

**RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA
RECHERCHE SCIENTIFIQUE**



**Faculté des sciences appliquées
Département de génie civil
Spécialité : Génie Civil
Option : Structures**

**Mémoire de fin d'études présentée en vue de
l'obtention Du diplôme de master en Génie
Civil**

**Modélisation du comportement statique d'une
poutre FGM par la méthode des éléments finis**

Présenté par :
Belkheira Rafika
Belhouari Fatiha

Devant le jury composé de :

M Ait Amar.M.M	Président
M Hadj.Henni.A	Rapporteur
M Bouakaz.k	Examineur
M Benferhat.R	Examineur

Soutenue en Septembre 2021

Dédicace

Je dédie ce modeste travail aux êtres qui me sont les plus chers au monde: à mes très chers parents, que dieu les protège et les garde incha'allah et à mes très chères sœurs.

Belkheira Rafika

Je dédie ce mémoire à mon père paix à son âme, à ma très chère mère que dieu la protège incha'allah et à mes frères et tous ce qui m'ont encouragé pendant mes études.

Belhouari Fatiha

Remerciement

Nous remercions au préalable ALLAH pour nous avoir donné la vie, la santé, le courage et la force de parvenir à bout de ce travail.

Nous souhaitons témoigner toute nos tendresse à nos famille, qui nous ont accompagnée et soutenue tout au long de ce parcours universitaire.

Nos remerciements s'adressent à monsieur H.H.Abdelaziz pour avoir accepté d'être notre encadrant de projet de fin d'étude et pour ses encouragements et sa patience.

Nous remercions également les membres de jury pour avoir examiner ce travail.

Nous remercions également tous les enseignants du département de génie civil pour leurs enseignements pendant les années universitaires.

Nous tenons à remercier nos collègues depuis l'école primaire jusqu'à aujourd'hui d'avoir participé à rendre cette aventure formidable.

Résumé

Les matériaux à gradient fonctionnel ou fonctionnellement gradués (FGM) sont une nouvelle gamme de matériaux composites ayant une variation graduelle et continue des fractions volumiques de chacun des constituants (en général, métal et céramique) à travers l'épaisseur, induisant des changements, en conséquence des propriétés thermomécaniques globales de l'élément structural qu'ils constituent. Ils ont été conçus pour pallier aux problèmes engendrés par des environnements thermiques sévères. L'analyse des structures en FGM nécessite de mettre en place des outils de modélisation du comportement mécanique de plus en plus sophistiqués, notamment, le calcul par la méthode des éléments finis est indispensable pour le dimensionnement et la vérification de ces structures complexes.

Dans ce travail de mémoire, un élément fini avec deux degré de liberté par nœud, a été développé, en utilisant la MEF. Cet élément est destiné à l'analyse statique des poutres en FGM à travers l'épaisseur. La performance et la fiabilité de l'élément développé ont été évaluées à travers des tests de validation. Par ailleurs, des études paramétriques sont présentées pour souligner l'influence des différents paramètres l'analyse du comportement statique. A la fin une comparaison avec les résultats de la théorie classique des poutres est établie.

Mots clés: Matériaux fonctionnellement gradués, poutre mince et épaisse, éléments finis, analyse statique, flexion, théorie classique des poutres.

ملخص

المواد متدرجة الخواص أو المتدرجة وظيفيا هي مجموعة جديدة من المواد المركبة تمتاز بتغيرات تدريجية و مستمرة لأجزاء الحجم لكل من المركبين عموما المعادن و السيراميك (على مدى السمك)، وهذا ما يؤدي إلى اختلاف في الخصائص الحرارية الميكانيكية للعنصر المكون للهيكل العام. و هي مصممة لمقاومة المشاكل التي تسببها البيئات شديدة الحرارة. يتطلب تحليل الهياكل المصنوعة من المواد متدرجة الخواص إلى أدوات إنشاء لنمذجة السلوك الميكانيكي على مستوى عالي، بما في ذلك، الحساب باستخدام طريقة العناصر المحدودة الذي أصبح أمر ضروري للتصميم والتحقق من هذه الهياكل المعقدة. في هذه الأطروحة، تم تطوير عنصر محدود جديد مع درجتين من الحرية لكل عقدة، وذلك باستخدام العناصر المحدودة. هذا العنصر مخصص للتحليل الستاتيكي للروافد المتدرجة الخواص. مقارنة النتائج المتحصل عليها مع الحلول المتاحة في المراجع أظهرت الأداء الجيد و أثبتت دقة النموذج المقترح. من جهة أخرى، أجريت دراسة بارومترية لإظهار تأثير بعض المعلمات (السمك) على تحليل الانحناء، أيضا تم إنشاء مقارنة مع نتائج النظرية الكلاسيكية للروافد.

الكلمات المفتاحية: المواد المتدرجة وظيفيا, رافدة رقيقة و سميكة, طريقة العناصر المنتهية , التحليل الستاتيكي , إنشاء النظرية الكلاسيكية للروافد.

Abstract

Functionally graded materials are a new kind of composite materials which have a gradual and continuous variation of the volume fraction of each component (usually metal and ceramic) through the thickness direction, leading to changes of global thermomechanical properties of the structural element they represent. They were designed to overcome the problems caused by severe thermal environments. Analysis of FGM structures requires to establish tools for modeling the mechanical behavior of increasingly sophisticated, including the calculation by the finite element method is essential for the design and verification of these complex structures.

In this thesis, a finite element with two degrees of freedom per node has been developed, using the FEM. This element is intended to the static analysis of FGM beams. The performance and accuracy of the developed element were evaluated through validation tests. In addition, parametric studies has been presented to highlight the influence of various parameters (thickness) on the static analysis. Then, a comparison with the classical beam theory results is made.

Keywords: Functionally graded materials, thin and thick beam, finite element, static analysis, bending, classical beam theory.

Sommaire

Dédicace

Remerciements

Résumé

ملخص

Abstract

Sommaire

Liste des figures

Liste des tableaux

Liste des notations et abréviations

Introduction générale.....	1
chapitre I Les Matériaux a Gradient Fonctionnel	5
I.1 Introduction :	5
I.2 Bref historique:	5
I.3 La nature des matériaux à gradient de fonction :	6
I.4 Comparaison des FGM et les matériaux composites traditionnels :	7
I.5 Domaines d'utilisation:	8
I.5.1 Aérospatial:	8
I.5.2 Médecine:	8
I.5.3 Défense:	9
I.5.4 Énergie nucléaire:	9
I.5.5 Optoélectronique:	9
I.5.6 Articles de sports:	9
I.6 Techniques de fabrication des matériaux à gradient de propriétés	10

I.6.1 Procédé de poudre sèche PM (Powder Metallurgy):	10
I.6.2 Coulage Séquentiel en Barbotine (Slip Casting):	11
I.6.3 Coulage centrifuge (centrifugal casting):	12
I.6.4 Coulage en bande:	13
I.6.5 Pressage à chaud:	14
I.6.6 Processus de frittage:	14
I.6.7 Processus d'infiltration:	15
I.6.8 Projection thermique:	16
I.6.9 Dépôt physique en phase vapeur (PVD) :	16
I.6.10 Dépôt chimique en phase vapeur (CVD) :	17
I.6.11 Dépôt par électrophorèse:	17
I.7 Propriétés matérielles des poutres FGM:	19
I.7.1 Propriétés matérielles de la poutre P-FGM :	19
I.7.2 Propriétés matérielles de la poutre E-FGM :	20
I.7.3 Propriétés matérielles de la poutre S-FGM :	21
I.8 Conclusion :	22
chapitre II Théorie Des Poutres.	24
II.1 Introduction :	24
II.2 Définition d'une poutre :	24
II.3 Conditions aux limites d'une poutre :	24
II.4 Historique de théorie des poutres :	25
II.5 Hypothèse pour les calculs :	26
II.6 Modèle d'Euler Bernoulli (CBT) :	27
II.7 Modèle de Timoshenko (FSDBT) :	28
II.8 Théories d'Ordre Elevé (HSDBT) :	30
II.9 Conclusion :	33
chapitre III Généralité sur la Méthode des Éléments Finis.	35

III.1 Introduction :	35
III.2 Un bref historique de la MEF :	35
III.3 Objectif du la MEF :	36
III.4 Idée de base de la méthode des éléments finis :	36
III.5 Pourquoi choisir la MEF ?	36
III.6 Principe général :	37
III.7 Domaines d'application de la MEF :	37
III.7.1 Problème d'équilibre et statique :	37
III.7.2 Problèmes de dynamique et de stabilité (valeurs propres) :	37
III.7.3 Problèmes de propagation :	37
III.8 Equation aux dérivées partielles :	38
III.9 Technique des éléments finis appliquée à l'analyse structurale :	39
III.10 Modélisation et discrétisation :	40
III.11 Les propriétés d'un élément fini :	40
III.11.1 Signalement d'un élément fini :	40
III.11.2 Les frontières : Sont respectivement :	40
III.11.3 Les nœuds :	40
III.11.4 Les forces nodales :	41
III.11.5 Degrés de liberté :	41
III.12 Concept de la méthode des éléments finis :	41
III.13 Procédures:	42
III.14 La méthode des éléments finis en déformation:	43
III.15 Principe de formulation:	44
III.16 La formulation élémentaire au niveau de l'élément fini:	44
III.17 La formulation globale au niveau de la structure complète:	45
III.18 Modèles d'éléments finis :	45
III.18.1 Modèle déplacement :	45

III.18.2	Modèle en déformation :	45
III.19	Relation en déformations et déplacements:	46
III.19.1	Champ de déplacement :	46
III.19.2	Le champ des contraintes :	46
III.20	La relation entre contraintes et déformations :	47
III.21	Calcul des matrices élémentaires:	47
III.22	Relation entre déformation et déplacement :	48
III.23	Equation fondamentale pour éléments finis en termes de déplacements :	48
III.24	Principe des déplacements virtuels :	48
III.25	Vecteur des forces nodales :	49
III.26	Programme de résolution statique par la MEF :	49
III.27	Conclusion :	50
chapitre IV	Modélisation d'une Poutre FGM par la MEF.	53
IV.1	Introduction :	53
IV.2	Description du problème:	53
IV.3	Formulation en éléments :	54
IV.3.1	Champs de déplacement :	54
IV.3.2	Le champ de déformation :	54
IV.3.3	Les contraintes normales :	54
IV.3.4	Principe des travaux virtuels :	54
IV.4	Résultats numériques et discussion :	58
IV.5	Conclusion :	63
Conclusion Générale		64
Références Bibliographiques		65

Liste des figures

Figure I-1:Section d'une tige de bambou – matériau à gradient naturel.[1].....	6
Figure I-2:Caractéristiques des FGM en comparaison avec les matériaux composites. [2].....	7
Figure I-3 : La distribution composante des matériaux. [4]	8
Figure I-4:Organigramme de technique de la métallurgie des poudres pour la production des FGM. [8]	11
Figure I-5:Schéma de principe du coulage en barbotine. (1) Moule. (2) Barbotine sèche. (3) Barbotine humide. (4) Déshydratation par capillarité.	12
Figure I-6: Représentation schématique du : (a)- procédure de coulage centrifuge Horizontale (b)- Le produit final obtenu) [8]	13
Figure I-7: Système de processus de coulage en bande. [8]	14
Figure I-8: pièce obtenue par frittage	15
Figure I-9: processus de PVD	17
Figure I-10: représentation schématique de la technique de dépôt par électrophorèse	18
Figure I-11:Processus de production des matériaux a gradient de fonction – FGM de 1990 à 2019.[1].....	18
Figure I-12:Géométrie d'une poutre en FGM.....	19
Figure I-13:La variation du module de Young dans une poutre P-FGM.	20
Figure I-14 : La variation du module de Young dans une poutre E-FGM.	21
Figure I-15 : La variation du module de Young dans une poutre S-FGM.	22
Figure II-1:Principales conditions aux limites pour les poutres.....	25
Figure II-2:Définition des termes : poutre de courbe moyenne G_0G_E , de section droite S , et fibre neutre de section dS	26
Figure II-3:hypothèse des petites déformations	27
Figure II-4:cinématique de la théorie d'Euler Bernoulli.	27
Figure II-5: cinématique du modèle de timoshenko.....	29
Figure II-6: cinématique d'ordre élevé	31
Figure III-1:Elément finis typique pour les structures en treillis.	39
Figure III-2:Étape de l'analyse d'un problème aux limites	40
Figure III-3:Maillage du domaine en triangles à trois nœuds.	41
Figure III-4: Décomposition de la structure d'une aile d'avion, premier exemple de discrétisation par Eléments finis de la publication.	43
Figure III-5 : Poutre à caisson : (a) structure originale, (b) Modèle éléments finis.	43

Figure III-6 : Exemples de modélisation par la M.E.F.....	45
Figure III-7:parties de base du programme pour la résolution d'un problème par la méthode des éléments finis	50
Figure IV-1:une poutre en FGM.	53
Figure IV-2: un élément de poutre.	55
Figure IV-3: La variation de la contrainte normale non dimensionnelle en fonction de L/h d'une poutre FGM soumise sous une charge uniformément répartie.	60
Figure IV-4:La distribution des contraintes normales dans la direction de l'épaisseur pour $L/h=20$	60
Figure IV-5:L'évolution de la flèche totale le long de la poutre en fonction des divers paramètres du matériau.	61
Figure IV-6: Comparaison de la distribution des contraintes normales pour matériau 1 et matériau 2 pour $L/h=40$	62
Figure IV-7:Comparaison de l'évolution de la flèche totale le long de la poutre en fonction des divers paramètres du matériau 1 et 2.....	62

Liste des tableaux

Tableau III-1:Types application de la méthode des éléments finis.	38
Tableau III-2 : Matrices et vecteurs caractéristiques pour certaines applications	42
Tableau IV-1: Comparaison des flèches et des contraintes non-dimensionnelles de la poutre FGM sous charge uniformément répartie. (b=0.1).....	59

Liste des notations et abréviations

M_x, M_y, M_z	Les moments
u, v, w	Les déplacements
F_x, F_y, F_z	Les forces
θ, α, β	Les rotations
$[k]$	Matrice de rigidité du système
$\{u\}$	Vecteur de déplacement
$\{F\}$	Vecteur force
U^e	Déplacements nodaux
Ω_e	Elément la discrétisation
σ_{xx}	La contrainte
q^e	Déplacements nodaux
D	La matrice d'élasticité
F^e	Le chargement extérieur
K^e	La matrice de rigidité élémentaire
M^e	Matrice de masse de chaque élément.
ρ	La masse volumique
$\{q\}^e$	Le vecteur de déplacement aux nœuds
$\{F\}^e$	Le vecteur des forces nodales
P_i	Charge concentrée aux i (nœuds).
B, b	Largeur de la poutre
h	Hauteur de la poutre
L, a	Longueur de la poutre
ℓ	Longueur élémentaire de la poutre
$\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}$	Déformations normales
N	Matrice des fonctions de forme
$[A]$	Matrice élémentaire des coordonnées nodales
$g(z)$	Fraction volumique.
p	Indice de fraction volumique.
b	Epaisseur de la poutre.
NE	Nombre des éléments

z	La coordonne suivante l'épaisseur.
$E(z)$	Le module de Young en fonction de z
E_c	Le module de Young de la céramique
E_m	Le module de Young de métal
FGM	Functionally graded material
MGF	Matériau à gradient fonctionnel
TBT	Timoshenko Beam Theory
CBT	Classical Beam Theory
FSDBT	First shear deformation beam theory
HSDT	High order shear deformation theory
GUI	Grafical user interface
MEF	Méthode des éléments finis

