



**FACULTÉ DES SCIENCES APPLIQUÉES**

**DÉPARTEMENT GÉNIE CIVIL**

**Mémoire de fin d'études en vue de l'obtention du diplôme de Master**

Spécialité : Génie Civil

Option : Structures

Présenté par :

DIAH Taieb

DEMNI Belahcen

*Sujet du mémoire*

**Développement d'une nouvelle cinématique pour  
l'analyse de la vibration libre et de la stabilité des  
plaques composites**

*Soutenu publiquement le /07/2021 devant le jury composé de :*

Mr. TLIDJI Youcef

Président

Mr. DRAICHE Kada

Rapporteur

Mme. KHELIFA Zoubida

Examineur

Mlle. OUAZIR Khatima

Examineur

PROMOTION : 2020/2021

## *Remerciements*

*Tout d'abord nous remercions avant tous, Dieu le tout puissant qui nous  
donné*

*Le courage, et la volonté pour atteindre mon objectif*

*Nous voudrions également exprimer nos plus forts remerciements à nos chères  
Familles pour leurs encouragements*

*Nous remercions chaleureusement notre encadreur Mr.DRAICHE Kada qui  
a été  
attentif à l'évolution de notre mémoire et a apporté toute sa contribution  
pour  
mener à bien ce travail.*

*Nous voudrions remercier tous les membres de la faculté de l'université Ibn  
Khalidoun avec qui nous avons passé d'agréables moments. Et surtout nos  
Amis Proches*

## *Dédicaces*

*Nous dédions ce travail à :*

*Mos parents*

*Qui m'ont été d'un grand soutien autant matériel que moral et  
qui n'ont ménagé aucun effort pour me venir en aide.*

*Nous dédions également ce travail*

*A notre encadreur Mr : Draiche Kada*

*À Tout mes chers amis*

## *Résumé*

Dans la présente étude, une nouvelle cinématique de déformation en cisaillement d'ordre élevé est développée pour étudier la vibration libre et la stabilité des plaques composites stratifiées à empilement croisé. La théorie tient en compte les effets de la variation hyperbolique des contraintes de cisaillement transversal à travers l'épaisseur de la plaque en satisfaisant les conditions aux limites des contraintes nulles sur les surfaces supérieure et inférieure de la plaque sans utiliser le facteur de correction de cisaillement. Les équations d'équilibre et les conditions aux limites sont dérivées en utilisant le principe d'Hamilton, ensuite la solution de Navier est employée pour résoudre les problèmes de vibration libre et du flambement des plaques simplement appuyées en composites stratifiés. Les résultats obtenus par la présente théorie raffinée pour les fréquences naturelles et les charges critiques du flambement sont comparés à ceux obtenus par d'autres théories précédemment publiés dans la littérature. On peut conclure que la théorie proposée est précise et efficace pour étudier la réponse dynamique et la stabilité des plaques en matériaux composites.

**Mots-clés:** plaques stratifiés, vibration libre, flambement, théorie raffinée, principe d'Hamilton.

## *Abstract*

In the present study, a novel high-order shear deformation kinematics is developed to investigate the free vibration and stability of cross-ply laminated composite plates. This theory takes into account the effects of the hyperbolic variation of transverse shear stresses across the thickness of the plate by satisfying the boundary conditions of zero stresses on the top and bottom surfaces of the plate without using the shear correction factor. The equilibrium equations and boundary conditions are derived using the Hamilton's principle, and then Navier's solution is used to solve the problems of free vibration and buckling of simply supported laminated composite plates. The results obtained by this refined theory for natural frequencies and critical buckling loads are compared with those obtained by other theories previously published in the literature. It can be concluded that the proposed theory is precise and efficient to study the dynamic response and the stability of composite materials plates.

**Keywords:** Laminated plates, free vibration, buckling, refined theory, Hamilton's principle.

## ملخص

في هذه الدراسة ، تم تطوير حركيات جديدة عالية المستوى لإجهاد القص للتحقيق في الاهتزاز الحر وثبات الألواح المركبة المصفحة المتقاطعة. تأخذ النظرية في الاعتبار تأثيرات التباين الزائدي لضغوط القص المستعرض عبر سماكة اللوحة من خلال تلبية الشروط الحدودية للضغوط الصفرية على الأسطح العلوية والسفلية للوحة دون استخدام عامل تصحيح القص. يتم اشتقاق معادلات التوازن وشروط الحدود باستخدام مبدأ هاملتون ، ثم يتم استخدام حل Navier لحل مشاكل الاهتزاز الحر والتواء الألواح المدعومة ببساطة في مركبات ذات طبقات. تمت مقارنة النتائج التي تم الحصول عليها من خلال هذه النظرية المكررة للترددات الطبيعية وأحمال الانثناء الحرجة مع تلك التي تم الحصول عليها من خلال النظريات الأخرى المنشورة مسبقاً في الأدبيات. يمكن استنتاج أن النظرية المقترحة دقيقة وفعالة لدراسة الاستجابة الديناميكية واستقرار الألواح في المواد المركبة.

**الكلمات المفتاحية:** صفائح مغلقة ، اهتزاز حر ، انحناء ، نظرية مصقولة ، مبدأ هاملتون.

**Table des matières**

<b>Remerciements</b> .....	i
<b>Dédicaces</b> .....	ii
<b>Résumé</b> .....	iii
<b>Abstract</b> .....	iv
<b>المخلص</b> .....	v
Liste des Figures .....	vi
Liste des Tableaux .....	vii
Liste des Notations .....	viii
Liste des Abréviations .....	ix
Introduction Générale.....	1
<b>Chapitre I: Généralités Sur Les Matériaux Composites</b>	
I.1. Introduction .....	4
I.2 Les constituants de base d'un matériau composite. ....	5
I.2.1 Les renforts. ....	5
I.2.1.1 Fibre de verre .....	6
I.2.1.2 Fibre de carbone. ....	8
I.2.1.3 Fibre d'aramide (Kevlar). ....	9
I.2.1.4 Autres types de fibres. ....	9
I.2.2. Matrices.....	10
I.2.2.1. Les thermoplastiques .....	10
I.2.2.2. Les thermodurcissables .....	11
I.2.2.3. Propriétés mécaniques des composites. ....	11
I.3. Classification des matériaux composites .....	12
I.3.1. Classification suivant la forme des constituants .....	12
I.3.2. Classification suivant la nature de la matrice.....	13
I.4. Architecture des matériaux composites .....	13
I.4.1. Monocouches .....	13
I.4.2. Stratifié.....	14
I.4.3. Sandwichs .....	15
I.5. Applications des matériaux composites au génie civil .....	15
I.6. Les avantages et les inconvénients des matériaux composites .....	16

---

I.6.1. Des avantages.....	16
I.6.2. Des inconvénients .....	16
I.7. Conclusion .....	17
<b>Chapitre II : Comportement mécanique et les différentes théories des plaques composites.</b>	
II.1. Introduction .....	17
II.2.Historique .....	18
II.3. Comportement mécanique des matériaux composites .....	18
II.3.1 Champ des déplacements .....	19
II. 3.2. Champ des déformations .....	19
II. 3.3. Champs de contraintes.....	21
II.3.4. Comportement en membrane-flexion-torsion .....	21
II.2.3.5. Comportement en flexion et torsion .....	24
II.4.Loi de comportement.....	25
II.4.1.Matériau isotrope.....	26
II.4.2. Matériau isotrope transverse.....	26
II.4.3. Matériau monoclinique.....	26
II.4.4. Matériau orthotrope .....	27
II.4.5. Matériau triclinique .....	27
II.5. Les différentes théories des plaques .....	28
II.5.1. Modèles monocouche équivalente.....	28
II.5.1.1. Théorie classique des plaques (CPT).....	28
II.5.1.2. Théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT) .....	29
II.5.1.3. Théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé (HSDT) .....	30
II.5.1.4. La théorie de déformation des plaques quasi-3D .....	34
II.5.1.5 La théorie raffinée de déformation des plaques (RPT) .....	34
II.5.2 Approche par couche .....	35
II.5.3. Approche par développement asymptotique .....	37
II.6. Conclusion .....	37
<b>Chapitre III : Etude analytique du flambement et de la vibration libre des plaques composites.</b>	
III.1.Introduction .....	39
III.2. Modèle d'une plaque stratifié .....	39
III.2.1. Configuration géométrique.....	39

---

III.2.2. Hypothèses et formulation mathématique .....	40
III.3. Cinématique et relations constitutive .....	40
III.3.1. Champ de déplacement .....	40
III.3.2. Champ de déformation .....	40
III.3.3. Relations constitutives .....	41
III.4. Equations de mouvement .....	42
III.5. Solutions analytiques des plaques composites .....	46
III.6. Conclusion.....	49
<b>Chapitre IV : Résultats et discussions</b>	
IV.1.Introduction .....	50
IV.2. Les propriétés des matériaux utilisés .....	51
IV.3. Résultats d'analyse du flambement des plaques composites .....	52
IV.4. Résultats d'analyse de la vibration libre des plaque composites .....	56
IV.5.Conclusion .....	58
<b>Conclusion générale</b> .....	59
<b>Références bibliographiques</b> .....	60

---

**Liste des Figures**

**Chapitre I**

Fig. I.1 Description d'un matériau composite ..... 5

Fig. I.2 Types de renforts ..... 6

Fig. I.3 Fibre de verre..... 7

Fig. I.4 Fibre de carbone ..... 8

Fig. I.5 Fibre d'aramide (Kevlar) ..... 9

Fig. I.6 différent type des matériaux composite..... 13

Fig. I.7 composite monocouche ..... 14

Fig. I.8 Schéma illustratif d'un matériau composite stratifié..... 14

Fig. I.9 Structure composite sandwich ..... 15

**Chapitre II**

Fig. II.1 : Résultantes des efforts sur une plaque composite. Kirchhoff .....22

Fig .II.2 : Moments de flexion et de torsion sur une plaque composite. Kirchhoff .....24

Fig. II.3 Géométrie déformée et non déformée d'un côté de plaque selon les hypothèses de la théorie classique de Kirchhoff ..... 29

Fig. II.4 Géométrie déformée et non déformée d'un côté de plaque selon les hypothèses de la théorie du premier ordre Reissner-Mindlin..... 30

Fig. II.5 Géométrie déformée et non déformée d'un côté de plaque selon les hypothèses de la théorie d'ordre élevé ..... 31

Fig. II.6: Champ de déplacements des modèles couches discrètes, approche cinématique..... 36

Fig. II.7 Champ de déplacements des modèles zig-zag, approche cinématique ..... 37

**Chapitre III**

Fig. III.1 Géométrie et système de coordonnées de la plaque stratifiée..... 32

**Chapitre IV**

Fig. IV.1 Une plaque stratifiée soumise à des forces de compression dans le plan.....43

**Liste des Tableaux**

**Chapitre I**

Tableau I. 1 Principales différences entre matrices thermoplastique et thermodurcissable..... 11

Tableau I. 2 Propriétés mécaniques typiques des composites..... 12

**Chapitre IV**

Tableau IV.1 Les différentes théories des plaques stratifiées .....42

Tableau IV.2 Comparaison de la charge critique de flambement ( $N_{cr}$ ) pour plaques carrées composites stratifiées simplement appuyées ( $0^0/90^0/0^0$ ) sous compression uniaxiale et biaxiale ( $b = a, a/h = 10$ ) .....45

Tableau IV. 3 Comparaison de la charge critique de flambement ( $N_{cr}$ ) pour plaques carrées composites stratifiées simplement appuyées ( $0^0/90^0/0^0/90^0/0^0$ ) sous compression uniaxiale et biaxiale ( $b = a, a/h = 10$ ). .....46

Tableau IV.4 Comparaison de la charge critique de flambement ( $N_{cr}$ ) pour quatre couches simplement supportées ( $0^0/90^0/90^0/0^0$ ) plaques rectangulaires composites stratifiées sous compression uniaxiale et biaxiale .....47

Tableau IV.5 Comparaison des fréquences naturelles non dimensionnelles de plaques composites carrées simplement supportées ( $b = a, a/h = 5$ ).....49

Liste des Notations

$\{ \}$	Vecteur
$[ ]$	Matrice
$i, j$	Nombre naturel
$\nu_{ij}$	Coefficient de poisson
$E_1, E_2$	Modules d'élasticité longitudinal et transversal
$G_{ij}$	Module de cisaillement dans le plan
$w_b$	Composante de la flèche due à la flexion
$w_s$	Composantes de la flèche due au cisaillement
$\sigma_{ii}$	Contraintes normales
$\sigma_{ij}$	Contraintes de cisaillement
$\epsilon_{ii}$	Déformations normales
$\epsilon_{ij}$	Déformations de cisaillement
$\gamma_{ij}$	Déformations angulaires (distorsions)
$N_x, N_y, N_{xy}$	Efforts normaux
$M_x, M_y, M_{xy}$	Moments de flexion
$M_x^b, M_y^b, M_{xy}^b$	Moments de flexion
$M_x^s, M_y^s, M_{xy}^s$	Moment supplémentaire du au cisaillement transverse
$N_x^0, N_y^0, N_{xy}^0$	Les forces axiales de compression
$V_{xz}^s, V_{yz}^s$	Effort de cisaillement
$\gamma_{xz}^0, \gamma_{yz}^0$	Les déformations de cisaillement transverse mesurées sur le plan moyen.
$\delta_u, \delta_v, \delta_w$	Champ virtuel de déplacement
<b>m, n</b>	Nombres de mode
<b>I</b>	les inerties de masse
<b>u, v, w</b>	Les déplacements dans les directions $x, y, z$
$u_0, v_0, w_0, \varphi_x, \varphi_y$	Les composantes de déplacement sur le plan moyen de la plaque
$A_{ij}$	Termes de rigidité de la matrice de membrane

$B_{ij}$	Termes de rigidité de la matrice de couplage
$D_{ij}$	Termes de la matrice de flexion
$E_{ij}$	Termes de rigidité de la matrice
$F_{ij}$	Termes de rigidité de la matrice
$H_{ij}$	Termes de rigidité de la matrice
$A_{ij}^s$	Termes de rigidité de la matrice
$\phi_x, \phi_y$	Rotations totales de la normale au plan moyen autour des axes $x, y$
$\theta_x, \theta_y$	Rotations autour des axes $x, y$ (les termes du second ordre)
$A', B'$	coefficients qui dépend de la solution employée
$f(z)$	Fonction de cisaillement transverse (gauchissement)
$[K]$	Matrice rigidité globale
$[M]$	Matrice masse globale
$\delta$	l'opérateur variationnel
$a$	Longueur de la plaque
$b$	Largeur de la plaque
$h$	Epaisseur de la plaque
$\partial$	Dérivée partielle
$\rho$	Densité du matériau
$A$	Surface de la plaque
$\overline{Q_{ij}}$	constantes de rigidité
$U$	Energie de déformation de la plaque
$K$	Energie cinétique de la plaque

**Liste des Abréviations**

<b>Abréviations</b>	<b>Définition du terme</b>
<b>CPT</b>	La théorie classique des plaques
<b>FSDT</b>	La théorie de déformation en cisaillement du premier ordre
<b>HSDT</b>	La théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé
<b>TSDT</b>	La théorie de la déformation de cisaillement trigonométrique
<b>RPT</b>	La théorie des plaques raffinée
<b>HYSDT</b>	La théorie de la déformation de cisaillement hyperbolique
<b>ESDT</b>	la théorie de la déformation de cisaillement exponentiel
<b>ESLM</b>	Approche monochouche équivalente
<b>LW</b>	Approche par couche
<b>GD</b>	Composites à Grande Diffusion
<b>HP</b>	Composites à Hautes Performances
<b>CMO</b>	Composites à matrice organique
<b>CMM</b>	Composites à matrice métallique
<b>CMC</b>	Composites à matrice céramique
<b>TD</b>	Matrices thermodurcissables
<b>TP</b>	Matrices thermoplastiques
<b>PES</b>	Polyéther-sulfone
<b>PEI</b>	Polyéther-imide
<b>HR</b>	Fibres à haute résistance classique
<b>HM</b>	Fibres à haut module

# **Introduction Generale**

## Introduction Générale

**L**es matériaux composites sont considérés comme une composante de recherche prometteuse, car on trouve leurs applications dans tous les domaines. A cet effet, le développement de ces matériaux engendre systématiquement la révolution du monde de l'industrie, vu leur importance pour répondre au besoin technologique. Par contre, les matériaux à base de métal qui sont des matériaux classiques commençaient à montrer leur limite, les composants des machines devenaient plus complexes, de ce fait les matériaux composites ont été développés pour trouver des solutions à ces limites.

Étant donné que les matériaux composites sont de plus en plus utilisés dans de nombreuses applications d'ingénierie en raison de leurs propriétés attrayantes. Un tel matériau composite est constitué de deux ou plusieurs matériaux de types différents, dont la performance de combinaison est meilleure que ces composants pris séparément; car leurs propriétés telles que la rigidité, la durée de vie et la résistance à l'usure, la résistance à la corrosion, la résistance à l'usure, la réduction de poids et d'autres propriétés sont améliorées par rapport aux matériaux classiques. Néanmoins, les plaques constituées de ces matériaux nécessitent une analyse structurelle précise pour analyser son comportement correct en vibration et en stabilité.

L'effet de la déformation en cisaillement transverse est plus important dans les plaques épaisses que dans les plaques minces. Par conséquent, diverses théories des plaques ont été développées par les chercheurs pour analyser le comportement en flexion des plaques épaisses. La théorie classique des plaques (CPT) proposée par Kirchhoff [1] ne convient pas aux plaques épaisses en raison de la négligence de la déformation en cisaillement transverse, mais elle est adéquate pour les plaques minces. La théorie de la déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT) développée par Mindlin [2] est adaptée uniquement à l'analyse des plaques moyennement épaisses, car elle ne satisfait pas les conditions de contrainte nulle sur les surfaces supérieure et inférieure de la plaque et nécessite des facteurs de correction de cisaillement pour corriger ce problème. Par conséquent, de nombreuses théories de déformation en cisaillement d'ordre élevé des plaques (HSDT) à cinq variables et six variables ont été développées pour une analyse correct des plaques (Reddy 1984[3], Touratier

[4], Soldatos [5], Karama et al. [6], Sayyad et Ghugal [7], Sayyad [8], Zenkour [9], Sayyad et Ghugal [10], Ghugal et Sayyad [11], Metin [12]).

Au cours de la dernière décennie, une nouvelle classe de théories des plaques a été développée par des chercheurs dans laquelle le champ de déplacement implique seulement quatre inconnues. Shimpi et Patel [13] ont été les premiers à présenter une théorie des plaques impliquant deux inconnues pour l'analyse de la flexion et de la vibration libre des plaques orthotropes. Cette théorie est encore étendue par Thai et Kim [14] pour l'analyse des vibrations libres de plaques stratifiées à empilements croisés et équilibrés en considérant quatre et cinq inconnues. Kim et al.[15] ont également utilisé cette théorie pour l'analyse du flambement des plaques orthotropes en utilisant la technique de la solution de Navier. Thai et Kim (2011, 2012)[16 ,17] ont utilisé une solution de type Levy pour l'analyse de la flexion et du flambement des plaques orthotropes. Après cela, de nombreuses recherches sont rapportées dans la littérature sur différentes théories des plaques à quatre variables. Cependant, ces théories sont appliquées uniquement pour l'analyse de la flexion, du flambement et des vibrations libres des plaques fonctionnellement graduées (Ameur et al. [18], Thai et Vo [19], El Meiche et al. [20], Daouadji et al. [21], Zenkour [22]). Récemment, Sayyad et Ghugal [23] ont présenté une revue critique de la littérature sur les théories raffinées de la déformation en cisaillement pour l'analyse des vibrations libres des plaques composites stratifiées et sandwich. Dans lequel, les théories impliquant quatre ou plus de quatre sont examinées et discutées.

