



FACULTÉ DES SCIENCES APPLIQUÉES
DÉPARTEMENT GÉNIE CIVIL

Mémoire de fin d'études en vue de l'obtention du diplôme de Master

Spécialité : Génie Civil

Option : Structures

Présenté par :

KHETTOU Fatima

MAATOUG Hadjer

Sujet du mémoire

**Nouvelle approche analytique pour l'étude du
comportement mécanique des poutres sandwichs en
matériaux composites avancés**

Soutenu publiquement le /07/2021 devant le jury composé de :

Mr. TLIDJI Youcef	Président
Mr. DRAICHE Kada	Rapporteur
Mme. KHELIFA Zoubida	Examineur
Mlle. OUAZIR Khatima	Examineur

PROMOTION : 2020/2021

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

Remerciement

Remerciement

*Après avoir remercié le très et le tous miséricordieux Allah le
tout puissant, qui nous a donné la santé, les moyens et les
volontés dans la quête du savoir*

*On tient à exprimer notre remerciements avec un grand plaisir et
un grand respect à notre encadreur Mr Draïche Kada qui a fait
preuve d'une grande patience tout au long de notre recherche en nous
prodiguant ses conseils, ses remarques, sa disponibilité et son
encouragement nous a permis de réaliser ce travail dans les
meilleures conditions*

*On tient à remercier tous les membres du jury qui ont bien voulu
consacrer une partie de leur temps précieux à examiner ce travail
Tous les enseignants qui ont contribué à notre formation durant
ces années d'études*

*On voudrait adresser nos remerciements à tous mes amies et
collègues*

Dédicace

Dédicace

À très cher mon père

À très chère ma mère

À mes sœurs et mes frères À toute ma famille

À tous mes amis À tous mes amis sans exception.

Je dédie ce travail

Khettou Fatima

Dédicace

À mon père

À ma mère

À mes sœurs et mes frères À toute ma famille

À tous mes amis À toute ma famille.

Je dédie ce travail

Moutoug hadjer

Résumé

Cette étude présente une approche analytique pour l'analyse du comportement mécanique (flexion, flambement et vibration libre) des poutres sandwichs en matériaux composites avancés, nommés (Functionally Graded Materials; FGMs), en utilisant une nouvelle théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé basée sur un nouveau champ de déplacement. La théorie proposée n'exige pas de facteur de correction de cisaillement, et donne une description hyperbolique de la contrainte de cisaillement à travers l'épaisseur de la poutre en remplissant la condition de nullité des contraintes sur les bords supérieur et inférieur de la poutre. Les équations différentielles d'équilibre et les conditions aux limites des poutres sandwichs fonctionnellement graduées (FG) sont dérivées en utilisant le principe des travaux virtuels. Les solutions sont obtenues en utilisant l'approche de Navier pour le cas des poutres sandwichs FG simplement appuyées. Les résultats numériques pour les déplacements, les contraintes, la charge critique du flambement et les fréquences naturelles des poutres sont obtenues pour différents indices de loi de puissance et les rapports d'épaisseur peau-noyau-peau. Afin de confirmer la précision et l'efficacité de la présente théorie, les résultats sont comparés aux solutions publiés antérieurement et un excellent accord a été observé.

Mots clés: Nouveau champ de déplacement, déformation en cisaillement, poutre sandwich FG, flexion, flambement, vibration libre.

Abstract

This study presents an analytical approach for the analysis of the mechanical behavior (bending, buckling and free vibration) of advanced composite sandwich beams, named (Functionally Graded Materials; FGMs), using a new high-order shear deformation theory based on a new displacement field. The proposed theory does not require a shear correction factor, and gives a hyperbolic description of the shear stress through the thickness of the beam by satisfying the condition of zero stresses on the top and bottom edges of the beam. The differential equilibrium equations and boundary conditions of functionally graduated (FG) sandwich beams are derived using the principle of virtual works. The solutions are obtained by using the Navier's approach for the case of simply supported FG sandwich beams. Numerical results for displacements, stresses, critical buckling load and natural frequencies of beams are obtained for different power law indices and skin-to-core-to-skin thickness ratios. In order to confirm the accuracy and effectiveness of the present theory, the results are compared to previously published solutions and excellent agreement was observed.

Keywords: New displacement field, shear deformation, FG sandwich beam, bending, buckling, free vibration.

المخلص

تقدم هذه الدراسة نهجًا تحليليًا لتحليل السلوك الميكانيكي (الانحناء والالتواء والاهتزاز الحر) لحزم الساندويتش في المواد المركبة المتقدم المسماة (المواد المتدرجة وظيفيًا) باستخدام نظرية جديدة لإجهاد القص عالي الترتيب حفل إزاحة جديد لا تتطلب النظرية المقترحة عامل تصحيح القص وتعطي وصفًا مثليًا لإجهاد القص من خلال سماكة الحزمة مع تحقيق حالة ضغوط القص الصفيرية على الحواف العلوية والسفلية للحزمة تُشتق معادلات التوازن التفاضلي والشروط الحدية لحزم شظيرة باستخدام مبدأ العمل الافتراضي يتم الحصول على الحلول باستخدام نهج Navier في حالة الحزم العازلة المدعومة ببساطة تم الحصول على نتائج عددية لعمليات الإزاحة والضغوط وحمل الالتواء الحرج والاهتزاز الحر للحزم لمؤشرات قانون الطاقة المختلفة ونسب سمك الجلد الأساسية. من أجل تأكيد دقة وفعالية النظرية الحالية

الكلمات المفتاحية: مجال الإزاحة الجديد ، إجهاد القص ، عارضة شظيرة FG، الانحناء، الالتواء، الاهتزاز الحر.

Sommaire

Sommaire

Remerciement et dédicace

Résumé

Abstract

الملخص

Liste des tableaux

Liste des figures

Liste des Notations

Introduction générale

Introduction générale..... 01

Chapitre I : Généralité sur les matériaux composites

I.1 Introduction.....	06
I.2. Bref historique	06
I.3. Composants du matériau composite	07
I.3.1. Les renforts	07
I.3.2. Différents types de renfort	07
I.3.3. Caractéristiques mécaniques principales des fibres de base.....	09
I.3.4. La matrice	09
I.3.4.1. Différentes types des matrices	09
I.3.4.2. Composites à matrice polymère ou organique(CMO).....	10
I.3.4.3. Composites à matrice métallique.....	11
I.3.4.4. Composites à matrice céramique	11

I.3.4.5. Caractéristiques mécaniques principales des résines.....	11
I.3.4.6. Les charges	12
I.3.4.7. Les additifs.....	12
I.3.4.8. L’interface.....	12
I.4. Avantages et inconvénients des matériaux composites	12
I.5. Architecture des matériaux composites	13
I.5.1. Monocouche	13
I.5.2. Stratifié	14
I.5.3. Sandwich.....	14
I.6. Les matériaux composites avancés	15
I.6.1. Définition d’un FGM.....	15
I.6.2. Historique des matériaux FGM	16
I.6.3. Comparaison des matériaux FGM et les matériaux composites traditionnels.....	17
I.6.4. Propriétés mécaniques des FGMs.....	19
I.7. Domaines d’application des FGM	19
I.7.1. L’aérospatiale	20
I.7.2. Industrie navale, aéronautique (Prévention contre les attaques terroristes)	20
I.7.3. Médecine.....	21
I.7.4. Défense	21
I.7.5. Energie.....	21
I.8. Constituants d’un sandwich.....	22
I.8.1. Les peaux	22
I.8.2. L’âme.....	23

I.8.2.1. Les mousses	23
I.8.2.2. Le bois	24
I.8.2.3. Le nid d'abeilles	24
I.9. L'interface.....	25
I.10. Revue des méthodes d'élaboration des matériaux FGM	25
I.10.1. Coulage séquentiel en barbotine (Slip Casting).....	25
I.10.2. Coulage en bande (Tape casting).....	26
I.10.3. Compactage des couches (poudre d'empilement)	27
I.10.4. Coulée par centrifugation	27
I.10.5. Projection plasma.....	27
I.10.6. Dépôt physique en phase vapeur (PVD).....	28
I.10.7. Dépôt chimique en phase vapeur (CVD).....	29
I.10.8. Frittage Laser Différentiel	30
I.10.9. Dépôt par électrophorèse	31
I.10.10. Implantation Ionique (Sputtering)	32
I.10.11. Dépôt par Centrifugation	32
I.11. Propriétés matérielle de la poutre FGM.....	32
I.11.1. Propriétés matérielle de la poutre P-FGM	33
I.11.2. Propriétés matérielles de la poutre S-FGM	34
I.11.3. Propriétés matérielles de la poutre E-FGM	35
I.12. Avantages et inconvénients des FGM	36
I.12.1. Avantages	36
I.12.2. Inconvénient	36

I.13.Conclusion37

Chapitre II : Différentes théories des poutres

II .1. Généralités39

II.2. Mécanique des composites sandwichs40

II.3. Résumé des diverses théories des poutres41

II.3.1. Modèle d'Euler Bernoulli (Classical Beam Theory- CBT).....43

II.3.2. Modèle de Timoshenko (First-Order Shear Deformation Beam Theory: FSDBT)44

II.3.3. Modèle d'ordre élevé (Higher-Order Shear Deformation Beam Theory: HSDBT)46

II.3.4. Théorie de déformation des plaques quasi-3D50

II.4.Conclusion.....52

Chapitre III: Analyse du comportement mécanique des poutres sandwichs FG

III.1. Introduction54

III.2. Modèle d'une poutre sandwich FG55

III.2.1. Configuration géométrique55

III.2.2. Propriétés du matériau55

III.2.3. Hypothèses de la présente théorie57

III.3. Formulation théorique57

III.3.1. Champs de déplacement.....57

III.3.2. Champs de déformation58

III.3.3. Relations constitutives	59
III.3.4. Equations de mouvement	59
III.3.5. Solutions analytiques des poutres sandwichs FG	62
III.5. Conclusion	64

Chapitre IV : Résultats et discussions

IV.1. Introduction.....	66
IV.2. Analyse de flexion statique.....	67
IV.3. Analyse du flambement élastique	73
IV.4. Analyse de la vibratoire libre.....	76
IV.5. Conclusion	78
Conclusion générale.....	80
Références bibliographiques	82

Liste des figures

Figure I.1 : Différents types de renforts	08
Figure I.2 : Différents types de fibres de verre	08
Figure I.3 : Différents types de matrices	10
Figure I.4 : Matériaux Composite monocouche unidirectionnel	13
Figure I.5 : Matériaux Composites stratifiés	14
Figure I.6 : Matériaux sandwiches à âmes pleine	14
Figure I.7 : Concept des matériaux a gradient de propriétés	16
Figure I.8 : Caractéristiques des FGM en comparaison avec les matériaux composites conventionnels	18
Figure I.9 : La distribution composante des matériaux	18
Figure I.10 : Les principaux domaines d'application des FGM	20
Figure I.11 : Différents types de matériaux utilisés pour la conception des peaux	22
Figure I.12 : Eléments constitutifs d'unsandwich à ame en balsa	23
Figure I.13 : Eléments constitutifs d'unsandwich à ame en nid d'abeilles	23
Figure I.14 : Différents types de matériaux utilisés pour la conception des âmes	24
Figure I.15 : Projection par plasma pour former un matériau thermoélectrique gradué	28
Figure I.16 : Schéma de l'installation pour la préparation d'un SiC/C FGM par le dépôt chimique en phase vapeur	29
Figure I.17 : Disposition du procédé frittage laser différentiel	31
Figure I.18 : L'installation d'EPD pour la production des FGMs	31
Figure I.19 : Schéma du procédé dépôt par centrifugation.....	32

Figure I.20 : Variation du module Young dans une poutre P-FGM.....	34
Figure I.21 : Variation du module de Young dans une poutre S-FGM	35
Figure II.1 : Principaux modes de ruptures des structures sandwichs.....	40
Figure II.2 : Cartographie des modes d'endommagement d'une poutre sandwich avec âme en nid d'abeille en flexion 3 points.....	41
Figure II.3 : Illustration du modèle de la poutre d'Euler-Bernoulli (CBT)	43
Figure II.4 : Illustration du modèle de Timoshenko	45
Figure II.5 : Cinématique du modèle d'ordre élevé.....	46
Figure II.6 : Illustration du modèle d'ordre élevé.....	51
Figure III.1 : Géométrie d'une poutre sandwich FG	56
Figure III.2 : Variation du module d'élasticité à travers l'épaisseur des poutres sandwich FG pour différents rapports d'épaisseur peau-noyau-peau	57
Figure IV.1 : La variation de déplacement axial adimensionnel à travers l'épaisseur dans les poutres sandwich FG soumises à une charge uniforme, $L/h=5$	73
Figure IV.2 : La variation des contraintes axiales adimensionnelles à travers l'épaisseur dans les poutres sandwich FG soumises à une charge uniforme, $L/h = 5$	73
Figure IV.3 : La variation des contraintes de cisaillement adimensionnelles à travers l'épaisseur dans les poutres sandwich FG soumises à une charge uniforme, $L/h =5$	74
Figure IV.4 : Variation des fréquences naturelles et des charges critiques de flambement par rapport à l'indice de loi de puissance pour les poutres sandwich FG	75

Liste des tableaux

Tableau I.1 : Propriétés mécaniques des fibres	09
Tableau I.2 : Propriétés principales des matrices Thermodurcissables et Thermoplastiques	10
Tableau I.3 : Propriétés mécaniques des résines	11
Tableau I.4 : Comparaison entre les propriétés de la céramique et du métal	19
Tableau II.1 : Pourcentage d'erreur par rapport aux données expérimentales de tests sur poutres homogènes.....	42
Tableau II.2 : Comparaison des quatre théories	43
Tableau IV.1 : Déplacement vertical adimensionnel dans les poutres sandwichs FG simplement appuyées	70
Tableau IV.2: Contrainte axiale adimensionnelle dans les poutres sandwichs FG simplement appuyées	71
Tableau IV.3: Contrainte de cisaillement adimensionnelle dans les poutres sandwichs FG simplement appuyées	72
Tableau IV.4: Charge critique de flambement adimensionnelle dans les poutres sandwichs FG simplement appuyées	76
Tableau IV.5: Fréquences fondamentales adimensionnelles des poutres sandwichs FG simplement appuyées	78
Tableau IV.6: Fréquences adimensionnelles des poutres sandwichs FG simplement appuyées.....	79

Liste des notations

∂	Dérivée partielle
$[]$	Matrice
$\{ \}$	Vecteur colonne
$E(z)$	Module de Young en fonction de «z »
E_m	Module de Young du métal
E_c	Module de Young de céramique
$\nu(z)$	Coefficient de Poisson en fonction de « z »
ν	Coefficient de Poisson
$\rho(z)$	Densité du matériau en fonction de « z »
ρ_m	Densité du métal
ρ_c	Densité de la céramique
$V(z)$	Fraction volumique
α, β	Paramètres
p	Paramètre du matériau
a	Longueur de la poutre
b	Largeur de la poutre
h	Épaisseur de la poutre
θ	Rotation de la surface neutre
$u_0 v_0 w_0$	Composantes du champ de déplacement sur le plan moyen de la poutre
$u_b v_b w_b$	Composantes du champ de déplacement de flexion
$u_s v_s w_s$	Composantes du champ de déplacement de cisaillement
u, v, w	Déplacements dans les directions x, y, z
φ_x, φ_y	Rotations autour des axes x et y

Liste des Notations

$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$	Contraintes normales
$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$	Déformations normales
$\gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$	Déformations de distorsion
$\delta u, \delta v, \delta$	Champ virtuel de déplacement
δU	Variation de l'énergie de déformation
δK	Variation de l'énergie cinétique
$\delta \varepsilon_x, \delta \varepsilon_y$	Champ de déformation longitudinal virtuel
$\delta \gamma_{xz}, \delta \gamma_{yz}$	Champ de déformation transverse avirtuel
N_x, N_y, N_{xy}	Efforts normaux
M_x, M_y, M_{xy}	Moments dû à la flexion
S_{xz}, S_{yz}	Moment dû au cisaillement transverse
I_1, I_2, I_3	Constantes d'inertie
A_{ij}	Termes de rigidité en membrane de la poutre
B_{ij}	Termes de rigidité de couplage de la poutre
D_{ij}	Termes de rigidité de flexion de la poutre
A_{ij}^S	Termes de rigidité de la poutre en cisaillement

Liste des abréviations

CBT	La théorie classique des poutres
FSDT	La théorie de déformation en cisaillement du premier ordre
SSDT	La théorie de déformation en cisaillement sinusoïdal
HSDT	La théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé
TSDT	La théorie de la déformation en cisaillement trigonométrique
HySDT	La théorie de la déformation en cisaillement hyperbolique
GD	Composites à Grande Diffusion
HP	Composites à Hautes Performances
PMC	Composites à Matrice Polymérique
MMC	Composites à Matrice Métallique
CMC	Composites à Matrice Céramique
CMC	Composites à Matrice Carbone
CMO	Composites à Matrice organique
TD	Matrices thermodurcissables
TP	Matrices thermoplastiques
PA	Polyamide
PC	Polycarbonate
PP	Polypropylène
PEEK	Polyéther-éther-cétone
HR	Fibres à haute résistance classique
HM	Fibres à haut module

Introduction générale

Introduction générale

Au cours des dernières années, de nombreuses applications des structures composites dans les secteurs de l'aérospatiale, l'automobile, la marine, la mécanique et le génie civil ont conduit au développement de structures sandwich en raison de leurs rapports résistance/poids et rigidité/poids élevés. Généralement, les structures sandwich stratifiées composées d'une âme souple collée à deux peaux minces et rigides, sont considérées comme des composites conventionnels, caractérisées par la discontinuité des propriétés et la concentration des contraintes au niveau des interfaces entre peaux et âme. Cette discontinuité provoque des fissurations de matrice ainsi qu'un majeur problème de délaminage dû à la transition brutale de composition, en particulier dans un environnement à haute température. Pour surmonter ce problème, des structures sandwich fabriquées par des matériaux composites avancés, dites à gradient fonctionnel (FGM) sont proposées en raison de la variation progressive des propriétés à travers l'épaisseur. Par conséquent, la compréhension du comportement de flexion, du flambement et de la vibration libre des structures sandwich fonctionnellement graduées (FG) devient une tâche importante pour les chercheurs.

Un matériau à gradient fonctionnel est formé en faisant varier la microstructure d'un matériau à un autre avec une graduation spécifique. Les applications des matériaux FG dans divers domaines sont présentées par (Muller et al (2003), Pompe et al (2003), Schulz et al (2003), Koizumi (1997)). En général, le comportement des poutres sandwich fonctionnellement graduées (FG) peut être étudié en utilisant soit la théorie exacte de l'élasticité 3D, soit les différentes théories des poutres basées sur le déplacement. Peu de chercheurs se sont concentrés sur le développement de solutions d'élasticité pour l'analyse des poutres monocouches FG, telles que (Kieback (2003), Zhong et Yu (2007), Daouadji (2013), Ding et al (2007), Ying et al (2008), Huang et al. (2009), Xu et al. (2014)). La théorie de l'élasticité est mathématiquement difficile et informatiquement plus lourde. Par conséquent, les théories des poutres basées sur le déplacement sont largement utilisées par plusieurs chercheurs pour une analyse approximative de leur comportement. Ces théories sont classées en trois catégories, à savoir la théorie classique des poutres (CBT) développée par Bernoulli (1694), la théorie des poutres de Timoshenko (1921), (TBT) et les théories des poutres d'ordre élevé (HBT). Étant donné que l'effet de la déformation en cisaillement

transverse est plus prononcé dans les poutres sandwich épaisses FG, les théories CBT et TBT ne conviennent pas à l'analyse des poutres épaisses. Cela a conduit à l'utilisation de théories des poutres d'ordre élevé (HBTs) pour l'analyse structurelle précise des poutres sandwich FG. Parmi plusieurs théories des poutres d'ordre élevé, la théorie des poutres paraboliques (PBT) développé par Reddy(1984), qui est largement utilisée par de nombreux chercheurs pour la modélisation et l'analyse des poutres, plaques et coques.

Récemment, Sayyad et Ghugal (2017) ont présenté une étude documentaire complète sur diverses théories de poutres basées sur le déplacement disponibles dans la littérature pour l'analyse des poutres et plaques en composites avancées. Nguyen et al (2016) ont proposé une nouvelle théorie de déformation en cisaillement hyperbolique (HySDT) pour l'analyse de la flexion, du flambement et de la vibration libre des poutres sandwich FG. Thai et Vo (2012) ont effectué une analyse de la flexion et de la vibration libre de poutres FG en utilisant diverses théories de déformation en cisaillement d'ordre élevé. Osofero et al (2014) ont développé des théories de déformation en cisaillement 2D pour le comportement en flexion des poutres sandwich FG simplement supportées. Bennai et al (2015) ont présenté une nouvelle théorie raffinée des poutres de cisaillement et de déformation normale pour étudier la réponse en vibration libre et en flambement des poutres sandwich FG pour diverses conditions aux limites. Bouakkaz et al (2016) ont également présenté un modèle hyperbolique pour l'analyse de la vibration libre des poutres sandwich FG. Giunta et al (2011) ont utilisé des théories raffinées pour l'analyse des poutres monocouches et sandwich FG en utilisant une formulation unifiée. Vo et al. (2015a, 2015b) a également proposé une théorie de déformation en cisaillement quasi-3D pour l'analyse statique et dynamique des poutres sandwich FG. Cette théorie inclut à la fois les effets de déformation en cisaillement et d'étirement de l'épaisseur. Yarasca et al (2016) ont utilisé un modèle d'éléments finis basé sur la théorie hybride du cisaillement et de la déformation normale pour l'analyse statique de poutres monocouches et sandwich FG. Amiran et al. (2009) ont calculé les fréquences naturelles d'une poutre sandwich avec noyau FG en utilisant la méthode Galerkin. Cette méthode est utilisée pour imposer les conditions aux limites essentielles et la condition de discontinuité matérielle. Tossapanon et Wattanasakulpong (2016) ont appliqué la méthode de collocation de Chebyshev pour l'analyse du flambement et de la vibration des poutres sandwich FG reposant sur une fondation élastique à deux paramètres en utilisant (TBT). Mashat et al. (2014) ont réalisé une étude sur la vibration libre des poutres stratifiées à gradient fonctionnel par diverses théories et la méthode des éléments finis basés sur la formulation unifiée de Carrera. Trinh et al (2016) ont obtenu les fréquences fondamentales

des poutres sandwich FG sous diverses conditions aux limites en utilisant la méthode de l'espace d'état (state space method) basée sur (CBT, TBT et HBT). Wattanasakulpong et al (2012) ont étudié le comportement vibratoire des poutres stratifiées FG en utilisant une théorie améliorée de la déformation en cisaillement du troisième ordre avec une validation expérimentale.

Récemment, Sayyad et Ghugal (2018) ont obtenu une solution analytique pour l'analyse de la flexion, du flambement et de la vibration de poutres FG sous diverses conditions aux limites. Alipour et Shariyat (2014a, 2014b) ont étudié les réponses dynamiques transitoires et forcées des plaques sandwich annulaires avec des peaux de surface ou des noyaux à gradient fonctionnel par une approche analytique de l'élasticité en zigzag. C'est la première fois qu'une théorie globale-locale est combinée avec une solution analytique par couche pour l'analyse des plaques sandwich à gradient fonctionnel. Soldatos (1992) a suggéré l'utilisation de la fonction de déformation en cisaillement hyperbolique dans la modélisation et l'analyse des poutres et des plaques épaisses. Il est recommandé par Soldatos que cette fonction donne des prédictions plus précises des déplacements, des contraintes, des fréquences et des charges de flambement des poutres et des plaques épaisses. La théorie de Soldatos a décrit le champ de déplacement à travers des fonctions impaires pour satisfaire la condition de traction à un cisaillement nul sur les surfaces supérieure et inférieure de la poutre/plaque et convient donc principalement aux schémas de stratification symétriques ou aux distributions de propriétés matérielles. Depuis lors, de nombreux chercheurs ont utilisé cette fonction pour l'analyse des poutres et plaques isotropes, stratifiées et sandwich. À la connaissance des auteurs, dans l'ensemble de la littérature, personne n'a appliqué cette fonction pour vérifier la réponse globale des poutres sandwich FG.

Dans cette étude, une approche de déformation en cisaillement d'ordre élevé à trois variables, basée sur un nouveau modèle du champ de déplacement est utilisée pour analyser le comportement mécanique des poutres sandwich FG simplement appuyées. La poutre est constituée par des peaux fonctionnellement graduées et un noyau isotrope. Les propriétés des matériaux des peaux FG varient à travers l'épaisseur en fonction de la distribution de la loi de puissance. La présente théorie donne une distribution hyperbolique de la contrainte de cisaillement transverse à travers l'épaisseur de la poutre et satisfait les conditions aux limites de la contrainte nulle sur les surfaces supérieure et inférieure de la poutre. Les équations du mouvement sont obtenues en utilisant le principe de Hamilton et sont résolues en adoptant la technique de Navier. Les résultats numériques adimensionnels des déplacements, des contraintes, des charges critiques du flambement et des fréquences de vibrations sont obtenus

et comparés pour divers indices de loi de puissance et rapport d'épaisseur peau-cœur-peau. Cette étude est structurée en quatre chapitres qui se résument comme suit :

Le premier chapitre, donne un aperçu sur les matériaux composites avancés ; les différentes méthodes de fabrication, les différentes lois possibles qui servent à décrire la variation des propriétés matérielles des poutres FG.

Le deuxième chapitre, présente une étude bibliographique sur les différentes théories des poutres à gradient fonctionnel, ces hypothèses et leurs cinématiques de déplacement.

Le troisième chapitre, est consacré au développement de la formulation mathématique basée sur une nouvelle théorie de déformation en cisaillement transverse pour l'analyse du comportement mécanique des poutres FGM.

Le quatrième chapitre, présente les résultats numériques. Ils seront comparés avec d'autres résultats publiés par d'autres chercheurs. Cette comparaison nous a permis la validation de notre approche proposée.

Enfin, une conclusion générale est envisagée permettant de mettre l'accent sur les différents résultats obtenus dans ce travail qui concernent le comportement mécanique des poutres FG ainsi par des perspectives envisagées pour des travaux futurs.

CHAPITRE I

Généralité sur les matériaux composites

Chapitre I

Généralité sur les matériaux composites

I.1. Introduction

Un matériau composite est un solide constitué par assemblage d'au moins deux matériaux non miscibles (mais ayant une forte capacité d'adhésion). Les plus répandus et possédant des propriétés mécaniques exceptionnelles sont ceux constitués de deux phases : la matrices et les renforts [Dorlot (1986)].

Les matériaux composites contribuent au renforcement de la sécurité grâce à une meilleure tenue aux chocs et au feu. Ils offrent une meilleure isolation thermique ou phonique et, pour certains d'entre eux, une bonne isolation électrique. Ils enrichissent aussi les possibilités de conception en permettant d'alléger des structures et de réaliser des formes complexes, aptes à remplir plusieurs fonctions. Dans chacun des marchés d'application (automobile, bâtiment, électricité, équipements industriels, ...), ces performances remarquables sont à l'origine de solutions technologiques innovantes.

Des processus nouveaux de conception, d'industrialisation et de fabrication permettent d'étendre les possibilités techniques, et de mieux satisfaire des besoins parfois contradictoires (poids, fonctions...) auxquels les matériaux homogènes classiques répondent difficilement.