Introduction générale

Les matériaux sont considérés comme un axe de recherche très important. Depuis la nuit des temps, Aux premiers temps de la civilisation (1500 av. J.C.), les Égyptiens et les Mésopotamiens mélangent de la paille et de la boue pour fabriquer des briques dans le but de construire des bâtiments assez résistants et plus durables. Par la suite, en 1800, le béton devient un composite largement utilisé. Il se génère en mélangeant le ciment, l'agrégat et l'eau. Plus tard, au début des années 1900, le plastique renforcé de fibres, un composite composé d'une matrice polymère renforcée de fibres, devient un matériau fondamental pour l'industrie aérospatiale, automobile, maritime et de la construction. Actuellement, la meilleure manière pour combiner deux matériaux, en conservant leurs propriétés, consiste à les assembler d'un pourcentage variable sur la section transversale le moteur de la découverte de nouveaux matériaux à plus ou moins obéi à une double démarche. Cette dernière est associée aux problèmes que l'homme doit résoudre pour sa vie matérielle d'une part et à son besoin rationnel de connaître et de comprendre le monde qui l'entoure d'autre part. Les structures en FGM représentent un domaine de recherche très vaste et des applications immenses tant il est possible de modifier leur composition et leur géométrie pour obtenir des propriétés optimales. Il y a donc des matériaux qui ont été conçus pour répondre à un besoin technologique spécifique. Le développement des matériaux composites a permis d'associer des propriétés spécifiques à différents matériaux au sein d'une même pièce. L'optimisation locale de ces propriétés, par association d'un matériau de haute dureté à la surface d'un matériau tenace. Cette transition brutale de compositions peut générer localement de fortes concentrations de contraintes. La solution d'une transition continue des propriétés recherchées, par un gradient de composition, permet d'atténuer cette singularité par l'utilisation des matériaux à gradient de propriétés (en anglais : Functionally Graded Materials " F.G.M "). Les matériaux à gradient de propriétés (FGM) ; un type de matériaux composites produit en changeant sans interruption les fractions de volume dans une ou plusieurs directions pour obtenir un profil bien déterminé. Dans ce travail, nous avons présenté une recherche sur des poutres fonctionnellement graduées « FGM » en utilisant la méthode des éléments finis. Les propriétés matérielles varient à travers l'épaisseur de cette poutre selon une distribution de loi de puissance (P-FGM). Plusieurs paramètres physiques et géométriques sont traités pour analyser le comportement statique et la stabilité des poutres en FGM. Cependant les FGM touchent un large éventail d'applications dans de multiples autres domaines comme ceux de la médecine, de l'électricité, du nucléaire,... etc. L'analyse des structures en FGM a connu un essor en

utilisant des méthodes numériques notamment la méthode des éléments finis. Les poutres constituent des éléments de base dans les structures, c'est pourquoi un intérêt particulier est porté, pour bien comprendre leur comportement sous des diverses sollicitations.

La plupart des analyses des éléments structuraux en FGM reposent sur la théorie de poutre(CBT). Il convient de mentionner que ces analyses proposent des solutions spécifiques aux problèmes de charge et aux conditions aux limites et elles se focalisent uniquement sur les comportements statiques des matériaux.

Par le présent sujet on vise une modélisation des structures (poutres) en matériau à gradient fonctionnel, par le développement d'éléments finis. Ces éléments développés seront destinés à l'analyse sur les comportements statique des poutres fonctionnellement graduées. Dans le but d'évoluer vers une production et une utilisation plus efficace des matériaux FGM dans les applications d'ingénierie, plusieurs techniques de conception, d'analyse et de calcul ont également été proposées.

Les résultats obtenus par cette méthode seront comparés avec ceux données par les autres théories existantes (la théorie classique des poutres) dans le domaine de résistance des matériaux. Les variables de cette modélisation sont les déplacements transversaux ainsi les rotations dus aux effets de flexion en introduisant la fonction de forme qui vérifie la nullité des déformations aux faces extrêmes de la poutre.

Organisation du mémoire :

Ce mémoire s'articule autour de deux parties essentielles. La première présente une étude bibliographique et la deuxième partie contient l'étude analytique du travail. La partie d'étude bibliographique comprend trois chapitres :

- Dans le premier chapitre nous faisons une présentation sur les matériaux à gradient fonctionnels nous donnons une description de ces matériaux, en parlant de leur histoire d'évolution, leurs différentes techniques de fabrication, leurs propriétés et leurs domaines d'utilisation.
- Puis, le deuxième chapitre est un rappel sur les différentes théories des poutres déjà existantes dans la littérature notamment CBT, FSDBT et HSDT.
- Le troisième chapitre est réservé à une petite présentation sur la méthode des éléments finis avec son historique et différents domaines d'utilisation en présentant la matrice de rigidité qui est développée sous la formulation sur la base du modèle en déformation.

- Dans le dernier chapitre nous généralisons l'application de l'élément formulé au chapitre trois pour qu'elle soit capable de modéliser des matériaux FGM et cela par un développement complémentaire.

chapitre I

Les Matériaux à Gradient Fonctionnel.

chapitre I Les Matériaux a Gradient Fonctionnel

I.1 Introduction :

Le développement de nouveaux matériaux est soumis aux besoins des constructeurs. Ceux-ci veulent toujours des matériaux plus performants, plus économiques et qui durent plus longtemps. Les chercheurs sont le plus souvent amenés à optimiser les solutions déjà utilisées, mais dans certains cas, ils doivent complètement repenser le problème et envisager de " nouveaux matériaux ". En effet, on ne découvre plus de nouveaux matériaux, mais on crée plutôt des nouvelles associations de matériaux. L'un des résultats de cette association est les matériaux à gradient fonctionnel (FGM). Ils sont caractérisés par une propriété sans interruption changeante due à un changement continu de la composition, dans la morphologie et effectivement dans la structure cristalline, représente un saut technologique rapide à travers les différents domaines d'application potentiels, des recherches ont été établis afin de préparer des matériaux de barrière thermique performants à longue durée de vie. Leur but principal est pour l'usage d'améliorer la résistance à l'usure ou à l'oxydation, avoir un matériau blindé léger avec une haute efficacité balistique (navettes spatiales) et peut résister au milieu à haute température (turbomachines aéronautiques ou terrestres). Actuellement, la plupart des activités de recherches et de développements dans les applications structurales se sont concentrées principalement sur secteurs de joindre deux constituants de base, la céramique et le métal. Beaucoup d'avantages sont prévus d'employer cette classe du FGM, par exemple, la face avec le contenu est élevé en céramique peut fournir haute résistance à l'usure, alors que la face opposée où le contenu est élevé en métal offre la haute dureté et la force. Ainsi, de tels matériaux seront très souhaitables pour des applications tribologiques où la résistance à l'usure et la dureté élevée sont requises simultanément.

I.2 Bref historique:

Les FGM sont apparus en 1984 par M. Niino et ses collègues à Sendai dans une université Japonaise dont le but de réaliser un engin spatial dont un revêtement pouvant résister à des conditions thermiques très sévères. L'idée originale des FGM a été proposée pour élaborer un nouveau composite profitant à la fois des propriétés des céramiques (Coté haute températures) et des métaux (Coté basse température).Le résultat est l'obtention d'un matériau avec une gradation continue dans la direction de l'épaisseur, passant d'une face totalement métallique vers une face totalement céramique.

En 1987, un programme national de recherche et de développement sur les FGM a vu le jour au Japon. Grâce à l'union de chercheurs, des institutions publiques et de l'industrie, une enveloppe extérieure d'une navette intercontinentale à base d'un matériau FGM. Le flux de chaleur énorme frappant la majorité des surfaces qui sont exposées à la friction par l'air, lors de la période de rentrée dans la navette dans l'atmosphère terrestre et la protection intérieure contre un réchauffement étaient les défis majeurs. D'où la nécessité d'utilisation d'un revêtement céramique pour protéger le fuselage contre des températures qui se développent à la surface. L'idée fût alors de produire une transition douce, donc graduelle entre métal pur et céramique pure, appelée matériau à gradient fonctionnel.

En 1990 a eu lieu la première conférence internationale sur les FGM à Sendai-city au Japon. En 1992, les matériaux à gradient fonctionnel ont été sélectionnés parmi les dix premières technologies de pointe au Japon et actuellement dans le monde entier.

I.3 La nature des matériaux à gradient de fonction :

La nature utilise très largement des matériaux dont les propriétés évoluent dans l'épaisseur. C'est le cas par exemple de la structure des os, des dents des animaux ou des fibres végétales (bambou, ...). Le concepteur de matériau et l'ingénieur peuvent ainsi s'inspirer largement des matériaux naturels. Ce nouveau domaine scientifique appelé biomimétisme, fait d'ailleurs l'objet de très nombreux développements, des salons techniques spécialisés (biomimexpo) et de publications en grand nombre.[1]

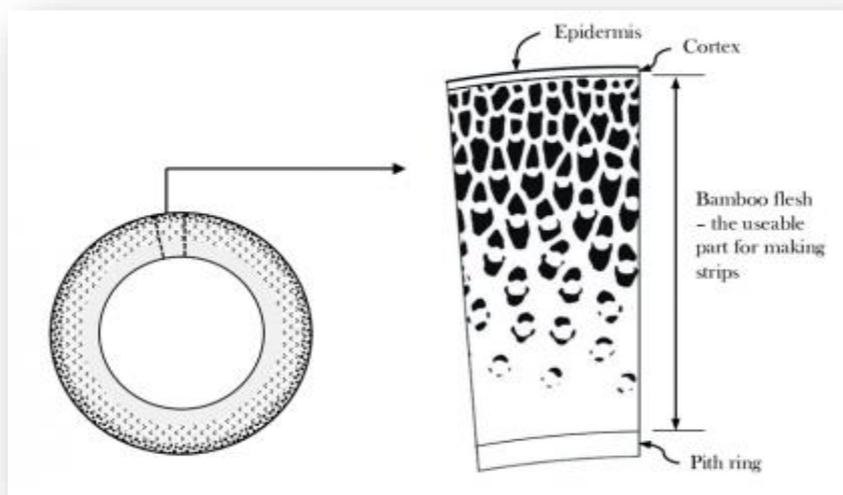


Figure I-1:Section d'une tige de bambou – matériau à gradient naturel.[1]

I.4 Comparaison des FGM et les matériaux composites traditionnels :

Généralement, les matériaux en gradient fonctionnel sont des matériaux constitués de plusieurs couches contenant des composants différents tels que les céramiques et les métaux. Ils sont donc des composites présentant des caractéristiques macroscopiquement inhomogènes. Le changement continu dans la composition et donc dans la microstructure du matériau distingue les FGM des matériaux composites conventionnels voir la figureI-2. [2]

Ça résulte un gradient qui déterminera les propriétés matérielles des FGM. Dans certains cas, on peut avoir un FGM constitué d'un même matériau mais de microstructure différente. [3]

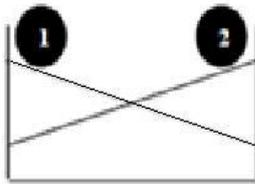
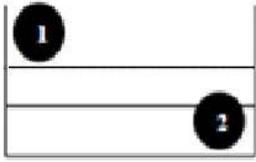
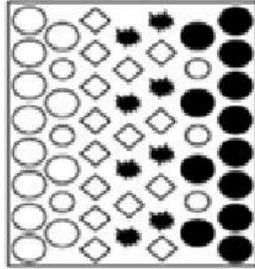
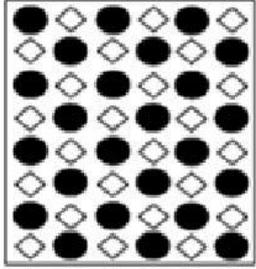
<p>Propriétés</p>	<p>1 Résistance mécanique 2 Conductivité thermique</p>		
<p>Structure</p>	<p>Eléments constitutants:</p> <ul style="list-style-type: none"> céramique ○ métal ● microporosité ◊ fibres ★ 		
<p>Matériaux</p>	<p>exemple</p>	<p>FGM</p>	<p>NON-FGM</p>

Figure I-2:Caractéristiques des FGM en comparaison avec les matériaux composites. [2]

(Uchida 2004) à établie une illustration des différences entre les matériaux à gradient de propriétés (FGM) et les matériaux plus conventionnels. Le matériau plan composé a une caractéristique plane, et le matériau relié a une frontière sur l'interface de deux matériaux. [4]

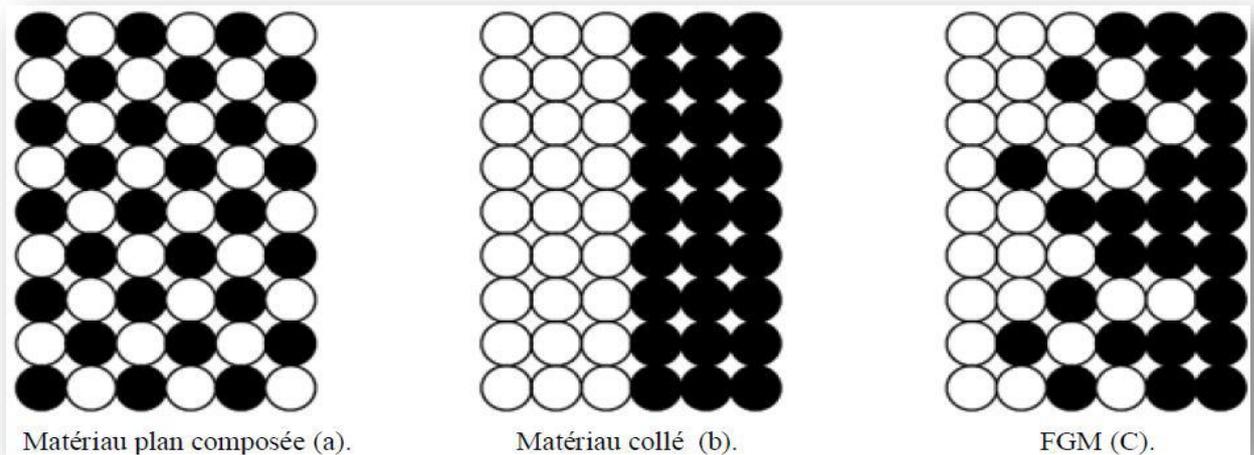


Figure I-3 : La distribution composante des matériaux. [4]

I.5 Domaines d'utilisation:

En raison du développement technologique, il est nécessaire que la capacité avancée des matériaux devienne une priorité dans le domaine de l'ingénierie pour des systèmes plus performants. Les FGM sont des matériaux légers, forts et durables. Ils sont connus par deux propriétés contradictoires: la conductivité de la force métallique dans le côté en métal et la résistivité aux hautes températures dans le côté en céramique. Donc ils sont utilisés dans une grande variété d'applications dans la pratique de l'ingénierie qui nécessite que la performance des matériaux varie avec les emplacements dans le composant [5]. Actuellement, on les trouve dans le domaine des matériaux de construction, matériaux de conversion d'énergie, nucléaire et semi-conducteur. Les applications les plus utilisées sont les suivantes :

I.5.1 Aérospatial:

Les matériaux à gradient fonctionnel peuvent être utilisés dans des conditions de haute température avec une de ses constituants à faible conductivité thermique. Ils peuvent résister à des gradients thermiques élevés, ce qui rend les matériaux à gradient fonctionnel appropriée beaucoup dans les structures aérospatiales comme les composants de véhicules spatiaux (moteur de fusée, corps des avions spatiaux.etc...).