Dans la présente étude, une simple théorie raffinée de déformation en cisaillement hyperbolique qui implique une nouvelle cinématique à quatre variables est utilisée pour analyser les vibrations libres et le flambement des plaques composites stratifiées à séquence d'empilement croisé. La théorie exprime la distribution hyperbolique des contraintes de cisaillement transversales à travers l'épaisseur et satisfait les conditions de contrainte nulle sur les surfaces supérieure et inférieure des plaques. La théorie n'exige pas d'un facteur de correction de cisaillement. Les équations du mouvement et les conditions aux limites sont obtenues en utilisant le principe d'Hamilton. Une solution de forme est obtenue en employant une technique de double série trigonométrique développée par Navier. Enfin, les résultats numériques obtenus en utilisant la présente théorie sont comparés aux solutions des autres théories d'ordre élevé et celle de l'élasticité exacte donnée par Noor [24] pour les vibrations libres et Noor [25] pour l'analyse du flambement des plaques composites stratifiées.

Ce mémoire débute par une introduction générale, s'articule en suite autour de quatre chapitres et s'achève par une conclusion générale et des perspectives.

Le premier chapitre, nous avons défini les matériaux composites, leurs constituants (les matrices et les renforts), leurs propriétés mécaniques et les différents secteurs d'application.

Dans le deuxième chapitre, on a étalé les différents modèles sur les théories des plaques développées dans la littérature pour améliorer l'évolution de la variation du champ des déplacements.

Dans le troisième chapitre, nous avons proposé une solution générale qui s'intéresse au comportement vibratoire et l'étude de la stabilité des plaques composites stratifiées simplement appuyées en impliquant la déformation en cisaillement hyperbolique au moyen d'une simple théorie raffinée à quatre variables indépendantes.

Le quatrième chapitre est réservé pour commenter les résultats numériques obtenus par la validation du présent modèle sur des plaques stratifiées à séquence d'empilement croisé. Plusieurs facteurs ont été pris en considération au profit de cette étude (les propriétés matérielles, la séquence d'empilement, la géométrie de la plaque, etc.).

# ***Chapitre I***

## ***Généralités sur les matériaux composites***

## Chapitre I :

### Généralités sur les matériaux composites

#### III.1 Introduction

Un matériau composite résulte généralement de l'assemblage d'au moins deux matériaux de natures différentes se complétant pour former un matériau qui a des propriétés plus performantes que celles de ses constituants pris séparément. Les constituants du matériau composite sont appelés renfort et matrice. Le renfort, sous forme de fibres ou de particules, assure la tenue mécanique, La matrice a pour rôle de protéger les fibres ou les particules et de transmettre les sollicitations auxquelles sont soumises les pièces. Les renforts fibreux peuvent être utilisés sous différentes formes:

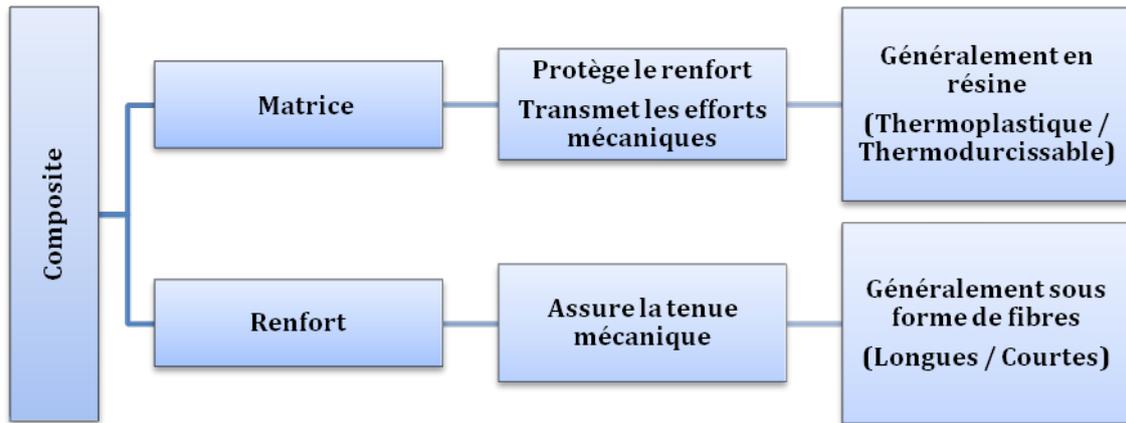
Fibres longues ou fibres courtes, avec différentes natures telles que les fibres de carbone, de verre, naturelles... etc.

Les matrices sont classées généralement en trois familles en fonction de sa nature :

Organique, céramique ou métallique. Nous pouvons également distinguer quelques familles de composites en fonction du type de matrice et de renforts utilisés telles que :

- ✓ Les matériaux composites de grande diffusion (GD) : qui représentent 95% des composites utilisés. Ce sont généralement des résines thermoplastiques ou thermodurcissables renforcées par des fibres courtes où le taux de renfort avoisine 30%. Leurs propriétés mécaniques sont faibles. Ils sont produits en grande série avec un coût faible.

- ✓ Les matériaux composites de haute performance (HP) : qui présentent des propriétés mécaniques spécifiques élevées. Ce sont les matériaux les plus utilisés en aéronautique et dans le spatial. Contrairement aux matériaux de grande diffusion, les renforts sont plutôt des fibres longues et le taux de renforts est supérieur à 50% ce qui influe sur le coût[26].



**Figure I.1** : Description d'un matériau composite

## I.2 Les constituants de base d'un matériau composite

La réalisation d'un matériau composite nécessite donc l'association d'au moins deux composants : le renfort et la matrice, qui doivent être compatibles entre eux et se solidariser. Pour cela, un agent de liaison, appelé interface, est nécessaire. Des charges et des additifs peuvent être ajoutés au composite sous forme d'éléments fragmentaires, de poudres ou liquide, afin de modifier une propriété de la matière à laquelle on l'ajoute [27]. Les renforts assurent une part importante de la tenue mécanique "rigidité et résistance" du composite, tandis que la matrice maintient les renforts en position, transfère les efforts entre eux, et assure toutes les autres fonctions techniques. Il peut par exemple s'agir d'une protection contre diverses agressions "thermiques, chimiques, chocs..." [28].

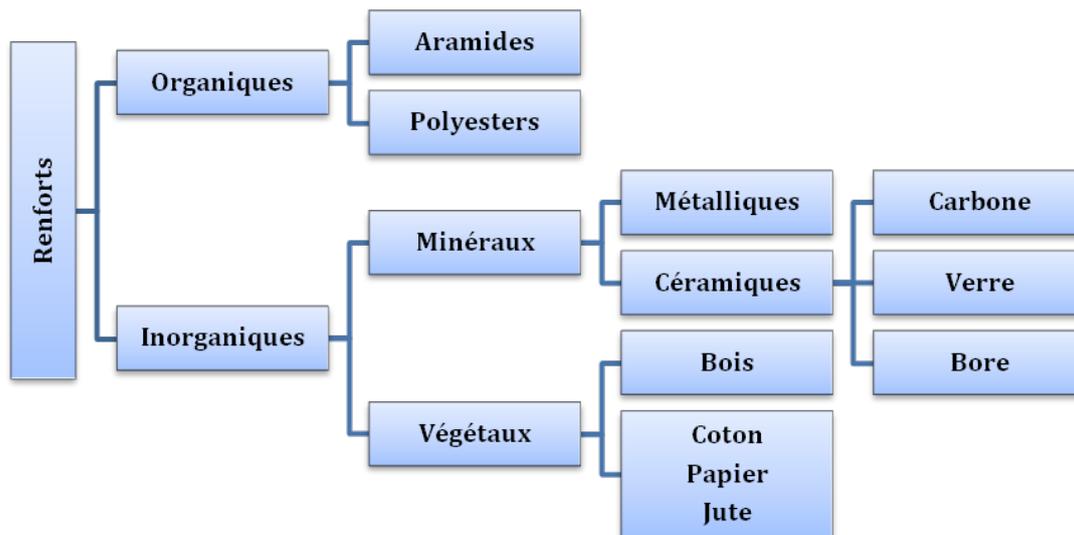
### I.2.1 Les renforts

Le renfort contribue à améliorer la tenue mécanique (résistance et rigidité) du matériau composite.

Les fibres se présentent sous forme linéique (fils, mèches), tissus surfaciques (tissus, mats), multidirectionnelle (tresse, tissus complexes, tissage tri directionnel ou plus) [29].

Les fibres de carbone, de verre et d'aramide sont les plus courantes.

Les fibres naturelles d'origine animale ou végétale sont également utilisées dans certains produits.



**Figure I.2 :** Types de renforts

### I.2.1.1 Fibre de verre

L'expression fibre de verre désigne un filament de verre extrêmement fin Figure 3. Les fibres de verre sont les plus anciennes, les moins chères du marché et les plus couramment utilisés dans le renforcement des matériaux composites (95%). Elles sont élaborées par fibrage du verre fondu à partir de silice et d'additifs. Le verre est coulé en fusion à 1250°C à travers une filière en platine rhodium, après refroidissement, les filaments sont étirés pour obtenir des fibres continues.

Les fibres de verre permettent d'améliorer les propriétés des matériaux, la résistance aux chocs et de réduire le poids. Elles sont réparties en trois qualités :

- ✓ Fibres E pour les composites à grande diffusion (GD) ;
- ✓ Fibres D pour les applications dans la construction électrique (circuits imprimés);
- ✓ Fibres R pour les composites à hautes performances (HP).



**Figure I.3 :** Fibre de verre

Les fibres de verre sont utilisées pour fabriquer des matériaux composites capables de se substituer à l'acier. Elles ont des caractéristiques spécifiques comme la transparence, l'excellente capacité de transmission de la lumière, et sont employées comme fibres optiques dans le domaine médical (endoscopie) et dans le domaine des télécommunications (la fibre optique).

Les principales utilisations de matériaux composites à fibres de verre sont :

- ✓ Le bâtiment et les infrastructures 29%.
- ✓ Les transports 25% : avions, TGV...
- ✓ L'électricité et l'électronique 16%.
- ✓ Les sports et loisirs 14% : perches d'athlétisme, skis et planches de surf...
- ✓ Les équipements industriels 11%.

#### **Avantages**

- ✓ Bonne résistance spécifique (pour le verre R).
- ✓ Une bonne adhérence entre fibres et les résines (matrices).
- ✓ De bonnes propriétés mécaniques, mais inférieures à celles de la fibre de carbone.
- ✓ Tenue à la température élevée.
- ✓ Bon rapport de performances mécanique/prix.

#### **Inconvénients**

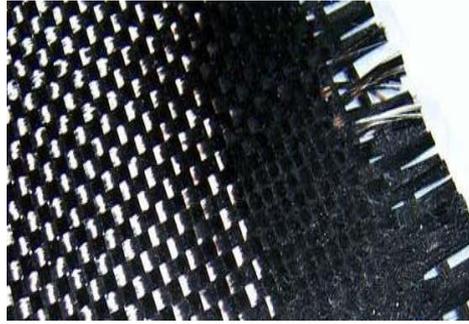
- ✓ Faible module par rapport au carbone ou à l'aramide.
- ✓ Vieillissement au contact de l'eau.

#### **I.2.1.2 Fibre de carbone**

Les fibres de carbone sont composées principalement d'atomes de carbone. Elles sont extrêmement fines environ 5 à 10 micromètres de diamètre Figure I.4 Elles sont produites à partir de poly acrylonitrile (PAN) en plusieurs étapes :

Le (PAN) est initialement oxydé, puis passe à l'étape dite de « carbonisation », enfin l'étape de graphitisation complète le tout pour obtenir des fibres de carbone plus rigides. Ce sont les fibres les plus utilisées dans les applications à hautes performances (aéronautique, construction industrielle, les sports et loisirs).

Les fibres de carbone ont une très bonne conductivité de chaleur et d'électricité.



**Figure I.4** : Fibre de carbone

### Avantages

- ✓ Excellentes propriétés mécaniques
- ✓ Très bonne tenue en température (non oxydante).
- ✓ Bonne tenue à l'humidité.
- ✓ Usinage aisé, faible densité et grande souplesse.
- ✓ Une très bonne tenue à la compression (en comparaison à la fibre de verre ou au kevlar).

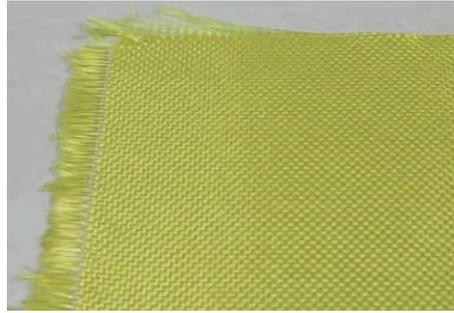
### Inconvénients

- ✓ Une mauvaise résistance à l'abrasion et aux chocs.
- ✓ Leur recyclage (broyage problématique).
- ✓ Cette fibre provoquerait sous certaines formes des risques de cancer du poumon.
- ✓ Prix très élevé.

### I.2.1.3 Fibre d'aramide (Kevlar)

Nées dans les années 1960, les fibres d'aramide sont issues de la chimie organique des polyamides aromatiques. La fibre d'aramide est l'assemblage de filaments jaunes d'une dizaine de micromètres de diamètre. Figure I.5, Il existe deux types de fibres : les fibres à bas module utilisées pour les câbles et les gilets pare-balles, et les fibres à haut module employées dans le renforcement des composites à hautes performances.

Les composites renforcés de fibres d'aramide sont ductiles et ont une très bonne résistance à la chaleur et à la traction. Malheureusement, leur prix est élevé et leur tenue en pression est faible.



**Figure I.5 :** Fibre d'aramide (Kevlar)

### Avantages

- ✓ Bonne résistance spécifique à la traction.
- ✓ Faible densité.
- ✓ Dilatation thermique nulle.
- ✓ Absorption des vibrations, amortissement.

### Inconvénients

- ✓ Prix très élevé.
- ✓ Faible tenue en pression.
- ✓ Faible adhérence avec les résines d'imprégnation.

#### I.2.1.4 Autres types de fibres

Cette partie rassemble toutes les fibres qui ne se retrouvent pas dans les autres groupes. Généralement ces fibres sont utilisées pour des applications spécifiques (papiers spéciaux, pour une bonne conductivité électrique).

Ces fibres possèdent des modules d'élasticité très faibles comparés aux autres fibres.

Les fibres concernées sont :

- ✓ les fibres origine végétale (cellulose, lin, chanvre, ... etc.).
- ✓ les fibres origine minérale (amiante, silice).
- ✓ les fibres synthétiques (tergal, dacron, etc.) issus des polyesters, de polypropylène ou de polyéthylène.

✓ les fibres métalliques (acier, cuivre, aluminium) qui sont utilisées souvent avec des matrices métalliques.

Ces fibres sont appréciées pour diverses raisons par exemple :

- ✓ leur prix de revient assez bas.
- ✓ leur haute capacité isolation thermique.
- ✓ leur propriété isolation acoustique.

## I.2.2 Matrices

La matrice permet de lier les fibres du renfort fibreux entre elles, ainsi que de répartir les efforts (résistance à la compression ou à la flexion). La matrice est facilement déformable et assure la protection chimique des fibres, et lie les fibres du renfort entre eux et assure la répartition de la contrainte c'est « l'emballage ». Les matrices doivent présenter une bonne compatibilité avec le renfort. En outre, elles doivent avoir une masse volumique faible de manière à conserver aux matériaux composites des caractéristiques mécaniques spécifiques élevées.

Les résines les plus utilisées dans les matériaux composites sont :

- Les résines thermodurcissables.
- Les résines thermoplastiques.

Ces deux types de polymères diffèrent en leur structure moléculaire aussi bien que leur comportement.

### I.2.2.1 Les thermoplastiques

Les thermoplastiques sont des chaînes de polymères interconnectées qui sont recyclables. Le recyclage et la réversibilité thermique sont très importants. Il existe également des thermoplastiques spéciaux pouvant résister à des températures de 200 °C ou plus. Les thermoplastiques sont la charge la plus importante en termes de production en raison de leur facilité de mise en œuvre et de leur faible coût [30].

### I.2.2.2 Les thermodurcissables

Les thermodurcissables sont des polymères qui ne peuvent être mis en forme que seule fois mais possèdent des propriétés mécaniques et thermomécaniques élevées par rapport aux thermoplastiques. On retrouve dans cette famille les polyesters insaturés (vinyles ter, les dérivés allyliques, les polyesters condensés, etc.), les résines époxydes, les résines de condensation (Les phénoliques, les aminoplastes, les franques, ... etc.) [30].

**Tableau I.1** : Principales différences entre matrices thermoplastique et thermodurcissable.

Matrices	Thermoplastiques TP	Thermodurcissables TP
Etat de base liquide	Solide prêt à l'emploi	Visqueux à Polymériser
Stockage	Illimité	Réduit
Mouillabilité renforts	Difficile	Aisée
Moulage	Chauffage + refroidissement	Chauggage continu
Cycle	Court	Long
Tenue au Choc	Assez bonne	Limitée
Tenue thermique	Réduite	Bonne
Chutes et déchets	Recyclables	Perdus ou recyclés en charge
Conditions de travail	propreté	Emanation pour "methode humide"

### I.2.2.3 Propriétés mécaniques des composites

Les propriétés mécaniques des matériaux composites varient considérablement. Ces propriétés dépendent des fibres contenues dans le composite (type, quantité et direction), de la matrice utilisée, et du rapport volume-fibre, c'est à dire le ratio du volume des fibres par rapport au volume total du composite. Elles sont aussi affectées par le volume ou la dimension du composite lui-même. En général, les composites de fibres de carbone sont plus solides et plus rigides que les composites de fibres de verre.

Le Tableau I.2 résume les propriétés mécaniques principales des matériaux composites couramment utilisés dans le domaine génie civil[31].

**Tableau I.2** : Propriétés mécaniques typiques des composites [31].

Matériau composite unidirectionnel	Contenu en fibres (par poids)	Densité ( $\text{kg/m}^3$ )	Module d'élasticité longitudinal (GPa)	Résistance à la traction (GPa)
Fibres de verre / Polyester (GFRP laminé)	50-80	1600-2000	20-55	400-1800
Carbone / Epoxy (CFRP laminé)	65-75	1600-1900	120-250	1200-2250
Aramide / Epoxy (FRP laminé)	60-70	1050-1250	40-125	1000-1800

### I.3 Classification des matériaux composites

Les composites peuvent être classés suivant la forme des constituants ou suivant la nature des composants Figure I.7 [32].

#### I.3.1 Classification suivant la forme des constituants

En fonction de la forme des constituants, les composites sont classés en deux grandes classes:

✓ **Composites à fibres** : On appelle composite à fibre, si le renfort se trouve sous forme de fibre (soit fibres continues, soit fibres discontinues, coupées ou courtes).

✓ **Composites à particules** : On appelle composite à particule, lorsque le renfort se trouve sous forme de particule. Au contraire à une fibre, la particule n'a pas de dimension privilégiée. Les particules sont généralement utilisées pour améliorer certaines propriétés des matériaux ou des matrices, comme la rigidité, la tenue à la température, la résistance à l'abrasion...etc. mais dans de nombreux cas, les particules sont simplement utilisées comme charges pour réduire le coût du matériau, sans en diminuer les caractéristiques. Ce type de composite recouvre un domaine étendu dont le développement s'accroît sans cesse.

✓ **Composites stratifiés**: Un stratifié se compose d'au moins deux couches minces de matériau. Les couches peuvent être constituées de différents matériaux monolithiques comme dans les métaux plaqués ou de même matériau composite empilé selon différentes orientations comme pour des stratifiés composites à renforts de fibres longues. Ce dernier devient une classe hybride du composite comportant à la fois le composite à renfort de fibres et la technique de stratification.

✓ **Composites à paillettes** : Les paillettes ont une dimension très faible par rapport aux autres dimensions. La dispersion de ces « particules minces » est généralement aléatoire. Cependant, les paillettes peuvent être rangées parallèlement l'un à l'autre afin d'avoir des propriétés plus uniformes dans le plan. Les composites à fibres.

