). Elles sont élaborées par filage du verre fondu à partir de silice et d'additifs. Le verre est coulé en fusion à 1250°C à travers une filière en platine-rhodium ; après refroidissement, les filaments sont étirés pour obtenir des fibres continues. Les fibres de verre permettent d'améliorer les propriétés des matériaux, la résistance aux chocs et de réduire le poids. Elles sont réparties en trois qualités :

- ✓ Fibres E pour les composites à grande diffusion (GD) ;
- ✓ Fibres D pour les applications dans la construction électrique (circuits imprimés) ;
- ✓ Fibres R pour les composites à hautes performances (HP).



Figure 1.3Fibre de verre

Les fibres de verre sont utilisées pour fabriquer des matériaux composites capables de se substituer à l'acier. Elles ont des caractéristiques spécifiques comme la transparence, l'excellente capacité de transmission de la lumière, et sont employées comme fibres optiques dans le domaine médical (endoscopie) et dans le domaine des télécommunications (la fibre optique). Les principales utilisations de matériaux composites à fibres de verre sont :

- ✓ Le bâtiment et les infrastructures (29%) ;
- ✓ Les transports (25%) : avions, TGV...
- ✓ L'électricité et l'électronique (16%) ;
- ✓ Les sports et loisirs (14%) : perches d'athlétisme, skis et planches de surf...
- ✓ Les équipements industriels (11%).

Avantages

- ✓ Bonne résistance spécifique (pour le verre R) ;
- ✓ Une bonne adhérence entre fibres et les résines (matrices) ;
- ✓ De bonnes propriétés mécaniques, mais inférieures à celles de la fibre de carbone ;
- ✓ Des propriétés d'isolation électrique acceptables pour la plupart des applications ;
- ✓ Tenue à la température élevée ;
- ✓ Incombustibilité ;
- ✓ Dilatation et conductivité thermique faible ;
- ✓ Bon rapport de performances mécanique/prix.

Inconvénients

- ✓ Faible module (par rapport au carbone ou à l'aramide) ;
- ✓ Vieillissement au contact de l'eau.

1.2.2. Fibre de carbone

Les fibres de carbone sont composées principalement d'atomes de carbone. Elles sont extrêmement fines environ 5 à 10 micromètres de diamètre (figure 1.4). Elles sont produites à partir de polyacrylonitrile (PAN) en plusieurs étapes : le PAN est initialement oxydé, puis passe à l'étape dite de « carbonisation », enfin l'étape de graphitisation complète le tout pour obtenir des fibres de carbone plus rigides. Ce sont les fibres les plus utilisées dans les applications à hautes performances (aéronautique, construction industrielle, les sports et loisirs). Les fibres de carbone ont une très bonne conductivité de chaleur et d'électricité.

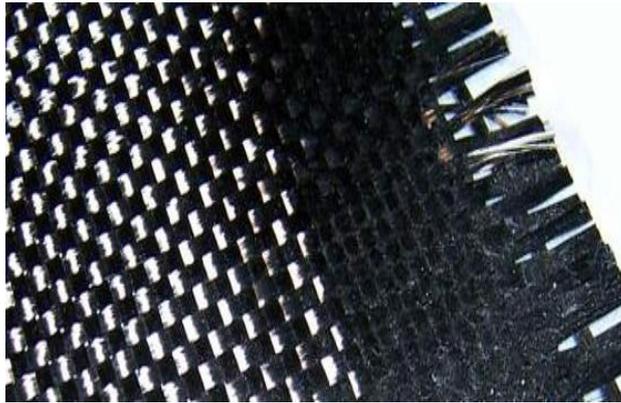


Figure 1.4 Fibre de carbone

Avantages

- ✓ Excellentes propriétés mécaniques ;
- ✓ Très bonne tenue en température (non oxydante) ;
- ✓ Une faible dilatation thermique ;
- ✓ Bonne conductibilité thermique et électrique ;
- ✓ Bonne tenue à l'humidité ;
- ✓ Usinage aisé, faible densité et grande souplesse ;
- ✓ Une très bonne tenue à la compression (en comparaison à la fibre de verre ou au kevlar).

Inconvénients

- ✓ Une mauvaise résistance à l'abrasion et aux chocs ;
- ✓ Leur recyclage (broyage problématique) ;
- ✓ Cette fibre provoquerait sous certaines formes des risques de cancer du poumon ;
- ✓ Prix très élevé.

1.2.3. Fibre d'aramide (Kevlar)

Nées dans les années 1960, les fibres d'aramide sont issues de la chimie organique des polyamides aromatiques. La fibre d'aramide est l'assemblage de filaments jaunes d'une dizaine de micromètres de diamètre (figure 1.5). Il existe deux types de fibres : les fibres à bas module utilisées pour les câbles et les gilets pare-balles, et les fibres à haut module employées dans le renforcement des composites à hautes performances. Les composites renforcés de fibres d'aramide sont ductiles et ont une très bonne résistance à la chaleur et à la traction. Malheureusement, leur prix est élevé et leur tenue en pression est faible.

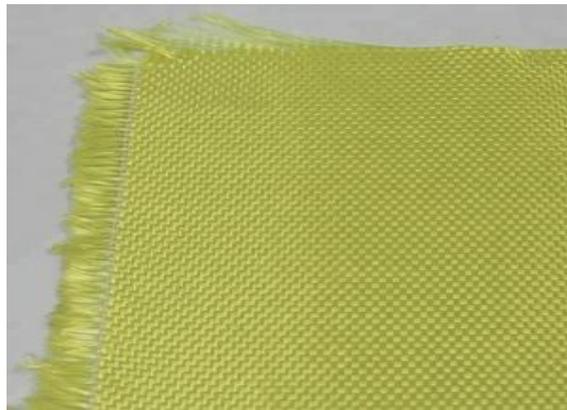


Figure 1.5 Fibre d'aramide (Kevlar)

Avantages

- ✓ Bonne résistance spécifique à la traction ;
- ✓ Faible densité ;
- ✓ Dilatation thermique nulle ;
- ✓ Absorption des vibrations, amortissement ;
- ✓ Excellente résistance aux chocs et à la fatigue ;
- ✓ Bon comportement chimique vis-à-vis des carburants.

Inconvénients

- ✓ Prix très élevé ;
- ✓ Faible tenue en pression ;
- ✓ Reprise d'humidité importante (4%) ;
- ✓ Étuvage avant imprégnation ;
- ✓ Faible adhérence avec les résines d'imprégnation ;
- ✓ Sensibilité aux UV ;
- ✓ Usinage difficile.

1.2.4. Autres renforts

- Fibres de bore

Ces fibres sont de gros filaments (diamètre de l'ordre de 100 μm), formées d'une âme (le fil support) en carbone d'un diamètre d'environ 10 μm et recouvertes d'une couche de bore ou d'une couche de carbure de silicium.

- Fibres métalliques

Elles sont les plus chères de toutes, en raison de leur difficulté de fabrication comme les fibres d'acier, de cuivre et d'aluminium. Elles sont utilisées avec des matrices métalliques ou en génie civil et bâtiment.

- Fibres naturelles

Les fibres naturelles sont des biomatériaux d'origine végétale ou animale, tissées, tricotées ou tressées. Elles ont été initialement utilisées pour la production de vêtements, tissus, tapis et cordages. Actuellement, les fibres naturelles sont également utilisées dans l'industrie, dans les applications automobiles, le bâtiment...etc. Les fibres naturelles permettent de réduire le coût et le poids des pièces et d'améliorer les perspectives de recyclage et l'impact environnemental.

Les fibres naturelles peuvent être classées en trois grands groupes selon leur origine :

- ✓ Les fibres végétales qui comprennent : des fibres provenant des poils séminaux de graines (coton, kapok), des fibres libériennes extraites de tiges de plantes (lin, chanvre, jute, ortie), des fibres extraites de feuilles (sisal), de troncs (palmier), d'enveloppes de fruits (noix de coco).
- ✓ Les fibres animales qui proviennent des poils, telles que la toison animale, et des sécrétions telles que la soie ;
- ✓ 3) Les fibres minérales telles que l'amiante.

1.3. Charges et additifs

Les charges et additifs sont ajoutés au composite afin de lui donner de nouvelles propriétés. Les charges sont des particules solides d'origine minérales, organiques (végétales ou synthétiques) ou métalliques. Les charges renforçantes se présentent sous forme sphériques ($10 < \phi < 150 \mu\text{m}$) telles que les microbilles de verre creuses ou pleines, les microbilles de carbone ; ou non sphériques tel que le mica sous forme d'écailles. Les charges non renforçantes sont des extraits de roches ou de minerais (carbonate de calcium, talc, kaolin, silices,...etc.) qui ont pour rôle de diminuer le coût de la

résine et d'améliorer certaines propriétés. Les additifs sont la substance ajoutée avec une faible quantité à la résine pour modifier ou améliorer les propriétés du composite.

1.4. Structures du composite

Les structures des matériaux composites peuvent être classées en trois types principaux :

- ✓ Les monocouches ;
- ✓ Les stratifiées ;
- ✓ Les sandwichs.

1.4.1. Les monocouches

Les monocouches ou plis représentent l'élément de base de la structure composite où les fibres sont agencées en couche fine (quelques dixièmes de millimètre). Il existe plusieurs types de monocouches : à fibres longues (unidirectionnelles UD (figure 1.6) ou réparties aléatoirement), à fibres courtes, à fibres tissées.

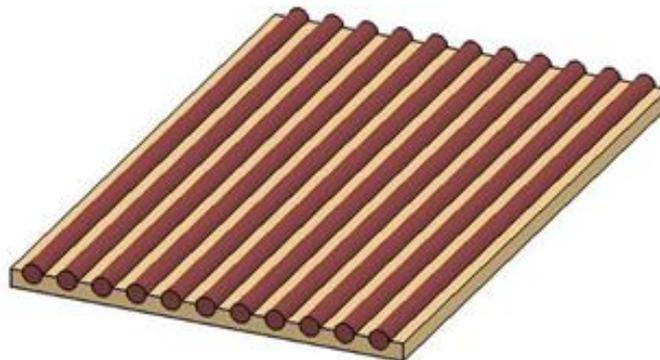


Figure 1.6 Une monocouche à fibres longues UD

1.4.2. Les stratifiées

Les stratifiées sont des structures légères de hautes performances mécaniques fréquemment rencontrés dans les composites. Un stratifié est l'empilement de monocouches les unes sur les autres (figure 1.7) ayant chacune une orientation propre par rapport à un référentiel commun aux couches qui est désigné comme le référentiel du stratifié. La fibre peut être longue ou courte, uni- ou bi-directionnelles, mats ou tissés. L'empilement des couches, la nature et l'orientation de la fibre permettront d'obtenir les propriétés mécaniques souhaitées.

Les stratifiées sont généralement moins coûteux que les tissus 3D, mais les couches peuvent se décoller les unes des autres. Un stratifié possédant l'empilement (0, +45, 90, -45) est un stratifié avec 4 couches dans les directions 0°, +45°, 90° et -45° ; l'orientation 0° coïncidant avec la direction « 1 »

du repère principal du composite. La stratification n'est pas spécifique aux composites, le contreplaqué par exemple possède une structure stratifiée.

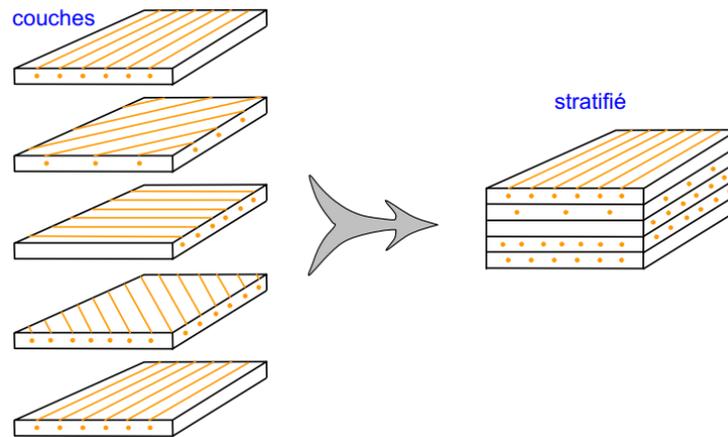


Figure 1.7 Les stratifiés [3]

1.4.2.11. Différents types de stratifiés

Il existe quatre principaux types de stratifiés :

- Stratifié Unidirectionnel : l'orientation des fibres est la même dans tous les plis. Exemple : un stratifié unidirectionnel à 0° , $\theta=0^\circ$ dans les différents plis.
- Stratifié à Plis Orientés $\pm\theta$ (angle ply) : l'orientation des fibres est alternée d'un pli à l'autre, $(+\theta/-\theta/$, avec θ différent de 0 ou de 90°).
- Stratifié à Plis Croisés (cross ply) : l'orientation des fibres est alternée d'un pli à l'autre, $0/90^\circ/0/90^\circ$.
- Stratifié Symétrique : l'orientation des fibres est symétrique par rapport à la ligne centrale du stratifié, c.à.d. pour chaque pli à angle θ au-dessus du plan médian il y a un pli à angle égal de l'autre côté du plan médian, $\theta(z)=\theta(-z)$.

1.4.3. Les sandwichs

Les structures sandwichs ont une très bonne rigidité en flexion et en torsion contrairement aux stratifiés. Les matériaux composites de types sandwichs sont principalement constitués de deux peaux (généralement stratifiés) et d'une âme possédant de bonnes caractéristiques en compression et l'assemblage est réalisé par collage (figure 1.8). Plus épaisse que les peaux, l'âme peut être une couche légère pleine (bois, mousse, balsa...etc.) ou creuse (alliages métalliques léger, structure en nid d'abeille, papier...etc.). Les peaux possédant de bonnes caractéristiques en traction, sont fréquemment des stratifiés à fibres de verre, de carbone, de Kevlar, naturelles ou hybrides ; ou des feuilles d'alliages légers.

L'ensemble âme-peaux se complètent pour avoir une structure rigide et légère, lorsque le sandwich est sollicité en torsion ou en flexion, les peaux travaillent essentiellement en membrane, tandis que l'âme travaille essentiellement en cisaillement hors plan (et à des niveaux de contrainte bien plus faibles).

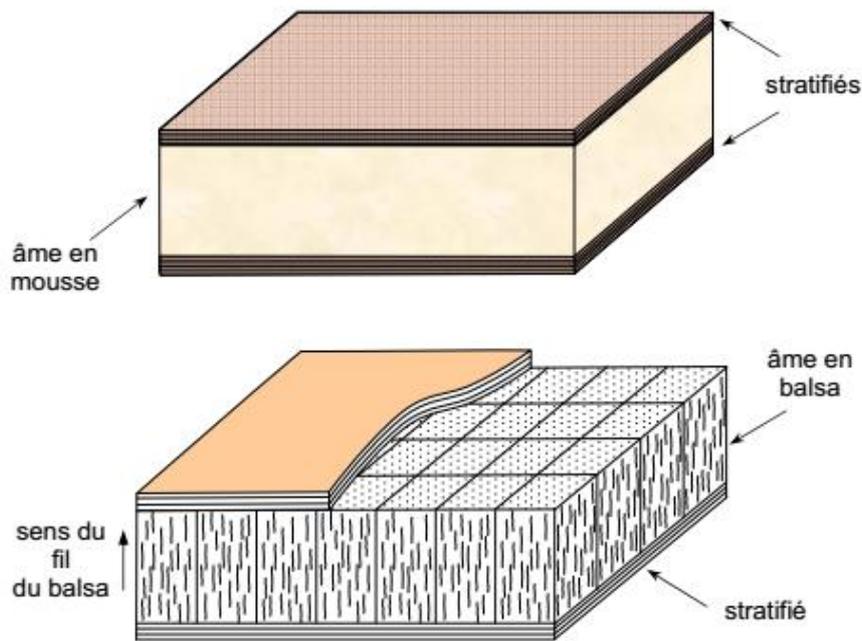


Figure 1.8 Exemples de composites sandwichs [3]

1.5. Procédés de fabrication des structures composites

La mise en œuvre des structures composites est généralement réalisée par moulage et dépend de la nature de matrice et des renforts. Les principaux procédés pour les matériaux composites de grande diffusion et à hautes performances sont décrits dans ce qui suit.

1.5.1. Moulage au contact

Le procédé de mise en forme des composites par moulage au contact est entièrement manuel (figure 1.9). Les pièces sont réalisées dans un moule à l'aide d'un rouleau à température ambiante et sans pression. Ce procédé est utilisé pour réaliser des pièces de formes et de dimensions quelconques pour de petites séries. Le moulage au contact est un procédé facile à mettre en œuvre et peu coûteux en matériel. Toutefois, il exige une main-d'œuvre qualifiée.

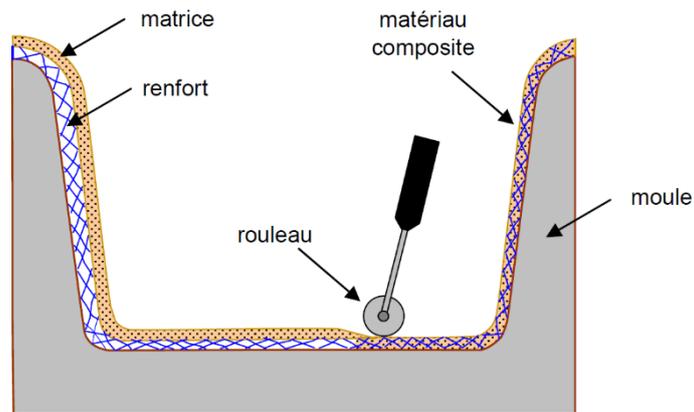


Figure 1.9 Principe du moulage au contact [3]

1.5.2. Moulage par projection simultanée

Le moulage par projection simultanée est une évolution du moulage au contact (figure 1.10). Un pistolet projette la résine et les fibres coupées dans le moule. L'ensemble est ensuite compacté manuellement à l'aide d'un rouleau. Ce procédé est réservé également pour les pièces de grandes dimensions en petites séries avec une cadence de production améliorée.

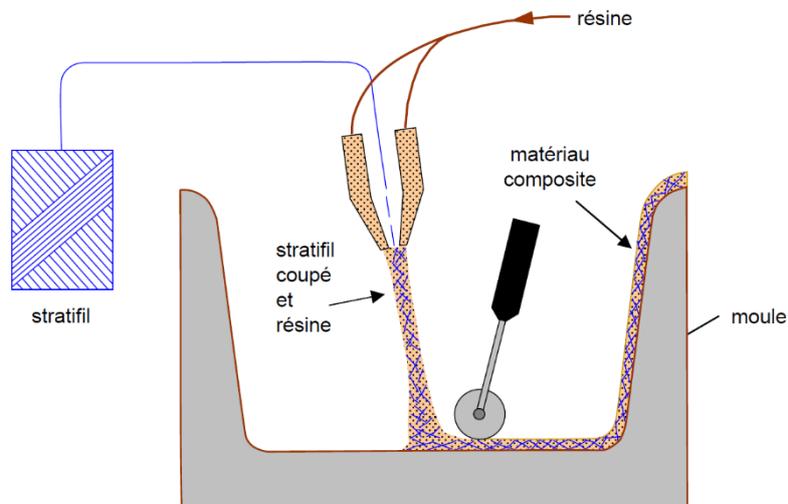


Figure 1.10 Principe du moulage par projection simultanée [3]

1.5.3. Moulage par injection

Le moulage par injection est un procédé semi-automatisé. Il consiste à injecter une résine sous pression dans l'ensemble moule et contre moule (figure 1.11). Les renforts sont placés à l'intérieur sous forme de mats ou de tissus. Ce procédé est utilisé pour fabriquer des pièces profondes et de formes compliquées avec des caractéristiques mécaniques élevées.

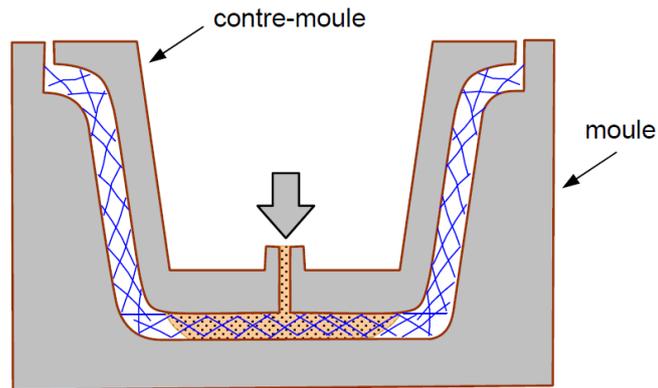


Figure 1.11 Principe du moulage par injection de résine [3]

1.5.4. Moulage par compression

Dans ce procédé sous pression, le renfort et la matrice sont déposés entre le moule et le contre-moule (figure 1.12), puis pressés à des températures allant de 50°C à 70°C à basse pression (< 5 bars) pour le moulage à froid ; et à des températures allant de 80°C à 150°C à haute pression de 10 à 50 bars, pour le moulage à chaud [3].

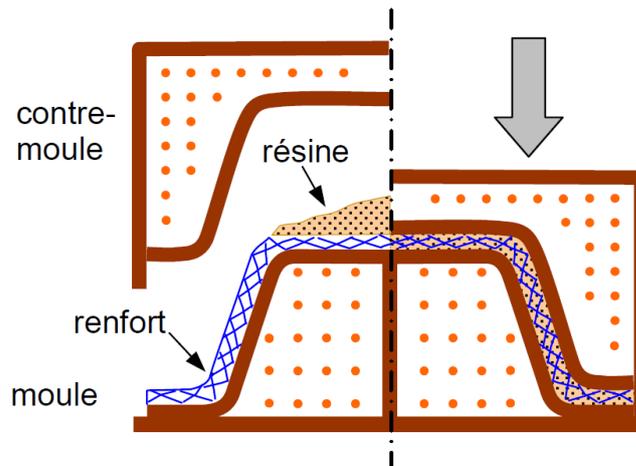


Figure 1.12 Principe du moulage par compression [3]

1.5.5. Moulage par enroulement filamentaire

C'est un procédé automatisé adapté aux surfaces cylindriques et sphériques. Le renfort imprégné dans un bain de résine catalysée est enroulé autour d'un mandrin cylindrique (figure 1.13). Suivant les mouvements relatifs du mandrin et du système d'approvisionnement en renfort, divers types d'enroulements sont obtenus [3] : l'enroulement circonférentiel, l'enroulement hélicoïdal et l'enroulement polaire.

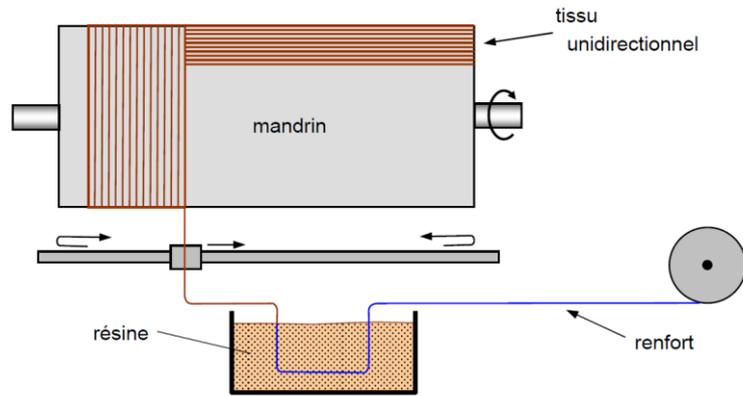


Figure 1.13 Principe du moulage par enroulement filamentaire [3]

Théories des plaques

Les structures composites multicouches sont de plus en plus utilisées dans divers domaines de l'ingénierie telle que la construction civile, militaire, aérospatiale, marine et automobile. Elles sont soumises à différents types de chargements qui nécessitent des matériaux avec des propriétés mécaniques et thermomécaniques élevées. La modélisation des structures multicouches avec une forte anisotropie exige des théories d'ordre élevé qui prennent en compte le cisaillement transverse. En 1888, Love utilisa les hypothèses de Gustav Kirchhoff pour fonder une théorie des plaques minces également appelée théorie classique (CLPT ou théorie de Kirchhoff-Love). À l'aide des travaux de Rayleigh [4], Timoshenko [5], Reissner [6] et Uflyand [8], Mindlin a présenté une théorie des plaques semi-épaisses appelée théorie des déformations du premier ordre (FSDT). La limite des théories classiques et du premier ordre (applicables pour les plaques minces et semi-épaisses) a mené au développement de théories d'ordre élevé qui sont venues pour améliorer l'évaluation de la variation du champ des déplacements à travers l'épaisseur des plaques. Il existe aussi la théorie basée sur l'élasticité tridimensionnelle (théorie 3D) qui ne fait aucune hypothèse restrictive sur les déplacements de la plaque.

2.1. Théorie classique des plaques minces de Love-Kirchhoff (CLPT)

La théorie classique des plaques minces (CLPT) se base sur les hypothèses de Love- Kirchhoff : l'épaisseur est faible donc les contraintes dans le sens de l'épaisseur sont supposées nulles, on reste en petites déformations, les sections normales au plan moyen de la plaque restent normales lors de la déformation en négligeant les effets de déformation en cisaillement transverse. Cette théorie est très bien décrite dans Timoshenko et Woinowsky-Krieger [9] et Reddy([10], [11]) et le champ de déplacements de Love-Kirchhoff s'écrit (figure 1.14) :

$$\begin{cases} u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} \\ v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} \\ w(x, y, z) = w_0(x, y) \end{cases} \quad (1.1)$$

où :

u_0 et v_0 : les déplacements de membrane dans les direction x et y respectivement, et w_0 : la flèche de la plaque,

$\frac{\partial w_0}{\partial x}$ et $\frac{\partial w_0}{\partial y}$: les rotations dues à la flexion (sans cisaillement).

Le plan principal de la plaque est le plan (O, x, y) et l'épaisseur est orienté selon l'axe $z \in [-h/2; h/2]$. Comme ce modèle ne tient pas en compte l'effet de cisaillement transverse, il ne donne pas des résultats précis pour les plaques épaisses.

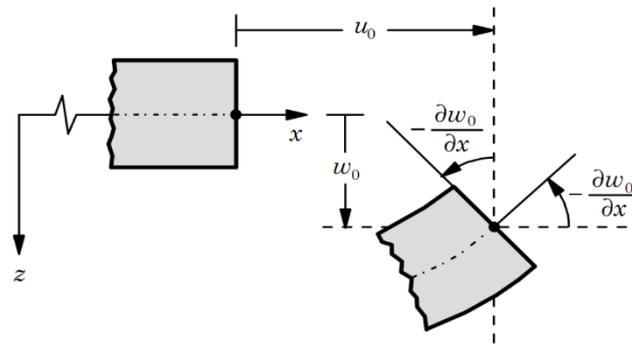


Figure 1.14 Illustration de la plaque de Love-Kirchhoff

2.2. Théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT)

Dans des plaques moyennement épaisses, les déformations dues au cisaillement transverse doivent être prises en compte. La théorie de déformation du premier ordre est issue de la théorie classique mais qui teint en compte l'effet de cisaillement transverse. Toutefois, il est nécessaire d'ajouter un facteur de correction de cisaillement car les déformations sont constantes à travers l'épaisseur de la plaque. Cette théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT) est due à Reissner [6] et Mindlin [7]. Elle est basée sur l'hypothèse cinématique de Mindlin suivante : la normale reste droite mais non perpendiculaire à la surface moyenne dans la configuration déformée à cause de l'effet du cisaillement transverse (Figure 1.15).

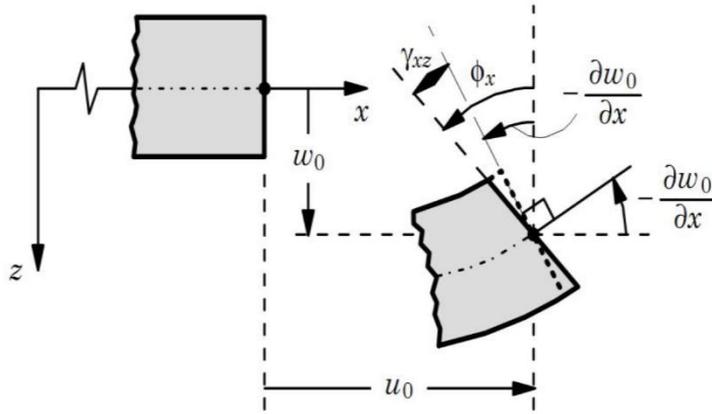


Figure 1.15 Illustration de la plaque de Reissner-Mindlin

Le champ de déplacements de Reissner-Mindlin s'écrit :

$$\begin{cases} u(x, y, z) = u_0(x, y) - z\phi_x(x, y) \\ v(x, y, z) = v_0(x, y) - z\phi_y(x, y) \\ w(x, y, z) = w_0(x, y) \end{cases} \quad (1.2)$$

où :

u_0 et v_0 : les déplacements de membrane dans les direction x et y respectivement, et w_0 : la flèche de la plaque,

ϕ_x et ϕ_y : les rotations de la normale au plan moyen autour des axes x et y respectivement.

2.3. Théories de déformation en cisaillement d'ordre élevé (HSDT)

Ces théories sont une évolution de la théorie classique des plaques (CPT) et de la théorie du premier ordre (FSDT). Elles ont pour base un développement du déplacement dans l'épaisseur à l'ordre deux ou plus. Contrairement aux précédentes théories, les HSDT sont basées sur une distribution non linéaire des champs à travers l'épaisseur (figure 1.16). Ces modèles n'exigent pas de facteurs de correction en tenant compte l'effet de cisaillement. Les théories d'ordre élevé sont applicables à certains types de problèmes (statique, dynamique, flambement,...). Kapania et Raciti [8] ont réalisé une revue détaillée des théories de déformation de cisaillement utilisées en statique, en vibration et en flambement de poutres et de plaques composites. Patel et al. [12] ont traité une structure coque assez complexe géométriquement avec un développement au 3ème ordre, afin d'améliorer l'état de déformation. Ils ont introduit l'effet de zig-zag qui assure la continuité sur les interfaces, mais le nombre de paramètres augmente avec le nombre de couches. Zen Wu et al. [13] ont proposé une théorie intéressante du point de vue résultats sur les contraintes qui assure la continuité sur les interfaces et les conditions nulles (en bas et en haut). Elle définit sur chaque

couche un champ de déplacement différent et utilise 11 degrés de libertés par nœud. Elle est communément appelée « High ordre shear refined theory ». D'autres auteurs [14-54] ont utilisé des théories d'ordre élevés pour étudier le comportement des structures (poutres et plaques) en matériaux composites et en matériaux à gradients de propriétés FGM.

Pour les théories d'ordre élevé, le champ de déplacement est généralement écrit comme suit :

$$\begin{aligned}
 u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial x} + f(z) \phi_x(x, y), \\
 v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial y} + f(z) \phi_y(x, y), \\
 w(x, y, z) &= w_0(x, y),
 \end{aligned}
 \tag{1.3}$$

où :

u_0 et v_0 : les déplacements de membrane dans les direction x et y respectivement, et w_0 : la flèche de la plaque,

(ϕ_x, ϕ_y) : les rotations autour des axes y et x , respectivement avec $\left(\phi_x = \frac{\partial w_0}{\partial x} + \phi_x, \phi_y = \frac{\partial w_0}{\partial y} + \phi_y \right)$

$f(z)$: représente la fonction de cisaillement transverse le long de l'épaisseur contrairement à la théorie classique où $f(z) = 0$, alors que la théorie de premier ordre $f(z) = z$.

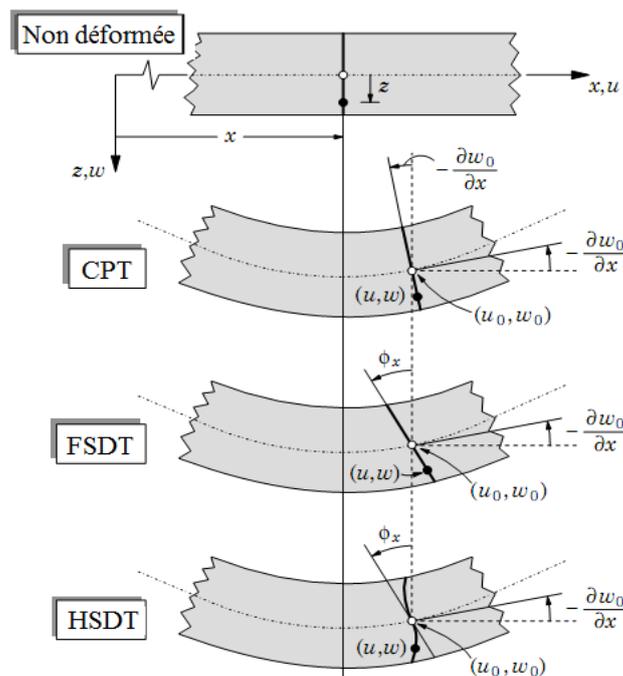


Figure 1.16 Comparaison de la théorie d'ordre élevé (HSDT) avec (CLPT) et (FSDT)

2.3.1. Les différents modèles de la théorie d'ordre élevé

Plusieurs auteurs ont proposé des fonctions de cisaillement $f(z)$ pour les modèles d'ordre élevé qui sont basés sur une distribution non linéaire des champs de déplacement dans l'épaisseur. La distribution des contraintes de cisaillement transversales dans l'épaisseur peut prendre une forme parabolique, sinusoïdale comme le modèle de Touratier [14], sous forme hyperbolique comme proposée par Ait Atmane et al. [15], ou exponentielle comme proposée par Karama et al. [16].

Le tableau 1.2 résume les théories les plus utilisées dans la littérature.

Tableau 1.2 Description des différentes théories de plaques

Théorie	Intitulé	Fonction de Cisaillement $f(z)$	Domaine de validité
CPL, Kirchhoff	Théorie classique	0	Plaques minces
FSDT, Mindlin	Théorie de déformation du 1 ^{er} ordre	z	Plaques minces et moyennement épaisses
Ambartsumian [11]	Théorie d'ordre supérieur	$\frac{z}{2} \left(\frac{h^2}{4} - \frac{z^2}{3} \right)$	Plaques minces et moyennement épaisses
Reissner	Théorie d'ordre supérieur	$\frac{5}{4} z \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right)$	Plaques minces et épaisses
TSDPT, Touratier [14]	Théorie d'ordre supérieur (trigonométrique)	$\frac{h}{\pi} \sin \left(\frac{\pi z}{h} \right)$	Plaques minces et épaisses
ESDPT, Karama [16]	Théorie d'ordre supérieur (exponentielle)	$z e^{-2(z/h)^2}$	Plaques minces et épaisses
PSDPT, Levinson, Reddy [11]	Théorie d'ordre supérieur (parabolique)	$z \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right)$	Plaques minces et épaisses

2.3.2. Théorie raffinée des plaques

La théorie raffinée des plaques (RPT : Refined Plate Theory) a été développée par Shimpi [17], Ait Atmane et al. [15], Kim [18] qui ont utilisé cette théorie pour étudier la flexion, le flambement et les vibrations libres des plaques stratifiées, FGM et sandwich. Dans cette théorie le nombre d'inconnues est de quatre (u_0, v_0, w_b et w_s) contrairement aux théories classiques qui en comptent cinq (u_0, v_0, w_0, θ_x et θ_y). Cette théorie n'exige pas de facteur de correction de cisaillement et donne une distribution parabolique de cisaillement à travers l'épaisseur de la plaque et satisfait les conditions

aux limites sur les faces supérieure et inférieure de la plaque. Le champ de déplacement de cette théorie s'écrit :

$$\begin{aligned}
 u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w_b}{\partial x} - f(z) \frac{\partial w_s}{\partial x} \\
 v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z \frac{\partial w_b}{\partial y} - f(z) \frac{\partial w_s}{\partial y} \\
 w(x, y, z) &= w_b(x, y) + w_s(x, y)
 \end{aligned} \tag{1.4}$$

Où :

w_b, w_s sont les composantes de flexion et de cisaillement du déplacement, respectivement.