I.5.2 Médecine:

Les FGM a trouvé une large gamme d'application dans le domaine dentaire et orthopédique pour les dents et le remplacement des os.

I.5.3 Défense:

Dans la demande de défense, tels que des plaques de blindage et des gilets pare-balles, la pénétration des matériaux résistants est nécessaire. Une des caractéristiques les plus importantes du matériau à gradient fonctionnel est la capacité à inhiber la propagation des fissures, ce qui rend les matériaux à gradient fonctionnel appropriés pour les applications de défense.

I.5.4 Énergie nucléaire:

Les FGM sont utilisés dans les dispositifs de conversion d'énergie. Ils fournissent également une barrière thermique et ils sont utilisés comme revêtement de protection sur des aubes de turbine dans le moteur à turbine à gaz et aussi dans le générateur thermoélectrique, pile à combustible, réacteurs nucléaires, pastilles de combustible.

I.5.5 Optoélectronique:

Les FGM trouvent aussi leur application dans l'optoélectronique comme les matériaux à indice de réfraction gradués et des disques audio-vidéo; support de stockage magnétique, semi-conducteur à bande graduée. Autres domaines d'application sont: produits (matériaux de constructions, corps de voiture, verres de fenêtre), conversion d'énergie (générateur thermoélectrique, convertisseur thermoionique, pile à combustible), optiques (fibres optiques, lentilles), matières biologiques (implants, peau artificielle), chimique (échangeur de chaleur, tube de chaleur, récipient de réaction).

I.5.6 Articles de sports:

Divers composants et accessoires sportifs peuvent bénéficier de l'utilisation du FGM. Par exemple, pointes en carbure ont été fabriqués pour les chaussures de baseball afin de réduire l'usure. Entre la pointe et de la structure des chaussures une région à matériau gradué a été produite afin de réduire l'impact sur les extrémités [6]. Ceci est un excellent exemple comment les FGM pourraient être utilisées pour produire des articles de sport de haute performance. Avec la même idée de réduction d'usure, des outils d'escalade sur glace tels que crampons et piolets pourraient être gradué avec le carbure de tungstène dans les arêtes vives qui capte la glace. Les outils de l'escalade de rocher auraient également le même avantage de réduire l'usure tels que sur les surfaces. [7][8][9].

Autres champs d'applications : Il existe autres domaines d'application des FGM:

- Champ optique (fibre optique, lentille etc...)

- Champ d'électronique.
- Champ chimique (Échangeur de chaleur, récipient de réacteur, tuyau (pipe) de chaleur, etc...)
- Champ de biomatériaux (peau artificielle, Système de délivrance de médicaments, prothèses, etc...)

I.6 Techniques de fabrication des matériaux à gradient de propriétés

Les différences existantes entre les propriétés des deux phases constitutives du FGM sont très importantes quand on choisit la technique de fabrication. Par exemple, dans le cas des FGM en céramique/métal, le gradient de composition peut être formé en produisant un gradient de porosité performant de la phase réfractaire infiltré, par la suite, par la deuxième phase fondue pour obtenir un produit final dense. Si les deux phases ont un point de fusion semblable, l'infiltration ne peut pas être utilisée, car le squelette ne peut pas tenir leur puissance durant l'infiltration. Les dimensions et la géométrie du FGM doivent être aussi bien considérées.

Il existe plusieurs méthodes de fabrication des FGM, on cite:

I.6.1 Procédé de poudre sèche PM (Powder Metallurgy):

La métallurgie des poudres est aussi ancienne que l'art des potiers et des céramistes. Cependant, ce qui n'était que techniques ancestrales purement empiriques s'est transformé en une discipline scientifique dans les années 1930, dès qu'on a commencé à comprendre les phénomènes observés. Cette compréhension est d'autant plus nécessaire que les techniques relevant de la métallurgie des poudres présentent un grand intérêt pour certaines fabrications industrielles (préparation des matériaux à gradient fonctionnel, de pièces mécaniques structurales, etc..). [10]

Cette méthode est appropriée pour la fabrication du FGM en utilisant des matériaux solides. Ici la technique est utilisée pour produire des matériaux à gradient fonctionnel en trois étapes de base à savoir: le pesage et le mélange de poudre en fonction de la répartition spatiale de préconçue comme dictée par l'exigence fonctionnelle, d'empilage et de damage des poudres pré-mélangées, et enfin, le frittage comme illustré à la figure I-4.

La méthode de métallurgie des poudres est l'une des techniques les plus couramment utilisées en raison de son contrôle de la grande plage de la composition, la microstructure et la capacité de mettre des formes. [11][12][8].

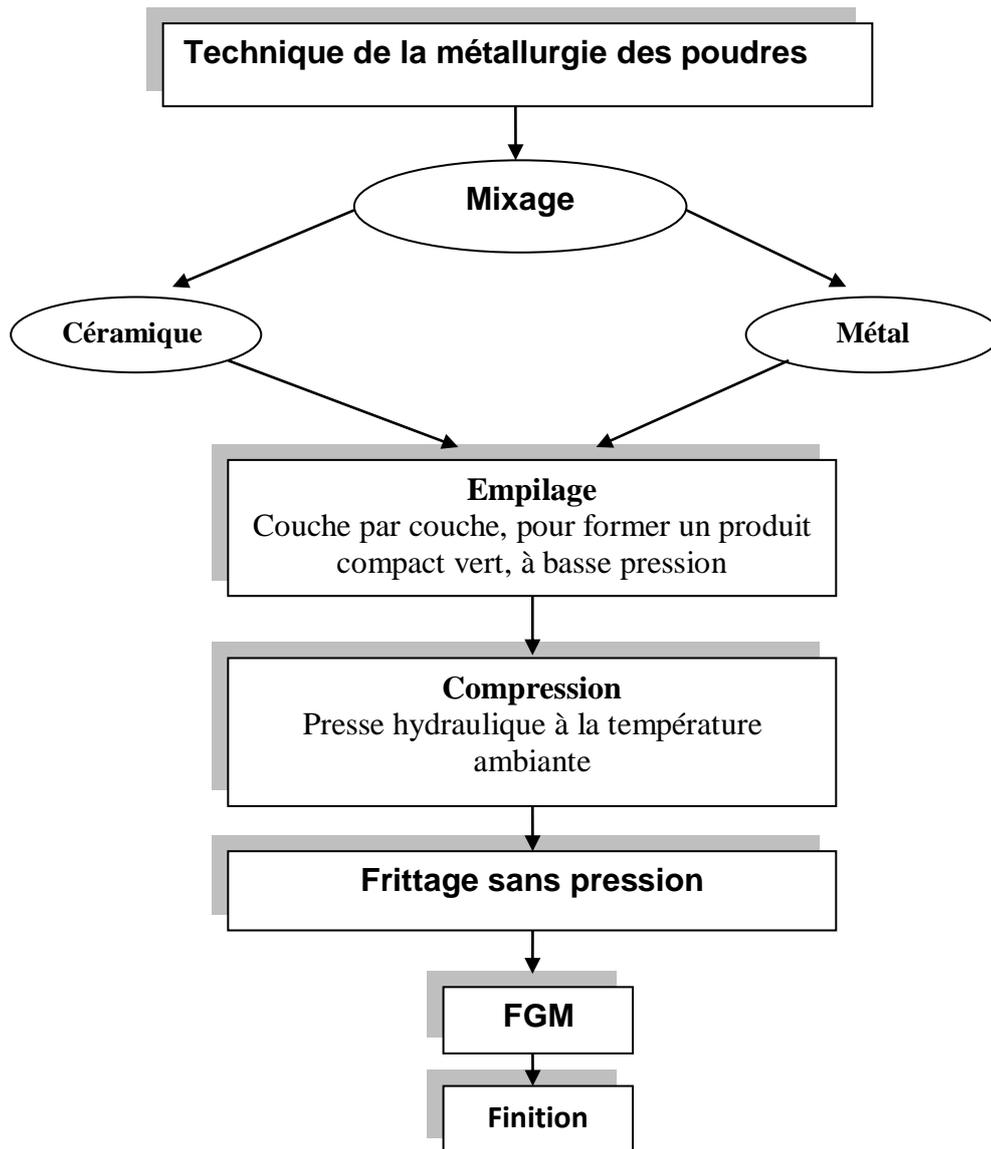


Figure I-4: Organigramme de technique de la métallurgie des poudres pour la production des FGM. [8]

I.6.2 Coulage Séquentiel en Barbotine (Slip Casting):

Le coulage en barbotine est une technique basée sur une méthode de mise en forme traditionnelle appliquée dans l'industrie céramique. En général le coulage en barbotine est un procédé de filtration où la poudre suspendue est versée dans un moule en plâtre poreux. En raison des forces capillaires résultantes le liquide élimine la suspension et les particules de poudre sont forcées vers les parois. Le gradient sera formé en changeant la composition ou la taille des grains de la suspension de poudre appliquée pendant la procédure de coulée en barbotine. Cette technique nécessite également l'étape ultérieure de consolidation, où la poudre est frittée et une structure FGM sera produite. [13][14]

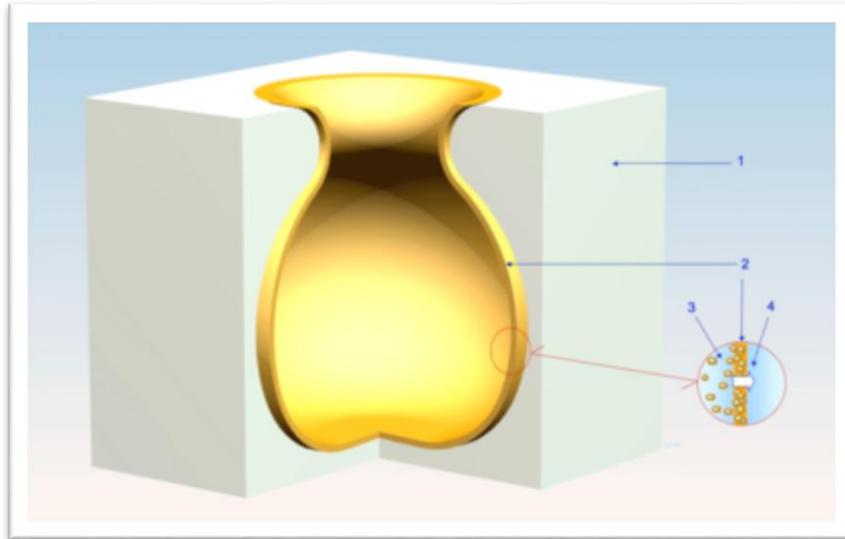


Figure I-5:Schéma de principe du coulage en barbotine. (1) Moule. (2) Barbotine sèche. (3) Barbotine humide. (4) Déshydratation par capillarité.

I.6.3 Coulage centrifuge (centrifugal casting):

La force centrifuge peut être utilisée pour créer une composition de gradient dans une masse fondue métallique qui contient une autre phase solide. En général, la fabrication du FGM par le procédé de centrifugation est classée en deux catégories en fonction de la température de fusion de la particule de renforcement. Si le point de fusion est significativement plus élevé que la température de traitement, la particule de renfort reste solide dans une matrice liquide. Cette méthode est appelée la méthode particule-solide centrifuge (CSPM). Le renforcement sélectif de la surface du composant obtenue par les résultats CSPM une résistance à l'usure plus élevée dans la surface extérieure ainsi que le maintien de haute ténacité en vrac. D'un autre côté, si le point de la particule de renfort de fusion est inférieur à la température de traitement, la force centrifuge peut être appliquée au cours de la solidification à la fois à la particule de renfort et à la matrice.

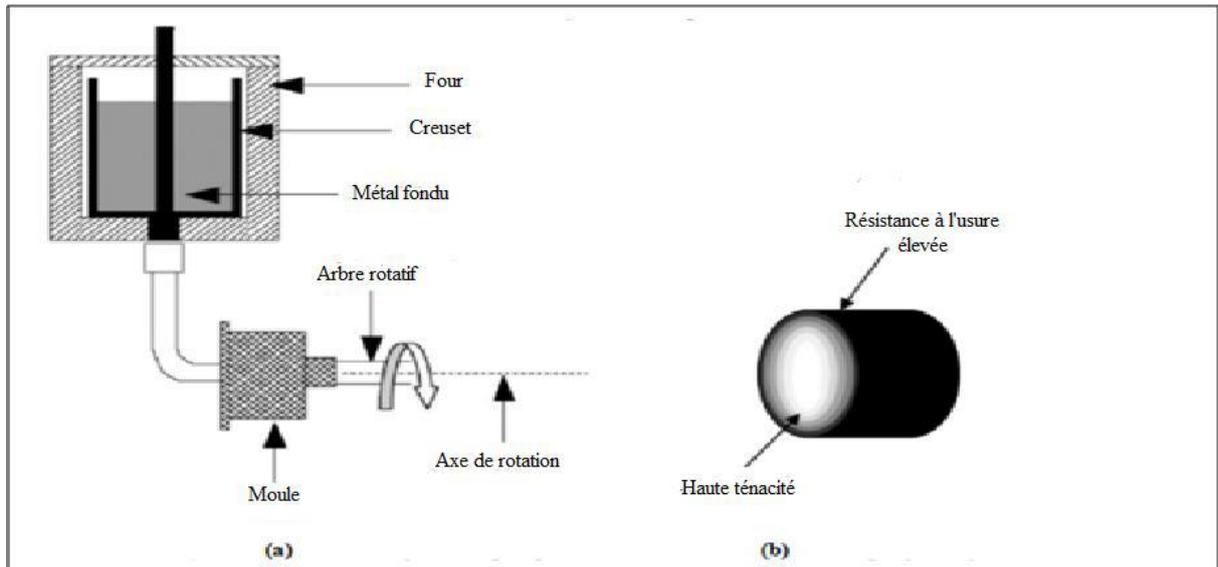


Figure I-6: Représentation schématique du : (a)- procédure de coulage centrifuge Horizontale (b)- Le produit final obtenu [8]

I.6.4 Coulage en bande:

Le procédé de coulée de bande est représenté sur la figure. L'épaisseur de la bande coulée est généralement comprise dans l'intervalle de 25 μ m et 1mm. Les bandes minimales inférieures à 1 μ m pourraient être produites. Les différentes étapes de coulage en bande sont :

1. élaboration de la matière qui contient de l'eau, des particules de poudre et de liant.
2. Le séchage du corps vert ou de la bande.
3. La consolidation de la matière dense de bande.