En effet, les matériaux composites ont un comportement particulier, et ceci est dû essentiellement à deux facteurs. Le premier facteur résulte du comportement anisotrope du matériau utilisé dans la couche élémentaire : contrairement aux matériaux isotropes, les matériaux composites sont peu rigides en cisaillement. Le deuxième facteur dérive de la stratification qui consiste en l'empilement de plusieurs couches, ce qui favorise l'effet de cisaillement, et particulièrement du cisaillement transversal [Tafla (2007)].

I.2. Bref historique

Historiquement, le concept de renforcement fibreux est très ancien, comme indiqué dans les références bibliques à des briques d'argile de paille renforcées dans l'Égypte ancienne. Des barres de fer ont été utilisées pour renforcer la maçonnerie au 19^{ème} siècle, conduisant à l'élaboration de l'acier-béton (béton armé). La résine phénolique renforcée avec des fibres d'amiante a été introduite au début du 20^{ème} siècle.

Le premier bateau en fibre de verre a été construit en 1942; des matières plastiques renforcées ont également été utilisées dans les avions et les composants électriques à ce moment l'enroulement filamentaire a été inventé en 1946 et incorporée dans des applications de missiles dans les années 1950. Les premières fibres de Bore et de Carbone haute résistance ont été introduites dans les années 1960, avec des applications de matériaux composites avancés à des composants d'avions en 1968. Des composites à matrice métallique tels que le Bore/Aluminium ont été introduits en 1970.

La société Du Pont a développé le Kevlar (Aramide) en 1973. A partir de la fin des années 1970, les applications des matériaux composites étaient largement développées pour envelopper les avions, l'automobile, et les industries biomédicales.

Les années 1980 ont été marquées par une augmentation significative de l'utilisation des fibres à modules élevés. Depuis les années 1990, l'accent est mis sur le développement des matériaux composites à matrice métallique et à matrice céramique ainsi que les composites carbone/carbone, pour des applications à haute température.

Les applications des composites comprennent les conduites souterraines et des conteneurs, bateaux, véhicules terrestres, des avions et des structures aérospatiales, composants d'automobile, les produits biomédicaux et de nombreux autres produits conçus pour avoir des performances mécaniques élevées et/ou une meilleure stabilité de l'environnement couplé avec un faible poids.

I.3. Composants du matériau composite

Le matériau composite est constitué d'une protection appelée «matrice» et de l'ossature appelée «renfort».

I .3.1. Les renforts

Les renforts contribuent à améliorer la résistance mécanique à la traction et la rigidité des matériaux composites et se présentent sous forme filamentaire (des fibres organiques ou inorganiques).

I.3.2. Différents types de renforts

Les renforts les plus utilisés se présentent sous forme de fibres ou formes dérivées et constituent une fraction volumique de matériau composite généralement comprise entre 0.3 et 0.7. Les renforts fibres se présentent sous diverses formes commerciales (figure I.2):

- Sous forme de Roving (fils, mèches, etc. ...): le Roving est un assemblage de fils de bases parallèles groupés sans torsion.

- Sous forme de tissus (tissus taffetas, toiles, serge, etc. ...): le tissu est formé par l'entrecroisement perpendiculaire des Roving.

Les tissus de Roving peuvent peser jusqu'à 800 g/m².

- Sous forme de mat (à fil coupé, à fil continu) : le mat est un matelas de fils coupés ou continu à ensimage plastique, agglomérés par un liant à solubilité rapide ou lente dans résine. [Djebbloun (2004), Berthelot (2010)].

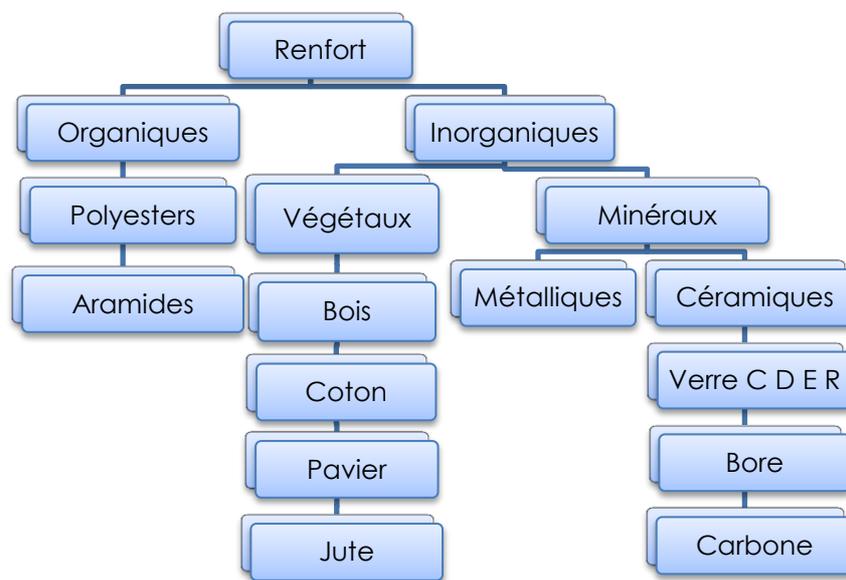


Figure I.1 : Différentes types de renforts.



a-Tissu de verre

b-Roving de verre

c- Mat de verre

Figure I.2 : Différents types de fibres de verre.

I.3.3. Caractéristiques mécaniques principales des fibres de base

Tableau I.1 : Propriétés mécaniques des fibres.

Fibres	Densité (g/cm ³)	Résistance à la traction (MPa)	Allongement à la rupture en%	Module de Young (MPa)	Diamètre du filament élémentaire μm
Verre E	2.54	3400	4.8	73000	3-30
Verre R	2.48	4400	5.4	86000	3-30
Aramide BM	1.45	3100	2	70000	12
Aramide HM	1.45	3100	1	130000	12
Kevlar	-	2900	2.3	130000	1.45
Aluminium	-	1380	0.7	380000	3.9
Carbone HT	1.78	2800	0.5	200000	8
Carbone HM	1.80	2200	-	400000	8
Bore	2.63	3500	0.8	400000	100-200

I.3.4. La matrice

La matrice maintient les fibres entre elles en jouant le rôle de liant dans le composite. Elle assure également le transfert de charge entre les renforts, tout en les maintenant dans leur position et leur orientation. Enfin, elle protège le composite des agressions extérieures et donne la forme désirée au produit final.

I.3.4.1. Différentes types des matrices

En fonction de leur nature, les matériaux composites sont classés en trois grandes classes (Figure I.3); les composites à matrice organique (CMO) qui ne peuvent être utilisés à des températures supérieures à 300°C, les composites à matrice métallique (CMM) qui sont utilisés jusqu'à 600°C, et les composites à matrice céramique (CMC) dont l'utilisation est possible même au-delà de 1000°C. Dans le cadre de ce chapitre nous intéressons à la caractérisation d'un matériau composite à matrice organique dont les caractéristiques structurelles et mécanique seront détaillées.

On peut distinguer deux de types de résines (voir tableau I.2), les résines thermodurcissable : sont mis en forme et se polymérisent selon la forme souhaitée (la transformation irréversible), et les Résines thermoplastiques : sont mises en forme par chauffage, durcissent au cours du refroidissement (la transformation est réversible).

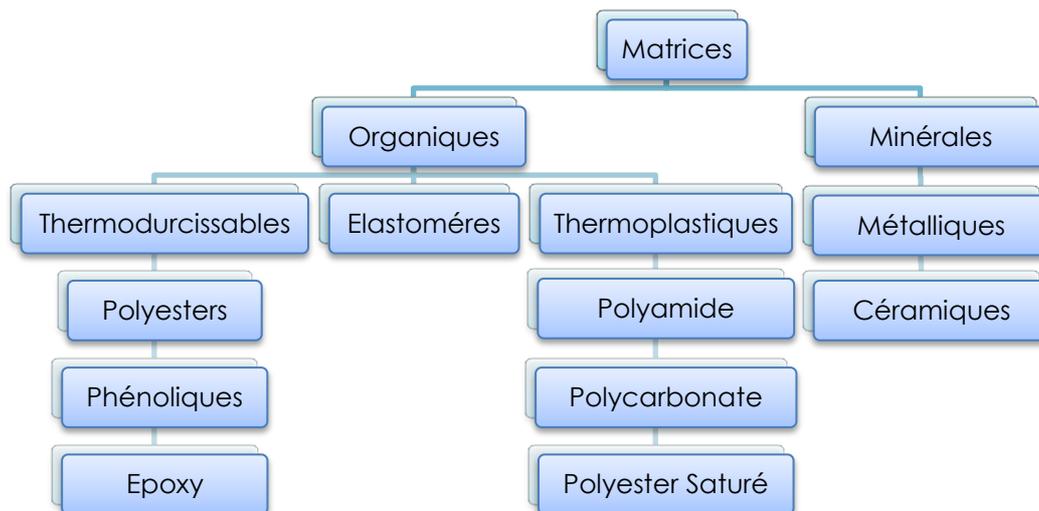


Figure I.3 : Différentes types de matrices.

Tableau I.2 : Propriétés principales des matrices thermodurcissables et thermoplastiques

Matrices	Thermodurcissables	Thermoplastiques
Etat de base	Liquide visqueux à polymériser	Solide prêt à l'emploi
Stockage	Réduit	Illimité
Mouillabilité des renforts	Aisée	Difficile
Moulage	Chauffage continu	Chauffage + refroidissement
Cycle	Long (polymérisation)	Court
Tenue au choc	Limitée	Assez bonne
Tenue thermique	Meilleure	Réduite (sauf nouveau TP)
Chutes et déchets	Perdus ou utilisés en charges	Recyclables
Conditions de travail	Emanations de solvants	Propreté

I.3.4.2. Composites à matrice polymère ou organique (CMO)

Sont utilisés dans de nombreux secteurs industriels : transports, génie civil, bâtiment, aéronautique, construction navale, etc. Les avantages potentiels apportés par ces matériaux sont connus et nombreux : réduction de la masse, intégration de fonctions, réduction des coûts, etc. La fabrication des CMO emploie deux types de matrices : les résines thermodurcissables qui représentent 3/4 des CMO actuels (époxyde, polyester, vinylester, etc.) et les résines thermoplastiques (polypropylène, polyamide, etc.) qui sont moins utilisées,

mais en pleine progression du fait notamment d'une plus grande recyclable (réutilisation après broyage) [Draiche (2014)].

I.3.4.3. Composites à matrice métallique

On parle de composite à matrice métallique, lorsqu'il s'agit d'une matrice métallique dans lequel on insère des fibres, des particules ou également des filaments qu'on appelle trichite. Il y a des fibres courtes et des fibres continues mono filament ou multi filaments. La composition des fibres et des matrices varie d'un composite à l'autre et dépend surtout de l'application et du budget. Les composites CMM les plus employées sont les métaux légers et leurs alliages en particulier l'aluminium, le titane et le nickel.

Les matériaux composites à matrice métallique ont été développés en deux vagues successives. Des efforts importants de recherche ont été menés. Ce composite métal-métal était pénalisé par le coût très élevé de la fibre. À cette date, les applications envisagées étaient exclusivement orientées vers l'aéronautique et l'espace. L'utilisation de matériaux composites à des températures supérieures à 300 °C interdit pratiquement l'usage des matrices organiques et suppose donc que l'élément de renforcement soit noyé au sein d'une matrice métallique.

I.3.4.4. Composites à matrice céramique

Les céramiques sont utilisées principalement pour des applications demandant une résistance thermique extrême, lorsque les températures d'utilisation sont supérieures à 1000°C, on a recours aux composites à matrice céramique. Dans ce type de composite, le renfort est généralement constitué de fibres longues en carbone, en silice ou en carbure de silicium, assemblé par tissage multidimensionnel.

I.3.4.5. Caractéristiques mécaniques principales des résines

Tableau I.3 : Propriétés mécaniques des résines [Berthelot (2010)].

Caractéristiques mécaniques	Polyester	Epoxyde	Phénolique	Polyamide	Aluminium
ε_r En traction (%)	2-5	2-5	2-5	-	-
ρ (Kg /m ³)	1200	1100-1500	1200	1130	2630
σ_r En traction (MPa)	50-80	60-80	40	40	350
E En traction (GPa)	2.8-3.5	3-5	-	3	69

I.3.4.6. Les charges

L'objet de la charge renforçant est d'améliorer les caractéristiques mécaniques de la résine, ou diminuer le coût des résines en conservant les performances des résines. En générales ces charges sont des microbilles ou des particules (poudre). Les principales charges utilisées sont :

- ✓ Microbille en (verre, carbone, époxyde, phénolique, polystyrène, etc....)
- ✓ Des poudres ou paillettes métalliques : (cuivre, fer, aluminium, etc. ...)
- ✓ Des particules de carbone (noir de carbone) [Djebbloun (2004)].

I.3.4.7. Les additifs

Ils sont nécessaires pour assurer une adhérence suffisante entre le renfort fibreux et la matrice et de modifier l'aspect ou les caractéristiques de la matière à laquelle ils sont ajoutés. Les additifs se trouvent en faible quantité (quelques % et moins) et interviennent comme [Djebbloun (2004)] :

- ✓ Lubrifiants et agents de démoulage,
- ✓ Pigments et colorants,
- ✓ Agents anti-retraits,
- ✓ Agents anti-ultraviolets,
- ✓ Accélérateur,
- ✓ Catalyseur.

I.3.4.8. L'interface

En plus de ces fibres et la matrice, il faut rajouter : une interface qui assure la compatibilité renfort/matrice, qui transmet les contraintes de l'un à l'autre sans déplacement relatif. Des produits chimiques entre aussi dans la composition du composite, l'interphase etc.... qui peut jouer sur le comportement mécanique, mais n'interviennent pratiquement jamais dans le calcul de structure composite.

I.4. Avantages et inconvénients des matériaux composites

Les composites ont des avantages uniques par rapport aux matériaux monolithiques, comme :

- ✓ Grande résistance à la fatigue,
- ✓ Tenue à la température élevée,

- ✓ Haute rigidité,
- ✓ Ils sont beaucoup plus légers, ce qui est un gain énorme au niveau du poids de l'avion qui est nettement réduit. L'avion consomme donc moins de carburant,
- ✓ Ils sont bien sûr insensibles aux produits chimiques tels que les huiles, les liquides hydrauliques...,
- ✓ Il y a l'assurance d'en disposer beaucoup et pendant longtemps, ce qui n'est pas le cas des métaux dont le prix augmente vertigineusement,
- ✓ On peut créer des matériaux de toutes les formes, de toutes les épaisseurs, en fonction de la demande. Ils offrent de grandes possibilités de maniement,
- ✓ Ils se déforment moins en fonction de la température et de la pression ce qui est un des gros enjeux des matériaux utilisés en aviation commerciale. Ils sont peu sensibles à l'humidité, la chaleur, la corrosion... Par ailleurs,

Et les inconvénients de ces matériaux sont :

- ✓ Vieillissement au contact de l'eau,
- ✓ Ils sont beaucoup plus sensibles à tous les impacts. Une petite faille peut engendrer de grosses déformations,
- ✓ La détection de ces problèmes est difficile, ce qui entraîne une rigueur extrême dans leur fabrication et leur assemblage,
- ✓ La mise en œuvre des réparations est beaucoup plus complexe.

I.5. Architecture des matériaux composites

I.5.1. Monocouches

Les monocouches représentent l'élément de base de la structure composite. Les différents types de monocouches sont caractérisés par la forme du renfort : à fibres continue, à fibres courtes, fibres tissées et mat.

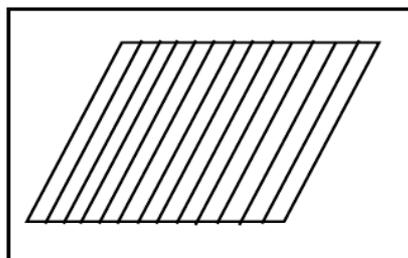


Figure I.4 : Matériau Composite monocouche unidirectionnel.

I.5.2. Stratifiés

Les structures composites stratifiées sont constituées de couches successives de renforts imprégnés de résines (figure I.5). Les couches sont également nommées plis. Les structures stratifiées réalisées à partir de matériaux composites sont constituées d'empilements de nappes unidirectionnelles ou bidirectionnelles. Ces nappes sont formées de renforts en fibres longues liées par de la résine.

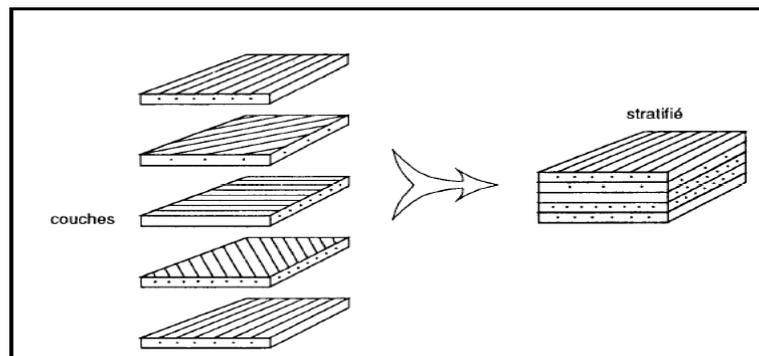


Figure I.5 : Matériau composite stratifié.

I.5.3. Sandwichs

Matériaux composés de deux semelles (ou peaux) de grande rigidité et de faible épaisseur enveloppant une âme (ou cœur) de forte épaisseur et faible résistance (figure I.6). L'ensemble forme une structure d'une grande légèreté. Le matériau sandwich possède une grande rigidité en flexion et c'est un excellent isolant thermique.

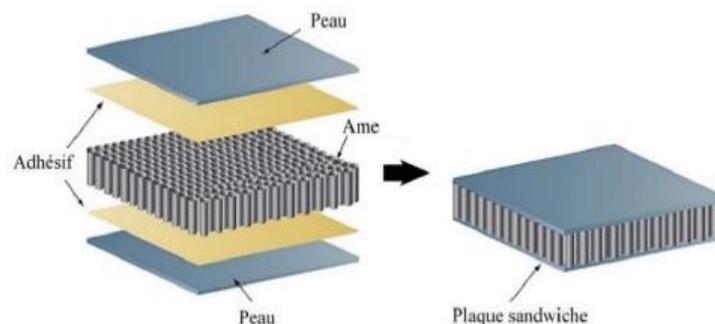


Figure I.6 : Matériaux sandwichs à âmes pleine.

I.6. Matériaux composites avancés

Les matériaux composites avancés désignent les matériaux à gradient fonctionnel (FGM). Les matériaux à haute performance, les matériaux à haute valeur ajoutée,... etc. Ils constituent une large famille de matériaux qui concerne de nombreux domaines d'application. Ils répondent à des besoins de hautes performances telles qu'une forte résistance mécanique, thermique ou à la corrosion par exemple.

Les matériaux composites à gradients évalués FGM représentent un des derniers développements. Ils sont particulièrement utilisés dans les applications de haute technologie : aéronautique, aérospatial, nucléaire, semi-conducteurs, et en génie civil et trouvent également des applications biomédicales [Baron et Naili (2008)]. Les FGM sont une nouvelle classe de matériaux composites dont la microstructure et la composition varient graduellement et continuent avec la position de manière à optimiser les performances mécanique et thermique de la structure qu'ils constituent. Les fonctions désirées sont intégrées, dès la conception, au cœur même de la matière, ceci en choisissant selon les applications spécifiques et charges environnementales le matériau adéquat pour chaque interface. Ces matériaux possèdent de multiples avantages avec des rapports de résistance/poids et épaisseur/poids très élevés, qui peuvent les rendre attractifs du point de vue de leur potentiel d'application, il peut s'agir de l'amélioration de la rigidité, de la tenue à la fatigue, de la résistance à la corrosion ou de la conductivité thermique en plus d'avoir une gradation des propriétés permettant ainsi d'augmenter ou de moduler des performances telle que la réduction des contraintes locales [Minamoto et al. (1999)], ou encore l'amélioration du transfert de chaleur.

I.6.1. Définition d'un FGM

Les matériaux à gradient fonctionnel ou fonctionnellement gradués (FGM) sont une nouvelle gamme de matériaux composites ayant une variation graduelle et continue des fractions volumiques de chacun des constituants (en général : métal et céramique) à travers l'épaisseur, entraînant des changements. En conséquence des propriétés thermomécaniques globales de l'élément structural qu'ils constituent. Ils ont été conçus pour pallier aux problèmes engendrés par des environnements thermiques sévères. L'analyse des structures en FGM nécessite de mettre en place des outils de modélisation du comportement mécanique de plus en plus sophistiqués. Notamment, le calcul par la méthode des éléments finis est indispensable pour le dimensionnement et la vérification de structures de ces structures complexes.

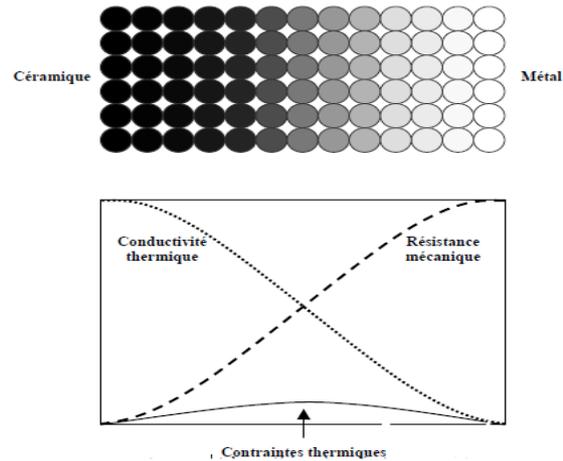


Figure I.7 : Concept des matériaux à gradient de propriétés [Boch et al. (1986)].

I.6.2. Historique des matériaux FGM

Le concept des matériaux fonctionnellement gradués a été aperçu dans la nature depuis des millions d'années, on peut les trouver les tissus des plantes, des animaux et même dans notre corps en citant à titre d'exemple les os, les coquilles les noix de coco et les feuilles de certaines graminées les bambous.

À l'environ de 1984-1985 dans une université japonaise, deux chercheurs l'un dans le domaine de l'aéronautique et l'autre dans le domaine des sciences des matériaux rêvent de concevoir un engin spatial dont le revêtement pourrait résister à un environnement thermique très sévère ils discutaient la problématique de la résistance à de graves écarts de la température entre l'intérieur et de matériau unique supportable à une telle condition [Mahi et al. (2012)] à partir de cette réflexion, ces deux chercheurs ont mis au point ce qu'on appelle les FGM ils les ont considérés comme des matériaux caractérisés par une résistance thermique améliorée et par des propriétés mécaniques spécifique donc trois caractéristiques sont à considères pour la conception de tels matériaux :

- ✓ Résistance thermique et résistance à l'oxydation à haute température de la couche superficielle du matériau ;
- ✓ Ténacité du matériau coté basse température ;
- ✓ Réalisation effective de la contrainte thermique le lorry du matériau pour cela, ils ont opté pour l'utilisation de la céramique à la surface extérieure exposée à l'environnement à haute température, quant à la surface intérieure coté basse température ils ont utilisé un matériau conducteur de la chaleur.

En 1987, leur recherche a été acceptée par le ministère de l'éducation et des sciences qui a lancé un grand projet universitaire traitant ces FGM et à partir de cette année leur étude a pris de l'ampleur et fut utilisée par plusieurs autres chercheurs et différents laboratoires qui ont initié leur recherche en discutant sur : les méthodes de développement de FGM la conception des matériaux, leurs productions et leurs évolutions.

A la fin de la première étape 1987-1989 les chercheurs avaient réussi à fabriquer des petites pièces expérimentales 10mm d'épaisseur et 30mm de diamètre pouvant résister à des températures maximales de 2000K température de surface et à un gradient de température de 1000K dans la seconde étape (1990-1991), le but était de réaliser des pièces de tailles plus grandes et de formes plus complexes par rapport à celles réalisées dans la première étape pendant les années 90, non seulement les champs d'application des FGM s'est développée pour les matériaux de structure fonctionnant à température mais s'est aussi élargi à d'autres applications: Biome cantiques, technologie de capteur, optique etc. [Berrefah (2011)] en fin, recherches dans ce domaine permettent de développer et d'améliorer nos connaissances concernant ces nouveaux matériaux thermique, dynamique, stabilité flambement.

I.6.3. Comparaison des matériaux FGM et les composites traditionnels

Généralement, les FGM sont des matériaux constitués de plusieurs couches contenant des composants différents tels que les céramiques et les métaux. Ils sont donc des composites présentant des caractéristiques macroscopiquement inhomogènes. Le changement continu dans la composition et donc dans la microstructure du matériau distingue les FGM des matériaux composites conventionnels comme illustré sur la (figure I.8) [Koizumi(1995)]. Il en résulte un gradient qui déterminera les propriétés matérielles des FGM. Dans certains cas, on peut avoir un FGM constitué d'un même matériau mais de microstructure différente [Boch (1986)].

Le concept FGM peut être appliqué dans divers domaines pour des usages structuraux et fonctionnels. Au Japon, plusieurs programmes de cinq ans ont été conduits au cours des années 80 et 90 afin de développer l'architecture des FGM, et d'étudier également ces matériaux pour les applications de hautes températures (par exemple, éléments pour navettes spatiales) ainsi que pour des applications fonctionnelles (par exemple, convertisseurs thermoélectriques et thermo-ioniques). Ces programmes ont conduit au développement de la conception architecturale du FGM et de ces perspectives [Bouiadjra (2015)].

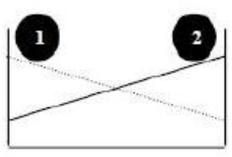
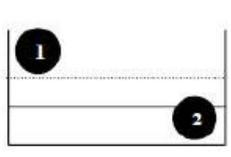
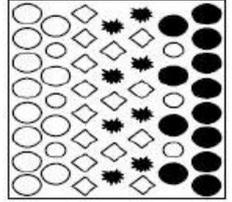
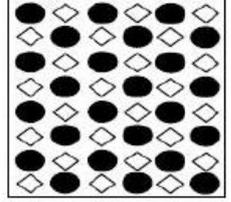
Propriétés	<p>1 Résistance mécanique</p> <p>2 Conductivité thermique</p>		
Structure	<p>Eléments constitutifs:</p> <p>céramique ○</p> <p>métal ●</p> <p>microporosité ◊</p> <p>fibres ✱</p>		
Matériaux	exemple	FGM	NON-FGM

Figure I.8 : Caractéristiques des FGM en comparaison avec les matériaux composites conventionnels [Koizumi (1995)].

[Uchida (2004)] à établie un modèle simple illustrant les différences entre les matériaux à gradient de propriétés (FGM) et les matériaux plus conventionnels (voir figure I.9). Le matériau plan composé à une caractéristique plane, et le matériau relié à une frontière sur l'interface de deux matériaux. Les FGM ont d'excellentes caractéristiques qui diffèrent de ceux des matériaux plans composés et reliés. Par conséquent, les FGM attirent l'attention en termes de leur application dans les domaines industriels puisqu'ils ont une double propriété des deux matières premières qui sont mélangées ensemble, et la distribution composante est graduée sans interruption. Par exemple, l'un des FGM qui se composent du métal et de la céramique a la caractéristique de la conductivité thermique et de la force métallique dans le côté en métal et la résistivité aux hautes températures dans le côté en céramique.