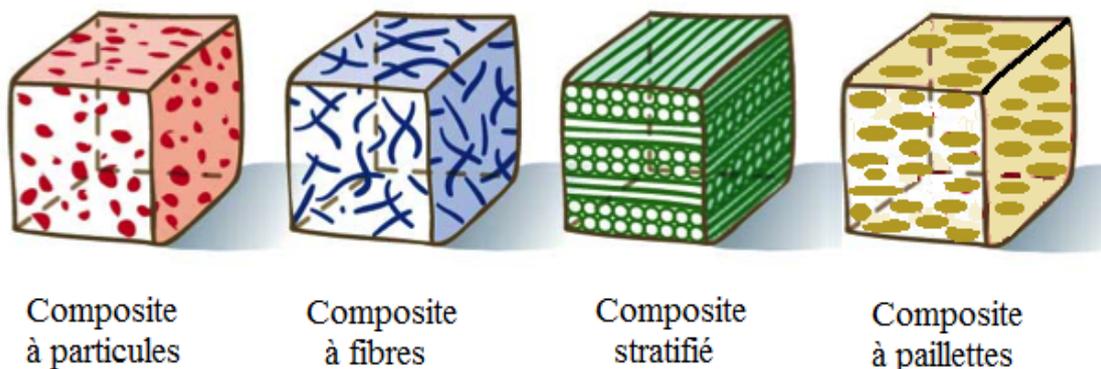


Figure I.6 : différents types de matériaux composites

### I.3.2 Classification suivant la nature de la matrice

Selon la nature de la matrice, les matériaux composites sont classés :

- ✓ **Composites à matrice organique (résine, charges)** : peuvent être utilisés dans le domaine des températures ne dépassant pas 300°C.
- ✓ **Composites à matrice métallique** :(alliages légers et ultra légers d'aluminium, de magnésium, de titane) : domaine des températures jusqu'à 600°C.
- ✓ **Composites à matrice minérale (céramique)** : domaine des températures jusqu'à 1000°C. Ce type de composite (matrice) peut être associé à divers renforts.

### I.4 Architecture des matériaux composites

Les structures des matériaux composites peuvent être classées en trois types :

#### I.4.1 Monocouches

Représentent l'élément de base de la structure composite. Les différents types de monocouches sont caractérisés par la forme du renfort :

À fibres longues (unidirectionnelles UD, réparties aléatoirement),

À fibres tissées,

À fibres courtes,

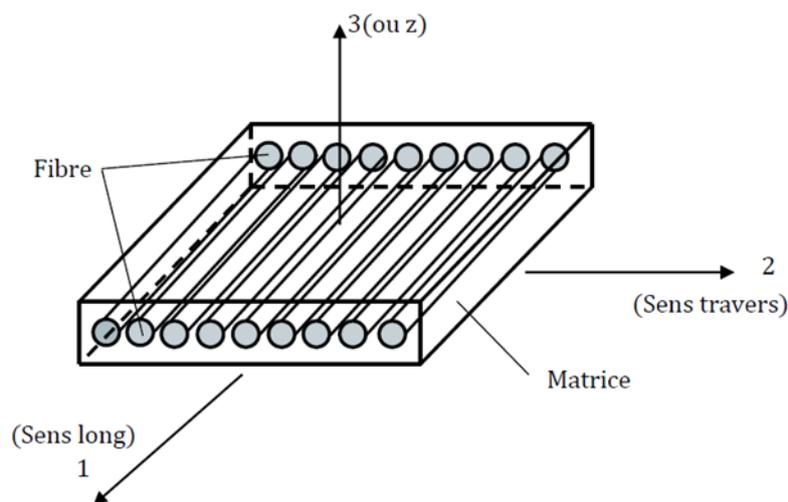


Figure I.7 : composite monocouche

### I.4.2 Stratifié

Un stratifié est constitué d'un empilement de monocouches ayant chacune une orientation propre par rapport à un référentiel commun aux couches et désigné comme le référentiel du stratifié. Le choix de l'empilement et plus particulièrement des orientations permettra d'avoir des propriétés mécaniques spécifiques.

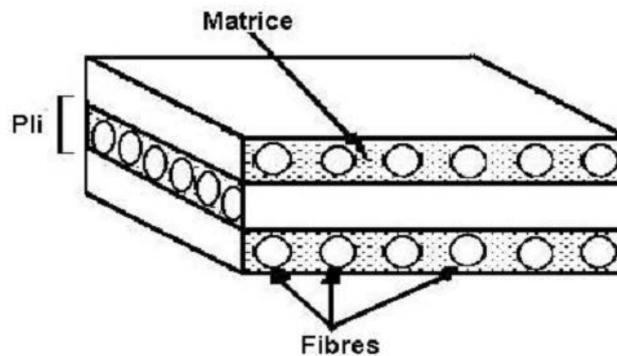


Figure I.8: Schéma illustratif d'un matériau composite stratifié.

### I.4.3 sandwich

Les matériaux composites de types sandwichs sont principalement constitués de deux Composants nommés :

Peau et noyau Figure I.10 Cette technique consiste à déposer une âme (constituée d'un matériau léger possède de Bonnes caractéristiques en compression) entre deux feuilles ou peau Les âmes peuvent être pleines (bois, mousse, balsa, structure a nid d'abeille ...etc.) ou creuses (alliages métalliques léger, papier...etc.). Les peaux sont des stratifiés ou des feuilles d'alliages légers. Par ce fait les sandwichs deviennent assez légers et offrent une très grande rigidité en flexion[33].

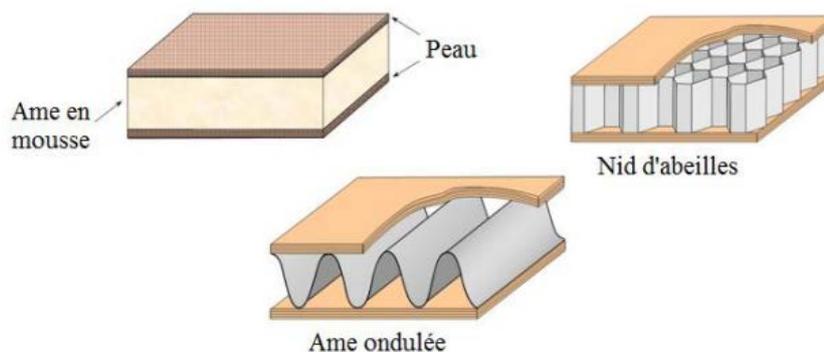


Figure I.9 : Structure composite sandwich

## I.5 Applications des matériaux composites au génie civil

En raison de leurs hautes propriétés mécaniques et de tous les avantages déjà exposés précédemment par rapport aux matériaux traditionnels, les matériaux composites sont de plus en plus utilisés dans le génie civil. Ces nouveaux matériaux de hautes performances, font aussi bien leur apparition dans la réhabilitation que dans la conception et la réalisation de nouvelles structures. Parmi les multiples applications des matériaux composites dans l'ingénierie civile, nous pouvons citer[34].

- ✓ Construction d'édifices et d'ouvrage d'art léger.
- ✓ Renforcement structurel d'édifices existants, afin de respecter de nouvelle norme ou en prévision d'utilisation nouvelle d'un bâtiment (ajout d'étage, changement du type d'exploitation).
- ✓ Utilisation principalement dans ce cas de la fibre de carbone pour le renforcement de poutres, poteaux et dalles sous flexion et cisaillement.
- ✓ Réalisation de formes complexes de grande portée.
- ✓ Utilisation de produits dérivés du béton avec ajouts de fibre, béton armé avec renfort en fibre de verre ou de carbone.
- ✓ Élaboration de matériaux hybrides avec des matériaux traditionnels.
- ✓ Transmission et distribution d'électricité temporaire et durable, pylônes électriques modulables et déplaçables.
- ✓ Structures destinées aux réservations d'eau.
- ✓ Panneaux pour murs et planchers.
- ✓ Produits dérivés du bois : bois aggloméré, lamellé collé, panneaux OSB, etc.
- ✓ Géotextiles: pour les opérations de drainage, stabilisation de sol, construction de barrages.

## I.6 Les Avantages et les inconvénients des matériaux composites

Les matériaux composites présentent des avantages et inconvénients.

### I.6.1 Des Avantages

Ils sont beaucoup plus légers, ce qui est un gain énorme au niveau du poids de l'avion qui est nettement réduit. L'avion consomme donc moins de carburant :

- ✓ Ils sont bien sur insensibles aux produits chimiques tels que les huiles, les liquides hydrauliques ...

- ✓ Il y a l'assurance d'en disposer beaucoup et pendant longtemps, ce qui n'est pas le cas des métaux dont le prix augmente vertigineusement.
- ✓ On peut créer des matériaux de toutes les formes, de toutes les épaisseurs, en fonction de la demande.
- ✓ Ils offrent de grandes de maniement.
- ✓ Ils se déforment moins en fonction de la température et de la pression ce qui est un des gros enjeux des matériaux utilisés en aviation commerciale.
- ✓ Ils sont peu sensibles à l'humidité, la chaleur, la corrosion ....

### **I.6.2 Des Inconvénients**

- ✓ Ils sont beaucoup plus sensibles à tous les impacts.
- ✓ Une petite faille peut engendrer de grosses déformations.
- ✓ La détection de ces problèmes est difficile ce qui entraîne une rigueur extrêmes dans leur fabrication et leur assemblage.
- ✓ La mise en œuvre des réparations est beaucoup plus complexe.

### **I.7 Conclusion**

En combinant des matériaux de divers types, on réalise des matériaux composites qui sont dotés d'un ensemble de propriétés physiques et mécaniques que ne possède pas chacun des constituants pris séparément.

Dans ce chapitre, nous avons défini les matériaux composites, leurs caractéristiques, leurs domaines d'application et leur développement car la corrélation entre renfort et matrice est très sensible.

Ce lien fournit des excellentes propriétés mécaniques qui augmentent sa résistance pour assurer sa durabilité, cette technologie de pointe a le potentiel d'apporter des solutions innovantes aux problèmes prolongés du génie civil.

# *Chapitre II*

*Comportement mécanique et les  
différentes théories des plaques  
composites*

## **Chapitre II : Comportement mécanique et les différentes théories des plaques composites**

### **II.1 Introduction**

**D**e tous les temps, un des objectifs prioritaires dans la conception des structures a été de concevoir des structures les plus résistantes possibles pour un poids minimum. De nos jours, l'existence de matériaux performants et l'utilisation de techniques d'optimisation de plus en plus perfectionnées permettent de bien remplir ces critères. Cependant, cela conduit très souvent à des structures minces et élancées pour lesquelles la stabilité peut devenir un problème primordial Baguet [35].

Les problématiques rencontrées concernent essentiellement des questions de dimensionnement ou de contrôle des vibrations. Pour mieux connaître, le comportement statique et dynamique de la structure, il est impératif d'approcher de la manière la plus correcte possible les phénomènes mis en jeu par les plaques composite qui sont plus ou moins complexes. Ainsi, une caisse de voiture, une aile d'avion, parois d'une centrale nucléaire, un bateau... Parmi tous ces domaines d'application, on peut distinguer plusieurs types de plaques minces, modérées et épaisses.

La théorie des plaques est une théorie permettant de calculer les déformations et les contraintes dans une plaque soumise à des charges, elle s'inspire de la théorie des poutres. On distingue quatre équations, dans un modèle de mécanique des solides, comportant :

- ✓ Les équations du mouvement,
- ✓ Relations déformations-déplacements,
- ✓ Loi de comportement, les relations de contrainte-déformations,
- ✓ Et les équations de compatibilité,

Dans ce chapitre nous allons présenter les fameuses tendances concernant la formulation des différentes théories des plaques correspondantes. plus les comportement mécanique des plaques composites.

## **II.2 Historiques**

Du point de vue historique, c'est Love qui utilisa les hypothèses de Gustav Kirchhoff en 1888, elles-mêmes inspirées des hypothèses d'Euler-Bernoulli pour les théories des poutres, pour fonder une théorie des plaques minces, appelée théorie classique (CPT) ou théorie de Love-Kirchhoff [36]. La théorie des plaques modérées ou semi-épaisses, théorie des déformations du premier ordre, a été consolidée par Mindlin à partir des travaux de Rayleigh, Timoshenko [29], Reissner [30] et Uflyand [37], Mindlin R.D [2], cette théorie utilise un coefficient de correction pour obtenir des résultats plus exactes. Ensuite, des théories d'ordre supérieur sont venues améliorer les hypothèses des théories classiques et du premier ordre lorsque l'épaisseur de la plaque devient importante. Il existe aussi la théorie basée sur l'élasticité tridimensionnelle théorie (3D) qui ne fait aucune hypothèse restrictive sur les déplacements de la plaque Bachir Bouiadjra [38].

## **II.3. Comportement mécanique des matériaux composites**

L'étude du comportement mécanique élastique d'une structure constituée de matériaux composites est généralement analysée par la théorie des plaques stratifiées, basé sur une évaluation du champ des contraintes et champs des déplacements en tout point de la structure. Cette étude comportera deux phases:

1. L'étude du comportement mécanique de chaque couche, parfois appelé comportement micromécanique ou microscopique du matériau composite. Cette étude est souvent désignée par microanalyse du matériau composite;
2. L'étude du comportement global du matériau constitué de plusieurs couches, et désigné généralement par comportement macroscopique du matériau composite ou comportement du stratifié.

Ces deux études étant effectuées, le comportement mécanique global d'une structure en composite sera ensuite analysé en adaptant les outils classiques du calcul des structures au comportement macroscopique des matériaux composites.

Nous développerons donc de manière assez détaillée les éléments de cette théorie en considérant les hypothèses suivantes :

- L'interface entre les couches est parfaite (Continuité des déplacements et des déformations) ;
- Chaque couche est un matériau homogène avec des propriétés effectives connues ;
- Les propriétés de la couche individuelle peuvent être isotropes, orthotropes ou transversalement isotropes;

- Chaque couche est dans un état de contrainte plane ;
- Le stratifié se déforme selon les hypothèses de « Kirchhoff - Love » pour la flexion et la traction des plaque minces : La normale au plan médium reste droite et est normale au plan médium déformé après déformation ; Les normales au plan médium ne changent pas de longueur.

### II.3.1. Champ des déplacements

La théorie classique des stratifiés se situe dans le cadre général des schémas du premier degré de la théorie des plaques qui ne prend pas en compte le cisaillement transverse. Ces schémas expriment les déplacements  $u$ ,  $v$  et  $w$  en un point de la plaque, de coordonnées  $(x, y, z)$  rapportées au plan moyen de la plaque, sous la forme :

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) + z\varphi_x(x, y), \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) + z\varphi_y(x, y), \\ w(x, y, z) &= w_0(x, y) \end{aligned} \quad (\text{II.1})$$

Sachant que  $u_0$ ,  $v_0$  et  $w_0$  sont les déplacements d'un point  $(x, y, z = 0)$  du plan moyen

### II.3.2. Champ des déformations

A partir du champ de déplacement de la relation (II.1), on peut déduire le champ de déformation qui peut être exprimé en coordonnées cartésiennes par les relations de la théorie d'élasticité linéaire suivantes :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} + z \frac{\partial \varphi_x}{\partial x}, \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v_0}{\partial y} + z \frac{\partial \varphi_y}{\partial y}, \\ \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial w_0}{\partial z} = 0, \\ \gamma_{xy} &= 2\varepsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \left( \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) + z \left( \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} \right), \\ \gamma_{xz} &= 2\varepsilon_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w_0}{\partial x} + \varphi_x, \\ \gamma_{yz} &= 2\varepsilon_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial w_0}{\partial y} + \varphi_y \end{aligned} \quad (\text{II.2})$$

La théorie classique simplifiée des stratifiés fait l'hypothèse que la déformation est continue à travers l'épaisseur du stratifié afin d'empêcher le glissement d'un pli par rapport à un autre. Le stratifié se comporte comme une seule couche (afin d'éviter le délaminage) mais avec des caractéristiques élastiques très spéciales.

Alors toute droite normale à la surface moyenne avant déformation restera droite et normale et gardera une longueur constante après déformation de la plaque, donc la théorie classique des stratifiés néglige le cisaillement transverse:  $\gamma_{xz} = 0$  et  $\gamma_{yz} = 0$  ce qui conduit d'après les relations (II.2) à définir les rotations dues à la flexion (sans cisaillement):

$$\begin{aligned}\varphi_x(x, y) &= -\frac{\partial w_0}{\partial x}, \\ \varphi_y(x, y) &= -\frac{\partial w_0}{\partial y}\end{aligned}\tag{II.3}$$

En tenant compte de ces deux relations, Le champ des déplacements s'écrit alors, d'après les expressions (II.1) par :

$$\begin{aligned}u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x}(x, y), \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y}(x, y), \\ w(x, y, z) &= w_0(x, y)\end{aligned}\tag{II.4}$$

Le champ des déformations s'écrit donc sous la forme matricielle suivante:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix}\tag{II.5}$$

En introduisant les déformations en membrane :

$$\varepsilon_{xx}^0 = \frac{\partial u_0}{\partial x}(x, y), \varepsilon_{yy}^0 = \frac{\partial v_0}{\partial y}(x, y), \gamma_{xy}^0 = \left( \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right)\tag{II.6}$$

Et les déformations en flexion et torsion dépendent de la matrice des courbures de la poutre sollicitée en flexion:

$$k_x = -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}(x, y), k_y = -\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}(x, y), k_{xy} = -2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y}(x, y)\tag{II.7}$$

L'état de déformation  $\{\varepsilon\}$ , en tout point du stratifié, peut être calculé à partir de la déformation plane  $\{\varepsilon^0\}$  et de la courbure  $\{k\}$  du plan moyen en utilisant l'expression finale qui emploie l'équation fondamentale de la théorie des stratifiés.

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon^0\} + z\{k\} \quad (\text{II.8})$$

### II.3.3. Champs de contraintes

Le champ de contraintes dans la couche  $k$  s'exprime par la relation générale sous la forme suivante :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix}^k = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}^k \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}^k \quad (\text{II.9})$$

L'utilisation des relations (II.5) et (II.9), nous aide à récrire cette dernière expression sous une forme plus explicite:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix}^k = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}^k \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}^k \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} \quad (\text{II.10})$$

Sous forme compacte :

$$\{\sigma\}^k = [\bar{Q}]^k \{\varepsilon^0\} + z[\bar{Q}]^k \{k\} \quad (\text{II.11})$$

La matrice  $\{\sigma\}^k$  représente la matrice des contraintes dans la couche  $k$  :  $h_{k-1} \leq z \leq h_k$  .

La matrice de rigidité réduite  $[\bar{Q}_{ij}]^k$  varie d'une couche à l'autre. Il en résulte donc une discontinuité du champ des contraintes entre couches successives.

### II.3.4. Comportement en membrane-flexion-torsion

Le comportement élastique d'un pli constitue la base avec laquelle le comportement du stratifié est décrit, en tenant compte des caractéristiques indépendantes de chaque pli. Dans ce paragraphe, on va étudier le comportement du stratifié lorsqu'il est soumis à un ensemble de sollicitations, cette étude est indispensable si l'on désire que la déformation du stratifié ne soit pas trop importante, ou bien que les contraintes conservent des valeurs admissibles.

**II.3.4.1. Comportement en Membrane**

Nous considérons dans ce qui suit un stratifié plan pourvu de la symétrie miroir. L'épaisseur totale du stratifié est noté  $h$ . il est constitué de  $n$  plis. Le pli numéro  $k$  a une épaisseur note  $e_k$ . Le plan  $(x-y)$  est le plan de symétrie (ou plan moyen).

Le composite stratifié est soumis à des sollicitations dans son plan, qui sont notées  $(N_x, N_y, N_{xy})$  par unité de longueur suivant la direction  $y$  ou la direction  $x$  (figure II.1). Il s'agit là d'efforts dits de membrane, ou éléments de réduction pour les contraintes, ou encore flux d'efforts dans le stratifié. Les efforts de membrane sont obtenus par intégration des contraintes par unité de longueur de chaque couche à travers l'épaisseur du stratifié.

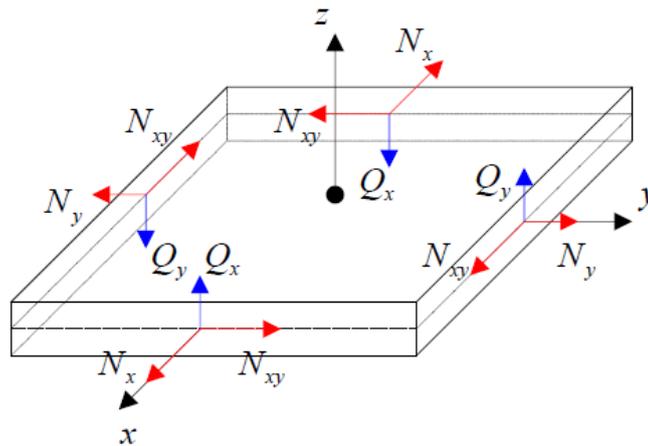
$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} dz \tag{II.12}$$

$N_x$  : Effort résultant dans la direction  $x$  par unité de longueur suivant  $y$ .