Afin d'obtenir un FGM des bandes ou des différents composites ont été préparés; des unités carrées ont été coupées à partir des bandes vertes qui ont ensuite été placés les uns sur les autres. Les bandes d'épaisseur appliquée est de l'ordre de 200 μ m. La densification de la bande est obtenue par frittage. Gradients superposés des matériaux en métal-céramique et céramique-céramique sont produits par la coulée de bandes de composition différente et de laminage subséquent. Dumont (2001) ont fabriqué un FGM en MoSi₂/Al₂O₃ avec des teneurs en alumine variant de 20 à 80% mole en utilisant une combinaison de coulage en bande et la réaction autoentretenue à haute température (SHS). Après déliantage, les échantillons verts ont été mis à feu à une température ambiante. Les réactions de combustion ont été effectuées sous une charge faible pour améliorer la densification de composition progressive des composites.[15]

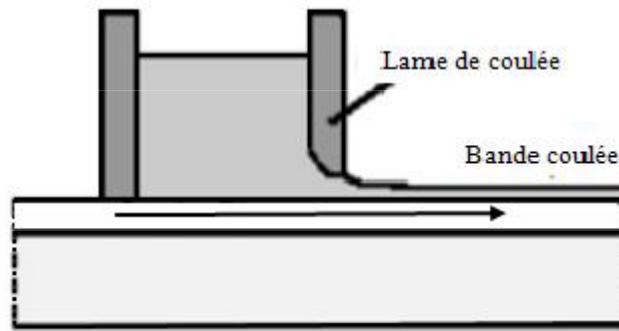


Figure I-7: Système de processus de coulage en bande. [8]

I.6.5 Pressage à chaud:

La zircone stabilisée par l'yttria (YSZ) et le nickel 20 chrome (NiCr) sont les deux matériaux combinés en utilisant YSZ-NiCr FGM inter-couche via la méthode de pressage à chaud. À l'étape initiale du traitement, la poudre YSZ et NiCr ont été mélangés dans la boule fraiseuse pendant 12 h avant d'être empilés couche par couche en graphite filière revêtue de nitrure de bore. Cette étude applique le concept de dégradation progressive en disposant la composition de chaque couche pour être en pourcentage désiré. Le pré-compactage de chaque couche a été réalisé sous une pression inférieure avant de stocker la couche adjacente sous une pression supérieure (10 MPa) pour assurer la distribution de composition exacte dans les couches. La jonction de YSZ-NiCr qui a été effectuée à 1200°C pour 1h présente une bonne stabilité thermique et une résistance à l'oxydation jusqu'à 1000 °C avant d'initier la fissure. [11][16][17]

I.6.6 Processus de frittage:

Le frittage est un procédé de fabrication de pièces consistant à chauffer une poudre sans la mener jusqu'à la fusion. Sous l'effet de la chaleur, les grains se soudent entre eux, ce qui forme la cohésion de la pièce. Le cas le plus connu est celui de la cuisson des poteries. Au XXI^e siècle, le frittage est utilisé pour obtenir la consolidation de matériaux céramiques :

- il permet de maîtriser la densité de la matière ; comme on part d'une poudre et que celle-ci ne fond pas, on peut maîtriser la taille des grains de poudre (granulométrie) et la densité du matériau, selon le degré de compactage initial des poudres ou l'utilisation de dopants, ou l'adjonction de liants.
- il permet d'obtenir des matériaux durs mais fragiles, à porosité contrôlée, inertes chimiquement (faible réactivité chimique et bonne tenue aux corrosions) et thermiquement.

- il permet de maîtriser les dimensions des pièces produites : comme il n'y a pas de changement d'état, les variations de volume, de dimensions, sont peu importantes par rapport à la fusion (absence de phénomène de retrait).

La gradation a été effectuée dans la poudre compacte doit être préservée au cours du processus de frittage ou de consolidation. Certaines des poudres métalliques légères, tels que le magnésium et l'aluminium aura tendance à réagir avec l'oxygène et de se disperser dans l'atmosphère qui doit être évitée afin d'obtenir des matériaux appropriés qui en résultent. Le procédé de frittage est réalisé en même temps que le processus de compactage si le FGM est préparé au moyen du traitement de pressage à chaud. Cependant dans le processus de pressage à froid, le procédé de frittage est effectué seulement après que les poudres ont été compactées.

[18][17]



Figure I-8: pièce obtenue par frittage

I.6.7 Processus d'infiltration:

Infiltration est le processus pour lequel le fluide sur la surface précipite dans le sol. Ce processus est dirigé soit par la gravité ou la force d'action capillaire. Le taux d'infiltration est dépend des caractéristiques du sol tels que la capacité de stockage, le taux de transmission à travers le sol et la facilité d'entrée. Le taux et la capacité du processus d'infiltration peuvent être contrôlés en ajustant certains paramètres, y compris la texture du sol, les types de végétation et de la couverture, la teneur en eau dans le sol, la température du sol et de l'intensité des précipitations. Comme le processus commun pour la mise en forme du moule est le chauffage de la poudre à une température qui est supérieure à la phase liquide. D'après la littérature, il existe un nombre limité de mise en œuvre du processus d'infiltration. La méthode d'infiltration a été mise en place pour le traitement des FGM depuis de nombreuses

années auparavant. Un gradient de composition Al-SiCp a été fabriqué avec succès en utilisant la méthode d'infiltration sans pression au début de la dernière décennie. Il a été indiqué que la conductivité thermique du FGM produit de plus en plus tendance non linéaire tandis que la fraction volumique de l'élément en céramique diminue. [19][17]

I.6.8 Projection thermique:

La projection thermique est une technique pour laquelle une structure est revêtue de matériaux fondus à travers d'un processus de pulvérisation. Concernant le processus avec la préparation FGM, les matières fondues seront les matériaux à gradient variés qu'ont construit des couches de revêtement. Dans ce procédé, le précurseur de revêtement est chauffé électriquement ou chimiquement. Un des avantages de l'utilisation de cette technique est que ce revêtement peut fournir des revêtements épais (20 μm to mm). En 2002, trois types de revêtements à gradient de propriétés de barrière thermique (TBCs) ainsi que des revêtements en double avec la même résistance thermique ont été conçus dans le but d'étudier le comportement thermique à la rupture des structures FGM. [17]

I.6.9 Dépôt physique en phase vapeur (PVD) :

La technique de dépôt physique en phase vapeur (Physical Vapor Deposition) est une technologie primordiale (prometteuse) pour la production de revêtements de barrière thermique. Parmi les caractéristiques avantageuses de PVD que les revêtements sont fabriqués ont des surfaces lisses, sans exigence, en fin il n'y a pas de fermeture de trous de refroidissement. Toutefois, le principal avantage est leur résistance exceptionnelle aux chocs thermiques, ainsi que la durée de vie est considérablement plus longue. L'équipement utilisé pour déposer les revêtements d'isolation thermiques par l'intermédiaire de PVD, se compose de plusieurs récipients pour le chargement, le préchauffage, et le dépôt plus un dispositif de rotation et la manipulation des échantillons ...etc. [20]

Une autre approche pour obtenir une structure à gradients est d'utiliser un mélange d'aluminium, l'alumine, et de zircon, chimiquement contrôlés peuvent être fabriqués facilement par vaporisation à partir de sources multiples en utilisant un ou plusieurs pistolets électroniques. En ajustant les paramètres de faisceau d'électrons, différents taux de dépôt peuvent être obtenus pour chaque source [20]. Si les taux d'évaporation de deux composants, par exemple alumine et de zircon, sont changés sans interruption, un gradient défini de composition est obtenu, c'est le FGM. Pour les systèmes de barrières thermiques plus sollicités à l'environnement oxydant, notamment les aubes mobiles de turbines aéronautiques ou terrestres ne sont, toutefois, pas systématiquement élaborés par projection thermique ; dans

le cas de la zircone yttrée ZrO_2 , un autre procédé différent est également employé. En l'occurrence, il s'agit de la technique de l'évaporation sous faisceau d'électrons (EB-PVD) qui conduit à des microstructures et des propriétés thermomécaniques assez différentes de celles obtenues par la technique de la projection thermique. [21]

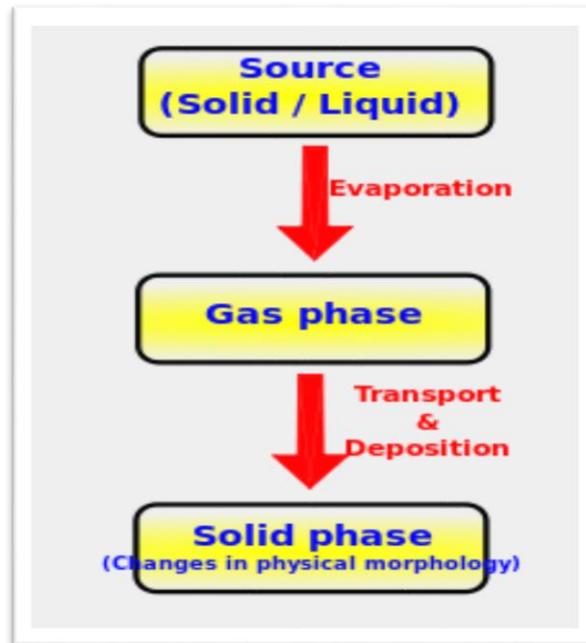


Figure I-9: processus de PVD

I.6.10 Dépôt chimique en phase vapeur (CVD) :

Dans la technique de dépôt chimique en phase vapeur (Chemical Vapor Deposition), représenté schématiquement sur la figure, un dépôt est formé sur un substrat en soumettant la source des gaz (par exemple, des hydrures, bromures ou chlorures) qui occupent la chambre de réaction, à différents types d'énergie comme la chaleur, la lumière et le plasma. [20]

I.6.11 Dépôt par électrophorèse:

Un autre processus est ajouté aux différentes techniques de la fabrication des FGM, ce que n'appelle le dépôt par électrophorèse (EPD) est un processus assez rapide à faible coût, capable de produire les matériaux à gradient de propriétés changeant sans interruption avec la géométrie complexe. EPD se compose de deux processus, c'est-à-dire le mouvement des particules chargées en suspension dans un champ électrique entre deux électrodes (électrophorèse) et le dépôt de particules sur l'un des électrodes [22]. EPD permet la conception des matériaux à gradient de propriétés en forme de plaque binaire en déposant d'une suspension de poudre à laquelle une deuxième suspension est sans interruption ajoutée pendant le processus. Le dépôt est un contrat de poudre emballé étroit qui a besoin de

l'agglomération pour réaliser les composants matériels entièrement denses. Depuis lors, de nombreuses applications d'EPD ont été développées pour la fabrication de la céramique, y compris l'application des matériaux sans interruption à gradient de propriétés peut être obtenu tels que la céramique-céramique ZrO_2/Al_2O_3 , et le céramique- métal, WC/Co puisque la composition des couches déposantes est déterminée par la suite composition de la suspension au moment du dépôt. Une installation générale de ce principe est illustrée sur la figure I-10 :

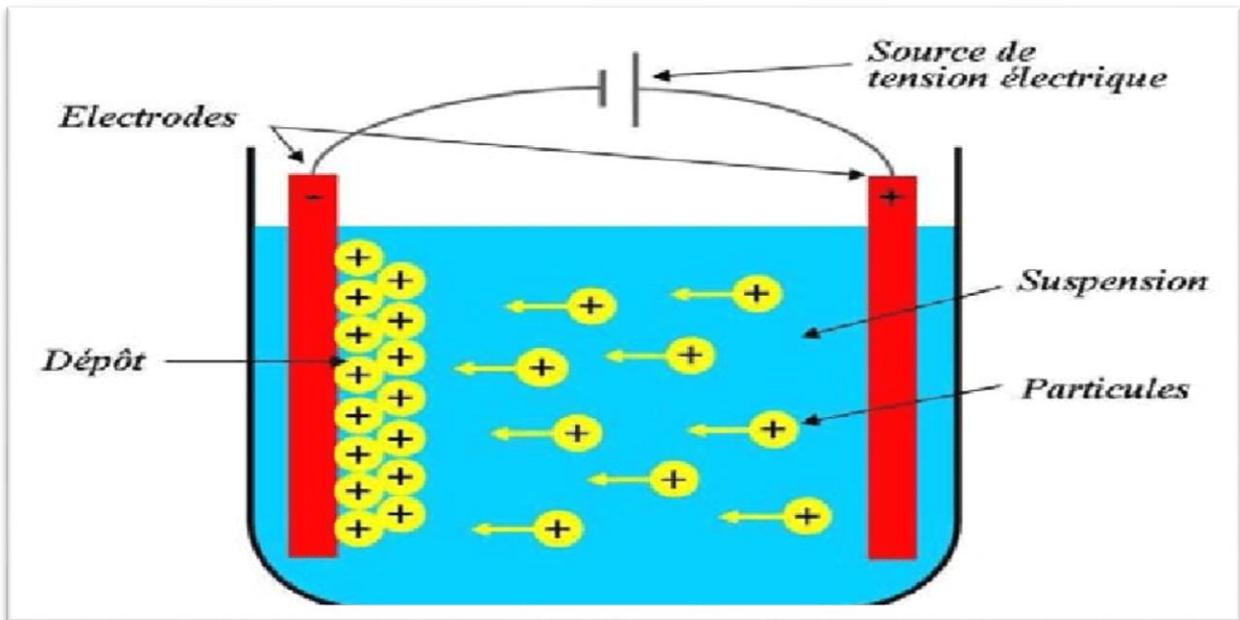


Figure I-10: représentation schématique de la technique de dépôt par électrophorèse

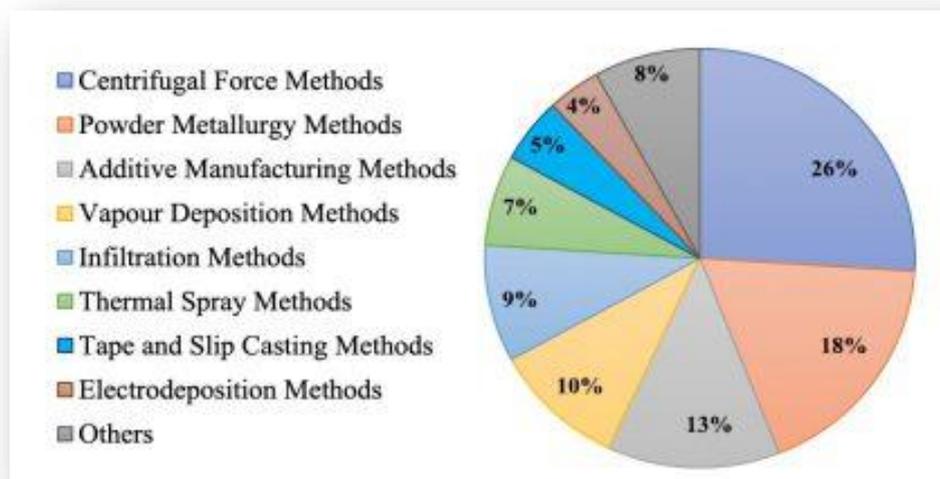


Figure I-11: Processus de production des matériaux à gradient de fonction – FGM de 1990 à 2019.[1]

I.7 Propriétés matérielles des poutres FGM:

Un FGM peut être définie par la variation des fractions de volume. La plupart des chercheurs emploient la fonction de puissance, la fonction exponentielle, ou la fonction sigmoïde pour décrire les fractions de volume.