Parmi les fonctions proposées dans la littérature, nous pouvons citer :

- La fonction de Nedri et al. [19] : $\left(\frac{(h/\pi) \sin(hz/\pi) - z}{\cosh(\pi/2) - 1} \right)$,
- La fonction d'Ait Atmane et al. [15] : $\frac{\cosh(\pi/2)}{[\cosh(\pi/2) - 1]} z - \frac{(h/\pi) \sinh\left(\frac{\pi}{h} z\right)}{[\cosh(\pi/2) - 1]}$,
- La fonction de Shimpi [17] : $h \left[\frac{1}{4} \left(\frac{z}{h} \right) - \frac{5}{3} \left(\frac{z}{h} \right)^3 \right]$

2.4. Théorie zig-zag

Les propriétés des couches stratifiées peuvent être différentes, comme les plaques multicouches hybrides (couche par couche) dont les contraintes de cisaillement inter-laminaire et les contraintes d'interface sont discontinues. Comme les modèles d'ordre élevé n'assurent pas la discontinuité dans les stratifiés, certains auteurs ont proposé une théorie d'ordre élevé dite théorie zig-zag [20-21], qui est très efficace pour l'analyse des plaques composites stratifiées et pour mieux décrire les effets d'interface. Le stratifié est subdivisé en sous-structures (correspondant en fait à chaque couche ou chaque ensemble de couches), et on utilise pour chaque sous-structure une théorie du premier ordre ou un modèle d'ordre élevé (figure 1.17). Les modèles zig-zag assurent la vérification des conditions de continuité sans augmenter le nombre et l'ordre des équations fondamentales de la théorie du premier ordre, et sans ajouter des coefficients de correction. Plusieurs auteurs ont proposé des améliorations significatives pour introduire une distribution non linéaire des déplacements [22-23].

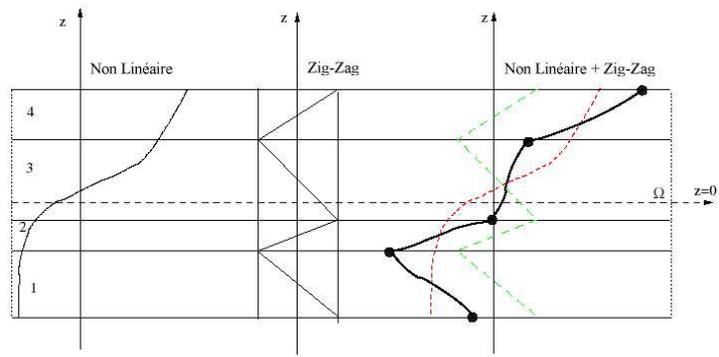


Figure 1. 17 Champ de déplacements du modèle zig-zag

Effet de l'hybridation

L'utilisation des matériaux composites renforcés par des fibres synthétiques telles que la fibre de verre, de carbone et de Kevlar reste fréquente dans tous les domaines industriels grâce à leurs propriétés mécaniques élevées. Toutefois, leur prix et l'impact sur l'environnement restent parmi les principaux inconvénients. Actuellement, les fibres naturelles sont de plus en plus utilisées comme renfort de matériaux composites en raison de leurs avantages. Elles peuvent apporter plusieurs solutions aux problèmes environnementaux, elles sont écologiques et leurs ressources sont renouvelables. Néanmoins, leur faible résistance à l'humidité, la sensibilité à l'eau et la faible tenue mécanique sont des obstacles à l'utilisation de ces nouveaux matériaux. Plusieurs études ont suggéré l'hybridation des fibres végétales avec les fibres synthétiques pour résoudre ce problème et développer des matériaux composites hybrides. La technique d'hybridation permet d'obtenir des propriétés optimales du composite pour certaines applications. Le principe consiste à combiner des fibres naturelles et synthétiques, deux fibres naturelles ou synthétiques, dans la même couche ou couche par couche afin d'améliorer le comportement du composite sous différents types de sollicitations.

Les différents types de combinaison des renforts les plus utilisées sont présentées ci-dessous [55] :

- Intercouche ou couche par couche : constituée d'une suite de couches empilées l'une sur l'autre, chaque couche est de nature différente (figure 1.18a). D'une manière générale, cette configuration est la plus simple, la moins chère et la plus utilisée pour produire des composites hybrides ;
- Intracouche : chaque couche étant constituée de fibres différentes au sein du renfort (figure 1.18b), le composite est constitué d'un empilement de cette couche ;
- Intrafilets ou fibre par fibre : les deux types de fibres peuvent être mélangés ou combinés au niveau de la mèche ou de la trame (figure 1.18c).

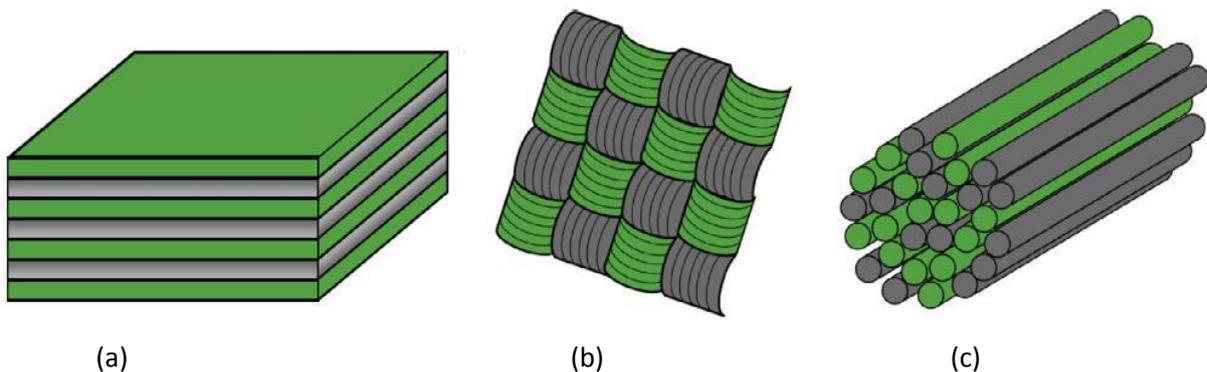


Figure 1. 18 Les trois configurations principales des composites hybrides: a) Intercouche, b) Intracouche, c) Intrafilets [55].

De nombreux travaux ont été réalisés ces dernières années sur l'effet de l'hybridation des fibres afin d'améliorer les propriétés du matériau composite. Une hybridation lin-carbone a été réalisée expérimentalement par Kureemun et al. [56] pour améliorer le comportement en traction du composite hybride. Le composite est devenu 2,3 fois plus rigide que le composite époxy/lin avec 6% de la fraction volumique de carbone. L'effet de l'hybridation sur les propriétés mécaniques en traction et en flexion des composites hybrides à fibres courtes banane-verre/polyester a été étudié par Haneefa *et al.* [57]. El Hadi et al. [58] ont testé des composites hybrides lin-verre sous environnement humide où les résultats ont montré que l'hybridation améliore la résistance à l'humidité et à l'absorption d'eau du composite. Davoodi *et al.* [59] ont étudié un matériau hybride kénaf-verre/époxyde pour les pare-chocs de voiture. Les résultats obtenus ont montré que l'hybridation a amélioré les propriétés mécaniques par rapport à celles du composite à fibres de verre. L'hybridation par l'empilement de couches hybride jute-verre a été étudiée par Sabeel Ahmed et Vijayarangan [60] montrant que l'empilement de deux couches de verre et deux autres de jute équilibre les propriétés mécaniques et le coût. Une évaluation de l'hybridation sur l'absorption d'eau et le coefficient de diffusion dans un environnement humide et chaud du composite hybride lin-verre a été réalisée par Saidane et al [61] pour analyser les propriétés mécaniques et leur évolution fonction du vieillissement. Les résultats obtenus ont montré que ce type d'hybridation permet de réduire les effets du vieillissement.

En fonction des besoins spécifiques des différentes applications, il est nécessaire de développer des panneaux sandwichs, en particulier celles à stratifié hybride. Cho [62] a réalisé une étude sur des panneaux sandwichs pour améliorer la rigidité en flexion, la rigidité en traction / cisaillement et la charge de flambement afin de minimiser les inconvénients de la rupture et des contraintes résiduelles. Des panneaux sandwichs avec des peaux hybrides composées de quatre couches de CFRP et quatre de GFRP et d'une âme nid d'abeilles en aluminium ont été réalisés. Cette conception a permis d'améliorer les performances des panneaux sandwichs en réduisant le coût et poids.

Des études expérimentales ont été réalisées par Mariam et al. [63] pour étudier les propriétés dynamiques des stratifiés hybrides de lin et de carbone. Ils ont testé l'effet de l'empilement, l'hybridation et l'orientation des fibres sur la rigidité à la flexion et l'amortissement des stratifiés non-hybrides et hybrides. Leurs résultats ont montré que les facteurs de pertes des composites à fibres de lin sont plus élevés que ceux des composites à fibres de carbone, mais les propriétés mécaniques des composites à fibres de lin sont moins importantes que celles des composites à fibres de carbone.

D'autres résultats obtenus montrent que les propriétés dynamiques et mécaniques dépendent de la position des couches de lin et de carbone dans le stratifié.

Effet hygrothermique

Les matériaux composites sont largement utilisés dans tous les domaines et sous différentes conditions. Ils sont soumis la plupart du temps à des variations de température et d'humidité ou les deux à la fois (hygrothermique). Les conditions hygrothermiques généralement dégradent les propriétés élastiques et la rigidité des structures, l'augmentation de la température et la dilatation thermique sous certaines conditions aux limites peuvent provoquer un flambement thermique car la structure ne peut se dilater librement. Les plaques en matériaux composites peuvent également être soumises à des charges hygrothermomécaniques, une combinaison de chargement mécanique et hygrothermique. L'humidité et la température peuvent aussi avoir un effet significatif sur le comportement en vibration libre des structures composites stratifiées. L'étude du chargement hygrothermique permet une meilleure compréhension et une meilleure caractérisation du comportement des plaques composites stratifiées lorsqu'elles sont soumises à des charges combinées.

Ces dernières années, plusieurs chercheurs ont réalisé des travaux sur les effets hygrothermique et hygrothermomécanique sur le comportement de plaques composites. Les premiers travaux sur le comportement au flambement thermique des plaques ont été réalisés par Gossard et al. [64] et Heldenfels et Roberts [65]. Ils ont étudié le comportement d'une plaque simplement appuyée soumise à une distribution de température. Whitney et al. [66] ont étudié l'effet de chargements thermiques et mécaniques ou une combinaison des deux sur le comportement en flexion et en vibration de plaques composites stratifiées en utilisant la méthode des éléments finis. Sai Ram et Sinha [67] ont étudié les effets hygrothermiques sur les propriétés de flexion des plaques composites stratifiées en utilisant la théorie de déformation du premier ordre qui tient compte du cisaillement transverse et en utilisant la méthode des éléments finis.

Patel et al. [68] ont étudié les effets hygrothermiques sur le comportement de stratifiés en matériau composites épais en utilisant la théorie d'ordre supérieur pour le flambement, les vibrations et la réponse en flexion. Carrera [72] a étudié l'influence de la température sur la réponse thermomécanique de plaques multicouches anisotropes épaisses et minces. Reddy et Hsu [73] ont présenté des études sur des plaques composites stratifiées soumises à un chargement thermique et mécanique. Tungikar et Rao [74] ont présenté une solution exacte 3D pour la répartition de la température et les contraintes thermiques dans des plaques composites stratifiées simplement appuyées. Hamidi et al. [75] ont proposé une théorie des plaques sinusoïdales pour l'analyse thermomécanique de la flexion de plaques sandwich FGM. Boudarba et al. [76] ont utilisé une

théorie simple du premier ordre pour étudier la réponse au flambement thermique de plaques sandwich FGM sous diverses conditions aux limites. Zenkour et al. [77] ont étudié l'influence de la température et de l'humidité sur le comportement de plaques stratifiées à couches croisées reposant sur des fondations élastiques. Panduro et al. [78] ont présenté l'approche (LW) pour analyser le comportement hygrothermomécanique de plaques composites à trois couches. Pan et al. [79] ont étudié le comportement en compression longitudinale de câbles de fibres de basalte tressées 3D dans une plage de vitesses de déformation comprise entre 1 200 et 2 400 s⁻¹ et dans une plage de températures de 23 à 210 °C en utilisant une analyse expérimentale et la méthode des éléments finis. Ils ont utilisé une résine époxyde dont les propriétés mécaniques varient avec la température (tableau 1.3).

Tableau 1.3 Les propriétés d'une résine époxy à différentes températures [79].

T (°C)	E_m (MPa)	ν_m
23	3173	0.33
60	2615	0.33
90	2530	0.33
120	1087	0.33
150	851	0.33
210	797	0.33

Tlidji et al. [80] ont étudié l'effet thermomécanique sur des plaques sandwichs FGM en utilisant une théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé à quatre variables. Une analyse vibratoire de plaques composites stratifiées soumises à des changements de température a été réalisée par Liu et Huang [81]. Une méthode par éléments finis a été proposée par Swamy Naidu et al. [83] pour l'analyse non linéaire des vibrations libres de coques composites stratifiées dans des conditions hygrothermiques variables. Les résultats obtenus ont montré que les fréquences fondamentales diminuent avec l'augmentation de l'humidité et de la température et que les plaques minces sont sensibles aux conditions environnementales. Hossein et al. [84] ont montré que les fréquences naturelles et le taux d'amortissement du système diminuent de manière linéaire avec l'augmentation de température. Tounsi et al. [85] ont analysé le décalage au cisaillement, prenant en compte l'effet hygrothermique sur les propriétés matérielles du stratifié et évalué l'effet des fissures transversales sur la réduction de la rigidité des composites stratifiés à couches croisées sous conditions hygrothermiques. Ameer et al. [86] ont montré la réduction de la rigidité due au vieillissement hygrothermique en considérant que les propriétés des matériaux des plaques sont dépendantes de la température et de l'humidité. Bouakaz.K et al. [71] ont utilisé la méthode des éléments finis et une approche analytique basée sur un modèle élastique pour calculer les contraintes d'interfaces d'une

poutre en I renforcée par des plaques en CFRP sous chargement hygrothermique. Les propriétés matérielles de la plaque sont considérées comme dépendantes de la température et de l'humidité.

Dans les résines, la température transition vitreuse T_g représente la température à laquelle la matière passe d'un état caoutchouteux à un état vitreux solide (rigide). Elle correspond à un changement des propriétés mécaniques du matériau (chute du module d'élasticité par exemple). En effet, Wu, X et al. [87] ont étudié les propriétés thermomécaniques des résines époxydes (SMP_s). Les résultats obtenus ont montré que les modules varient linéairement avec la température jusqu'à 130°C et une chute des modules intervient pour les températures supérieures à 130°C (figure 1.19). Cette dernière représente la température de transition vitreuse T_g . Par conséquent, nous allons étudier l'effet thermique sur le comportement des plaques composites en résine époxyde pour une plage de température entre 20 et 120 °C pour que le comportement du composite soit rigide en respectant l'approche de Bouakaz et al. [71].

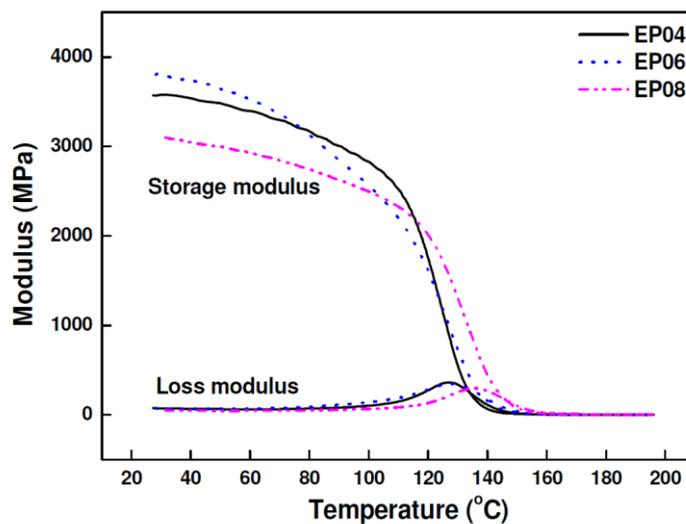


Figure 1.19 Evolution des modules des résines époxydes SMPs en fonction de la température [87]

Conclusion

Ce chapitre a été consacré à une revue assez large des matériaux composites, leurs différents constituants, leurs caractéristiques mécaniques, leurs procédés de fabrication, leurs domaines d'application et leurs avantages et inconvénients. Les composites offrent des solutions technologiques innovantes qui permettent d'améliorer la qualité des matériaux (légereté, rigidité...etc.). Toutefois, le prix, la non-homogénéité de ces matériaux sont souvent un frein à leur utilisation dans différents secteurs industriels.

Un rappel et une comparaison des théories des plaques a été donnée allant de la théorie classique, à la théorie du premier ordre et d'ordre élevé pour décrire la déformation des plaques. En général, il est rare de trouver une théorie qui soit applicable à tous les cas possibles (matériau composite anisotrope, isotrope, stratification, sandwich, plaque mince ou épaisse) et aux différents domaines (statique, dynamique et flambage), et qui soit simple et facile et ne coûte pas chère en temps de calcul. En effet, chacune d'elles présente des avantages et des inconvénients, avec des formalismes différents selon le domaine d'application.

Les études examinées sur l'hybridation permettent de conclure que cette technique est propre à un certain nombre de composites, dépend du type de fibres, de leur fraction volumique, de la position des couches pour le cas des composites hybrides intercouches et des conditions aux limites.

Une étude bibliographique sur l'effet hygrothermique a été réalisée pour voir l'influence de la température et de l'humidité sur le comportement des structures. En effet, la température et l'humidité ont un effet important sur les propriétés de ces matériaux. L'effet hygrothermique sur les propriétés vibratoires d'une structure se présente soit comme un changement des propriétés élastiques ou soit un changement de l'amortissement.

CHAPITRE II

COMPORTEMENT VIBRATOIRE DES PLAQUES COMPOSITES

RESUME DU CHAPITRE

L'objectif de ce chapitre est d'étudier le comportement vibratoire des plaques stratifiées en matériau composite en utilisant la théorie raffinée d'ordre élevée à quatre variables qui prend en considération l'effet de cisaillement lors du calcul des déformations ; et qui vérifie la nullité des contraintes de cisaillement aux bords supérieur et inférieur de la plaque sans introduire un facteur de correction. L'équation du mouvement de la plaque stratifiée est obtenue en utilisant de principe d'Hamilton. Les expressions mathématiques sont obtenues en utilisant la solution de Navier pour différentes conditions aux limites. Nous allons étudier deux types de plaques stratifiées : les plaques croisées cross-ply ($0^0/90^0$) et les plaques alternées angle-ply ($\theta^0/-\theta^0$) sous différentes conditions aux limites, avec une variation du rapport dimension latérale sur l'épaisseur et du rapport longueur/largeur. Ensuite, nous allons comparer les résultats obtenus par la théorie proposée avec les résultats existants dans la littérature et les résultats obtenus par la méthode des éléments finis en utilisant le code commercial ABAQUS.

Modèle analytique

0.1. Les hypothèses de la théorie raffinée d'ordre élevé

On considère une plaque composite stratifiée de longueur a , de largeur b et d'épaisseur h composée de couches orthotropes avec le système de coordonnées (x, y, z) (Figure 2.1). Les propriétés mécaniques de ces matériaux dépendent des propriétés des fibres et de la matrice.

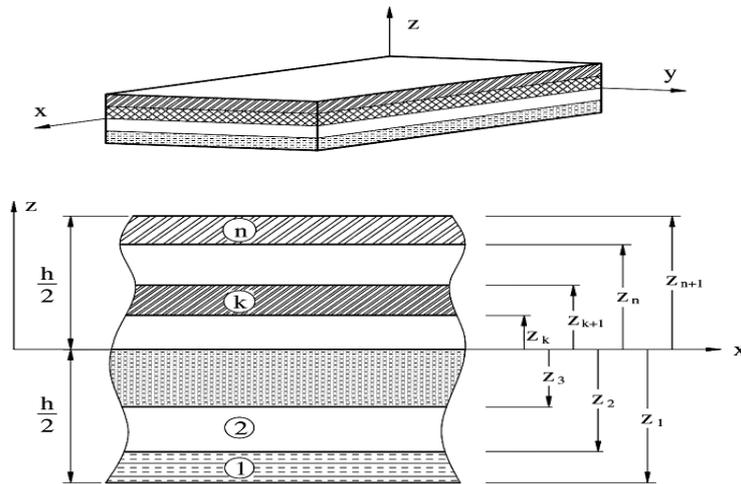


Figure 2. 1Plaque stratifiée en matériaux composites avec un système de coordonnées (x, y, z)

Les hypothèses sont les suivantes :

- La déformation transversale ε_z et la contrainte transversale normale σ_z sont négligées.
- Le déplacement transversal w comprend deux composantes : en flexion w_b et en cisaillement w_s

$$w(x, y, z, t) = w_b(x, y, t) + w_s(x, y, t) \quad (2.1)$$

- Les déplacements u dans la direction x et v dans la direction y sont les composantes d'extension, de flexion et de cisaillement.

$$\begin{aligned} u &= u_0 + u_b + u_s \\ v &= v_0 + v_b + v_s \end{aligned} \quad (2.2)$$

- Les composantes de flexion sont définies comme suit :

$$u_b = -z \frac{\partial w_b}{\partial x} \quad (2.3a)$$

$$v_b = -z \frac{\partial w_b}{\partial y} \quad (2.3b)$$

- Les composantes de cisaillement u_s et v_s donnent lieu, en combinaison avec w_s à :

$$u_s = -f(z) \frac{\partial w_s}{\partial x} \quad (2.4a)$$

$$v_s = -f(z) \frac{\partial w_s}{\partial y} \quad (2.4b)$$

0.2. Cinématique et équations constitutives

En utilisant les équations (2.1) à (2.4), le champ de déplacement peut être écrit comme suit :

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) &= u_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_b}{\partial x} - f(z) \frac{\partial w_s}{\partial x} \\ v(x, y, z, t) &= v_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_b}{\partial y} - f(z) \frac{\partial w_s}{\partial y} \\ w(x, y, z, t) &= w_b(x, y, t) + w_s(x, y, t) \end{aligned} \quad (2.5a)$$

Où

$$f(z) = \left(z - ze^{\frac{-2z^2}{h^2}} \right) \quad (2.5b)$$

Et

$$g(z) = 1 - \frac{d(f)}{d(z)} \quad (2.5c)$$

$f(z)$ est la fonction de cisaillement.

Les déformations sont calculées en dérivant l'équation (2.5a) telles que :

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \varepsilon_x^0 + zk_x^b + fk_x^s \\ \varepsilon_y &= \varepsilon_y^0 + zk_y^b + fk_y^s \\ \gamma_{xy} &= \gamma_{xy}^0 + zk_{xy}^b + fk_{xy}^s \\ \gamma_{yz} &= g\gamma_{yz}^s \\ \gamma_{xz} &= g\gamma_{xz}^s \\ \varepsilon_z &= 0 \end{aligned} \quad (2.6a)$$

Où :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} k_x^b \\ k_y^b \\ k_{xy}^b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w_b}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} k_x^s \\ k_y^s \\ k_{xy}^s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w_s}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^s \\ \gamma_{xz}^s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial w_s}{\partial y} \\ \frac{\partial w_s}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (2.6b)$$

Basée sur l'hypothèse que chaque couche possède un plan de symétrie élastique parallèle au plan (x, y), les équations constitutives pour une couche peuvent être écrites comme suit :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \quad (2.7a)$$

Q_{ij} sont les rigidités définies en fonction des constantes élastiques dans les axes de la couche :

$$Q_{11} = \frac{E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}}, Q_{12} = \frac{\nu_{12}E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}}, Q_{22} = \frac{E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}}, Q_{66} = G_{12}, Q_{44} = G_{23}, Q_{55} = G_{13} \quad (2.7b)$$

Comme le stratifié est composé de plusieurs couches orthotropes orientées par rapport aux coordonnées principales du stratifié, les équations constitutives de chaque couche doivent être transformées en coordonnées du stratifié (x, y).

Les relations contrainte-déformation dans les coordonnées du stratifié de la $k^{\text{ème}}$ couche sont données par :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \end{Bmatrix}^{(k)} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} & 0 & 0 \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} & 0 & 0 \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{Q}_{44} & \bar{Q}_{45} \\ 0 & 0 & 0 & \bar{Q}_{45} & \bar{Q}_{55} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix}^{(k)} \quad (2.8)$$

\bar{Q}_{ij} sont données par :

$$\begin{aligned}
\bar{Q}_{11} &= Q_{11} \cos^4 \theta + Q_{22} \sin^4 \theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta \\
\bar{Q}_{12} &= (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{12} (\cos^4 \theta + \sin^4 \theta) \\
\bar{Q}_{16} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \sin \theta \cos^3 \theta + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta \\
\bar{Q}_{22} &= Q_{11} \sin^4 \theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{22} \cos^4 \theta \\
\bar{Q}_{26} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \cos \theta \sin^3 \theta + (Q_{12} - Q_{22} - 2Q_{66}) \sin \theta \cos^3 \theta \\
\bar{Q}_{66} &= [(Q_{11} + Q_{22} - 2(Q_{12} + Q_{66}))] \cos^2 \theta \sin^2 \theta + Q_{66} (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta) \\
\bar{Q}_{44} &= Q_{44} \cos^2 \theta + Q_{55} \sin^2 \theta \\
\bar{Q}_{45} &= (Q_{55} - Q_{44}) \cos \theta \sin \theta \\
\bar{Q}_{55} &= Q_{55} \cos^2 \theta + Q_{44} \sin^2 \theta
\end{aligned} \tag{2.9}$$

0.3. Equations gouvernantes

Les équations de mouvement sont obtenues en utilisant le principe d'Hamilton :

$$\int_0^t \delta(U + V - T) dt = 0 \tag{2.10}$$

Où :

U est l'énergie de déformation de la plaque dont la variation est donnée par :

$$\delta U = \int_V \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV = \int_V (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \sigma_{xy} \delta \gamma_{xy} + \sigma_{yz} \delta \gamma_{yz} + \sigma_{xz} \delta \gamma_{xz}) dV \tag{2.11}$$

T est l'énergie cinétique de la plaque dont la variation est donnée par :

$$\delta T = \int_0^t \int_V \rho (\ddot{u} \delta u + \ddot{v} \delta v + \ddot{w} \delta w) dV dt = \int_V \rho (\ddot{u} \delta u + \ddot{v} \delta v + \ddot{w} \delta w) dV \tag{2.12}$$

En substituant les équations (2.6) à (2.8) dans l'équation (2.11) et en intégrant suivant l'épaisseur de la plaque, la variation de l'énergie de déformation de la plaque devient :

$$\begin{aligned}
\delta U = \int_A (N_x \delta \varepsilon_x^0 + N_y \delta \varepsilon_y^0 + N_{xy} \delta \gamma_{xy}^0 + M_x^b \delta k_x^b + M_y^b \delta k_y^b + M_{xy}^b \delta k_{xy}^b \\
+ M_x^s \delta k_x^s + M_y^s \delta k_y^s + M_{xy}^s \delta k_{xy}^s + Q_{yz}^s \delta \gamma_{yz}^s + Q_{xz}^s \delta \gamma_{xz}^s) dx dy = 0
\end{aligned} \tag{2.13}$$

Les efforts normaux N et les moments résultants M^b , M^s et Q^s sont alors définies par les expressions suivantes :

$$\begin{aligned}
(N_x, N_y, N_{xy}) &= \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}) dz = \sum_{k=1}^{n_p} \int_{Z_k}^{Z_{k+1}} (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}) dz \\
(M_x^b, M_y^b, M_{xy}^b) &= \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}) z dz = \sum_{k=1}^{n_p} \int_{Z_k}^{Z_{k+1}} (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}) z dz \\
(M_x^s, M_y^s, M_{xy}^s) &= \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}) f(z) dz = \sum_{k=1}^{n_p} \int_{Z_k}^{Z_{k+1}} (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}) f(z) dz \\
(Q_{xz}^s, Q_{yz}^s) &= \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_{xz}, \sigma_{yz}) g(z) dz = \sum_{k=1}^{n_p} \int_{Z_k}^{Z_{k+1}} (\sigma_{xz}, \sigma_{yz}) g(z) dz
\end{aligned} \tag{2.14}$$

En substituant l'équation (2.8) dans l'équation (2.14) et en intégrant suivant l'épaisseur de la plaque, les forces et moments résultants sont donnés par :

$$\begin{Bmatrix} N \\ M^b \\ M^s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B & B^s \\ B & D & D^s \\ B^s & D^s & H^s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon \\ k^b \\ k^s \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} Q_{yz}^s \\ Q_{xz}^s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{44}^s & A_{45}^s \\ A_{45}^s & A_{55}^s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^s \\ \gamma_{xz}^s \end{Bmatrix} \tag{2.15}$$

Où

$$N = \{N_x, N_y, N_{xy}\}^t, M^b = \{M_x^b, M_y^b, M_{xy}^b\}^t, M^s = \{M_x^s, M_y^s, M_{xy}^s\}^t \tag{2.16a}$$

$$\varepsilon = \{\varepsilon_x^0, \varepsilon_y^0, \gamma_{xy}^0\}^t, k^b = \{k_x^b, k_y^b, k_{xy}^b\}^t, k^s = \{k_x^s, k_y^s, k_{xy}^s\}^t \tag{2.16b}$$

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \tag{2.16c}$$

$$B^s = \begin{bmatrix} B_{11}^s & B_{12}^s & B_{16}^s \\ B_{12}^s & B_{22}^s & B_{26}^s \\ B_{16}^s & B_{26}^s & B_{66}^s \end{bmatrix}, D^s = \begin{bmatrix} D_{11}^s & D_{12}^s & D_{16}^s \\ D_{12}^s & D_{22}^s & D_{26}^s \\ D_{16}^s & D_{26}^s & D_{66}^s \end{bmatrix}, H^s = \begin{bmatrix} H_{11}^s & H_{12}^s & H_{16}^s \\ H_{12}^s & H_{22}^s & H_{26}^s \\ H_{16}^s & H_{26}^s & H_{66}^s \end{bmatrix} \tag{2.16d}$$

Avec :

$$(A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}, B_{ij}^s, D_{ij}^s, H_{ij}^s) = \sum_{k=1}^{n_p} \int_{Z_k}^{Z_{k+1}} \bar{Q}_{ij} (1, z, z^2, f(z), z f(z), f^2(z)) dz \quad (i, j) = (1, 2, 6) \tag{2.17a}$$

$$A_{ij}^s = \sum_{k=1}^{n_p} \int_{Z_k}^{Z_{k+1}} \bar{Q}_{ij} [g(z)]^2 dz \quad (i, j) = (4, 5) \tag{2.17b}$$

$$\begin{aligned}
\delta T &= \int_0^t \int_V \rho (\dot{u} \delta u + \dot{v} \delta v + \dot{w} \delta w) dV dt = \int_V \rho (\ddot{u} \delta u + \ddot{v} \delta v + \ddot{w} \delta w) dV \\
\delta T &= \int_A \left\{ \delta u_0 \left(I_1 \ddot{u}_0 - I_2 \frac{\partial \ddot{w}_b}{\partial x} - I_4 \frac{\partial \ddot{w}_s}{\partial x} \right) + \delta v_0 \left(I_1 \ddot{v}_0 - I_2 \frac{\partial \ddot{w}_b}{\partial y} - I_4 \frac{\partial \ddot{w}_s}{\partial y} \right) \right. \\
&\quad + \delta w_b \left[I_1 (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) + I_2 \left(\frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} + \frac{\partial \ddot{v}_0}{\partial y} \right) - I_3 \left(\frac{\partial^2 \ddot{w}_b}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \ddot{w}_b}{\partial y^2} \right) - I_5 \left(\frac{\partial^2 \ddot{w}_s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \ddot{w}_s}{\partial y^2} \right) \right] \\
&\quad \left. + \delta w_s \left[I_1 (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) + I_4 \left(\frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} + \frac{\partial \ddot{v}_0}{\partial y} \right) - I_5 \left(\frac{\partial^2 \ddot{w}_b}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \ddot{w}_b}{\partial y^2} \right) - I_6 \left(\frac{\partial^2 \ddot{w}_s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \ddot{w}_s}{\partial y^2} \right) \right] \right\} dx dy
\end{aligned} \tag{2.18}$$

Où I_i sont les inerties définis par :

$$(I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, I_6) = \sum_{k=1}^{n_p} \int_{Z_k}^{Z_{k+1}} \rho (1, z, z^2, f(z), z f(z), [f(z)]^2) dz \tag{2.19}$$

En substituant les équations (2.13), (2.17) et (2.18) dans l'équation (2.10) et en intégrant par partie, on obtient les équations d'équilibres suivantes :

$$\left\{ \begin{aligned}
\delta u_0 : \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} &= I_1 \ddot{u}_0 - I_2 \frac{\partial \ddot{w}_b}{\partial x} - I_4 \frac{\partial \ddot{w}_s}{\partial x} \\
\delta v_0 : \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} &= I_1 \ddot{v}_0 - I_2 \frac{\partial \ddot{w}_b}{\partial y} - I_4 \frac{\partial \ddot{w}_s}{\partial y} \\
\delta w_b : \frac{\partial^2 M_x^b}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^b}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^b}{\partial y^2} &= I_1 (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) + I_2 \left(\frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} + \frac{\partial \ddot{v}_0}{\partial y} \right) \\
&\quad - I_3 \left(\frac{\partial^2 \ddot{w}_b}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \ddot{w}_b}{\partial y^2} \right) - I_5 \left(\frac{\partial^2 \ddot{w}_s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \ddot{w}_s}{\partial y^2} \right) \\
\delta w_s : \frac{\partial^2 M_x^s}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^s}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^s}{\partial y^2} + \frac{\partial Q_{xz}^s}{\partial x} + \frac{\partial Q_{yz}^s}{\partial y} &= I_1 (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) + I_4 \left(\frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} + \frac{\partial \ddot{v}_0}{\partial y} \right) \\
&\quad - I_5 \left(\frac{\partial^2 \ddot{w}_b}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \ddot{w}_b}{\partial y^2} \right) - I_6 \left(\frac{\partial^2 \ddot{w}_s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \ddot{w}_s}{\partial y^2} \right)
\end{aligned} \right. \tag{2.20}$$