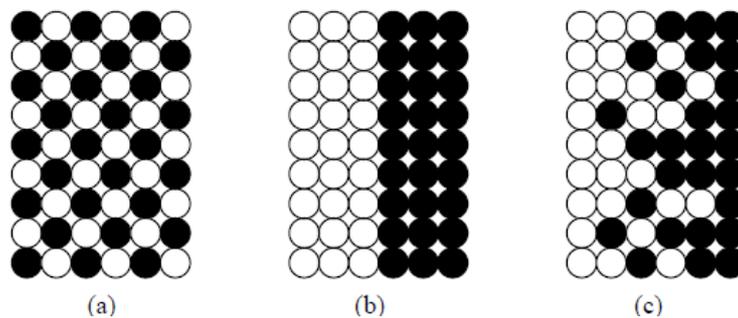


Figure I.9 : La distribution composante des matériaux [Uchida (2004)].
 Matériau plan composé (a), Matériau relié (b), Matériau à gradient de propriété (c)

I.6.4. Propriétés mécaniques des FGMs

L'apparition des nouvelles industries nécessitent des milieux à haute performance et agressifs, il est devenu important d'insérer au moins une phase de matériau céramique dans toute FGM en raison de ses propriétés intéressantes. Dans ce type de FGM les propriétés souhaitables sont obtenues par la combinaison du métal et céramique. Les propriétés mécaniques de ces deux composantes sont illustrées dans le tableau I.4.

Tableau I.4 : Comparaison entre les propriétés de la céramique et du métal.

Matériaux	Zone	Propriétés
La face à haute température	Céramique	- Bonne résistance thermique - Bonne résistance à l'oxydation. - Faible conductivité thermique.
Couches intermédiaires	Céramique-métal	-Élimination des problèmes de l'interface. -Faible conductivité thermique.
La face à basse température	Métal	-Bonne résistance mécanique -Conductivité thermique élevée -Très bonne ténacité

I.7. Domaines d'application des FGM

Les matériaux à gradient fonctionnel (FGM) disposent d'atouts importants par rapport aux matériaux traditionnels. Ils permettent d'augmenter la durée de vie de certains équipements grâce à leurs propriétés mécaniques et chimiques élevées associés à un faible poids (besoins de l'industrie aérospatiale). Ils offrent une meilleure isolation thermique ou phonique et pour certains d'entre eux, une bonne isolation électrique.

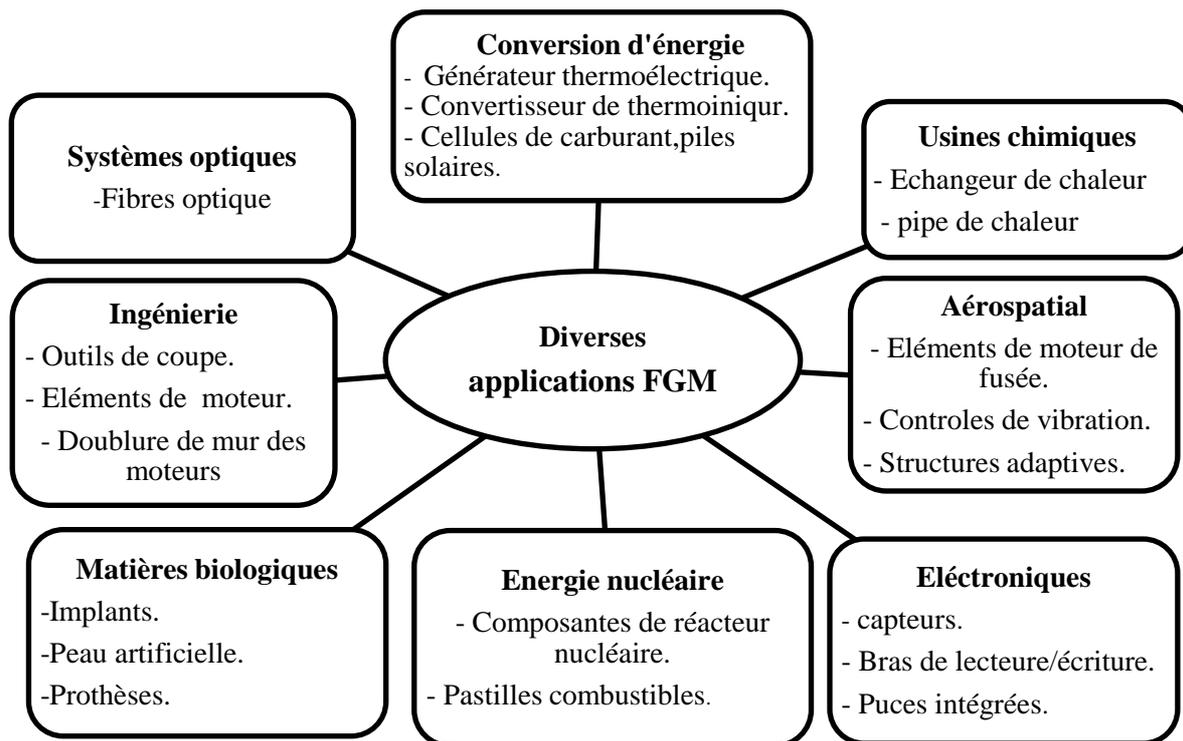


Figure I.10 : Les principaux domaines d'application des FGM.

Certaines des applications de matériaux à gradient fonctionnel sont mises en évidence ci-dessous :

I.7.1. L'aérospatiale

Les matériaux à gradient fonctionnel peuvent résister à de très gradient thermique, qui sont plus approprié pour la structure des avions, composante de moteur de fusée etc. [Marin (2003)]. Si la technique de traitement est améliorée, les FGM sont prometteurs et peut être utilisé dans des domaines plus larges de l'aérospatiale.

I.7.2. Industrie navale, aéronautique (Prévention contre les attaques terroristes)

Les explosions provenant par les attaques terroristes se produisent beaucoup plus fréquemment dans le monde dans lequel nous vivons aujourd'hui, comme l'attaque du navire «USS Cole» (structure navale), attaque sur l'ambassade américaine au Kenya [Perl (1998)] (structure civile) et les bombardements en bordure de route IED sur Humvees (structures militaires). Ces attaques ont conduit à un besoin important de remplacé les matériaux de construction traditionnels avec plus des matériaux résistants aux charges explosives. Avec les

préoccupations croissantes concernant la sécurité envers les vies humaines et les patrimoines, l'importance d'une telle recherche ne peut pas être négligée.

Les structures sandwichs ont des applications très importantes dans l'industrie navale et aéronautique. En raison de leur constitution, elles présentent de nombreux avantages en termes de résistance, rigidité et possèdent des capacités d'absorption d'énergie élevées. Les structures sandwich sont constituées de deux couches superficielles minces et rigides, généralement ont la même épaisseur, séparées par un noyau léger plus épais. Les couches superficielles portent presque toute la flexion et les charges dans ses plans, tandis que le noyau contribue à stabiliser les couches superficielles et définit la rigidité en flexion et résiste aux efforts de compression et du cisaillement hors plan. Lorsque les structures sandwich sont soumises à des charges impulsives à haute intensité, les matériaux constituant le noyau jouent un rôle crucial dans le comportement dynamique et la réponse structurelle globale. Leurs propriétés aident à disperser l'impulsion mécanique transmis dans la structure, et donc protéger quoi que ce soit situé derrière elle [Xue et Hutchinson (2003)].

I.7.3. Médecine

Les Tissus vivants tels que les os et les dents sont caractérisées en tant que matériau à gradient de propriétés naturel [Pompe et al. (2003)], pour remplacer ces tissus, un matériau compatible est nécessaire qui serviront aux fins de la bio-tissu original. Le FGM set la substance idéale pour cette application. Le matériau FGM a trouvé une large gamme d'applications en chirurgie dentaire [Matsuo et al. (2001)] et des applications orthopédiques pour les dents et le remplacement osseux.

I.7.4. Défense

L'une des caractéristiques les plus importantes du matériau à gradient de propriété est la capacité à inhiber la propagation de fissure. Cette propriété rend utile dans le secteur de la défense, comme des matériaux résistants aux pénétrations utilisés pour plaques de blindage et des gilets pare-balles [Lu et al. (2011)].

I.7.5. Energie

FGM sont utilisés dans des dispositifs de conversion d'énergie. Ils fournissent également une barrière thermique et sont utilisés comme revêtement protecteur sur des aubes de turbine dans le moteur de turbine à gaz [Müller et al. (2003)].

Le concept des matériaux fonctionnellement gradués est applicable dans nombreux domaines il a été initialement conçu pour l'industrie de l'aéronautique, où les FGM ont fourni deux propriétés contradictoires telles que la conduction et l'isolation thermique. Actuellement, ils permettent la production de matériaux légers, forts et durables, et ils sont applicables dans un large intervalle des domaines tels que :

I.8. Constituants d'un matériau sandwich

I.8.1. Les peaux

Généralement de faible épaisseur, les peaux sont réalisées de tout matériaux pouvant être obtenus sous forme de couche (voir figure I.11), les peaux des sandwichs sont généralement constituées de fibre (mot ou tissu) enrobés d'une matrice à base de résine. Il existe plusieurs types de fibres parmi lesquelles on trouve :

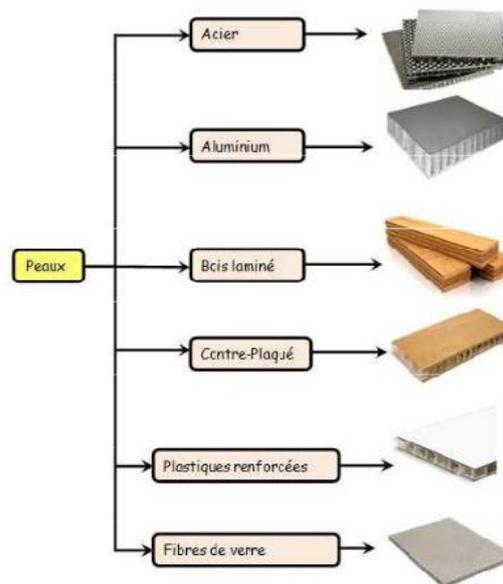


Figure I.11 : Différents types de matériaux utilisés pour la conception des peaux.

- Les fibres de verre qui sont produites à partir du verre en fusion passant à travers des filières de 3 à 25 μm , ou il est refroidi les propriétés des fibres de verres dépendent de la nature du verre (pourcentage de verre métallique) et peu de leur technique de fabrication.
- Les fibres de kevlar ou amides, qui sont produites par polymérisation de polyamides ayant des modules allant de 60 à 180 GPA et une masse volumique d'environ 1400 kg/m^3 ces fibres ont des avantages particuliers, elles sont les moins denses et les plus résistantes à l'impact.

- Les fibres de carbone qui sont fabriquées à partir d'un précurseur (polyacrylonitrile) qui est oxydé carbonisé et graphité. Les fibres de carbone ont des modules qui varient de 150 à 800 GPA et une masse volumique en général inférieure à 2000 kg/m³ sa résistance à l'impact est mauvaise, d'autre part il est inflammable et conduit l'électricité.
- Le choix de la nature et la séquence des couches dépendront de l'usage est destinée la structure sandwich considérées sans rigidité propre en cisaillement les peaux ont pour but de reprendre les efforts de flexion traduits par des contraintes normales (traction ou compression).

I.8.2. L'âme

Légère lame a en général une faible résistance à la flexion son but est de reprendre les efforts de compression et de cisaillement, par ailleurs lame doit pouvoir supporter des charges localisées de poinçonnement les âmes creuses, en particulier les nids d'abeilles (figure I.13), sont généralement utilisées pour les structures à hautes performances mécaniques. Elles ont des performances relativement élevées mais ont un coût de fabrication relativement élevé et se limite généralement à des structures planes. L'âme pleine telle que les mousses ou le balsa, permettent la réalisation des structures sandwich planes ou courbées avec un rapport performance-prix relativement élevé.

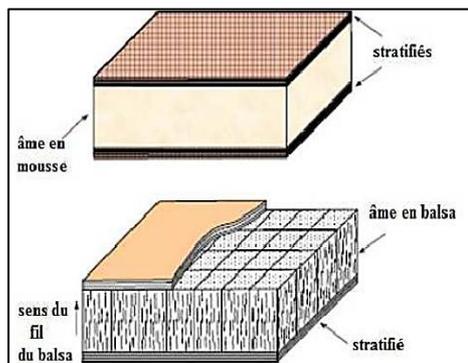


Figure (I.12): Eléments constitutifs d'un sandwich à âme en balsa.

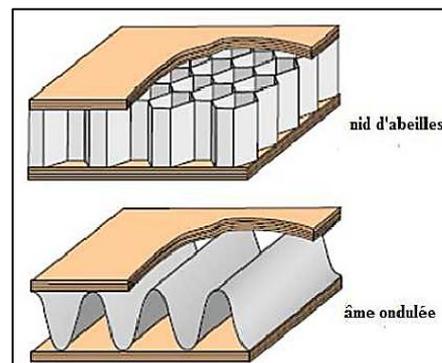


Figure (I.13): Eléments constitutifs d'un sandwich à âme en nid d'abeilles.

Parmi les différents types des âmes qui sont disponibles sur le marché on trouve par exemple (voir figure I.14) :

- Les mousses
- Le bois et le nid d'abeilles

I.8.2.1. Les mousses

Ce sont les plus fréquemment utilisées elles sont produites à partir de polychlorure de vinyle polystyrène, polymères synthétiques leur masses volumiques varient de 30 à 300 kg/m³ et leur épaisseur de 3 à 40 mm l'échantillonnage moyen est de 80 kg/m³ de masse volumique et 15 mm d'épaisseur elles sont thermos formables et permettent donc de réaliser des pièces de formes complexes. Leurs propriétés mécaniques sont bonnes, elles adhèrent bien à la résine et absorbent peu d'eau. Néanmoins leur point faible réside dans une faible résistance à l'impact.

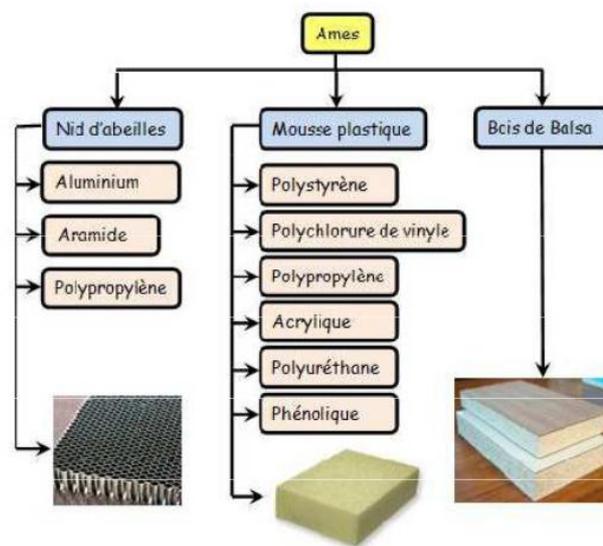


Figure I.14 : Différents types de matériaux utilisés pour la conception des âmes.

I.8.2.2. Le bois

Il est utilisé pour sa très bonne résistance à la compression notamment pour les supports d'accastillage. Le balsa est la variété la plus courante car c'est la plus légère : 100 kg/m³ de masse volumique le bois est le matériau le moins cher mais il est le plus poreux.

I.8.2.3. Le nid d'abeilles

C'est une structure hexagonale qui peut être réalisée en divers matériaux comme le papier et l'aluminium ses caractéristiques mécaniques dépendent du matériau et de la taille des cellules sa masse volumique varie de 15 à 100 kg/m³ et son épaisseur de 3 à 50 mm. On peut le courber modérément mais les cellules se déforment et alors les propriétés mécaniques changent selon l'orientation le collage peut aussi être un problème car il se réalise sur la

tranche de la structure leurs propriétés sont exceptionnelles mais ils sont difficiles à former et leurs prix sont élevés les variétés les plus courantes sont Nomex et le Kevlar et sont fabriquées à partir de kevlar.

I.9. L'interface

Assemblage de la structure sandwich peut être réalisé par collage sondage ou brassage aussi est-il supposé que, quel que soit le mode d'assemblage des différentes couches le lien est parfait l'adhésif est un composant essentiel intervenant dans la fabrication d'un sandwich il permet un bon assemblage de la structure et une transmission de charge sa principale caractéristique mécanique est la résistance au cisaillement. Dans le cas de peaux en composites, l'insertion de cette troisième phase peut être évitée par revue des méthodes d'élaboration des matériaux FGM l'utilisation d'une résine auto adhésive.

I.10. Revue des méthodes d'élaboration des matériaux FGM

L'utilité des composites à gradient de propriétés avec une structure à gradient a été identifiée dans les articles théoriques par [Birman et Byrd (2007), Shen (2009)]. Cependant, leurs travaux n'ont qu'un effet limité, probablement en raison d'un manque de méthodes de production appropriées pour FGM à ce moment-là. Cela a pris 15 ans supplémentaires jusqu'à ce que la recherche systématique sur des processus de fabrication pour les matériaux gradient de propriétés ait été effectuée dans le cadre d'un programme de recherche national sur FGM au Japon. Depuis lors, une partie de la recherche sur les FGM a été consacrée au traitement de ces matériaux et une grande variété de méthodes de production a été développée [Hirai (1996)]. Le processus de fabrication d'un FGM peut habituellement être divisé en établissant la structure dans l'espace non homogène « gradation » et la transformation de cette structure en matériau en bloc « consolidation ». Des processus constitutifs sont basés sur un habillage par étapes de la structure graduée à partir des matériaux de précurseur ou des poudres. Les principaux procédés disponibles de nos jours pour la production des matériaux FGM : coulage séquentiel en barbotine (Slip Casting), coulage en bande (Tape Casting), projection thermique (plasma), dépôt chimique et physique en phase vapeur (CVD et PVD) et le frittage laser différentiel sont les plus importants. IL ressort de notre étude bibliographique que de nombreuses méthodes d'élaboration sont employées pour la réalisation des matériaux FGM. Ces techniques sont brièvement expliquées ci-après :

I.10.1. Coulage séquentiel en barbotine (Slip Casting)

Morinaga a également réussi à fabriquer un $\text{Al}_2\text{O}_3/\text{W}$ FGM en utilisant une méthode de coulée en barbotine. Il a obtenu un matériau de gradient avec une composition sans interruption changeante en contrôlant le taux d'arrangement de fines particules, qui dépend de la densité et de la taille du grain [Morinaga et Toto (1993)]. Quand il utilise une densité mince en barbotine (5% ou 10%), la couche d' Al_2O_3 et la couche de W ont été séparées, confirmant des couches inclinées continues et claires. Dans le passé, le dépôt en phase vapeur, l'implantation ionique, et la diffusion ont été employées pour fabriquer des matériaux de gradient, mais cette technique a attiré l'attention et pourrait permettre pour fabriquer une série de FGM en utilisant des densités minces en barbotine et de fines particules comme matière première avec différentes densités spécifiques. L'addition d'une pression pendant la coulée en barbotine augmente le taux de dépôt du matériau et à permet de fabriquer des pièces à plus grandes dimensions ; ceci a été trouvé dans une étude réalisée par Grazzini et al. (1992).

Leur travail a couvert le traitement des composés monolithiques Al_2O_3 et $\text{Al}_2\text{O}_3\text{-Si}$ avec des formulations de coulée en barbotine basées sur les boues d'émouillage dispersées et coagulées qui ont été analysées, et d'excellents résultats ont été obtenus en utilisant les boues d'émouillage coagulées, sans présence de fissuration après séchage. L'effet de la pression s'est avéré pour augmenter la densité avec une augmentation conséquente de la densité de feu. En outre, des microstructures homogènes ont été réalisées dans le système composé, malgré la grande différence de tailles des particules utilisées.

I.10.2. Coulage en bande (Tape casting)

Le processus de coulage en bande connu sous la dénomination anglaise (Tape casting) a été employé pour préparer les diverses bandes de poudres fines en suspension non aqueuse, dont lequel les matériaux composites laminaires et les matériaux à gradient de propriétés (FGM $\text{Al}_2\text{O}_3\text{-Tic}$) ont été produits en coupant, en empilant, en stratifiant le matériau, ensuite enlevant la reliure, et ont pressant les produits obtenus à chaud, le coulage en bande est une méthode utile pour modifier les propriétés mécaniques des composés en céramique.

L'élaboration des barbotines utilisées pour le coulage en bandes comprend plusieurs étapes : tout d'abord, le solvant avec une viscosité faible, le dispersant et la poudre céramique sont mélangés soit dans un broyeur planétaire dans des jarres en alumine pour Sic, soit dans un mélangeur à rouleaux avec des billes en Sic pour B4C (problème d'usure) ; ensuite, un

liant acrylique et un plastifiant sont ajoutés et mélangés durant une nuit ; puis un autre agent est ajouté (seulement pour les barbotines servant à obtenir des bandes poreuses) et mélangé pendant 4 heures environ pour obtenir une répartition uniforme ; enfin, la barbotine est désaérée pendant 24 heures à faible vitesse de rotation.

Après vérification de la viscosité des barbotines, ces dernières sont coulées sur un film Wyler siliconé afin de faciliter le décollement de la bande sur un banc de coulage à l'aide d'un sabot constitué d'un double couteau permettant d'obtenir des bandes d'épaisseur contrôlée (100-200 μm). Des disques (20mm de diamètre) et des carrés (50mm de côté) sont découpés dans les bandes puis empilés. Ainsi on obtient des matériaux soit monolithiques (empilement de couches identiques) soit alternés (empilement symétrique de couches denses et poreuses) après thermo-compression sous 60 MPa.

I.10.3. Compactage des couches (poudre d'empilement)

Dans cette méthode simple et bien établie un gradient est constitué par le dépôt des couches de poudre avec les compositions changeantes dans la matrice de compactage [Atarashiya (1993)]. Les inconvénients de ce processus sont évidents : changements discrets, nombre limité des couches (jusqu'à 10 dans l'échelle de laboratoire, mais pas plus de deux ou de trois dans la fabrication potentielle), épaisseur limitée des différentes couches (normalement pas moins de 1mm), taille limitée de la pièce (<100 cm^2) en raison des limites des forces de compaction, fabrication discontinue avec la productivité faible. Néanmoins cette méthode permet des études de laboratoire efficaces des systèmes à gradient de propriétés [Kieback (2003)].

I.10.4. Coulée par centrifugation

Dans la coulée par centrifugation, des particules d'une phase réfractaire sont dispersées dans un métal fondu. Ces particules peuvent être formées in situ pendant le refroidissement du fondant [Zhang (1998)] ou être dispersées dans une étape précédente. La différence de densité entre les particules et le métal fondu mène à la formation d'un gradient de concentration de particules si le fondant est moulé dans une centrifugeuse. Particules avec une plus faible densité de Mg_2Si , [Zhang (1998)] et une densité plus élevée d' Al_3Ti , [Watanabe (1997)] que le fondant a été utilisé pour préparer les tubes en aluminium à gradient de propriétés qui sont sélectivement la particule renforcée sur la surface intérieure ou externe du tube.

I.10.5. Projection plasma

La projection plasma consiste à introduire des particules solides (de taille inférieure à 100 μm , environ) dans un jet de gaz, dont la température atteint couramment 11000°C et la vitesse 1000-1500 m/s. Le dépôt est ainsi formé par l'empilement des lamelles solidifiées obtenues par l'impact des particules sur le substrat préalablement préparé. Ce procédé est utilisé en particulier pour déposer des matériaux à haute température de fusion tels que des alliages réfractaires ou des céramiques. Les caractéristiques des dépôts réalisés par projection plasma sont la résistance à l'usure et à la corrosion et l'isolation thermique et électrique.

Une recherche détaillée a été effectuée sur la microstructure et le contrôle de propriété des fines particules pulvérisés par plasma. La projection par plasma est un processus rapide et fournit la formation de film sur une large zone, mais a habituellement un inconvénient avec sa microstructure approximative. Ichikawa (2000) a employé les poudres mécaniquement alliées des matériaux thermoélectriques, et a réussi à bien contrôler la teneur en dépôt dans le SiC pour former un matériau thermoélectrique transporteur concentration-gradués avec une microstructure homogène. Sa configuration de pulvérisation est schématiquement montrée sur la figure I.15 ci-dessous.

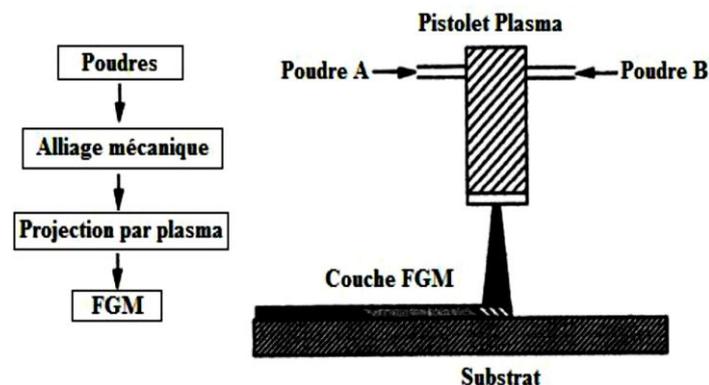


Figure I.15 : Projection par plasma pour former un matériau thermoélectrique gradué (La composition est graduée dans la direction plane) [Ichikawa (2000)].

I.10.6. Dépôt physique en phase vapeur (PVD)

Dépôt physique en phase vapeur (PVD) La technique de dépôt physique en phase vapeur (Physical Vapor Deposition) est une technologie primordiale (prometteuse) pour la production de revêtements de barrière thermique. Parmi les caractéristiques avantageuses de

PVD que les revêtements sont fabriqués ont des surfaces lisses, sans exigence, en fin il n'y a pas de fermeture de trous de refroidissement. Toutefois, le principal avantage est leur résistance exceptionnelle aux chocs thermiques, ainsi que la durée de vie est considérablement plus longue.

Une autre approche pour obtenir une structure à gradients est d'utiliser un mélange d'aluminium, l'alumine, et de zircon, chimiquement contrôlés peuvent être fabriqués facilement par vaporisation à partir de sources multiples en utilisant un ou plusieurs pistolets électroniques. En ajustant les paramètres de faisceau d'électrons, différents taux de dépôt peuvent être obtenus pour chaque source [Miyamoto et al. (1999)]. Si les taux d'évaporation de deux composants, par exemple alumine et de zircon, sont changés sans interruption, un gradient défini de composition est obtenu, c'est le FGM. Pour les systèmes de barrières thermiques plus sollicités à l'environnement oxydant, notamment les aubes mobiles de turbines aéronautiques ou terrestres ne sont, toutefois, pas systématiquement élaborées par projection thermique; dans le cas de la zircon striée ZrO_2 , un autre procédé différent est également employé. En l'occurrence, il s'agit de la technique de l'évaporation sous faisceau d'électrons qui conduit à des microstructures et des propriétés thermomécaniques assez différentes de celles obtenues par la technique de la projection thermique.

I.10.7. Dépôt chimique en phase vapeur (CVD)

Dans la technique de dépôt chimique en phase vapeur (Chemical Vapor Déposition), représenté schématiquement sur la (figure I.16), un dépôt est formé sur un substrat en soumettant la source des gaz (par exemple, des hydrures, bromures ou chlorures) qui occupent la chambre de réaction, à différents types d'énergie comme la chaleur, la lumière et le plasma [Miyamoto et al. (1999)].