Les propriétés matérielles, le module de Young, la densité et le coefficient de poisson, sont variés de façon continue dans le sens de l'épaisseur « h » de la poutre.

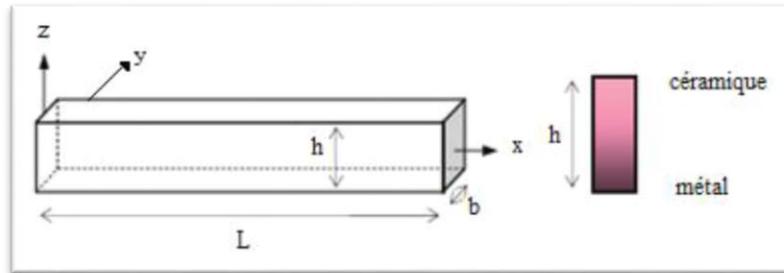


Figure I-12: Géométrie d'une poutre en FGM.

Les coordonnées x et y définissent le plan de la poutre, tandis que l'axe z origine à la surface du milieu de la poutre et dans le sens de l'épaisseur. Les propriétés du matériau dont le module de Young et le coefficient de Poisson sur les faces supérieures et inférieures sont différentes. Ils varient de façon continue, suivant l'épaisseur (l'axe z), soit : $E = E(z)$ et $\nu = \nu(z)$.

Jin and Batra[23], Ziou et al[24] ont indiqué que l'effet du coefficient de poisson sur les déformations est négligeable comparativement à celui du module de Young. Par conséquent, le coefficient de Poisson peut être supposé comme constant. Cependant, Le module de Young dans la direction de l'épaisseur de la poutre FGM varié en fonction de la loi de puissance (PFGM), la fonction exponentielle (E-FGM) ou avec la fonction sigmoïde (S-FGM).

I.7.1 Propriétés matérielles de la poutre P-FGM :

La fraction volumique de la classe P-FGM obéit à une fonction en loi de puissance comme suit :

$$g(z) = \left(\frac{z + \frac{h}{2}}{h} \right)^p \quad \text{I-1}$$

Où :

$g(z)$: Fraction volumique.

p : indice de fraction volumique.

h : épaisseur de la poutre.

z : la coordonne suivant l'épaisseur.

Une fois que la fraction de volume local $g(z)$ est définie, les propriétés matérielles d'une poutre P-FGM peuvent être déterminées par la loi des mélanges :

$$E(z) = g(z).E_1 + [1 - g(z)].E_2 \quad \text{I-2}$$

Où : E_1 et E_2 sont respectivement les propriétés matérielles (modules de Young ; densité ou coefficient de poisson) de la surface inférieure ($z = -h/2$) et de la surface supérieure ($z = +h/2$) de la poutre FGM.

La variation de ces propriétés dans la direction de l'épaisseur de la poutre P-FGM est représentée sur la figure, il apparaît clairement que le module de Young par exemple change et diminue rapidement près de la surface inférieure pour « $p > 1$ », et augmente rapidement près de la surface supérieure pour « $p < 1$ ».

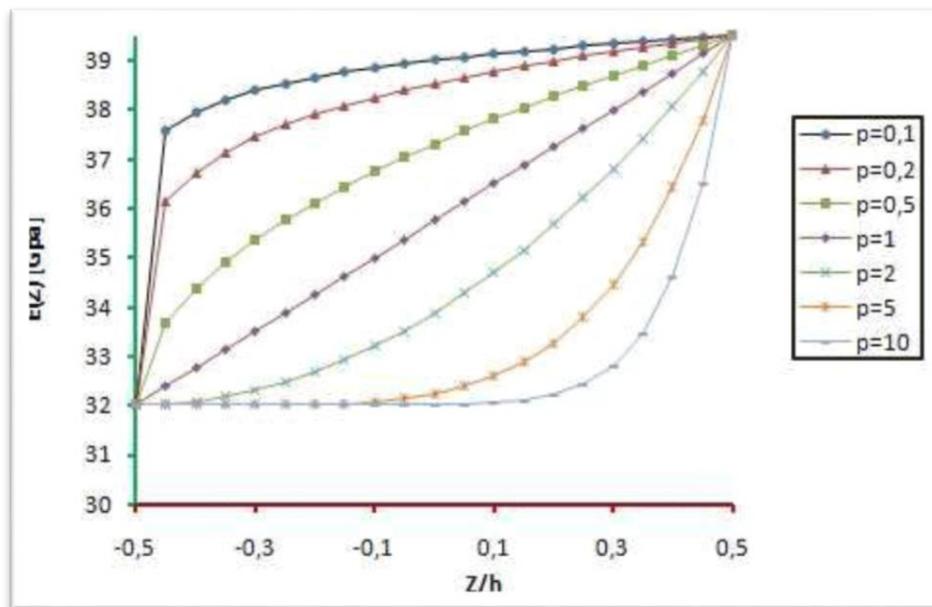


Figure I-13: La variation du module de Young dans une poutre P-FGM.

I.7.2 Propriétés matérielles de la poutre E-FGM :

Beaucoup de chercheurs utilisent la fonction exponentielle pour décrire les propriétés matérielles des matériaux FGM, la fonction exponentielle est donnée par (Delale et Erdogan 1983)[25] :

$$E(z) = Ae^{B(z+\frac{h}{2})} \quad \text{I-3}$$

Avec : $A = E_2$ Et $B = \frac{1}{h} \ln \frac{E_1}{E_2}$

La variation du module de Young à travers l'épaisseur de la poutre E-FGM est représentée sur la figure suivante :

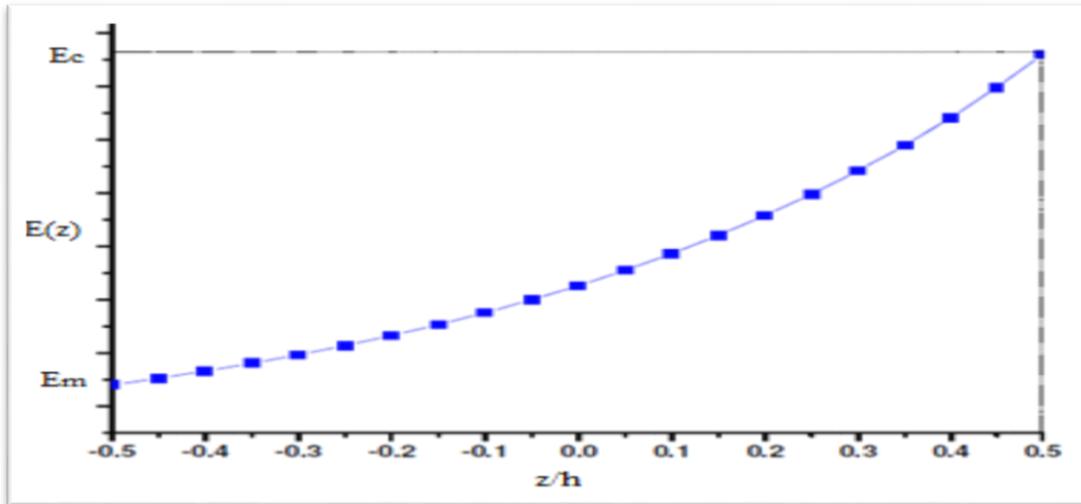


Figure I-14 : La variation du module de Young dans une poutre E-FGM.

I.7.3 Propriétés matérielles de la poutre S-FGM :

(Chi et al)[26] ont défini la fraction de volume de la poutre FGM en utilisant deux fonctions de loi de puissance pour assurer une bonne distribution des contraintes parmi toutes les interfaces. Les deux fonctions de loi de puissance sont définis par :

$$g_1(z) = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\frac{h}{2} - z}{\frac{h}{2}} \right)^p \text{ Pour } 0 \leq z \leq \frac{h}{2} \tag{I-4}$$

$$g_2(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{\frac{h}{2} - z}{\frac{h}{2}} \right)^p \text{ Pour } -\frac{h}{2} \leq z \leq 0 \tag{I-5}$$

En utilisant la loi des mélanges, la propriété E de la poutre S-FGM peut être calculé par:

$$E(z) = g_1(z).E_1 + (1 - g_1(z)).E_2 \text{ Pour } 0 \leq z \leq \frac{h}{2} \tag{I-6}$$

$$E(z) = g_2(z).E_1 + (1 - g_2(z)).E_2 \text{ Pour } -\frac{h}{2} \leq z \leq 0 \tag{I-7}$$

La figure I-15 montre que la variation de la fraction volumique définie par les équations I-4 et I-5 représente les distributions sigmoïdes, et cette poutre FGM est appelée (Poutre S-FGM).

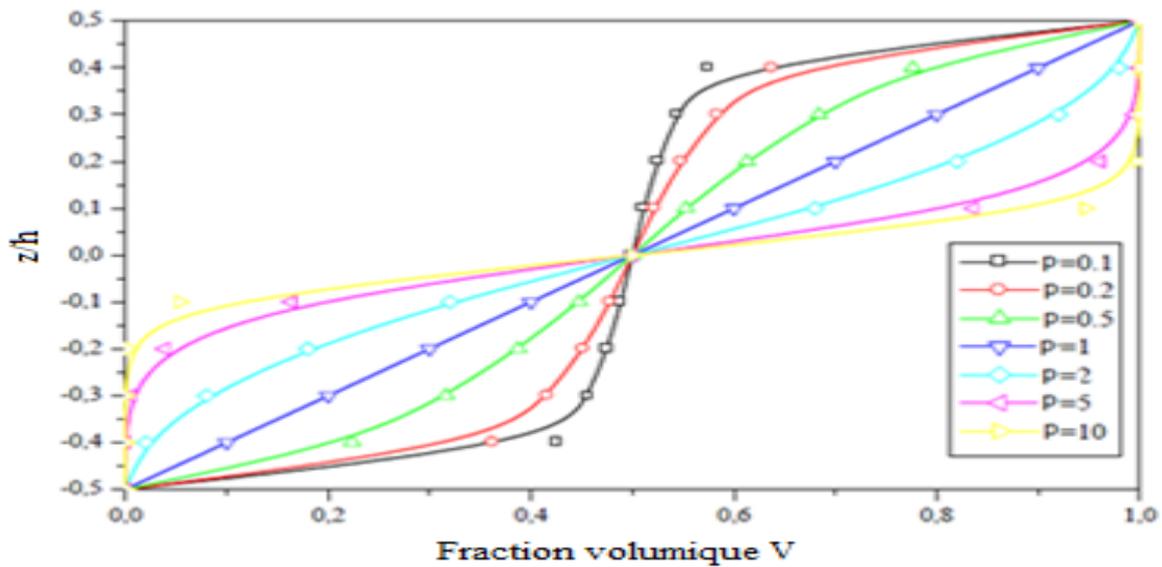


Figure I-15 : La variation du module de Young dans une poutre S-FGM.

I.8 Conclusion :

Les matériaux à gradient fonctionnel sont une nouvelle classe de matériaux qui présentent l'avantage de présenter une variation progressive des propriétés mécaniques.

Dans ce chapitre on a parlé de leur historique, les techniques de leur production et leurs différents domaines d'utilisation.

On a terminé par présenter les lois régissant la variation des propriétés matérielles des matériaux FGM.

chapitre II

Théorie Des Poutres.

chapitre II **Théorie Des Poutres.**

II.1 Introduction :

La théorie des poutres est un modèle utilisé dans le domaine de la résistance des matériaux. Elle consiste à ramener la résolution d'un problème tridimensionnel (3D) à la résolution d'un problème unidimensionnel (1D) en obtenant une solution approchée pour les champs de contrainte et de déformation donnant une bonne idée des efforts et des déplacements.

La déformation des matériaux et les contraintes transmises par ceux-ci dépendent de leur forme, de conditions aux limites et de l'histoire des sollicitations externes.

La théorie des poutres est utile pour déterminer des solutions analytiques de modèles mécaniques simples. Et l'avantage des solutions analytiques sur les prévisions obtenues par des méthodes numériques est de permettre de visualiser l'influence de différents paramètres tels que la forme, la taille, le comportement du matériau et même l'hétérogénéité.

Ceci permet de mieux comprendre une structure ou de mieux optimiser son architecture, dans le cadre d'une première approche d'un problème de conception ou de compréhension.

Dans ce chapitre on va présenter les différentes théories déjà existantes dans la littérature qui sont utilisées dans les calculs des poutres.

On utilise essentiellement deux modèles :

- la **théorie d'Euler-Bernoulli**, qui néglige l'influence du cisaillement ;
- la **théorie de Timoshenko**, qui prend en compte l'effet du cisaillement.

II.2 Définition d'une poutre :

C'est un objet dont la longueur est grande par rapport aux dimensions transverses. Une poutre est un élément de construction des bâtiments, les navires et autres véhicules, et dans la fabrication de machines. Elle sert à soutenir des charges au-dessus du vide et à relier les piliers, les colonnes ou encore les murs sur lesquels elle s'appuie.

Les poutres peuvent être en bois, en béton, en préfabriqué, elles peuvent également être précontraintes c'est-à-dire posséder des câbles incorporés. La section d'une poutre est étudiée pour la meilleure résistance possible à la flexion. Une poutrelle est une poutre de section de moins de 20cm².

II.3 Conditions aux limites d'une poutre :

Les conditions aux limites sont définies en considérant les quatre grandeurs qui caractérisent le mouvement de flexion. Elles sont représentées dans le tableau ci-dessous :

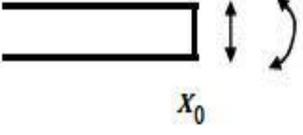
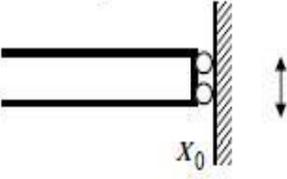
<p>extrémité libre</p>  <p style="text-align: center;">x_0</p>	<p>pas de contraintes sur le déplacement et la rotation \Rightarrow le moment de flexion et la force de cisaillement s'annulent en x_0</p>	$M(x_0, t) = EI \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} \Big _{x=x_0} = 0$ $Q(x_0, t) = -EI \frac{\partial^3 w(x, t)}{\partial x^3} \Big _{x=x_0} = 0$
<p>extrémité encastree</p>  <p style="text-align: center;">x_0</p>	<p>les déplacements transversal et angulaires sont nuls en x_0</p>	$w(x_0, t) = 0$ $\theta(x_0, t) = \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} \Big _{x=x_0} = 0$
<p>extrémité simplement supportée</p>  <p style="text-align: center;">x_0</p>	<p>le déplacement transversal est bloqué mais la rotation est libre \Rightarrow le moment de flexion est donc nul en x_0</p>	$w(x_0, t) = 0$ $M(x_0, t) = EI \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} \Big _{x=x_0} = 0$
<p>extrémité guidée</p>  <p style="text-align: center;">x_0</p>	<p>le déplacement transversal est libre et la rotation est bloquée \Rightarrow la force de cisaillement est donc nulle en x_0</p>	$\theta(x_0, t) = \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} \Big _{x=x_0} = 0$ $Q(x_0, t) = -EI \frac{\partial^3 w(x, t)}{\partial x^3} \Big _{x=x_0} = 0$

Figure II-1: Principales conditions aux limites pour les poutres.