Les équations (2.20) peuvent être exprimées en termes de déplacement (δu_0 , δv_0 , δw_b et δw_s) en substituant l'équation (2.15) dans l'équation (2.20) :

$$\begin{aligned}
& A_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + 2A_{16} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + A_{66} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + A_{16} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + A_{26} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} \\
& - B_{11} \frac{\partial^3 w_b}{\partial x^3} - 3B_{16} \frac{\partial^3 w_b}{\partial x^2 \partial y} - (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 w_b}{\partial x \partial y^2} - B_{26} \frac{\partial^3 w_b}{\partial y^3} \\
& - B_{11}^s \frac{\partial^3 w_s}{\partial x^3} - 3B_{16}^s \frac{\partial^3 w_s}{\partial x^2 \partial y} - (B_{12}^s + 2B_{66}^s) \frac{\partial^3 w_s}{\partial x \partial y^2} - B_{26}^s \frac{\partial^3 w_s}{\partial y^3} = I_1 \ddot{u}_0 - I_2 \frac{\partial \ddot{w}_b}{\partial x} - I_4 \frac{\partial \ddot{w}_s}{\partial x} \quad (2.21a)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& A_{16} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + A_{26} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + A_{66} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + 2A_{26} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + A_{22} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} \\
& - B_{16} \frac{\partial^3 w_b}{\partial x^3} - (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 w_b}{\partial x^2 \partial y} - 3B_{26} \frac{\partial^3 w_b}{\partial x \partial y^2} - B_{22} \frac{\partial^3 w_b}{\partial y^3} \\
& - B_{16}^s \frac{\partial^3 w_s}{\partial x^3} - (B_{12}^s + 2B_{66}^s) \frac{\partial^3 w_s}{\partial x^2 \partial y} - 3B_{26}^s \frac{\partial^3 w_s}{\partial x \partial y^2} - B_{22}^s \frac{\partial^3 w_s}{\partial y^3} = I_1 \ddot{v}_0 - I_2 \frac{\partial \ddot{w}_b}{\partial y} - I_4 \frac{\partial \ddot{w}_s}{\partial y} \quad (2.21b)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& B_{11} \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} + 3B_{16} \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^2 \partial y} + (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial y^2} + B_{26} \frac{\partial^3 u_0}{\partial y^3} \\
& + B_{16} \frac{\partial^3 v_0}{\partial x^3} + (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 v_0}{\partial x^2 \partial y} + 3B_{26} \frac{\partial^3 v_0}{\partial x \partial y^2} + B_{22} \frac{\partial^3 v_0}{\partial y^3} \\
& - D_{11} \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^4} - 4D_{16} \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^3 \partial y} - 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^2 \partial y^2} - 4D_{26} \frac{\partial^4 w_b}{\partial x \partial y^3} - D_{22} \frac{\partial^4 w_b}{\partial y^4} \\
& - D_{11}^s \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^4} - 4D_{16}^s \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^3 \partial y} - 2(D_{12}^s + 2D_{66}^s) \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^2 \partial y^2} - 4D_{26}^s \frac{\partial^4 w_s}{\partial x \partial y^3} - D_{22}^s \frac{\partial^4 w_s}{\partial y^4} \\
& = I_1 (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) + I_2 \left(\frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} + \frac{\partial \ddot{v}_0}{\partial y} \right) - I_3 \left(\frac{\partial^2 \ddot{w}_b}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \ddot{w}_b}{\partial y^2} \right) - I_5 \left(\frac{\partial^2 \ddot{w}_s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \ddot{w}_s}{\partial y^2} \right) \quad (2.21c)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& B_{11}^s \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} + 3B_{16}^s \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^2 \partial y} + (B_{12}^s + 2B_{66}^s) \frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial y^2} + B_{26}^s \frac{\partial^3 u_0}{\partial y^3} \\
& + B_{16}^s \frac{\partial^3 v_0}{\partial x^3} + (B_{12}^s + 2B_{66}^s) \frac{\partial^3 v_0}{\partial x^2 \partial y} + 3B_{26}^s \frac{\partial^3 v_0}{\partial x \partial y^2} + B_{22}^s \frac{\partial^3 v_0}{\partial y^3} \\
& - D_{11}^s \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^4} - 4D_{16}^s \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^3 \partial y} - 2(D_{12}^s + 2D_{66}^s) \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^2 \partial y^2} - 4D_{26}^s \frac{\partial^4 w_b}{\partial x \partial y^3} - D_{22}^s \frac{\partial^4 w_b}{\partial y^4} \\
& - H_{11}^s \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^4} - 4H_{16}^s \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^3 \partial y} - 2(H_{12}^s + 2H_{66}^s) \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^2 \partial y^2} - 4H_{26}^s \frac{\partial^4 w_s}{\partial x \partial y^3} - H_{22}^s \frac{\partial^4 w_s}{\partial y^4} \\
& + A_{55}^s \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} + A_{44}^s \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} + 2A_{45}^s \frac{\partial^2 w_s}{\partial x \partial y} \\
& = I_1 (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) + I_4 \left(\frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} + \frac{\partial \ddot{v}_0}{\partial y} \right) - I_5 \left(\frac{\partial^2 \ddot{w}_b}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \ddot{w}_b}{\partial y^2} \right) - I_6 \left(\frac{\partial^2 \ddot{w}_s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \ddot{w}_s}{\partial y^2} \right) \quad (2.21d)
\end{aligned}$$

0.4. Solution de Navier pour les plaques stratifiées simplement appuyées

0.4.1. Cas des stratifiées à plis croisés ($0^0/90^0$)

Pour une plaque stratifiée simplement appuyée antisymétrique à plis croisés (cross-ply), les rigidités suivantes sont nulles :

$$\begin{aligned}
 A_{16} &= A_{26} = D_{16} = D_{26} = D_{16}^s = D_{26}^s = H_{16}^s = H_{26}^s = 0 \\
 B_{12} &= B_{26} = B_{16} = B_{66} = B_{12}^s = B_{16}^s = B_{26}^s = B_{66}^s = A_{45}^s = 0 \\
 B_{22} &= -B_{11}, B_{22}^s = -B_{11}^s
 \end{aligned} \tag{2.22}$$

Les conditions aux limites pour une plaque de dimensions $a \times b \times h$ sont écrites comme suit :

$$\left\{ \begin{aligned}
 v_0(0, y) &= w_b(0, y) = w_s(0, y) = \frac{\partial w_b}{\partial y}(0, y) = \frac{\partial w_s}{\partial y}(0, y) = 0 \\
 v_0(a, y) &= w_b(a, y) = w_s(a, y) = \frac{\partial w_b}{\partial y}(a, y) = \frac{\partial w_s}{\partial y}(a, y) = 0 \\
 N_x(0, y) &= M_x^b(0, y) = M_x^s(0, y) = N_x(a, y) = M_x^b(a, y) = M_x^s(a, y) = 0 \\
 u_0(x, 0) &= w_b(x, 0) = w_s(x, 0) = \frac{\partial w_b}{\partial x}(x, 0) = \frac{\partial w_s}{\partial x}(x, 0) = 0 \\
 u_0(x, b) &= w_b(x, b) = w_s(x, b) = \frac{\partial w_b}{\partial x}(x, b) = \frac{\partial w_s}{\partial x}(x, b) = 0 \\
 N_y(x, 0) &= M_y^b(x, 0) = M_y^s(x, 0) = N_y(x, b) = M_y^b(x, b) = M_y^s(x, b) = 0
 \end{aligned} \right. \tag{2.23}$$

Ces conditions aux limites sont satisfaites par les champs de déplacement donnés par les expressions suivantes :

$$\left\{ \begin{aligned}
 u_0(x, y) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} U_{mn} e^{i\omega t} \cos(\alpha x) \sin(\beta y), \quad x \in [0, a]; y \in [0, b] \\
 v_0(x, y) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} V_{mn} e^{i\omega t} \sin(\alpha x) \cos(\beta y), \quad x \in [0, a]; y \in [0, b] \\
 w_b(x, y) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{bmn} e^{i\omega t} \sin(\alpha x) \sin(\beta y), \quad x \in [0, a]; y \in [0, b] \\
 w_s(x, y) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{smn} e^{i\omega t} \sin(\alpha x) \sin(\beta y), \quad x \in [0, a]; y \in [0, b]
 \end{aligned} \right. \tag{2.24}$$

Où : U_{mn} , V_{mn} , W_{bmn} et W_{smn} sont des paramètres arbitraires à déterminer et ω est la fréquence propre associée au (m, n) $n^{\text{ième}}$ mode de vibration, $\alpha = m\pi/a$ et $\beta = n\pi/b$.

En remplaçant les équations (2.23) et (2.24) dans l'équation (2.22), la solution de Navier pour les stratifiées antisymétriques croisés peut être déterminée à partir de l'équation suivante :

$$\begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & s_{14} \\ s_{12} & s_{22} & s_{23} & s_{24} \\ s_{13} & s_{23} & s_{33} & s_{34} \\ s_{14} & s_{24} & s_{34} & s_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_{mn} \\ V_{mn} \\ W_{bmn} \\ W_{smn} \end{Bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} m_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_{33} & m_{34} \\ 0 & 0 & m_{34} & ms_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_{mn} \\ V_{mn} \\ W_{bmn} \\ W_{smn} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.25)$$

où :

$$\begin{aligned} s_{11} &= A_{11}\alpha^2 + A_{66}\beta^2, \quad s_{12} = \alpha\beta(A_{12} + A_{66}), \quad s_{13} = -B_{11}\alpha^3, \\ s_{14} &= -B_{11}^s\alpha^3 \\ s_{22} &= A_{66}\alpha^2 + A_{22}\beta^2, \quad s_{23} = B_{11}\beta^3, \quad s_{24} = B_{11}^s\beta^3 \\ s_{33} &= D_{11}\alpha^4 + 2(D_{12} + 2D_{66})\alpha^2\beta^2 + D_{22}\beta^4 \\ s_{34} &= D_{11}^s\alpha^4 + 2(D_{12}^s + 2D_{66}^s)\alpha^2\beta^2 + D_{22}^s\beta^4 \\ s_{44} &= H_{11}^s\alpha^4 + 2(H_{12}^s + 2H_{66}^s)\alpha^2\beta^2 + H_{22}^s\beta^4 + A_{55}\alpha^2 + A_{44}\beta^2 \\ m_{11} &= m_{22} = I_1, \quad m_{33} = I_1 + I_3(\alpha^2 + \beta^2) \\ m_{34} &= I_1 + I_5(\alpha^2 + \beta^2), \quad m_{44} = I_1 + I_6(\alpha^2 + \beta^2) \end{aligned} \quad (2.26)$$

0.4.2. Stratifiées à plis alternés et équilibrés ($\theta^\circ/\theta^\circ$)

Pour les plaques stratifiées antisymétriques angle-ply, les rigidités suivantes sont nulles :

$$\begin{aligned} A_{16} = A_{26} = D_{16} = D_{26} = D_{16}^s = D_{26}^s = H_{16}^s = H_{26}^s = 0 \\ B_{11} = B_{12} = B_{22} = B_{66} = B_{11}^s = B_{12}^s = B_{22}^s = B_{66}^s = A_{45}^s = 0 \end{aligned} \quad (2.27)$$

Les conditions aux limites pour une plaque de dimensions $a \times b \times h$ sont écrites comme suit :

$$\begin{aligned} u(0, y) = w_b(0, y) = w_s(0, y) = \frac{\partial w_b}{\partial y}(0, y) = \frac{\partial w_s}{\partial y}(0, y) = 0 \\ u(a, y) = w_b(a, y) = w_s(a, y) = \frac{\partial w_b}{\partial y}(a, y) = \frac{\partial w_s}{\partial y}(a, y) = 0 \\ N_{xy}(0, y) = M_x^b(0, y) = M_x^s(0, y) = N_{xy}(a, y) = M_x^b(a, y) = M_x^s(a, y) = 0 \\ v(x, 0) = w_b(x, 0) = w_s(x, 0) = \frac{\partial w_b}{\partial x}(x, 0) = \frac{\partial w_s}{\partial x}(x, 0) = 0 \\ v(x, b) = w_b(x, b) = w_s(x, b) = \frac{\partial w_b}{\partial x}(x, b) = \frac{\partial w_s}{\partial x}(x, b) = 0 \\ N_{xy}(x, 0) = M_y^b(x, 0) = M_y^s(x, 0) = N_{xy}(x, b) = M_y^b(x, b) = M_y^s(x, b) = 0 \end{aligned} \quad (2.28)$$

Ces conditions aux limites sont satisfaites par les champs de déplacement donnés par les expressions suivantes :

$$\begin{aligned}
u_0(x, y, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} U_{mn} \sin(\alpha x) \cos(\beta y) e^{i\omega t} \\
v_0(x, y, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} V_{mn} \cos(\alpha x) \sin(\beta y) e^{i\omega t} \\
w_b(x, y, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{bmn} \sin(\alpha x) \sin(\beta y) e^{i\omega t} \\
w_s(x, y, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{smn} \sin(\alpha x) \sin(\beta y) e^{i\omega t}
\end{aligned} \tag{2.29}$$

En remplaçant les équations (2.27) et (2.29) dans l'équation (2.22), l'équation (2.25) peut être résolue en utilisant les coefficients suivants :

$$\begin{aligned}
s_{11} &= A_{11}\alpha^2 + A_{66}\beta^2, s_{12} = \alpha\beta(A_{12} + A_{66}), s_{13} = -(3B_{16}\alpha^2\beta + B_{26}\beta^3) \\
s_{14} &= -(3B_{16}^s\alpha^2\beta + B_{26}^s\beta^3), s_{22} = A_{66}\alpha^2 + A_{22}\beta^2, s_{23} = -(B_{16}\alpha^3 + 3B_{26}\alpha\beta^2) \\
s_{24} &= -(B_{16}^s\alpha^3 + 3B_{26}^s\alpha\beta^2), s_{33} = D_{11}\alpha^4 + 2(D_{12} + 2D_{66})\alpha^2\beta^2 + D_{22}\beta^4 \\
s_{34} &= D_{11}^s\alpha^4 + 2(D_{12}^s + 2D_{66}^s)\alpha^2\beta^2 + D_{22}^s\beta^4 \\
s_{44} &= H_{11}^s\alpha^4 + 2(H_{12}^s + 2H_{66}^s)\alpha^2\beta^2 + H_{22}^s\beta^4 + A_{55}^s\alpha^2 + A_{44}^s\beta^2 \\
m_{11} &= m_{22} = I_1, m_{33} = I_1 + I_3(\alpha^2 + \beta^2) \\
m_{34} &= I_1 + I_5(\alpha^2 + \beta^2), m_{44} = I_1 + I_6(\alpha^2 + \beta^2)
\end{aligned} \tag{2.30}$$

0.4.3. Plaques stratifiées croisées (cross-ply) sous diverses conditions aux limites

La solution exacte des équations (2.22) pour les plaques antisymétriques stratifiées croisées (cross-ply) sous diverses conditions aux limites est donnée selon [27, 28] comme suit :

- Encastrée (C)

$$u = v = w_b = w_s = \frac{\partial w_b}{\partial x} = \frac{\partial w_b}{\partial y} = \frac{\partial w_s}{\partial x} = \frac{\partial w_s}{\partial y} = 0 \quad \text{à } x=0, a \text{ et } y=0, b \tag{2.31}$$

- Simple (S)

$$v = w_b = w_s = \frac{\partial w_b}{\partial y} = \frac{\partial w_s}{\partial y} = 0 \quad \text{à} \quad x = 0, a \quad (2.32a)$$

$$u = w_b = w_s = \frac{\partial w_b}{\partial x} = \frac{\partial w_s}{\partial x} = 0 \quad \text{à} \quad y = 0, b \quad (2.32b)$$

Les conditions aux limites des équations (2.31) et (2.32) sont satisfaites par les champs de déplacement suivants [69] :

$$\begin{aligned} u(x, y, t) &= U_{mn} X'_m(x) Y_n(y) e^{i\omega t} \\ v(x, y, t) &= V_{mn} X_m(x) Y'_n(y) e^{i\omega t} \\ w_b(x, y, t) &= W_{bmn} X_m(x) Y_n(y) e^{i\omega t} \\ w_s(x, y, t) &= W_{smn} X_m(x) Y_n(y) e^{i\omega t} \end{aligned} \quad (2.33)$$

Où les fonctions $X_m(x)$ and $Y_n(y)$ représentent des formes approximatives de la surface déviée de la plaque. Ces fonctions sont données dans le tableau 2.1 :

Tableau 2.1 Les fonctions admissibles $X_m(x)$ et $Y_n(y)$

	Conditions aux limites		Les fonctions $X_m(x)$ et $Y_n(y)$	
	à $x=0, a$	à $y=0, b$	$X_m(x)$	$Y_n(y)$
SSSS	$X_m(0) = X_m''(0) = 0$	$Y_n(0) = Y_n''(0) = 0$	$\sin(\alpha x)$	$\sin(\beta y)$
	$X_m(a) = X_m''(a) = 0$	$Y_n(b) = Y_n''(b) = 0$		
CSSS	$X_m(0) = X_m'(0) = 0$	$Y_n(0) = Y_n''(0) = 0$	$\sin(\alpha x)[\cos(\alpha x) - 1]$	$\sin(\beta y)$
	$X_m(a) = X_m''(a) = 0$	$Y_n(b) = Y_n''(b) = 0$		
CSCS	$X_m(0) = X_m'(0) = 0$	$Y_n(0) = Y_n'(0) = 0$	$\sin(\alpha x)[\cos(\alpha x) - 1]$	$\sin(\beta y)[\cos(\beta y) - 1]$
	$X_m(a) = X_m''(a) = 0$	$Y_n(b) = Y_n''(b) = 0$		
CCSS	$X_m(0) = X_m'(0) = 0$	$Y_n(0) = Y_n''(0) = 0$	$\sin^2(\alpha x)$	$\sin(\beta y)$
	$X_m(a) = X_m'(a) = 0$	$Y_n(b) = Y_n''(b) = 0$		
CCCC	$X_m(0) = X_m'(0) = 0$	$Y_n(0) = Y_n'(0) = 0$		$\sin^2(\beta y)$

	$X_m(a) = X'_m(a) = 0$	$Y_n(b) = Y'_n(b) = 0$	$\sin^2(\alpha x)$	
FFCC	$X''_m(0) = X'''_m(0) = 0$	$Y_n(0) = Y'_n(0) = 0$	$\cos^2(\alpha x)[\sin^2(\alpha x) + 1]$	$\sin^2(\beta y)$
	$X''_m(a) = X'''_m(a) = 0$	$Y_n(b) = Y'_n(b) = 0$		

() Désigne la dérivée en respectant la coordonnée correspondante.

En substituant les équations (2.33) et (2.22) dans l'équation (2.21), l'équation (2.25) peut être résolue en remplaçant les coefficients de l'équation (2.26) par les coefficients donnés par l'équation (2.34) suivante :

$$\begin{aligned}
s_{11} &= \int_0^a \int_0^b (A_{11} X_m''' Y_n + A_{66} X_m' Y_n'') X_m' Y_n' dx dy \\
s_{12} &= \int_0^a \int_0^b (A_{12} + A_{66}) X_m' Y_n'' X_m' Y_n' dx dy \\
s_{13} &= - \int_0^a \int_0^b [B_{11} X_m'' Y_n + (B_{12} + 2B_{66}) X_m' Y_n''] X_m' Y_n' dx dy \\
s_{14} &= - \int_0^a \int_0^b [B_{11}^s X_m'' Y_n + (B_{12}^s + 2B_{66}^s) X_m' Y_n''] X_m' Y_n' dx dy \\
s_{21} &= \int_0^a \int_0^b (A_{12} + A_{66}) X_m'' Y_n' X_m' Y_n' dx dy \\
s_{22} &= \int_0^a \int_0^b (A_{22} X_m Y_n''' + A_{66} X_m'' Y_n') X_m' Y_n' dx dy \\
s_{23} &= - \int_0^a \int_0^b [B_{22} X_m Y_n''' + (B_{12} + 2B_{66}) X_m'' Y_n'] X_m' Y_n' dx dy \\
s_{24} &= - \int_0^a \int_0^b [B_{22}^s X_m Y_n''' + (B_{12}^s + 2B_{66}^s) X_m'' Y_n'] X_m' Y_n' dx dy \\
s_{31} &= \int_0^a \int_0^b [B_{11} X_m''' Y_n + (B_{12} + 2B_{66}) X_m'' Y_n''] X_m' Y_n' dx dy \\
s_{32} &= \int_0^a \int_0^b [B_{22} X_m Y_n''' + (B_{12} + 2B_{66}) X_m'' Y_n'] X_m' Y_n' dx dy \\
s_{33} &= \int_0^a \int_0^b - [D_{11} X_m''' Y_n + 2(D_{12} + 2D_{66}) X_m'' Y_n' + D_{22} X_m Y_n'''] X_m' Y_n' dx dy \\
s_{34} &= \int_0^a \int_0^b - [D_{11}^s X_m''' Y_n + 2(D_{12}^s + 2D_{66}^s) X_m'' Y_n' + D_{22}^s X_m Y_n'''] X_m' Y_n' dx dy \\
s_{41} &= \int_0^a \int_0^b [B_{11}^s X_m''' Y_n + (B_{12}^s + 2B_{66}^s) X_m'' Y_n''] X_m' Y_n' dx dy
\end{aligned} \tag{2.34}$$

$$\begin{aligned}
s_{42} &= \int_0^a \int_0^b \left[B_{22}^s X_m Y_n'''' + (B_{12}^s + 2B_{66}^s) X_m'' Y_n'' \right] X_m Y_n dx dy \\
s_{43} &= \int_0^a \int_0^b \left[D_{11}^s X_m'''' Y_n + 2(D_{12}^s + 2D_{66}^s) X_m'' Y_n'' + D_{22}^s X_m Y_n'''' \right] X_m Y_n dx dy \\
s_{44} &= \int_0^a \int_0^b \left[H_{11}^s X_m'''' Y_n + 2(H_{12}^s + 2H_{66}^s) X_m'' Y_n'' + H_{22}^s X_m Y_n'''' - A_{55}^s X_m'' Y_n'' - A_{44}^s X_m Y_n'' \right] X_m Y_n dx dy \\
K &= N_{cr} \int_0^a \int_0^b (\gamma_1 X_m'' Y_n'' + \gamma_2 X_m Y_n''') X_m Y_n dx dy
\end{aligned}$$

et l'équation (2.35) suivante :

$$\begin{aligned}
m_{11} &= \int_0^a \int_0^b -I_1 X_m' Y_n X_m' Y_n dx dy \\
m_{13} &= \int_0^a \int_0^b I_2 X_m' Y_n X_m' Y_n dx dy \\
m_{14} &= \int_0^a \int_0^b I_4 X_m' Y_n X_m' Y_n dx dy \\
m_{22} &= \int_0^a \int_0^b -I_1 X_m Y_n' X_m Y_n' dx dy \\
m_{23} &= \int_0^a \int_0^b I_2 X_m Y_n' X_m Y_n' dx dy \\
m_{24} &= \int_0^a \int_0^b I_4 X_m Y_n' X_m Y_n' dx dy \\
m_{31} &= \int_0^a \int_0^b -I_2 X_m Y_n X_m'' Y_n dx dy \\
m_{32} &= \int_0^a \int_0^b -I_2 X_m Y_n X_m'' Y_n dx dy \\
m_{33} &= \int_0^a \int_0^b -I_1 X_m Y_n X_m Y_n dx dy + \int_0^a \int_0^b I_3 X_m Y_n X_m Y_n'' dx dy + \int_0^a \int_0^b I_3 X_m Y_n X_m'' Y_n dx dy \\
m_{34} &= \int_0^a \int_0^b -I_1 X_m Y_n X_m Y_n dx dy + \int_0^a \int_0^b I_5 X_m Y_n X_m Y_n'' dx dy + \int_0^a \int_0^b I_5 X_m Y_n X_m'' Y_n dx dy \\
m_{41} &= \int_0^a \int_0^b -I_4 X_m Y_n X_m'' Y_n dx dy \\
m_{42} &= \int_0^a \int_0^b -I_4 X_m Y_n X_m'' Y_n dx dy, \quad m_{41} = m_{34} \\
m_{44} &= \int_0^a \int_0^b -I_1 X_m Y_n X_m Y_n dx dy + \int_0^a \int_0^b I_6 X_m Y_n X_m Y_n'' dx dy + \int_0^a \int_0^b I_6 X_m Y_n X_m'' Y_n dx dy
\end{aligned} \tag{2.35}$$

Pour obtenir les fréquences, on résout l'équation (2.36) suivante :

$$\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} m_{11} & 0 & m_{13} & m_{14} \\ 0 & m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{34} \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & m_{44} \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} U_{mn} \\ V_{mn} \\ W_{bmn} \\ W_{smn} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.36)$$

Modélisation par éléments finis

La méthode des éléments finis (FEM en anglais) est l'un des outils de mathématiques appliquées qui consiste à résoudre numériquement des équations aux dérivées partielles avec des conditions aux limites. Elle peut être considérée comme un cas particulier de la méthode de Ritz pour la résolution des équations de manière discrète et approchée. Tous les phénomènes physiques peuvent être décrits mathématiquement par un système d'équations aux dérivées partielles. En effet, la méthode des éléments finis est couramment utilisée dans plusieurs domaines tels que la mécanique du solide et du sol, acoustiques, thermodynamiques, ...etc. La discrétisation passe par une redéfinition de la géométrie en la décomposant en sous-domaines appelés « éléments ». Les connections des éléments se font en certains points d'attache appelés « nœuds ». La méthode des éléments finis est bien adaptée à l'analyse des structures tridimensionnelles complexes ayant des formes géométriques compliquées et sous différentes conditions aux limites en utilisant des logiciels de simulation tels que le code commercial Abaqus.

1.1. Logiciel Abaqus

Les logiciels de simulation par éléments finis tels que (Abaqus, Ansys...etc.) sont largement utilisés dans le domaine de la mécanique. C'est des outils numériques permettant de réaliser des expériences virtuelles en réduisant le temps et le coût de production. Le logiciel Abaqus comme d'autres logiciels de simulation possède certaines caractéristiques parmi lesquels : le traitement des géométries complexes, l'étude de phénomènes couplés, l'exploitation directe et rapide des résultats et une simplicité d'utilisation. Néanmoins, le temps de calcul important pour les modèles réels qui nécessite des ressources informatiques puissantes peuvent être des inconvénients qui peuvent gêner l'utilisateur.

Abaqus est composé de deux solveurs principaux :

Abaqus/Standard

Utilise un algorithme implicite adapté aux problèmes statiques

- Code général d'analyse par éléments finis (discrétisation spatiale)
- Résolution basée sur l'algorithme de Newton-Raphson et la méthode de Riks
- Problèmes linéaires et non linéaires
- Géométrie 1D, 2D, 3D et Axisymétrique
- Nombreuses procédures d'analyse dans le domaine temporel et fréquentiel

Abaqus/Explicit

Utilise un algorithme explicite « dynamique »

- Analyse non linéaire (discrétisation spatiale et temporelle)
- Problème transitoire et dynamique des structures
- Résolution basée sur la méthode explicite d'intégration en temps
- Possibilité d'analyses quasi-statiques où il existe un comportement non linéaire important.

1.2. Modèles numériques

Nous avons simulé le comportement vibratoire de plaques en matériaux composites à l'aide du logiciel commercial Abaqus en utilisant deux modèles : un modèle coque avec des éléments linéaires de type S4R et un modèle tridimensionnel à l'aide des éléments linéaires à 8 nœuds (C3D8R).

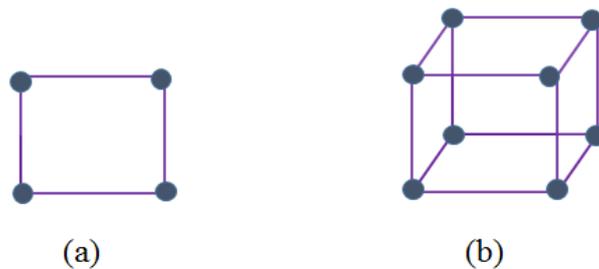


Figure 2. 2Types d'éléments utilisés : (a) élément coque S4R et (b) élément tridimensionnel C3D8R

1.2.1. Etude de l'effet du maillage

Dans la modélisation par éléments finis la taille d'éléments influe directement sur la précision des résultats, plus la taille d'éléments diminue plus la précision des résultats augmente et s'approche de la solution exacte. Néanmoins, le coût du calcul augmente. Pour effectuer un choix de maillage pertinent, il est important de comprendre comment les écarts diminuent lorsque la finesse du maillage augmente et comment choisir le type d'élément. En effet, pour simuler le comportement en vibration libre de plaques composites, nous avons utilisé deux modèles un modèle tridimensionnel et un modèle coque.

Afin d'étudier l'effet du maillage, nous avons analysé la fréquence fondamentale d'une plaque antisymétrique cross-ply $(0/90)_2$ avec $a/h=20$ et $a/b=1$. Pour le modèle coque, un élément linéaire de type S4R avec un maillage structuré $i \times j$ constitué d'éléments linéaires a été utilisé. La convergence des maillages du modèle est illustrée sur la figure 2.3. Le modèle converge vers une solution répétable avec un nombre croissant d'éléments. Nous avons choisi un maillage constitué de

40×40 éléments pour la suite des simulations, car le raffinement supplémentaire du maillage n'affecte pas les résultats.

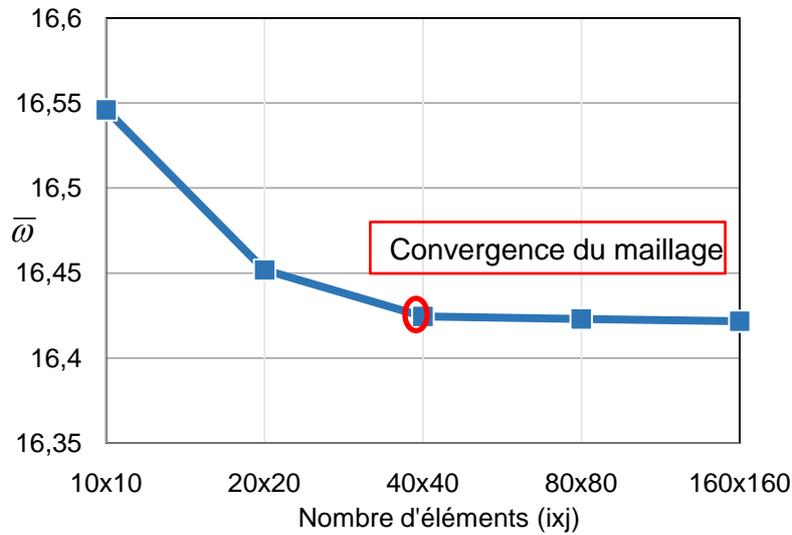


Figure 2. 3 Convergence de fréquence fondamentale d'une plaque antisymétrique cross-ply $(0/90)_2$ avec $a/h=20$ et $a/b=1$ en maillage coque

Le même exemple que précédemment a été analysé à l'aide d'un modèle tridimensionnel où nous avons utilisé un maillage structuré $ixj \times k$ constitué d'éléments linéaires à 8 nœuds (C3D8R). La convergence du maillage est illustrée sur la figure 2.4. Nous constatons qu'avec le raffinement du maillage, le modèle converge vers une solution répétable avec un nombre croissant d'éléments, et le raffinement supplémentaire du maillage n'affecte pas les résultats. Nous avons donc choisi un maillage constitué de $32 \times 32 \times 16$ éléments pour la suite des simulations.

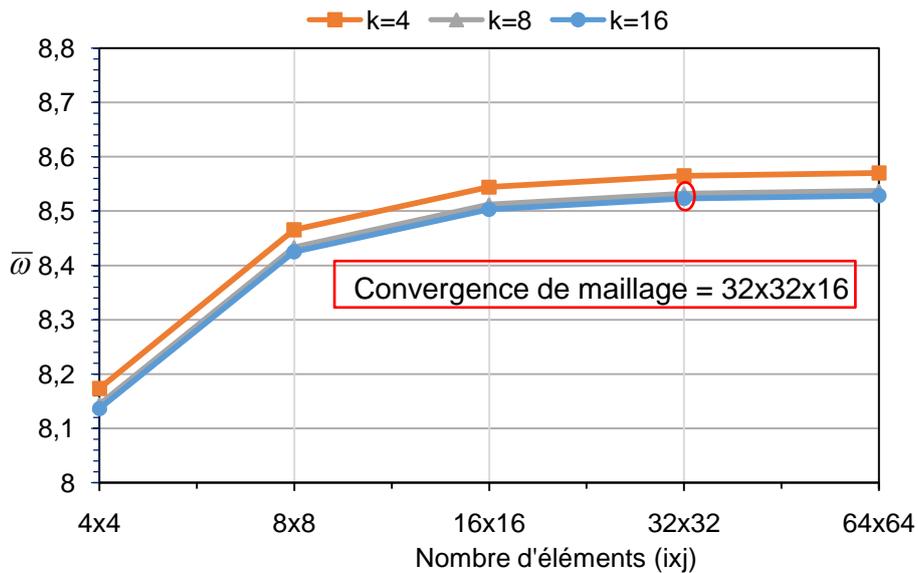


Figure 2. 4 Convergence de fréquence fondamentale d'une plaque 3D antisymétrique cross-ply $(0/90)_1$ avec $a/h=5$ et $a/b=1$

Les maillages éléments finis optimaux sont représentés sur la figure 2.5. L'organigramme de la figure 2.6 résume les procédures de calcul analytique et numérique des fréquences naturelles.

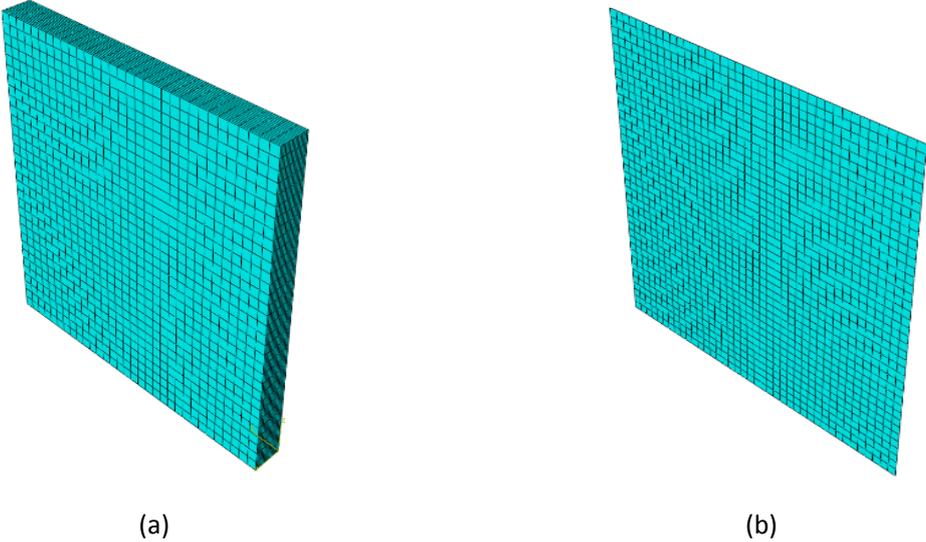


Figure 2. 5 Modèles EF utilisés : (a) modèle 3D et (b) modèle coque

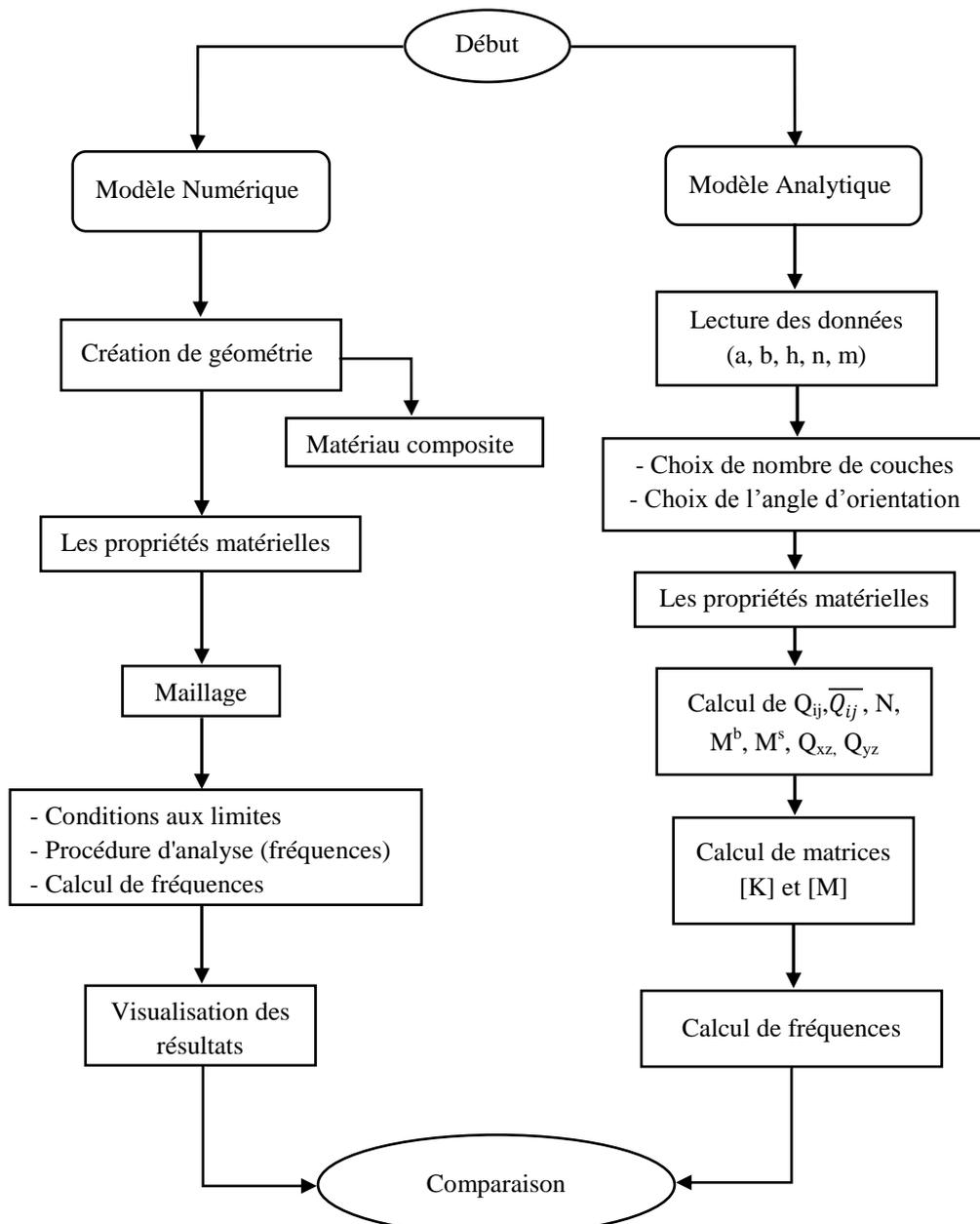


Figure 2. 6 Organigramme de calcul de fréquences naturelles

Résultats et discussions

Dans cette partie, nous allons d'abord présenter une validation du modèle proposé une théorie raffinée d'ordre élevée à quatre variables avec le modèle éléments finis les résultats des théories issues de la littérature. Ensuite, nous allons effectuer une étude paramétrique pour déterminer les différents paramètres qui influencent la stabilité des plaques stratifiées en matériaux composites. Nous avons choisi de présenter les résultats en quatre parties : la première partie est la validation de nos modèles avec des modèles existants dans la littérature. La deuxième partie est une étude de dimensionnement où on va analyser l'effet du rapport latéral sur l'épaisseur et du rapport longueur/largeur sur la variation des fréquences fondamentales non-dimensionnelles d'une plaque stratifiée simplement appuyée. Dans la troisième partie, nous allons étudier l'effet de l'orientation des fibres sur les fréquences naturelles. Quant à la dernière partie, elle sera consacrée à l'effet des conditions aux limites.