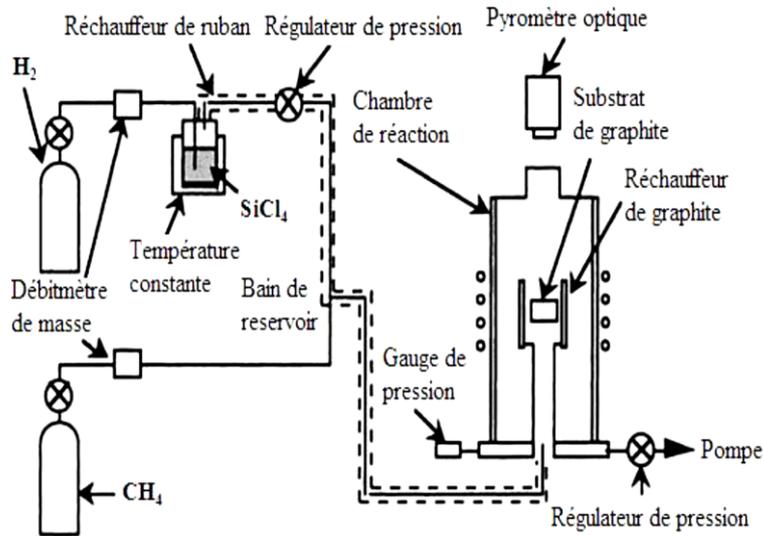


Figure I.16 : Schéma de l'installation pour la préparation d'un SiC/C FGM par le dépôt chimique en phase vapeur (CVD) [Miyamoto (1999)].

Les FGM peuvent être synthétisés à lent pour modérer des taux de dépôt en modifiant le rapport de mélange de la source des gaz, ou par le contrôle de la température de dépôt, la pression de gaz, ou le débit de gaz. En raison de son faible taux de dépôt, CVD est largement utilisé pour l'infiltration de piles ou pour la fabrication de couches minces. Un exemple typique d'une application de FGM par CVD est la formation d'un revêtement gradué de carbure de silicium SiC sur le graphite dans lequel il y'a une transition continue de SiC au C. des compositions contrôlés la source de mélanges des gaz (CH_4 - $SiCl_4H_2$) sont employés aux températures de dépôt entre 1400 °C et 1500 °C et aux pressions entre 1.3 et 6.5 KPa.

Par définition le frittage est un procédé de fabrication de pièces consistant à chauffer une poudre sans la mener jusqu'à la fusion. Sous l'effet de la chaleur, les grains se soudent entre eux, ce qui forme la cohésion de la pièce. Cette technique est constituée de deux étapes et convient à la fabrication d'un composite à gradient de fonction composé de deux matériaux dont les températures de fusion sont très différentes. La première étape est de fabriquer une matrice frittée du matériau à haute température de fusion avec un gradient de porosité. La seconde est de remplir ces porosités avec le deuxième matériau fondu par infiltration. Le résultat est excellent pour la diminution de la contrainte thermique [Takahashi (1990)]. Ce procédé peut être appliquée pour plusieurs combinaisons de matériaux qui sont chimiquement inertes et qui ont des points de fusion bien différents les uns par rapport aux autres.

I.10.8. Frittage Laser Différentiel

Le rayonnement thermique du laser permet le contrôle de la température et la focalisation du point à chauffer. La différence de l'intensité de l'irradiation sur différents points du matériau, provoque un frittage différentiel le long de la pièce, ce qui résulte en des microstructures différentes, dépendant de la position du point irradié. YUKI et al. (1991) ont utilisé cette technique pour élaborer un FGM de PSZ/Mo. La figure (I.17) montre schématiquement la disposition du procédé utilisé par ces auteurs.

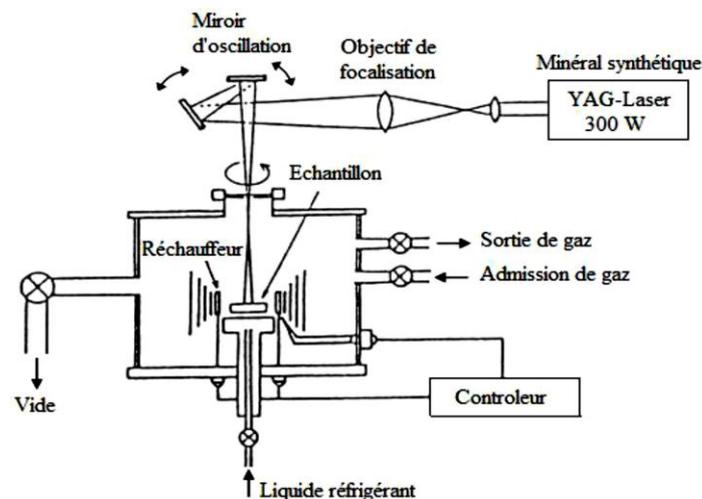


Figure I.17 : Disposition du procédé frittage laser différentiel [YUKI (1991)].

I.10.9. Dépôt par électrophorèse

Un autre processus est ajouté aux différentes techniques de la fabrication des FGM, ce que n'appelle le dépôt par électrophorèse (EPD) est un processus assez rapide à faible coût, capable de produire les matériaux à gradient de propriétés changeant sans interruption avec la géométrie complexe. EPD se compose de deux processus, c'est-à-dire le mouvement des particules chargées en suspension dans un champ électrique entre deux électrodes (électrophorèse) et le dépôt de particules sur l'un des électrodes. EPD permet la conception des matériaux à gradient de propriétés en forme de plaque binaire en déposant d'une suspension de poudre à laquelle une deuxième suspension est sans interruption ajoutée pendant le processus. Une installation générale de ce principe est illustrée sur la (figure I.18).

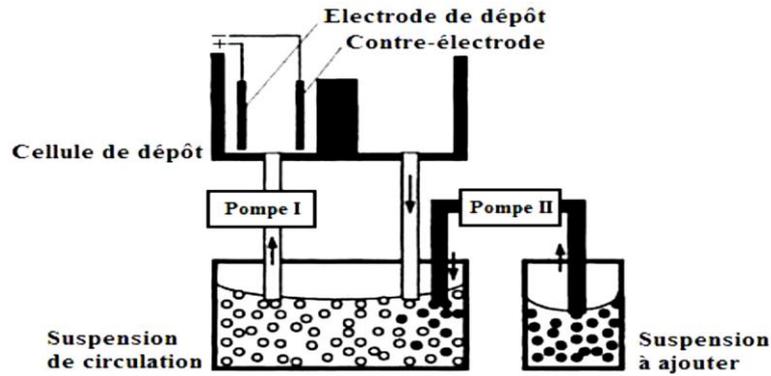


Figure I.18 : L'installation d'EPD pour la production des FGMs [YUKI (1991)].

I.10.10. Implantation Ionique

C'est une technique avancée pour la fabrication des FGM permettant de réaliser seulement des épaisseurs fines ($<1\mu\text{m}$) sur différents substrats (plastiques, céramiques, et métaux). Le traitement s'effectue par les faisceaux énergétiques d'ions ou via des gaz réactifs. Les couches fabriquées présenteront un gradient de composition qui peut être très finement contrôlé [Abdizadeh (1997)].

I.10.11. Dépôt par Centrifugation

La technique consiste à verser une suspension colloïdale relativement diluée dans des flacons cylindriques, le tout est soumis à une centrifugation. La sédimentation s'opère et le liquide surnageant est retiré. Ce procédé est répété pour obtenir des multicouches (figure I.19) [Abdizadeh (1997)].

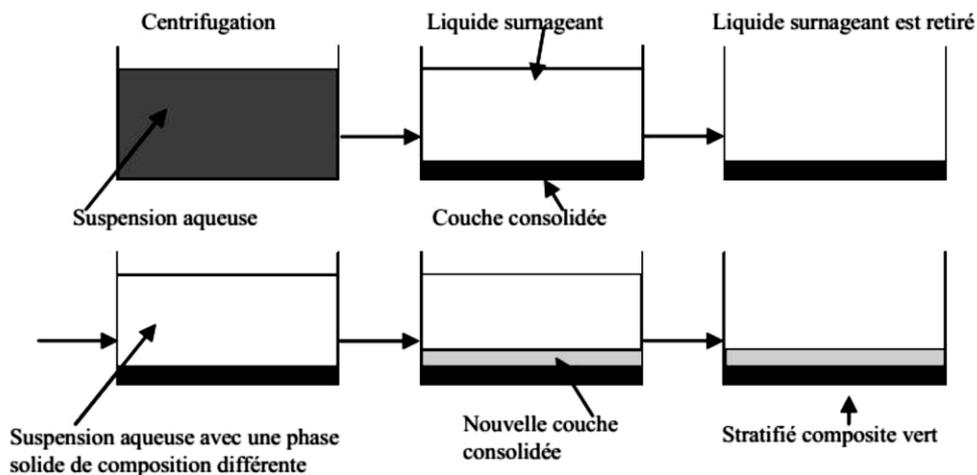


Figure I.19 : Schéma du procédé dépôt par centrifugation [Abdizadeh (1997)].

I.11. Propriétés matérielles d'une poutre FGM

Les matériaux à gradient fonctionnel consistent à l'association de deux ou plusieurs matériaux aux propriétés structurels et fonctionnelles différentes, avec une transition idéalement continues de la composition de la structure, et de la distribution des porosités entre ces matériaux de manière à optimiser les performances de la structure qu'ils constituent.

Un FGM peut être définie par la variation des fractions de volume. La plupart des chercheurs emploient la fonction de loi de puissance, la fonction exponentielle, ou la fonction sigmoïde pour décrire les fractions de volume. Les liaisons entre les particules doivent être assez dures à l'intérieur pour résister à la rupture, et également assez dures à l'extérieur pour empêcher l'usure.

I.11.1. Propriétés matérielles de la poutre P-FGM

La fraction volumique de la classe P-FGM obéit à une fonction en loi de puissance sous la forme [Chi et Chung (2006)] :

$$V(z) = \left(\frac{z + h/2}{h} \right)^p \quad (\text{I.1})$$

Où p est l'indice de fraction volumique et h est l'épaisseur de la poutre. Une fois la fraction volumique locale $V(z)$ a été définie, les propriétés matérielles d'une plaque P-FGM peuvent être déterminées par la loi des mélanges :

$$E(z) = E_m + (E_c - E_m)V(z) \quad (\text{I.2})$$

Où E_m et E_c sont respectivement les modules de Young de la surface inférieure ($z = -h/2$) et de la surface supérieure ($z = h/2$) de la poutre FGM.

La variation de ces propriétés dans la direction de l'épaisseur de la poutre P-FGM est représentée sur la figure I.20, il apparaît clairement que le module de Young par exemple change et diminue rapidement près de la surface inférieure pour « $p > 1$ », et augmente rapidement près de la surface supérieure pour « $p < 1$ ».

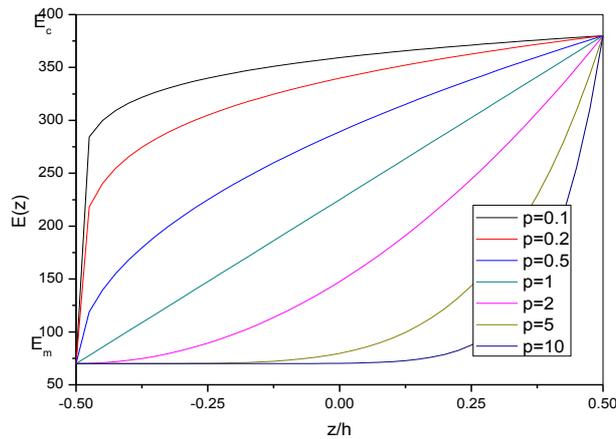


Figure I.20 : Variation du module de Young dans une poutre P-FGM.

I.11.2. Propriétés matérielles de la poutre S-FGM

Si l'on rajoute une poutre FGM d'une simple fonction de loi de puissance à une poutre composite multicouche, les concentrations des contraintes apparaissent sur l'interface des deux matériaux. Par conséquent, Chi et Chung (2006) ont défini la fraction de volume de la poutre FGM en utilisant deux fonctions de loi de puissance pour assurer une bonne distribution des contraintes parmi toutes les interfaces.

Les deux fonctions de loi de puissance sont définies par :

$$V_1(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{h/2+z}{h/2} \right)^p \quad \text{Pour } -h/2 \leq z \leq 0 \quad (\text{I.3a})$$

$$V_2(z) = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{h/2-z}{h/2} \right)^p \quad \text{Pour } 0 \leq z \leq h/2 \quad (\text{I.3b})$$

En utilisant la loi des mélanges, le module de Young de la plaque S-FGM peut être calculé par les relations suivantes :

$$E(z) = V_1(z) E_c + [1 - V_1(z)] E_m \quad \text{Pour } -h/2 \leq z \leq 0 \quad (\text{I.4a})$$

$$E(z) = V_2(z) E_c + [1 - V_2(z)] E_m \quad \text{Pour } 0 \leq z \leq h/2 \quad (\text{I.4b})$$

La figure I.21 montre que la variation du module d'élasticité obtenue en utilisant l'équation (I.4) dépend en principe de la fraction volumique donnée par l'équation (I.3) qui représente les distributions sigmoïdes, et cette poutre FGM est appelée (poutre S-FGM).

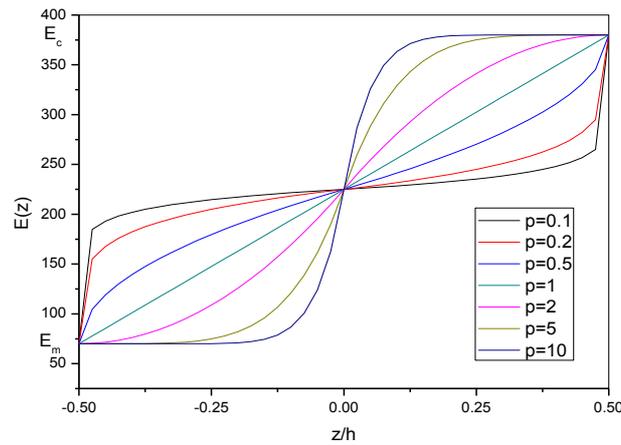


Figure I.21 : Variation du module de Young dans une poutre S-FGM.

I.11.3. Propriétés matérielles de la poutre E-FGM

Pour décrire les propriétés matérielles des matériaux FGM, la plupart des chercheurs utilisent la fonction exponentielle qui s'écrit sous la forme :

$$E(z) = E_m e^{B(z+h/2)} \tag{I.5a}$$

$$B = \frac{1}{h} \ln \left(\frac{E_1}{E_2} \right) \tag{I.5b}$$

La variation du module de Young à travers l'épaisseur de la poutre E-FGM est représentée sur la figure I.22. Cette variation se fait à l'aide d'une seule fonction qui domine la distribution du matériau dans la poutre E-FGM.

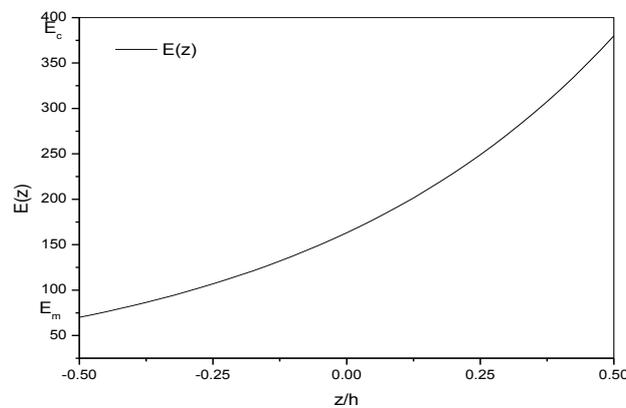


Figure I.22 : Variation du module de Young dans une poutre E-FGM.

I.12. Avantages et inconvénients des FGMs

I.12.1. Avantages

Outre l'accomplissement de son objectif principal, c'est à dire de fournir les différents requis des propriétés en divers points et des surfaces du futur produit qui, pourrait être réalisé par un simple revêtement. Narottam et al. (2011), et beaucoup d'autres soulignent divers avantages supplémentaires de la FGM. Ils énumèrent certains avantages qui en résultent principalement de la non-existence d'une interface forte FGM, tels que :

- ✓ Diminuer les contraintes thermiques causées par les différences de coefficients de dilatation thermique des matériaux utilisés.
- ✓ Absence d'une interface nette devrait conduire à un contrôle d'ensemble mieux des contraintes.
- ✓ Meilleure cohésion entre différents matériaux, par exemple un métal et une céramique.
- ✓ Extension de la région fonctionnelle avant d'atteindre la valeur limite de la déformation plastique.
- ✓ Suppression de délaminage.
- ✓ Augmentation de la ténacité à la rupture.
- ✓ Elimination des singularités des contraintes à divers endroits, tels que les surfaces libres, des coins, des racines de fissures, ...etc. [Narottam et al. (2011)].

I.12.2. Inconvénients

Le principal obstacle à une application plus large de la FGM est leur fabrication compliquée en raison de l'inadéquation des propriétés différentes, par exemple, la température de fusion, des affinités différentes pour divers autres éléments, la taille des particules, la morphologie, ...etc.; un exemple type est un mélange d'un métal avec la température de fusion (T_1) et une céramique avec une température de fusion (T_2). Dans la plupart des cas, un tel couple est habituellement ($T_1 \ll T_2$). Puis, si la température de fabrication est d'environ (T_1), la céramique est encore non fondue et la structure finale contient des particules de céramique non fondue dans une matrice métallique. Dans de nombreux cas, une telle structure présente une grande porosité et une petite adhérence entre les différents composants et son application générale est limitée. Cependant, pour des applications spéciales, la présence de particules très dures (carbures) dans une matrice solide peut être souhaitable.

D'autre part, travailler autour (T2) va certainement entraîner une oxydation rapide et de l'évaporation de nombreux métaux. La formation de phases indésirables, etc. Les matériaux doivent être fabriqués dans une atmosphère protectrice ou à une basse pression et ces deux technologies sont très coûteuses. [Narottam et al. (2011)].

I.13. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié les matériaux composites, Les différents constituants de ces matériaux ont été présentés, ainsi que leurs différents types, leurs propriétés, et leurs domaines d'application.

Les matériaux composites apportent de nombreux avantages : légèreté, résistance mécanique et chimique, maintenance réduite, et liberté de formes. Cependant l'interface de ces couches pose un problème majeur qui est la discontinuité des propriétés et de contraintes à ce niveau. Une technique a été élaboré par un groupe de chercheurs japonais pour surmonter ces effets nuisibles ; elle consiste à utiliser un matériau à gradient évalué 'FGM'.

Le chapitre suivant va porter sur les différentes théories des poutres, leurs hypothèses et leurs cinématiques.

CHAPITR II

Les différentes Théories des poutres

Chapitre II

Les différentes théories des poutres

II.1. Généralités

Les structures sandwich occupent un large créneau dans la construction des pièces composites. Les Composites Sandwich structuré sont une classe spéciale de matériaux composites, fabriqués par la fixation de deux peaux fines, solides et rigides à un noyau léger et relativement épaisse. Le noyau est collé à la peau avec un adhésif. Une variété de matériaux de base est utilisée dans des structures sandwich. La construction en sandwich a une très haute rigidité-poids et haute flexion rapport résistance-poids. En conséquence, les composants en sandwich d'atteindre les mêmes performances que les matériaux classiques de construction avec beaucoup moins de poids.

Les peaux d'un sandwich composite typique sont minces, solide et rigide, et le noyau est léger et structurellement assez fort pour garder les peaux dans leurs positions relatives sous chargement. Historiquement, ce sont les premières structures composites allégées et performantes. Le premier à avoir discuté de l'intérêt et ayant travaillé sur les matériaux composites a été le français Duleau en 1820 [Zenkert (1997)]. Mais les premières applications n'ont débuté qu'une centaine d'années plus tard avec la naissance de l'industrie aéronautique. La conception des structures d'aéronefs étant soumise à des impératifs de performances toujours accrues en termes de rigidité, de résistance et de légèreté, la recherche de nouveaux matériaux est permanente. Si les débuts de l'aviation ont consacré la construction en bois et toile, la solution par des peaux minces métalliques a été adoptée dès les années 20.

Dans les années 30, les industriels ont envisagé la possibilité de réaliser des éléments de structures en sandwichs fabriqués par les matériaux de l'époque. Un brevet à ce sujet a été déposé par Von Karman en 1924 [Hoff et Mautner (1944)]. Le procédé Brodeau (1934), consiste en « deux épaisseurs de contreplaqué qui ensèrent en sandwich une certaine épaisseur de matière légère, du liège ou de l'aggloméré de liège ». Ce type de solution fut étudié simultanément par les grands pays de la construction aéronautique avant la 2ème guerre et fut appliqué ponctuellement à la conception de certains éléments de structure (Avion Lignel (1938, F), Schneider (1938, F)).

L'extrados de l'aile était constitué d'un sandwich peaux contreplaqué, cœur balsa alors que l'intrados était construit de simples panneaux de contreplaqué. Toutefois, avec le développement des qualités intrinsèques de la construction sandwich, la disponibilité des matériaux, la facilité de leur mise en œuvre, la tolérance aux impacts et la réparation, le choix de la conception a été largement amélioré pour les éléments de structure. L'apparition des fibres de verre tissées et de résines performantes au début des années 50, a permis la fabrication des premiers sandwichs à peaux composites et cœur nid d'abeille. Ils furent, en France, appliqués à des éléments de structures secondaires de l'avion Vautour (1953) : Carénage d'arête dorsale, contre- dérive, radôme.

II.2. Mécanique des composites sandwichs

L'atout des matériaux composites sandwichs est clairement leur légèreté et leur rigidité. Cependant, soumis à diverses sollicitations, les peaux du sandwich doivent résister à des contraintes de traction, de compression, de flambement. L'âme ainsi que l'interface âme/peaux doivent également résister au cisaillement. Les modes de ruptures sont donc variés et dépendent des propriétés mécaniques des peaux et de l'âme. Les principaux modes de ruptures sont présentés à la figure II.1.

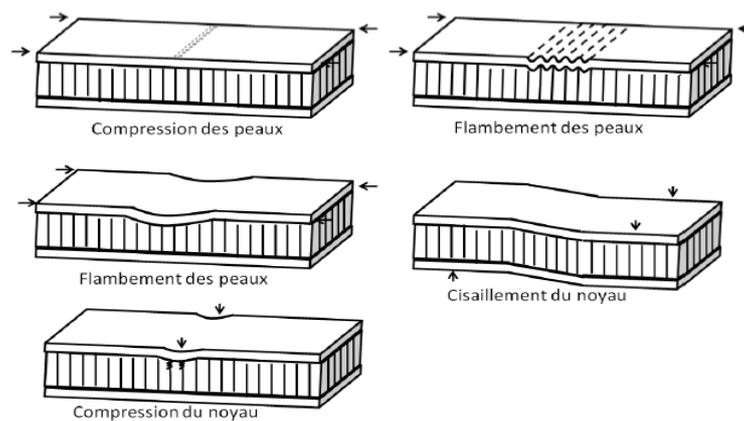


Figure II.1 : Principaux modes de ruptures des structures sandwichs avec âme en nid d'abeille [Sola, 2011].

Des cartes de prévision de ces ruptures existent pour les âmes en mousses et en nid d'abeille pour différents types de chargement. La Figure II.2 donne les différents modes de rupture d'un matériau composite sandwich avec une âme en nid d'abeille soumise à un chargement en flexion 3 points. La figure présente le rapport de la densité de l'âme ρ_n sur

celle de son matériau ρm en fonction de l'épaisseur de l'âme. Elle est spécifique au cas d'un rapport [Sola, 2011].

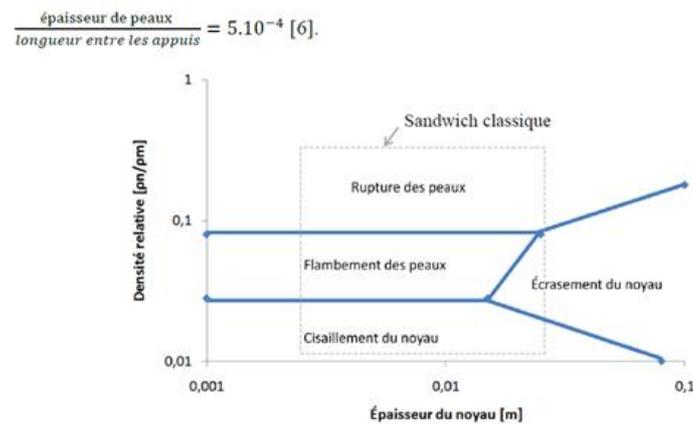


Figure II.2 : Cartographie des modes d'endommagement d'une poutre sandwich avec âme en nid d'abeille en flexion 3 points [Sola (2011)]

II.3. Résumé des diverses théories des poutres

Les théories des poutres sur lesquelles repose le modèle analytique développé datent des années 1920. Le problème des poutres vibrant transversalement s'exprime par une équation différentielle partielle du mouvement, en tenant compte des forces extérieures, des conditions aux limites et des conditions initiales. Comme relaté par [Han et al. (1999)], de très nombreux auteurs se sont efforcés de comprendre et développer la solution de ce problème non-homogène. Voici un bref historique.

Jacob Bernoulli (1654-1705) fut le premier à découvrir que la courbure d'une poutre élastique est proportionnelle au moment fléchissant. Par la suite, et durant de nombreuses années, les chercheurs s'accordèrent sur le fait que cet effet de flexion était le paramètre prédominant de la vibration transversale des poutres. Le modèle d'Euler-Bernoulli voit le jour au 18ème siècle avec Daniel Bernoulli (1700-1782) qui formula pour la première fois l'équation différentielle de mouvement d'une poutre. Ce modèle inclut l'énergie de déformation par flexion et l'énergie cinétique due au déplacement latéral. Euler y apporta de nombreuses améliorations par ses travaux sur l'élasticité [Timoshenko (1921)]. Aussi appelée théorie classique des poutres, le modèle d'Euler-Bernoulli reste le plus commun de par sa simplicité et fournit des approximations acceptables à de nombreux problèmes d'ingénierie. Cependant, il tend à légèrement surestimer les fréquences naturelles et se limite, pour l'essentiel, au cas des poutres minces.

En 1877, la théorie de Rayleigh introduit les effets de rotation de la section transversale au modèle. Cet ajout corrige partiellement la surestimation des fréquences naturelles, mais pas complètement. Parallèlement, le modèle de cisaillement « Shear Model » ajoute l'effet de l'angle de cisaillement au modèle d'Euler-Bernoulli et améliore de façon considérable l'évaluation des fréquences naturelles.

Il faut attendre 1921 pour que Timoshenko réunisse le tout en proposant une théorie incluant les effets de cisaillement et de rotation au modèle d'Euler-Bernoulli [Timoshenko(1921), (1922)]. Il apporte ainsi une amélioration majeure pour les poutres épaisses et les réponses en hautes fréquences pour lesquelles les effets de cisaillement et de rotation ne sont pas négligeables. De là, de nombreux auteurs ont développé les équations de fréquence et les modes pour différentes conditions aux limites [Huang (1961)]. Un paramètre important de ce nouveau modèle est le facteur de forme, également appelé coefficient de cisaillement. Celui-ci provient du fait que le cisaillement n'est pas constant le long de la section transversale et dépend du coefficient de Poisson, de la fréquence et de la forme de la section. Cependant, à des fins de simplification de calcul, la dépendance en fréquence est souvent ignorée. Mindlin et Deresiewicz (1953) donnent une formulation du facteur de forme comme fonction du coefficient de Poisson et de la forme de la section. Les Tableau II.1 et Tableau II.2 résument les améliorations apportées au modèle d'Euler-Bernoulli. Le tableau II.1 présente les erreurs commises sur l'estimation des fréquences (Données non vérifiables). Le tableau II.2 donne les effets considérés ou non par chacune des théories. Bien qu'il existe différents travaux sur des nouvelles théories, les modèles d'Euler-Bernoulli et de Timoshenko restent les plus usités.