$N_y$  : Effort résultant dans la direction  $y$  par unité de longueur suivant  $x$ .

$N_{xy}$  : Cisaillement de membrane par unité de largeur suivant la direction  $y$ .

Dans le cas du stratifié, on a une répartition continue des contraintes dans une couche, mais discontinue d'une couche à une autre.



**Figure II.1** : Résultantes des efforts sur une plaque composite.

Les efforts en membranes seront exprimés sous la forme :

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix}^k dz \quad (\text{II.13})$$

Où  $h_{k-1}$  et  $h_k$  sont respectivement les coordonnées de la couche d'ordre  $k$  et  $k-1$  dans la direction perpendiculaire au stratifié. La substitution de l'équation (II.10) dans l'équation (II.13) nous donne :

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^n \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}^k \int_{h_{k-1}}^{h_k} \left[ \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} \right] dz \quad (\text{II.14})$$

Puisque la matrice  $[\bar{Q}_{ij}]^k$  n'étant pas en fonction de la distance  $z$ ,  $\{\varepsilon^0\}$  et  $\{k\}$  sont indépendantes de  $z$  et de l'ordre de la disposition des couches dans le stratifié, la relation (II.14) peut alors être écrite comme :

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} \quad (\text{II.15})$$

Dont les coefficients  $A_{ij}$  sont appelés les rigidités de membrane :

$$[A] = \sum_{k=1}^n [\bar{Q}]^k (h_k - h_{k-1}) = \sum_{k=1}^n (\bar{Q}_{ij})^k e_k \quad (\text{II.16})$$

Et Les coefficients  $B_{ij}$  sont appelés les rigidités de couplage membrane-flexion :

$$[B] = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n [\bar{Q}]^k (h_k^2 - h_{k-1}^2) = \sum_{k=1}^n (\bar{Q}_{ij})^k e_k z_k \quad (\text{II.17})$$

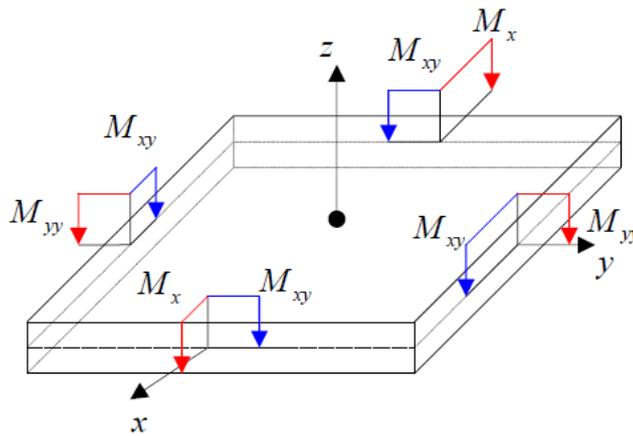
### II.3.5. Comportement en flexion et torsion

▪ **Résultantes en flexion**

Les relations fondamentales des stratifiés font également intervenir les moments résultants des contraintes sur un élément du stratifié. Les moments de flexion et de torsion sont définis par:

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix}^k z dz \quad (\text{II.18})$$

Les composantes  $M_x$  et  $M_y$  sont les moments de flexion suivant les directions  $x$  et  $y$ , respectivement, et la composante  $M_{xy}$  est le moment de torsion. Ces composantes sont schématisées sur la (figure II.2).



**Figure II.2 :** Moments de flexion et de torsion sur une plaque composite.

Substituant l'équation (II.10) dans l'équation (II.18), nous aurons l'expression des moments par unité de longueur :

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} \quad (\text{II.19})$$

Cette dernière équation peut être écrite sous la forme contractée suivante :

$$\{M\} = [B]\{\varepsilon^0\} + [D]\{k\} \quad (\text{II.20})$$

Dont les coefficients  $D_{ij}$  sont appelés les rigidités de flexion :

$$[D] = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n [\bar{Q}]^k (h_k^3 - h_{k-1}^3) = \sum_{k=1}^n (\bar{Q}_{ij})^k \left( e_k z_k^2 + \frac{z_k^3}{12} \right) \quad (\text{II.21})$$

▪ **Résultantes en cisaillement**

Les résultantes en cisaillement sont définies par unité de longueur du stratifié :

$$\begin{bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{Bmatrix} \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{Bmatrix} dz \quad (\text{II.22})$$

**II.4. Loi de comportement**

Les champs des déformations et des contraintes dans un milieu sont liés par des lois appelées de comportement, caractérisant le comportement mécanique du milieu. Ces lois sont décrites par des axiomes qui permettent de rendre compte au mieux des phénomènes observés. La relation d'élasticité linéaire peut s'écrire sous la forme condensée :

$$\sigma_{ij} = C_{ij} \cdot \varepsilon_{ij} \quad (\text{II.23})$$

Sous forme matricielle :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{44} \\ \sigma_{55} \\ \sigma_{66} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} & c_{35} & c_{36} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} & c_{45} & c_{46} \\ c_{51} & c_{52} & c_{53} & c_{54} & c_{55} & c_{56} \\ c_{61} & c_{62} & c_{63} & c_{64} & c_{65} & c_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{44} \\ \varepsilon_{55} \\ \varepsilon_{66} \end{Bmatrix} \quad (\text{II.24})$$

Cette loi, généralement appelée loi de Hooke généralisée, introduit la matrice de rigidités  $C$ , symétrique. Le comportement linéaire d'un matériau est donc décrit dans le cas général à l'aide de 21 constantes de rigidité  $C_{ij}$ .

**II.4.1 Matériau isotrope**

Un matériau isotrope est un matériau dont les propriétés physiques ou mécaniques sont identiques dans toutes les directions. Si le matériau possède un nombre infini de plan de symétrie, on dit qu'il est isotrope.

Dans ce cas le nombre de constantes indépendantes vaut seulement deux 02. La loi de comportement s'écrit :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{11} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{12} & c_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{c_{11}-c_{12}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{c_{11}-c_{12}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{c_{11}-c_{12}}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \tag{II.25}$$

**II.4.2 Matériau isotrope transverse**

Le matériau unidirectionnel est un matériau possédant un axe de symétrie, par exemple l'axe e1. C'est le cas pour un ensemble de fibres unidirectionnelles dans un substrat. Par géométrie le matériau unidirectionnel est orthotrope, Il est souvent appelé orthotrope de révolution. Dans le repère d'orthotrope, la matrice s'écrit:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{23} & c_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{c_{22}-c_{23}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \tag{II.26}$$

**II.4.3 Matériau monoclinique**

Un matériau monoclinique posse de un plan de symétrie matériel. La forme de la matrice de rigidité ou (de souplesse) doit être telle qu'un changement de base effectué par symétrie par rapport à ce plan ne modifie pas la matrice. La loi de comportement pour ce matériau est de forme :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & c_{16} \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & c_{26} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} & 0 & 0 & c_{36} \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & c_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{45} & c_{55} & 0 \\ c_{16} & c_{26} & c_{36} & 0 & 0 & c_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad (\text{II.27})$$

La matrice de souplesse à la même forme, le nombre de constantes d'élasticité indépendantes est réduite à 13.

#### II.4.4 Matériau orthotrope

Le matériau orthotrope est un matériau à trois plans de symétrie orthogonaux deux à deux. En pratique, c'est le cas des tissus noyés dans un polymère. La même démarche que précédemment conduite aux expressions dans un repère défini par les axes d'orthotropes.

La loi de comportement mécanique s'écrit :

. La même démarche que précédemment conduite aux expressions dans un repère défini par les axes d'orthotropes.

La loi de comportement mécanique s'écrit :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & 0 \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad (\text{II.28})$$

Le nombre de constantes d'élasticité indépendantes est réduit à 9.

#### II.4.5 Matériau triclinique

Les matériaux possèdent des symétries supplémentaires qui permettent de restreindre encore le nombre de composantes indépendantes du tenseur des rigidités. Le matériau aura donc 21 constantes qui sont distinctes. Le comportement linéaire d'un matériau triclinique peut être exprimé dans un repère orthonormé comme :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} & c_{35} & c_{36} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} & c_{45} & c_{46} \\ c_{51} & c_{52} & c_{53} & c_{54} & c_{55} & c_{56} \\ c_{61} & c_{62} & c_{63} & c_{64} & c_{65} & c_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad (\text{II.29})$$

## II.5. Les différentes théories des plaques

Les plaques sont des éléments structuraux couramment utilisés, définies par une surface de référence plane (x,y) et par une épaisseur, notée h(x,y) petite par rapport aux autres dimensions. Une plaque peut être constituée d'un seul matériau, comme les plaques classiques ou de plusieurs matériaux, comme les plaques composites. Dans ce chapitre quelques modèles sur les théories des plaques développées pour améliorer l'évolution de la variation du champ des déplacements à travers l'épaisseur de la plaque sont présentés.

### II.5.1 Modèle monocouche équivalente

Dans l'approche monocouche équivalente, le nombre d'équations ne dépend pas du nombre de couche, dans cette approche, la plaque multicouche hétérogène complexe est homogénéisée et considérée comme une seule couche statiquement équivalente. Depuis le premier travail de Sophie Germain en 1815 sur les plaques minces en passant Par les modèles du premier ordre de Love-Kirchhoff [36] et de Reissner [30] Mindlin [2], de nombreux auteurs ont développé des théories de plaque à partir de cinématiques où les champs de contraintes plus raffinés. Dans cette catégorie, nous considérons généralement trois variantes de cette approche :

#### II.5.1.1 Théorie classique des plaques(CPT)

La théorie classique des plaques est utilisée dans le domaine des petites déformations et des petits déplacements lorsque la flèche générée par les déformations de cisaillement reste négligeable devant la flèche générée par la courbure de la plaque. Dans le cas d'une plaque homogène isotrope, la part de cisaillement dans la flèche est directement reliée à l'élanement (L / h). Cette théorie est basée sur les hypothèses de Love-Kirchhoff [36], selon lesquelles :

✓ Une droite normale au plan moyen de la plaque reste perpendiculaire après déformation (Figure II.1), ce qui revient à négliger les effets de déformation de cisaillement transverse ( $\varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$ ).

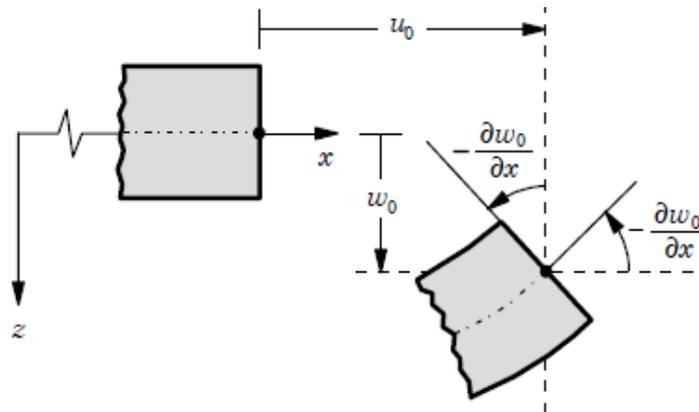
✓ La plaque est d'épaisseur petite devant les autres dimensions, en conséquence les contraintes dans le sens de l'épaisseur sont supposées nulles ( $\sigma_z = 0$ ).

✓ Le plan neutre ne subit pas de déformation dans son plan ; on ne considère que le déplacement transversal des points du plan neutre . Basant sur ces hypothèses, Le champ de déplacement de la théorie classique s'écrit comme suit:

$$\begin{cases} u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\delta w_0}{\delta x} \\ v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\delta w_0}{\delta y} \\ w(x, y, z) = w_0(x, y) \end{cases} \quad (\text{II.30})$$

Avec :

$(u_0, v_0, w_0)$  Sont les composantes du champ de déplacement sur le plan moyen de la plaque ( $z = 0$ ).



**Figure II.1:** Géométrie déformée et non déformée d'un côté de plaque selon les hypothèses de la théorie classique de Kirchhoff, Reddy [39].

### II.5.1.2 Théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT)

La théorie de déformation de cisaillement du premier ordre peut être considérée comme une amélioration par rapport à la théorie classique (CLPT), en tenant compte de l'effet de cisaillement transverse par l'introduction d'un facteur de correction de cisaillement.

Cette théorie des plaques est souvent appelée la théorie des plaques de Reissner-Mindlin depuis qu'elle a été développée par Reissner [30] et Mindlin [2] d'où :

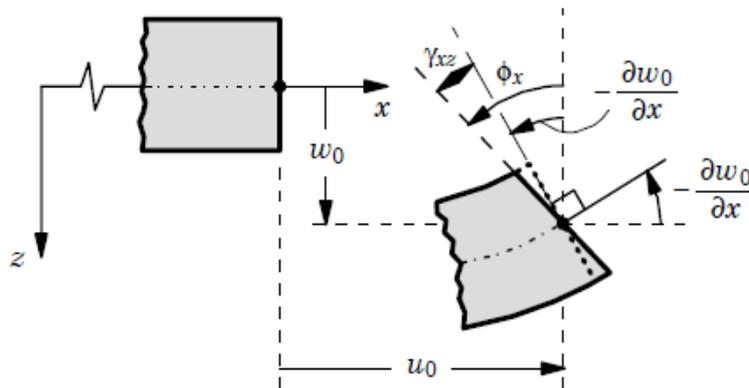
- ✓ Aucune déformation ne se produit dans le plan moyen de la plaque.
- ✓ La contrainte normale ( $\sigma_z$ ) est négligeable devant les autres composantes.
- ✓ Toute section droite et perpendiculaire à la surface moyenne non-déformée reste droite, mais pas nécessairement perpendiculaire à la surface moyenne déformée.
- ✓ L'effet de l'inertie de rotation est inclus.

La troisième hypothèse implique que la déformation de cisaillement transversale est différente de zéro, mais elle dépend également à la contrainte de cisaillement qui est nulle sur les surfaces extérieures puisque la contrainte de cisaillement devient constante suivant toute l'épaisseur de la plaque. Pour compenser cette erreur, Mindlin [2] a proposé un facteur ( $k$ ) de correction de cisaillement à appliquer pour la force de cisaillement. Dans la théorie de déformation en cisaillement du premier ordre, le champ de déplacement Figure II.2 est exprimé sous la forme :

$$\begin{cases} u(x, y, z) = u_0(x, y) + z\phi_x(x, y) \\ v(x, y, z) = v_0(x, y) + z\phi_y(x, y) \\ w(x, y, z) = w_0(x, y) \end{cases} \quad (\text{III.31})$$

Avec :

$u_0, v_0, w_0$  Sont les composantes des déplacements dans le plan moyen. Et  $\phi_y, \phi_x$  les rotations autour des deux directions  $y$  et  $x$ , respectivement.



**Figure II.2:** Géométrie déformée et non déformée d'un côté de plaque selon les hypothèses de la théorie du premier ordre Reissner-Mindlin Reddy [39].

### II.5.1.3 Théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé (HSDT)

Pour franchir les limites de la théorie classique et du premier ordre, on utilise la théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé ou supérieur. La théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé est basée sur une distribution non linéaire des champs dans l'épaisseur. Par conséquent, on tient compte des effets de la déformation transversale de cisaillement et / ou de la déformation normale transversale. Ces modèles n'exigent pas des facteurs de correction (Figure II.3). Le champ de déplacement est généralement écrit comme suit :

$$\begin{cases} u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\delta w_0(x, y)}{\partial x} + f(x) \varphi_x(x, y) \\ v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\delta w_0(x, y)}{\partial y} + f(x) \varphi_y(x, y) \\ w(x, y, z) = w_0(x, y) \end{cases} \quad (\text{II.32})$$

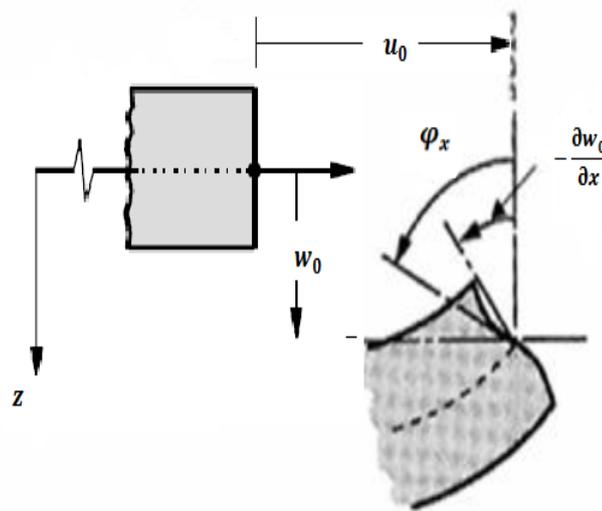
Avec:

$u_0, v_0, w_0$  sont les composantes du champ de déplacement en membrane du plan moyen

de la plaque  $Z = 0$ , et sont les rotations autour des axes  $(y, x)$  respectivement,  $\varphi_x = \frac{\partial w_0}{\partial x} + \phi_x$ ,

$$\varphi_y = \frac{\partial w_0}{\partial y} + \phi_y$$

$f(z)$  est une fonction de cisaillement transverse caractérisant les théories correspondantes.



**Figure II.3:** Géométrie déformée et non déformée d'un côté de plaque selon les hypothèses de la théorie d'ordre élevé Reddy [39].

En effet, les déplacements de la théorie classique de plaque (CPT) est obtenue par en prenant.  $f(z) = 0$ , alors que la théorie de premier ordre (FSDPT) peut être obtenue par  $f(z) = z$  Voici quelques contributions importantes de développement de modèles d'ordre supérieur qui sont basés sur une distribution non linéaire des champs de déplacement dans l'épaisseur, et qui permettent de représenter le gauchissement de la section transversale. Nous citons en particulier :

- L'approche de Reissner [30] avec :

$$f(x) = \frac{5}{4}z \left( 1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right) \quad (\text{II.33})$$

- L'approche de Ambartsumyan [40] , avec:

$$f(x) = \frac{z}{2} \left( \frac{h^2}{4} - \frac{z^2}{3} \right) \quad (\text{II.34})$$

- L'approche de Levinson, Murthy [41],Reddy [42],Reddy [43] avec:

$$f(x) = z \left( 1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right) \quad (\text{II.35})$$

Dans le modèle de Reddy (1984) [3], le champ de déplacement membranaire est cubique, ce modèle donne une bonne approximation pour les contraintes de cisaillement transverse par rapport à la solution d'élasticité tridimensionnelle Duong [44], la distribution des contraintes de cisaillement transverse est parabolique à travers l'épaisseur, les conditions aux limites sur les surfaces libres sont satisfaites.