2.1. Validation des modèles

Afin de démontrer la validité de nos modèles, une comparaison avec d'autres modèles issues de la littérature : Reddy [25], Adim [26] et la solution exacte [24] a été réalisée. Pour analyser les vibrations libres de plaques composites stratifiées antisymétriques, les fréquences fondamentales sont obtenues en résolvant le système aux valeurs propres (2.38). Pour les simulations éléments finis, on ne pouvait pas utiliser un élément coque parce que le rapport latéral sur l'épaisseur du modèle est inférieur à 10%, $a/h=5$. Par conséquent, un modèle tridimensionnel constitué d'éléments linéaires à 8 nœuds (C3D8R) est utilisé pour analyser les fréquences fondamentales adimensionnelles dans cette partie. Les propriétés géométriques et mécaniques utilisées dans l'analyse par éléments finis sont les mêmes que celles utilisées dans la méthode analytique pour simuler le comportement en vibration libre de plaques composites.

La fréquence fondamentale adimensionnelle suivante est utilisée dans la présentation de nos résultats :

$$\bar{\omega} = \omega \frac{a^2}{h} \sqrt{\frac{\rho}{E_2}} \quad (2.39)$$

Pour valider nos modèles on utilise les constants matériaux suivants :

$$E_1/E_2 = \text{variable}, \quad E_3 = E_2, \quad G_{12} = G_{13} = 0.6E_2, \quad G_{23} = 0.5E_2, \quad \nu_{12} = \nu_{13} = \nu_{23} = 0.25 \quad (2.40)$$

Tableau 2.2 Fréquences naturelles adimensionnelle d'une plaque carrée stratifiée simplement appuyée $(0^\circ/90^\circ)_n$ avec différents rapports de module pour $a/h=5$.

Couches	Modèle	E_1/E_2				
		3	10	20	30	40
$(0^\circ/90^\circ)_1$	Exact [24]	6.2578	6.9845	7.6745	8.1763	8.5625
	Adim [26]	6.2168	6.9881	7.8198	8.5028	9.0841
	Reddy [25]	6.2169	6.9887	7.8210	8.5050	9.0871
	Modèle analytique	6.2188	6.9964	7.8379	8.5316	9.1236
	3D FEM	6.2251	6.9464	7.6319	8.1311	8.5159
$(0^\circ/90^\circ)_2$	Exact [24]	6.5455	8.1445	9.4055	10.1650	10.6790
	Adim [26]	6.5009	8.1958	9.6273	10.5359	11.1728
	Reddy [25]	6.5008	8.1954	9.6265	10.5348	11.1716
	Modèle analytique	6.5012	8.1929	9.6205	10.5268	11.1628
	3D FEM	6.4981	8.0855	9.3381	10.0927	10.6041
$(0^\circ/90^\circ)_3$	Exact [24]	6.6100	8.4143	9.8398	10.6950	11.2720
	Adim [26]	6.5558	8.4053	9.9182	10.8546	11.5009
	Reddy [25]	6.5558	8.4052	9.9181	10.8547	11.5012
	Modèle analytique	6.5567	8.4065	9.9210	10.8603	11.5102
	3D FEM	6.5578	8.3482	9.7631	10.6132	11.1865
$(0^\circ/90^\circ)_5$	Exact [24]	6.6458	8.5625	10.0843	11.0027	11.6245
	Adim [26]	6.5842	8.5126	10.0671	11.0191	11.6721
	Reddy [25]	6.5842	8.5126	10.0674	11.0197	11.6730
	Modèle analytique	6.5854	8.5156	10.0740	11.0309	11.6893
	3D FEM	6.5911	8.4924	10.0019	10.9133	11.5303

Le tableau 2.2 résume tous les résultats obtenus pour les fréquences fondamentales de différents stratifiés carrés à couches croisées antisymétriques $(0/90)_{n=1,5}$ pour divers rapports de module avec $a/h=5$. Les résultats obtenus sont comparés aux solutions exactes obtenues par Noor [24] et à d'autres résultats analytiques obtenus par Reddy [25] et Adim et al. [26]. Les résultats obtenus par la théorie raffinée sont comparables à ceux obtenus par les autres théories. En effet, l'écart maximum observé est inférieur à 6%.

A l'aide de la figure 2.7 montrant la variation des fréquences fondamentales d'un stratifié carré à couches croisées antisymétriques $(0/90)_1$ pour divers rapports de module avec $a/h=5$, nous constatons que le modèle numérique qui prend en considération la déformation selon l'axe z est quasiment confondu avec la solution exacte. Le modèle éléments finis (MEF) sera utilisé par la suite comme solution de référence. D'autre part, l'augmentation du rapport E_1/E_2 conduit à l'augmentation de la rigidité dans la direction longitudinale. Il est clair que le rapport du module et la séquence d'empilement ont un impact très important sur le comportement en vibrations des plaques composites.

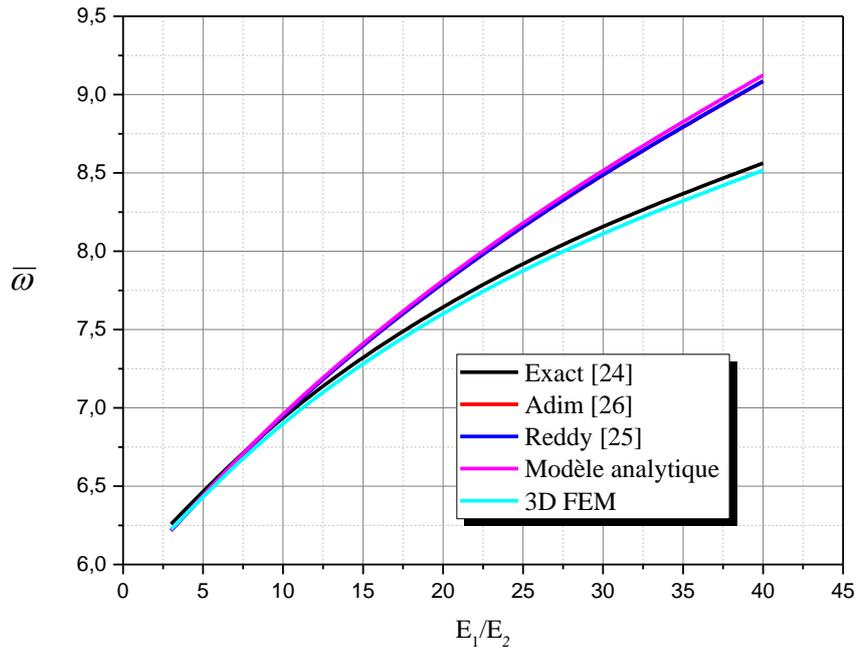


Figure 2.7 Validation des modèles analytique et numérique

2.2. Effet des dimensions de la plaque sur les fréquences propres

Les tableaux 2.3 et 2.4 donnent la variation des fréquences naturelles adimensionnelles pour une plaque cross-ply simplement appuyée en matériau composite pour différents nombre de couches et un rapport de module égal à 40 en fonction du rapport dimension latérale sur épaisseur a/h et du rapport longueur/largeur respectivement. Nos résultats sont comparés aux résultats analytiques de Reddy [25] et Karama [16]. Les résultats obtenus par notre théorie de déformation en cisaillement à quatre variables et par le modèle éléments finis sont comparables à ceux de la littérature avec un écart maximum inférieur à 4%. Ces résultats montrent que :

- Les fréquences naturelles adimensionnelles augmentent avec l'augmentation du rapport dimension latérale sur épaisseur a/h ce qui signifie que les plaques minces sont moins stables que les plaques épaisses.
- La géométrie de la plaque a un impact très important sur la stabilité, car les fréquences naturelles adimensionnelles augmentent avec l'augmentation du rapport longueur/largeur.
- Les fréquences adimensionnelles augmentent avec le nombre de couches, la plaque devient plus stable lorsque le nombre de couches augmente.

La figure 2.8 montre l'effet du rapport dimension latérale sur épaisseur a/h sur la variation des fréquences naturelles adimensionnelles d'une plaque $(0/90)_1$ simplement appuyée. Les fréquences adimensionnelles varient beaucoup jusqu'à un rapport $a/h=40$ et se stabilisent ensuite. La figure 2.9 montre l'évolution des fréquences naturelles adimensionnelles pour une plaque $(0/90)_2$ simplement

appuyée avec la variation des rapports a/b et a/h . Les résultats analytiques sont très proches des résultats numériques et les fréquences dimensionnelles augmentent avec le rapport a/b .

Tableau 2.3 Effet de la séquence d'empilement et du rapport dimension latérale sur épaisseur a/h sur la variation des fréquences naturelles d'une plaque carrée stratifiée simplement appuyée $(0^\circ/90^\circ)_n$.

Nombre de plis	Théorie	a/h			
		10	20	50	100
$(0^\circ/90^\circ)_1$	Reddy [25]	10.5680	11.1052	11.2751	11.3002
	Karama [16]	10.5964	11.1132	11.2764	11.3005
	Modèle analytique	10.5811	11.1088	11.2757	11.3003
	Shell FEM	10.2523	11.0140	11.2644	11.3018
$(0^\circ/90^\circ)_2$	Reddy [25]	14.8463	16.5733	17.1849	17.2784
	Karama [16]	14.8338	16.5683	17.1840	17.2781
	Modèle analytique	14.8376	16.5700	17.1843	17.2782
	Shell FEM	14.4256	16.4293	17.1661	17.2803
$(0^\circ/90^\circ)_3$	Reddy [25]	15.4632	17.3772	18.0644	18.1698
	Karama [16]	15.4702	17.3787	18.0646	18.1699
	Modèle analytique	15.4638	17.3768	18.0643	18.1698
	Shell FEM	15.2537	17.3089	18.0599	18.1757
$(0^\circ/90^\circ)_5$	Reddy [25]	15.7700	17.7743	18.4984	18.6097
	Karama [16]	15.7847	17.7784	18.4991	18.6099
	Modèle analytique	15.7739	17.7751	18.4985	18.6097
	Shell FEM	15.6790	17.7500	18.5020	18.6178

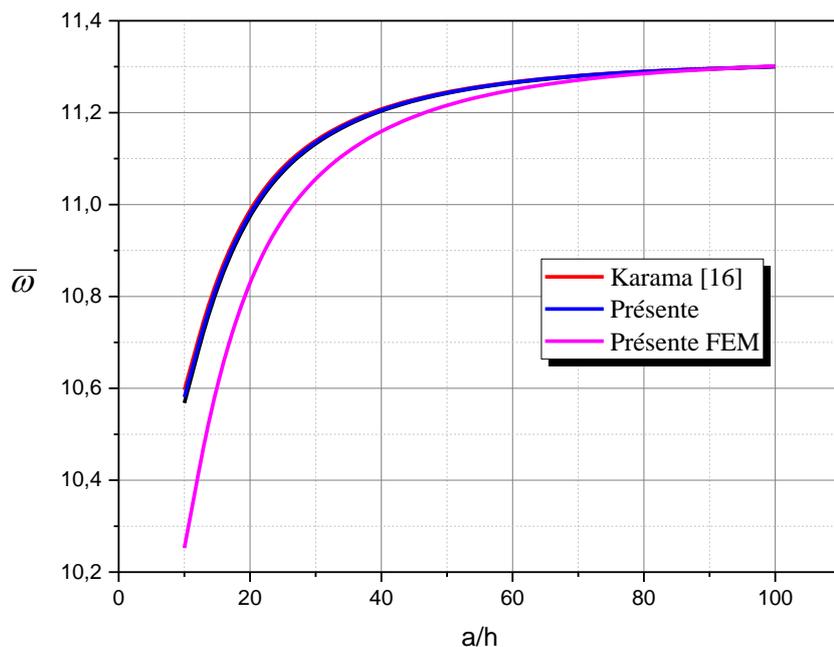


Figure 2. 8 Effet du rapport dimension latérale sur épaisseur a/h sur la variation des fréquences naturelles d'une plaque $(0/90)_1$ simplement appuyée

Tableau 2.4 Fréquences naturelles adimensionnelles pour une plaque $(0/90)_2$ simplement appuyée pour différents rapports a/b et a/h

a/h	Théorie	a/b				
		0.6	0.8	1	1.2	1.6
10	Modèle analytique	11.1720	12.5213	14.6550	17.5174	24.7267
	Shell FEM	10.9170	12.3056	14.4212	17.1455	23.7781
	Erreur %	2.3358	1.7528	1.6212	2.1691	3.9894
20	Modèle analytique	12.3418	13.9007	16.5047	20.1826	30.2675
	Shell FEM	12.2515	13.8255	16.4230	20.0371	29.7911
	Erreur %	0.7370	0.5439	0.4975	0.7262	1.2991
50	Modèle analytique	12.7459	14.3829	17.1725	21.1950	32.6888
	Shell FEM	12.7312	14.3704	17.1596	21.1707	32.5972
	Erreur %	0.1155	0.0870	0.07518	0.1148	0.2810
100	Modèle analytique	12.8071	14.4562	17.2752	21.3534	33.0876
	Shell FEM	12.8048	14.4545	17.2736	21.3499	33.0727
	Erreur %	0.0179	0.0117	0.0093	0.0164	0.0450

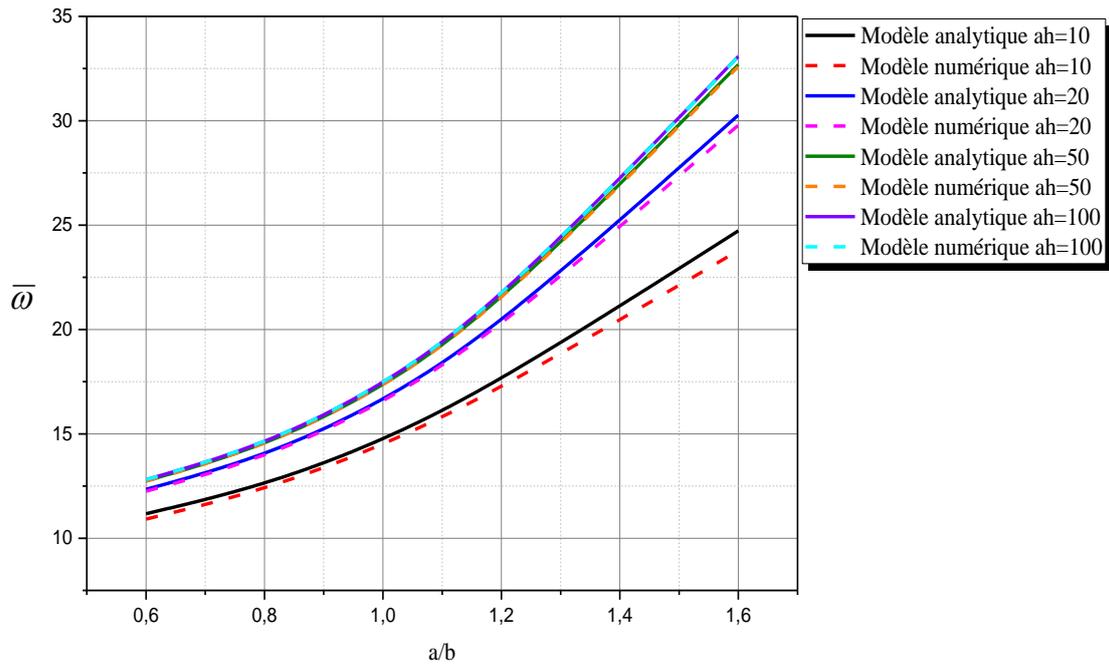


Figure 2. Evolution des fréquences naturelles adimensionnelles pour une plaque $(0/90)_2$ simplement appuyée avec la variation des rapports a/b et a/h

Tableau 2.4 Fréquences naturelles adimensionnelles pour une plaque $(0/90)_2$ simplement appuyée pour différents rapports a/b et a/h

a/h	Théorie	a/b				
		0.6	0.8	1	1.2	1.6
10	Modèle analytique	0.6	0.8	1	1.2	1.6
	Shell FEM	11.1720	12.5213	14.6550	17.5174	24.7267
	Erreur %	10.9170	12.3056	14.4212	17.1455	23.7781
20	Modèle analytique	2.3358	1.7528	1.6212	2.1691	3.9894
	Shell FEM	12.3418	13.9007	16.5047	20.1826	30.2675
	Erreur %	12.2515	13.8255	16.4230	20.0371	29.7911
50	Modèle analytique	0.7370	0.5439	0.4975	0.7262	1.2991
	Shell FEM	12.7459	14.3829	17.1725	21.1950	32.6888
	Erreur %	12.7312	14.3704	17.1596	21.1707	32.5972
100	Modèle analytique	0.1155	0.0870	0.07518	0.1148	0.2810
	Shell FEM	12.8071	14.4562	17.2752	21.3534	33.0876
	Erreur %	12.8048	14.4545	17.2736	21.3499	33.0727

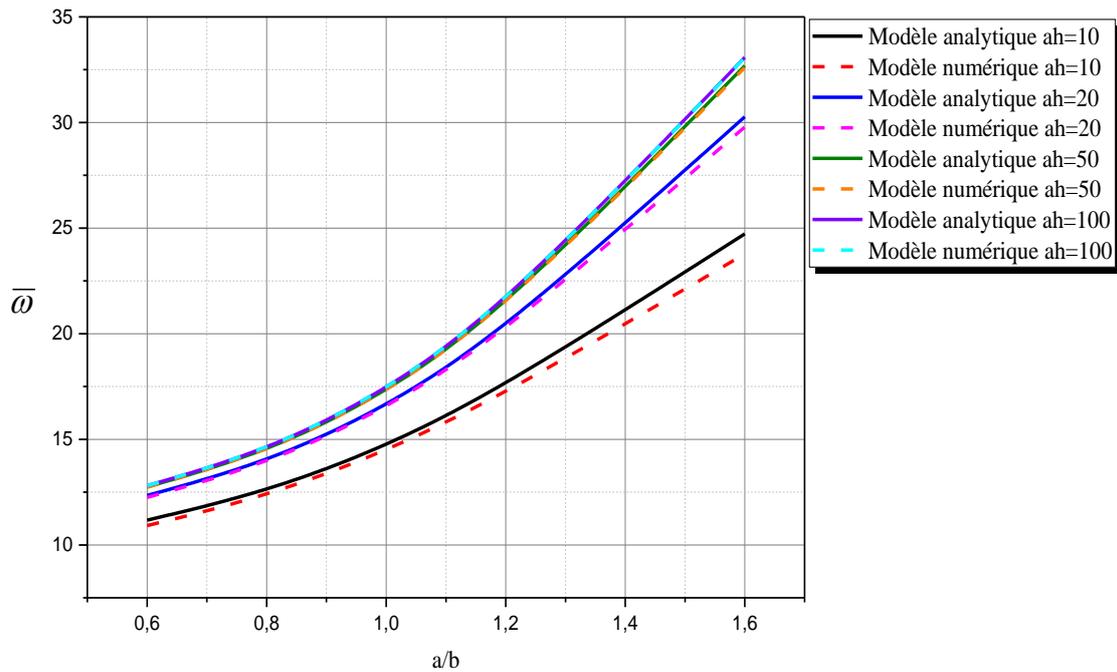


Figure 2. 10 Evolution des fréquences naturelles adimensionnelles pour une plaque $(0/90)_2$ simplement appuyée avec la variation des rapports a/b et a/h

2.3. Effet de l'orientation des fibres sur les fréquences propres

Les effets de la séquence d'empilement sur la variation des fréquences naturelles d'une plaque carrée stratifiée alternée $(45^\circ/-45^\circ)_n$ simplement appuyée sont résumés dans le tableau 2.5 en fonction du rapport a/h . Les résultats analytique et numérique sont comparés aux résultats obtenus par Reddy [25] et Swaminathan [29]. La figure 2.11 illustre le cas particulier d'une plaque carrée stratifiée alternée $(45/-45)_2$ et qui montre que les fréquences adimensionnelles varient beaucoup avec le rapport a/h jusqu'à un rapport $a/h=40$ et se stabilisent ensuite.

La comparaison des fréquences naturelles adimensionnelles d'une plaque carrée stratifiée simplement appuyée avec différentes orientations des fibres entre la solution analytique et la solution numérique est donnée dans le tableau 2.6. L'écart maximum entre les 2 solutions n'excède pas les 10% et est maximale pour le rapport $a/h=10$ car les effets du cisaillement transverse sont plus importants pour les coques épaisses. Les résultats sont également représentés sous forme graphique sur la figure 2.12 montrant l'influence de l'angle d'orientation du renfort sur les valeurs des fréquences naturelles. La fréquence naturelle adimensionnelle augmente avec l'augmentation de l'angle d'orientation du renfort car la rigidité de la plaque augmente.

Tableau 2.5 Effet de la séquence d'empilement sur la variation des fréquences naturelles d'une plaque carrée stratifiée alternée $(45^\circ/-45^\circ)_n$ simplement appuyée

Nombre de plis	Théorie	a/h			
		10	20	50	100
$(45^\circ/-45^\circ)_1$	Reddy [25]	13.2630	14.2463	14.5723	14.6214
	Swaminathan [29]	12.9115	14.1705	14.6012	14.6668
	Modèle analytique	13.2931	14.2553	14.5739	14.6215
	Shell FEM	12.5620	14.4801	15.0377	15.9747
$(45^\circ/-45^\circ)_2$	Reddy [25]	18.3221	21.8063	23.2236	23.4507
	Swaminathan [29]	17.8773	21.6229	23.1949	23.4499
	Modèle analytique	18.3063	21.7982	23.2220	23.4503
	Shell FEM	17.4880	21.9710	24.0247	24.3692
$(45^\circ/-45^\circ)_4$	Reddy [25]	19.2659	23.2388	24.9046	25.1744
	Swaminathan [29]	19.1258	23.1829	24.8959	25.1741
	Modèle analytique	19.2744	23.2401	24.9047	25.1745
	Shell FEM	19.0412	23.2905	25.1142	25.4121

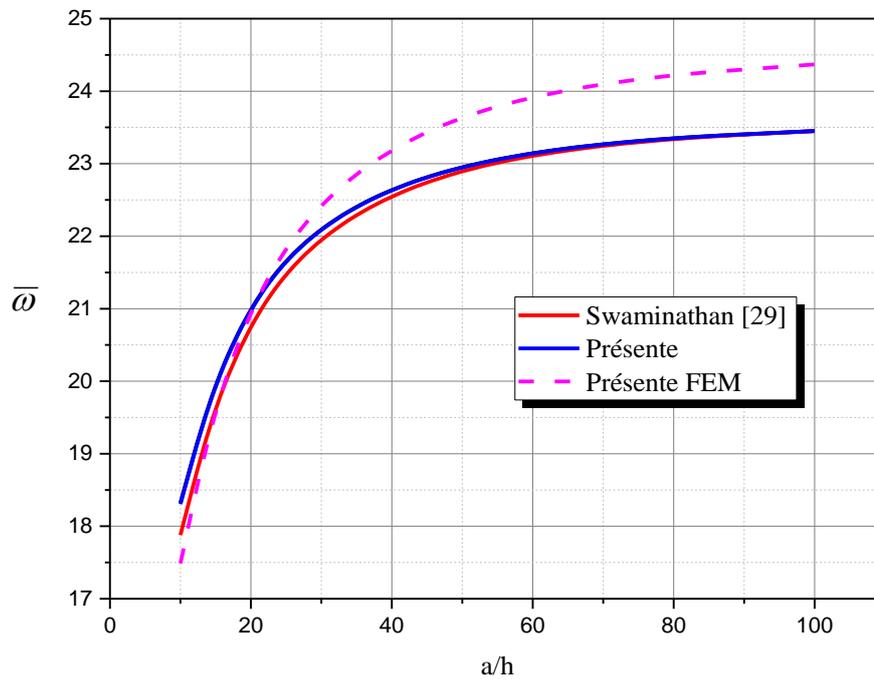


Figure 2. 11 Effet du rapport dimension latérale sur épaisseur a/h sur la variation des fréquences naturelles d'une plaque carrée stratifiée alternée $(45/-45)_2$ simplement appuyée

Tableau 2.6 Comparaison des fréquences naturelles adimensionnelles d'une plaque carrée stratifiée simplement appuyée avec différentes orientations des fibres.

Orientation des plis	Théorie	a/h			
		10	20	50	100
$(5^\circ/-5^\circ)_3$	Modèle analytique	15.9885	18.0784	18.8395	18.9568
	Shell FEM	14.5964	17.5464	18.7827	18.9827
	Erreur %	9.5373	3.0319	0.3024	-0.1364
$(30^\circ/-30^\circ)_3$	Modèle analytique	18.3375	21.7187	23.0800	23.2987
	Shell FEM	17.6740	21.6518	23.3730	23.6551
	Erreur %	3.7541	0.3090	-1.2536	-1.5066
$(45^\circ/-45^\circ)_3$	Modèle analytique	19.0277	22.8759	24.4798	24.7391
	Shell FEM	18.6592	22.9688	24.8444	25.1529
	Erreur %	1.9749	-0.4045	-1.4675	-1.6451
$(0^\circ/90^\circ)_3$	Modèle analytique	15.4633	17.3768	18.0643	18.1698
	Shell FEM	15.2536	17.3089	18.0599	18.1757
	Erreur %	1.3747	0.3923	0.0244	-0.0325

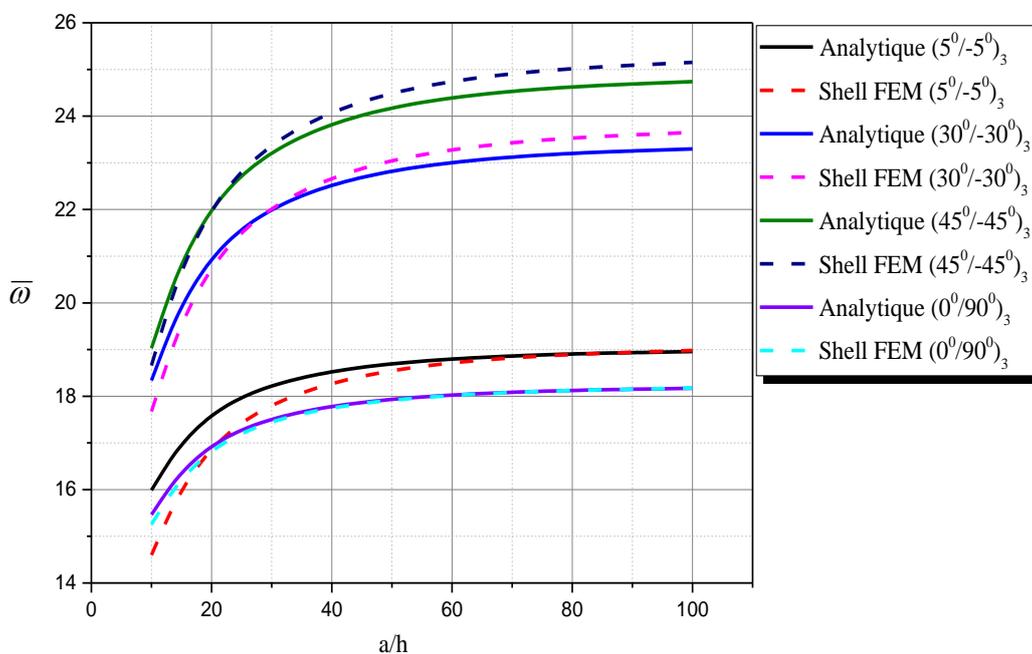


Figure 2. 12 Effet de l'orientation de fibres sur la variation des fréquences naturelles d'une plaque carrée stratifiée simplement appuyée

2.4. Effet des conditions aux sur les fréquences propres

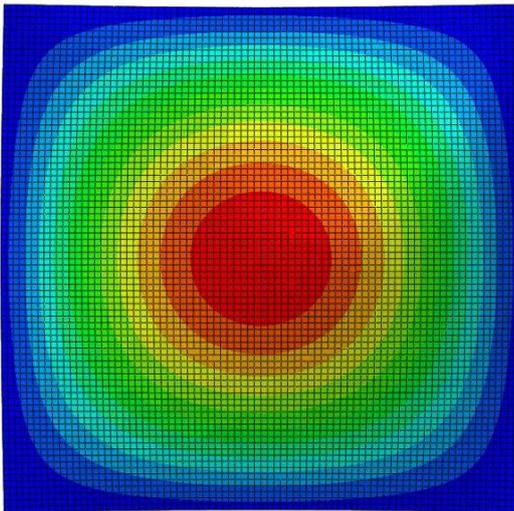
Les fréquences naturelles en mode 1 d'une plaque stratifiée antisymétrique à couches croisées en matériaux composite sous différentes conditions aux limites en fonction du rapport latéral sur épaisseur a/h sont présentées dans le tableau 2.7.

Tableau 2.7 Fréquences fondamentales d'une plaque carrée stratifiée pour différentes valeurs du rapport a/h sous différentes conditions aux limites

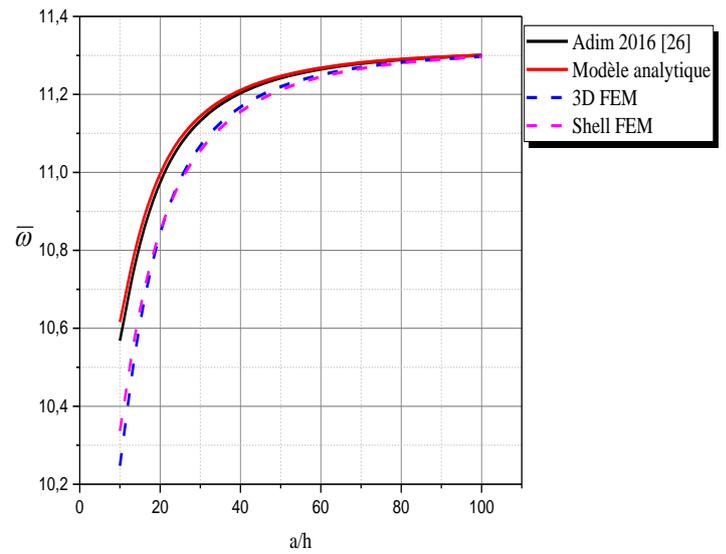
Couches	a/h	Théorie	Conditions aux limites		
			SSSS	CCSS	CCCC
(0/90) ₁	10	Adim 2016 [26]	10.5680	16.7080	20.5334
		Modèle analytique	10.6164	16.8898	20.8400
		3D FEM	10.2472	14.6323	17.9423
		Shell FEM	10.3365	14.3257	17.5049
	20	Adim 2016 [26]	11.1052	18.4273	23.3691
		Modèle analytique	11.1188	18.4853	23.4745
		3D FEM	11.0370	17.3592	21.9308
		Shell FEM	11.0096	17.2599	21.7838
	50	Adim 2016 [26]	11.2751	19.0320	24.4398
		Modèle analytique	11.2773	19.0420	24.4586
		3D FEM	11.2636	18.5627	23.7303
		Shell FEM	11.2600	18.5515	23.7124
	100	Adim 2016 [26]	11.3007	19.1267	24.6117
		Modèle analytique	11.3002	19.1242	24.6070
		3D FEM	11.2972	18.7630	24.0329
		Shell FEM	11.2975	18.7648	24.0347
(0/90) ₂	10	Adim 2016 [26]	15.4632	22.5695	26.3983
		Modèle analytique	15.4885	22.6697	26.5726
		3D FEM	15.2751	19.7506	23.4300
		Shell FEM	15.2493	19.5922	23.1887
	20	Adim 2016 [26]	17.3772	28.4105	35.1953
		Modèle analytique	17.3840	28.4393	35.2480
		3D FEM	17.3152	26.3303	33.1953
		Shell FEM	17.3026	26.2449	32.9779
	50	Adim 2016 [26]	18.0644	31.1191	39.9079
		Modèle analytique	18.0655	31.1240	39.9171
		3D FEM	18.1990	30.4203	38.9243
		Shell FEM	18.0530	30.2148	38.7421
	100	Adim 2016 [26]	18.1698	31.5756	40.7546
		Modèle analytique	18.1701	31.5768	40.7569
		3D FEM	19.2623	31.7414	40.5844
		Shell FEM	18.1687	30.9692	39.8703

Les figures 2.13 à 2.15 montrent la déformée modale et la variation des fréquences naturelles adimensionnelles en fonction du rapport a/h pour les conditions aux limites SSSS, CCCC et CCSS

respectivement. L'écart entre les résultats obtenus par la méthode des éléments finis et le modèle analytique pour les plaques simplement appuyées est plus faible que pour les plaques encastées et sous conditions mixtes CCSS. Les fréquences naturelles sont maximales pour les conditions (CCCC) et minimales pour la condition (SSSS) ce qui signifie que les plaques encastées sont plus stables que les plaques simplement appuyées.