Tableau. II.1 : Pourcentage d'erreur par rapport aux données expérimentales de tests sur poutres homogènes.

Modèles de poutre	Première fréquence naturelle	Deuxième fréquence naturelle
Euler-Bernoulli	+14% à +26% + 1	+78% à +133%
Cisaillement	0% à +3%	-1% à +6%
Timoshenko	-1% à +2%	-1% à +6%

Tableau II.2 : Comparaison des quatre théories.

Modèles de poutre	Moment de flexion	Déplacement latéral	Déformation cisaillement	Inertie de rotation
Euler Bernoulli	✓	✓		
Rayleigh	✓	✓		✓
Cisaillement	✓	✓	✓	
Timoshenko	✓	✓	✓	✓

II.3.1. Modèle d'Euler Bernoulli (Classical Beam Theory: CBT)

Il est bien connu que la théorie d'Euler-Bernoulli est basée sur la théorie élémentaire de flexion des poutres qui ne tient pas compte des effets de la déformation de cisaillement. Il est également connu qu'elle n'est applicable qu'aux poutres fines.

Dans cette approche, le nombre d'équations ne dépend pas du nombre de couches puisque la poutre multicouche est homogénéisée, donc considérée comme une seule couche. Comme hypothèse de cette théorie, les déformations dues au cisaillement transversal sont négligées (pas de cisaillement sur la hauteur de la poutre), La section reste perpendiculaire à la ligne moyenne de la poutre et la section reste plane.

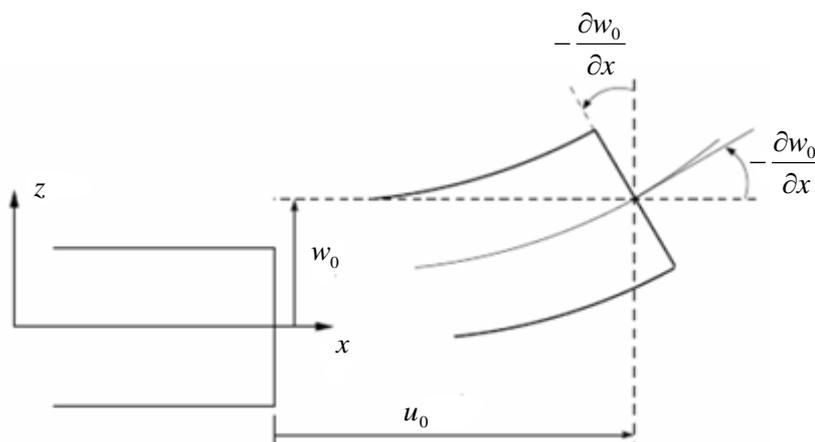


Figure II.3 : Illustration du modèle de la poutre d'Euler-Bernoulli (CBT), [Reddy (2004)].

La fonction qui décrit la répartition de déplacement suivant l'épaisseur de la poutre est :

$$f(z) = 0 \quad (\text{II.1})$$

Pour le cas des poutres élancées et d'après la théorie classique des poutres (CBT), le déplacement d'un point M est donné par les deux composantes suivantes :

$$U(M) = \begin{cases} u(x, z) = u_0(x) - z \frac{\partial w_0(x)}{\partial x} \\ v(x, z) = 0 \\ w(x, z) = w_0(x) \end{cases} \quad (\text{II.2})$$

$u(x, z)$ Représente le déplacement suivant la direction x

$w(x, z)$ Représente le déplacement dans la direction de z ou bien la flèche.

Ainsi u_0, w_0 sont les composantes du champ de déplacement à la surface moyenne de la poutre ($z = 0$).

L'effet de cisaillement transversal n'est pas pris en compte dans cette méthode, de ce fait les résultats pour les poutres épaisses seront surestime et inexacts. Toutefois, quand cette théorie est utilisée pour l'analyse des fréquences naturelles des poutres, les flèches sont sous-estimées. Ceci est la conséquence de la négligence de la déformation transversale. A cet effet survient la théorie de déformation en cisaillement du premier ordre.

II.3.2. Modèle de Timoshenko (First Order-Shear Deformation Beam Theory: FSDBT)

La théorie de Timoshenko est plus riche et plus générale que la théorie élémentaire des poutres au prix d'une fonction supplémentaire. Cette solution permet d'affiner les solutions analytiques issues de la théorie classique. Toutefois ces solutions sont entachées d'erreurs au voisinage des appuis et de la zone indentation où nous pouvons avoir des concentrations de contrainte et des champs de déplacement non homogènes.

Cette théorie s'applique sur des poutres courtes, elle est basée sur le principe ; qu'après déformation, la section plane reste plane mais elle perd sa perpendicularité par rapport à la ligne moyenne de la poutre (figure II.4). Ceci est dû au cisaillement transversal, découvert par Timoshenko, sur l'épaisseur de la poutre. Cette théorie est analogue à la théorie de "Reissner-Mindlin" dans le cas des plaques épaisses [Timoshenko (1922)].

Dans le cas où nous avons un élancement faible, l'effet du cisaillement devient plus important

sur la déformée. Dans ce cas, la fonction $f(z)$ est égale à z . Il existe un cisaillement uniforme et les déformations dues au cisaillement transversal ne sont pas négligées. C'est la théorie de déformation du premier ordre (FSDBT).

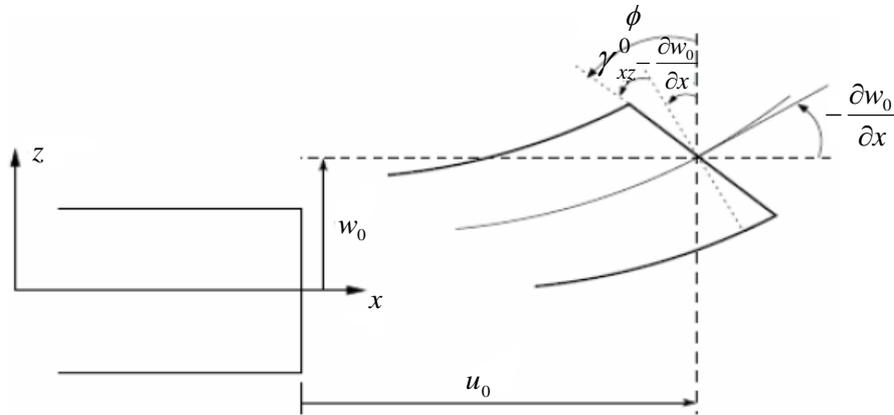


Figure II.4 : Illustration du modèle de Timoshenko [Reddy (2004)].

D'après Timoshenko le déplacement s'écrit comme suit :

$$U(M) = \begin{cases} u(x, z) = u_0(x) - z \frac{\partial w_0(x)}{\partial x} + z \gamma_{xz}^0 \\ v(x, z) = 0, \\ w(x, z) = w_0(x) \end{cases} \quad (II.3)$$

$$U(M) = \begin{cases} u(x, z) = u_0(x) + z \phi(x) \\ v(x, z) = 0, \\ w(x, z) = w_0(x) \end{cases} \quad (II.4)$$

$\gamma_{xz}^0(x)$: C'est la distorsion ou la déformation angulaire mesurée sur la ligne moyenne de la poutre ; tel que :

$$\gamma_{xz}(x) = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \gamma_{xz}^0(x) = \phi(x) - \frac{\partial u_0}{\partial x} \quad (II.5)$$

Sachant que la contrainte de cisaillement est égale :

$$\tau_{xz} = G_{xz} \gamma_{xz} \quad (II.6)$$

G_{xz} Est le module de cisaillement transversal qui est supposé constant.

Avec cette théorie, les contraintes tangentielles de cisaillement sont constantes et uniformes sur toute l'épaisseur de la poutre ; cela veut dire qu'elles existent même sur les bords supérieurs et inférieurs de la poutre et pourtant il n'y a aucun chargement qui induit le cisaillement. Cette contradiction mène à introduire un coefficient de correction ($K = 5/6$) pour corriger et maintenir les contraintes et les déformations du cisaillement transversales constantes à travers l'épaisseur de la poutre. Ce facteur a été calculé pour la variété de sections de poutres par (Mindlin et Deresiewicz). (Cowper et Murty) ont donné de nouvelles expressions de ce coefficient « K » pour différentes sections de la poutre.

La théorie de Timoshenko est plus riche et plus générale que la théorie élémentaire des poutres au prix d'une fonction supplémentaire. Cette solution permet d'affiner les solutions analytiques issues de la théorie classique.

Le non nullité des contraintes tangentielles sur les bords extrêmes de la poutre et l'introduction des coefficients de correction de cisaillement ont menés d'autres chercheurs à essayer de trouver une autre théorie pouvant tenir compte de ces facteurs ; c'est "la théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé".

II.3.3. Modèle d'ordre élevé (Higher-Order Shear Deformation Beam Theory: HSDBT)

Dans cette théorie la distribution des champs de déplacement est non linéaire selon l'épaisseur de la poutre. Elle est plus précise que la théorie du premier ordre puisqu'elle introduit une fonction qui tient compte du phénomène de "gauchissement". Ce phénomène apparaît lorsque la section transversale de la poutre perd sa planéité (figure II.5). La fonction $f(z)$ représente le gauchissement et sa dérivée est $f'(z)$.

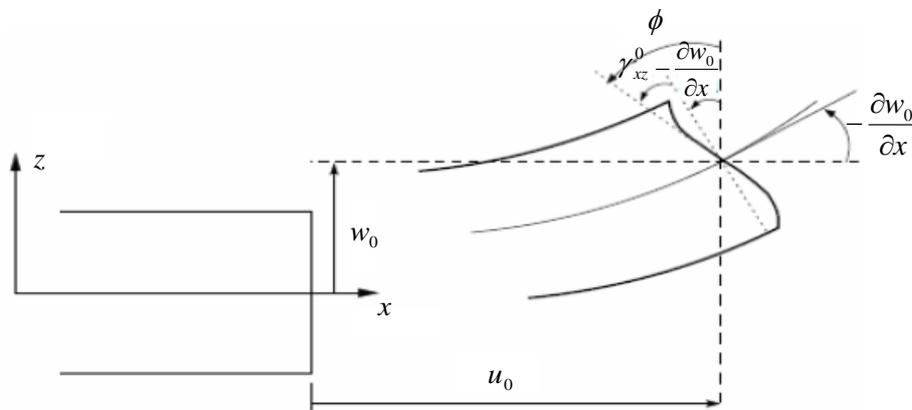


Figure II.5 : Illustration du modèle d'ordre élevé [Reddy (2004)].

Ces théories sont bien adaptées à la modélisation du comportement des plaques ou des poutres épaisses, où la déformation transverse joue un grand rôle. La plupart de ces modèles utilisent un développement en série de Taylor. La précision augmente avec l'ordre de développement.

Le champ de déplacement approché pour le troisième ordre, est de la forme [Lo (1977)] :

$$u_0(x, z) = u_0(x) + z\psi(x) + z^2\xi(x) + z^3\phi(x) \quad (\text{II.7})$$

Pour introduire le phénomène de "gauchissement " il faut modifier le coefficient du terme cubique par une fonction $f(z)$.

Pour réduire la complexité il faut éliminer les termes d'ordre deux dans le développement de déplacement dans l'épaisseur.

Dans ce cas, le champ de déplacement devient :

$$U(M) = \begin{cases} u(x, z) = u_0(x) - z \frac{\partial w_0(x)}{\partial x} + f(z)\phi(x) \\ v(x, z) = 0, \\ w(x, z) = w_0(x) \end{cases} \quad (\text{II.8})$$

$$\gamma_{xz}(x) = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = f'(z)\phi(x) \quad (\text{II.9})$$

Pour que les contraintes tangentielles soient nulles sur les bords extrêmes de la poutre, il faut que la dérivée de la fonction soit :

$$f'(z)|_{z=\pm h/2} = 0 \quad (\text{II.10})$$

C'est la condition qui nous permet d'avoir une répartition parabolique des contraintes de cisaillement sur l'épaisseur de la poutre d'une part et de choisir correctement des fonctions qui répondent à la condition (II.10).

Selon l'expression de la frontière de cisaillement $f(z)$, quelques modèles d'ordre supérieur se sont distingués dans la littérature. Nous citons en particulier :

- L'approche de [Ambartsumyan (1969)] :

$$f(z) = \frac{z}{2} \left(\frac{h^2}{4} - \frac{z^2}{3} \right) \quad (\text{II.11})$$

- L'approche de [Reissner (1945)] :

$$f(z) = \frac{5}{4} z \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right) \quad (\text{II.12})$$

- L'approche de [Aydogdu (2005)] :

$$f(z) = z \alpha^{\frac{-2z^2}{2h^2 \ln \alpha}} \quad (\text{II.13})$$

- L'approche déformation en cisaillement du troisième ordre (TSDT) (Reddy 1984) :

$$f(z) = z \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right) \quad (\text{II.14})$$

Dans le modèle de [Reddy (1984), (2004)], le champ de déplacement membranaire est cubique et le déplacement normal w est constant. Ce modèle donne une bonne approximation pour les contraintes de cisaillement transverse par rapport à la solution élastique tridimensionnelle. La distribution des contraintes de cisaillement transversal est parabolique dans l'épaisseur. Les conditions aux limites sur les surfaces libres sont satisfaites.

La TSDT, qui suppose que la contrainte de cisaillement transversal est approchée par une forme quadratique dans l'épaisseur de la poutre, a été largement utilisée pour analyser les comportements des plaques FGMs [Reddy (2000), Cheng et al. (2000)].

- L'approche de déformation en cisaillement trigonométrique (TSDT) de [Touratier (1991)] :
Ce modèle a été également utilisé pour étudier le comportement des structures FGMs [Zenkour (2013), (2015)]. Comme pour la TSDT, pas de facteurs de correction de cisaillement transversal utilisés dans cette théorie :

$$f(z) = \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{z}{h}\right) \quad (\text{II.15})$$

Touratier propose le modèle "sinus" qui est différent des autres modèles d'ordre supérieur puisqu'il n'utilise pas de fonction polynomiale. Une fonction trigonométrique sinusoïdale est

donc introduite pour modéliser la répartition des contraintes de cisaillement dans l'épaisseur.

La fonction de cisaillement transverse s'écrit comme ci-dessous :

$$f(z) = \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{z}{h}\right) = \frac{h}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)} \left(\frac{\pi z}{h}\right)^{2n+1} = z \left(1 - \frac{\pi^2}{3} \frac{z^2}{h^2} + \frac{\pi^4}{5} \frac{z^4}{h^4} - \frac{\pi^6}{7} \frac{z^6}{h^6} + \dots\right) \quad (\text{II.16})$$

Les contraintes de cisaillement transversal déterminées par le modèle "sinus" prennent une forme sinusoïdale dans l'épaisseur de la plaque. La précision de ce modèle par rapport à la solution exacte est meilleure que la théorie de Reddy.

La version exponentielle de la théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé (ESDPT) développée par Karama et al. (2003) est obtenue en prenant :

$$f(z) = z e^{\frac{-2z^2}{h^2}} \quad (\text{II.17})$$

Le choix de la fonction exponentielle permet un développement en puissance pair et impair de la variable z , alors que la fonction (sinus) de [Touratier (1991)] ne permet qu'un développement en puissance impair.

Malgré le fait que les modèles d'ordre élevé assurent une continuité de déplacement et de déformation à l'interface, les contraintes de cisaillement Inter-laminaire et les contraintes d'interface, restent discontinues. Ceci présente un inconvénient lors de l'analyse locale de l'interface des structures multicouches dont les propriétés des couches sont très différentes.

La fonction de la théorie des déformations en cisaillement hyperbolique à ordre élevé de Soldatos (1992) est donnée comme :

$$f(z) = h \sinh\left(\frac{z}{h}\right) - z \cosh\left(\frac{1}{2}\right) \quad (\text{II.18})$$

La théorie de cisaillement hyperbolique (HySDT), qui suppose que la contrainte de cisaillement transversal est approchée par une forme hyperbolique dans l'épaisseur de la poutre, a été proposée par Soldatos (1992). Elle ne nécessite pas de facteurs de correction de cisaillement. Cette théorie a été largement utilisée pour analyser les comportements des plaques FGMs [Cheng et al. (2000)].

- La fonction d'Akavci et al. (2010) :

$$f(z) = \frac{3\pi}{2} h \tanh\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{3\pi}{2} z \operatorname{sech}^2\left(\frac{1}{2}\right) \quad (\text{II.19})$$

- La fonction de Grover et al. (2013) :

$$f(z) = \sinh^{-1}\left(\frac{rz}{h}\right) - z \frac{2r}{h\sqrt{r^2+4}}, r=3 \quad (\text{II.20})$$

La théorie de déformation en cisaillement sinusoïdale (SSDT) proposée par Zenkour (2006) est obtenue par :

$$f(z) = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)-1} z - \frac{h \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)-1} \quad (\text{II.21})$$

Dans une récente recherche, une autre forme de la théorie de cisaillement hyperbolique a été utilisée par Mahi et al. (2015) :

$$f(z) = \frac{h}{2} \tanh\left(\frac{2z}{h}\right) - \frac{4z^3}{3h^2 \cosh^2(1)} \quad (\text{II.22})$$

II.3.4. Théorie de déformation des plaques quasi-3D

Dans ce type de théorie quasi-3D le déplacement transversal est scindé en trois constituantes qui sont la flexion, le cisaillement et l'effet de l'étirement de l'épaisseur de la plaque en anglais «stretching effect». Plusieurs chercheurs ont travaillé dans ce type de théorie tel que Thai et Kim (2011) qui avait proposé une théorie à cinq variables pour la déformation au cisaillement de premier ordre au lieu des théories d'ordre élevé à six variables, d'autres chercheurs ont proposé par le biais de plusieurs fonctions des théories quasi-3D à cinq variables tel que [Mantari (2014), Benchohra (2018)].

Des théories quasi-3D à quatre variables en vue de ces jours est cela grâce à l'introduction de nouvelles hypothèses pour les théories quasi-3D à six inconnues suivant les travaux de Zenkour qui a développé une nouvelle théorie quasi-3D à quatre inconnues pour différents

types de plaques: FGM [Zenkour (2013)], et pour les plaques composites stratifiées [Zenkour (2015)], il y a aussi Mantari et Guedes Soares (2014) qui ont développé une théorie quasi -3D à quatre inconnues en combinant à l'aide d'une fonction hyperbolique l'effet de cisaillement et l'effet de l'étirement du déplacement transversal. De ce fait le champ de déplacement dans cette théorie est présenté comme suit :

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w_b}{\partial x} - f(z) \frac{\partial w_s}{\partial x} \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z \frac{\partial w_b}{\partial y} - f(z) \frac{\partial w_s}{\partial y} \\ w(x, y, z) &= w_b(x, y) + w_s(x, y) + g(z) \varphi(x, y) \end{aligned} \quad (\text{II.23})$$

Où $w_b(x, y)$ et $w_s(x, y)$ représentent les composantes du champ de déplacement dans les directions x et y . Cependant, $\varphi(x, y)$ est un déplacement supplémentaire qui prend en considération l'effet d'étirement et $g(z)$ est la dérivée de la fonction de cisaillement transverse définie comme suit :

$$g(z) = 1 - \frac{\partial f(z)}{\partial z} \quad (\text{II.24})$$

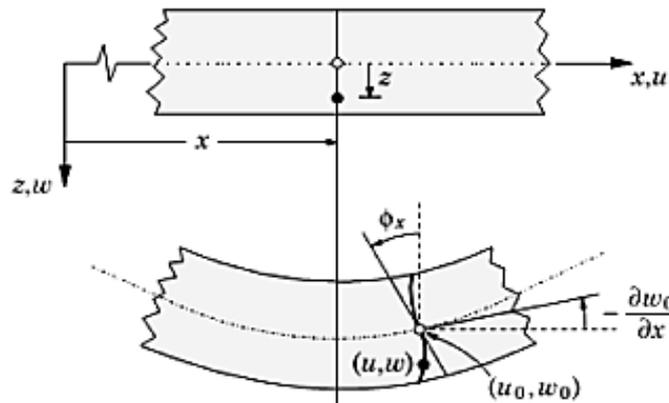


Figure II.6 : Cinématique d'une poutre d'ordre élevé.

II.9. Conclusion

Dans cette partie de la mémoire ; nous avons présenté des différents types des théories des poutres telles que la théorie classique (CBT), la théorie de cisaillement du premier ordre (FSDBT) et les théories d'ordre élevé HSDBT (PSDBT, SSDBT, ESDBT).

On a présenté les différents modèles des poutres avec une approche monocouche. Le modèle monocouche équivalent est mieux adaptée pour les matériaux FGM car il n'y a pas de changement brusque dans les caractéristiques mécaniques contrairement aux composites conventionnels ou le délaminage est un problème à ne pas écarter.

CHAPITR III

Analyse du comportement mécanique des poutres FG

Chapitre III

Analyse du comportement mécanique des poutres FG

III.1. Introduction

Les matériaux à gradient fonctionnel ce sont une nouvelle classe des composites avancés qui possède des propriétés matérielles variantes d'une surface à une autre de façon à éliminer la concentration des contraintes trouvées dans les composites conventionnels, tels que les stratifiés, ils sont caractérisés par une évolution continue ou discontinue d'une propriété physique du matériau dans une direction ou plus de l'espace ; cette variation de comportement est induite par une modification de composition chimique de microstructure « taille et morphologie de grains, fraction volumique et morphologie de phases » d'architecture et ou de l'état de contraintes résiduelles.

Les propriétés qui sont souvent mesurées sont les grandeurs électriques, thermiques « coefficient d'expansion thermique, pouvoir isolant,... etc. » magnétiques et mécaniques. Les systèmes à gradient de propriétés peuvent être souhaités en vue d'améliorer certaines propriétés d'un substrat par exemple (FGM : Functionally Graded Materials), ou être subis, lors d'une dégradation surfacique en service « oxydation corrosion, écrouissage, etc. » les systèmes à gradient de propriétés sont nombreux et conviennent à de nombreuses applications dans une conception très efficace et légère.

Ce chapitre représente une approche analytique pour analyser le comportement mécanique « flexion, flambement et vibration » des poutres sandwich constituées par des matériaux composites avancés, avec la proposition d'une simple théorie de déformation en cisaillement qui se base sur un nouveau champ de déplacement avec seulement trois variables, en introduisant une composante intégrale indéterminée, ce qui permet d'assurer la distribution hyperbolique des contraintes de cisaillement à travers l'épaisseur de la poutre sans avoir recourt à un éventuel facteur de correction de cisaillement. En appliquant le principe d'Hamilton, les équations de mouvement et les conditions aux limites sont obtenues pour résoudre les problèmes statiques et dynamiques des poutres simplement appuyées et en assurant les conditions des contraintes de cisaillement nulles dans les faces supérieures et inférieures de la poutre FG. Cette étude peut toutefois présenter des avantages remarquables dans les applications aérospatiales, l'automobile, la marine et les infrastructures civiles.

III.2. Modèle d'une poutre sandwich FG

III.2.1. Configuration géométrique

Considérons une poutre sandwich avec des peaux (couches extérieures) en matériaux à gradient fonctionnel et un noyau isotrope (couche centrale). La poutre a une longueur L , une largeur b et une épaisseur h ; elle est constituée d'un matériau FG-métal-FG, comme indiqué sur la figure III.1. La poutre occupe la région $0 \leq x \leq L, -b/2 \leq y \leq b/2, -h/2 \leq z \leq h/2$ dans les systèmes de coordonnées cartésiennes. L'axe x coïncide avec l'axe neutre de la poutre et l'origine est au niveau du support gauche. L'axe z est supposé positif vers le haut. On suppose que la poutre est déformée dans le plan $x-z$ uniquement.

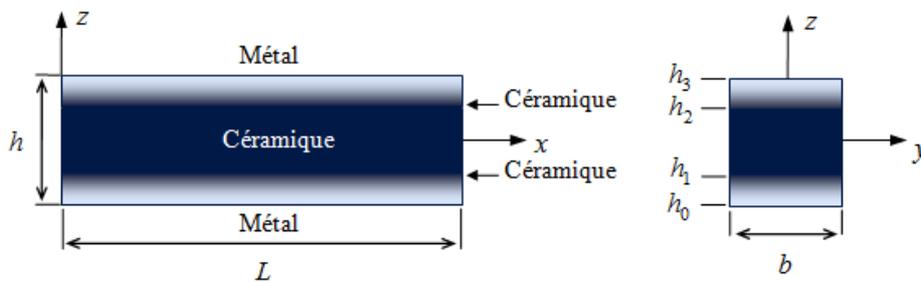


Figure III.1 : Géométrie d'une poutre sandwich FG.

III.2.2. Propriétés du matériau

Les couches extérieures sont composées d'un mélange de composants céramique et métal, dont on considère que les propriétés matérielles changent selon la loi de puissance pour la gradation des matériaux introduite par Wakashima et al. (1990) qui est largement utilisée par de nombreux chercheurs pour la gradation des propriétés. Cette loi suit la règle linéaire du mélange et les propriétés varient selon les dimensions de la poutre FG.

$$\begin{aligned} E^{(n)}(z) &= (E_c - E_m)V^{(n)}(z) + E_m \\ \rho^{(n)}(z) &= (\rho_c - \rho_m)V^{(n)}(z) + \rho_m \end{aligned} \quad (\text{III.1})$$

Où E représente le module d'élasticité et ρ la densité du matériau; les indices c et m désignent les propriétés associées de la céramique et du métal, respectivement. Ainsi $n = 1, 2, 3$ désigne le nombre de couches de la poutre sandwich FG en commençant par la couche inférieure, centrale et supérieure, respectivement. Il convient de noter que le coefficient de Poisson ν est

supposé être constant dans cette étude. La fraction volumique du constituant de la poutre sandwich FG liée à la fonction de loi de puissance peut être exprimée comme suit :

$$\begin{aligned}
 \text{Couche inférieure FG :} \quad & V^{(1)}(z) = \left(\frac{z - h_0}{h_1 - h_0} \right)^p \quad \text{for } z \in [h_0, h_1] \\
 \text{Couche central isotrope:} \quad & V^{(2)}(z) = 1 \quad \text{for } z \in [h_1, h_2] \\
 \text{Couche supérieure FG :} \quad & V^{(3)}(z) = \left(\frac{z - h_3}{h_2 - h_3} \right)^p \quad \text{for } z \in [h_2, h_3]
 \end{aligned} \tag{III.2}$$

La variation du module d'élasticité $E(z)$ à travers l'épaisseur z/h de la poutre pour les différentes valeurs de l'indice de loi de puissance p est illustrée à la figure III.2.