- L'approche de Touratier [4] avec :

$$f(x) = \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{z}{h}\right) \quad (\text{II.36})$$

- Touratier [4] propose le modèle "sinus", il utilisé une fonction trigonométrique Sinusoïdale pour modéliser la répartition des contraintes de cisaillement dans l'épaisseur. La fonction de cisaillement transverse s'écrit comme ci-dessous :

$$\begin{aligned}
 f(z) &= \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{z}{h}\right) = \frac{z}{h} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)} \left(\frac{\pi z}{h}\right)^{2n+1} \\
 &= z \left(1 - \frac{\pi^2}{3!} \frac{z^2}{h^2} + \frac{\pi^4}{5!} \frac{z^4}{h^4} - \frac{\pi^6}{7!} \frac{z^6}{h^6} + \dots\right)
 \end{aligned}
 \tag{II.37}$$

• Les contraintes de cisaillement transverse prennent une forme cosinus à travers L'épaisseur de la plaque. La version exponentielle de la théorie de déformation d'ordre élève à été proposée par Afaq [45], où la fonction de cisaillement transverse est de la forme suivante :

$$f(z) = ze^{-2\left(\frac{z}{h}\right)^2}
 \tag{II.38}$$

- L'approche de Aydogdu [46]avec :

$$f(z) = za^{\frac{-2(z/h)^2}{\ln(a)}}
 \tag{II.39}$$

• La version hyperbolique de la théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé (The hyperbolic shear deformation plate theory (HSDPT)) développée par Ait Atmane et al [47] est obtenue en prenant :

$$f(z) = \frac{\cos(\pi/2)}{[\cos(\pi/2)-1]} z - \frac{h/\pi \cos(\pi/2)}{[\cos(\pi/2)-1]}
 \tag{II.40}$$

- L'approche de Grover et al [48]avec :

$$f(z) = \left(1 + \frac{6}{h\sqrt{13}}\right) - \sinh^{-1}\left(\frac{3z}{h}\right)
 \tag{II.41}$$

- L'approche de Meksi et al [49]avec:

$$f(z) = \frac{h \sinh(10z/h)}{10 \cosh(5)} + \frac{h}{10}
 \tag{II.42}$$

- L'approche de Elmeiche, Tounsi et al [50] avec:

$$f(z) = \frac{(h/\pi)\sin(hz/\pi)}{\cosh(\pi/2 - 1)} + \frac{h}{10} \quad (\text{II.21})$$

- L'approche Shimpi [51] avec:

$$h \left[ \frac{1}{4} \left( \frac{z}{h} \right) - \frac{5}{3} \left( \frac{z}{h} \right)^3 \right] \quad (\text{II.22})$$

### II.5.1.4 La théorie de déformation des plaques quasi-3D

En divisant le déplacement transversal en plusieurs composantes dont la flexion, le cisaillement et en prenant en considération l'effet de d'étirement de l'épaisseur de la plaque, Thai et Kim [52] ont proposé une théorie de déformation des plaques quasi-3D à cinq variables comme la théorie de la déformation au cisaillement de premier ordre (FSDT), contrairement à 6 pour les théories conventionnelles à ordre élevé. Hebali et Tounsi [25], Tounsi et Houari [53], Hamidi et Tounsi [54], Thai [55], Bessaim [56] et Bennoun [57] ont proposé à l'aide de différentes fonctions de forme plusieurs méthodes analogiques de cinq-inconnues quasi-3D, En apportant des nouvelles hypothèses pour les théories quasi-3D à six-variables que Zenkour a pu proposer une nouvelle théorie quasi-3D à quatre-variables pour les plaques FGM [22], les plaques sandwich [58] et des plaques composites stratifiées [59]. Mantari et Guedes Soares [60][61] ont aussi proposé une théorie quasi-3D simple à quatre variables pour des plaques fonctionnellement graduées en combinant l'effet de cisaillement et l'effet d'étirement du déplacement transversal à l'aide d'une fonction hyperbolique. le champ de déplacement est exprimé sous la forme :

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w_b(x, y)}{\partial x} - f(z) \frac{\partial w_s(x, y)}{\partial x} \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z \frac{\partial w_b(x, y)}{\partial y} - f(z) \frac{\partial w_s(x, y)}{\partial y} \\ w(x, y, z) &= w_b(x, y) + w_s(x, y) + g(z)\varphi(x, y) \end{aligned} \quad (\text{II.43})$$

Où  $(u_0, v_0)$  sont les déplacements dans les directions x et y d'un point situé sur le plan médian de la plaque.

$(w_b, w_s)$  sont respectivement les composantes de flexion et de cisaillement du déplacement transversal,  $\varphi$  est un déplacement supplémentaire  $\varphi$  qui prend en considération l'effet de la contrainte normale (l'effet d'étirement) et  $f(z)$  et  $g(z)$  sont des fonctions de cisaillement

transverse.

Avec:

$$g(z) = 1 - f'(z) \tag{II.44}$$

#### **II.4.1.5 La théorie raffinée de déformation des plaques (RPT)**

Afin de réduire le nombre de variables utilisées dans les formulations des théories à ordre élevé, Shimpi a pu développer en 2002 un modèle raffiné pour les plaques isotropes qu'on a nommé la théorie raffinée de déformation des plaques RPT (Refined Plate Theory) [62]. Cette méthode propose des caractéristiques très intéressantes tel que la non nécessité d'un coefficient de correction en cisaillement et qu'elle présente beaucoup de similitudes avec la théorie classique des plaques (CPT) quant aux équations du mouvement, les conditions aux limites et les expressions des moments. La fiabilité de cette méthode a été démontrée par Kim, Thai et al. [63] et Ait Atmane, Tounsi et al. [64] pour le cas de la flexion statique et pour le cas du flambage d'une plaque composite. Récemment Thai et Kim [65] et Hadji et al. [66] ont adapté la RPT avec succès au flambage des plaques orthotropes, et à la vibration libre des plaques stratifiées et sandwichs respectivement. Cette théorie propose le champ de déplacement suivant :

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w_b(x, y)}{\partial x} + f(z) \frac{\partial w_s(x, y)}{\partial x} \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z \frac{\partial w_b(x, y)}{\partial y} + f(z) \frac{\partial w_s(x, y)}{\partial y} \\ w(x, y, z) &= w_0(x, y) + w_s(x, y) \end{aligned} \tag{II.45}$$

Où  $(u_0, v_0)$  sont les déplacements dans les directions x et y d'un point situé sur le plan median de la plaque.

$(w_b, w_s)$  sont respectivement les composantes de flexion et de cisaillement du déplacement transversal et  $f(z)$  est une fonction de cisaillement transverse.

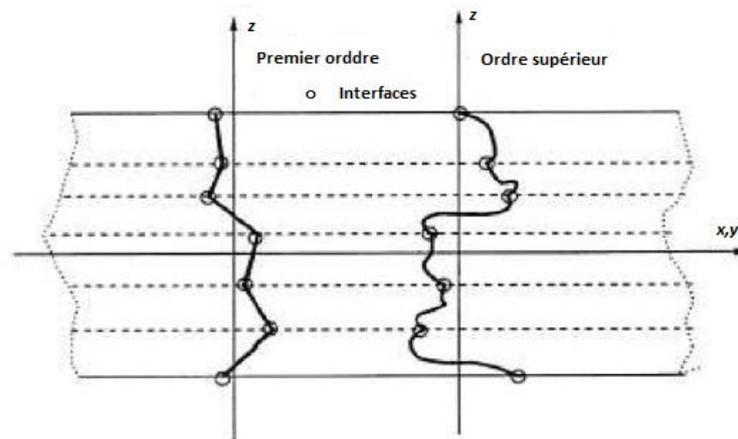
#### **II.5.2 Approche par couche**

Les modèles basés sur l'approche monocouche équivalente donnent relativement une bonne approximation du comportement de la structure multicouche à l'échelle globale. En outre, ils se distinguent par leurs avantages de l'indépendance du nombre d'inconnus du nombre de couches. Néanmoins, en ce qui concerne le comportement local des structures multicouches, ces modèles basés sur l'approche monocouche équivalente ne sont pas

capables de fournir des résultats satisfaisants au niveau local et notamment dans l'interface de la structure multicouche.

Les approches par couche ont été proposées pour plus de précision, leurs principes de base est d'écrire des champs d'inconnus au niveau local de chaque couche de multicouche séparément tout en satisfaisant les conditions de continuité aux interfaces. On dit que l'approche par couche signifie une approche au niveau de sous structure qui correspond à chaque couche ou un ensemble de couches du multicouche en appliquant à chaque sous structure une théorie différente :

- Les modèles zig-zag consiste principalement de la variation des déplacements et des contraintes qui sont individuellement au niveau de chaque couche de la plaque assurant la continuité d'interfaces qui permet de réduire le nombre des variables.
- Les modèles couches discrètes adoptent une approximation plus fine des champs de déplacements suivant l'épaisseur du multicouche. Ces modèles considèrent l'ensemble des plaques (2D) comme couplées par des efforts de l'interface, de manière que les conditions de continuité des contraintes aux interfaces sont assurées avec un nombre d'équations qui dépend du nombre de couches de la plaque composite Figure II.4 et Figure II.5.



**Figure II.4:** Champ de déplacements des modèles couches discrètes, approche cinématique Nguyen [67].

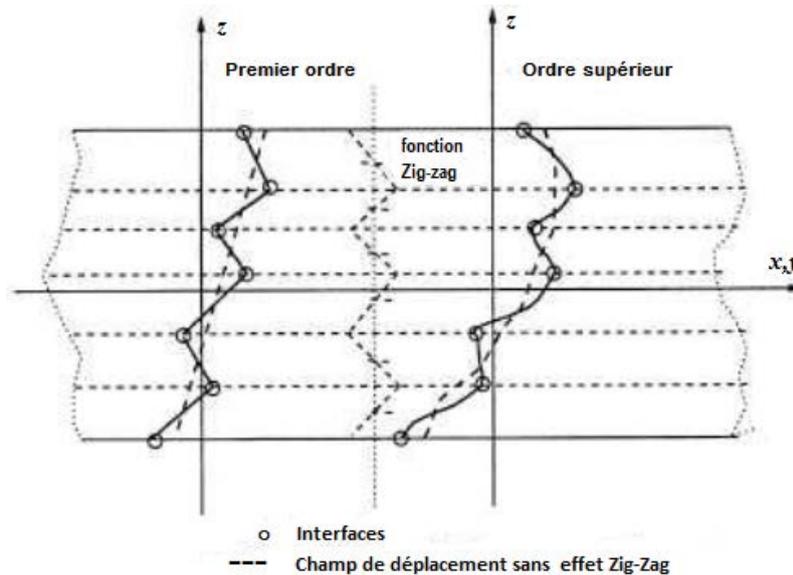


Figure II.5: Champ de déplacements des modèles zig-zag, approche cinématique Nguyen et al Nguyen [67].

### II.5.3 Approche par développement asymptotique

La technique de développement asymptotique est appliquée à des structures à priori peu épaisses c'est à dire quand le rapport entre l'épaisseur et la plus grande dimension est très petit, quand l'épaisseur tend vers zéro L.E. Aghalovyan [68]. Le développement intervient au niveau de l'intégration des équations de l'élasticité (équations constitutives, équation de mouvement). L'état caractérisant les déformations de la structure est donc constitué par la réunion des respectivement situées à l'intérieur et aux frontières, ce qui explique le procédé classique pour résoudre ce type de problème, à savoir la construction d'intégrales dites intérieures, qui correspondent à des solutions variant faiblement à l'intérieur du domaine, quelqu'un estime déterminées avec une erreur asymptotique (très petite).

Les approches développement asymptotique ont la même caractéristique à savoir qu'il faut pour calculer un effet de bord, effectuer deux calculs : un de plaque, l'autre de correction d'effet de bord. Ce deuxième calcul résolu de façon semi analytique est limité à certains types de conditions limites et est donc difficile à appliquer pour les cas généraux Duc Thai Nguyen [69].

### II.6 Conclusion

Dans ce chapitre on a discuté sur le comportement mécanique des plaques composites, ainsi que nous avons décrit selon une synthèse historique récente, puis nous avons donné un aperçu général sur les fameuses tendances concernant la formulation des différentes théories

des plaques correspondantes à savoir l'approche monocouche équivalente (la théorie classique des plaques stratifiées (CLPT), la théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT) et la théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé (HSDT), l'approche par couche et l'approche développement asymptotique.

# *Chapitre III*

*Etude de la vibration libre et de la  
stabilité des plaques composites*

## Chapitre III :

### *Etude de la vibration libre et de la stabilité des plaques composites*

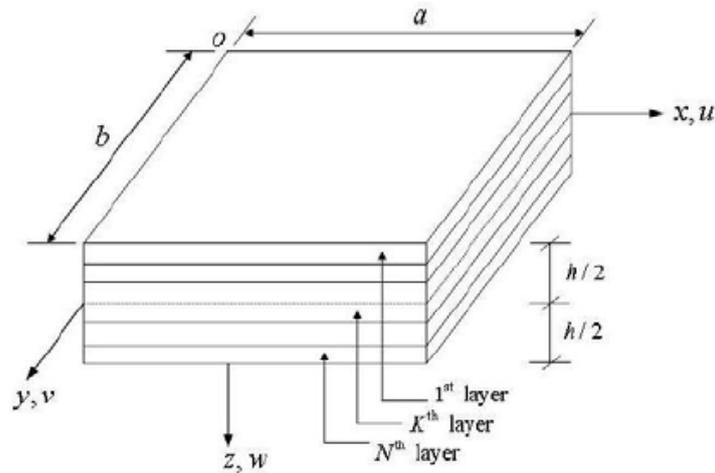
#### III.1 Introduction

Dans la présente étude, une nouvelle cinématique de déformation en cisaillement d'ordre élevé est développée pour étudier la vibration libre et la stabilité des plaques composites. La théorie tient en compte les effets de la variation hyperbolique des contraintes de cisaillement transversal à travers l'épaisseur de la plaque en satisfaisant les conditions aux limites des contraintes nulles sur les surfaces supérieure et inférieure de la plaque sans utiliser le facteur de correction de cisaillement. Les équations différentielles d'équilibre et les conditions aux limites sont dérivées en utilisant le principe des travaux virtuels, ensuite la solution de Navier est employée pour résoudre les problèmes de vibration libre et du flambement des plaques simplement appuyées en composites stratifiés. Les résultats obtenus par la présente théorie d'ordre élevé pour les fréquences naturelles et les charges critiques de flambement sont comparés à ceux obtenus par d'autres théories précédemment publiées dans la littérature. On peut conclure que la théorie proposée est précise et efficace pour étudier la réponse dynamique et de la stabilité des plaques en matériaux composites stratifiés.

#### III.2 Modèle d'une plaque stratifié

##### III.2.1 Configuration géométrique

Dans la présente étude, on considère une plaque rectangulaire des côtés  $a$  et  $b$  et une épaisseur totale  $h$  comme indiqué sur la (Figure III.1) ci-dessous. La plaque se compose de  $N$  nombre de couches homogènes de même épaisseur, qui sont parfaitement liées entre elles et constitué d'un matériau linéairement élastique et orthotrope. La plaque stratifiée occupe la région  $[0, a] \times [0, b] \times [-h/2, h/2]$  dans le système de coordonnées cartésiennes et la direction  $z$  descendante est considérée comme positive. La plaque est soumise à une force axiale de compression dans le plan (uniaxiale/bi axiale).



**Figure III.1:** Géométrie et système de coordonnées de la plaque stratifiée.

### III.2.2 Hypothèses et formulation mathématique

Pour la présente théorie raffinée on suppose les hypothèses suivantes :

1. Les déplacements sont faibles par rapport à l'épaisseur de la plaque et, par conséquent, les déformations impliquées sont infinitésimales.
2. Les déplacements  $u$  dans la direction  $x$  et  $v$  dans la direction  $y$  consistent en extension  $u_0(x, y)$ , flexion  $u_b(x, y)$  et une composante de cisaillement  $u_s(x, y)$

$$u = u_0 + u_b + u_s \quad \text{et} \quad v = v_0 + v_b + v_s \quad (\text{III.1})$$

3. La composante de flexion  $u_b$  et  $v_b$  est supposée le même déplacement donné par la théorie classique des plaques. Donc, ces expressions peuvent être données comme suit :

$$u_b = -z \frac{\partial w_b}{\partial x}, \quad v_b = -z \frac{\partial w_b}{\partial y} \quad (\text{III.2})$$

4. Les composantes de cisaillement  $u_s(x, y)$  et  $v_s(x, y)$  sont liées à la composante de rotation exprimée par un terme d'intégrale indéterminé comme suit :

$$u_s = k_1 \int \theta(x, y) dx, \quad v_s = k_2 \int \theta(x, y) dy, \quad (\text{III.3})$$

5. Le déplacement transversal  $w$  contient une seule composante de flexion  $w_0(x, y)$  qui est définie en fonction des coordonnées  $x$  et  $y$ .
6. La contrainte normale transversale  $\sigma_z$  est négligeable par rapport aux contraintes normales dans le plan  $\sigma_x$  et  $\sigma_y$ .

### III.3 Cinématique et relations constitutive

#### III.3.1 Champ de déplacement

En appliquant dans cette étude, ces hypothèses et modifications simplificatrices sur les théories HSDTs conventionnelle, afin de réduire le nombre des variables inconnues (cinq variable et plus dans les théories HSDT classique). La cinématique de la théorie HSDT conventionnelle est donnée comme suit :

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) &= u_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + f(z) \varphi_x(x, y, t) \\ v(x, y, z, t) &= v_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} + f(z) \varphi_y(x, y, t) \\ w(x, y, z, t) &= w_0(x, y, t) \end{aligned} \quad (III.4)$$

Où  $u_0, v_0, w_0, \varphi_x$  et  $\varphi_y$  sont les inconnus des déplacements de la surface moyenne de la plaque,  $f(z)$  représente la fonction de forme définissant la distribution des contraintes et des déformations en cisaillement transverse à travers l'épaisseur. En utilisant l'équation (III.4) et sur la base de la quatrième hypothèse ci-dessus de l'équation (III.3), nous posons  $\varphi_x = k_1 \int \theta(x, y) dx$  et  $\varphi_y = k_2 \int \theta(x, y) dy$ , le champ de déplacement de la théorie proposée se transforme sous la forme la plus simple :

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) &= u_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + k_1 f(z) \int \theta(x, y, t) dx \\ v(x, y, z, t) &= v_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} + k_2 f(z) \int \theta(x, y, t) dy \\ w(x, y, z, t) &= w_0(x, y, t) \end{aligned} \quad (III.5)$$

Où  $k_1$  et  $k_2$  sont des coefficients qui dépendent de la géométrie de la plaque. Dans cette étude, la fonction de cisaillement utilisée pour assurer les conditions de la nullité des contraintes de cisaillement transverse à la surface libre de la plaque stratifiée (surfaces supérieure et inférieure) est prise sous la forme hyperbolique suivante :

$$f(z) = h \sinh\left(\frac{z}{h}\right) - \frac{4z^3}{3h^2} \cosh\left(\frac{1}{2}\right) \quad (III.6)$$

#### III.3.2 Champ de déformation

Les composantes de déformation normale et de cisaillement non nulles sont obtenues en utilisant les relations de déplacement-déformation données par Reddy [3] :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \varepsilon_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} k_x^b \\ k_y^b \\ k_{xy}^b \end{Bmatrix} + f(z) \begin{Bmatrix} k_x^s \\ k_y^s \\ k_{xy}^s \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \end{Bmatrix} = g(z) \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^s \\ \gamma_{xz}^s \end{Bmatrix}, \quad (\text{III.7})$$

Avec :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \varepsilon_{xy}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} k_x^b \\ k_y^b \\ k_{xy}^b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} k_x^s \\ k_y^s \\ k_{xy}^s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} k_1 \theta \\ k_2 \theta \\ k_1 \frac{\partial}{\partial y} \int \theta dx + k_2 \frac{\partial}{\partial x} \int \theta dy \end{Bmatrix}, \quad (\text{III.8})$$

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} k_2 \int \theta dy \\ k_1 \int \theta dx \end{Bmatrix}, \quad g(z) = \frac{df(z)}{dz}$$

Les termes d'intégrales présentés dans l'équation (III.8) ci-dessus peuvent être résolus en utilisant la méthode de Navier et peuvent être exprimés comme suit :

$$\frac{\partial}{\partial y} \int \theta dx = A' \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial}{\partial x} \int \theta dy = B' \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y}, \quad \int \theta dx = A' \frac{\partial \theta}{\partial x}, \quad \int \theta dy = B' \frac{\partial \theta}{\partial y} \quad (\text{III.9})$$

Où les coefficients  $A'$  et  $B'$  sont considérés selon le type de solution employée, qui est dans notre cas la solution de Navier. Ainsi, les coefficients  $A', B', k_1, k_2$  sont définie par :

$$A' = -\frac{1}{\alpha^2}, \quad B' = -\frac{1}{\beta^2}, \quad k_1 = \alpha^2, \quad k_2 = \beta^2, \quad \alpha = \frac{m\pi}{a}, \quad \beta = \frac{n\pi}{b} \quad (\text{III.10})$$

### III.3.3 Relations constitutives

Les équations constitutives pour n'importe quelle couche  $k^{th}$  d'une plaque composite stratifiée dans le système de coordonnées  $(x, y)$ , peuvent être exprimées par la loi de Hooke généralisé comme suit :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix}^{(k)} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & 0 & 0 & 0 \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{Q}_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{Q}_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{Q}_{55} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix}^{(k)} \quad (\text{III.11})$$