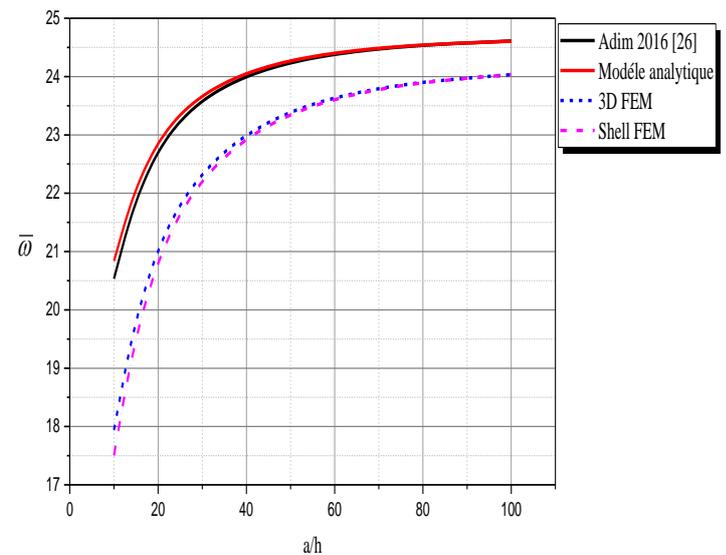
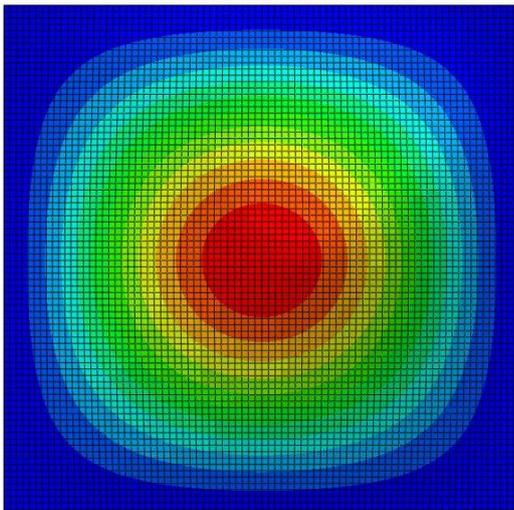


SSSS



SSSS

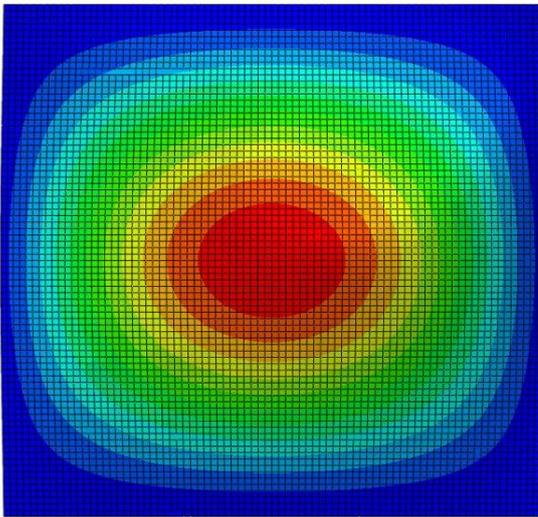
Figure 2. 13 Mode 1 et fréquences naturelles d'une plaque carrée stratifiée SSSS en fonction de a/h



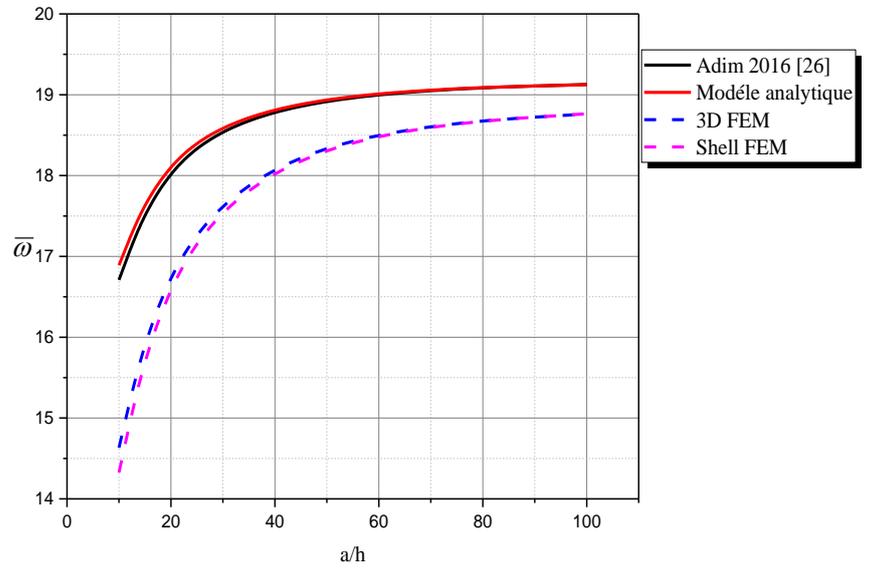
CCCC

CCCC

Figure 2. 14 Mode 1 et fréquences naturelles d'une plaque carrée stratifiée CCCC en fonction de a/h



CCSS



CCSS

Figure 2. 15 Mode 1 et fréquences naturelles d'une plaque carrée stratifiée CCSS en fonction de a/h

Conclusion

Dans ce chapitre, une théorie d'ordre élevé raffinée à quatre variables et des simulations par éléments finis ont été utilisées avec succès pour analyser le comportement vibratoire de plaques stratifiées antisymétriques en matériaux composites sous différentes conditions aux limites. La théorie raffinée d'ordre élevée prend en considération l'effet de cisaillement lors du calcul des déformations sans besoin de facteurs de correction de cisaillement. Les équations du mouvement ont été développées en utilisant le principe d'Hamilton. Pour simuler le comportement en vibration libre de plaques composites nous avons utilisé deux modèles, un modèle tridimensionnel et un modèle coque en utilisant Abaqus. Les fréquences naturelles prédites par la présente théorie sont comparables à celles obtenues par les simulations MEF. L'étude paramétrique, nous permet de tirer les conclusions suivantes :

- L'augmentation du rapport des modules conduit à l'augmentation de la rigidité de la plaque.
- Les fréquences naturelles adimensionnelles augmentent avec l'augmentation du rapport dimension latéral/épaisseur indiquant que les plaques minces sont moins stables que les plaques épaisses.
- La géométrie de la plaque a un impact très important sur la stabilité.
- Les fréquences adimensionnelles augmentent avec le nombre de couches, la plaque devient stable lorsque le nombre de couches augmente.
- L'angle d'orientation du renfort influe d'une façon directe sur le comportement de la plaque.
- Les conditions aux limites ont un impact très important sur la stabilité de la plaque : une plaque avec les conditions CCCC est plus stable qu'une plaque avec les conditions CCSS qui est plus stable qu'une plaque avec les conditions SSSS.

CHAPITRE III
ANALYSE ET MODELISATION DU COMPORTEMENT
DYNAMIQUE DES PLAQUES COMPOSITES A FIBRES HYBRIDES

RESUME DU CHAPITRE

Les matériaux composites sont souvent renforcés par des fibres synthétiques telles que la fibre de Verre, de Carbone et de Kevlar, ces matériaux sont utilisés dans tous les domaines industriels grâce à leurs propriétés mécaniques élevées. Néanmoins, leur coût et l'impact sur l'environnement restent parmi les principaux inconvénients.

Afin d'améliorer le comportement du composite, des chercheurs ont suggéré l'hybridation des fibres. En effet, nous étudions dans ce chapitre le comportement mécanique de plaques composites à fibres hybrides en utilisant la théorie d'ordre élevé et la méthode des éléments finis. Nous présentons une hybridation intrafils qui consiste à combiner les fibres (Carbone, Verre et Kevlar) en utilisant la loi des mélanges, et une hybridation intercouche (couche par couche) à l'aide du code Abaqus. Ensuite, nous étudions les effets du rapport dimension latérale sur l'épaisseur, du rapport longueur/largeur, de l'hybridation et de la séquence d'empilement sur les fréquences fondamentales de plaques composites hybrides sous différentes conditions aux limites.

Comme il n'y a aucune donnée disponible dans la littérature pour les plaques composites hybrides, la solution en éléments finis est utilisée pour valider les résultats obtenus par la théorie d'ordre élevé.

Hybridation Intrafils

L'hybridation intrafils consiste à combiner les fibres dans la même couche, un modèle analytique est présenté en utilisant la théorie de cisaillement d'ordre élevé de plaques. Dans un premier temps, les propriétés élastiques de la plaque hybride sont obtenues en utilisant la loi des mélanges. Ensuite, l'équation du mouvement de la plaque stratifiée est obtenue en utilisant le principe d'Hamilton. Les expressions mathématiques sont obtenues à l'aide de la solution de Navier pour différentes conditions aux limites. D'autre part, un modèle en éléments finis est utilisé pour valider les résultats obtenus par la présente théorie afin d'étudier le comportement du composite hybride sous différents types de sollicitations.

0.1. Propriétés matérielles des composites hybrides

Dans cette étude, on considère une plaque composite stratifiée à fibres hybrides, dans laquelle les couches peuvent contenir deux types de fibres : Carbone/Verre, Carbone/Kevlar et Kevlar/Verre. Les propriétés mécaniques de ces matériaux dépendent des propriétés des fibres et de la matrice, dont les quantités dans les matériaux composites sont spécifiées par des fractions volumiques. Le système de coordonnées de la plaque est illustré sur la figure 3.1.

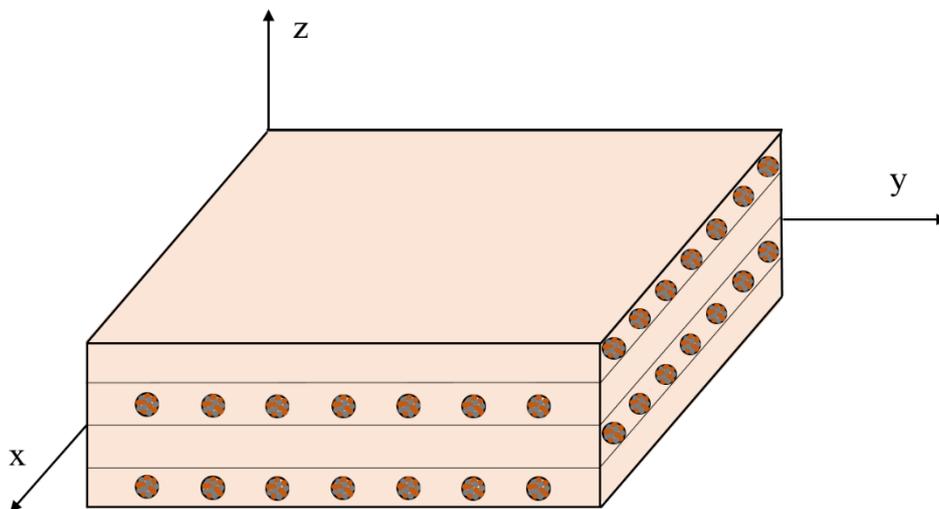


Figure 3. 1 Système de coordonnées utilisées pour une plaque hybride intrafils

Le module longitudinal du composite E_1 est donné par l'équation suivante en utilisant la loi des mélanges [100] :

$$E_1 = E_f^{(1)}V_f^{(1)} + E_f^{(2)}V_f^{(2)} + E_m V_m \quad (3.1)$$

Où $E_f^{(1)}$, $E_f^{(2)}$ et E_m sont les modules de Young de la fibre 1, de la fibre 2 et de la matrice respectivement, $V_f^{(1)}$, $V_f^{(2)}$ et V_m sont les fractions volumiques de la fibre 1, de la fibre 2 et de la matrice respectivement. Ces fractions volumiques vérifient les relations suivantes :

$$V_f^{(1)} + V_f^{(2)} + V_m = 1 \quad (3.2)$$

$$V_f = V_f^{(1)} + V_f^{(2)} \quad (3.3)$$

Où V_f est la fraction volumique totale de la fibre.

D'autre part, les fractions volumiques normalisées de fibres sont définies comme suit :

$$w_f^{(1)} = \frac{V_f^{(1)}}{V_f}, \quad w_f^{(2)} = \frac{V_f^{(2)}}{V_f} \quad (3.4)$$

D'où :

$$E_1 = V_f \left[E_f^{(1)} w_f^{(1)} + E_f^{(2)} (1 - w_f^{(1)}) \right] + E_m (1 - V_f) \quad (3.5)$$

Le coefficient de Poisson dans le plan du composite stratifié hybride ν_{12} peut être calculé comme suit :

$$\nu_{12} = V_f \left[\nu_f^{(1)} w_f^{(1)} + \nu_f^{(2)} (1 - w_f^{(1)}) \right] + \nu_m (1 - V_f) \quad (3.6)$$

Où $\nu_f^{(1)}$ et $\nu_f^{(2)}$ sont les coefficients de Poisson du premier et du deuxième type de fibres respectivement, ν_m est le coefficient de Poisson de la matrice.

Les modules de cisaillement des fibres et de la matrice sont donnés par :

$$G_f^{(1)} = \frac{E_f^{(1)}}{2(1+\nu_f^{(1)})}, \quad G_f^{(2)} = \frac{E_f^{(2)}}{2(1+\nu_f^{(2)})}, \quad G_m = \frac{E_m}{2(1+\nu_m)} \quad (3.7)$$

Où $G_f^{(1)}$ et $G_f^{(2)}$ sont les modules de cisaillement du premier et du deuxième type de fibres

respectivement, G_m est le module de cisaillement de la matrice.

Le module de cisaillement total des fibres est donné par :

$$G_f = G V_f^{(1)} w_f + G_f^{(2)} (1 - w_f) \quad (3.8)$$

Les modules de compressibilité des fibres et de la matrice sont donnés par :

$$k_f = \frac{E_f^{(1)} w_f}{3(1 - 2\nu_f^{(1)})} + \frac{E_f^{(2)} w_f}{3(1 - 2\nu_f^{(2)})}, \quad k_m = \frac{E_m}{3(1 - 2\nu_m)} \quad (3.9)$$

Les modules de compressibilité latéraux des fibres et de la matrice sont donnés respectivement par :

$$K_f = k_f + \frac{G_f}{3}, \quad K_m = k_m + \frac{G_m}{3} \quad (3.10)$$

Les modules de cisaillement dans le plan et hors du plan de la plaque composite sont donnés par :

$$\left\{ \begin{array}{l} G_{12} = G_{13} = G_m \frac{G_f (1 + V_f) + G_m (1 - V_f)}{G_f (1 - V_f) + G_m (1 + V_f)} \\ G_{23} = G_m \left(1 + \frac{V_f}{\frac{G_m}{G_f - G_m} + (1 - V_f) \frac{k_m + \frac{7}{3} G_m}{2k_m + \frac{8}{3} G_m}} \right) \end{array} \right. \quad (3.11)$$

Le module de compressibilité latéral total de la plaque composite hybride est donné par :

$$K_L = K_m + \frac{V_f}{\frac{1}{k_f - k_m + \frac{1}{3}(G_f - G_m)} + \frac{1 - V_f}{k_m + \frac{4}{3} G_m}} \quad (3.12)$$

Enfin, le module de Young transversal total de la plaque composite hybride est donné par :

$$E_2 = \frac{2}{\frac{1}{2K_L} + \frac{1}{2G_{23}} \frac{2(\nu_{12})^2}{E_1}} \quad (3.13)$$

0.2. Formulation de la théorie raffinée pour les plaques stratifiées à fibres hybrides

0.2.1. Cinématique

Le champ de déplacement de la théorie des plaques raffinée est donné par :

$$\begin{cases} u(x, y, z, t) = u_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_b}{\partial x} - f(z) \frac{\partial w_s}{\partial x} \\ v(x, y, z, t) = v_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_b}{\partial y} - f(z) \frac{\partial w_s}{\partial y} \\ w(x, y, z, t) = w_b(x, y, t) + w_s(x, y, t) \end{cases} \quad (3.14)$$

Où

$$f(z) = \left(z - ze^{-\frac{2z^2}{h^2}} \right) \quad (3.15)$$

Les déformations sont calculées en dérivants l'équation (2.5a) :

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \varepsilon_x^0 + zk_x^b + fk_x^s \\ \varepsilon_y &= \varepsilon_y^0 + zk_y^b + fk_y^s \\ \gamma_{xy} &= \gamma_{xy}^0 + zk_{xy}^b + fk_{xy}^s \\ \gamma_{yz} &= g\gamma_{yz}^s \\ \gamma_{xz} &= g\gamma_{xz}^s \\ \varepsilon_z &= 0 \end{aligned} \quad (3.16a)$$

Où :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} k_x^b \\ k_y^b \\ k_{xy}^b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w_b}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} k_x^s \\ k_y^s \\ k_{xy}^s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w_s}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^s \\ \gamma_{xz}^s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial w_s}{\partial y} \\ \frac{\partial w_s}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (3.16b)$$

Avec l'hypothèse que chaque couche possède un plan de symétrie élastique parallèle au plan (x, y), les équations constitutives pour une couche peuvent être écrites comme suit :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \quad (3.17a)$$

Q_{ij} sont les rigidités définies en termes de constantes d'ingénierie dans les axes de la couche :

$$Q_{11} = \frac{E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}}, Q_{12} = \frac{\nu_{12}E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}}, Q_{22} = \frac{E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}}, Q_{66} = G_{12}, Q_{44} = G_{23}, Q_{55} = G_{13} \quad (3.17b)$$

Comme le stratifié est composé de plusieurs couches orthotropes orientées par rapport aux coordonnées principales du stratifié, les équations constitutives de chaque couche doivent être transformées en coordonnées du stratifié (x, y).

Les relations contrainte-déformation dans les coordonnées du stratifié de la $k^{\text{ième}}$ couche sont données par :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \end{Bmatrix}^{(k)} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} & 0 & 0 \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} & 0 & 0 \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{Q}_{44} & \bar{Q}_{45} \\ 0 & 0 & 0 & \bar{Q}_{45} & \bar{Q}_{55} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix}^{(k)} \quad (3.18)$$

Les équations de mouvement sont obtenues en utilisant le principe d'Hamilton :

$$\int_0^t \delta(U + V - T) dt = 0 \quad (3.19)$$

Où U est l'énergie de déformation de la plaque dont la variation est donnée par :

$$\delta U = \int_V \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV = \int_V (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \sigma_{xy} \delta \gamma_{xy} + \sigma_{yz} \delta \gamma_{yz} + \sigma_{xz} \delta \gamma_{xz}) dV \quad (3.20)$$

Et T est l'énergie cinétique de la plaque dont la variation est donnée par :

$$\delta T = \int_0^t \int_V \rho (\ddot{u} \delta u + \ddot{v} \delta v + \ddot{w} \delta w) dV dt = \int_V \rho (\ddot{u} \delta u + \ddot{v} \delta v + \ddot{w} \delta w) dV \quad (3.21)$$

En substituant les équations (3.16) à (3.18) dans l'équation (3.19) et en intégrant suivant l'épaisseur de la plaque, la variation de l'énergie de déformation de la plaque s'écrit :

$$\delta U = \int_A (N_x \delta \varepsilon_x^0 + N_y \delta \varepsilon_y^0 + N_{xy} \delta \gamma_{xy}^0 + M_x^b \delta k_x^b + M_y^b \delta k_y^b + M_{xy}^b \delta k_{xy}^b + M_x^s \delta k_x^s + M_y^s \delta k_y^s + M_{xy}^s \delta k_{xy}^s + Q_{yz}^s \delta \gamma_{yz}^s + Q_{xz}^s \delta \gamma_{xz}^s) dx dy = 0 \quad (3.22)$$

La solution exacte des équations pour les plaques antisymétriques stratifiées croisés (cross-ply) sous diverses conditions aux limites peut être donnée selon [26, 27] comme suit :

- encastrée (C)

$$u = v = w_b = w_s = \frac{\partial w_b}{\partial x} = \frac{\partial w_b}{\partial y} = \frac{\partial w_s}{\partial x} = \frac{\partial w_s}{\partial y} = 0 \text{ à } x = 0, a \text{ et } y = 0, b \quad (3.23)$$

- Simple (S)

$$v = w_b = w_s = \frac{\partial w_b}{\partial y} = \frac{\partial w_s}{\partial y} = 0 \text{ à } x = 0, a \quad (3.24a)$$

$$u = w_b = w_s = \frac{\partial w_b}{\partial x} = \frac{\partial w_s}{\partial x} = 0 \text{ à } y = 0, b \quad (3.24b)$$

Les conditions aux limites des équations (3.23) et (3.24) sont satisfaites par les expressions suivantes du champ de déplacement [27] :

$$\begin{aligned} u(x, y, t) &= U_{mn} X'_m(x) Y_n(y) e^{i\omega t} \\ v(x, y, t) &= V_{mn} X_m(x) Y'_n(y) e^{i\omega t} \\ w_b(x, y, t) &= W_{bmn} X_m(x) Y_n(y) e^{i\omega t} \\ w_s(x, y, t) &= W_{smn} X_m(x) Y_n(y) e^{i\omega t} \end{aligned} \quad (3.25)$$

Pour obtenir les fréquences naturelles, on résout l'équation (3.26) suivante :

$$\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} m_{11} & 0 & m_{13} & m_{14} \\ 0 & m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{34} \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & m_{44} \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} U_{mn} \\ V_{mn} \\ W_{bmn} \\ W_{smn} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.26)$$

Résultats et discussions

1.1. Hybridation intrafils

Pour évaluer les performances de la théorie d'ordre élevé, nous présentons dans ce chapitre une analyse vibratoire de plaques composites à fibres hybrides (intrafils). Les résultats obtenus avec le modèle analytique sont comparés à ceux issus des simulations par la méthode des éléments finis. Les propriétés matérielles des constituants du composite utilisés dans cette étude sont données dans le tableau 3.1 [3] :

Tableau 3.1 Propriétés matérielles des constituants utilisés

Matériau	E (GPa)	ν
Fibre de Carbone	380	0.33
Fibre de Verre	86	0.22
Fibre d'aramide	135	0.37
Matrice époxy	3.45	0.3

La fréquence fondamentale adimensionnelle suivante est utilisée dans la présentation des résultats pour la plaque hybride intrafils :

$$\bar{\omega} = \omega \frac{a^2}{h} \sqrt{\frac{\rho}{E_2}} \quad (3.17)$$

Les fréquences adimensionnelles d'une plaque composite stratifiée $(0/90)_2$ hybride carbone/verre simplement appuyée sont présentées dans le tableau 3.2 pour différentes fractions de fibre V_f . Les résultats obtenus par la théorie d'ordre élevé sont comparés à ceux obtenus par la méthode des éléments finis. On voit clairement que les résultats obtenus par le modèle analytique sont en excellent accord avec ceux obtenus par les simulations 3D FEM. Cette affirmation est illustrée dans la Figure 3.2 dans laquelle les écarts maximaux de la théorie raffinée par rapport aux simulations 3D FEM sont inférieurs à 3% pour une large gamme de fractions volumiques de fibres et de pourcentage carbone/verre. Cette figure montre que les fréquences propres augmentent avec l'augmentation de la fraction volumique de fibres jusqu'à atteindre leur maximum à $V_f = 0,45$. Ce point représente la fraction volumique optimale de fibres nécessaire pour atteindre la fréquence naturelle maximale. On peut également remarquer que les fréquences propres diminuent avec la diminution du pourcentage de fibre de carbone. En combinant ces deux types de fibres pour obtenir un composite hybride, on peut remplir différents critères (résistance, économique...) dans différentes applications industrielles.

Tableau 3.2 Fréquences d'une plaque hybride antisymétrique (0/90)₂ simplement appuyée pour différentes valeurs de V_f et W_f et pour $a/h=20$

$W_f(\%)$		Modèle	V_f					
Carbone	Verre		0.3	0.4	0.45	0.55	0.6	0.7
0	100	Modèle analytique	7.6778	7.8366	7.8598	7.8050	7.7298	7.4857
		3D FEM	7.6737	7.8313	7.8540	7.8000	7.7253	7.4828
		Erreur %	0.0534	0.0677	0.07385	0.06415	0.05825	0.0387
10	90	Modèle analytique	8.2341	8.4318	8.4593	8.3870	8.2905	7.9783
		3D FEM	8.2254	8.4214	8.4490	8.3173	8.2816	7.9720
		Erreur %	0,1058	0,1235	0,1219	0,8380	0,1075	0,0790
20	80	Modèle analytique	8.7522	8.9847	9.0165	8.9299	8.8154	8.4448
		3D FEM	8.7391	8.9691	9.0006	8.9149	8.8013	8.4345
		Erreur %	0.1499	0.1739	0.1766	0.1682	0.1602	0.1221
30	70	Modèle analytique	9.2377	9.5014	9.5371	9.4381	9.3075	8.8848
		3D FEM	9.2191	9.4797	9.5151	9.4172	9.2884	8.8638
		Erreur %	0.2017	0.2289	0.2312	0.2219	0.2056	0.2369
40	60	Modèle analytique	9.6953	9.9873	10.0267	9.9164	9.7713	9.3012
		3D FEM	9.6711	9.9597	9.9982	9.8896	9.7465	9.2821
		Erreur %	0.2502	0.2771	0.2850	0.2710	0.2544	0.2058
50	50	Modèle analytique	10.1289	10.4468	10.4894	10.3689	10.2107	9.6971
		3D FEM	10.0989	10.4124	10.4544	10.3357	10.1797	9.6732
		Erreur %	0.2971	0.3304	0.3348	0.3212	0.3045	0.2471
60	40	Modèle analytique	10.5414	10.8833	10.9290	10.7991	10.6287	10.0749
		3D FEM	10.5053	10.8418	10.8867	10.7592	10.5914	10.0459
		Erreur %	0.3436	0.3828	0.3885	0.3708	0.3522	0.2887
70	30	Modèle analytique	10.9354	11.2995	11.3480	11.2095	11.0278	10.4366
		3D FEM	10.8993	11.2510	11.2985	11.1628	10.9842	10.4024
		Erreur %	0.3312	0.4311	0.4381	0.4183	0.3969	0.3288
80	20	Modèle analytique	11.3128	11.6976	11.7488	11.6023	11.4101	10.7839
		3D FEM	11.2640	11.6417	11.6917	11.5482	11.3596	10.7441
		Erreur %	0.4332	0.4802	0.4884	0.4685	0.4445	0.3704
90	10	Modèle analytique	11.6752	12.0795	12.1332	11.9798	11.7773	11.1182
		3D FEM	11.6194	12.0159	12.0682	11.9178	11.7198	11.0728
		Erreur %	0.4802	0.5293	0.5386	0.5202	0.4906	0.4100
100	0	Modèle analytique	12.0241	12.4467	12.5028	12.3420	12.1308	11.4408
		3D FEM	11.9612	12.3749	12.4298	12.2728	12.0258	11.3898
		Erreur %	0.5259	0.5802	0.5873	0.5638	0.8731	0.4478

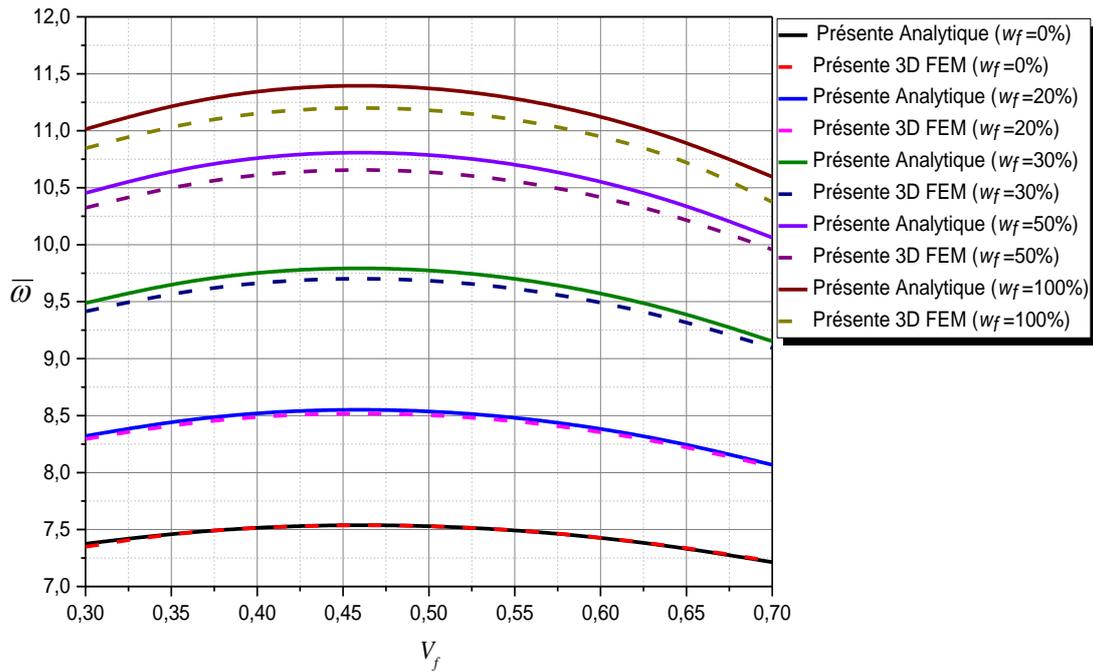


Figure 3. 2 Effet de la fraction volumique sur la variation des fréquences naturelles d'une plaque carrée stratifiée en composite hybride Carbone/Verre (0/90)₂

Le tableau 3.3 ainsi que la figure 3.3 montrent la variation de la fréquence fondamentale en fonction du rapport dimension latérale sur épaisseur a/h d'une plaque composite stratifiée cross-ply à fibres hybrides carbone/verre pour une fraction volumique $V_f = 0,5$. On voit clairement que les résultats obtenus avec le modèle analytique sont en excellent accord avec les simulations FEM, les écarts maximaux de notre théorie par rapport aux simulations FEM sont inférieures à 3% quels que soient le rapport dimension latéral/épaisseur et le pourcentage de mélange de fibres. Une augmentation du rapport a/h entraîne une augmentation de la fréquence fondamentale adimensionnelle et une diminution du pourcentage de la fibre de carbone (W_f) entraîne une diminution de la fréquence fondamentale. Cela signifie que la plaque renforcée par la fibre de carbone est plus stable que celle renforcée par la fibre de verre.

Les effets du rapport longueur sur largeur a/b et du pourcentage de la fibre de carbone W_f sur la variation des fréquences fondamentales d'une plaque composite stratifiée cross-ply (0/90)₂ à fibres hybrides pour un rapport dimension latérale sur épaisseur $a/h=20$ et une fraction volumique $V_f = 0,5$ sont présentés dans le tableau 3.4 et la figure 3.4. Les résultats obtenus avec notre modèle analytique sont comparables avec les simulations FEM, les écarts maximaux de la théorie raffinée par rapport aux simulations FEM sont inférieures à 2%. Les courbes montrent que les fréquences fondamentales augmentent en fonction du pourcentage de mélange de fibres W_f et en fonction du rapport a/b . Les dimensions de la plaque et le mélange de fibres ont un grand impact sur le comportement vibratoire des plaques composites hybrides.

Tableau 3.3 Fréquences fondamentales adimensionnelles d'une plaque hybride simplement appuyée ($V_f = 0.5$)

couches	a/h	Modèle	W_f				
			100% Verre	25% Carbone + 75% Verre	50% Carbone + 50% Verre	75% Carbone + 25% Glass	100% Carbone
(0/90) ₂	10	Modèle analytique	7.5341	8.7687	9.7804	10.6370	11.3791
		Shell FEM	7.5046	8.8455	9.6568	10.4615	11.1510
		Erreur %	0.4273	-1.0702	1.2794	1.6679	2.0456
	20	Modèle analytique	7.8486	9.2604	10.4624	11.5184	12.4665
		Shell FEM	7.8433	9.4249	10.4279	11.4660	12.3946
		Erreur %	0.0673	-1.6779	0.3304	0.4570	0.5803
	50	Modèle analytique	7.9453	9.4158	10.6836	11.8115	12.8370
		Shell FEM	7.9497	9.6032	10.6822	11.8072	12.8207
		Erreur %	-0.0328	-1.9518	0.0130	0.0361	0.1272
	100	Modèle analytique	7.9595	9.4387	10.7165	11.8554	12.8929
		Shell FEM	7.9633	9.6297	10.7203	11.8590	12.8961
		Erreur %	-0.0474	-1.9831	-0.0358	-0.0308	0.0249
(0/90) ₃	10	Modèle analytique	7.6794	9.0247	10.1158	11.0317	11.8198
		Shell FEM	7.6651	8.9692	10.0542	10.9438	11.7050
		Erreur %	0.1861	0.6188	0.6128	0.8029	0.9812
	20	Modèle analytique	8.0057	9.5476	10.8512	11.9904	13.0088
		Shell FEM	8.0049	9.5405	10.8363	11.9669	12.9755
		Erreur %	0.0096	0.07434	0.1378	0.1961	0.2567
	50	Modèle analytique	8.1061	9.7133	11.0911	12.3116	13.4177
		Shell FEM	8.1094	9.7163	11.0932	12.3127	13.4177
		Erreur %	-0.0413	-0.0307	-0.0192	0.0089	0.0007
	100	Modèle analytique	8.1208	9.7378	11.1268	12.3598	13.4796
		Shell FEM	8.1249	9.7424	11.2096	12.3650	13.4848
		Erreur %	-0.0504	-0.0477	-0.04437	-0.0418	-0.0389

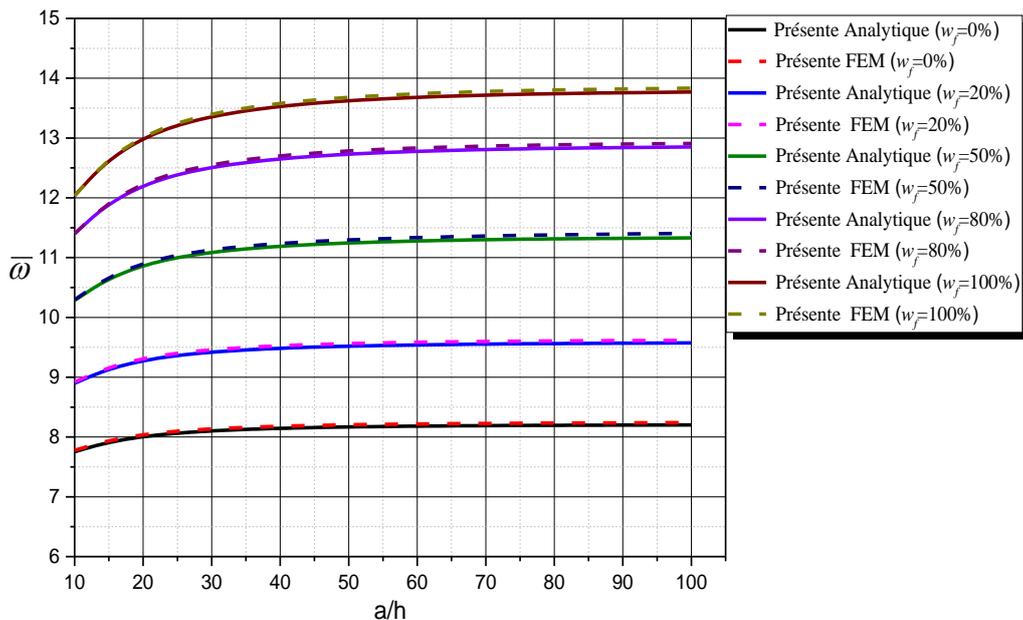


Figure 3. Effet du rapport dimension latérale sur épaisseur a/h sur les fréquences propres d'un stratifié composite (0/90)₂ hybride Carbone/Verre simplement appuyée, $V_f = 0,5$

Tableau 3.4 Fréquences fondamentales non dimensionnelles d'une plaque hybride $(0/90)_2$ à différentes valeurs de a/b pour $a/h=20, V_f=0.5$

$W_f(\%)$		Modèle	a/b				
Carbone	Verre		0.6	0.8	1	1.2	1.6
0	100	Modèle analytique	5.9163	6.5211	7.8487	9.6132	14.3782
		FEM	5.6157	6.5169	7.8433	9.6048	14.3415
		Erreur %	0.3528	0.0644	0.0688	0.0874	0.2559
25	75	Modèle analytique	6.7001	7.7282	9.2605	11.3561	17.1046
		FEM	6.6157	7.7131	9.2419	11.4660	17.0005
		Erreur %	1.2757	0.1958	0.2012	-0.9585	1.2757
50	50	Modèle analytique	7.6843	8.7546	10.4624	12.8313	19.3636
		FEM	7.6558	8.7263	10.4279	12.7743	19.1779
		Erreur %	0.3723	0.3243	0.3308	0.4462	0.9683
75	25	Modèle analytique	8.5102	9.6868	11.5184	14.1212	21.3064
		FEM	8.4654	9.6133	11.4660	14.0342	21.0298
		Erreur %	0.5292	0.7646	0.4570	0.6199	1.3153
100	0	Modèle analytique	9.2503	10.4676	12.4666	15.2743	23.0183
		FEM	9.1878	10.4076	12.3946	15.1551	22.6458
		Erreur %	0.6802	0.5765	0.5809	0.7865	1.6449

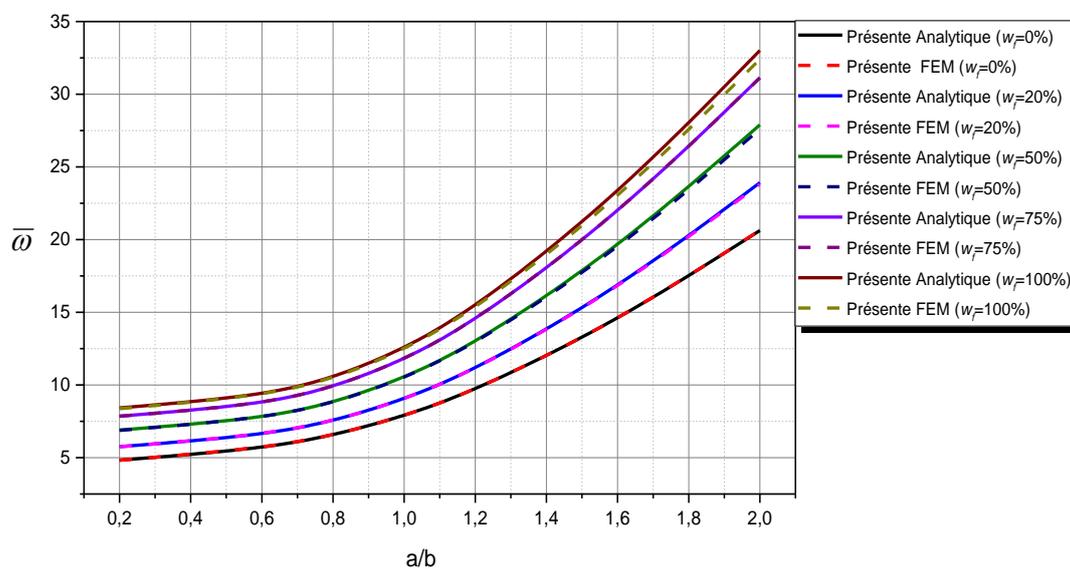


Figure 3. 4L' effet du rapport a/b sur les fréquences propres d'une plaque composite stratifiée hybride Carbone/Verre à structure antisymétrique $(0/90)_2$ simplement appuyée pour $a/h=20$

Le tableau 3.5 montre la comparaison des fréquences fondamentales en mode1 d'une plaque composite stratifiée hybride sous différentes conditions aux limites et différentes combinaisons de fibres (kevlar/verre, kevlar/carbone etcarbonate/verre) pour une fraction volumique $V_f = 0,5$ et $a/h=20$. On voit clairement que les fréquences sont maximales pour la plaque encastree et minimales pour la plaque simplement appuyee. Elles sont egalement maximales pour la combinaison (kevlar/carbone) et minimales pour la combinaison (kevlar/verre). L'ecart entre les resultats obtenus par la methode des elements finis et le modele analytique pour les plaques simplement appuyees est moins que les plaques encastrees et mixtes CCSS. La figure 3.5 montre que l'augmentation du pourcentage de la fibre de kevlar entraine une augmentation de la frequence fondamentale adimensionnelle, cela signifie que les proprietes de la fibre notamment le module de Young influent directement sur la stabilite des plaques composites stratifiees.