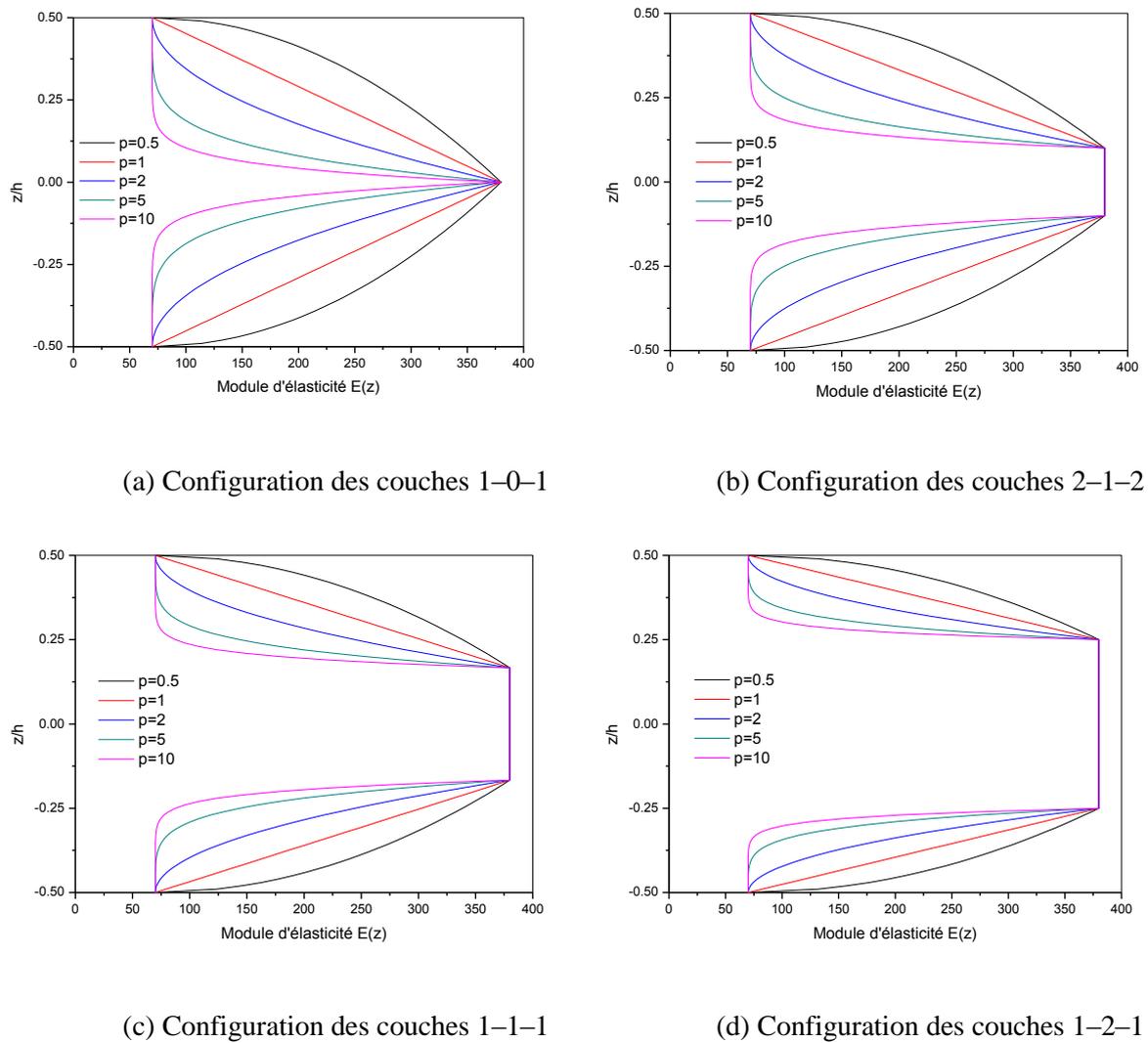


Figure III.2 : Variation du module d'élasticité à travers l'épaisseur des poutres sandwich FG pour différents rapports d'épaisseur peau-noyau-peau.

III.2.3. Hypothèses de la présente théorie

La théorie proposée reconnaît que la déformation normale et en cisaillement joue un rôle important dans la prédiction du comportement structural précis des poutres sandwich constituées de matériaux à gradient fonctionnel. Par conséquent, la formulation mathématique de la présente théorie d'ordre élevé est basée sur les hypothèses cinématiques suivantes :

1. Le déplacement axial dans la direction x est exprimé en termes de composantes d'extension, de flexion et de cisaillement.
2. Le déplacement transversal dans la direction z est constitué d'une seule composante de déformation en flexion.
3. La théorie comprend seulement trois variables inconnues indépendantes.
4. La théorie assure une distribution hyperbolique de la contrainte de cisaillement transversal à travers l'épaisseur de la poutre sandwich et satisfait les conditions aux limites sans avoir besoin d'un facteur de correction de cisaillement.
5. La théorie des poutres proposée est capable d'analyser les poutres isotropes et composites au moyen d'un modèle cinématique unifié.
6. Les effets de déformation normale transversale ($\varepsilon_z = 0$) sont négligés.
7. Comme il n'y a pas de mouvement relatif dans la direction y en tout point de la section transversale de la poutre, la loi de Hooke unidimensionnelle est utilisée pour obtenir les contraintes.

III.3. Formulation théorique

III.3.1. Champs de déplacement

Sur la base des hypothèses formulées dans la section précédente, le nouveau champ de déplacement proposé pour l'étude du comportement mécanique des plaques sandwich FG en utilisant la présente théorie de déformation en cisaillement hyperbolique peut s'exprimer sous une forme plus simple comme :

$$\begin{aligned} u(x, z, t) &= w_0(x, t) - z \frac{\partial w_0(x, t)}{\partial x} + k_1 f(z) \int \theta(x, t) dx \\ w(x, z, t) &= w_0(x, t) \end{aligned} \quad (\text{III.3})$$

Où u_0, w_0 sont les composantes du déplacement en un point arbitraire du plan médian de la poutre sandwich FG dans les directions x et z , respectivement. $\theta(x)$ Est la rotation d'une section transversale de la poutre au plan médian résultant du cisaillement transversal.

L'intégrale est maintenue indéterminée et la constante k_1 est choisie en fonction de la géométrie. Dans cette étude, nous adoptons la fonction de forme de cisaillement hyperbolique non polynomiale sous la forme :

$$f(z) = h \sinh\left(\frac{z}{h}\right) - \frac{4z^3}{3h^2} \cosh\left(\frac{1}{2}\right), \quad g(z) = \frac{\partial f(z)}{\partial z} \quad (\text{III.4})$$

III.3.2. Champs de déformation

En utilisant les relations linéaires déformation-déplacement basées sur la théorie de l'élasticité, les composantes de déformation normale et de cisaillement peuvent être écrites comme suit :

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \quad (\text{III.5})$$

Où $\varepsilon_x, \varepsilon_z, \gamma_{xz}$ représentent les composantes de déformation en cisaillement normal et transversal. En substituant les formules des déplacements considérés par l'équation (III.3) dans les relations données par l'équation (III.5), on obtient les équations de déformation-déplacement en tout point du système de poutre, à savoir :

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \varepsilon_x^0 + z\varepsilon_x^1 + f(z)\varepsilon_x^2 \\ \gamma_{xz} &= g(z)\gamma_{xz}^0 \end{aligned} \quad (\text{III.6})$$

Avec :

$$\begin{aligned} \varepsilon_x^0 &= \frac{\partial u_0}{\partial x}, \quad \varepsilon_x^1 = -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}, \quad \varepsilon_x^2 = k_1 \theta \\ \gamma_{xz}^0 &= k_1 \int \theta dx \end{aligned} \quad (\text{III.7})$$

Le terme d'intégrale peut être exprimé sous une autre forme, dans notre cas on utilise la méthode de Navier, soit :

$$\int \theta dx = A' \frac{\partial \theta}{\partial x} \quad (\text{III.8})$$

Où les paramètres A' et k_1 sont définis en fonction du type de solution employée, dans ce cas à travers la solution de Navier. Par conséquent, ils sont exprimés par :

$$A' = -\frac{1}{\alpha^2}, \quad k_1 = \alpha^2 \quad (\text{III.9})$$

Avec α est donnée comme :

$$\alpha = \frac{m\pi}{a} \quad (\text{III.10})$$

III.3.3. Relations constitutives

Les relations constitutives reliant les deux composantes de la contrainte aux deux composantes de la déformation pour chaque couche de la poutre sandwich FG; peuvent être déterminées au moyen de la loi de Hooke généralisée.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix}^{(n)} \begin{bmatrix} Q_{11}(z) & 0 \\ 0 & Q_{55}(z) \end{bmatrix}^{(n)} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix}^{(n)} \quad (\text{III.11})$$

Avec σ_x, τ_{xz} et $\varepsilon_x, \gamma_{xz}$ sont respectivement les contraintes et les déformations. Les constantes de rigidité élastique Q_{ij} peuvent être exprimées par les termes suivants :

$$Q_{11}(z) = E(z), \quad Q_{55}(z) = \frac{E(z)}{2(1+\nu)} \quad (\text{III.12})$$

III.3.4. Equations de mouvement

Afin de dériver les équations du mouvement de la présente théorie hyperbolique de déformation en cisaillement pour une poutre sandwich FG, le principe d'Hamilton est employé sous la forme analytique suivante :

$$\int_0^T (\delta U + \delta V - \delta K) dt = 0 \quad (\text{III.13})$$

Avec :

δU : La variation de l'énergie de déformation de la poutre,

δK : La variation de l'énergie cinétique de la poutre,

δV : La variation du travail externe due à une charge axiale ou transversale.

▪ Variation de l'énergie de déformation

La variation de l'énergie de déformation de la poutre est définie par la relation suivante :

$$\begin{aligned} \delta U &= \int_0^L \int_{-b/2}^{b/2} \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz}) dz dy dx = \int_0^L (N_x \delta \varepsilon_x^0 + M_x^b \delta \varepsilon_x^1 + M_x^s \delta \varepsilon_x^2 + Q_{xz} \delta \gamma_{xz}^0) dx \\ &= \int_0^L \left(N_x \frac{\partial \delta u_0}{\partial x} - M_x^b \frac{\partial^2 \delta w_0}{\partial x^2} + k_1 A' M_x^s \frac{\partial^2 \delta \theta}{\partial x^2} - k_1 A' Q_{xz} \frac{\partial \delta \theta}{\partial x} \right) dx \end{aligned} \quad (\text{III.14})$$

Les exposants (b) et (s) sont les résultantes de moment analogues à la théorie classique des poutres et les résultantes de moment dues à la déformation de cisaillement, respectivement. Tandis que $N_x, M_x^b, M_x^s, Q_{xz}$ sont les résultantes de contrainte liées à la présente théorie des poutres qui peuvent être obtenues par les intégrations suivantes :

$$\begin{aligned} N_x &= \sum_{n=1}^3 \int_{h_n}^{h_{n+1}} b \sigma_x^{(n)} dz, & M_x^b &= \sum_{n=1}^3 \int_{h_n}^{h_{n+1}} b \sigma_x^{(n)} z dz, \\ M_x^s &= \sum_{n=1}^3 \int_{h_n}^{h_{n+1}} b \sigma_x^{(n)} f(z) dz, & Q_{xz} &= \sum_{n=1}^3 \int_{h_n}^{h_{n+1}} b \tau_{xz}^{(n)} g(z) dz \end{aligned} \quad (\text{III.15})$$

En substituant les relations des équations. (III.6) et (III.11) dans l'équation. (III.15), les résultantes de contraintes du modèle proposé peuvent être obtenues en termes de déformations par les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} N_x &= A_{11} \varepsilon_x^0 + B_{11} \varepsilon_x^1 + E_{11} \varepsilon_x^2, \\ M_x^b &= B_{11} \varepsilon_x^0 + D_{11} \varepsilon_x^1 + F_{11} \varepsilon_x^2, \\ M_x^s &= E_{11} \varepsilon_x^0 + F_{11} \varepsilon_x^1 + H_{11} \varepsilon_x^2, \\ Q_{xz} &= A_{55}^s \gamma_{xz}^0 \end{aligned} \quad (\text{III.16})$$

Où $A_{11}, B_{11}, D_{11}, E_{11}, F_{11}, H_{11}$, et A_{55}^s , sont les composantes de rigidité de la poutre données par :

$$\begin{aligned} (A_{11}, B_{11}, D_{11}, E_{11}, F_{11}, H_{11}) &= \sum_{n=1}^3 \int_{h_{n-1}}^{h_n} b E^{(n)}(z) (1, z, z^2, f(z), z f(z), f^2(z)) dz, \\ A_{55}^s &= \sum_{n=1}^3 \int_{h_{n-1}}^{h_n} b \frac{E^{(n)}(z)}{2(1+\nu)} g^2(z) dz \end{aligned} \quad (\text{III.17})$$

▪ Variation du travail externe

La variation de travail due à des charges axiale et transversale peut être écrite comme suit :

$$\delta V = - \int_0^L \left(q \delta w + N_x^0 \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \delta w}{\partial x} \right) dx \quad (\text{III.18})$$

▪ Variation de l'énergie cinétique

La variation de l'énergie cinétique de la poutre peut être écrite comme :

$$\begin{aligned}
\delta K &= \int_0^L \int_{-b/2}^{b/2} \left[\sum_{n=1}^3 \int_{h_n}^{h_{n+1}} \rho^{(n)}(z) \left(\frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial \delta u}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial t} \frac{\partial \delta w}{\partial t} \right) dz \right] dx dy \\
&= \int_0^L \left[\begin{aligned} &I_0 \left(\frac{\partial u_0}{\partial t} \frac{\partial \delta u_0}{\partial t} + \frac{\partial w_0}{\partial t} \frac{\partial \delta w_0}{\partial t} \right) - I_1 \left(\frac{\partial u_0}{\partial t} \frac{\partial^2 \delta w_0}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial t} \frac{\partial \delta u_0}{\partial t} \right) \\ &+ I_2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial t} \frac{\partial^2 \delta w_0}{\partial x \partial t} + I_3 k_1 A' \left(\frac{\partial u_0}{\partial t} \frac{\partial^2 \delta \theta}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial t} \frac{\partial \delta u_0}{\partial t} \right) \\ &- I_4 k_1 A' \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial t} \frac{\partial^2 \delta \theta}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial t} \frac{\partial^2 \delta w_0}{\partial x \partial t} \right) + I_5 (k_1 A')^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial t} \frac{\partial^2 \delta \theta}{\partial x \partial t} \end{aligned} \right] dx \quad (III.19)
\end{aligned}$$

Où $\rho(z)$ est la masse volumique et $(I_i, i = 0, \dots, 5)$ sont les inerties de masse exprimées par les relations suivantes :

$$(I_0, I_1, I_2, I_3, I_4, I_5) = \sum_{n=1}^3 \int_{h_n}^{h_{n+1}} b \rho^{(n)}(z) (1, z, z^2, f(z), z f(z), f^2(z)) dz \quad (III.20)$$

En remplaçant les équations (III.14), (III.18) et (III.19) dans l'Equation (III.13) et en intégrant par parties, puis collectant les coefficients δu_0 , δw_0 et $\delta \theta$, on obtient les trois équations de mouvement de la poutre :

$$\begin{aligned}
\delta u_0 : \quad \frac{\partial N_x}{\partial x} &= I_0 \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} - I_1 \frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial t^2} + k_1 A' I_3 \frac{\partial^3 \theta}{\partial x \partial t^2} \\
\delta w_0 : \quad \frac{\partial^2 M_x^b}{\partial x^2} + q + N_x^0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} &= I_0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} + I_1 \frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial t^2} - I_2 \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4 \partial t^2} + I_4 k_1 A' \frac{\partial^4 \theta}{\partial x^4 \partial t^2} \\
\delta \theta : \quad -k_1 A' \frac{\partial^2 M_x^s}{\partial x^2} + k_1 A' \frac{\partial Q_{xz}}{\partial x} &= -I_3 k_1 A' \frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial t^2} + I_4 k_1 A' \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4 \partial t^2} - I_5 (k_1 A')^2 \frac{\partial^4 \theta}{\partial x^4 \partial t^2}
\end{aligned} \quad (III.21)$$

En substituant les équations (III.7) et (III.16) dans l'équation (III.21), les équations de mouvement de la présente théorie de déformation peuvent être exprimées en termes de déplacements δu_0 , δw_0 et $\delta \theta$:

$$\begin{aligned}
\delta u_0 : \quad A_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} - B_{11} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} + k_1 A' E_{11} \frac{\partial^3 \theta}{\partial x^3} &= I_0 \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} - I_1 \frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial t^2} + k_1 A' I_3 \frac{\partial^3 \theta}{\partial x \partial t^2} \\
\delta w_0 : \quad B_{11} \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} - D_{11} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} + k_1 A' F_{11} \frac{\partial^4 \theta}{\partial x^4} + q + N_x^0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} &= I_0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} + I_1 \frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial t^2} \\ &- I_2 \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4 \partial t^2} + I_4 k_1 A' \frac{\partial^4 \theta}{\partial x^4 \partial t^2} \\
\delta \theta : \quad -k_1 A' E_{11} \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} + F_{11} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} - k_1 A' H_{11} \frac{\partial^4 \theta}{\partial x^4} + (k_1 A')^2 A_{55}^s \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} &= -I_3 k_1 A' \frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial t^2} \\ &+ I_4 k_1 A' \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4 \partial t^2} - I_5 (k_1 A')^2 \frac{\partial^4 \theta}{\partial x^4 \partial t^2}
\end{aligned} \quad (III.22)$$

III.3.5. Solutions analytiques des poutres sandwichs FG

L'approche de Navier est utilisée pour déterminer les solutions analytiques de la réponse statique et dynamique des poutres sandwich fonctionnellement graduées simplement appuyées. Les fonctions des déplacements sont présentées comme des coefficients et des fonctions trigonométriques connues pour satisfaire les équations de mouvement ainsi que les conditions aux limites.

Les conditions aux limites prises en charge pour les poutres simplement appuyées sur les bords, sont données par :

$$w_0 = N_x = M_x^b = M_x^s = 0 \text{ Sur les bords } x = 0 \text{ et } x = L \quad (\text{III.23})$$

Nous notons ici que pour le cas de l'étude du flambement, l'effort résultant N_x est différent à zéro. Les variables inconnus de déplacement qui satisfont automatiquement aux conditions aux limites de l'équation (III.22) peuvent être exprimés sous la forme trigonométrique de la série de Fourier suivante :

$$\begin{Bmatrix} u_0 \\ w_0 \\ \theta \end{Bmatrix} = \sum_{m=1}^{\infty} \begin{Bmatrix} U_m \cos(\alpha x) \\ W_m \sin(\alpha x) \\ \Theta_m \sin(\alpha x) \end{Bmatrix} \quad (\text{III.24})$$

Où U_m, W_m et Φ_m sont les variables inconnus qu'il faut déterminer pour chaque valeur m . La fréquence des vibrations libres de la plaque est ω , tandis que l'unité imaginaire est $\sqrt{i} = -1$. La charge transversale uniforme q agissant sur la surface supérieure de la poutre est supposée être de la forme :

$$q(x) = \sum_{m=1,3,5}^{\infty} \frac{4q_0}{m\pi} \sin(\alpha x) \quad (\text{III.25})$$

Où q_0 est l'intensité maximale de la charge au centre de la longueur. La poutre est soumise à une force de compression axiale N^0 . En substituant les Eqs. (III.24) et (III.25) dans l'équation. (III.22), la solution analytique peut être obtenue à partir des équations suivantes :

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{12} & K_{22} & K_{23} \\ K_{13} & K_{23} & K_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_m \\ W_m \\ \Phi_m \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 4q_0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{III.26})$$

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{12} & K_{22} & K_{23} \\ K_{13} & K_{23} & K_{33} \end{bmatrix} - N^0 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_m \\ W_m \\ \Phi_m \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{III.27})$$

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{12} & K_{22} & K_{23} \\ K_{13} & K_{23} & K_{33} \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{12} & M_{22} & M_{23} \\ M_{13} & M_{23} & M_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_m \\ W_m \\ \Phi_m \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{III.28})$$

Dans cette étude, la solution de l'équation (III.26) permet de calculer les déplacements et les contraintes, la solution de l'équation (III.27) permet de calculer les charges critiques de flambement et la solution de l'équation (III.28) permet de calculer les fréquences propres de vibration libre des poutres sandwich FG simplement appuyées. Toutefois, $[K_{ij}]$ et $[M_{ij}]$ sont les éléments de la matrice de rigidité et les éléments de la matrice masse, respectivement, définis comme suit :

$$\begin{aligned} K_{11} &= \alpha^2 A_{11}, & K_{12} &= -\alpha^3 B_{11}, & K_{13} &= k_1 A' \alpha^3 E_{11}, \\ K_{22} &= \alpha^4 D_{11}, & K_{23} &= -k_1 A' \alpha^4 F_{11}, \\ K_{33} &= k_1^2 A'^2 \alpha^2 (\alpha^2 H_{11} + A_{55}^s) \end{aligned} \quad (\text{III.29})$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} M_{11} &= I_0, & M_{13} &= -\alpha I_1, & M_{13} &= k_1 A' \alpha I_3, \\ M_{22} &= I_0 + I_2 \alpha^2, & M_{23} &= -k_1 A' \alpha^2 I_4, \\ M_{33} &= k_1^2 A'^2 \alpha^2 I_5 \end{aligned} \quad (\text{III.30})$$

III.5. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté une solution pour l'analyse du comportement mécanique des poutres sandwichs en matériaux composites avancés (FGM) pour différents rapports d'épaisseur peau-noyau-peau avec une condition d'appuis simplement appuyée par l'utilisation d'une nouvelle approche d'ordre élevé à trois variables au lieu de quatre ou plus dans le cas des autres théories de déformation en cisaillement. Ce modèle n'exige pas un facteur de correction de cisaillement, elle assure une distribution hyperbolique des contraintes de cisaillement à travers l'épaisseur de la poutre sandwich tout en remplissant les conditions de nullité des contraintes de cisaillement sur les surfaces supérieure et inférieure de la poutre.

Ce travail montre qu'il est possible de déterminer des solutions analytiques en se basant sur la méthode de Navier, et les charges critiques de flambement, les déplacements, les contraintes et les fréquences fondamentales sont calculées avec une précision en résolvant le problème en valeurs propres.

Les études paramétriques présentées dans le chapitre suivant permettront d'apprécier clairement l'apport de la théorie proposée en le comparant les résultats obtenus avec ceux de la littérature.

CHAPITRE IV

Résultats et discussions

Chapitre IV

Résultats et discussions

IV.1. Introduction

L'objectif de ce chapitre est de présenter les résultats numériques de l'analyse du comportement mécanique des poutres sandwichs simplement appuyées sous conditions de chargement axiale et transversal, en utilisant les formulations mathématiques développées dans le chapitre précédent sur la proposition d'une théorie de déformation en cisaillement hyperbolique (HySDT) et en comparant les résultats numériques obtenus avec les autres théories connus dans la littérature scientifique, tel que la théorie classique des poutres (CBT), la théorie de poutre de Timoshenko (TBT), la théorie d'ordre élevé de Reddy (PBT) et la théorie 2D quasi-3D proposée par Vo et al. (2015a), ainsi qu'une étude paramétrique pour déterminer les différents paramètres qui influent sur la réponse mécanique des poutres sandwichs en FGM simplement appuyées.

Dans cette section, la précision d'une théorie de déformation de cisaillement hyperbolique est démontrée en appliquant à la flexion, au flambement et l'analyse des vibrations de poutres sandwichs à gradient fonctionnel (FG) simplement appuyées. Les peaux des poutres sandwichs sont en FG (Al/Al₂O₃) tandis que le noyau est en matériau homogène isotrope (Al₂O₃). Longueur de la poutre est pris comme 1m qui est constant et l'épaisseur de la poutre varie en fonction du rapport d'élancement (L/h). Les propriétés matérielles de l'alumine (céramique : Al₂O₃) sont :

$$E_c = 380GPa, \quad \rho_c = 3960kg/m^3, \quad \nu = 0.3 \quad (IV.1)$$

Et les propriétés matérielles d'aluminium (métal : Al) sont :

$$E_c = 70GPa, \quad \rho_c = 2702kg/m^3, \quad \nu = 0.3 \quad (IV.2)$$

Les résultats numériques sont présentés sous la forme adimensionnelle suivante :

$$\text{Déplacement axial à } x=0 \text{ et } x=-h/2 \quad \bar{u} = \frac{u100E_m h^3}{q_0 L} \quad (IV.3)$$

$$\text{Déplacement transversal à } x = L/2 \text{ et } z = 0 \quad \bar{w} = \frac{w100E_m h^3}{q_0 L} \quad (\text{IV.4})$$

$$\text{Contrainte axiale à } x = L/2 \text{ et } z = -h/2 \quad \bar{\sigma}_x = \frac{\sigma_x h}{q_0 L} \quad (\text{IV.5})$$

$$\text{Contrainte de cisaillement transversale} \\ x = 0 \text{ et } z = 0 \quad \bar{\tau}_{xz} = \frac{\tau_{xz} h}{q_0 L} \quad (\text{IV.6})$$

$$\text{Charge critique de flambement} \quad \bar{N}_{cr} = \frac{12N_0 a^2}{E_m h^3} \quad (\text{IV.7})$$

$$\text{Fréquence naturelle} \quad \bar{\omega} = \frac{\omega L^2}{h} \sqrt{\frac{\rho_m}{E_m}} \quad (\text{IV.8})$$

IV.2. Analyse de la flexion statique des poutres sandwich FG

Dans ce problème, une analyse de la flexion statique de trois types de poutres sandwich symétriques (1-1-1, 1-2-1, 2-1-2) est effectuée. Les déplacements verticaux adimensionnels pour divers indices de loi de puissance sont donnés dans le tableau IV.1. Les résultats obtenus par la présente théorie sont comparés à ceux obtenus en utilisant les théories de poutre 1D ($\varepsilon_z = 0$), telles que la théorie classique (CBT) d'Euler-Bernoulli (1694), la théorie de poutre de Timoshenko (1921) (TBT), la théorie parabolique des poutres (PBT) développée par Reddy (1984), la théorie hyperbolique des poutres (HBT) présentée par Sayyad et al. (2019) et la théorie des poutres 2D quasi-3D ($\varepsilon_z \neq 0$) proposée par Vo et al. (2015a). L'examen du tableau IV.1 révèle que les déplacements transversaux prédits en utilisant la présente théorie sont en excellent accord avec les théories des poutres d'ordre élevé 1D et 2D. Comme prévu, en ignorant l'effet de la déformation en cisaillement transversal, la théorie classique (CBT) sous-estime le déplacement transversal. Le déplacement le plus petit et le plus grand correspondent aux poutres sandwich (1-2-1) et (2-1-2) car elles ont la partie la plus haute et la plus basse de la phase métal. On peut voir que l'augmentation de l'indice de loi de puissance augmente le déplacement transversal. Ceci est dû au fait qu'une augmentation de l'indice de loi de puissance rend les poutres sandwich FG plus flexibles.