II.4 Historique de théorie des poutres :

La paternité de la théorie des poutres est attribuée à Galilée, mais des études récentes indiquent que Léonard de Vinci l'aurait précédé. Ce dernier avait supposé que la déformation variait de manière linéaire en s'éloignant de la surface neutre, le coefficient de proportionnalité étant la courbure, mais il ne put finaliser ses calculs car il n'avait pas imaginé la loi de Hooke. De son côté, Galilée était parti sur une hypothèse incorrecte (il supposait que la contrainte était répartie uniformément en flexion), et c'est Antoine Parent qui obtint la

distribution correcte. Ce sont Leonhard Euler et Jacques Bernoulli qui émirent la première théorie utile vers 1750. [27]

II.5 Hypothèse pour les calculs :

La théorie des poutres est une application de la théorie de l'élasticité isotrope. Pour mener les calculs de résistance des matériaux, on considère les hypothèses suivantes :

Hypothèse de Bernoulli : au cours de la déformation, les sections droites restent perpendiculaires à la courbe moyenne ; les sections droites restent planes (pas de gauchissement). Cette théorie permet de négliger le cisaillement dans le cas de la flexion : le risque de rupture est alors dû à l'extension des fibres situées à l'extérieur de la flexion, et la flèche est due au moment fléchissant. Elle n'est pas valable pour les poutres courtes car ces dernières sont hors des limites de validité du modèle de poutre, à savoir que la dimension des sections doit être petite devant la longueur de la courbe moyenne. Le cisaillement est pris en compte dans la théorie de Timoshenko et Mindlin.

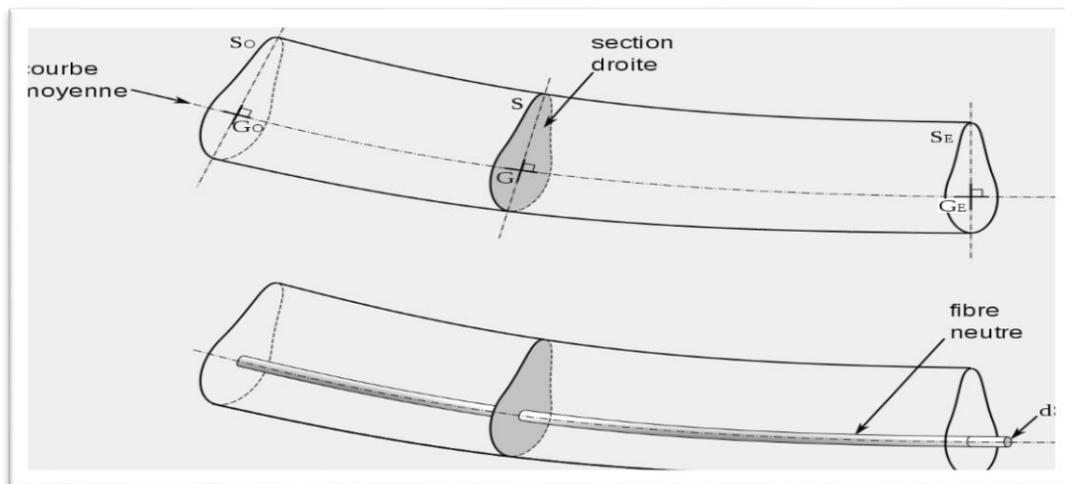


Figure II-2: Définition des termes : poutre de courbe moyenne G_0G_E , de section droite S , et fibre neutre de section dS .

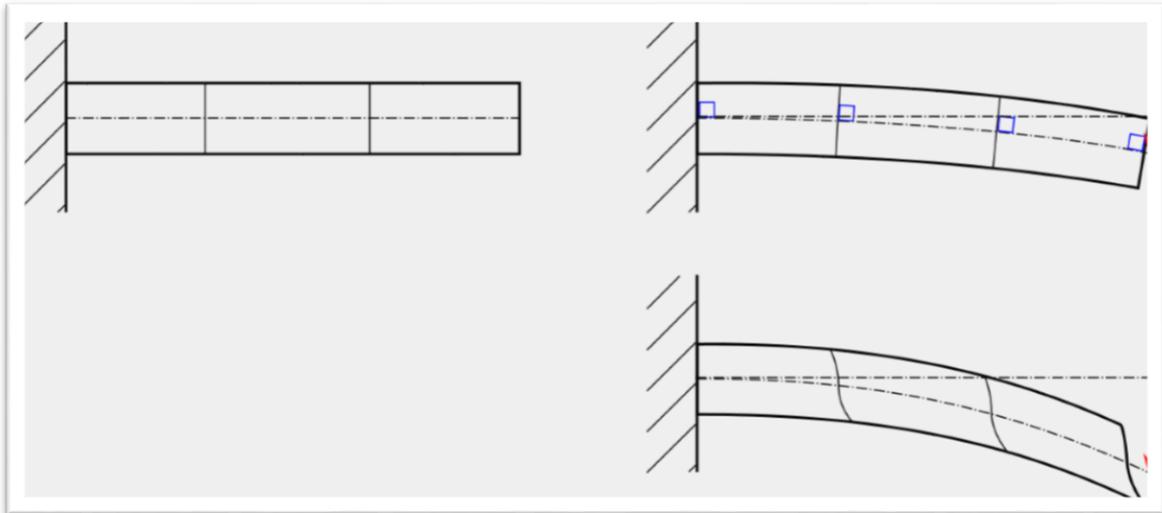


Figure II-3:hypothèse des petites déformations

(Haut) : les sections droites restent planes et perpendiculaires à la courbe moyenne ; Pour les grandes déformations (bas) : les hypothèses ne sont plus respectées, les sections droites deviennent gauches et ne sont plus perpendiculaires à la courbe moyenne.

II.6 Modèle d'Euler Bernoulli (CBT) :

L'hypothèse d'Euler- Bernoulli énonce que la section droite de la poutre est indéformable reste plane et perpendiculaire à la fibre moyenne avant et après déformation, et la déformation transversale est nulle.

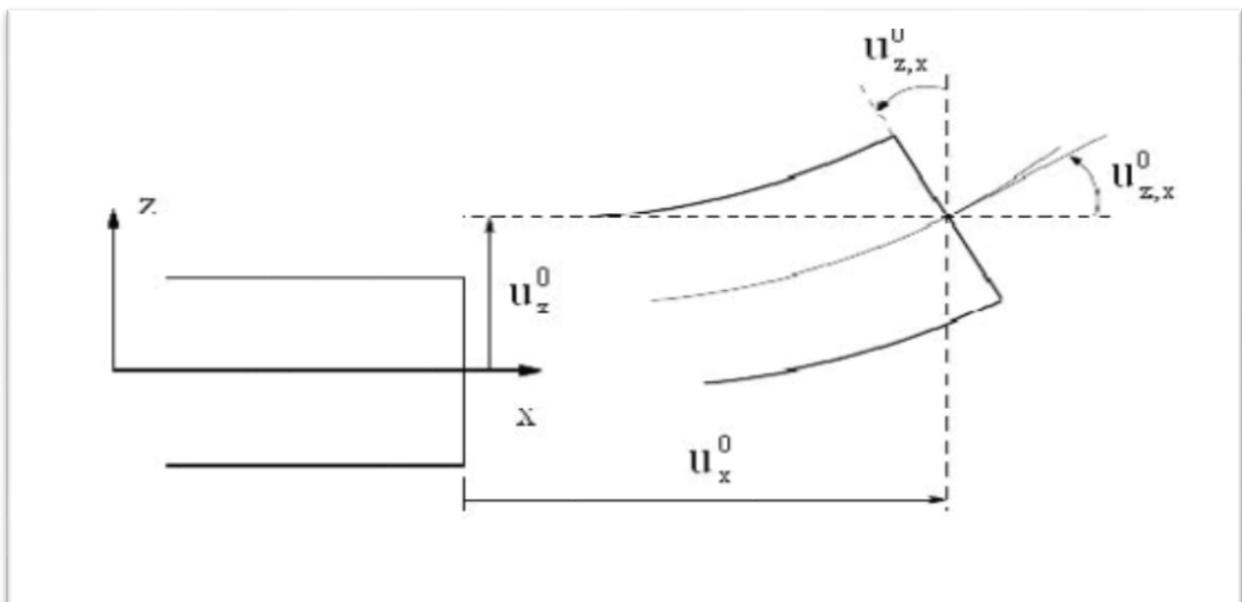


Figure II-4:cinématique de la théorie d'Euler Bernoulli.

Elle est basée sur la théorie élémentaire de flexion des poutres qui ne tient pas compte des effets de la déformation de cisaillement. Elle n'est applicable qu'aux poutres fines.

Dans la théorie d'Euler-Bernoulli le cisaillement est négligé, le champ de déplacement de n'importe quel point M situé à (x, z) de la poutre s'écrit comme suit:

$$u(M) = \begin{cases} u(x, z) = u^0(x) - z\theta(x) \\ w(x, z) = w^0(x) \end{cases} \quad \text{II-1}$$

$u(x, z)$: représente le déplacement suivant X.

$w(x, z)$: Le déplacement dans la direction de Z ou bien la flèche.

La rotation autour de l'axe Y, provoquée par la flexion est tel que:

$$\theta(x) = \frac{\partial w^0}{\partial x} = 0 \quad \text{II-2}$$

$u^0(x)$ Et $w^0(x)$ sont les composantes de déplacement au milieu de la section et sur la ligne moyenne de la poutre, respectivement le long des axes X et Z.

Lorsque cette théorie est utilisée pour l'analyse des fréquences naturelles des poutres, les flèches sont sous-estimées. Ceci est la conséquence de la négligence de la déformation transversale.

II.7 Modèle de Timoshenko (FSDBT) :

La théorie de Timoshenko a été développée par Stephan Timoshenko et Paul Ehrenfelsen 20ème siècle. Le modèle est plus générale que la théorie classique parce qu'il prend en compte l'effet de cisaillement et les effets de flexion, donc il est idéale pour analyser le comportement des poutres courtes et épaisses.

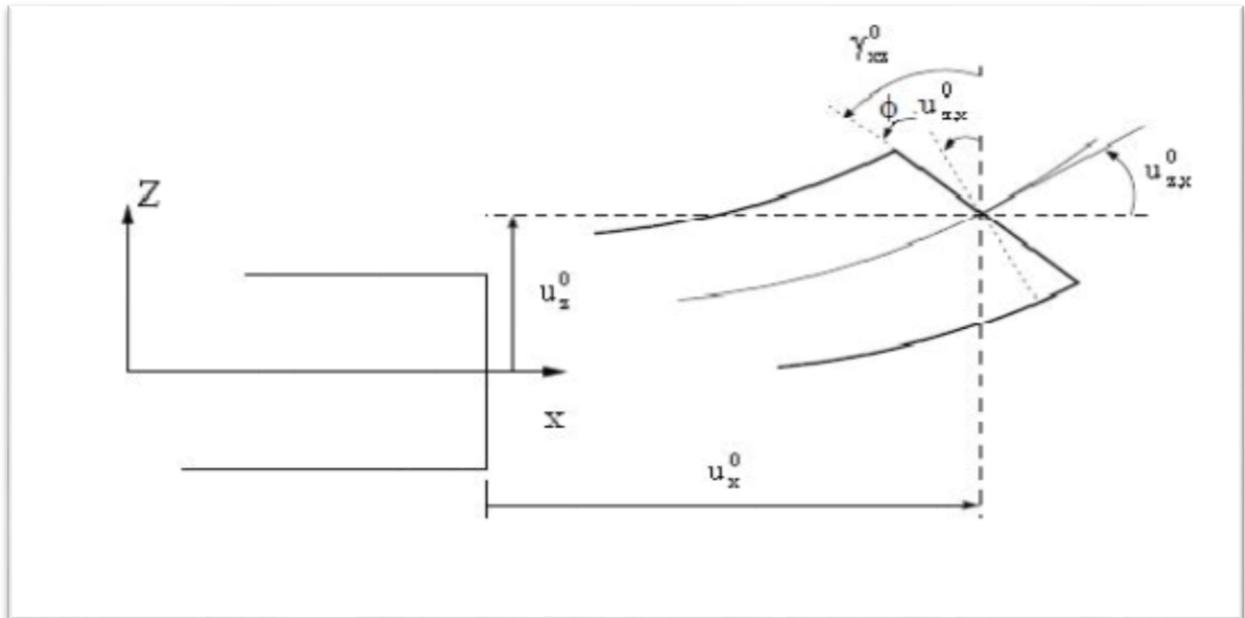


Figure II-5: cinématique du modèle de timoshenko.

Cette solution permet d'affiner les solutions analytiques issues de la théorie classique. Son principe est qu'après déformation, la section plane reste plane mais elle perd sa perpendicularité par rapport à la ligne moyenne de la poutre Ceci est dû au cisaillement transversal.

Dans le cas où nous avons un élancement faible, l'effet du cisaillement devient plus important sur la déformée. Dans ce cas, la fonction (z) est égale à Z . Il existe un cisaillement uniforme et les déformations dues au cisaillement transversal ne sont pas négligées. C'est la théorie de premier ordre (FSDBT).

D'après cette théorie déplacement s'écrit comme suit:

$$u(M) = \begin{cases} u(x, z) = u^0(x) - z\theta(x) + z\varphi^0(x) \\ w(x, z) = w^0(x) \end{cases} \quad \text{II-3}$$

$$u(M) = \begin{cases} u(x, z) = u^0(x) + z\gamma_{xz}^0(x) \\ w(x, z) = w^0(x) \end{cases} \quad \text{II-4}$$

$\gamma_{xz}^0(x)$: C'est la distorsion ou la déformation angulaire mesurée sur la ligne moyenne de la poutre.

Tel que :

$$\gamma_{xz}(x) = \varphi^0(x) - \theta(x) \quad \text{II-5}$$

$\varphi^0(x)$: C'est la rotation totale de la section mesurée sur la ligne moyenne de la poutre.