Le tableau 3.6 ainsi que la figure 3.6 presentent les effets du pourcentage de melange W_f , la combinaison des fibres ainsi que la sequence d'empilement sur la variation de la frequence fondamentale d'une plaque composite stratifiee cross-ply a fibres hybrides pour une fraction volumique $V_f = 0,5$ et un apport $a/h=20$. Les resultats obtenus avec le modele analytique sont confondus avec les simulations FEM quels que soient la valeur du pourcentage de melange W_f et la combinaison de fibres. Les erreurs maximales de la theorie raffinee par rapport aux simulations FEM sont inferieures a 2%. On remarque que les frequences fondamentales adimensionnelles sont maximales pour les plaques renforcees par la fibre de carbone et minimales pour celles renforcees par la fibre de verre.

Tableau 3.5 Fréquences fondamentales adimensionnelles d'une plaque hybride carrée $(0/90)_2$ pour $V_f=0.5$ et $a/h=20$

Conditions aux limites	$W_f(\%)$		Modèle	Combinaison de matériaux		
				Kevlar/Verre	Kevlar/Carbone	Carbone/Verre
SSSS	0	100	Modèle analytique	7.8487	12.4666	7.8487
			FEM	7.8433	12.8028	7.8433
			Erreur %	0.0685	0.5811	0.0685
	25	75	Modèle analytique	8.1164	11.6971	9.2605
			FEM	7.9984	11.7674	9.2419
			Erreur %	1.4755	-0.5972	0.2010
	50	50	Modèle analytique	8.3821	10.8588	10.4624
			FEM	8.2306	10.8272	10.4279
			Erreur %	1.8404	0.2923	0.3304
	75	25	Modèle analytique	8.6412	9.6411	11.5184
			FEM	8.4741	9.8328	11.4660
			Erreur %	1.9723	-1.9499	0.4570
	100	0	Modèle analytique	8.8929	8.8929	12.4666
			FEM	8.7159	8.7159	12.8028
			Erreur %	2.0304	2.0304	0.5811
CCSS	0	100	Modèle analytique	12.6128	20.4979	12.6128
			FEM	12.1781	19.0392	12.1781
			Erreur %	3.5692	7.6617	3.5692
	25	75	Modèle analytique	13.0927	19.2532	15.1521
			FEM	12.4471	18.2078	14.4788
			Erreur %	5.1866	5.7416	4.6501
	50	50	Modèle analytique	13.5625	17.8634	17.2172
			FEM	12.8269	16.8555	16.2865
			Erreur %	5.7345	5.9797	5.7146
	75	25	Modèle analytique	14.0162	16.2864	18.9700
			FEM	13.2176	15.3645	17.7754
			Erreur %	6.0420	6.0003	6.7203
	100	0	Modèle analytique	14.4535	14.4535	20.4979
			FEM	13.6009	13.6009	19.0392
			Erreur %	6.2688	6.2688	7.6617
CCCC	0	100	Modèle analytique	15.9439	25.6140	15.9439
			FEM	15.3358	23.9034	15.3358
			Erreur %	3.9652	7.1519	3.9652
	25	75	Modèle analytique	16.5492	24.1329	19.1331
			FEM	15.6823	22.9044	18.2707
			Erreur %	5.5277	5.3682	4.7198
	50	50	Modèle analytique	17.1395	22.4574	21.6749
			FEM	16.1660	21.2352	20.5353
			Erreur %	6.0220	5.7554	5.5492
	75	25	Modèle analytique	17.7077	20.5294	23.7949
			FEM	16.6614	19.3748	22.3704
			Erreur %	6.2801	5.9594	6.3677
	100	0	Modèle analytique	18.2532	18.2532	25.6140
			FEM	17.1461	17.1461	23.9034
			Erreur %	6.4567	6.4567	7.1519

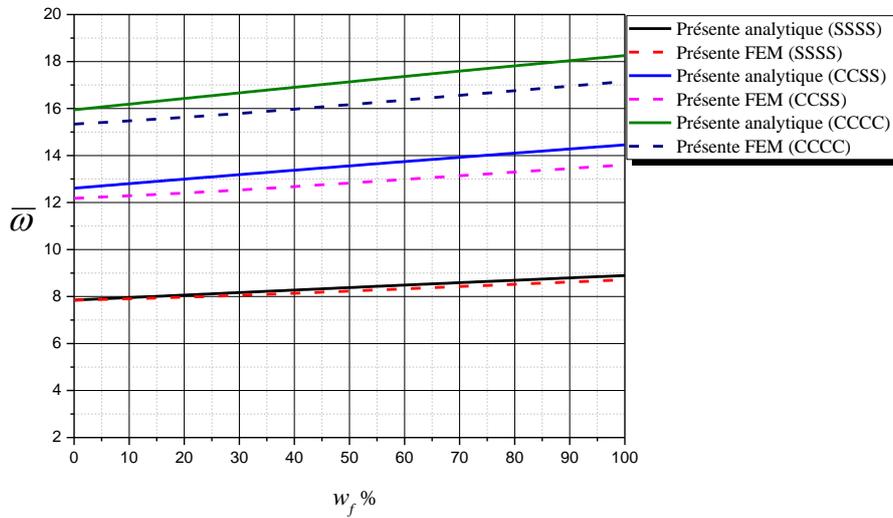


Figure 3. Effet du pourcentage de fibres W_f sur la variation des fréquences propres d'une plaque composite stratifiée hybride (kevlar/verre) sous différentes conditions aux limites.

Tableau 3.6 Fréquences fondamentales non dimensionnelles d'une plaque carré hybride simplement appuyée $(0/90)_n$ pour $V_f = 0.5$ et $a/h = 20$

Nombre de couches	$W_f(\%)$		Modèle	Combinaison de matériaux			
				Kevlar/Verre	Kevlar/Carbone	Carbone/Verre	
$(0/90)_4$	0	100	Modèle analytique	7.7298	11.9703	7.7298	
			Shell FEM	7.7276	11.9077	7.7276	
	25	75	Modèle analytique	7.9960	11.3209	9.1129	
			Shell FEM	7.9919	11.2720	9.0978	
	50	50	Modèle analytique	8.2582	10.5869	10.2309	
			Shell FEM	8.2519	10.5514	10.2010	
	75	25	Modèle analytique	8.5119	9.7446	11.1668	
			Shell FEM	8.5033	9.7218	11.1208	
	100	0	Modèle analytique	8.7563	8.7563	11.9703	
			Shell FEM	8.7454	8.7454	11.9077	
	$(0/90)_8$	0	100	Modèle analytique	7.7782	12.1139	7.7782
				Shell FEM	7.7827	12.0959	7.7827
25		75	Modèle analytique	8.0515	11.4526	9.1967	
			Shell FEM	8.0555	11.4403	9.1975	
50		50	Modèle analytique	8.3206	10.7042	10.3399	
			Shell FEM	8.3237	10.6770	10.3358	
75		25	Modèle analytique	8.5807	9.8434	11.2943	
			Shell FEM	8.5831	9.8409	11.2844	
100		0	Modèle analytique	8.8312	8.8312	12.1139	
			Shell FEM	8.8329	8.8329	12.0959	

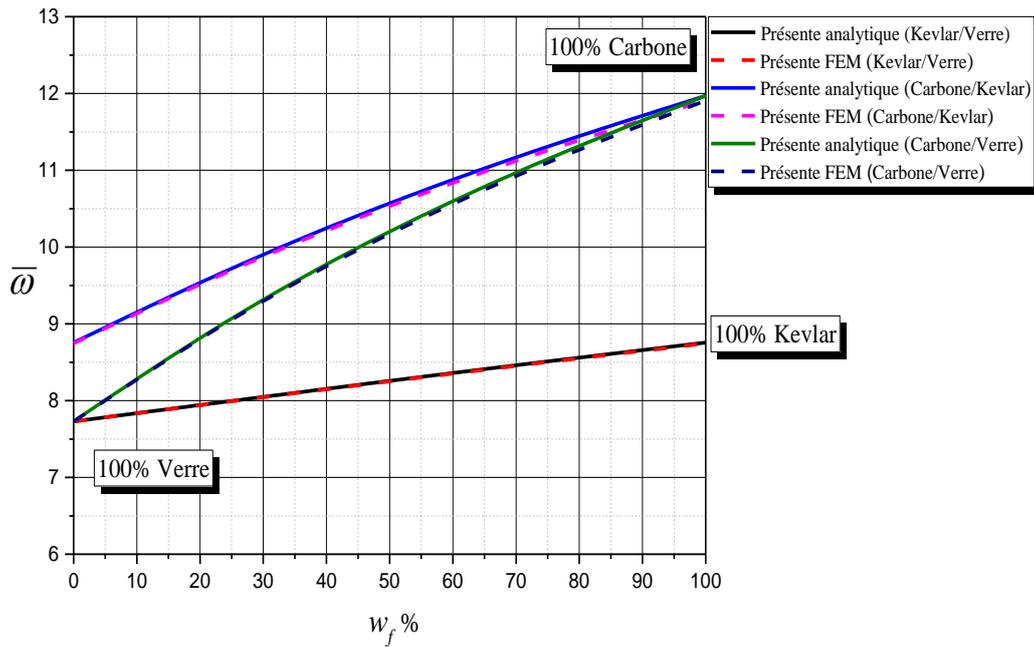


Figure 3. 6Effet du pourcentage de fibres W_f sur la variation des fréquences propres d'une plaque composite stratifiée hybride

1.2. Hybridation Intercouche

Nous présentons dans cette partie une analyse vibratoire d'une plaque composite hybride intercouche, d'une manière générale l'hybridation intercouche est une suite de couches empilées l'une sur l'autre dont chaque couche contient une fibre différente. En effet, nous étudions le comportement vibratoire d'une plaque composite antisymétrique hybride intercouche (carbone/kevlar, carbone/verre et kevlar/verre) avec différentes séquences d'empilement (figure3.7)en utilisant la méthode des éléments finis.Les propriétés matérielles des constituants du composite utilisés dans cette étude sont données dans le tableau 3.1.

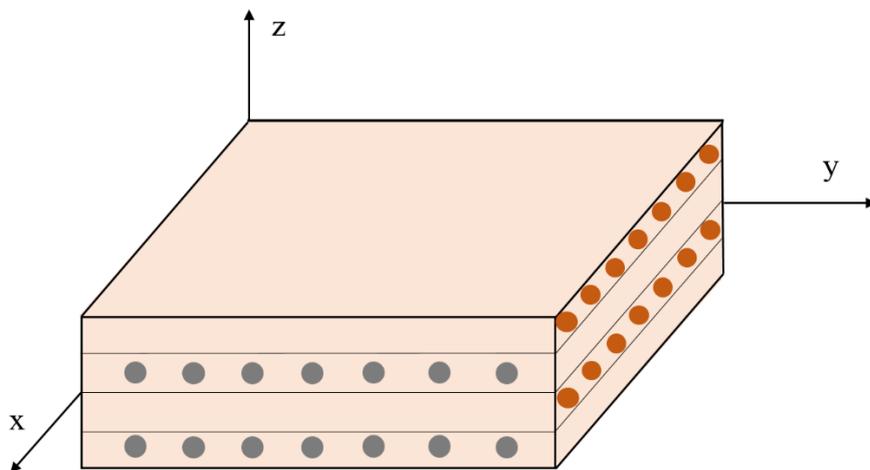


Figure 3. 7Plaque composite stratifiée hybride intercouche

Le tableau 3.7 ainsi que la figure 3.8 montrent la variation de la fréquence fondamentale en fonction du rapport dimension latérale sur épaisseur a/h d'une plaque composite stratifiée cross-ply $(0/90)_2$ hybride intercouche pour une fraction volumique de fibres $V_f = 0,4$. On voit clairement que l'augmentation du rapport a/h entraîne une diminution de la fréquence propre dimensionnelle indiquant que les plaques épaisses sont plus stables que les plaques minces. Les fréquences sont maximales pour la plaque renforcée par la fibre de carbone et minimales pour la plaque renforcée par la fibre de verre. Pour l'hybridation de couches carbone-kevlar les séquences d'empilement C-K-C-K, K-C-C-K et C-K-K-C donnent des fréquences différentes indiquant que le choix de l'empilement de couches a un grand impact sur la stabilité de la plaque composite.

Tableau 3.7 Pulsations propres d'une plaque carrée hybride intercouche simplement appuyée avec différentes valeur du rapport a/h pour $V_f=0.4$

Couches	Séquence	a/h			
		10	20	30	40
(0/90) ₂	Carbone	3.0436	1.6930	1.1546	0.8731
	C- K- C-K	2.6756	1.4645	0.9952	0.7516
	K-C-C-K	2.5005	1.3405	0.9065	0.6833
	C-K-K-C	2.5755	1.3883	0.9399	0.7089
	C- V- C-V	2.5701	1.4064	0.9746	0.7218
	V-C-C-V	2.2553	1.1931	0.8044	0.6057
	C-V-V-C	2.3879	1.2739	0.8606	0.6485
	Kevlar	2.2565	1.1940	0.8051	0.6063
	K- V- K-V	2.1321	1.1222	0.7559	0.5689
	V-K-K-V	2.0824	1.0925	0.7353	0.5533
	K-V-V-K	2.1429	1.1278	0.7596	0.5718
	Verre	2.0000	1.0455	0.7031	0.5290

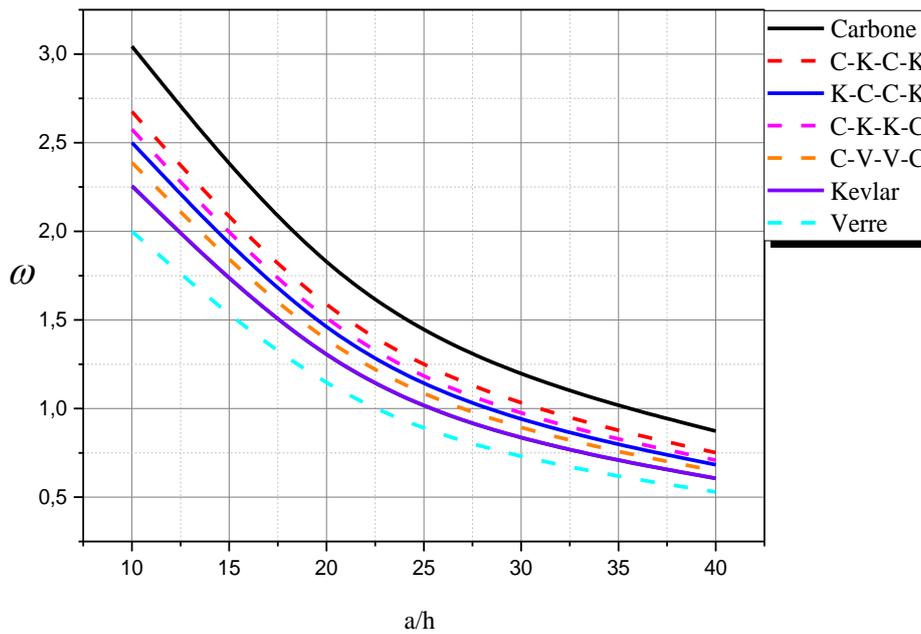


Figure 3.8 Effet de la séquence d'empilement et du rapport a/h sur la variation de la pulsation propre d'une plaque carrée hybride intercouche $(0/90)_2$ simplement appuyée

Une comparaison du comportement des plaques composites stratifiées cross-ply $(0/90)_2$ hybrides intercouches pour différentes valeurs du rapport longueur/largeur et pour une fraction volumique de fibres $V_f=0,4$ est présentée dans le tableau 3.8 et la figure 3.9. L'augmentation du rapport a/b entraîne une diminution de la fréquence propre. Les fréquences sont maximales pour la plaque renforcée par la fibre de carbone et minimales pour la plaque renforcée par la fibre de verre. Il est à remarquer que la séquence d'empilement et les dimensions de la plaque ont un effet considérable sur la stabilité de la plaque.

Le tableau 3.9 et la figure 3.10 montrent la comparaison des fréquences fondamentales en mode 1 d'une plaque composite stratifiée hybride intercouche sous différentes conditions aux limites et pour différentes séquences d'empilement de couches : carbone, kevlar, verre et mixte C-K-C-K, K-C-C-K et C-K-K-C avec une fraction volumique $V_f = 0,4$ et $a/h=20$. On voit que les fréquences sont maximales pour la plaque encadrée et minimales pour la plaque simplement appuyée. Elles sont maximales pour la plaque renforcée par la fibre de carbone et minimales pour la plaque renforcée par la fibre de verre. Les résultats obtenus confirment que la position de couches en cas d'hybridation intercouche influe sur les valeurs des fréquences propres de la plaque.

Tableau 3.8 Effet du rapport a/b sur la pulsation propre d'une plaque hybride intercouche simplement appuyée avec $V_f=0.4$

Couches	Séquence	a/b				
		0.6	0.8	1	1.2	1.6
(0/90) ₂	Carbone	1.2554	1.4217	1.6930	2.0699	3.0927
	C- K- C-K	1.2138	1.3088	1.4645	1.6899	2.3490
	K-C-C-K	0.9790	1.1201	1.3405	1.6421	2.4631
	C-K-K-C	1.0215	1.1623	1.3883	1.7015	2.5598
	C- V- C-V	1.2027	1.2805	1.4064	1.5892	2.1338
	V-C-C-V	0.8650	0.9947	1.1931	1.4620	2.1925
	C-V-V-C	0.9334	1.0651	1.2739	1.5622	2.3526
	Kevlar	0.8647	0.9952	1.1940	1.4628	2.1919
	K- V- K-V	0.8493	0.9579	1.1222	1.3455	1.9602
	V-K-K-V	0.7854	0.9087	1.0925	1.3381	2.0009
	K-V-V-K	0.8136	0.9389	1.1278	1.3817	2.0689
	Verre	0.7488	0.8688	1.0455	1.2803	1.9120

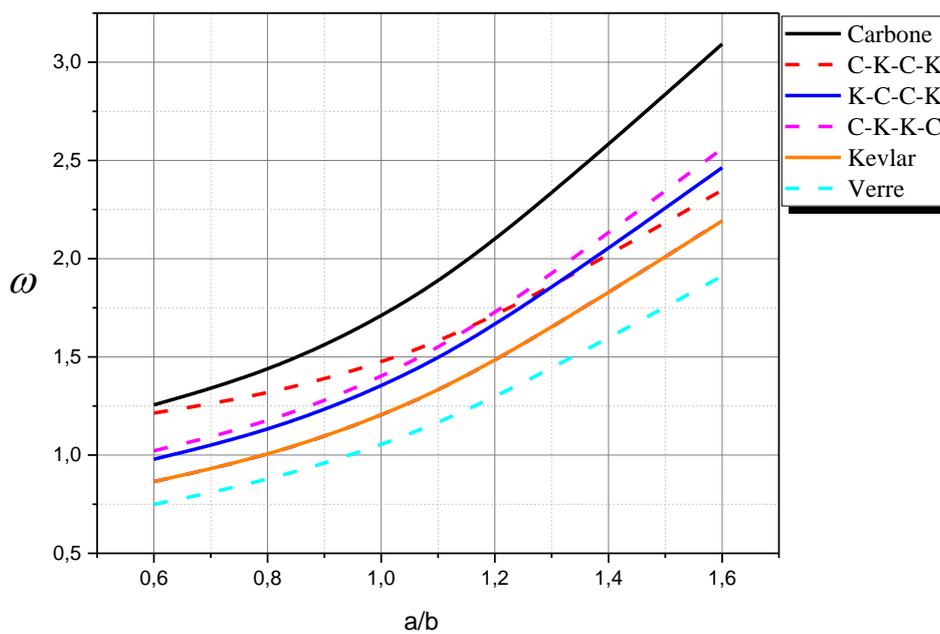


Figure 3. 9 Effet de séquence d'empilement et du rapport a/b sur la variation de la pulsation propre d'une plaque carrée hybride intercouche (0/90)₂ simplement appuyée

Tableau 3.9 Pulsations propres d'une plaque carrée hybride intercouche sous différentes conditions aux limites pour $V_f=0.4$ et $a/h=20$

Couches	Séquence	Conditions aux limites		
		SSSS	CCSS	CCCC
$(0/90)_2$	Carbone	1.6930	2.5996	3.2636
	C-K-C-K	1.4645	2.4519	2.8409
	K-C-C-K	1.3405	2.0916	2.6365
	C-K-K-C	1.3883	2.1826	2.7569
	C- V- C-V	1.4064	2.4144	2.7177
	V-C-C-V	1.1931	1.8663	2.3542
	C-V-V-C	1.2739	2.0141	2.5476
	Kevlar	1.1940	1.8648	2.3514
	K- V- K-V	1.1222	1.8169	2.2033
	V-K-K-V	1.0925	1.7003	2.1422
	K-V-V-K	1.1278	1.7614	2.2212
	Verre	1.0455	1.6239	2.0451

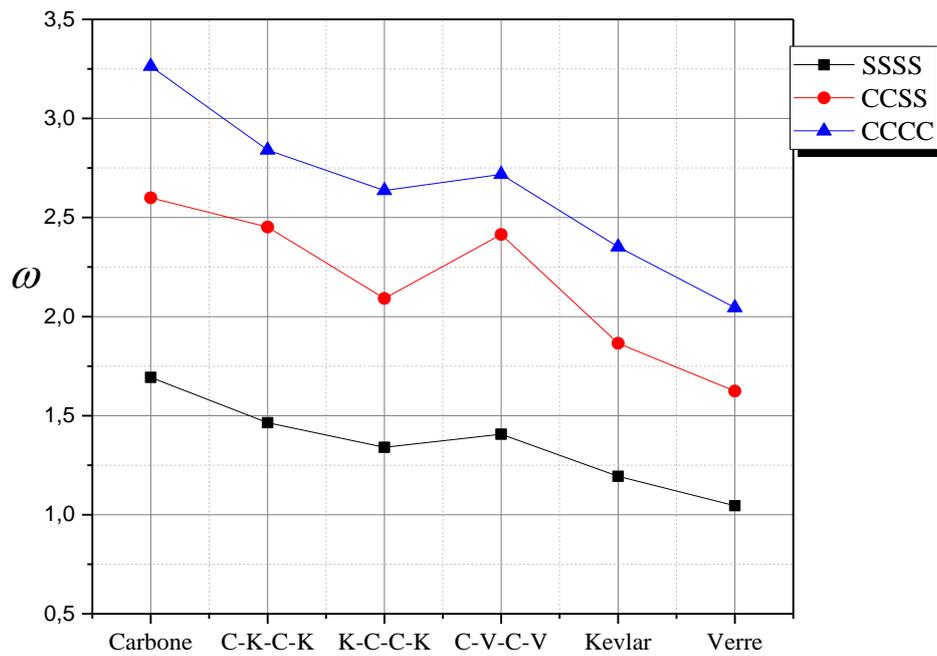


Figure 3. 10 Pulsations propres d'une plaque carrée hybride intercouche $(0/90)_2$ sous différentes conditions aux limites

Les effets de positionnement des couches, du nombre de couches ainsi que du type de renfort sur la variation des fréquences fondamentales d'une plaque composite stratifiée cross-ply simplement appuyée pour un rapport dimension latéral sur épaisseur $a/h=20$ et une fraction volumique $V_f=0.4$ sont présentés dans Le tableau 3.10 et la figure 3.11. Une augmentation du nombre de couches entraîne une augmentation de la fréquence fondamentale et une diminution du pourcentage de la fibre de carbone entraîne une diminution de la fréquence fondamentale. On voit clairement que le nombre et le positionnement des couches ont un effet important sur la vibration libre des plaques composites hybrides.

Tableau 3.10 Pulsations propres d'une plaque carrée hybride intercouche simplement appuyée $V_f=0.4$ et $a/h=20$

Nombre de couches	Séquence	Matériaux		
		Carbone/Kevlar	Carbone/Verre	Kevlar/Verre
(0/90) ₂	Matériau 1	1.6930	1.6930	1.1940
	M ₁ - M ₂ - M ₁ . M ₂	1.4645	1.4064	1.1222
	M ₂ - M ₁ - M ₂ . M ₁	1.4645	1.4064	1.1222
	M ₂ - M ₁ - M ₁ . M ₂	1.3405	1.1931	1.0925
	M ₁ - M ₂ - M ₂ . M ₁	1.3883	1.2739	1.1278
	Matériau 2	1.1940	1.0455	1.0455
(0/90) ₃	Matériau 1	1.7725	1.7725	1.2292
	M ₁ - M ₂ - M ₁ . M ₂ . M ₁ - M ₂	1.5248	1.4623	1.1509
	M ₂ - M ₂ - M ₁ . M ₁ . M ₂ - M ₂	1.2369	1.0786	1.0695
	M ₂ - M ₁ - M ₁ . M ₁ . M ₁ - M ₂	1.4518	1.3426	1.1336
	M ₁ - M ₁ - M ₂ . M ₂ . M ₁ - M ₁	1.7669	1.7653	1.2271
	M ₁ - M ₂ - M ₂ . M ₂ . M ₂ - M ₁	1.4480	1.3222	1.1508
	Matériau 2	1.2292	1.0671	1.0671
(0/90) ₄	Matériau 1	1.7997	1.7997	1.2413
	M ₁ - M ₂ - M ₁ . M ₂ - M ₁ - M ₂ - M ₁ . M ₂	1.5455	1.4817	1.1609
	M ₂ - M ₁ - M ₂ . M ₁ - M ₂ - M ₁ - M ₂ . M ₁	1.5455	1.4817	1.1609
	M ₁ - M ₁ - M ₁ . M ₂ - M ₂ - M ₁ - M ₁ . M ₁	1.7729	1.7659	1.2341
	M ₁ - M ₁ - M ₂ . M ₂ - M ₂ - M ₂ - M ₁ . M ₁	1.7505	1.7391	1.2245
	M ₁ - M ₂ - M ₂ . M ₂ - M ₂ - M ₂ - M ₂ . M ₁	1.4579	1.3310	1.1518
	M ₂ - M ₂ - M ₂ . M ₁ - M ₁ - M ₂ - M ₂ . M ₂	1.2645	1.0999	1.0810
	M ₂ - M ₂ - M ₁ . M ₁ - M ₁ - M ₁ - M ₂ . M ₂	1.3136	1.1765	1.0939
	M ₂ - M ₁ - M ₁ . M ₁ - M ₁ - M ₁ - M ₁ . M ₂	1.5275	1.4447	1.1581
	Matériau 2	1.2413	1.0746	1.0746

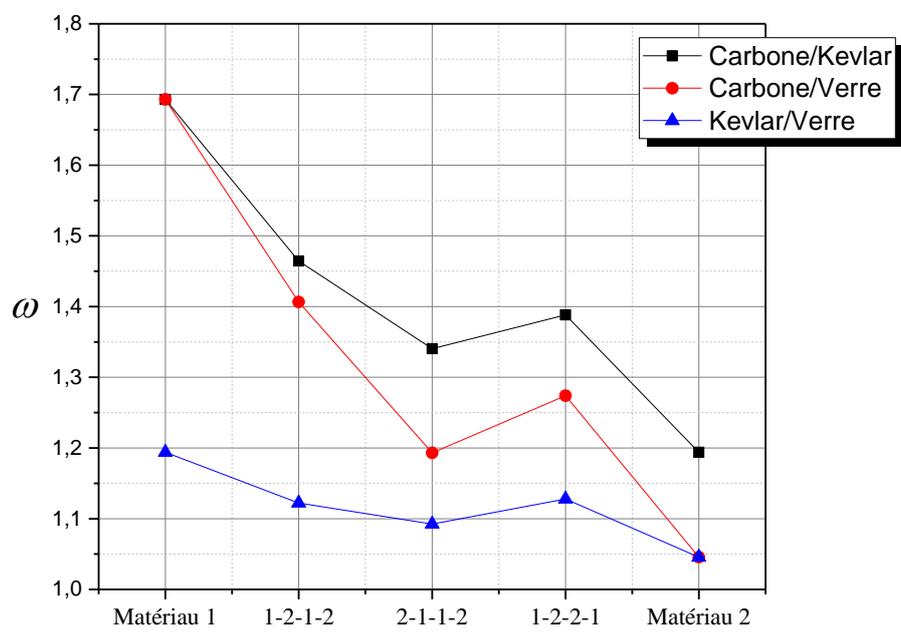


Figure 3. 11 Pulsations propres d'une plaque carrée hybride intrafile-intercouche (0/90) 2 simplement appuyée

Conclusion

Une évaluation des performances de la théorie d'ordre élevé à prédire les fréquences propres de plaques composites hybrides a été réalisée dans ce chapitre. Les équations de mouvement ont été développées en utilisant le principe d'Hamilton. Les expressions mathématiques sont obtenues en utilisant la solution de Navier pour différentes conditions aux limites. Les fréquences naturelles prédites par la présente théorie ont été comparées avec celles obtenues par les simulations MEF. L'hybridation intrafils consiste à combiner les fibres (carbone, verre et kevlar) dans la même couche en utilisant la loi des mélanges tandis que l'hybridation intercouche (ou couche par couche) a été présentée à l'aide de code Abaqus. Les résultats obtenus ont montré que la fraction volumique, les dimensions de la plaque, le type de fibre, la position des couches dans le cas de composites hybrides intercouches ainsi que les conditions aux limites affectent de manière significative les fréquences fondamentales des plaques composites hybrides.

CHAPITRE IV
MODELISATION NUMERIQUE DU COMPORTEMENT
DYNAMIQUE ET HYGROTHERMIQUE DES PLAQUES
COMPOSITES

RESUME DU CHAPITRE

Les matériaux composites sont soumis la plupart du temps à des variations de température et l'humidité ou les deux en même temps (chargement hygrothermique) dans certaines applications telles que l'aérospatiale, l'automobile, la construction navale et les structures en bâtiment.

Les conditions hygrothermiques généralement dégradent les propriétés élastiques et la rigidité des structures. En effet, nous étudions dans ce chapitre le comportement vibratoire de plaques composites soumises à une charge hygrothermique. Les modules de l'ingénieur pour les différents cas : composite non hybride et composite hybride sont calculés en utilisant la loi des mélanges. L'équation de mouvement de la plaque stratifiée est obtenue en utilisant de principe d'Hamilton. Les expressions mathématiques sont obtenues en utilisant la solution de Navier pour différentes conditions aux limites.

L'étude de l'effet hygrothermique nous permet une meilleure compréhension et une meilleure caractérisation du comportement réel des plaques composites stratifiées lorsqu'elles sont soumises à des charges combinées.

Effet hygrothermique

Les propriétés matérielles de la plaque composite sont considérées comme dépendantes de la température et de l'humidité. Les conditions hygrothermiques généralement dégradent les propriétés élastiques et la rigidité des structures qui influe sur le comportement en vibration. En effet, nous allons étudier l'effet hygrothermique où la plaque est soumise à différentes valeurs de température et l'humidité.

0.1. Propriétés matérielles de composites sous conditions hygrothermiques

On considère une plaque composite stratifiée antisymétrique hybride à couches croisées $(0/90)_n$, dans laquelle la plaque peut être hybride intrafils où les couches peuvent comprendre deux types de fibres : Carbone/Verre, Carbone/Kevlar et Kevlar/Verre, hybride intercouche dont les couches peuvent comprendre un type de fibres ou non hybride. Les propriétés mécaniques de ces matériaux dépendent des propriétés des fibres, de la matrice, de la fraction volumique ainsi que des conditions hygrothermiques. Le système de coordonnées des plaques est illustré sur la figure 4.1.