La variation du déplacement axial à travers l'épaisseur, est tracée sur la figure IV.1, qui montre qu'en raison de la superposition symétrique, le déplacement axial de l'axe neutre est nul. Le tableau IV.2 montre une comparaison des contraintes axiales adimensionnelles avec celles de CBT, TBT, PBT et quasi-3D. On observe que lorsque l'indice de loi de puissance

augmente, la contrainte axiale diminue. La variation de la contrainte axiale à travers l'épaisseur de la poutre, est tracée sur la figure IV.4. La même contrainte axiale maximale sur les surfaces supérieure et inférieure de la poutre sandwich FG est observée en raison de la symétrie dans la gradation du matériau. Étant donné que le noyau est constitué d'un matériau isotrope et homogène (céramique) et que les propriétés élastiques sont constantes à travers l'épaisseur, toutes les variations pour tous les indices de fraction volumique sont observées linéaires. Alors que les peaux sont constituées de matériaux à gradient fonctionnel, c'est-à-dire non homogènes, ce qui entraîne des variations hyperboliques des contraintes. De plus, dans le cas de peaux à gradient fonctionnel, le module d'élasticité varie à travers l'épaisseur, ce qui entraîne des tendances de réduction et de croissance au sein de chaque peau individuelle pour les valeurs les plus élevées des indices de fraction volumique. La contrainte axiale augmente avec l'augmentation de l'indice de loi de puissance. La contrainte axiale maximale est observée pour la configuration (2-1-2) alors que la contrainte minimale est observée dans la configuration (1-2-1). Les valeurs adimensionnelles de la contrainte de cisaillement transverse des poutres sandwich FG simplement appuyées pour divers indices de loi de puissance sont présentées dans le tableau IV.3 et tracées sur la figure IV.5. Les résultats actuels des contraintes de cisaillement sont en excellent accord avec les autres théories. On peut voir que la contrainte de cisaillement maximale pour les poutres sandwich FG symétriques se produit au niveau de l'axe neutre de la poutre.

Tableau IV.1 : Déplacement vertical adimensionnel dans les poutres sandwich FG simplement appuyées.

<i>p</i>	Théories	<i>L/h=5</i>			<i>L/h=20</i>		
		1-1-1	1-2-1	2-1-2	1-1-1	1-2-1	2-1-2
0	Bernoulli (1694)	2.8783	2.8783	-	2.8783	2.8783	-
	Timoshenko (1921)	3.1657	3.1657	-	2.8963	2.8963	-
	Reddy (1984)	3.1654	3.1654	-	2.8963	2.8963	-
	Vo et al. (2015a)	3.1397	3.1397	-	2.8947	2.8947	-
	Sayyad et al. (2019)	3.1241	3.1241	3.1241	2.8585	2.8585	2.8585
	Présente	3.1654	3.1654	3.1654	2.8962	2.8963	2.8962
1	Bernoulli (1694)	5.9181	5.0798	-	5.9181	5.0798	-
	Timoshenko (1921)	6.3128	5.4408	-	5.9428	5.1024	-
	Reddy (1984)	6.2693	5.4122	-	5.9401	5.1006	-
	Vo et al. (2015a)	6.2098	5.3612	-	5.9364	5.0975	-
	Sayyad et al. (2019)	6.3011	5.0341	6.8424	5.9561	5.3415	6.4978
	Présente	6.2693	5.4122	6.9327	5.9400	5.1006	6.5837
2	Bernoulli (1694)	8.0074	6.4056	-	8.0074	6.4056	-
	Timoshenko (1921)	8.4582	6.8003	-	8.0356	6.4302	-
	Reddy (1984)	8.3893	6.7579	-	8.0313	6.4276	-
	Vo et al. (2015a)	8.3893	6.6913	-	8.0262	6.4235	-
	Sayyad et al. (2019)	8.2734	6.3359	9.5104	7.9201	6.6697	9.1626
	Présente	8.3893	6.7579	9.6779	8.0313	6.4276	9.2863
5	Bernoulli (1694)	10.8117	8.1409	-	10.8117	8.1409	-
	Timoshenko (1921)	11.3372	8.5762	-	10.8445	8.1681	-
	Reddy (1984)	11.2274	8.5137	-	10.8376	8.1642	-
	Vo et al. (2015a)	11.1175	8.4276	-	10.8309	8.1589	-
	Sayyad et al. (2019)	11.0708	8.0576	13.0323	10.6766	8.4045	12.5898
	Présente	11.2274	8.5137	13.2036	10.8376	8.1642	12.7563
10	Bernoulli (1694)	12.1322	9.0232	-	12.1322	9.0232	-
	Timoshenko (1921)	12.1322	9.4800	-	12.1677	9.0518	-
	Reddy (1984)	12.5659	9.4050	-	12.1593	9.0471	-
	Vo et al. (2015a)	12.4453	9.3099	-	12.1519	9.0413	-
	Sayyad et al. (2019)	12.3910	8.9290	14.4346	11.9795	9.2824	13.9531
	Présente	12.1321	9.0232	13.9802	12.1322	9.0232	14.0958

Tableau IV.2: Contrainte axiale adimensionnelle dans les poutres sandwich FG simplement appuyées.

p	Théories	$L/h=5$			$L/h=20$		
		1-1-1	1-2-1	2-1-2	1-1-1	1-2-1	2-1-2
0	Timoshenko (1921)	3.7500	3.7500	-	15.0000	15.0000	-
	Reddy (1984)	3.8020	3.8020	-	15.0129	15.0129	-
	Vo et al. (2015a)	3.8005	3.8005	-	15.0125	15.0125	-
	Sayyad et al. (2019)	3.8025	3.8025	3.8025	15.0136	15.0136	15.0136
	Présente	3.8020	3.8020	3.8020	15.0130	15.0130	15.0130
1	Timoshenko (1921)	1.4203	1.2192	-	5.6814	4.8766	-
	Reddy (1984)	1.4349	1.2339	-	5.6850	4.8801	-
	Vo et al. (2015a)	1.4330	1.2315	-	5.6845	4.8797	-
	Sayyad et al. (2019)	1.4614	1.2331	1.5900	5.7370	4.8802	6.3020
	Présente	1.4349	1.2329	1.5897	5.6850	4.8800	6.3018
2	Timoshenko (1921)	1.9218	1.5373	-	7.6871	6.1493	-
	Reddy (1984)	1.9382	1.5527	-	7.6912	6.1532	-
	Vo et al. (2015a)	1.9352	1.5505	-	7.6904	6.1526	-
	Sayyad et al. (2019)	1.9369	1.5530	2.2384	7.6154	6.1534	8.8940
	Présente	1.9382	1.5527	2.2399	7.6911	6.1532	8.8942
5	Timoshenko (1921)	2.5948	1.9538	-	10.3792	7.8152	-
	Reddy (1984)	2.6123	1.9705	-	10.3835	7.8194	-
	Vo et al. (2015a)	2.6079	1.9672	-	10.3824	7.8185	-
	Sayyad et al. (2019)	2.6101	1.9707	3.0733	10.2712	7.8196	12.2223
	Présente	2.6123	1.9705	3.0730	10.3835	7.8194	12.2221
10	Timoshenko (1921)	2.9117	2.1656	-	11.6469	8.6623	-
	Reddy (1984)	2.9293	2.1826	-	11.6513	8.6665	-
	Vo et al. (2015a)	2.9245	2.1788	-	11.6500	8.6655	-
	Sayyad et al. (2019)	2.9268	2.1829	3.4047	11.5237	8.6667	13.5459
	Présente	2.9117	2.1656	3.3503	11.6469	8.6623	13.6046

Tableau IV.3: Contrainte de cisaillement adimensionnelle dans les poutres sandwich FG simplement appuyées.

<i>P</i>	Théories	<i>L/h=5</i>			<i>L/h=20</i>		
		1-1-1	1-2-1	2-1-2	1-1-1	1-2-1	2-1-2
0	Timoshenko (1921)	0.5976	0.5976	-	0.5976	0.5976	-
	Reddy (1984)	0.7332	0.7332	-	0.7451	0.7451	-
	Vo et al. (2015a)	0.7233	0.7233	-	0.7432	0.7432	-
	Sayyad et al. (2019)	0.7285	0.7285	0.7285	0.7355	0.7355	0.7355
	Présente	0.7335	0.7335	0.7335	0.7459	0.7459	0.7459
1	Timoshenko (1921)	0.8208	0.7507	-	0.8208	0.7507	-
	Reddy (1984)	0.8586	0.8123	-	0.8681	0.8215	-
	Vo et al. (2015a)	0.8444	0.7993	-	0.8657	0.8193	-
	Sayyad et al. (2019)	0.8767	0.8056	0.9050	0.8726	0.8106	0.9107
	Présente	0.8589	0.8126	0.9127	0.8694	0.8227	0.9237
2	Timoshenko (1921)	0.9375	0.8208	-	0.9375	0.8208	-
	Reddy (1984)	0.9249	0.8493	-	0.9344	0.8581	-
	Vo et al. (2015a)	0.9084	0.8349	-	0.9316	0.8556	-
	Sayyad et al. (2019)	0.9170	0.8424	0.9103	0.9222	0.8486	0.9149
	Présente	0.9253	0.8497	1.0200	0.9357	0.8593	1.0316
5	Timoshenko (1921)	1.0929	0.9053	-	1.0929	0.9053	-
	Reddy (1984)	1.0125	0.8925	-	1.0227	0.9014	-
	Vo et al. (2015a)	0.9931	0.8763	-	1.0194	0.8986	-
	Sayyad et al. (2019)	1.0048	0.8851	1.1766	1.0101	0.8897	1.1835
	Présente	1.0131	1.9705	1.1857	1.0241	0.9031	1.1986
10	Timoshenko (1921)	1.1819	0.9497	-	1.1819	0.9497	-
	Reddy (1984)	1.0665	0.9151	-	1.0773	0.9243	-
	Vo et al. (2015a)	1.0458	0.8980	-	1.0736	0.9214	-
	Sayyad et al. (2019)	1.0586	0.9083	1.2982	1.0642	0.9128	1.3055
	Présente	1.0667	0.9154	1.3068	1.0786	0.9256	1.3212

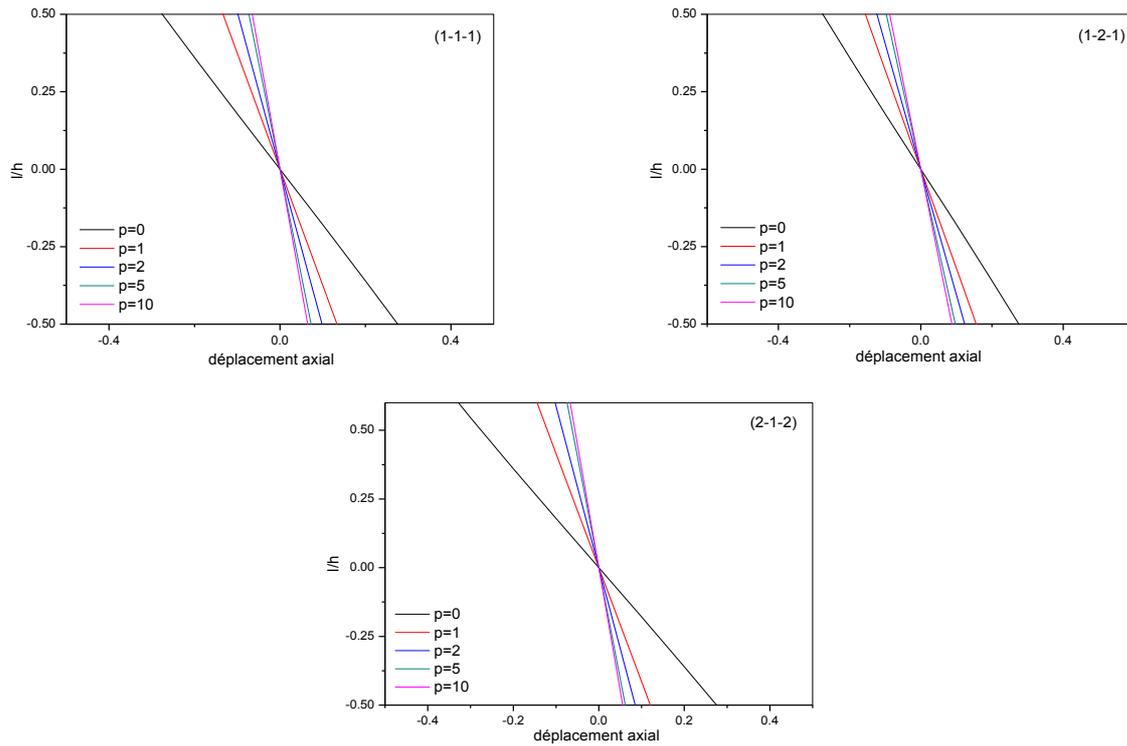


Figure IV.1 : La variation de déplacement axial adimensionnel à travers l'épaisseur dans les poutres sandwich FG soumises à une charge uniforme, $L/h = 5$.

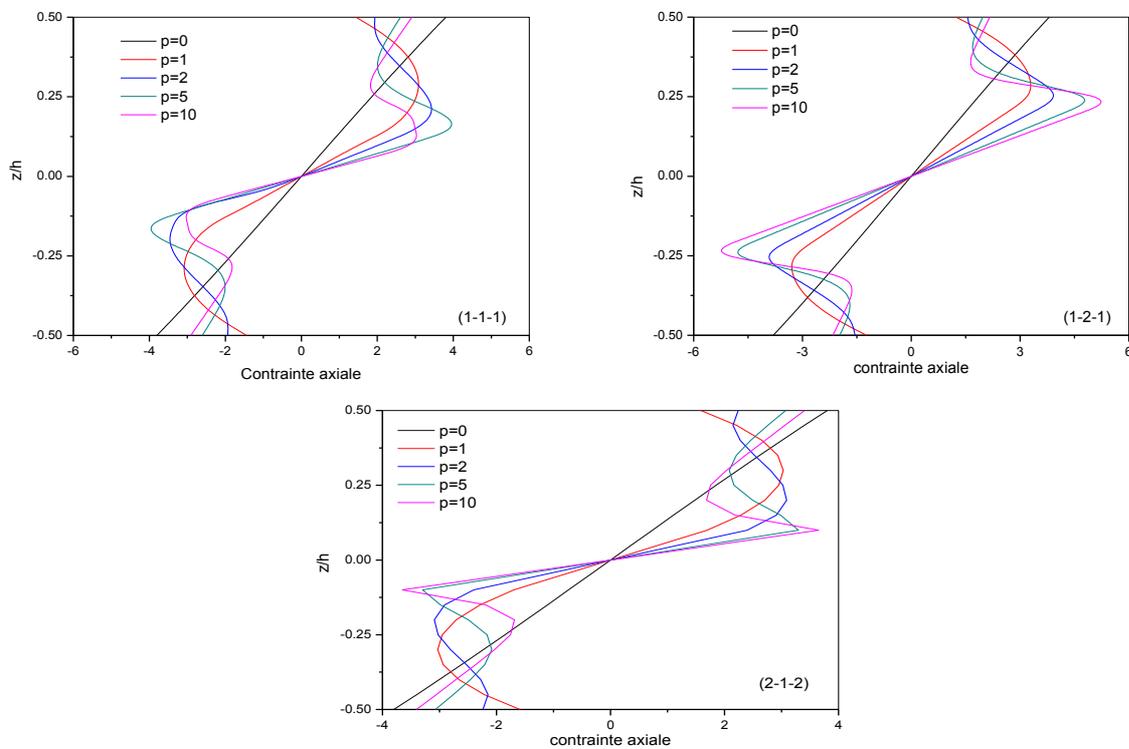


Figure IV.2 : La variation des contraintes axiales adimensionnelles à travers l'épaisseur dans les poutres sandwich FG soumises à une charge uniforme, $L/h = 5$.

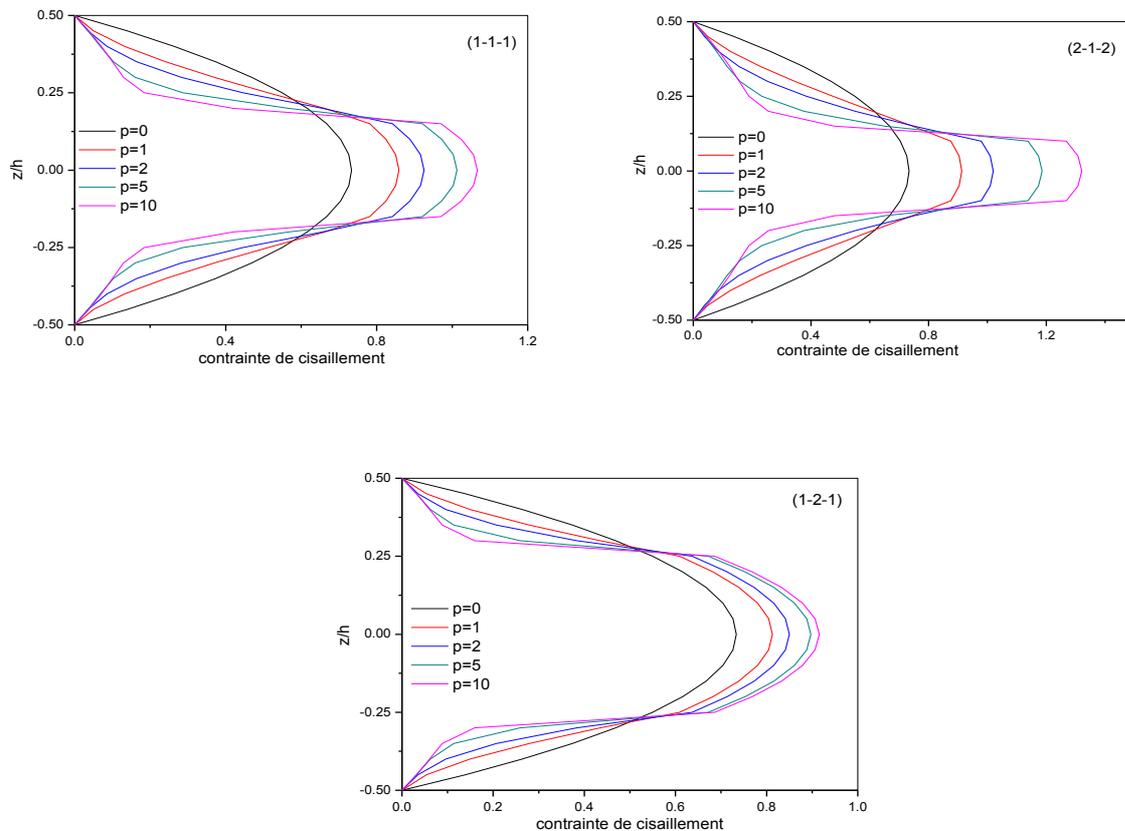


Figure IV.3 : La variation des contraintes de cisaillement adimensionnelles à travers l'épaisseur dans les poutres sandwich FG soumises à une charge uniforme, $L/h = 5$.

IV.3. Analyse de flambement des poutres sandwich FG

Le tableau IV.4 montre la comparaison des charges critiques de flambement adimensionnelles des poutres sandwich FG pour différentes valeurs de l'indice de loi de puissance et du rapport d'épaisseur peau-âme-peau. Les charges critiques de flambement sont obtenues pour $L/h = 5$ et 20 . Les résultats obtenus sont comparés à ceux obtenus par les théories de poutres 1D et 2D d'ordre élevé disponibles dans la littérature. On peut observer à partir du tableau IV.4 que les résultats actuels s'accordent très bien avec les théories des poutres 1D [Nguyen et al. (2016), Vo et al. (2015b), Sayyad et al. (2019)] et les théories des poutres 2D [Vo et al. (2015a), Sayyad et al. (2018)]. Il est à noter que l'augmentation de l'épaisseur de la peau FG entraîne une diminution des charges critiques de flambement. La charge critique de flambement maximale est observée pour la configuration (1-2-1) où l'épaisseur de peau est de $0,25h$ alors que le minimum est observé pour la configuration (2-1-

2) où l'épaisseur de peau est de $0,4h$. Il est également important de noter que la charge critique de flambement diminue avec l'augmentation de l'indice de loi de puissance p . Ceci est en fait dû à une augmentation de l'indice de loi de puissance qui se traduit par une diminution du module d'élasticité E . La poutre devient donc plus flexible et fléchit à une charge beaucoup plus faible. Comme prévu, lorsque ($p = 0$), c'est-à-dire pour une poutre entièrement en céramique, les charges de flambement critiques sont les mêmes quelle que soit la configuration de la poutre.

La figure IV.6 montre l'effet de l'indice de loi de puissance sur les charges critiques de flambement et les fréquences naturelles adimensionnelles pour les différentes valeurs L/h . On peut voir que l'augmentation du rapport L/h entraîne une augmentation des charges critiques de flambement.

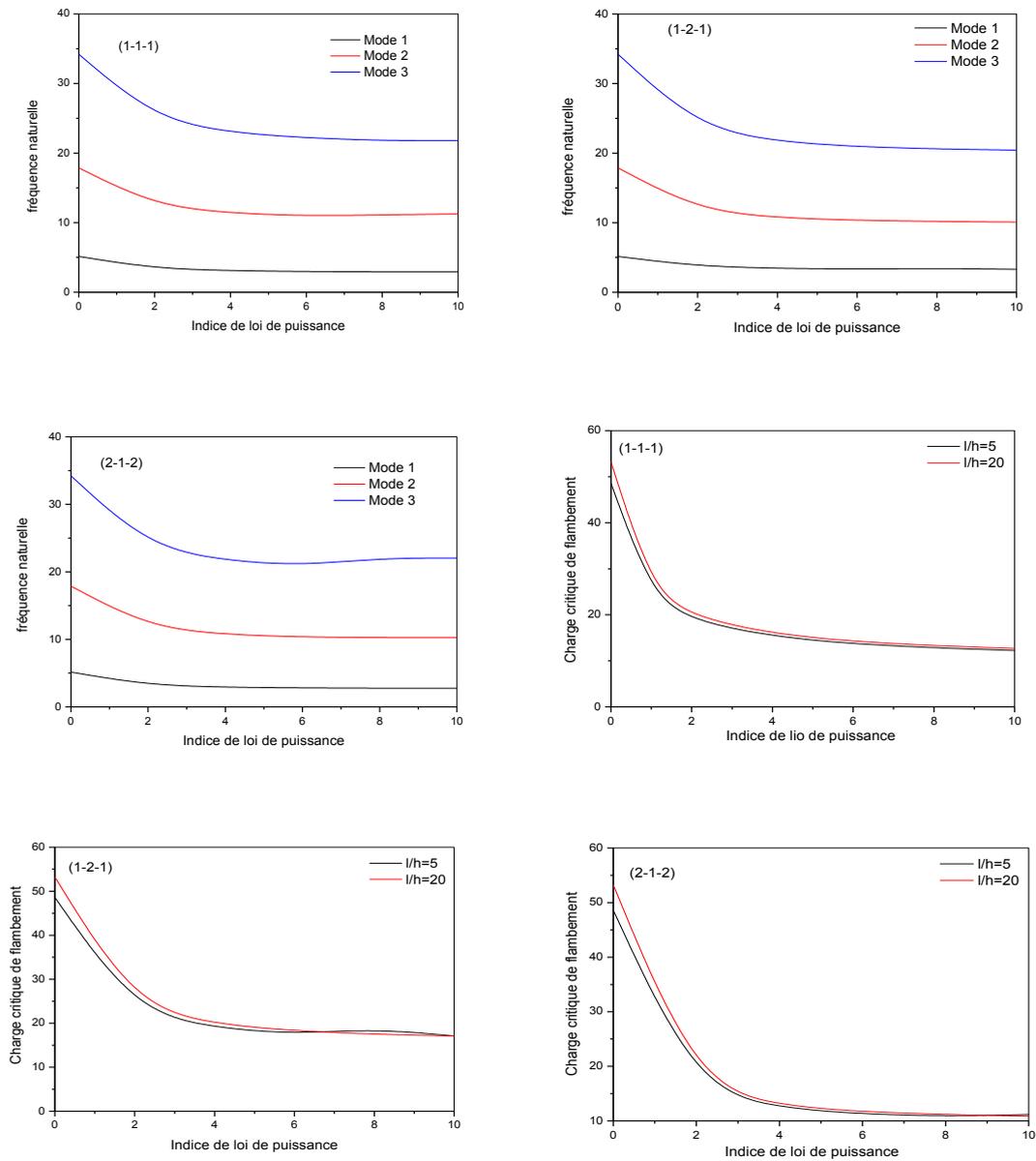


Figure IV.4. : La variation des fréquences naturelles et des charges critiques de flambement par rapport à l'indice de loi de puissance pour les poutres sandwich FG.

Tableau IV.4: Charge critique de flambement adimensionnelle \overline{N}_{cr} dans les poutres sandwich FG simplement appuyées.

p	Théories	$L/h=5$			$L/h=20$		
		1-1-1	1-2-1	2-1-2	1-1-1	1-2-1	2-1-2
0	Sayyad et al. (2018)	49.5970	49.5970	49.5970	53.3175	53.3175	53.3175
	Nguyen et al. (2016)	48.5964	48.5964	48.5964	53.2364	53.2364	53.2364
	Vo et al. (2015b)	48.5959	48.5959	48.5959	53.2364	53.2364	53.2364
	Vo et al. (2015a)	49.5906	49.5906	49.5906	53.3145	53.3145	53.3145
	Sayyad et al. (2019)	48.5960	48.5960	48.5960	53.2367	53.2367	53.2367
	Présente	48.5959	48.5959	48.5959	53.2364	53.2364	53.2364
1	Sayyad et al. (2018)	25.1060	29.0723	22.7061	26.0001	30.2785	23.4584
	Nguyen et al. (2016)	24.5602	28.4440	22.2121	25.9588	30.2706	23.4212
	Vo et al. (2015b)	24.5596	28.4447	22.2108	25.9588	30.2307	23.4212
	Vo et al. (2015a)	25.1075	29.0755	22.7065	25.9989	30.2374	23.4572
	Sayyad et al. (2019)	24.5116	28.4451	22.2112	25.9517	30.2550	23.4211
	Présente	24.5596	28.4447	22.2108	25.9589	30.2307	23.4211
2	Sayyad et al. (2018)	18.7750	23.3002	16.2761	19.2309	24.0284	16.6317
	Nguyen et al. (2016)	18.3596	22.7859	15.9167	19.2000	23.9899	16.6051
	Vo et al. (2015b)	18.3587	22.7863	15.9152	19.3116	23.9900	16.6050
	Vo et al. (2015a)	18.7772	23.3042	16.2761	19.2299	24.0276	16.6307
	Sayyad et al. (2019)	18.3733	22.7870	15.9860	19.2160	23.9900	16.6100
	Présente	18.3587	22.7863	15.9152	19.2000	23.9899	16.6050
5	Sayyad et al. (2018)	14.0358	18.5058	11.9320	14.2515	18.9180	12.1078
	Nguyen et al. (2016)	13.7226	18.0915	11.6697	14.2285	18.8874	12.0886
	Vo et al. (2015b)	13.7212	18.0914	11.6676	14.2284	18.8874	12.0883
	Vo et al. (2015a)	14.0353	18.5092	11.9301	14.2505	18.9172	12.1086
	Sayyad et al. (2019)	13.7340	18.0921	11.6671	14.2421	18.8880	12.0880
	Présente	13.7212	18.0912	11.6677	14.2284	18.8874	12.0883
10	Sayyad et al. (2018)	12.5402	16.7550	10.7715	12.7023	17.0723	10.9246
	Nguyen et al. (2016)	12.2621	16.3789	10.5370	12.6820	17.0445	10.9075
	Vo et al. (2015b)	12.2605	16.3783	10.5348	12.6819	17.0443	10.9075
	Vo et al. (2015a)	12.5393	16.7574	10.7689	12.7014	17.0712	10.9239
	Sayyad et al. (2019)	12.2710	16.3787	10.5345	12.6940	17.0455	10.9075
	Présente	12.7110	17.0907	10.9604	12.7110	17.0906	10.9429

IV.4. Analyse de la vibratoire libre des poutres sandwich FG

Le tableau IV.5, présente la comparaison des fréquences fondamentales des poutres sandwich FG simplement appuyées calculées pour différentes valeurs de l'indice de loi de puissance et des rapports d'épaisseur peau-âme-peau. Les présents résultats sont comparés aux théories des poutres 1D [Nguyen et al. (2016), Vo et al. (2015b), Sayyad et al. (2019)] et 2D [Vo et al. (2015a), Sayyad et al. (2018)]. On voit que les solutions obtenues à partir de la théorie proposée sont en excellent accord avec celles obtenues par les autres théories de poutres 1D et 2D. On peut voir sur le tableau IV.5 que les fréquences fondamentales diminuent avec l'augmentation de l'indice de loi de puissance. Les valeurs les plus basses de la fréquence fondamentale sont observées pour la configuration (2-1-2) alors que les valeurs les plus élevées de la fréquence sont observées pour la configuration (1-2-1). Cela est dû au fait que ces poutres correspondent aux fractions volumiques les plus faibles et les plus élevées de la phase céramique. De plus, on peut voir que les fréquences fondamentales diminuent avec l'augmentation de l'indice de loi de puissance. Comme prévu, on observe que lorsque ($p = 0$), les fréquences fondamentales sont les mêmes pour toutes les configurations.