La distorsion est donnée par la relation suivante:

$$\gamma_{xz}(x) = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = -\theta(x) + \gamma_{xz}^0(x) + \varphi^0(x) \quad \text{II-6}$$

$$\gamma_{xz}(x) = \gamma_{xz}^0(x) \quad \text{II-7}$$

Sachant que la contrainte de cisaillement est égale:

$$\tau_{xz} = G_{xz}\gamma_{xz} = G_{xz}\varphi^0(x) \quad \text{II-8}$$

G_{xz} : est le module de cisaillement transversal qui est supposé constant.

Avec cette théorie, les contraintes tangentielles de cisaillement sont constantes et uniformes sur toute l'épaisseur de la poutre; cela veut dire qu'elles existent même sur les bords supérieurs et inférieurs de la poutre et pourtant il n'ya aucun chargement qui induit le cisaillement.

Cette contradiction mène à introduire un coefficient de correction ($k = 5/6$) pour corriger et maintenir les contraintes et les déformations du cisaillement transversales constantes à travers l'épaisseur de la poutre. Ce facteur a été calculé pour la variété de sections de poutres par (Mindlin et Deresiewicz). « Cowper » et « Murty » ont donné de nouvelles expressions de ce coefficient « k » pour différentes sections de la poutre.

Le non nullité des contraintes tangentielles sur les bords extrêmes de la poutre et l'introduction des coefficients de correction de cisaillement ont menés d'autres chercheurs à essayer de trouver une autre théorie pouvant tenir compte de ces facteurs; c'est "la théorie d'ordre élevé".

II.8 Théories d'Ordre Elevé (HSDT) :

Dans ces théories la distribution des champs de déplacement est non linéaire selon l'épaisseur de la poutre. Elle est plus précise que la théorie du premier ordre puisqu'elle introduit une fonction qui tient compte du phénomène de "gauchissement ". Ce phénomène apparaît lorsque la section transversale de la poutre perd sa planéité. La fonction(z) représente le gauchissement et sa dérivée f'(z) le cisaillement.

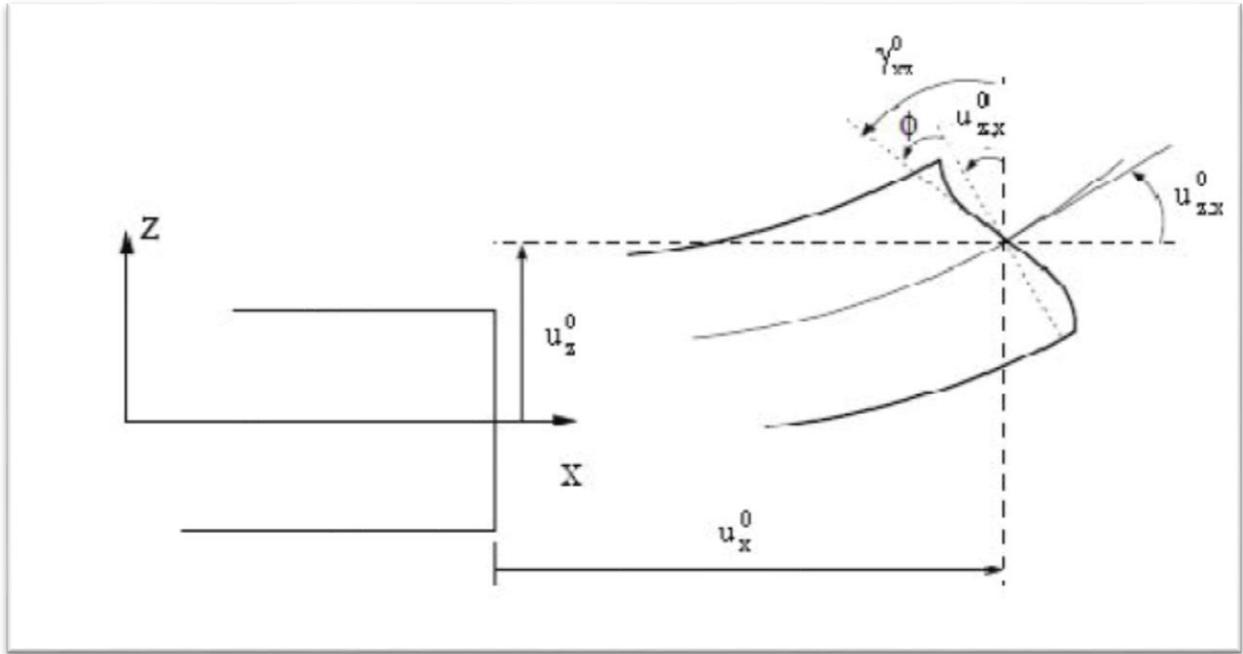


Figure II-6: cinématique d'ordre élevé

Ils sont bien adaptés à la modélisation du comportement des plaques ou des poutres épaisses, où la déformation transverse joue un grand rôle. La plupart des ces modèles utilisent un développement en série de Taylor [28], La précision augmente avec l'ordre de développement. Le champ de déplacement approché pour le troisième ordre, est de la forme [29] :

$$u(x, z) = u^0(x) - z\psi(x) + z^2(x) + z^3\phi(x) \quad \text{II-9}$$

Pour réduire la complexité il faut éliminer les termes d'ordre deux dans le développement de déplacement dans l'épaisseur. Dans ce cas, le champ de déplacement devient:

$$u(M) = \begin{cases} u(x, z) = u(x) - z\theta(x) + f(z)\varphi^0(x) \\ w(x, z) = w^0(x) \end{cases} \quad \text{II-10}$$

$$\gamma_{xz}(x) = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = -\theta(x) + \theta(x) + f'(z)\varphi^0(x) \quad \text{II-11}$$

$$\gamma_{xz}(x) = f'(z)\varphi^0(x) \quad \text{II-12}$$

Pour que les contraintes tangentielles soient nulles sur les bords extrêmes de la poutre, on doit avoir:

$$f'(z)|_{z=\pm\frac{h}{2}} = 0 \quad \text{II-13}$$

C'est la condition qui nous permet d'avoir une répartition parabolique des contraintes de cisaillement sur l'épaisseur de la poutre d'une part et de choisir correctement des fonctions qui répondent à la condition

Selon l'expression de la frontière de cisaillement $f(z)$, quelques modèles d'ordre supérieur se sont distingués dans la littérature. Nous citons en particulier :

- L'approche de (Ambartsumyan 1969) [30] :

$$f(z) = \frac{1}{2}z \left(\frac{1}{4}h^2 - \frac{1}{3}z^2 \right) \quad \text{II-14}$$

L'approche de (Reissner 1945) [31] :

$$f(z) = \frac{5}{4}z \left(1 - \frac{4z^3}{3h^2} \right) \quad \text{II-15}$$

L'approche de (Levinson 1980) [32], (Murthy 1981)[33] et (Reddy 1984)[34] :

$$f(z) = z \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right) \quad \text{II-16}$$

Dans le modèle de (Reddy 1984)[34], le champ de déplacement membranaire est cubique et le déplacement normal « w » est constant. Ce modèle donne une bonne approximation pour les contraintes de cisaillement transverse par rapport à la solution élastique tridimensionnelle. La distribution des contraintes de cisaillement transversal est parabolique dans l'épaisseur. Les conditions aux limites sur les surfaces libres sont satisfaites.

- L'approche de (Touratier 1991) [35] :

$$f(z) = \frac{h \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right)}{\pi} \quad \text{II-17}$$

Touratier propose le modèle "sinus" qui est différent des autres modèles d'ordre supérieur puisqu'il n'utilise pas de fonction polynomiale. Une fonction trigonométrique sinusoïdale est donc introduite pour modéliser la répartition des contraintes de cisaillement dans l'épaisseur.

La fonction de cisaillement transverse s'écrit comme ci dessous [35] :

$$f(z) = \frac{h \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right)}{\pi} = \frac{h}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \left(\frac{\pi z}{h}\right)^{2n+1} \quad \text{II-18}$$

$$= z \left(1 - \frac{\pi^2 z^2}{3! h^2} + \frac{\pi^4 z^4}{5! h^4} - \frac{\pi^6 z^6}{7! h^6} + \dots \right) \quad \text{II-19}$$

Les contraintes de cisaillement transversal déterminées par le modèle "sinus" prennent une forme cosinusoidale dans l'épaisseur de la plaque. La précision de ce modèle par rapport à la solution exacte est meilleure que la théorie de Reddy.

Récemment, (Afaq 2003) propose un modèle exponentiel avec une cinématique plus riche. La fonction de cisaillement transverse est de la forme suivante [36] :

$$f(z) = z e^{\frac{2z^2}{h^2}} \quad \text{II-20}$$

Le choix de la fonction exponentielle permet un développement en puissance pair et impair de la variable z , alors que la fonction (sinus) de (Touratier 1991) ne permet qu'un développement en puissance impair.

Malgré le fait que les modèles d'ordre élevé assurent une continuité de déplacement et de déformation à l'interface, les contraintes de cisaillement Inter-laminaire et les contraintes d'interface, restent discontinues. Ceci présente un inconvénient lors de l'analyse locale de l'interface des structures multicouches dont les propriétés des couches sont très différentes.

II.9 Conclusion :

Dans ce chapitre nous avons présenté les différentes théories des poutres telles que la théorie classique aussi appelée théorie d'Euler Bernoulli (CBT), la théorie de Timoshenko (FSDBT) et les théories d'ordre élevé (HSDT).

On a présenté les différents modèles des poutres avec une approche monocouche. Le modèle monocouche équivalent est mieux adaptée pour les matériaux FGM car il n'y a pas de changement brusque dans les caractéristiques mécaniques.

chapitre III

Généralité sur la Méthode des Éléments Finis.

chapitre III **Généralité sur la Méthode des Eléments Finis.**

III.1 Introduction :

Grâce au développement de l'informatique au années 1960, plusieurs domaines dans l'industrie et particulièrement de l'aéronautique, ont vu une nouvelle méthode numérique qui est appelée la méthode des éléments finis. Elle est certainement la méthode la plus répandue et la plus utilisée de nos jours. Elles représentent un outil puissant d'analyse numérique pour aider les ingénieurs à trouver des solutions approchées des problèmes, parce qu'ils ne cherchent plus des solutions exactes et fermes qui nécessitent énormément d'efforts intellectuels et de temps est qui sont généralement impossible à calculer.

Avant la production, il faut évoluer pour analyser le comportement d'un objet sans une expérimentation. Donc, il est nécessaire de faire une modélisation de la poutre FGM dans ce cas et de résoudre les équations physiques qui régissent les interactions de cette poutre avec les sollicitations extérieures.

III.2 Un bref historique de la MEF :

Quoi que le label Méthode des Eléments Finis fût utilisé pour la première fois en 1960 Lorsqu'il a été utilisé par Ray Clough dans une publication sur les problèmes d'élasticité plane, l'idée de l'analyse par éléments finis date des années d'avant.

La M.E.F (Méthode des éléments finis) est mise au point en 1953 chez Boeing (Seattle, USA, calcul des structures d'ailes d'avion) ; On y développe le premier élément fini, sa matrice de rigidité, l'assemblage et la résolution par la méthode des déplacements (publié par Turner, Clough, Martin et Topp en 1956) . [37]

Quant aux bases théoriques générales, alliant l'analyse des structures en barres et poutres avec celle des solides, elles sont étudiées de 1954 à 1960 (Argyris, Kelsey).[38] Certaines idées apparurent auparavant, en particulier chez les mathématiciens pour résoudre divers problèmes aux limites par exemple celui de la torsion de Saint Venant en divisant la section en triangles, mais elles restèrent sans suite. L'expression élément finie a été inventée par clough en 1960. Années 60, la M.E.F s'attaque à tous les domaines du calcul de structures. La crédibilité des résultats obtenus va permettre l'utilisation de la méthode des éléments finis par des entreprises et des bureaux d'études de taille réduite. C'est évidemment l'apparition d'ordinateurs puissants qui a permis le développement de la simulation numérique. Le rythme d'évolution de

l'informatique est actuellement gigantesque et les possibilités d'application augmentent sans cesse.

III.3 Objectif du la MEF :

- Comprendre les idées fondamentales de la MEF.
- connaître le comportement et l'utilité et de chaque type d'élément.
- Comprendre le comportement physique du problème.
- être capable de préparer un modèle EF convenable pour un problème donné.
- Connaître les limites du modèle par la MEF (outil numérique).
- Avoir un bagage théorie, pour être à même de comprendre comment fonctionnent les logiciels (boîtes noires) ;et de pouvoir réagit efficacement vis-à-vis des messages d'erreurs sur ordinateur.
- Pouvoir consulter sans difficulté les livres et les recueils sur le (Net), concernant la MEF.

III.4 Idée de base de la méthode des éléments finis :

On apprend comme ingénieur débutant à calculer les surfaces et volumes de corps de forme quelconque en les décomposant en un ensemble de corps élémentaire de formes connues pour ensuite l'appliquer au calcul de moments d'inertie ou de centres de gravité. Ce mode de pensée a conduit à la méthode des éléments finis, ou analyse par élément finis (AEF), qui est basée sur l'idée de construire un objet compliqué avec des blocks simples, c'est-à-dire diviser l'objet compliqué en un petit nombre de pièces facilement manipulables.

On peut rencontrer l'application de cette idée simple aussi bien dans la vie de tous les jours qu'en technologie et pour tous les problèmes de l'ingénieur.

Exemples :

- Lego (jeux d'enfants de construction).
- Bâtiment.

III.5 Pourquoi choisir la MEF ?

Les procédés de conception de calcul et d'analyse reposent sur le calcul à la main, l'expérience ou calcul automatique et la simulation par ordinateur.

La MEF c'est la méthode de simulation par ordinateur la plus utilisée par les ingénieurs. C'est une technique essentiellement numérique à partir de laquelle les équations gouvernantes (systèmes d'équation différentielle), sont représentées sous une forme matricielle très adaptée à une solution automatique par ordinateur.

Elle est intégrée dans toutes les applications de logiciels commerciaux de calcul des structures à interface graphique (GUI).

III.6 Principe général :

La Méthode des Éléments Finis (MEF) est souvent considérée comme la méthode la plus appropriée pour des études de cette nature. La méthode des éléments finis fait partie des outils de mathématiques appliquées. En analyse numérique, la méthode des éléments finis est utilisée pour résoudre numériquement des équations aux dérivées partielles. Celles-ci peuvent par exemple représenter analytiquement le comportement dynamique de certains systèmes physiques (mécaniques, thermodynamiques, acoustiques, etc.) La méthode consiste à découper le domaine spatial en petits éléments, également appelés mailles, et à rechercher une formulation simplifiée du problème sur chaque élément, c'est-à-dire à transformer le système d'équations quelconque en un système d'équations linéaires. Chaque système d'équations linéaires peut se représenter par une matrice. Les systèmes d'équations pour tous les éléments sont ensuite rassemblés, ce qui forme une grande matrice ; la résolution de ce système global donne la solution approchée au problème.

III.7 Domaines d'application de la MEF :

Les principaux domaines d'application de la MEF sont au nombre de trois :

III.7.1 Problème d'équilibre et statique :

Dans lequel le comportement du système ne varie pas avec le temps.