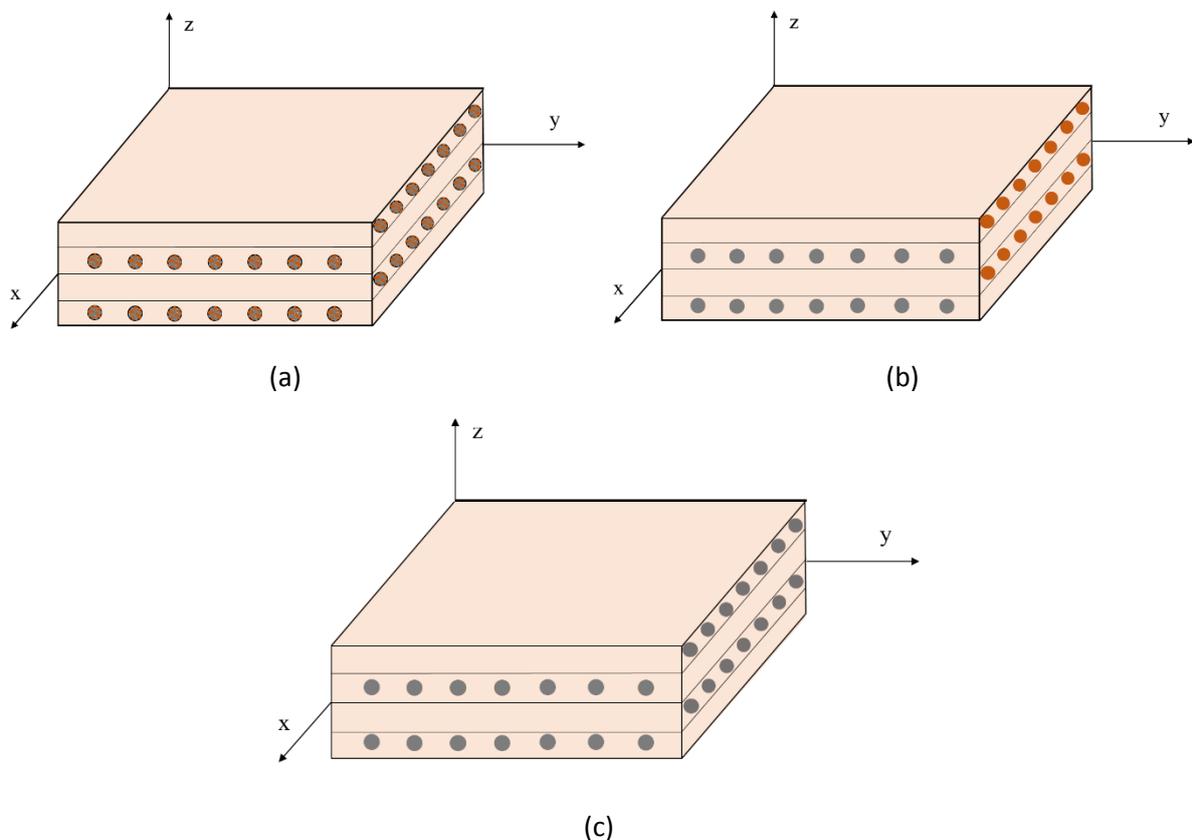


Figure 4. 1 Système de coordonnées des plaques composites : (a) hybride intrafils, (b) hybride intercouche et (c) non hybride

0.2. Propriétés matérielles du composite hybride

On suppose que les propriétés mécaniques de la fibre sont insensibles à la température et l'humidité tandis que celles de la matrice sont dépendantes. Selon l'approche analytique [71], le module de Young de la matrice époxy est donné comme suit :

$$E_m = (3.51 - 0.003T - 0.142C) \text{ GPa} \quad (4.1)$$

Où :

$$T = T_0 + \Delta T \text{ et } T_0 = 25^{\circ} \text{C (température ambiante)}$$

$$C = C_0 + \Delta C \text{ et } C_0 = 0\% \text{ en poids de H}_2\text{O.}$$

Le module longitudinal total du composite E_1 est donné par l'équation suivante en utilisant la loi des mélanges et l'équation (4.1) :

$$E_1 = E_f^{(1)}V_f^{(1)} + E_f^{(2)}V_f^{(2)} + E_mV_m \quad (4.2)$$

$$V_f^{(1)} + V_f^{(2)} + V_m = 1 \quad (4.3)$$

$$V_f = V_f^{(1)} + V_f^{(2)} \quad (4.4)$$

$$w_f^{(1)} = \frac{V_f^{(1)}}{V_f}, \quad w_f^{(2)} = \frac{V_f^{(2)}}{V_f} \quad (4.5)$$

D'où :

$$E_1 = V_f \left[E_f^{(1)}w_f^{(1)} + E_f^{(2)}(1 - w_f^{(1)}) \right] + E_m(1 - V_f) \quad (4.6)$$

$$\nu_{12} = V_f \left[\nu_f^{(1)}w_f^{(1)} + \nu_f^{(2)}(1 - w_f^{(1)}) \right] + \nu_m(1 - V_f) \quad (4.7)$$

$$G_f^{(1)} = \frac{E_f^{(1)}}{2(1 + \nu_f^{(1)})}, \quad G_f^{(2)} = \frac{E_f^{(2)}}{2(1 + \nu_f^{(2)})}, \quad G_m = \frac{E_m}{2(1 + \nu_m)} \quad (4.8)$$

$$G_f = G_f^{(1)}w_f + G_f^{(2)}(1 - w_f) \quad (4.9)$$

$$k_f = \frac{E_f^{(1)} w_f}{3(1-2\nu_f^{(1)})} + \frac{E_f^{(2)} w_f}{3(1-2\nu_f^{(2)})}, \quad k_m = \frac{E_m}{3(1-2\nu_m)} \quad (4.10)$$

$$K_f = k_f + \frac{G_f}{3}, \quad K_m = k_m + \frac{G_m}{3} \quad (4.11)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} G_{12} = G_{13} = G_m \frac{G_f(1+V_f) + G_m(1-V_f)}{G_f(1-V_f) + G_m(1+V_f)} \\ G_{23} = G_m \left(1 + \frac{V_f}{\frac{G_m}{G_f - G_m} + (1-V_f) \frac{k_m + \frac{7}{3}G_m}{2k_m + \frac{8}{3}G_m}} \right) \end{array} \right. \quad (4.12)$$

$$K_L = K_m + \frac{V_f}{\frac{1}{k_f - k_m + \frac{1}{3}(G_f - G_m)} + \frac{1-V_f}{k_m + \frac{4}{3}G_m}} \quad (4.13)$$

$$E_2 = \frac{2}{\frac{1}{2K_L} + \frac{1}{2G_{23}} - \frac{2(\nu_{12})^2}{E_1}} \quad (4.14)$$

0.3. Propriétés matérielles du composite non hybride

Les propriétés mécaniques de la matrice sont aussi dépendantes de la température et de l'humidité (équation 4.1), le module de Young du composite non hybride est donné comme suit :

$$E_1 = E_f V_f + E_m (1-V_f) \quad (4.15)$$

$$V_f + V_m = 1 \quad (4.16)$$

D'où :

$$\nu_{12} = V_f \nu_f + \nu_m (1-V_f) \quad (4.17)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} G_{12} = G_{13} = G_m \frac{G_f(1+V_f) + G_m(1-V_f)}{G_f(1-V_f) + G_m(1+V_f)} \\ G_{23} = G_m \left(1 + \frac{V_f}{\frac{G_m}{G_f - G_m} + (1-V_f) \frac{k_m + \frac{7}{3}G_m}{2k_m + \frac{8}{3}G_m}} \right) \end{array} \right. \quad (4.18)$$

$$K_L = K_m + \frac{V_f}{\frac{1}{k_f - k_m + \frac{1}{3}(G_f - G_m)} + \frac{1-V_f}{k_m + \frac{4}{3}G_m}} \quad (4.19)$$

$$E_2 = \frac{2}{\frac{1}{2K_L} + \frac{1}{2G_{23}} \frac{2(\nu_{12})^2}{E_1}} \quad (4.20)$$

0.4. Formulation de la théorie raffinée pour les plaques stratifiées

En utilisant les équations (2.1) à (2.4) du chapitre 2, le champ de déplacement de la plaque est donné par :

$$\left\{ \begin{array}{l} u(x, y, z, t) = u_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_b}{\partial x} - f(z) \frac{\partial w_s}{\partial x} \\ v(x, y, z, t) = v_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_b}{\partial y} - f(z) \frac{\partial w_s}{\partial y} \\ w(x, y, z, t) = w_b(x, y, t) + w_s(x, y, t) \end{array} \right. \quad (4.21)$$

Avec :

$$f(z) = \left(z - ze^{\frac{-2z^2}{h^2}} \right) \quad (4.22)$$

En utilisant les équations (2.6) à (2.35) du chapitre 2, les fréquences propres sont obtenues en mettant le déterminant de l'équation (4.23) égal à zéro :

$$\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} m_{11} & 0 & m_{13} & m_{14} \\ 0 & m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{34} \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & m_{44} \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} U_{mn} \\ V_{mn} \\ W_{bmn} \\ W_{smn} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.23)$$

Résultats et discussions

Nous présentons dans ce chapitre l'influence des conditions hygrothermiques sur les fréquences propres de plaques composites hybrides et non hybrides. Les conditions hygrothermiques généralement dégradent les propriétés élastiques et la rigidité des structures. En effet, nous avons étudié l'effet hygrothermique en variant les valeurs de température et l'humidité. Les propriétés matérielles des constituants du composite utilisés sont données dans les tableaux 4.1, 4.2 et 4.3 [3] :

Tableau 4.1 Propriétés matérielles des constituants utilisés

Matériau	E (GPa)	ν
Fibre de Carbone	380	0.33
Fibre de Verre	86	0.22
Fibre d'aramide	135	0.37
Matrice époxy	3.45	0.3

Tableau 4.2 Propriétés d'une résine époxy sous conditions hygrothermiques.

ΔT (°C)	ΔC (%)	E_m (MPa)	ν_m
0	0	3435	0.3
25	25	3324.5	0.3
50	50	3214	0.3
75	75	3103.5	0.3
100	100	2993	0.3

Tableau 4.3 Propriétés élastiques du composite à fibre de carbone sous conditions hygrothermiques.

ΔT (°C)	Δ (%)	E_{11} (MPa)	E_{22} (MPa)	ν_{12}	G_{12} (MPa)	G_{23} (MPa)
0	0	154061	7454	0.312	3029	2659
25	25	153994	7218	0.312	2933	2574
50	50	153928	6981	0.312	2837	2489
75	75	153862	6744	0.312	2741	2405
100	100	153795	6508	0.312	2645	2320

$$E_{33} = E_{22}, \nu_{13} = \nu_{12}, G_{13} = G_{12}$$

La fréquence fondamentale adimensionnelle suivante est utilisée dans la présentation des résultats pour les plaques non hybride et hybride intrafilés :

$$\bar{\omega} = \omega \frac{a^2}{h} \sqrt{\frac{\rho}{E_2}}$$

1.1. Effet hygrothermique sur le comportement des plaques composites non hybrides

Le tableau 4.4 et la figure 4.2 résument les résultats fréquence-fraction volumique d'une plaque composite stratifiée à fibre de carbone simplement appuyée pour différentes valeurs de température et humidité (ΔT et ΔC). Les écarts maximaux de la présente théorie par rapport aux simulations FEM sont inférieurs à 4%. Nous remarquons que les fréquences sont maximales pour une fraction volumique $V_f=0.45$, cette fraction représente la valeur optimale pour avoir un matériau rigide en terme de vibration. On voit clairement les effets de conditions hygrothermiques sur les valeurs de fréquences propres, une augmentation de la température et de l'humidité mène à une augmentation des fréquences propres adimensionnelles. Cette augmentation est due à la dégradation des propriétés élastiques du composite montrée dans les tableaux (4.2 et 4.3).

Tableau 4.4 Effet hygrothermique sur les fréquences fondamentales d'une plaque carrée stratifiée avec différentes valeurs de fraction volumique V_f

ΔC (%)	ΔT (°C)	Modèle	V_f					
			0.3	0.4	0.45	0.55	0.6	0.7
0	0	Modèle analytique	11.0250	11.3659	11.4159	11.3045	11.1460	10.6073
		FEM	10.8215	11.1380	11.1846	11.2765	10.9352	10.4345
		Erreur %	1.8803	2.0458	2.0679	0.2480	1.9276	1.6562
25	25	Modèle analytique	11.2503	11.5995	11.6507	11.5367	11.3737	10.8206
		FEM	10.9256	11.4253	11.2925	11.1891	11.0404	10.5508
		Erreur %	2.9723	3.1493	3.1720	3.1069	3.0190	2.5567
50	50	Modèle analytique	11.2163	11.5643	11.6153	11.5017	11.3393	10.7884
		FEM	11.0344	11.3573	11.4050	11.3006	11.1502	10.6371
		Erreur %	1.6487	1.8223	1.8439	1.7796	1.6957	1.4220
75	75	Modèle analytique	11.3375	11.6898	11.7415	11.6265	11.4620	10.9033
		FEM	11.1479	11.4745	11.5226	11.4171	11.2652	10.7459
		Erreur %	1.7003	1.8761	1.8995	1.8342	1.7467	1.4648
100	100	Modèle analytique	11.3420	11.6944	11.7462	11.6311	11.4666	10.9076
		FEM	11.2668	11.5970	11.6455	11.5391	11.3856	10.8598
		Erreur %	0.6673	0.8400	0.8650	0.7976	0.7116	0.4399

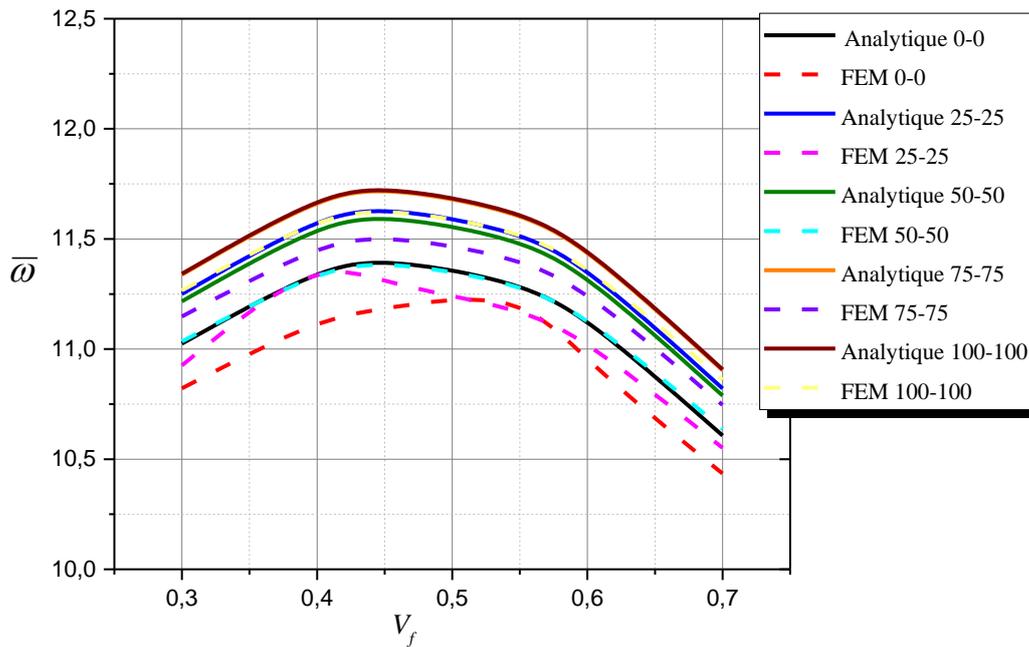


Figure 4. 2 Effet hygrothermique sur les fréquences fondamentales adimensionnelles d'une plaque carrée stratifiée $(0/90)_2$ en composite à fibre de carbone en fonction de la fraction de fibres

Le tableau 4.5 ainsi que la figure 4.3 présentent l'évolution de la fréquence fondamentale en fonction du rapport dimension latérale sur épaisseur a/h d'une plaque composite stratifiée cross-ply à fibres de carbone pour une fraction volumique $V_f = 0,4$ sous différentes valeurs de température et d'humidité. Il est à remarquer que les résultats obtenus avec le modèle analytique sont en excellent accord avec les simulations FEM et que les écarts entre les deux modèles sont inférieurs à 4%. Ces écarts diminuent lorsque le rapport a/h augmente, ceci est dû à l'effet de cisaillement transverse. La figure 4.3 montre que les fréquences propres adimensionnelles sont proportionnelles au rapport dimension latérale sur épaisseur a/h et les valeurs de température et humidité (ΔT et ΔC).

Tableau 4.5 Effet hygrothermique sur les fréquences fondamentales d'une plaque carrée stratifiée (0/90)₂ avec différentes valeurs du rapport a/h pour $V_f=0.4$

a/h	ΔC (%)	Modèle	ΔT (°C)				
			0	25	50	75	100
10	0	Modèle analytique	11.3659	11.4780	11.5599	11.6443	11.7314
		FEM	11.1380	11.2104	11.2849	11.3617	11.4407
		Erreur %	2.0458	2.3869	2.4367	2.4874	2.5413
	25	Modèle analytique	11.5164	11.5995	11.6852	11.7736	11.8649
		FEM	11.1720	11.2453	11.1364	11.4519	11.4789
		Erreur %	3.0826	3.1493	4.9280	2.8094	3.3625
	50	Modèle analytique	11.4270	11.4823	11.5643	11.6489	11.7361
		FEM	11.2064	11.2807	11.3573	11.4364	11.5175
		Erreur %	1.9684	1.7867	1.8223	1.8584	1.8979
	100	Modèle analytique	11.3659	11.4443	11.5252	11.6085	11.6945
		FEM	11.2768	11.3532	11.4321	11.5132	11.5970
		Erreur %	0.7900	0.8021	0.8146	0.8072	0.8407
20	0	Modèle analytique	12.4668	12.6136	12.7214	12.8329	12.9485
		FEM	12.3946	12.4951	12.5985	12.7060	12.8169
		Erreur %	0.5827	0.9483	0.9751	0.9983	1.0267
	25	Modèle analytique	12.6642	12.7737	12.8871	13.0047	13.1268
		FEM	12.4419	12.5438	12.6491	12.8711	12.4896
		Erreur %	1.7865	1.8329	1.8813	1.9323	1.9863
	50	Modèle analytique	12.5150	12.6193	12.7272	12.8390	12.9548
		FEM	12.4896	12.5929	12.7002	12.8113	12.9259
		Erreur %	0.2030	0.2098	0.2129	0.2165	0.2233
	100	Modèle analytique	12.4668	12.5695	12.6757	12.7856	12.8995
		FEM	12.5872	12.6943	12.8051	12.9201	13.0388
		Erreur %	-0.9567	-0.9830	-1.0109	-1.0407	-1.0683
40	0	Modèle analytique	12.8008	12.9594	13.0760	13.1970	13.3225
		FEM	12.7862	12.8962	13.0102	13.1286	13.2517
		Erreur %	0.1137	0.4901	0.5055	0.5207	0.5345
	25	Modèle analytique	13.0141	13.1327	13.2558	13.3835	13.5163
		FEM	12.8379	12.9498	13.0658	13.1864	13.3117
		Erreur %	1.3722	1.4125	1.4537	1.4945	1.5367
	50	Modèle analytique	12.8528	12.9656	13.0824	13.2035	13.3293
		FEM	12.8905	13.0043	13.1225	13.2452	13.3719
		Erreur %	-0.2924	-0.2977	-0.3055	-0.3153	-0.3191
	100	Modèle analytique	12.8008	12.9117	13.0266	13.1456	13.2692
		FEM	12.9984	13.1163	13.2379	13.3653	13.4969
		Erreur %	-1.5203	-1.5603	-1.5963	-1.6439	-1.6871

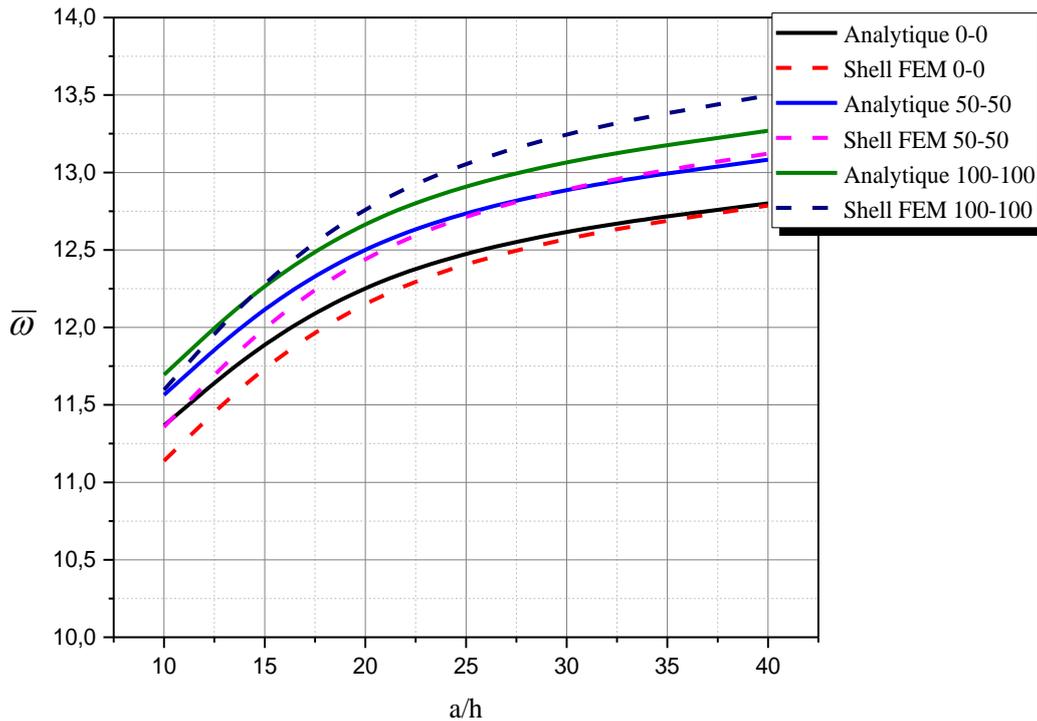


Figure 4. 3 Effet hygrothermique sur les fréquences fondamentales adimensionnelles d’une plaque carrée stratifiée $(0/90)_2$ en composite à fibre de carbone en fonction du rapport a/h

Les fréquences fondamentales adimensionnelles d’une plaque composite simplement appuyée stratifiée à couches croisées $(0/90)_2$ renforcée par la fibre de carbone en fonction du rapport longueur sur largeur a/b sont présentées dans le tableau 4.6 et la figure 4.4 pour une fraction volumique égale à 0,4 et un rapport a/h égale à 20. La plaque est soumise à différentes températures et humidités, les courbes de la figure 4.4 montrent l’effet des conditions hygrothermiques sur les valeurs de fréquences propres où on remarque l’écart entre les conditions (0-0,50-50 et 100-100). Il est à noter que les erreurs maximales de la présente théorie par rapport aux simulations FEM sont inférieures à 4%. Les fréquences propres adimensionnelles sont proportionnelles à la température et à l’humidité, ce qui confirme que les conditions hygrothermiques peuvent affecter les fréquences propres de la plaque en matériau composites.

Tableau 4.6 Effet hygrothermique sur les fréquences fondamentales d'une plaque stratifiée $(0/90)_2$ avec différentes valeurs du rapport a/b pour $V_f=0.4$

a/h	ΔC (%)	ΔT (°C)	Modèle	a/b				
				0.6	0.8	1	1.2	1.6
20	0	0	Modèle analytique	9.2554	10.4697	12.4668	15.2739	23.0162
			FEM	9.1920	10.4094	12.3946	15.1539	22.6406
			Erreur %	0.6895	0.5501	0.5819	0.7920	1.6589
	25	25	Modèle analytique	9.4954	10.7325	12.7737	15.4661	23.5638
			FEM	9.2594	10.4822	12.4783	15.2534	22.7768
			Erreur %	2.5485	2.3876	2.3667	1.3945	3.4553
	50	50	Modèle analytique	9.4591	10.6927	12.7272	15.5897	23.4811
			FEM	9.3521	10.5857	12.6004	15.4018	22.9947
			Erreur %	1.1440	1.0103	1.0061	1.2201	2.1153
	75	75	Modèle analytique	9.5889	10.8350	12.8933	15.7910	23.7764
			FEM	9.4006	10.6341	12.6527	15.4600	23.0574
			Erreur %	2.0033	1.8895	1.9011	2.1411	3.1181
100	100	Modèle analytique	9.5938	10.8450	12.8995	15.7985	23.7874	
		FEM	9.4746	10.7134	12.7442	15.5679	23.2020	
		Erreur %	1.2578	1.2282	1.2185	1.4808	2.5232	

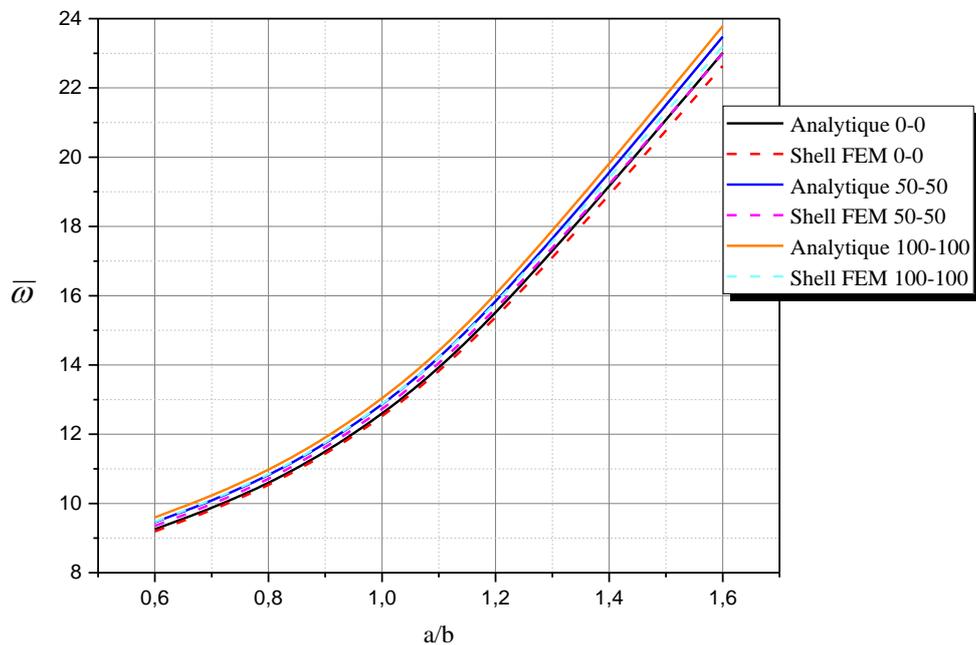


Figure 4. Effet hygrothermique sur les fréquences fondamentales adimensionnelles d'une plaque stratifiée $(0/90)_2$ en composite à fibres de carbone pour différentes valeurs du rapport a/b

Le tableau 4.7 et la figure 4.5 montrent la comparaison des fréquences fondamentales en mode 1 d'une plaque composite stratifiée à fibres de carbone sous différentes conditions aux limites et différentes conditions hygrothermiques pour une fraction volumique $V_f = 0,4$. Les fréquences ainsi que les écarts sont maximaux pour la plaque encadrée et minimaux pour la plaque simplement appuyée. Ces résultats confirment les résultats du chapitre 2 et 3, ceci est dû à la rigidité en flexion qui est plus grande dans les plaques encadrées et moindre dans les plaques simplement appuyées. Les fréquences propres adimensionnelles varient linéairement avec l'augmentation de la température et de l'humidité. Il est clair d'après les résultats obtenus que les conditions hygrothermiques influent sur le comportement de la plaque, mais les conditions aux appuis ont un effet plus important sur les fréquences propres des plaques composites.

Tableau 4.7 Effet hygrothermique sur les fréquences fondamentales d'une plaque carrée stratifiée sous différentes conditions aux limites pour $V_f=0.4$

Couches	ΔC (%)	ΔT (°C)	Modèle	Conditions aux limites		
				SSSS	CCSS	CCCC
$(0/90)_2$	0	0	Modèle analytique	12.4668	20.4975	25.6038
			FEM	12.3946	19.0284	23.8875
			Erreur %	0.5819	7.7204	7.1850
	25	25	Modèle analytique	12.7737	20.7394	25.8890
			FEM	12.4783	19.2254	24.1240
			Erreur %	2.3667	7.8749	7.3162
	50	50	Modèle analytique	12.7272	20.9927	26.1867
			FEM	12.6004	19.2902	24.2021
			Erreur %	1.0061	8.8258	8.2002
	75	75	Modèle analytique	12.8933	21.2582	26.4980
			FEM	12.6527	19.6443	24.6261
			Erreur %	1.9011	8.2157	7.6012
	100	100	Modèle analytique	12.8995	21.5368	26.8238
			FEM	12.7442	19.8680	24.8929
			Erreur %	1.2185	8.3992	7.7567

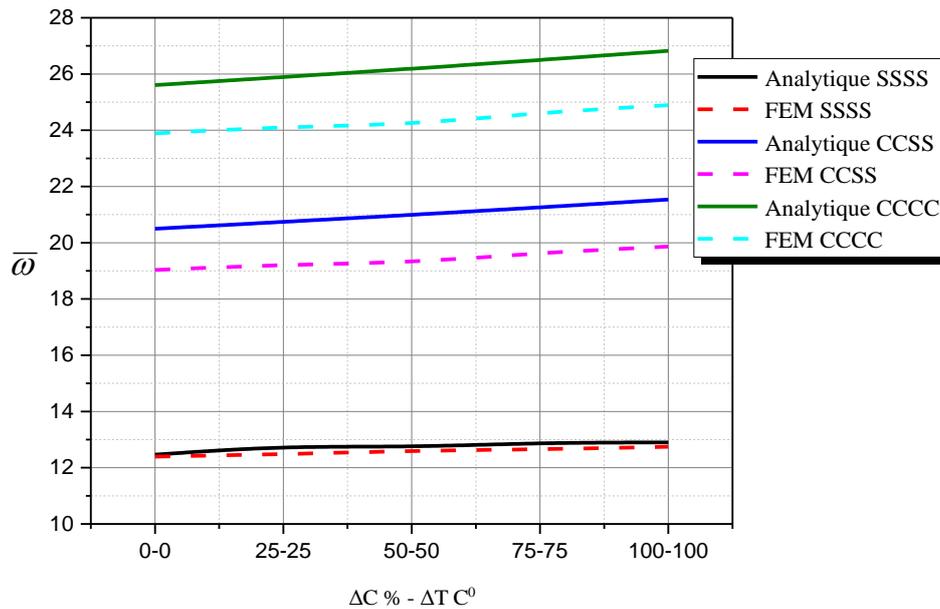


Figure 4.5 Effet hygrothermique sur les fréquences fondamentales adimensionnelles d'une plaque stratifiée en composite à fibres de carbone sous différentes conditions aux limites

Les résultats présentés dans le tableau 4.8 et la figure 4.6 montrent la variation des fréquences fondamentales adimensionnelles d'une plaque composite stratifiée simplement appuyée à fibre de (carbone, kevlar et verre) en fonction de la température et de l'humidité. Les résultats obtenus par la théorie d'ordre élevé sont comparables à ceux obtenus par la méthode des éléments finis. Les erreurs maximales du modèle analytique par rapport aux simulations FEM sont inférieures à 3%. On constate que la variation des fréquences est proportionnelle à la température et à l'humidité. Nous remarquons que les fréquences propres de la plaque renforcée par la fibre de carbone sont maximales et celles renforcées par la fibre de verre minimales. On peut conclure d'après les résultats obtenus que le type de fibre a un impact plus important sur les fréquences propres que les conditions hygrothermiques.

Tableau 4.8 Effet hygrothermique sur les fréquences fondamentales d'une plaque carrée stratifiée simplement appuyée avec variation des fibres pour $V_f=0.4$

Couches	ΔC (%)	ΔT (°C)	Modèle	Matériaux		
				Kevlar	Carbone	Verre
$(0/90)_2$	0	0	Modèle analytique	8.8773	12.4667	7.8446
			FEM	8.8628	12.3946	7.8393
			Erreur %	0.1632	0.5819	0.0677
	25	25	Modèle analytique	9.0440	12.7737	7.9662
			FEM	8.9440	12.4783	7.8989
			Erreur %	1.1184	2.3667	0.8524
	50	50	Modèle analytique	9.0172	12.7272	7.9685
			FEM	9.0295	12.6004	7.9623
			Erreur %	-0.1380	1.0061	0.0779
	75	75	Modèle analytique	9.1070	12.8933	8.0140
			FEM	9.1198	12.6527	8.0295
			Erreur %	-0.1402	1.9011	-0.1926
	100	100	Modèle analytique	9.1103	12.8995	8.0165
			FEM	9.2159	12.7442	8.1008
			Erreur %	-1.1457	1.2185	-1.0402

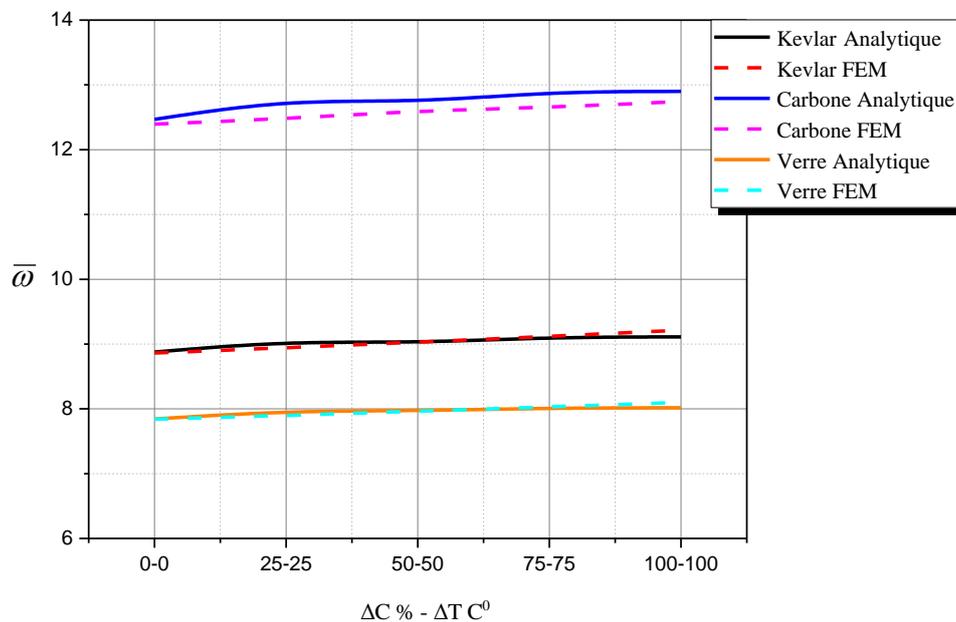


Figure 4. 6 Effet hygrothermique sur les fréquences fondamentales adimensionnelles d'une plaque stratifiée en composite avec différents types de fibres

1.2. Effet hygrothermique sur le comportement des plaques composites à fibres hybrides

Le tableau 4.9 ainsi que la figure 4.7 montrent la variation de la fréquence fondamentale en fonction de la température et de l'humidité d'une plaque composite stratifiée hybride intrafils (carbone/verre, carbone/kevlar et kevlar /verre) pour une fraction volumique $V_f = 0,4$ et un rapport a/h égale à 20. On voit clairement que les résultats obtenus avec notre-modèle analytique sont en excellent accord avec les simulations FEM, les erreurs maximales du modèle théorie par rapport aux simulations FEM sont inférieures à 1% quels que soient le type du renfort et les valeurs de la température et de l'humidité. Une augmentation des conditions hygrothermiques (ΔT et ΔC) fait augmenter la fréquence fondamentale adimensionnelle et le changement de type de renfort change les valeurs de la fréquence fondamentale.

Tableau 4.9. Effet hygrothermique sur les fréquences fondamentales d'une plaque hybride simplement appuyée pour $V_f=0.4$ et $a/h=20$

Couches	ΔC (%)	ΔT (°C)	Modèle	Combinaisons		
				Carbone/Kevlar	Carbone/Verre	Kevlar/Verre
$(0/90)_2$	0	0	Modèle analytique	10.8528	10.4622	8.3743
			FEM	10.8122	10.4276	8.3645
			Erreur %	0.3758	0.3314	0.1175
	25	25	Modèle analytique	10.9756	10.5784	8.4459
			FEM	10.9328	10.5418	8.4357
			Erreur %	0.3914	0.3467	0.1202
	50	50	Modèle analytique	11.1051	10.7011	8.5218
			FEM	11.0601	10.6624	8.5109
			Erreur %	0.4064	0.3625	0.1276
	75	75	Modèle analytique	11.2418	10.8305	8.6022
			FEM	11.1943	10.7900	8.5904
			Erreur %	0.4238	0.3751	0.1371
100	100	Modèle analytique	11.3864	10.9675	8.6875	
		FEM	11.3366	10.9247	8.7307	
		Erreur %	0.4395	0.3912	-0.4943	

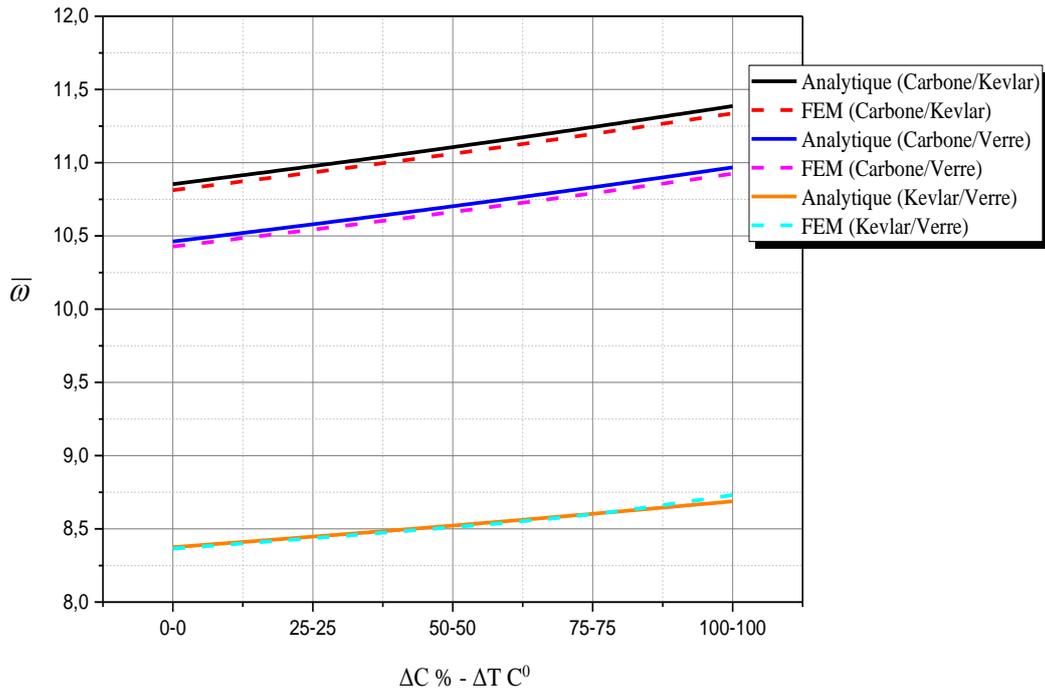


Figure 4.7 Effet hygrothermique sur les fréquences fondamentales adimensionnelles d'une plaque stratifiée hybride intrafils

1.3. Effet hygrothermique sur le comportement de plaques hybrides intercouches

Le tableau 4.10 et la figure 4.8 montrent la comparaison des fréquences fondamentales en fonction de la température et de l'humidité d'une plaque composite stratifiée (0/90)₂ hybride intercouche pour une fraction volumique $V_f = 0,4$ en utilisant la méthode des éléments finis. On voit clairement que les fréquences naturelles du système diminuent de manière linéaire avec l'augmentation de la température et de l'humidité. Les résultats obtenus confirment que le choix de la séquence d'empilement des couches et le type de renfort ont un effet sur les fréquences propres par rapport aux conditions hygrothermiques.