Où  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz}$  et  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}$  sont respectivement les composantes de contrainte et de déformation. Ainsi  $\bar{Q}_{ij}$  sont les constantes de rigidités transformées et sont donnés par Jones [70] comme :

$$\begin{aligned} \bar{Q}_{11}^k &= Q_{11} \cos^4 \theta_k + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \theta_k \cos^2 \theta_k + Q_{22} \sin^4 \theta_k, \\ \bar{Q}_{12}^k &= (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66}) \sin^2 \theta_k \cos^2 \theta_k + Q_{12} (\sin^4 \theta_k + \cos^4 \theta_k), \\ \bar{Q}_{22}^k &= Q_{11} \sin^4 \theta_k + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \theta_k \cos^2 \theta_k + Q_{22} \cos^4 \theta_k, \\ \bar{Q}_{66}^k &= (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 2Q_{66}) \sin^2 \theta_k \cos^2 \theta_k + Q_{66} (\sin^4 \theta_k + \cos^4 \theta_k), \\ \bar{Q}_{44}^k &= Q_{44} \cos^2 \theta_k + Q_{55} \sin^2 \theta_k, \\ \bar{Q}_{55}^k &= Q_{55} \cos^2 \theta_k + Q_{44} \sin^2 \theta_k \end{aligned} \quad (\text{III.12})$$

Où  $\theta_k$  est l'angle des axes du matériau avec les axes de coordonnées de référence de chaque couche et  $Q_{ij}$  sont les coefficients de rigidité qui peuvent être définis comme indiqué ci-dessous :

$$\begin{aligned} Q_{11} &= \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad Q_{22} = \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad Q_{12} = \frac{\nu_{12}E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \\ Q_{66} &= G_{12}, \quad Q_{44} = G_{23}, \quad Q_{55} = G_{13} \end{aligned} \quad (\text{III.13})$$

### III.4 Equations de mouvement

Le principe d'Hamilton est utilisé dans cette étude pour dériver les équations du mouvement. Ce principe peut être exprimé sous la forme suivante :

$$\int_0^t (\delta U + \delta V - \delta K) dt = 0 \quad (\text{III.14})$$

Où  $\delta U, \delta V$  et  $\delta K$  sont les variations de l'énergie de déformation, du travail extérieur engendrée par les charges extérieures appliquées et de l'énergie cinétique, respectivement. La variation de l'énergie de déformation de la plaque stratifiée est exprimée par :

$$\begin{aligned}
\delta U &= \int_A \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz}) dA dz \\
&= \int_A \left\{ N_x \frac{\partial \delta u_0}{\partial x} + N_y \frac{\partial \delta v_0}{\partial y} + N_{xy} \left( \frac{\partial \delta u_0}{\partial y} + \frac{\partial \delta v_0}{\partial x} \right) - M_x^b \frac{\partial^2 \delta w_0}{\partial x^2} - M_y^b \frac{\partial^2 \delta w_0}{\partial y^2} \right. \\
&\quad - 2M_{xy}^b \frac{\partial^2 \delta w_0}{\partial x \partial y} + k_1 A' M_x^s \frac{\partial^2 \delta \theta}{\partial x^2} + k_2 B' M_y^s \frac{\partial^2 \delta \theta}{\partial y^2} + (k_1 A' + k_2 B') M_{xy}^s \frac{\partial^2 \delta \theta}{\partial x \partial y} \\
&\quad \left. + k_1 A' V_{xz}^s \frac{\partial \delta \theta}{\partial x} + k_2 B' V_{yz}^s \frac{\partial \delta \theta}{\partial y} \right\} dA
\end{aligned} \tag{III.15}$$

Où  $A$  est la surface et  $(N_x, N_y, N_{xy})$ ,  $(M_x^b, M_y^b, M_{xy}^b)$ ,  $(M_x^s, M_y^s, M_{xy}^s)$  et  $(V_{xz}^s, V_{yz}^s)$  sont les résultantes des contraintes qui sont exprimées par :

$$\begin{aligned}
\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} &= \sum_{k=1}^N \int_{h_k}^{h_{k+1}} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} dz, & \begin{Bmatrix} M_x^b \\ M_y^b \\ M_{xy}^b \end{Bmatrix} &= \sum_{k=1}^N \int_{h_k}^{h_{k+1}} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} z dz, \\
\begin{Bmatrix} M_x^s \\ M_y^s \\ M_{xy}^s \end{Bmatrix} &= \sum_{k=1}^N \int_{h_k}^{h_{k+1}} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} f(z) dz, & \begin{Bmatrix} V_{xz}^s \\ V_{yz}^s \end{Bmatrix} &= \sum_{k=1}^N \int_{h_k}^{h_{k+1}} \begin{Bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} g(z) dz;
\end{aligned} \tag{III.16}$$

En substituant l'équation (III.7) dans les relations constitutives données par l'équation (III.7) et les résultats ultérieurs dans l'équation (III.16), les résultantes de contraintes de la théorie proposée peuvent être représentées en termes de déformations virtuelles selon les équations constitutives suivantes :

$$\begin{aligned}
N_x &= A_{11} \varepsilon_x^0 + A_{12} \varepsilon_y^0 + B_{11} \varepsilon_x^1 + B_{12} \varepsilon_y^1 + E_{11} \varepsilon_x^2 + E_{12} \varepsilon_y^2, \\
N_y &= A_{12} \varepsilon_x^0 + A_{22} \varepsilon_y^0 + B_{12} \varepsilon_x^1 + B_{22} \varepsilon_y^1 + E_{12} \varepsilon_x^2 + E_{22} \varepsilon_y^2, \\
N_{xy} &= A_{66} \gamma_{xy}^0 + B_{66} \gamma_{xy}^1 + E_{66} \gamma_{xy}^2, \\
M_x^b &= B_{11} \varepsilon_x^0 + B_{12} \varepsilon_y^0 + D_{11} \varepsilon_x^1 + D_{12} \varepsilon_y^1 + F_{11} \varepsilon_x^2 + F_{12} \varepsilon_y^2, \\
M_y^b &= B_{12} \varepsilon_x^0 + B_{22} \varepsilon_y^0 + D_{12} \varepsilon_x^1 + D_{22} \varepsilon_y^1 + F_{12} \varepsilon_x^2 + F_{22} \varepsilon_y^2, \\
M_{xy}^b &= B_{66} \gamma_{xy}^0 + D_{66} \gamma_{xy}^1 + F_{66} \gamma_{xy}^2, \\
M_x^s &= E_{11} \varepsilon_x^0 + E_{12} \varepsilon_y^0 + F_{11} \varepsilon_x^1 + F_{12} \varepsilon_y^1 + H_{11} \varepsilon_x^2 + H_{12} \varepsilon_y^2, \\
M_y^s &= E_{12} \varepsilon_x^0 + E_{22} \varepsilon_y^0 + F_{12} \varepsilon_x^1 + F_{22} \varepsilon_y^1 + H_{12} \varepsilon_x^2 + H_{22} \varepsilon_y^2, \\
M_{xy}^s &= E_{66} \gamma_{xy}^0 + F_{66} \gamma_{xy}^1 + H_{66} \gamma_{xy}^2, \quad S_{yz}^s = A_{44}^s \gamma_{yz}^0, \quad S_{xz}^s = A_{55}^s \gamma_{xz}^0
\end{aligned} \tag{III.17}$$

Où  $A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}, E_{ij}, F_{ij}, H_{ij}$  et  $A_{ij}^s$  utilisé dans l'équation (III.17) sont les coefficients de rigidité de la plaque stratifiée et peuvent être définis comme :

$$\begin{aligned} (A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}, E_{ij}, F_{ij}, H_{ij}) &= \sum_{k=1}^N \int_{h_k}^{h_{k+1}} \bar{Q}_{ij}^{(k)} (1, z, z^2, f(z), z f(z), f^2(z)) dz, \quad i, j = 1, 2, 6 \\ A_{ij}^s &= \sum_{k=1}^N \int_{h_k}^{h_{k+1}} \bar{Q}_{ij}^{(k)} g^2(z) dz, \quad i, j = 4, 5 \end{aligned} \quad (\text{III.18})$$

Ainsi, la variation du travail extérieur engendrée par les charges axiales appliquées peut être exprimée comme suit :

$$\delta V = - \int_A \left( N_x^0 \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial \delta w_0}{\partial x} + N_y^0 \frac{\partial w_0}{\partial y} \frac{\partial \delta w_0}{\partial y} + 2N_{xy}^0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \delta w_0}{\partial x \partial y} \right) dA \quad (\text{III.19})$$

Où  $N_x^0, N_y^0, N_{xy}^0$  sont les charges axiales appliquées à la plaque. Ainsi, la variation de l'énergie cinétique de la plaque peut être exprimée comme :

$$\begin{aligned} \delta K &= \sum_{k=1}^N \int_{h_k}^{h_{k+1}} \int_A \rho^{(k)} \left( \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial \delta u}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial t} \frac{\partial \delta v}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial t} \frac{\partial \delta w}{\partial t} \right) dA dz \\ &= \sum_{k=1}^N \int_A \left\{ I_0 \left( \frac{\partial u_0}{\partial t} \frac{\partial \delta u_0}{\partial t} + \frac{\partial v_0}{\partial t} \frac{\partial \delta v_0}{\partial t} + \frac{\partial w_0}{\partial t} \frac{\partial \delta w_0}{\partial t} \right) + I_2 \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial t} \frac{\partial^2 \delta w_0}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y \partial t} \frac{\partial^2 \delta w_0}{\partial y \partial t} \right) \right. \\ &\quad - I_1 \left( \frac{\partial u_0}{\partial t} \frac{\partial^2 \delta w_0}{\partial x \partial t} + \frac{\partial v_0}{\partial t} \frac{\partial^2 \delta w_0}{\partial y \partial t} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial t} \frac{\partial \delta u_0}{\partial t} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y \partial t} \frac{\partial \delta v_0}{\partial t} \right) \\ &\quad + I_3 k_1 A' \left( \frac{\partial u_0}{\partial t} \frac{\partial^2 \delta \theta}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial t} \frac{\partial \delta u_0}{\partial t} \right) + I_3 k_2 B' \left( \frac{\partial v_0}{\partial t} \frac{\partial^2 \delta \theta}{\partial y \partial t} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y \partial t} \frac{\partial \delta v_0}{\partial t} \right) \\ &\quad - I_4 k_1 A' \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial t} \frac{\partial^2 \delta \theta}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial t} \frac{\partial^2 \delta w_0}{\partial x \partial t} \right) - I_4 k_2 B' \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial y \partial t} \frac{\partial^2 \delta \theta}{\partial y \partial t} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y \partial t} \frac{\partial^2 \delta w_0}{\partial y \partial t} \right) \\ &\quad \left. + I_5 (k_1 A')^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial t} \frac{\partial^2 \delta \theta}{\partial x \partial t} + I_5 (k_2 B')^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial y \partial t} \frac{\partial^2 \delta \theta}{\partial y \partial t} \right\} dA \end{aligned} \quad (\text{III.20})$$

Avec  $I_0, I_1, I_2, I_3, I_4, I_5$  sont des inerties de masse exprimées par :

$$(I_0, I_1, I_2, I_3, I_4, I_5) = \sum_{k=1}^N \int_{z_k}^{z_{k+1}} \rho^{(k)} (1, z, z^2, f(z), z f(z), f^2(z)) dz \quad (\text{III.21})$$

En remplaçant les équations (III.15, III.19) et (III.20) dans l'équation (III.14) et en intégrant par parties par rapport à  $x, y$  et la variable du temps, puis collectant les coefficients  $\delta u_0, \delta v_0, \delta w_0, \delta \theta$ , on obtient les équations de mouvement de la plaque suivantes :

$$\begin{aligned}
\delta u_0 : \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} &= I_0 \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} - I_1 \frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial t^2} + k_1 A' I_3 \frac{\partial^3 \theta}{\partial x \partial t^2} \\
\delta v_0 : \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} &= I_0 \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} - I_1 \frac{\partial^3 w_0}{\partial y \partial t^2} + k_2 B' I_3 \frac{\partial^3 \theta}{\partial y \partial t^2} \\
\delta w_0 : \frac{\partial^2 M_x^b}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^b}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^b}{\partial y^2} + N_x^0 \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial \delta w_0}{\partial x} + N_y^0 \frac{\partial w_0}{\partial y} \frac{\partial \delta w_0}{\partial y} - 2 N_{xy}^0 \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial \delta w_0}{\partial y} \\
&= I_0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} + I_1 \left( \frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial t^2} + \frac{\partial^3 v_0}{\partial y \partial t^2} \right) - I_2 \left( \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^2 \partial t^2} \right) + I_4 \left( k_1 A' \frac{\partial^3 \theta}{\partial x \partial t^2} + k_2 B' \frac{\partial^3 \theta}{\partial y \partial t^2} \right) \quad (\text{III.22}) \\
\delta \theta : -k_1 A' \frac{\partial^2 M_x^s}{\partial x^2} - (k_1 A' + k_2 B') \frac{\partial^2 M_{xy}^s}{\partial x \partial y} - k_2 B' \frac{\partial^2 M_y^s}{\partial y^2} + k_1 A' \frac{\partial V_{xz}^s}{\partial x} + k_2 B' \frac{\partial V_{yz}^s}{\partial y} = \\
&- I_3 \left( k_1 A' \frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial t^2} + k_2 B' \frac{\partial^3 v_0}{\partial y \partial t^2} \right) + I_4 \left( k_1 A' \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial t^2} + k_2 B' \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^2 \partial t^2} \right) \\
&- I_5 \left( (k_1 A')^2 \frac{\partial^4 \theta}{\partial x^2 \partial t^2} + (k_2 B')^2 \frac{\partial^4 \theta}{\partial y^2 \partial t^2} \right)
\end{aligned}$$

En substituant l'équation (III.17) dans l'équation (III.22), les équations du mouvement peuvent être exprimées en termes de déplacements comme suit :

$$\begin{aligned}
\delta u_0 : A_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + A_{66} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} - B_{11} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} - (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y^2} \\
+ (k_1 E_{11} + k_2 E_{12}) \frac{\partial \theta}{\partial x} + (k_1 A' + k_2 B') E_{66} \frac{\partial^3 \theta}{\partial x \partial y^2} = I_0 \ddot{u}_0 - I_1 \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial x} + k_1 A' I_3 \frac{\partial \ddot{\theta}_0}{\partial x} \quad (\text{III.23a})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta v_0 : A_{22} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + A_{66} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} - B_{22} \frac{\partial^3 w_0}{\partial y^3} - (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2 \partial y} \\
+ (k_1 E_{12} + k_2 E_{22}) \frac{\partial \theta}{\partial y} + (k_1 A' + k_2 B') E_{66} \frac{\partial^3 \theta}{\partial x^2 \partial y} = I_0 \ddot{v}_0 - I_1 \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial y} + k_2 B' I_3 \frac{\partial \ddot{\theta}_0}{\partial y} \quad (\text{III.23b})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta w_0 : B_{11} \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} + (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y^2} + B_{22} \frac{\partial^3 v_0}{\partial y^3} + (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2 \partial y} - D_{11} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} \\
- D_{22} \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^4} - 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial y^2} + 2k_1 D_{12}^s \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y} + (k_1 F_{11} + k_2 F_{12}) \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \\
+ (k_1 F_{12} + k_2 F_{22}) \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + 2(k_1 A' + k_2 B') F_{66} \frac{\partial^4 \theta}{\partial x^2 \partial y^2} + N_x^0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + N_y^0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} - 2N_{xy}^0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \\
= I_0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} + I_1 \left( \frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial t^2} + \frac{\partial^3 v_0}{\partial y \partial t^2} \right) - I_2 \left( \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^2 \partial t^2} \right) + I_4 \left( k_1 A' \frac{\partial^3 \theta}{\partial x \partial t^2} + k_2 B' \frac{\partial^3 \theta}{\partial y \partial t^2} \right) \quad (\text{III.23c})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta\theta: & -\left(k_1 B_{11}^s + k_2 E_{12}\right) \frac{\partial u_0}{\partial x} - \left(k_1 A' + k_2 B'\right) E_{66} \frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial y^2} - \left(k_1 E_{12} + k_2 E_{22}\right) \frac{\partial v_0}{\partial y} \\
& - \left(k_1 A' + k_2 B'\right) E_{66} \frac{\partial^3 v_0}{\partial x^2 \partial y} + \left(k_1 F_{11} + k_2 F_{12}\right) \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \left(k_1 F_{12} + k_2 F_{22}\right) \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\
& - \left(k_1^2 A'^2 + k_2^2 B'^2 + 2k_1 k_2 A' B'\right) H_{66} \frac{\partial^4 \theta}{\partial x^2 \partial y^2} - \left(k_1^2 H_{11} - k_2^2 H_{22} - 2k_1 k_2 H_{12}\right) \theta \\
& + 2\left(k_1 A' + k_2 B'\right) F_{66} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial y^2} + k_1^2 A'^2 A_{55}^s \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + k_2^2 B'^2 A_{44}^s \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \\
& = -I_3 \left( k_1 A' \frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} + k_2 B' \frac{\partial \ddot{v}_0}{\partial y} \right) + I_4 \left( k_1 A' \frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial x^2} + k_2 B' \frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial y^2} \right) \\
& - I_5 \left( (k_1 A')^2 \frac{\partial^2 \ddot{\theta}}{\partial x^2} + (k_2 B')^2 \frac{\partial^2 \ddot{\theta}}{\partial y^2} \right)
\end{aligned} \tag{III.23d}$$

### III.5 Solutions analytiques des plaques composites

La méthode Navier est utilisée pour obtenir les solutions de forme des équations (III.23) aux dérivées partielles pour des plaques composites stratifiées simplement appuyées sur les quatre bords et en satisfaisant les conditions aux limites suivantes :

$$u_0 = w_0 = N_y = M_y^b = M_y^s = \theta = 0 \quad \text{Sur les bords } (y = 0, b) \tag{III.24a}$$

$$v_0 = w_0 = N_x = M_x^b = M_x^s = \theta = 0 \quad \text{Sur les bords } (x = 0, a) \tag{III.24b}$$

Les variables de déplacement qui satisfont les conditions aux limites ci-dessus peuvent être exprimées dans la série de Fourier suivante :

$$\begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \\ \theta \end{Bmatrix} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \begin{Bmatrix} U_{mn} \cos(\alpha x) \sin(\beta y) e^{i\omega t} \\ V_{mn} \sin(\alpha x) \cos(\beta y) e^{i\omega t} \\ W_{mn} \sin(\alpha x) \sin(\beta y) e^{i\omega t} \\ \Phi_{mn} \sin(\alpha x) \sin(\beta y) e^{i\omega t} \end{Bmatrix} \tag{III.25}$$

Où  $U_{mn}, V_{mn}, W_{mn}$  et  $\Phi_{mn}$  sont les coefficients de Fourier inconnus pour chaque valeur  $(m, n)$ .