Le tableau IV.6 montre les fréquences naturelles adimensionnelles des poutres sandwich FG simplement appuyées calculées pour les deux premiers modes, pour un rapport d'élanement égale à $L/h = (5, 20)$ et le paramètre matériel ($p = 0,1,2,5,10$). Ces fréquences sont présentées pour la première fois dans la littérature.

Tableau IV.5: Fréquences fondamentales adimensionnelles des poutres sandwich FG simplement appuyées.

p	Théories	$L/h=5$			$L/h=20$		
		1-1-1	1-2-1	2-1-2	1-1-1	1-2-1	2-1-2
0	Sayyad et al. (2018)	5.1620	5.1620	5.1620	5.4611	5.4611	5.4611
	Nguyen et al. (2016)	5.1528	5.1528	5.1528	5.4603	5.4603	5.4603
	Vo et al. (2015b)	5.1528	5.1528	5.1528	5.4603	5.4603	5.4603
	Vo et al. (2015a)	5.1618	5.1618	5.1618	5.4610	5.4610	5.4610
	Sayyad et al. (2019)	5.1527	5.1527	5.1527	5.4603	5.4603	5.4603
	Présente	5.1527	5.1527	5.1527	5.4603	5.4603	5.4603
1	Sayyad et al. (2018)	3.8830	4.1185	3.7369	4.0334	4.2896	3.1753
	Nguyen et al. (2016)	3.8756	4.1105	3.7298	4.0328	4.2889	3.7147
	Vo et al. (2015b)	3.8755	4.1105	3.7298	4.0328	4.2889	3.7147
	Vo et al. (2015a)	3.8830	4.0005	3.7369	4.0330	4.2895	3.7152
	Sayyad et al. (2019)	3.8763	4.1105	3.7297	4.0336	4.2889	3.8767
	Présente	3.8755	4.1105	3.7297	4.0328	4.2889	3.8767
2	Sayyad et al. (2018)	3.4258	3.7410	3.2428	3.5395	3.8775	3.1769
	Nguyen et al. (2016)	3.4190	3.7334	3.2366	3.5389	3.8769	3.1764
	Vo et al. (2015b)	3.4190	3.7334	3.2365	3.5389	3.8769	3.1764
	Vo et al. (2015a)	3.4257	3.7410	3.2427	3.5394	3.8774	3.1768
	Sayyad et al. (2019)	3.4200	3.7334	3.2433	3.5400	3.8769	3.3470
	Présente	3.4190	3.7334	3.2365	3.5389	3.8769	3.3465
5	Sayyad et al. (2018)	3.0239	3.3840	2.8491	3.1116	3.4927	2.8444
	Nguyen et al. (2016)	3.0182	3.3771	2.8441	3.1111	3.4921	2.8440
	Vo et al. (2015b)	3.0181	3.3771	2.8439	3.1111	3.4921	2.8439
	Vo et al. (2015a)	3.0238	3.3840	2.8489	3.1115	3.4926	2.8443
	Sayyad et al. (2019)	3.0191	3.3770	2.8438	3.1122	3.4921	2.9310
	Présente	3.0181	3.3770	2.8438	3.1110	3.4921	2.9310
10	Sayyad et al. (2018)	2.8862	3.2423	2.7402	2.99666	3.3412	2.8046
	Nguyen et al. (2016)	2.8810	3.2357	2.7357	2.9662	3.3406	2.8042
	Vo et al. (2015b)	2.8808	3.2356	2.7355	2.9620	3.3406	2.8041
	Vo et al. (2015a)	2.8860	3.2422	2.7400	2.9786	3.3411	2.8045
	Sayyad et al. (2019)	2.8817	3.2356	2.7353	2.9672	3.3406	2.8188
	Présente	2.9305	3.2723	2.7939	2.965	3.3412	2.8236

Tableau IV.6: Fréquences adimensionnelles des poutres sandwich FG simplement appuyées.

L/h	p	Mode 1			Mode 2		
		1-1-1	1-2-1	2-1-2	1-1-1	1-2-1	2-1-2
5	0	17.8812	17.8812	17.8812	34.2098	34.2098	34.2098
	1	13.9664	14.7245	13.4749	27.6378	28.9682	26.7325
	2	12.4690	13.5148	11.8327	24.9658	26.8551	23.7552
	5	11.1142	12.3420	10.4785	22.4780	24.7577	21.2111
	10	11.2613	12.5407	10.7192	23.8520	26.9445	22.6753
20	0	21.5732	21.5732	21.5732	47.5930	47.5930	47.5930
	1	15.9976	17.0035	15.3824	35.5138	37.7121	34.1611
	2	14.0545	15.3860	13.2934	31.2567	34.1805	29.5746
	5	12.3663	13.8716	11.6510	27.5411	30.8603	25.9495
	10	11.8465	13.3453	11.3121	26.5372	25.5503	25.2892

IV.5. Conclusion

Des solutions de type Navier pour l'analyse de la flexion statique, le flambement élastique et des vibrations libres de poutres sandwich à gradient fonctionnel simplement appuyées, en utilisant une théorie de déformation en cisaillement hyperbolique (HySDT). la théorie proposée tient compte de la variation hyperbolique du déplacement axial et des déformations de cisaillement transversal.

Le principe de Hamilton est utilisé pour dériver les équations du mouvement. Les effets de l'indice de loi de puissance, des rapports d'élancement et des rapports d'épaisseur peau-âme-peau sur les déplacements, les contraintes, les charges critiques de flambement et les fréquences naturelles sont discutés. Il est conclu que les résultats obtenues en utilisant la présente théorie d'ordre élevé sont précises par rapport à celles obtenues en utilisant les autres théories de déformation en cisaillement 1D et 2D. L'augmentation de l'indice de la loi de puissance réduit la rigidité de la poutre sandwich FG et entraîne par conséquent une augmentation des déplacements et une réduction des fréquences et des charges de flambement. La théorie proposée est précise et efficace pour résoudre les problèmes de flexion statique, de flambement élastique et de vibration libre des poutres sandwich FG.

Conclusion générale

Conclusion générale

Les poutres sont largement utilisées dans la confection des structures. Une raison importante en est leur grande légèreté doublée dans certaines configurations d'une résistance mécanique importante. Elles permettent ainsi de réaliser dans l'industrie des structures à la fois robustes et légères.

Les poutres sandwich fonctionnellement graduées représentent un domaine de recherche très vaste et ouvrent un champ d'application très large car il est possible de modifier à volonté leur composition et leur conception pour obtenir de ces matériaux les propriétés recherchées. La conception et l'élaboration de ces matériaux nécessitent le développement d'outils d'analyse adaptés à leurs spécificités géométriques et matérielles.

Le comportement mécanique des structures à la flexion est intimement lié à la forme géométrique, aux propriétés des matériaux constitutants, aux conditions aux limites, aux multiples effets environnementaux et aux théories appliquées pour modéliser le phénomène. En plus, le choix de la bonne méthode de résolution est crucial dans la fiabilité de la prédiction de ce comportement.

Le travail de cet mémoire entre de le cadre des recherche liées à l'étude du comportement mécanique des poutres sandwichs en matériaux fonctionnellement gradués «FGM». Le but principal était de proposer une nouvelle théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé à trois variables avec une composante d'intégral indéterminé.

La formulation proposée repose sur le principe d'Hamilton et résolue par une solution de type Navier. Elle n'exige pas de facteur de correction de cisaillement comme celui utilisé dans la théorie de déformation en cisaillement du premier ordre, et donne une distribution hyperbolique de la contrainte de cisaillement transversal à travers l'épaisseur de la poutre qui coïncide avec la réalité tout en remplissant la condition de contrainte de cisaillement nulle sur les bords supérieurs et inférieurs libres de la poutre. Des solutions analytiques à l'aide d'une application numérique sont présentées et comparées avec les autres solutions disponibles dans la littérature qui utilisent des différentes théories de déformation de poutres.

Cette étude comparative a démontré que la flèche, les contraintes, les charges critiques de flambement et les fréquences naturelles obtenues par la présente théorie sont identiques à celles trouvées par les autres théories. Cela indique que les hypothèses de la théorie proposée peuvent conduire à des résultats précis et peuvent ainsi améliorer le temps de calcul dans les problèmes de géométrie complexe des structures en FGM.

Conclusion générale

Finale­ment ces études de comparaison ont démontré l'efficacité et la crédibilité de notre théorie présentée. De ce fait, nous proposons fortement d'appliquer la présente théorie pour tous les avantages qu'elle présente.

En perspective, on prévoit d'élargir le champ d'application de cette nouvelle théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé pour l'analyse statique et dynamique des structures fonctionnellement graduées avec des différentes géométries et différentes formes sous la combinaison des différents types de chargement (mécanique, thermique, et hygrothermique).

Références bibliographiques

Références bibliographiques

- Abdizadeh, H. (1997), "Elaboration et caractérisation de composites «composites laminaires tricouches à base d'alumine», thèse de doctorat INSA de Lyon 1997, 212 P.
- Akavci, S.S. (2010), "Two new hyperbolic shear displacement models for orthotropic laminated composite plates", *Mech Compos Mater.*, 46(2), 215–626.
- Alipour M. M., Shariyat M., (2014a), "An analytical global–local Taylor transformation-based vibration solution for annular FGM sandwich plates supported by non uniform elastic foundations", *Archives of Civil and Mechanical Engineering*, 14(1), 6–24.
- Alipour M. M., Shariyat M., (2014b), "Analytical stress analysis of annular FGM sandwich plates with non-uniform shear and normal tractions, employing a zigzag-elasticity plate theory", *Aerospace Science and Technology*, 32(1), 235-259.
- Ambartsumian, S.A (1969), "Principal equations and correlations in different modulus theory of elasticity of anisotropic bodies", *Izvestija ANSSSR, MTT*.
- Amirani, M.C., Khalili, S.M.R., Nemati, N. (2009), "Free vibration analysis of sandwich beam with FG core using the element free Galerkin method", *Composite Structures*, 90, 373-379.
- Atarashiya, K., Ishida, Y., Nagai, T. (1993), "Functionally Gradient Materials", *American Ceramic Society, Westerville, OH*, pp. 141–148.
- Aydogdu, M. (2009), "a new shear deformation theory for laminated composite plates", *Composite Structure*, 89(1), 94-101.
- Bachir Bouiadjra, R. (2015), "Contribution à l'Etude de la Stabilité des Plaques épaisses en Composite sur Fondations Elastiques", Thèse de doctorat. Université de Djillali Liabes de Sidi Bel Abbes.
- Baron, C., Naili S, (2008), "Propagation d'ondes élastiques au sein d'un guide d'ondes élastiques anisotrope à gradient unidirectionnel sous chargement fluide", *Compte Rendue mécanique*, 336 (9), 722–730.
- Benchohra, M., Driz, H., Tounsi, A., and Bakora,A. (2018), "A new quasi-3D sinusoidal shear deformation theory for functionally graded plates", *Struct Eng & Mech*, 65(1), 19-31.
- Bennai, R., Atmane, H.A., Tounsi, A., (2015), "A new higher-order shear and normal deformation theory for functionally graded sandwich beams", *Steel and Composite Structures*, 19(3), 521-546.
- Bernoulli, J., (1694), "Curvatura laminae elasticae", *Acta Eruditorum Lipsiae*.
- Berrebah, H.M. (2011), "Etude et analyse des poutres FGM sous chargement électrostatique", Thèse de Doctorat de l'Université Djillali Liabès, Sidi Bel Abbes.
- Berthelot, J.M. (2010), "Mécanique des Matériaux et structures composites", Editions HERMES. 3ème Edition.

- Birman, V., and Byrd, L.W. (2007), “Modeling and Analysis of Functionally Graded Materials and Structures”, *Appl. Mech. Rev. ASME*, 60, 195–216.
- Boch, P., Chartier, T., and Huttepain, M. (1986), “Tape casting of Al₂O₃/ZrO₂ laminated composites”, *Journal of the American Ceramic Society*, 69(8), C191-C192.
- Bouakkaz, K., Hadji L., Zouatnia N., Bedia E.A., (2016), “An analytical method for free vibration analysis of functionally graded sandwich beams”, *Wind and Struct.*, 23(1), 59-73.
- Cheng, Z.Q. and Batra, B.C. (2000), “Exact correspondence between eigenvalues of membranes and functionally graded simply supported polygonal plate”, *J. Sound Vib.*, 229(4), 879-895.
- Chi, S.H., and Chung, Y.L. (2006), “Mechanical Behavior Of Functionally Graded Material Plates Under Transverse Load-Part I: Analysis”, *Int. J. of Solids And Struct.*, 43 (13), 3657-3674.
- Daouadji, T. H., Henni, A. H., Tounsi A., Bedia E. A.A., (2013), “Solution d'élasticité d'une poutre en porte-à-faux fonctionnellement graduée”, *Applied Composite Material*, 20, 1-15.
- Ding, J. H., Huang, D. J., Chen W. Q., (2007), “Solutions d'élasticité pour les poutres à gradation fonctionnelle anisotropes planes”, *International Journal of Solids and Structures*, 44 (1), 176-196.
- Djebbloun, Y., (2004), “Etude de la rupture en mode I d'ouverture des matériaux composites”, *Mémoire de magistère, Université mohamed khider de Biskra.*
- Dorlot, J.M., Bailon, J.P., Masounave, J. (1986), *Des matériaux / préface de monsieur Jacques de Fouquet, Montréal : Éditions de l'École polytechnique de Montréal.*
- Draiche, K. (2014), *Contribution à l'analyse de la vibration des plaques composites comportant des patches, Thèse de doctorat en sciences, Université Djillali Liabes de Sidi bel abbes.*
- Giunta, G., Crisafulli, D., Belouettar, S., Carrera, E., (2011), “Hierarchical theories for the free vibration analysis of functionally graded beams”, *Composite Structures*, 94, 68-74.
- Grazzini, H.H. and Wilkinson, D.S. (1992), “Slip Casting under pressure”, *Dept. of Mater.Sci. And Engrg., McMaster University, Hamilton, Ontario L8S 4L7, Canada.*
- Grover, N., Maiti, D., Singh, B. (2013), “A new inverse hyperbolic shear deformation theory for static and buckling analysis of laminated composite and sandwich plates”, *Compos Struct*, 95, 667–75.
- Han, S. Benaroya, H. and Wei, T. (1999), “Dynamic of transversely vibrating beams using four engineering theories,” *Journal of Sound and Vibration*, 225 (5), 935 – 988.
- Hoff, N.J. Mautner, S.E. (1944), “Sandwich construction”, *Aeronaut. Eng. Rev.* 3, 1–7.
- Hirai, T. and Chen, L. (1999), “Recent and prospective development of functionally graded materials in Japan”, *Materials Science Forum*, 308–311, 509–514.
- Huang, D. J., Ding, J. H., Chen, W. Q., (2009), “Analytical solution and semi-analytical solution for anisotropic functionally graded beam subject to arbitrary loading”, *Science in China Series G* 52(8), 1244-1256.
- Ichikawa, K. (Ed), (2000), “Functionally graded materials in the 21ST Century”, *A Workshop on Trends and Forecasts*, 264 p., Hardcover.

- Karama, et al. (2003), "Mechanical behaviour of laminated composite beam by the new multi-layered laminated composite structures model with transverse shear stress continuity", *Int J of solids and structu*, 40(6), 1525-1546.
- Kieback, B., Neubrand, A., Riedel, H. (2003), "Processing techniques for functionally graded materials", *Materials Science and Engineering*, 362, 81–105.
- Koizumi, M. (1997), "FGM activities in Japan", *Compos. Part B: Eng.* 28 (1-2), 1-4.
- Koizumi, M., Niino, M.: (1995), "Overview of FGM research in Japan", *MRS Bull.* 20, 19–24.
- Lo, K.H., Christensen, R.M. and Wu, E.M. (1977), "A High-Order Theory Of Plate Deformation-Part 1: Homogeneous Plates", *Journal pof Applied Mechanics*, 44(4), 663.
- Lu, L., Chekroun, M., Abraham, O., Maupin, V. and Villain, G., (2011), "Mechanical properties estimation of functionally graded materials using surface waves recorded with a laser interferometer", *NDT & E International*, 44(2), 169-177.
- Mashat, D.S., Carrera, E., Zenkour, A.M., Al Khateeb, S.A., Filippi M., (2014), "Free vibration of FGM layered beams by various theories and finite elements", *Composites Part B* 59, 269-278.
- Mahi, A. (2012), "Analyse et étude des plaques composites FGM en vibration libres", *Thèse de Doctorat, Université Saad Dahleb, Blida.*
- Mantari, C. and Guedes, S. (2014), "Four-unknown quasi-3D shear deformation theory for advanced composite plates", *Composite Structures*, 109, 231-239.
- Matsuo, S., Watari, F. and Ohata, N. (2001), "Fabrication of functionally graded dental composite resin post and core by laser lithography and finite element analysis of its stress relaxation effect on toothroot", *Dental Mater J*, 20(4), 257–274.
- Mindlin, R. D. and Deresiewicz, H. (1953), "Timoshenko's shear coefficient for flexural vibrations of beams," *National Congress of AppliedMechanics*, New York, USA.
- Miyamoto, Y., Kaysser, W.A., Rabin, B.H., Kawasaki, A., Ford, R.G. (1999), "Functionally graded materials: design, processing and applications", *Materials Technology Series* , Vol. 5.
- Morinaga, K., Toto, K.U. (1993), "Fabricate thick Alumina-Tungsten FGM using slip cast method", *Sci. Technol*, p4.
- Müller, E., Drašar, C., Schilz, J. and Kaysser, W.A., (2003), "Functionally graded materials for sensor and energy applications", *Materials Science and Engineering: A*, 362, 17-30.
- Narottam, P., Jitendra, P., Jacques, L., Sung, R. (2011), "Processing and Properties of Advanced Ceramics and Composites III: Ceramic Transactions", *John Wiley & Sons*, page 110.
- Nguyen T. K., Nguyen T. P., Vo T. P., Thai H. T., (2015a), "Vibration and buckling analysis of functionally graded sandwich beams by a new higher-order shear deformation theory", *Composites Part B* 76, 273-285.
- Nguyen, T. K., Nguyen, B. D., (2015b), "A new higher-order shear deformation theory for static, buckling and free vibration analysis of functionally graded sandwich beams", *Journal of Sandwich Structures and Materials*, 17: 1-19.

- Osofero, A.I., Vo, T.P., Thai, H.T. (2014), “Bending behaviour of functionally graded sandwich beams using a quasi-3D hyperbolic shear deformation theory”, *J of Eng Research*, 19(1), 1-16.
- Perl, R. (1998) “Terrorism: US responses to bombings in Kenya and Tanzania: A new policy direction”, Congressional Report, Congressional Research Service, The Library of Congress.
- Pompe, W., Worch, H., Epple, M., et al. (2003), “Functionally graded materials for biomedical applications”, *Mater. Sci. and Eng.: A*, 362 (1), 40–60.
- Pompe, W. et al. (2003), “Schulte Functionally graded materials for biomedical applications”, *Materials Science and Engineering*, vol. A 362, 40–60.
- Reddy, J.N. (1984), “A simple higher-order theory for laminated composite plates”, *J Appl Mech.*, 51(4), 745–752.
- Reddy, J.N. (2000), “Analysis of functionally graded plates”, *Int. J. Numer Meth Eng*, 47, 663–684.
- Reddy, J.N. (2004), “Mechanics of laminated composite plates and shells: theory and analysis”, CRC Press LLC.
- Reissner, E. (1975), “On Transverse Bending of Plates, Including the Effects of Transverse Shear Deformation”, *International Journal of Solids and Structures*, vol. 569–573, p. 11, 1975.
- Sayyad, A.S., Ghugal Y.M., (2017) “Bending, buckling and free vibration of laminated composite and sandwich beams: A critical review of literature”, *Composite Structures*, 171, 486-504.
- Sayyad, A.S., Ghugal Y.M. (2018), “Modeling and analysis of functionally graded sandwich beams: A review”, *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 26(21), 1776-1795.
- Sayyad A.S., Avhad, P.V. (2019), “On Static Bending, Elastic Buckling and Free Vibration Analysis of Symmetric Functionally Graded Sandwich Beams”, *J of Solid Mech.* 11(1), 166-180.
- Shen H.S., *Functionally Graded Materials: Nonlinear Analysis of Plates and Shells*, CRC Press, 2009, 280 pages.
- Schulz, U., Peters, M., Bach, F.W., Tegeder, G. (2003), “Graded coatings for thermal, wear and corrosion barriers”, *Material Science and Engineering: A* 362, 61-80.
- Sola, M. (2011), “Caractérisation de matériaux composites à structures sandwich comportant des modifications,” mémoire, Ecole Polytechnique de Montréal, Canada.
- Soldatos, K.P. (1992), “A transverse shear deformation theory for homogeneous monoclinic plates”, *Acta Mech.* **94**, 195–220.
- Tafla, A. (2007), *Eléments finis mixtes-hybrides naturels sans facteurs correctifs du cisaillement pour les plaques et les coques composites multicouches*, Thèse de Doctorat de l’Université de Reims Champagne-Ardenne.
- Thai, H.T and Kim, S.E. , (2011) “Levy-type solution for buckling analysis of orthotropic plates based on two”, *Composite Structures*, vol. 93, no. 7, pp. 1738-1746.
- Thai H. T., Vo T. P., (2012), “Bending and free vibration of functionally graded beams using various higher-order shear deformation beam theories”, *Int J of Mech Sci*, 62(1), 57-66.

- Takahashi, M., Itoh, Y., Kashiwaya, H., (1990), "Fabrication and evaluation of W/Cu gradient material by sintering and infiltration technique", in proceeding of the first international symposium on functionally gradient materials FGM, Sendai – Japan, 129-34.
- Timoshenko, S. (1921), "On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of bars of uniform cross-section," Philosophical Magazine, Londres, pp. 744–746, 1921.
- Timoshenko, S. (1922), "On the transverse vibrations of bars of uniform cross-section", Philosophical Magazine, Londres, 125–131.
- Tossapanon, P., Wattanasakulpong, N. (2016), "Stability and free vibration of functionally graded sandwich beams resting on two-parameter elastic foundation", Composite Structures, 142, 215-225.
- Touratier, M. (1991). "An Efficient Standard Plate Theory", Int J of Eng Sci, 29(8), 901-916.
- Trinh, L.C., Vo, T.P., Osofero, A.I., Lee J. (2016), "Fundamental Frequency Analysis of Functionally Graded Sandwich Beams based on the state space approach", Composite Structures, 156, 263-275.
- Uchida, Y., et al. (2004), "Air Purification Using Titanium Functionally Graded Materials Produced by Progressive Lamination Method", Transactions-Mater Research Society of Japan, 29, 2713-2716.
- Vo, T.P., Thai, H.T., Nguyen, T.K., Inam F., Lee J. (2015a), "Static behaviour of functionally graded sandwich beams using a quasi-3D theory", Composites Part B 68, 59-74.
- Vo, T.P., Thai, H.T., Nguyen, T.K., Inam, F., Lee, J. (2015b), "A quasi-3D theory for vibration and buckling of functionally graded sandwich beams", Composite Structures, 119, 1-12.
- Watanabe, Y., Yamanaka, N., Fukui, Y., (1998), "Control of composition gradient in a metalceramic functionally graded material manufactured by the centrifugal method", Compos Part A, 29A, 595–601.
- Wakashima, K., Hirano, T., Niino M., (1990), "Space applications of advanced structural materials", Proceedings of an International Symposium, (ESA SP).
- Wattanasakulpong N., Prusty B. G., Kelly D. W., Hoffman M., (2012), "Free vibration analysis of layered functionally graded beams with experimental validation", Materials and Design 36: 182-190.
- Xu, Y., Yu, T., Zhou, D., (2014), "Two-dimensional elasticity solution for bending of functionally graded beams with variable thickness", Meccanica, 49, 2479-2489.
- Xue, Z., Hutchinson, J.W. (2003), "Preliminary assessment of sandwich plates subject to blast loads". Int J MechSci, 45: 687 – 705.
- Yarasca, J., Mantari, J.L., Arciniega, R.A., (2016), "Hermite–Lagrangian finite element formulation to study functionally graded sandwich beams", Composite Structures, 140, 567-581.
- Ying, J., Lu, C.F., Chen, W.Q. (2008), "Solutions d'élasticité bidimensionnelle pour poutres fonctionnellement graduées reposant sur des fondations élastiques", Struct compos, 84, 209-219.
- Yuki M., Murayama T., Irisawa T., Temperature gradient sintering of PSZ/Mo Functionally Gradient Material by laser beam heating, in proceeding of the first international symposium on functionally gradient materials FGM, Sendai – Japan, 1991, 203-208.
- Zhang J., Wang Y.Q., Zhou B.L., Wu X.Q. (1998), "Functionally graded Al/Mg₂Si in-situ composites", prepared by centrifugal casting. J. Mater. Sci. Lett. 17, 1677–1679.

Zenkert, D., (1997), "The handbook of sandwich construction", EMAS Publishing.

Zenkour, AM. (2006), "Generalized shear deformation theory for bending analysis of functionally graded plates", Appl. Math. Model, 30(1), 67-84.

Zenkour, A.M, (2013), "Bending analysis of functionally graded sandwich plates using a simple four-unknown shear and normal deformations theory", J of Sandw Struct Mater, 15(6), 629-656.

Zenkour, A..M, (2015), "Thermal bending of layered composite plates resting on elastic foundations using four-unknown shear and normal deformations theory", Compos Struct, 122, 260-270.

Zhong, Z., et Yu, T. (2007), "Analytical solution of cantilever functionally graded beam", Composites Science and Technology, 67 (3-4), 481-488.