Tableau 4.10. Effet hygrothermique sur les fréquences fondamentales d'une plaque hybride intercouche simplement appuyée pour $V_f=0.4$ et $a/h=20$

Couches	Séquence	ΔC (%) – Δ (°C)				
		0-0	25-25	50-50	75-75	100-100
(0/90) ₂	Carbone	1.6920	1.6850	1.6827	1.6706	1.6632
	C- K- C-K	1.4635	1.4563	1.4514	1.4414	1.4338
	K-C-C-K	1.3396	1.3328	1.3270	1.3189	1.3118
	C-K-K-C	1.3871	1.3790	1.3752	1.3623	1.3537
	C- V- C-V	1.4054	1.3982	1.3933	1.3834	1.3758
	V-C-C-V	1.1922	1.1853	1.1795	1.1715	1.1644
	C-V-V-C	1.2727	1.2636	1.2597	1.2452	1.2358
	Kevlar	1.1929	1.1851	1.1772	1.1692	1.1610
	K- V- K-V	1.1211	1.1132	1.1051	1.0970	1.0888
	V-K-K-V	1.0914	1.0839	1.0762	1.0684	1.0606
	K-V-V-K	1.1266	1.1181	1.1095	1.1008	1.0920
Verre	1.0444	1.0363	1.0281	1.0198	1.0114	

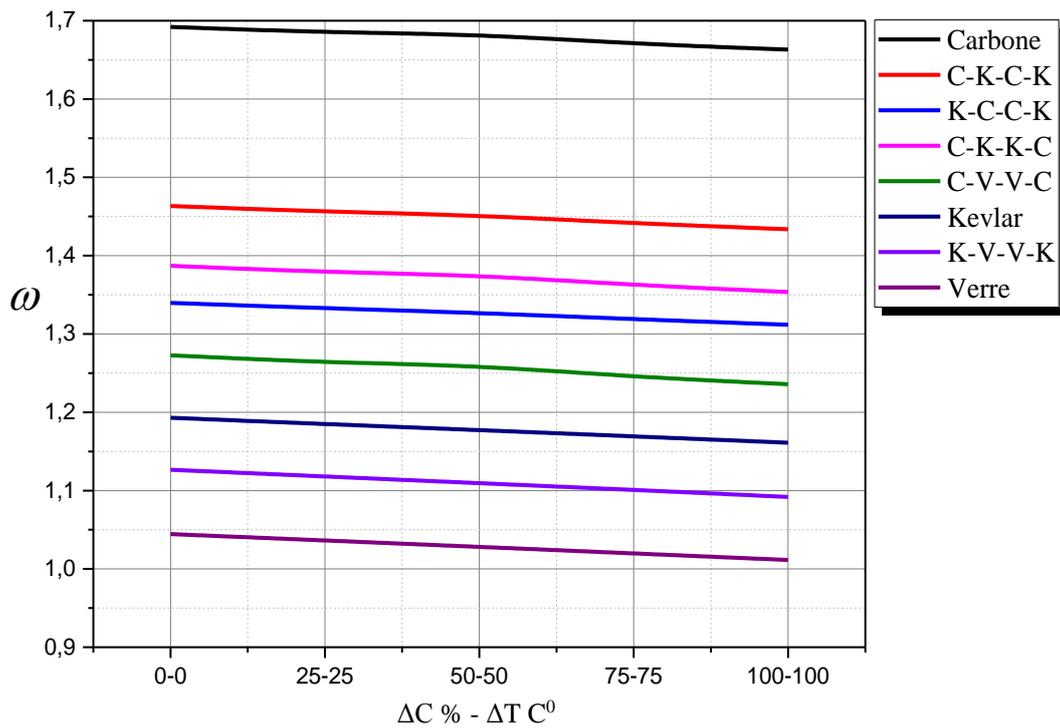


Figure 4. 8 Effet hygrothermique sur les fréquences fondamentales d'une plaque stratifiée hybride intercouche

Conclusion

L'objectif principal de ce chapitre était l'évaluation de l'approche analytique de Bouakazet.al [71] à prédire les fréquences propres de plaques composites sous conditions hygrothermiques. Nous avons étudié une plaque composite à fibre de carbone, une plaque hybride intrafils et une plaque hybride intercouche, les propriétés élastiques du composite ont été calculées en utilisant la loi des mélanges. Les fréquences naturelles prédites par notre théorie raffinée ont été comparées avec celles obtenues par la méthode des éléments finis en utilisant Abaqus. Les propriétés matérielles de la plaque composite sont considérées comme dépendantes de la température et de l'humidité. Les résultats obtenus ont montré que les conditions hygrothermiques peuvent affecter le comportement des plaques composites mais moins que les autres paramètres.

CONCLUSION GENERALE

Les matériaux composites sont de plus en plus utilisés dans des nombreux domaines industriels grâce à leurs avantages. Néanmoins, leur prix et l'impact sur l'environnement restent parmi les principaux inconvénients. Leur utilisation dans les divers industries nécessite d'améliorer la connaissance de ces matériaux. En effet, des travaux ont été menés ces dernières années pour apporter des solutions aux différentes sollicitations notamment les vibrations, le flambement et les conditions hygrothermiques. Récemment, des chercheurs ont suggéré l'hybridation des fibres afin d'obtenir des propriétés optimales du composite pour certaines applications en combinant des fibres naturelles et/ou conventionnelles.

Ce travail constitue une contribution à la compréhension du comportement des composites à fibres hybrides sous chargement mécanique et hygrothermique en utilisant une théorie d'ordre élevé et une analyse par la méthode des éléments finis.

Une étude bibliographique a été nécessaire pour donner une vision assez large des matériaux composites, leurs différents constituants, caractéristiques mécaniques, procédés de fabrication, domaine d'application et leurs avantages et inconvénients. Une comparaison des théories des plaques : la théorie classique, du premier ordre et d'ordres élevés a été réalisée afin de choisir la théorie qui donne des résultats précis. Les études réalisées sur l'hybridation permettent de conclure que cette technique est propre à un certain nombre de composites, dépend du type de fibres, de leur fraction volumique, de la position des couches en cas de composite hybride intercouche et des conditions aux limites. Une étude bibliographique sur l'effet hygrothermique a été également réalisée pour voir l'influence de la température et de l'humidité sur le comportement des structures.

La théorie d'ordre élevé raffinée à quatre variables et une simulation par éléments finis ont été utilisées avec succès dans le deuxième chapitre pour analyser le comportement vibratoire des plaques stratifiées antisymétriques en matériaux composites sous différentes conditions aux limites. La présente théorie prend en considération l'effet du cisaillement transverse lors du calcul des déformations sans besoin de facteurs de correction de cisaillement. Les équations de mouvement ont été développées en utilisant le principe d'Hamilton. Un modèle tridimensionnel et un modèle coque ont été utilisés à l'aide d'Abaqus pour valider le modèle analytique.

Le troisième chapitre a été consacré à l'évaluation des performances de la théorie d'ordre élevé à prédire les fréquences propres de plaques composites hybrides. Les équations de mouvement sont développées en utilisant le principe d'Hamilton. Les modules élastiques de la plaque hybride ont été calculés en utilisant la loi des mélanges. La plaque hybride intercouche (ou couche par couche) a été étudiée à l'aide de code commercial Abaqus.

L'objectif du quatrième chapitre était l'évaluation de l'approche analytique issue de [71] à prédire les fréquences propres de plaques composites sous conditions hygrothermiques. Les propriétés matérielles de la plaque composite sont considérées comme dépendantes de la température et de l'humidité. Nous avons étudié l'effet hygrothermique sur la variation des fréquences propres de plaques composite à fibre de carbone, hybride intrafils et hybride intercouche en variant les valeurs de la température et de l'humidité. Les propriétés élastiques du composite ont été calculé en utilisant la loi des mélanges. Les fréquences naturelles prédites par notre théorie des plaques ont été comparées avec celles obtenues par la méthode des éléments finis.

Les travaux menés dans cette thèse ont montré que les fréquences propres des composites sont dépendants de plusieurs facteurs. Les résultats obtenus ont montré que le rapport des modules, les dimensions de la plaque, la séquence d'empilement, d'orientation des renforts ainsi que les conditions aux limites ont un impact très important sur la stabilité de la plaque. La fraction volumique, le type de fibre et la position des couches dans le cas des composites hybrides intercouches affectent de manière significative les fréquences fondamentales des plaques composites hybrides. Par ailleurs, les conditions hygrothermiques peuvent affecter le comportement des plaques composites mais de manière moindre que les autres paramètres.

Les travaux réalisés dans cette thèse permettent d'envisager des perspectives dans le domaine des matériaux composites. Nous en citons quelques-unes :

- Etudier les vibrations forcées des plaques stratifiées en matériaux composites.
- Utiliser la théorie d'ordre élevé pour étudier le comportement des plaques composites sandwichs.
- Etudier l'hybridation fibres synthétiques-fibres naturelles et 100% naturelles en utilisant la théorie d'ordre élevé.
- Etudier le comportement en vibration des plaques stratifiées 3D en utilisant la théorie d'ordre élevé.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Glossaire des matériaux composites-CARMA-Actualisation octobre 2006.
- [2] L. Gornet, Généralités sur les matériaux composites, École Centrale de Nantes, 2011, HAL Id: cel-00470296.
- [3] Berthelot J.M., Matériaux composites : Comportement mécanique et analyse des structures. Lavoisier, 2012.
- [4] Rayleigh, L. (1877). On progressive waves. *Proc. London Math. Soc.*, 9, 21-26.
- [5] Timoshenko, S. P. (1921). On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bars. *Phil. Mag.*, 41, 744-746.
- [6] E. Reissner, « The effect of transverse shears deformation on the bending of elastic plates », *J. Appl. Mech.*, vol. 12, pp. 69-77, 1945.
- [7] R.D Mindlin, « Influence of rotary inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates », *Journal of Applied Mechanics*, vol. 18, pp. 31-38, 1951.
- [8] [Kapania 1989] R. K. Kapania & S. Raciti. Recent advances in analysis of laminated beams and plates, Part I : Shear effects and buckling. *AIAA Journal*, vol.27, no. 7, pages 923,934, 1989.
- [9] Timoshenko, S. P., & Woinowsky-Krieger, S. (1959). *Theory of plates and shells*. McGraw-hill.
- [10]J. N. Reddy, C. M. Wang, K. H. Lee, « Relationships between bending solutions of classical and shear deformation beam theories », *International Journal of Solids and Structures*, vol. 34(26), pp. 3373-3384, 1997.
- [11]J. N. Reddy, *Theory and Analysis of Elastic plates*, Taylor & Francis, Philadelphia, 1999.
- [12]B. P. Patel, C. S. Munot, S. S. Gupta, G. T. Sanbanson, M. Ganapatthi, « Application of higher-order finite element for elastic stability analysis of laminate cross-ply oval cylindrical shells », *Finite Elements in Analysis and Design*, vol. 40, pp. 1083-1104, 2004.
- [13]Z. Wu, W. Chen, “An efficient higher-order theory and finite element for laminated plates subjected to thermal loading”, *Composite Structures*, vol. 73,pp. 99-109, 2006.
- [14]M. Touratier, « An efficient standard plate theory », *Eng Sci*, vol. 29(8), pp. 901-916, 1991.
- [15]H. Ait Atmane, A. Tounsi, I. Mechab, E. Adda Bedia, « Free vibration analysis of functionally graded plates resting on Winkler Pasternak elastic foundations using a new shear deformation theory », *Int. J. Mech. Mater. Design*, vol. 6 (2), pp. 113-121, 2010.
- [16]M. Karama, K. S. Afaq, S. Mistou, « Mechanical behaviour of laminated composite beam by the new multilayered laminated composite structures model with transverse shear stress continuity », *International Journal of Solids and Structures*, vol. 40, pp. 1525-1546, 2003.
- [17]R. P. Shimpi, « Zeroth order shear deformation theory for plates », *AIAA Journal*, vol. 37, pp. 524-526, 1998.

- [18]Kim, S. E., Thai, H. T., & Lee, J. (2009). A two variable refined plate theory for laminated composite plates. *Composite Structures*, 89(2), 197-205.
- [19]Nedri, K., El Meiche, N., & Tounsi, A. (2014). Free vibration analysis of laminated composite plates resting on elastic foundations by using a refined hyperbolic shear deformation theory. *Mechanics of Composite Materials*, 49(6), 629-640.
- [20]M. Cho, K. Kim, M. H. Kim, « Efficient high order shell theory for laminated composites », *Composite Structures*, vol. 34, pp. 197-212, 1996.
- [21]M. Cho, J. S. Kim. « A postprocess method for laminated shells with a doubly curved nine-nodded finite element », *Composites: Part B*, vol. 31, pp. 65-74, 2000.
- [22]H. Murakami, « Laminated composite plate theory with improved in-plane responses », *Journal of Applied Mechanics*, vol. 53, pp. 661-666, 1986.
- [23]E. Carrera, « On the use of Murakami's zig-zag fonction in the modeling of layered plates and shells », *Computers and Structures*, vol. 82, pp. 541-554, 2004.
- [24]Noor AK. Free vibrations of multilayered composite plates. *AIAA Journal* 1973; 11(7): 1038–1039.
- [25]Reddy JN. A simple higher-order theory for laminated composite plates. *Journal of Applied Mechanics* 1984; 51: 745–52.
- [26]Adim B, Hassaine Daouadji T, Abbès B, Rabahi A. Buckling and free vibration analysis of laminated composite plates using an efficient and simple higher order shear deformation theory. *Mechanics & Industry* 2016; 17(5): 512.
- [27]M. M. Ait Amar, A. Hadj Henni, A. Tounsi, « An efficient and simple refined theory for buckling and free vibration of exponentially graded sandwich plates under various boundary conditions », *J. Sandw. Struct. Mater.*, vol.16 (3), pp. 293–318, 2014.
- [28]M. Sobhy, «Buckling and free vibration of exponentially graded sandwich plates resting on elastic foundations under various boundary conditions», *Composite Structures*, vol. 99, pp. 76–87, 2013.
- [29]K. Swaminathan, S. Patil, « Analytical solutions using a higher order refined computational model with 12 degrees of freedom for the free vibration analysis of antisymmetric angle-ply plates », *Composite Structures*, vol. 82, pp. 209–216, 2008.
- [30]Abderezak, R., Hassaine Daouadji, T., Abbes, B., Rabia, B., Belkacem, A. and Abbes, F. (2017), “Elastic analysis of interfacial stress concentrations in CFRP-RC hybrid beams: Effect of creep and shrinkage”, *Adv. Mater. Res.*, 6(3), 257-278.
- [31]Abdelaziz, H.H., Meziane, M.A.A., Bousahla, A.A., Tounsi, A., Mahmoud, S.R. and Alwabli, A.S.(2017), “An efficient hyperbolic shear deformation theory for bending, buckling and free vibration of FGM sandwich plates with various boundary conditions”, *Steel Compos. Struct.*, 25(6), 693-704.
- [32]Abderezak, R., Daouadji, T. H., Abbes, B., Rabia, B., Belkacem, A., & Abbes, F. (2017). Elastic analysis of interfacial stress concentrations in CFRP-RC hybrid beams: Effect of creep and shrinkage. *Advances in materials Research*, 6(3), 257-278.
- [33]Adim, B., & Daouadji, T. H. (2016). Effects of thickness stretching in FGM plates using a quasi-3D higher order shear deformation theory. *Advances in materials Research*, 5(4), 223-244.

- [34] Benachour, A., Tahar, H. D., Atmane, H. A., Tounsi, A., & Ahmed, M. S. (2011). A four variable refined plate theory for free vibrations of functionally graded plates with arbitrary gradient. *Composites Part B: Engineering*, 42(6), 1386-1394.
- [35] Benferhat, R., Daouadji, T. H., & Mansour, M. S. (2015). A Higher Order Shear Deformation Model for Bending Analysis of Functionally Graded Plates. *Transactions of the Indian Institute of Metals*, 68(1), 7-16.
- [36] S. Xiang, G. Li, W. Zhang, M. Yang, « A meshless local radial point collocation method for free vibration analysis of laminated composite plates », *Composite Structures*, vol. 93, pp.280–286, 2011.
- [37] Daouadji, T. H., Rabahi, A., Abbes, B., & Adim, B. (2016). Theoretical and finite element studies of interfacial stresses in reinforced concrete beams strengthened by externally FRP laminates plate. *Journal of adhesion science and Technology*, 30(12), 1253-1280.
- [38] T. Daouadji, A. Tounsi and E.A. Adda Bedia, "Analytical solution for bending analysis of functionally graded plates", *Scientia Iranica, Transactions B: Mechanical Engineering*, **20**, 516–523 (2013).
- [39] Chedad, A., Daouadji, T. H., Abderezak, R., Belkacem, A., Abbes, B., Rabia, B., & Abbes, F. (2017). A high-order closed-form solution for interfacial stresses in externally sandwich FGM plated RC beams. *Advances in materials Research*, 6(4), 317-328.
- [40] Bourada, M., Tounsi, A., Houari, M. S. A., & Bedia, E. A. A. (2012). A new four-variable refined plate theory for thermal buckling analysis of functionally graded sandwich plates. *Journal of Sandwich Structures & Materials*, 14(1), 5-33.
- [41] Hadji, L., Daouadji, T. H., & Bedia, E. A. (2015). A refined exponential shear deformation theory for free vibration of FGM beam with porosities. *Geomechanics and Engineering*, 9(3), 361-372.
- [42] Hadji, L., Daouadji, T. H., & Bedia, E. A. (2016). Dynamic behavior of FGM beam using a new first shear deformation theory. *Earthquakes and Structures*, 10(2), 451-461.
- [43] Hadji, L., Daouadji, T. H., Tounsi, A., & Bedia, E. A. (2014). A higher order shear deformation theory for static and free vibration of FGM beam. *Steel and Composite Structures*, 16(5), 507-519.
- [44] Hadji, L., Khelifa, Z., Daouadji, T. H., & Bedia, E. A. (2015). Static bending and free vibration of FGM beam using an exponential shear deformation theory. *Coupled systems mechanics*, 4(1), 99-114.
- [45] Daouadji, T. H., & Adim, B. (2016). Theoretical analysis of composite beams under uniformly distributed load. *Advances in materials Research*, 5(1), 1-9.
- [46] Daouadji, T. H., & Adim, B. (2017). Mechanical behaviour of FGM sandwich plates using a quasi-3D higher order shear and normal deformation theory. *Structural Engineering and Mechanics*, 61(1), 49-63.
- [47] Kant, T., & Pandya, B. N. (1988). A simple finite element formulation of a higher-order theory for unsymmetrically laminated composite plates. *Composite structures*, 9(3), 215-246.
- [48] Mantari, J. L., Oktem, A. S., & Soares, C. G. (2012). A new trigonometric shear deformation theory for isotropic, laminated composite and sandwich plates. *International Journal of Solids and Structures*, 49(1), 43-53.
- [49] Mokhtar, Y., Heireche, H., Bousahla, A. A., Houari, M. S. A., Tounsi, A., & Mahmoud, S. R. (2018). A novel shear deformation theory for buckling analysis of single layer graphene sheet based on nonlocal elasticity theory. *Smart structures and systems*, 21(4), 397-405.

- [50] Benferhat, R., Daouadji, T. H., & Mansour, M. S. (2016). Free vibration analysis of FG plates resting on an elastic foundation and based on the neutral surface concept using higher-order shear deformation theory. *Comptes Rendus Mécanique*, 344(9), 631-641.
- [51] Sayyad, A. S., & Ghugal, Y. M. (2014). Flexure of cross-ply laminated plates using equivalent single layer trigonometric shear deformation theory. *Structural Engineering and Mechanics*, 51(5), 867-891.
- [52] Younsi, A., Tounsi, A., Zaoui, F. Z., Bousahla, A. A., & Mahmoud, S. R. (2018). Novel quasi-3D and 2D shear deformation theories for bending and free vibration analysis of FGM plates. *Geomechanics and Engineering*, 14(6), 519-532.
- [53] Zoubida, K., Daouadji, T. H., Hadji, L., Tounsi, A., & El Abbes, A. B. (2016). A new higher order shear deformation model of functionally graded beams based on neutral surface position. *Transactions of the Indian Institute of Metals*, 69(3), 683-691.
- [54] Thai, H. T., & Kim, S. E. (2013). A simple higher-order shear deformation theory for bending and free vibration analysis of functionally graded plates. *Composite Structures*, 96, 165-173.
- [55] Saidane, E. H. (2015). *Etude de l'effet du vieillissement hygrothermique sur le comportement mécanique d'éco-composites à renfort hybride* (Doctoral dissertation, Reims).
- [56] Kureemun, U., Ravandi, M., Tran, L. Q. N., Teo, W. S., Tay, T. E., & Lee, H. P. (2018). Effects of hybridization and hybrid fibre dispersion on the mechanical properties of woven flax-carbon epoxy at low carbon fibre volume fractions. *Composites Part B: Engineering*, 134, 28-38.
- [57] Haneefa, A., Bindu, P., Aravind, I., & Thomas, S. (2008). Studies on tensile and flexural properties of short banana/glass hybrid fiber reinforced polystyrene composites. *Journal of composite materials*, 42(15), 1471-1489.
- [58] Saidane, E. H. (2015). *Etude de l'effet du vieillissement hygrothermique sur le comportement mécanique d'éco-composites à renfort hybride* (Doctoral dissertation, Reims).
- [59] Davoodi, M. M., Sapuan, S. M., Ahmad, D., Ali, A., Khalina, A., & Jonoobi, M. (2010). Mechanical properties of hybrid kenaf/glass reinforced epoxy composite for passenger car bumper beam. *Materials & Design*, 31(10), 4927-4932.
- [60] Ahmed, K. S., & Vijayarangan, S. (2008). Tensile, flexural and interlaminar shear properties of woven jute and jute-glass fabric reinforced polyester composites. *Journal of materials processing technology*, 207(1-3), 330-335.
- [61] El Hadi, S., Scida, D., Assarar, M., Sabhi, H., & Ayad, R. (2017). Composite hybride lin-verre: effet de l'hybridation sur la cinétique de diffusion et les propriétés mécaniques en traction. In *Journées Nationales sur les Composites 2017*.
- [62] Cho, H. K. (2009). Maximizing structure performances of a sandwich panel with hybrid composite skins using particle swarm optimization algorithm. *Journal of mechanical science and technology*, 23(12), 3143-3152.
- [63] Mariem B, El Mahi A, Rebiere Jean-Luc, Beyaoui Moez, Abdennadher Moez, Haddar Mohamed. Caractérisation du comportement vibratoire des composites renforcés par des fibres hybrides lin/carbone, International Congress for Applied Mechanics, Marrakech, 2-4 Mai 2018.
- [64] Gossard, M. L., Seide, P., et Roberts, W. M. (1952) *Thermal buckling of plates*.
- [65] Heldenfels, R. R., & Roberts, W. M. (1952). Experimental and theoretical determination of thermal stresses in a flat plate.
- [66] Whitney, J. M., & Ashton, J. E. (1971). Effect of environment on the elastic response of layered composite plates. *AIAA Journal*, 9(9), 1708-1713.
- [67] Ram, K. S., & Sinha, P. K. (1991). Hygrothermal effects on the bending characteristics of laminated composite plates. *Computers & Structures*, 40(4), 1009-1015.

- [68]Patel, B. P., Ganapathi, M., & Makhecha, D. P. (2002). Hygrothermal effects on the structural behaviour of thick composite laminates using higher-order theory. *Composite Structures*, 56(1), 25-34.
- [69]Kumar, R., Patil, H. S., & Lal, A. (2013). Hygrothermoelastic free vibration response of laminated composite plates resting on elastic foundations with random system properties: Micromechanical model. *Journal of Thermoplastic Composite Materials*, 26(5), 573-604.
- [70]Kumar, R., & Patil, H. S. (2013). Hygrothermally Induced Nonlinear Free Vibration Response of Nonlinear Elastically Supported Laminated Composite Plates with Random System Properties: Stochastic Finite Element Micromechanical Model. *Frontiers in Aerospace Engineering*, 2(2), 143-156.
- [71]Bouakaz, K., Daouadji, T. H., Meftah, S. A., Ameer, M., Tounsi, A., & Bedia, E. A. (2014). A numerical analysis of steel beams strengthened with composite materials. *Mechanics of Composite Materials*, 50(4), 491-500.
- [72]Carrera, E. (1998). Evaluation of layerwise mixed theories for laminated plates analysis. *AIAA journal*, 36(5), 830-839.
- [73]Reddy, J. N., & Hsu, Y. S. (1980). Effects of shear deformation and anisotropy on the thermal bending of layered composite plates. *Journal of Thermal Stresses*, 3(4), 475-493.
- [74]Tungikar, V. B., & Rao, K. M. (1994). Three dimensional exact solution of thermal stresses in rectangular composite laminate. *Composite structures*, 27(4), 419-430.
- [75]Hamidi, A., Houari, M. S. A., Mahmoud, S. R., & Tounsi, A. (2015). A sinusoidal plate theory with 5-unknowns and stretching effect for thermomechanical bending of functionally graded sandwich plates. *Steel and Composite Structures*, 18(1), 235-253.
- [76]Bouderba, B., Houari, M. S. A., Tounsi, A., & Mahmoud, S. R. (2016). Thermal stability of functionally graded sandwich plates using a simple shear deformation theory. *Structural Engineering and Mechanics*, 58(3), 397-422.
- [77]Zenkour, A. M., Allam, M. N. M., & Radwan, A. F. (2014). Effects of hygrothermal conditions on cross-ply laminated plates resting on elastic foundations. *Archives of civil and mechanical engineering*, 14(1), 144-159.
- [78]Panduro, R. M. R., & Mantari, J. L. (2017). Hygro-thermo-mechanical behavior of classical composites using a new trigonometrical shear strain shape function and a compact layerwise approach. *Composite Structures*, 160, 378-391.
- [79]Pan, Z., Gu, B., & Sun, B. (2016). Thermo-mechanical behaviors of 3-D braided composite material subject to high strain rate compressions under different temperatures. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 23(4), 385-401.
- [80]Tlidji, Y., Daouadji, T. H., Hadji, L., Tounsi, A., & Bedia, E. A. A. (2014). Elasticity solution for bending response of functionally graded sandwich plates under thermomechanical loading. *Journal of Thermal Stresses*, 37(7), 852-869.
- [81]Liu, C. F., & Huang, C. H. (1996). Free vibration of composite laminated plates subjected to temperature changes. *Computers & structures*, 60(1), 95-101.
- [82]Parhi, P. K., Bhattacharyya, S. A., & Sinha, P. K. (2001). Hygrothermal effects on the dynamic behavior of multiple delaminated composite plates and shells. *Journal of Sound and Vibration*, 248(2), 195-214.
- [83]Naidu, N. S., & Sinha, P. K. (2007). Nonlinear free vibration analysis of laminated composite shells in hygrothermal environments. *Composite Structures*, 77(4), 475-483.

- [84]Safaeifar, H., & Karimi, A. (2015). The Effect of Temperature on the Natural Frequency. *Teknologi Tanaman*, 12(2), 520-528.
- [85]Tounsi, A., & Amara, K. (2005). Stiffness degradation in hygrothermal aged cross-ply laminate with transverse cracks. *AIAA journal*, 43(8), 1836-1843.
- [86]Ameur, M., Tounsi, A., Benyoucef, S., Bouiadjra, M. B., & Bedia, E. A. (2009). Stress analysis of steel beams strengthened with a bonded hygrothermal aged composite plate. *International Journal of Mechanics and Materials in Design*, 5(2), 143-156.
- [87]Wu, X., Zheng, H., Liu, Y., & Leng, J. (2010). Thermomechanical Property of Epoxy Shape Memory Polymers. *International Journal of Modern Physics B*, 24(15n16), 2386-2391.
- [88]Attia, A., Bousahla, A. A., Tounsi, A., Mahmoud, S. R., & Alwabli, A. S. (2018). A refined four variable plate theory for thermoelastic analysis of FGM plates resting on variable elastic foundations. *Structural Engineering and Mechanics*, 65(4), 453-464.
- [89]Bousahla, A. A., Benyoucef, S., Tounsi, A., & Mahmoud, S. R. (2016). On thermal stability of plates with functionally graded coefficient of thermal expansion. *Structural Engineering and Mechanics*, 60(2), 313-335.
- [90]Reddy, J. N. (2004). *Mechanics of laminated composite plates and shells: theory and analysis*. CRC press.
- [91]Chikh, A., Tounsi, A., Hebali, H., & Mahmoud, S. R. (2017). Thermal buckling analysis of cross-ply laminated plates using a simplified HSDT. *Smart Structures and Systems*, 19(3), 289-297.
- [92]El-Haina, F., Bakora, A., Bousahla, A. A., Tounsi, A., & Mahmoud, S. R. (2017). A simple analytical approach for thermal buckling of thick functionally graded sandwich plates. *Structural Engineering and Mechanics*, 63(5), 585-595.
- [93]Daouadji, T. H., Adim, B., & Benferhat, R. (2016). Bending analysis of an imperfect FGM plates under hygro-thermo-mechanical loading with analytical validation. *Advances in materials Research*, 5(1), 35-53.
- [94]Rabia, B., Abderezak, R., Daouadji, T. H., Abbes, B., Belkacem, A., & Abbes, F. (2018). Analytical analysis of the interfacial shear stress in RC beams strengthened with prestressed exponentially-varying properties plate. *Advances in materials Research*, 7(1), 29-44.
- [95]Zoubida, K., Daouadji, T. H., Hadji, L., Tounsi, A., & El Abbes, A. B. (2016). A new higher order shear deformation model of functionally graded beams based on neutral surface position. *Transactions of the Indian Institute of Metals*, 69(3), 683-691.
- [96]M. A. Ben Henni, B. Adim, T. Hassaine Daouadji, B. Abbès, F. Abbès, Y. Li, et A. Bouzidane. A comparison of closed-form and finite-element solutions for the free vibration of hybrid cross-ply laminated plates. *Mechanics of Composite Materials*, Vol. 55, No. 2, May 2019 (Russian Original Vol. 55, No. 2, March-April, 2019).
- [97]M.A. Ben Henni, T. Hassaine Daouadji, B. Abbès, B. Adim, Y. Li et F. Abbes. Dynamic analysis for anti-symmetric cross-ply and angle-ply laminates for simply supported thick hybrid rectangular plates. *Advances in Materials Research*, Vol. 7 No. 2 (2018) 119-136.
- [98]M. A. Ben Henni, T. H. Daouadji, B. Abbès, Y. M. Li and F. Abbès. Analytical and Numerical Results for Free Vibration of Laminated Composites Plates. *International Journal of Chemical and Molecular Engineering*, 12(6): 300-304, 2018.
- [99]M. A. Ben Henni, T. Hassaine Daouadji, B. Abbès, F. Abbès, Y. Li et B. Adim. Numerical analysis for free vibration of hybrid laminated composite plates for different boundary conditions. *Structural Engineering and Mechanics*, Vol. 70 No. 4, 2019.

- [100] A. Belkacem, H. D. Tahar, R. Abderrezak, M. A. Ben Henni, Z. Mohamed, Boussad Abbès. Mechanical buckling analysis of hybrid laminated composite plates under different boundary conditions. *Structural Engineering and Mechanics*, 66(6): 761-769, 2018.
- [101] M. A. Ben Henni, T. Hassaine Daouadji , B. Abbès , Y. LI , F. Abbès. Analytical and Numerical Results for Free Vibration of Laminated Composites Plates, *ICPP 2018: 20th International Conference on Polymers and Polymerization*, Paris, France, June 25-26, 2018.
- [102] M. A. Ben Henni, B. Abbès, F. Abbès, Y. Li, T. Hassaine Daouadji. Modèles analytique et numérique pour l'analyse vibratoire de plaques composites hybrides. *CSMA 2019, 14ème Colloque National en Calcul des Structures 13-17 mai 2019*, Presqu'île de Giens (Var), France.
- [103] M. A. Ben Henni, B. Adim, T. Hassaine Daouadji, A. Bouzidane, Y. Li, B. Abbès. Vibration libre des plaques en matériau composite. *CIMA 2016, International Conference on Mechanics and Aeronautics*, October 18-20, 2016 Algiers, Algeria.
- [104] M. A. Ben Henni, B. Adim, T. Hassaine Daouadji, A. Bouzidane, Y. Li, B. Abbès. Contribution à l'étude de la vibration libre des plaques en matériaux composites. *Workshop International Plasturgie (WIP'1) 2016*, 29-30 Octobre 2016 à Oran, Algérie.
- [105] B. Adim, M. A. Ben Henni, T. Hassaine Daouadji, A. Rabahi, M. Zidour. vibration des plaques stratifiée en matériaux composites sous divers conditions aux limites. *CIMA 2016, International Conference on Mechanics and Aeronautics*, October 18-20, 2016 Algiers, Algeria.

Contribution à l'étude de la vibration des plaques en matériaux composites sous chargement mécanique et thermomécanique

Ce travail a pour objectif d'analyser le comportement en vibrations libres de composites stratifiés à fibres hybrides en utilisant d'une part, une théorie d'ordre élevé à quatre variables qui prend en considération l'effet de cisaillement transverse lors du calcul des déformations ; et d'autre part une analyse par la méthode des éléments finis. L'équation du mouvement de la plaque stratifiée est obtenue en utilisant de principe d'Hamilton. Les expressions mathématiques sont obtenues en utilisant la solution de Navier pour différentes conditions aux limites. Afin de valider les modèles proposés nous avons d'abord comparé nos résultats avec des modèles existants dans la littérature pour les matériaux non hybrides. Les modules élastiques de la plaque hybride sont calculés en utilisant la loi des mélanges. Ensuite, nous avons étudié les effets des dimensions de la plaque, de la fraction volumique et du type de fibres, de la position des couches (pour le cas de l'hybridation intercouche) ainsi que les conditions aux limites sur les fréquences fondamentales des plaques composites hybrides. Comme il n'y a aucune donnée disponible dans la littérature pour les plaques composites hybrides, la solution en éléments finis a été utilisée pour valider les résultats obtenus par la théorie d'ordre élevé. Les résultats montrent la bonne précision de la solution analytique proposée pour la prévision des fréquences fondamentales des plaques stratifiées hybrides. Comme les conditions hygrothermiques généralement dégradent la rigidité des structures, nous avons étudié les effets de température et de l'humidité sur la stabilité des plaques composites hybrides et non hybrides. Les résultats obtenus pour les fréquences fondamentales montrent que les conditions hygrothermiques affectent le comportement des plaques composites mais à moindre échelle.

Mots-clefs : Plaques composites hybrides, théorie des plaques d'ordre élevé, vibrations libres, méthode des éléments finis, effets hygrothermiques.

Contribution to the study of vibration of composite material plates under mechanical and thermomechanical loadings

The aim of this work is to analyze the vibration behavior of hybrid fiber composite laminates by using, on the one hand, the four-variable high order theory taking into account the transverse shear effect for strain calculation; and on the other hand by the finite element method analysis. The equation of motion of the laminated plate is obtained using Hamilton's principle. The mathematical expressions are obtained using the Navier solution for different boundary conditions. In order to validate the proposed models, we compared our results with existing models in the literature for non-hybrid composites. The elastic moduli of the hybrid plate were calculated using the law of mixtures. Then, we studied the effects of the plate dimensions, the volume fraction, the type of fiber, the position of layers (in the case of interlayer hybridization) on the fundamental frequencies of hybrid composite plates. Since, there is no data available in the literature for hybrid composite plates, the finite element solution is used to validate the results obtained by the high order theory. The results show good accuracy of the proposed analytical solution for the prediction of the fundamental frequencies of hybrid stratified plates. Hygrothermal conditions generally degrade the rigidity of structures, we studied the effects of temperature and humidity on the stability of hybrid and non-hybrid composite plates. The results obtained for the fundamental frequencies show that the hygrothermal conditions can affect the behavior of composite plates but with a lesser effect.

Keywords: Hybrid composite plates, high order plate theory, free vibrations, FEM, hygrothermal effects.

Discipline : MÉCANIQUE DES SOLIDES, GÉNIE MÉCANIQUE, PRODUCTIQUE, TRANSPORT ET GÉNIE CIVIL

Spécialité : Science de l'ingénieur

Université Ibn Khaldoun de Tiaret

LGéo2D

BP 78 Zaaroura, 14000 Tiaret, Algérie

Université de Reims Champagne-Ardenne

GRESPI - EA 4694

Campus Moulin de la Housse, 51100 Reims, FRANCE