$\omega$  Est la fréquence de vibration libre de la plaque,  $\sqrt{-1} = -i$  est l'unité imaginaire, ainsi que les paramètres  $\alpha$  et  $\beta$  sont définis comme :

$$\alpha = \frac{m\pi}{a}, \beta = \frac{n\pi}{b} \tag{III.26}$$

En substituant l'équation (III.25) à l'équation (III.23) et en rassemblant les déplacements pour toute les valeurs de  $m$  et  $n$ , on obtient le problème suivant :

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} \\ K_{12} & K_{22} & K_{23} & K_{24} \\ K_{13} & K_{23} & K_{33} & K_{34} \\ K_{14} & K_{24} & K_{34} & K_{44} \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} & M_{14} \\ M_{12} & M_{22} & M_{23} & M_{24} \\ M_{13} & M_{23} & M_{33} & M_{34} \\ M_{14} & M_{24} & M_{34} & M_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_{mn} \\ V_{mn} \\ W_{mn} \\ \Phi_{mn} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{III.27})$$

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} \\ K_{12} & K_{22} & K_{23} & K_{24} \\ K_{13} & K_{23} & K_{33} & K_{34} \\ K_{14} & K_{24} & K_{34} & K_{44} \end{bmatrix} - N^0 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_{mn} \\ V_{mn} \\ W_{mn} \\ \Phi_{mn} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{III.28})$$

Avec:

$$N^0 = (N_x^0 \alpha^2 + N_y^0 \beta^2) \quad (\text{III.29})$$

Où  $[K_{ij}]$  et  $[M_{ij}]$  sont les éléments de la matrice de rigidité et de la matrice de masse, respectivement. Ces éléments peuvent être définis pour les plaques stratifiées à empilement croisés comme suit :

$$\begin{aligned} K_{11} &= \alpha^2 A_{11} + \beta^2 A_{66}, & K_{12} &= \alpha\beta(A_{12} + A_{66}), \\ K_{13} &= -\alpha^3 B_{11}, & K_{14} &= -k_1 \alpha B_{11}^s, \\ K_{22} &= \alpha^2 A_{66} + \beta^2 A_{22}, & K_{23} &= -\beta^3 B_{22}, & K_{24} &= -k_2 \beta B_{22}^s, \\ K_{33} &= \alpha^4 D_{11} + \beta^4 D_{22} + 2\alpha^2 \beta^2 (D_{12} + 2D_{66}), \\ K_{34} &= k_1 \alpha^2 D_{11}^s + (k_2 \alpha^2 + k_1 \beta^2) D_{12}^s + k_2 \beta^2 D_{22}^s - 2(k_1 A' + k_2 B') \alpha^2 \beta^2 D_{66}^s, \\ K_{44} &= k_1^2 H_{11}^s + k_2^2 H_{22}^s + 2k_1 k_2 H_{12}^s + (k_1^2 A'^2 + k_2^2 B'^2 + 2k_1 k_2 A' B') \alpha^2 \beta^2 H_{66}^s \\ &\quad + k_2^2 B'^2 \beta^2 A_{44}^s + k_1^2 A'^2 \alpha^2 A_{55}^s \end{aligned} \quad (\text{III.30})$$

$$\begin{aligned} M_{11} &= I_0, & M_{12} &= 0, & M_{13} &= 0, & M_{14} &= 0, \\ M_{22} &= I_0, & M_{23} &= 0, & M_{24} &= 0, \\ M_{33} &= I_0 + I_2 (\alpha^2 + \beta^2), \\ M_{34} &= -(k_1 A' \alpha^2 + k_2 B' \beta^2) J_2, \\ M_{44} &= (k_1^2 A'^2 \alpha^2 + k_2^2 B'^2 \beta^2) K_2 \end{aligned} \quad (\text{III.31})$$

Dans cette analyse, la solution de l'équation (III.27) permet de calculer les fréquences propres de vibration libre des plaques stratifiées simplement appuyées, alors que la solution de l'équation (III.28) permet de calculer les charges critiques du flambement.

### III.5 Conclusion

Dans la présente étude, une théorie raffinée de déformation en cisaillement hyperbolique d'ordre élevé est appliquée pour l'analyse de la vibration libre et du flambement des plaques composites stratifiées. Le modèle analytique proposé présente un nouveau champ de déplacement en utilisant des termes intégrés indéterminés. Seuls quatre inconnus sont utilisés ce qui est inférieur à la théorie conventionnelle de la déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT) et aux autres théories d'ordre élevé (HSDTs). De plus, elle satisfait les conditions de la nullité des contraintes sur les surfaces supérieure et inférieure des plaques sans utiliser le facteur de correction de cisaillement. Les études paramétriques présentées dans le chapitre suivant permettront d'apprécier clairement l'apport de cette théorie en le comparant les résultats obtenus avec ceux de la littérature.

# *Chapitre IV*

## *Résultats et discussions*

## IV.1 Introduction

L'objectif principal de ce travail est de présenter une théorie raffinée de déformation en cisaillement hyperbolique sur la base d'une nouvelle cinématique à quatre variables intégral pour l'analyse du flambement et des vibrations libres des plaques composites stratifiées simplement appuyées. Différents types de plaques à empilement croisé ont été analysés en fonction du nombre de couches. Afin de vérifier l'exactitude et l'efficacité de la présente théorie, les résultats obtenus par la présente approche sont confrontés aux résultats des autres modèles d'ordre élevé proposés dans la littérature. Cette théorie est variationnelle, elle néglige le coefficient de correction de cisaillement, et assure une description trigonométrique des contraintes de cisaillement à travers l'épaisseur tout en remplissant la condition de contrainte de cisaillement nulle sur les bords libres des plaques étudiées.

Dans cette analyse, plusieurs exemples numériques sont présentés et discutés pour montrer les effets du rapport de la géométrie de la plaque, le rapport d'élancement, le rapport de rigidité et le nombre de couche sur la charge critique du flambement et les fréquences naturelles de vibration des stratifiés. Les résultats obtenus par la présente théorie sont comparés à ceux des autres théories, à savoir les théories CPT, FSDT, HSDT, SSNDT et la solution exacte d'élasticité tridimensionnelle. La description des différentes théories des stratifiés sont présentées dans le tableau (IV.1) en fonction de nombre des inconnus et selon le champ de déplacement utilisé. Dans tous les exemples, un facteur de correction de cisaillement de  $5/6$  est utilisé seulement pour la théorie FSDT et nous observons que les inerties rotatives sont incluses dans toutes les théories. Toutes les couches sont parfaitement collées avec une même épaisseur, de la même densité et des propriétés matérielles orthotropes dans les axes principaux

**Tableau IV.1 :** Les différentes théories des plaques stratifiées

Notation	Théories	Nombre des inconnus
CPT	Théorie classique des plaques	3
FSDT	Théorie de la déformation en cisaillement du premier ordre	5
HSDT	Théorie de la déformation en cisaillement d'ordre élevé	5
SSNDT	Théorie de la déformation en cisaillement sinusoïdal et de déformation normale	4
TSDT	Théorie de la déformation en cisaillement trigonométrique	6
Présente	Théorie raffinée de la déformation en cisaillement hyperbolique	4

## IV.2 Les propriétés des matériaux utilisés

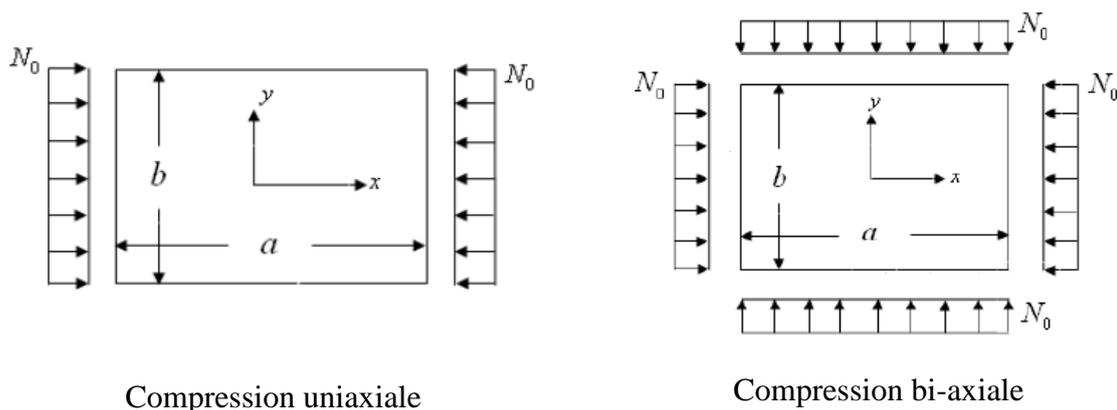
Dans cette étude, des plaques composites stratifiées carrées et rectangulaires, simplement appuyées soumises aux conditions de chargement uniaxial et biaxial, comme le montre la figure IV.1 ci-dessous, est considérée pour illustrer la précision de la présente théorie dans la prédiction du comportement du flambement. Pour chaque choix de  $m$  et  $n$ , il existe une valeur unique correspondante de  $N^0$ . La charge critique de flambement est la plus petite valeur de  $N^0(m,n)$ . Les propriétés matérielles suivantes sont utilisées dans cette étude numérique (Reddy, 1984) :

$$\frac{E_1}{E_2} = \text{variable}, \quad G_{12} = G_{13} = 0.6E_2, \quad G_{23} = 0.5E_2, \quad \mu_{21} = \frac{E_2}{E_1} \mu_{12} \quad (\text{IV.1})$$

Pour plus de commodité, la charge critique du flambement et les fréquences naturelles de vibration adimensionnelles sont obtenues par les relations suivantes :

$$\bar{N}_{cr} = \frac{N^0 a^2}{E_2 h^3}, \quad \bar{\omega} = \omega \sqrt{\frac{\rho h^2}{E_2}} \quad (\text{IV.2})$$

Où  $a$  et  $h$  représentent la longueur et l'épaisseur d'une plaque carrée, respectivement.



**Figure IV.1:** Une plaque stratifiée soumise à des forces de compression dans le plan.

La solution de l'équation (III.27) permet d'obtenir la fréquence propre pour tous les modes de vibration et la solution de l'équation (III.28) permet d'obtenir la charge

critique du flambement pour les différentes conditions de chargement d'une plaque stratifiée rectangulaire orthotrope comme indiquée dans la figure (IV.1).

### IV.3 Résultats d'analyse du flambement des plaques composites

Pour l'analyse de la stabilité des plaques, les forces de compression dans le plan  $N_x^0, N_y^0, N_{xy}^0$  représentent maintenant des charges de compression et non plus des forces de réaction, car il n'y a pas de charge transversale. Les valeurs des forces de compression dans le plan sont prises comme suit :  $N_x^0 = -\gamma_1 N^0, N_y^0 = -\gamma_2 N^0, N_{xy}^0 = 0$ . Les propriétés du matériau utilisées pour cet exemple sont indiquées dans l'équation (IV.1). Toutefois, les valeurs de la charge critique du flambement obtenus par la présente théorie pour des plaques carrées en matériaux composites stratifiées symétriques à trois couches ( $0^\circ/90^\circ/0^\circ$ ) et cinq couches ( $0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ/0^\circ$ ), soumises à des charges de compressions uniaxiales et bi-axiales pour divers rapports modulaires  $E_1/E_2$  sont présentées dans les tableaux IV.2 et IV.3. Toutes les couches sont de même épaisseur.

Les résultats obtenus par la présente théorie sont comparés avec la théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé (HSDT) développée par [3], la théorie de la déformation en cisaillement sinusoïdal et de déformation normale (SSNDT) proposée par Sayyad et Ghugal [10] qui tient en considération les effets de l'étirement de l'épaisseur, la théorie simplifiée d'ordre élevé appliquée par Turan et al. [71] qui est basée sur les mêmes hypothèses que la théorie de Reddy, la théorie de la déformation en cisaillement trigonométrique (TSDT) utilisée par Sayyad et al. [72], la théorie de la déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT) de Mindlin [2], la théorie classique (CPT) de Kirchhoff [1] et la solution d'élasticité exacte donnée par Noor [25]. A partir de la lecture des tableaux IV.2 et IV.3, on observe que les résultats obtenus sont en excellent accord avec la solution proposée par Turan et al. [71] ainsi qu'avec la solution TSDT de Sayyad et al. [72]. On observe également que les charges critiques du flambement calculées par CPT sont significativement plus élevées que celles obtenues par la présente théorie. Ceci est la conséquence de la négligence de l'effet de déformation en cisaillement transverse dans la théorie classique. Il apparaît dans les tableaux IV.2 et IV.3 que les charges critiques de flambement adimensionnelles en cas de la compression bi-axiale sont presque la moitié de celles de la compression uniaxiale pour les plaques carrées.

**Table IV.2:** Comparaison de la charge critique de flambement ( $N_{cr}$ ) pour les plaques carrées composites stratifiées simplement appuyées ( $0^\circ/90^\circ/0^\circ$ ) sous compression uniaxiale et bi-axiale ( $b = a$ ,  $a/h = 10$ ).

Compression	$\gamma_1, \gamma_2$	Théories	$E_1/E_2$		
			20	30	40
Uniaxiale	(1,0)	<b>Présente</b>	<b>16.231</b>	<b>21.429</b>	<b>25.965</b>
		HSDT (Turan et al., 2017)	16.223	21.435	25.982
		TSDT (Sayyad et al., 2016)	15.215	20.428	24.977
		SSNDT(Sayyad et al Ghugal,2014)	15.003	19.002	22.330
		HSDT (Reddy, 1984)	15.300	19.675	23.339
		FSDT (Mindlin, 1951)	14.985	19.027	22.315
		CPT (Kirchhoff, 1850)	19.712	27.936	36.160
		Exacte, Noor (1975)	15.019	19.304	22.880
Bi-axiale	(1,1)	<b>Présente</b>	<b>8.1150</b>	<b>10.714</b>	<b>12.983</b>
		HSDT (Turan et al., 2017)	7.6500	9.8376	11.669
		TSDT (Sayyad et al., 2016)	7.6075	10.214	12.488
		SSNDT(Sayyad et al Ghugal,2014)	7.5014	9.5009	11.165
		HSDT (Reddy, 1984)	7.6500	9.8376	11.669
		FSDT (Mindlin, 1951)	7.4925	9.5135	11.157
		CPT (Kirchhoff, 1850)	9.8560	13.968	18.080
		Exacte, Noor (1975)	7.5095	9.6520	11.440

Le tableau IV.4 montre le paramètre de la charge critique de flambement pour une plaque rectangulaire composite laminée à empilement symétrique à quatre couches ( $0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ$ ). Les résultats numériques sont obtenus pour différentes valeurs des rapports géométriques " $b/a$ " et des rapports d'élancement " $a/h$ ".

L'examen du tableau IV.4 montre que la charge critique de flambement augmente en fonction de l'augmentation des deux rapports " $b/a$ " et " $a/h$ ". Il est également souligné que la présente théorie est en excellent accord dans le cas d'analyse du comportement du flambement des plaques rectangulaires en matériaux composites stratifiés.

**Table IV.3:** Comparaison de la charge critique de flambement ( $N_{cr}$ ) pour les plaques carrées composites stratifiées simplement appuyées ( $0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ/0^\circ$ ) sous compression uniaxiale et bi-axiale ( $b = a$ ,  $a/h = 10$ ).

Compression	$\gamma_1, \gamma_2$	Théories	$E_1/E_2$		
			20	30	40
Uniaxiale	(1,0)	Présente	16.231	21.429	25.965
		HSDT (Turan et al., 2017)	16.223	21.435	25.982
		TSDT (Sayyad et al., 2016)	15.215	20.428	24.977
		SSNDT(Sayyad et al Ghugal,2014)	15.003	19.002	22.330
		HSDT (Reddy, 1984)	15.300	19.675	23.339
		FSDT (Mindlin, 1951)	14.985	19.027	22.315
		CPT (Kirchhoff, 1850)	19.712	27.936	36.160
		Exacte, Noor (1975)	15.019	19.304	22.880
Bi-axiale	(1,1)	Présente	8.1150	10.714	12.983
		HSDT (Turan et al., 2017)	7.6500	9.8376	11.669
		TSDT (Sayyad et al., 2016)	7.6075	10.214	12.488
		SSNDT (Sayyad et al., 2014)	7.5014	9.5009	11.165
		HSDT (Reddy, 1984)	7.6500	9.8376	11.669
		FSDT (Mindlin, 1951)	7.4925	9.5135	11.157
		CPT (Kirchhoff, 1850)	9.8560	13.968	18.080
		Exacte, Noor (1975)	7.5095	9.6520	11.440

**Table IV.4:** Comparaison de la charge critique de flambement ( $N_{cr}$ ) pour les plaques rectangulaires composites stratifiées simplement appuyées ( $0^0/90^0/90^0/0^0$ ) sous compression uniaxiale et bi-axiale.

Compression	$\gamma_1, \gamma_2$	$a/h$	Source	$b/a$			
				1.0	2.0	3.0	4.0
Uniaxial	(1, 0)	5	<b>Present</b>	<b>14.187</b>	<b>9,896</b>	<b>9,039</b>	<b>8.729</b>
			TSDT (Sayyad et al., 2016)	14.181	9,95	9,091	8.778
			SSNDT(Sayyad et al Ghugal,2014)	11.986	8,780	8.463	8.382
			FSDT (Mindlin, 1951)	12.146	8,673	8.357	8.279
			CPT (Kirchhoff, 1850)	36.160	26,833	26.259	26.102
		10	<b>Present</b>	<b>25.965</b>	<b>19,751</b>	<b>18.670</b>	<b>18.278</b>
			TSDT (Sayyad et al., 2016)	25.908	19,785	18.705	18.313
			SSNDT(Sayyad et al Ghugal,2014)	23.387	18,500	18.057	17.941
			FSDT (Mindlin, 1951)	23.453	18,398	17.962	17.849
			CPT (Kirchhoff, 1850)	36.160	29,833	29.259	29.102
		100	<b>Present</b>	<b>36.170</b>	<b>29.681</b>	<b>29.093</b>	<b>28.930</b>
			TSDT (Sayyad et al., 2016)	36.016	29.682	29.094	28.931
			SSNDT(Sayyad et al Ghugal,2014)	35.961	29.652	29.080	28.924
			FSDT (Mindlin, 1951)	35.956	29.648	29.077	28.921
			CPT (Kirchhoff, 1850)	36.160	29.833	29.259	29.102
Biaxial	(1, 1)	5	<b>Present</b>	<b>7.0937</b>	<b>7.9164</b>	<b>8.1355</b>	<b>8.2154</b>
			TSDT (Sayyad et al., 2016)	7.0900	7.9600	8.1820	8.2620
			SSNDT(Sayyad et al Ghugal,2014)	5.9934	7.0244	7.6171	7.8896
			FSDT (Mindlin, 1951)	6.0730	6.9387	7.5216	7.7928
			CPT (Kirchhoff, 1850)	18.080	23.866	26.333	27.390
		10	<b>Present</b>	<b>12.983</b>	<b>15.801</b>	<b>16.802</b>	<b>17.203</b>
			TSDT (Sayyad et al., 2016)	12.954	15.828	16.834	17.236
			SSNDT(Sayyad et al Ghugal,2014)	11.694	14.800	16.251	16.886
			FSDT (Mindlin, 1951)	11.726	14.719	16.166	16.799
			CPT (Kirchhoff, 1850)	18.080	23.866	26.333	27.390
		100	<b>Present</b>	<b>18.008</b>	<b>23.745</b>	<b>26,184</b>	<b>27.228</b>
			A.S. Sayyad et al.	18.008	23.746	26.185	27.229
			SSNDT(Sayyad et al Ghugal,2014)	17.980	23.722	26.172	27.223
			FSDT (Mindlin, 1951)	17.978	23.718	26.169	27.219
			CPT (Kirchhoff, 1850)	18.080	23.866	26.333	27.390

#### IV.4 Résultats d'analyse de la vibration libre des plaques composites

Selon la technique de Navier, les équations de la plaque dans le cas de l'analyse des vibrations libres sont obtenues en éliminant la charge transversale  $q$  et les forces de compression dans le plan  $N_x^0, N_y^0, N_{xy}^0$  dans les équations (III.23) et en utilisant la solution de l'équation (III.27). Dans le tableau IV.5, les fréquences naturelles adimensionnelles des plaques carrées en composites stratifiés, simplement appuyées pour différents rapports modulaires  $E_1/E_2$  sont présentées et comparées à celles obtenues par SSNDT de Sayyad et Ghugal [23], HSDT de Reddy [3], FSDT de Mindlin [2] et CPT de Kirchhoff [1]. Dans tous les schémas de stratification, les couches sont d'épaisseur égale. Les propriétés des matériaux sont indiquées dans l'équation (IV.1). La solution d'élasticité exacte pour l'analyse de la vibration libre des plaques composites laminées donnée par Noor [24] est utilisée à des fins de comparaison.

D'après le tableau IV.5, il est observé que la présente théorie est en excellent accord avec les autres théories d'ordre élevé dans la prédiction des fréquences naturelles des plaques composites laminées. La CPT surestime les fréquences naturelles en raison de la négligence de l'effet de déformation en cisaillement transversal. Il est également observé que les fréquences naturelles des plaques composites laminées augmentent en fonction de l'augmentation du degré d'orthotropie  $E_1/E_2$ .

**Table IV.5:** Comparaison des fréquences naturelles adimensionnelles de plaques composites carrées simplement appuyées ( $b = a$ ,  $a/h = 5$ ).

Lay-up	Source	$E_1 / E_2$			
		10	20	30	40
$(0^0/90^0)$	<b>Present</b>	<b>0.27955</b>	<b>0.31285</b>	<b>0.34021</b>	<b>0.36350</b>
	TSDT (Sayyad et al., 2016)	0.27987	0.31354	0.34128	0.36498
	SSNDT(Sayyad et al Ghugal,2014)	0.28060	0.31415	0.34181	0.36543
	HSDT (Reddy, 1984)	0.27757	0.31284	0.34020	0.36348
	FSDT (Mindlin, 1951)	0.30968	0.30824	0.33284	0.35353
	CPT (Kirchhoff, 1850)	0.27938	0.35422	0.39335	0.42884
	Exact (Noor, 1973)	0.34307	0.30698	0.32705	0.34250
	$(0^0/90^0/0^0)$	<b>Present</b>	<b>0.34293</b>	<b>0.40607</b>	<b>0.44453</b>
TSDT (Sayyad et al., 2016)		0.32696	0.40623	0.44502	0.47162
SSNDT(Sayyad et al Ghugal,2014)		0.33095	0.37037	0.39498	0.41176
HSDT (Reddy, 1984)		0.32739	0.38112	0.41094	0.43155
FSDT (Mindlin, 1951)		0.42599	0.37110	0.39540	0.41158
CPT (Kirchhoff, 1850)		0.32841	0.55793	0.66419	0.75565
Exact (Noor, 1973)		0.4331	0.38241	0.41089	0.43006
$(0^0/90^0/90^0/0^0)$		<b>Present</b>	<b>0.3429</b>	<b>0.4061</b>	<b>0.4445</b>
	TSDT (Sayyad et al., 2016)	0.3319	0.4055	0.4441	0.4706
	SSNDT(Sayyad et al Ghugal,2014)	0.3308	0.3821	0.4119	0.4324
	HSDT (Reddy, 1984)	0.3319	0.3810	0.4108	0.4314
	FSDT (Mindlin, 1951)	0.4260	0.3826	0.4130	0.4341
	CPT (Kirchhoff, 1850)	0.3284	0.5579	0.6642	0.7576
	Exact (Noor, 1973)	0.3284	0.3824	0.4108	0.4300
	$(0^0/90^0/0^0/90^0/0^0)$	<b>Present</b>	<b>0.3424</b>	<b>0.4052</b>	<b>0.4434</b>
TSDT (Sayyad et al., 2016)		0.3422	0.4055	0.4441	0.4706
SSNDT(Sayyad et al Ghugal,2014)		0.3384	0.3950	0.4287	0.4518
HSDT (Reddy, 1984)		0.3399	0.3994	0.4350	0.4592
FSDT (Mindlin, 1951)		0.3368	0.3930	0.4271	0.4506
CPT (Kirchhoff, 1850)		0.4259	0.5579	0.6641	0.7556
Exact (Noor, 1973)		0.3408	0.3979	0.4314	0.4537

#### IV.4 Conclusion

Dans la présente étude, une théorie raffinée de la déformation en cisaillement hyperbolique est appliquée pour l'étude du flambement et de la vibration libre des plaques composites laminées. La caractéristique la plus importante de la présente théorie est qu'elle n'implique que quatre inconnues, contre cinq dans le cas de la théorie de déformation en cisaillement du premier ordre et d'autres théories d'ordre élevé. La présente théorie satisfait les conditions sans traction aux surfaces supérieures et inférieures des plaques sans utiliser de facteur de correction de cisaillement. D'après la formulation mathématique de la présente théorie, il est observé que, en raison de moins de variables, la présente théorie nécessite moins d'efforts de calcul. A partir des résultats numériques et de la discussion, il est conclu que la présente théorie est en excellent accord dans la prédiction du comportement vibratoire et la stabilité des plaques composite stratifiées.

# **Conclusion générale**

## *Conclusion générale*

Les matériaux composites sont parmi les Matériaux les plus importantes utilisées dans l'ingénierie moderne et, en particulier, dans l'industrie aérospatiale. de telles Matériaux légères sont également de plus en plus utilisées dans les applications d'ingénierie civile, mécanique et des transports. L'augmentation rapide de l'utilisation industrielle de ces structures a nécessité le développement de nouveaux outils analytiques et numériques adaptés à l'analyse et à l'étude de son comportement mécanique.

Dans cette étude, une nouvelle cinématique de déformation en cisaillement d'ordre élevé est développée pour étudier les vibrations libres et la stabilité des plaques composites. La théorie prend en compte les effets de la variation des contraintes de cisaillement transversales à travers l'épaisseur de la plaque en satisfaisant les conditions aux limites de contraintes nulles sur les surfaces supérieure et inférieure de la plaque sans utiliser de facteur de correction de cisaillement. Les équations différentielles d'équilibre et les conditions aux limites sont dérivées à l'aide du principe d'Hamilton par défaut, puis la solution de Navier est utilisée pour résoudre les problèmes de vibration et de torsion des plaques simplement appuyées en composites stratifiés. les résultats obtenus des fréquences naturelles de vibration et des charges critiques de flambement par la présente théorie d'ordre élevé actuelle des fréquences naturelles et des charges de torsion critiques sont comparés à ceux obtenus par d'autres théories précédemment publiées dans la littérature (HSDT, FSDT, CPT, Exact (Noor, [25])) plus Sayyad [72], SSNDT (Sayyad and Ghugal, [73]) et HSDT (Turan et al,[71]).

On peut conclure que la théorie proposée est précise et efficace pour étudier la réponse dynamique et la stabilité des plaques en matériaux composites stratifiés, les résultats numériques et les discussions sont conclus que cette théorie donne des excellentes valeurs des fréquences naturelles par rapport à celles obtenues par d'autres théories d'ordre élevé et la théorie de déformation en cisaillement du premier ordre.

# *Références bibliographiques*

*Références bibliographiques*

- [1] Kirchhoff, G.R, (1850). Uber das gleichgewicht und die bewegung einer elastischen Scheibe, J. für die Reine und Angewandte Mathematik (Journal de Crelle), 40:51-88.
- [2] Mindlin, R.D, (1951). Influence de l'inertie rotatoire et du cisaillement sur les mouvements de flexion des plaques élastiques isotropes, ASME J of Applied Mechanics, 18 : 31-38.
- [3] Reddy, J.N, (1984). Une théorie simple d'ordre supérieur pour les plaques composites stratifiées, ASME J. of Applied Mechanics, 51:752-745.
- [4] Touratier, M, (1991). Une théorie de la plaque standard efficace, Int. J. des sciences de l'ingénieur, 29:901-916.
- [5] Soldatos, K.P, (1992). Une théorie de déformation par cisaillement transverse pour des plaques monocliniques homogènes, Acta Mechanica, 94:195-220.
- [6] Karama, M, Afaq, K.S et Mistou, S, (2009). Une nouvelle théorie pour les plaques composites stratifiées, Proc. IMechE Partie L:J. Matériaux : conception et applications, 223 : 53-62.
- [7] Sayyad, A.S et Ghugal, Y.M, (2012). Analyse de flexion et de vibration libre de plaques isotropes épaisses en utilisant la théorie de la déformation par cisaillement exponentiel, Mécanique appliquée et computationnelle, 6:65-82.
- [8] Sayyad, A.S, (2013). Flexion de plaques orthotropes épaisses par la théorie de la déformation par cisaillement exponentiel, Amérique latine Journal des solides et des structures, 10:473-490.
- [9] Zenkour, A.M, (2006). Théorie généralisée de la déformation par cisaillement pour l'analyse de flexion des plaques graduées fonctionnellement, Modélisation mathématique appliquée, 30:67-84.
- [10] Sayyad, A.S et Ghugal, Y.M., (2014). Une nouvelle théorie de cisaillement et de déformation normale pour isotrope, transversalement plaques sandwich et composites laminées isotropes, Int. J. de la Mécanique et des Matériaux en Design, 10:247-267.
- [11] Ghugal, Y.M et Sayyad, A.S, (2010). Flexion statique de plaques isotropes épaisses utilisant la déformation de cisaillement trigonométrique Théorie, J. de la Mécanique des Solides, 2:79-90.

- [12]Metin, A, (2009). Une nouvelle théorie de déformation par cisaillement pour les plaques composites stratifiées, *Composite Structures*, 89:94-101.
- [13]Shimpi, R.P et Patel, H.G, (2006). Une théorie des plaques raffinée à deux variables pour l'analyse des plaques orthotropes, *Int. J. de Solides et structures*, 43:6783-6799.
- [14]Thaï, H.T et Kim, S.E, (2010). Vibration libre des plaques composites stratifiées à l'aide de deux théories de plaques raffinées variables », *Int. J. des sciences mécaniques*, 52:626-633.
- [15]Kim, S.E, Thaï, H.T et Lee, J, (2009). Analyse de flambement des plaques à l'aide de la théorie des plaques raffinées à deux variables, *Structure mince fortifiée*, 4 :455–462.
- [16]Thaï, H.T et Kim, S.E, (2011). Solution de type Levy pour l'analyse de flambement des plaques orthotropes basée sur deux variablesthéorie des plaques raffinée, *Composite Structures*, 93:1738-1746.
- [17]Thaï, H.T et Kim, S.E, (2012). Solution analytique d'une théorie de plaque raffinée à deux variables pour l'analyse de flexion de plaques orthotropes de type Levy, *Int. J. des sciences mécaniques*, 54:269-276.
- [18]Ameur, M, Tounsi, A, Mechab, I et Bedia, E.A.A, (2011). Une nouvelle théorie de déformation de cisaillement trigonométrique pour analyse de flexion d'une plaque à gradation fonctionnelle reposant sur une fondation élastique, *KSCE J. du Génie Civil* , 15:1405-1414.
- [19]Thaï, H.T et Vo, T.P, (2013). Une nouvelle théorie de déformation de cisaillement sinusoïdale pour la flexion, le flambement et la vibration de plaques fonctionnellement classées, *Modélisation mathématique appliquée*, 37:3269-3281.
- [20]Meiche, N.E, Tounsi, A, Ziane, N, Mechab, I et Bedia, E.A.A, (2011). Nouvelle théorie de la déformation par cisaillement hyperbolique pour le flambement et la vibration de la plaque sandwich à gradation fonctionnelle, *Int. J. des sciences mécaniques*, 53:237-247.
- [21]Daouadji, T.H, Tounsi, A et Bedia, E.A.A, (2013). Un nouveau modèle de déformation de cisaillement d'ordre supérieur pour le comportement statique de plaques fonctionnellement classées, *Avancées en mathématiques appliquées et en mécanique*, 5:351-364.
- [22]Zenkour, A.M, (2013). Une théorie raffinée simple à quatre inconnues pour l'analyse de flexion des plaques graduées fonctionnellement, *Modélisation mathématique appliquée*, 37:9041–9051.
- [23]Sayyad, A.S et Ghugal, Y.M, (2015). Sur l'analyse des vibrations libres des plaques composites stratifiées et sandwich : A revue de la littérature récente avec quelques résultats numériques, *Composite Structures*, 129:177-201.

## *Références bibliographiques*

---

- [24]Noor, A.K, (1973). Vibrations libres des plaques composites multicouches, AIAA J. 11:1038-1039.
- [25]Noor, A.K, (1975). Stabilité des plaques composites multicouches, Science et technologie des fibres, 8:2 81-89.
- [26] Glossaire des matériaux composites-CARMA-Actualisation octobre 2006.
- [27]Aucher, J. (2009), "Etude comparative du comportement de composites à matrice thermoplastique ou thermodurcissable ", Thèse de Doctorat, Institut National des Sciences Appliquées, Rouen.
- [28]Gender, L. (2011), " Matériaux composites structures composites", Université Paris-Saclay.
- [29] L. Goret, Généralités sur les matériaux composites, École Centrale de Nantes, 2011, HAL Id: cela-00470296.
- [30] Rayleigh, L. (1877). On progressive waves. Proc. London Math. Soc., 9, 21-26.
- [31] Timoshenko, S. P. (1921). On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bars. Phil. Mag., 41, 744-746.
- [32]E. Reissner « The effect of transverse shears deformation on the bending of elastic plates », J. Appl. Mech., vol. 12, pp. 69-77, 1945.
- [33]Jean-Marie Berthelot. « Matériaux composites, comportement mécanique et analyse des structures ». 4<sup>ème</sup> Edition, Lavoisier ,2005.
- [34]Lachmat Zohra, Etude des contraintes d'interface d'une poutre FGM renforcée par une plaque en matériaux composites 2010/2011Master à l'université DJILLALI LIABES DE SIDI BEL ABBES.
- [35]"Stabilité des structures minces et sensibilité aux imperfections par la méthode asymptotique". Thèse de Doctorat université Aix-Marseille II, France. 2001.
- [36]"Sur les petites vibrations libres et déformations des coques élastiques". Trans. Philosophique. De la Société Royale. Londres, 1888, Vol. A (17), p. 491-549.
- [37] "La propagation des ondes dans les vibrations transversales des barres et des plaques". 1948, vol. 12, p. 287-300.
- [38]Contribution à l'Etude de la Stabilité des Plaques Epaissees en Composite sur Fondations Elastiques". Thèse de Doctorat Université Djilali Liabes. 2015.
- [39]Reddy JN. Mechanics of laminated composite plates and shells; theory and analysis (second edition). CRC Press; 2004.
- [40]S.A. Ambartsumyan. Theory of anisotropic plate. Technomic Publishing Co, 1969.

- [41] M.V.V. Murthy. An improved transverse shear deformation theory for laminated anisotropic plate. Rapport technique, NASA, 1981,
- [42] Reddy. J.N., Wang. C.M., Lee. K.H. Relations entre les solutions de flexion des théories de poutre de déformation classique et de cisaillement. Journal international des solides et des structures 34 (26), 3373-338, 1997
- [43] JN. Reddy, Théorie et analyse des plaques élastiques. Taylor & Francis, Philadelphie, 1999.
- [44] Van Anh DUONG Développement en dynamique d'un élément fini multicouche avec interfaces imparfaites Thèse de doctorat de l'école national des ponts et chaussées, 2008.
- [45] K.S. Afaq. Développement d'un nouveau modèle pour les structures composites multicouches et sandwichs avec prise en compte du cisaillement transverse et des effets de bord. PhD thesis, Université Toulouse III - Paul Sabatier, 2003.
- [46] Analyse vibratoire de poutres laminées à plis croisés avec conditions aux limites générales par la méthode de Ritz, International Journal of Mechanical Sciences 47 1740-1755.
- [47] Ait Atmane, H., Tounsi, A., Mechab, I., Adda Bedia, E.A. (2010), "Analyse vibratoire libre de plaques fonctionnellement graduées reposant sur des fondations élastiques WinklerPasternak à l'aide d'une nouvelle théorie de déformation par cisaillement", Int J Mech Mater Des, 6, 113-121.
- [48] Grover, N, Maiti, D , Singh, B. (2013), "Une nouvelle théorie de déformation de cisaillement hyperbolique inverse pour la statique et le flambement, analyse des plaques composites et sandwich stratifiées", Compos. Struct, 95, 667-675, 2013.
- [49] Meksi, R. et al. (2017), "Une solution analytique pour les réponses de flexion, de flambement et de vibration des plaques sandwich FGM", Journal of Sandwich Structures and Materials, 0(00), 1-31.
- [50] El Meiche, N., Tounsi, A., Ziane, N., Mechab, I. et Adda Bedia : Une nouvelle théorie de déformation de cisaillement hyperbolique pour le flambement et la vibration de plaque sandwich gradation fonctionnelle. International Journal of Mechanical Sciences, 237-247, 2011.
- [51] Shimpi, R.P: Théorie des plaques raffinée et ses variantes. AIAA Journal, 137-146, 2002

- [52] Thai HT, Kim SE. A simple quasi-3D sinusoidal shear deformation theory for functionally graded plates. *Compos Struct*; 99:172-80, 2013.
- [53] Tounsi, A., Houari, M.S.A., Benyoucef, S. and Adda Bedia, E.A. "A refined trigonometric shear deformation theory for thermoelastic bending of functionally graded sandwich plates", *Aerosp. Sci. Technol.*, 24(1), 209- 220.2013.
- [54] Hamidi, A., Houari, M.S.A., Mahmoud, S.R. and Tounsi, A. "A sinusoidal plate theory with 5-unknowns and stretching effect for thermomechanical bending of functionally graded sandwich plates", *Steel Compos. Struct, Int. J.*, 18(1), 235-253.2015
- [55] Thai HT, Vo TP, Bui TQ, Nguyen TK. A quasi-3D hyperbolic shear deformation theory for functionally graded plates. *Acta Mech*; 225(3):951-64, 2014.
- [56] Bessaim A, Houari MS, Tounsi A, Mahmoud S. A new higher-order shear and normal deformation theory for the static and free vibration analysis of sandwich plates with functionally graded isotropic face sheets. *J Sandwich Struct Mater* 2013;15(6):671-703, 2013.
- [57] Bennoun M, Houari MSA, Tounsi A. A novel five variable refined plate theory for vibration analysis of functionally graded sandwich plates. *Mech Adv Mater Struct* 2014.
- [58] Zenkour AM. Bending analysis of functionally graded sandwich plates using a simple four-unknown shear and normal deformations theory. *J Sandwich Struct Mater*; 15(6):629-56, 2013.
- [59] Zenkour AM. Thermal bending of layered composite plates resting on elastic foundations using four unknown shear and normal deformations theory. *Compos Struct*; 122:260-70., 2015.
- [60] Mantari JL, Granados EV, Hinostroza MA, Guedes Soares C. Modelling advanced composite plates resting on elastic foundation by using a quasi-3D hybrid type HSDT. *Compos Struct*; 118:455-71, 2014.
- [61] Mantari JL, Soares CG. A quasi-3D tangential shear deformation theory with four unknowns for functionally graded plates. *Acta Mech* 2014.
- [62] Shimpi, R.P., "Refined plate theory and its variants", *AIAA Journal*, 137– 146, 2002.
- [63] Kim, S.E., Thai, H.T. et Lee, J., "Buckling analysis of plates using the two variable refined plate theory", 47(4), 455–462, 2009.
- [64] H. Ait Atmane., A. Tounsi., I. Mechab., E.A Adda Bedia, Free vibration analysis of functionally graded plates resting on Winkler-Pasternak elastic foundations using a new shear deformation theory. *Int. J. Mech. Mater. Design*; 6 (2): 113-121, 2010
- [65] Thai, H.-T. et Kim, S.-E., "Levy-type solution for buckling analysis of orthotropic plates based on two variable refined plate theory", *Composite Structures*, 1738–1746, 2011.

- [66] Hadji, L., Atmane, H.A., Tounsi, A., Mechab, I. et Adda Bedia, E.A., "Free vibration of functionally graded sandwich plates using four-variable refined plate theory", *Applied Mathematics and Mechanics*, 925–94, 2011.
- [67] Viet.Tung. Nguyen. « Modélisation globale et locale des structures multicouches par éléments finis de plaques ». Thèse de doctorat de l'école nationale des ponts et chaussées, 2004.
- [68] Une méthode asymptotique pour résoudre les problèmes de valeurs limites tridimensionnels de la statique et de la dynamique des corps minces. In G.Jaiani et G.Podio-Guidugli (Eds), *IUTAM Symposium on Relations of Shell, Plate, Beam and 3D Models*, Springer, 2007.
- [69] Benchmark d'un modèle layer Wise de multicouches et implémentation du modèle dans Abaqus. Other. Université Paris-Est, 2012. French.
- [70] Jones, R.M. (1975), "Mechanics of Composite Materials", Tokyo: McGraw Hill Kogakusha, Ltd.
- [71] Analytical solution for bending and buckling response of laminated non-homogeneous plates using a simplified-higher order theory, *Challenge Journal of Structural Mechanics*, 3 (1), 1-16.
- [72] Sayyad AS, Ghugal YM, Naik NS. Bending analysis of laminated composite and sandwich beams according to refined trigonometric beam theory. *Curved Layer Struct* 2015;2:279-89.
- [73] On the buckling of isotropic, transversely isotropic and laminated composite rectangular plates, *Int. J. of Structural Stability and Dynamics*, 14:1-32.