III.7.2 Problèmes de dynamique et de stabilité (valeurs propres) :

Ce sont des extensions des problèmes d'équilibre pour lesquelles des valeurs spécifiques ou critiques de certains paramètres sont déterminés.

III.7.3 Problèmes de propagation :

Ils concernent les problèmes où les phénomènes dont le comportement et dépendent du facteur temps.

Tableau III-1:Types application de la méthode des éléments finis.

Spécialité	Problèmes d'équilibre	Problèmes de valeurs Propres	Problèmes de propagation
Génie Civil – structure	Analyse statique des structures : treillis, portiques, laques, coques....	Fréquences et modes propres et stabilité des structures.	Réponse des structures à des charges accidentelles (séisme, incendie).
Géotechnique	Analyses d'excavations stabilité des talus, murs de soutènement, interaction des contraintes dans les sols.	Fréquence et modes propres des ouvrage enterrés et semi-enterrés, et problème d'interaction sol-structure.	Problème de sol-structure dépendant du temps propagation e contraintes dans les sols et les roches.
Hydraulique	Analyse d'écoulement potentiel, à surface libre, écoulement visqueux. Structures hydrauliques et barrage.	Période et modes propres de bassins superficiels, digues, mouvements des liquides dans des conteneurs rigides ou flexibles.	Analyse de problème d'écoulements turbulents et propagation d'ondes. Ecoulements hydrodynamiques.
Génie mécanique	Problème de concentration de contraintes. Analyse de contrainte de matériaux composites ...	Fréquences propres de vibration et stabilité des machines.	Problème de fissures et de factures sous charges dynamiques.

III.8 Equation aux dérivées partielles :

Un certain nombre de problèmes physiques sont décrits par des équations aux dérivées partielles (ÉDP) sur un domaine spatial, un volume. Il s'agit d'une généralisation des équations différentielles aux fonctions de plusieurs variables. Par exemple, si l'on a une

fonction de trois variables $f(x_1, x_2, x_3)$, l'équation suivante: Est une équation aux dérivées partielles. Cette équation est assortie à des conditions aux limites: valeurs de la fonction ou de ses dérivées partielles en certains points. Notons que :

1. La fonction f peut être une fonction vectorielle.
2. L'équation fait souvent intervenir des dérivées secondes $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ ou $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ (voire d'ordres plus élevés), La résolution exacte, analytique, de telles équations devient vite impossible manuellement. Par contre, si l'on découpe le domaine spatial en petites cellules, Appelées «éléments finis» (ÉF), on peut résoudre simplement l'ÉDP sur chaque élément.

III.9 Technique des éléments finis appliquée à l'analyse structurale :

La M.E.F dans l'analyse structurale est une technique qui se base primordialement sur l'idée de décomposer la structure en un ensemble (ou en sous-ensemble) de différents composants, ayant chacun un modèle géométrique avec des propriétés physiques particulières. Notant que la structure peut être continue telle que les plaques, ou ayant par sa nature une forme discrète telle que les treillis. Chaque modèle de composants de la structure est connu comme un type spécifique d'élément finis. Chaque élément fini a une forme structurale bien déterminée et il est interconnecté avec les éléments qui lui sont adjacents par des nœuds ou « Points nodaux ». Les forces agissantes en chaque nœud sont dites « Forces nodales ». L'élément est sujet de déplacements ou rotations aux nœuds, appelés « Degrés de liberté ».

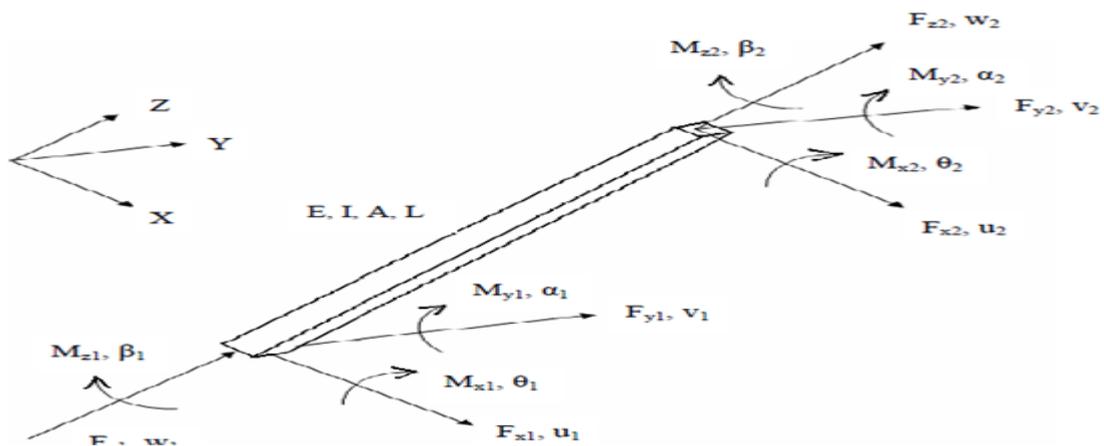


Figure III-1: Élément finis typique pour les structures en treillis.

La figure III-1 représente un seul élément limité par deux nœuds à ses extrémités (noeud1 et noeud2), F_x, F_y, F_z sont les forces qui agissent aux nœuds ainsi que les moments et M_x, M_y, M_z ; u, v et w sont les déplacements nodaux dans les directions X, Y et Z respectivement ; θ, α et β sont les rotations nodales autour des axes X, Y et Z respectivement. Ainsi, pour chaque

élément fini, un ensemble standard d'équations peut être formulé pour mettre en relation les quantités physiques : Forces et Déplacements. Pour former la structure totale, il faut rassembler tous ces éléments, en qui est, mathématiquement, équivalent à superposer toutes les équations simultanées, qu'il est convenable de résoudre par ordinateur.

III.10 Modélisation et discrétisation :

La méthode des éléments finis est donc une procédure générale de discrétisation pour la résolution des problèmes des milieux continus. Donc pour avoir une analyse numérique qui simulera au mieux un problème, il faut effectuer deux opérations essentielles la modélisation et la discrétisation, ces opérations se font en deux temps.

1. La modélisation.
2. La discrétisation ensuite et portent sur les deux aspects principaux du problème pratique.
 - représentation de la géométrie, des charges, des conditions aux limites.
 - Choix des éléments finis et du maillage.

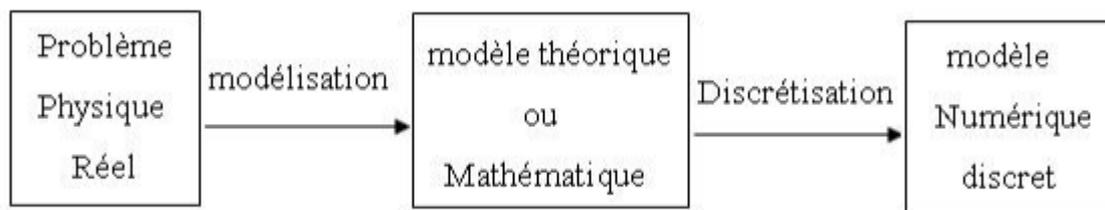


Figure III-2:Étape de l'analyse d'un problème aux limites

III.11 Les propriétés d'un élément fini :

Le découpage en éléments finis permet d'isoler un élément fini pour l'étudier tout en établissant les caractéristiques.

III.11.1 Signalement d'un élément fini :

Le signalement d'un élément fini comprend les points suivants :

III.11.2 Les frontières : Sont respectivement :

- les points (extrémités du segment)
- des segments.

III.11.3 Les nœuds :

Les nœuds définissent la géométrie et assurent la connexion des éléments les uns aux autres, Ils occupent des positions stratégiques comme les extrémités, les sommets, les milieux des arêtes et faces.

III.11.4 Les forces nodales :

À travers les nœuds transitent des forces associées aux degrés de liberté, les unes sont les réactions internes, les autres les forces F dues aux charges appliquées à l'élément (poids propre, charge uniforme, température...)

III.11.5 Degrés de liberté :

Pour tout élément fini, on doit faire le choix d'une ou plusieurs fonctions (en général le champ des déplacements), elles sont exprimées en fonction des valeurs particulières qu'elles prennent aux nœuds valeurs qui deviennent les inconnues nodales ; Par leurs degrés de liberté nodaux communs des différents éléments adjacents, permet de reconstituer, la solution complète (ASSEMBLAGE), tout en veillant à respecter certaines règles, dites critères de convergence.

III.12 Concept de la méthode des éléments finis :

Le concept de base de la méthode des éléments finis est la subdivision du modèle mathématique à des composants disjoints de géométrie simple appelés (Éléments finis), le comportement de chaque élément est exprimé en terme d'un nombre fini de degrés de liberté, le comportement (réponse) du modèle mathématique est considéré, approximativement, celui du modèle discret obtenu par connexion ou assemblage des éléments. [39]

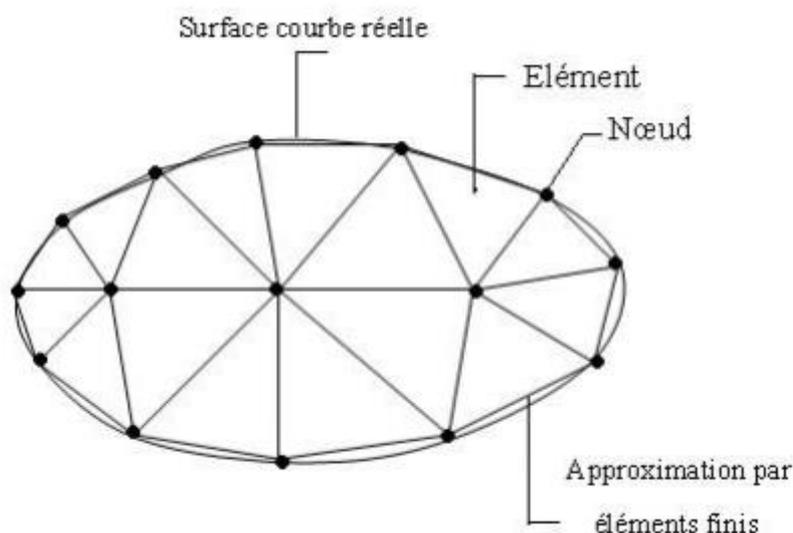


Figure III-3:Maillage du domaine en triangles à trois nœuds.

- **Concept 1 :**

On connaît toutes les équations mais on ne peut pas résoudre manuellement :

$$\begin{cases} L(u) + F = 0 \\ B(u) + g = 0 \end{cases} \leftrightarrow \text{MEF} : k \cdot u = F \text{ (Système d'équations algébriques)}$$

- **L** et **B** sont opérateurs
- **k** : Matrice de rigidité du système
- **u** : Vecteur de déplacement
- **F** : Vecteur force
- **Concept 02 :**

$$k \cdot u = F$$

- **k** : Propriété
- **u** : Comportement
- **F** : Sollicitation

La nature des différents paramètres pour certaines applications est décrite dans le tableau suivant :

Tableau III-2 : Matrices et vecteurs caractéristiques pour certaines applications

	Propriété de K	Comportement U	Sollicitation F
Elasticité	Rigidité	Déplacement	Force
Transfert de chaleur	Conductivité Thermique	Température	Source de chaleur
Fluide	Viscosité	Vitesse	Force interne

- Obtenir les équations algébriques pour chaque élément.
- On Mettre tous les éléments ensembles (processus d'assemblage de tous les éléments).

$$\sum K^e \cdot U^e = \sum F^e \leftrightarrow K \cdot U = F \quad \text{III-1}$$

III.13 Procédures:

- Diviser la structure en un certain nombre de pièces (formant des éléments avec des nœuds).
- Décrire le comportement des quantités physiques pour chaque élément (champ de déplacement - choix d'une forme d'approximation).

- Relier (assembler) les éléments aux nœuds pour former un système d'équations approximatif pour toute la structure.
- Résoudre le system d'équations comportant les inconnues aux nœuds(en génie civil les inconnues sont en général des déplacements).
- Calculer les quantités désirées (en génie civil, il s'agit de contraintes et déformations) pour des éléments choisis.

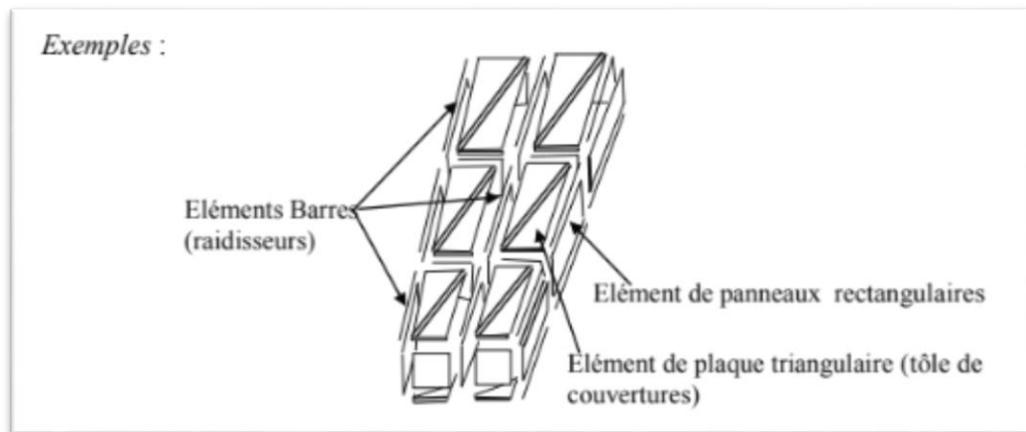


Figure III-4: Décomposition de la structure d'une aile d'avion, premier exemple de discrétisation par Eléments finis de la publication.

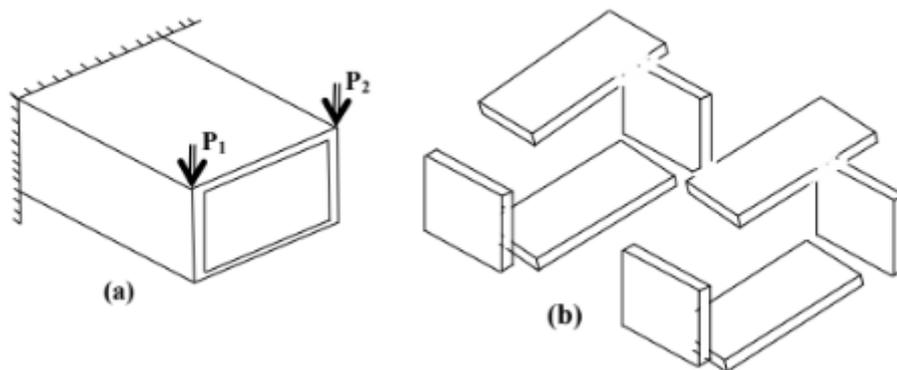


Figure III-5 : Poutre à caisson : (a) structure originale, (b) Modèle éléments finis.

III.14 La méthode des éléments finis en déformation:

Le problème de convergence d'éléments simples formulés à travers l'approche en déplacement pour l'analyse des structures courbes ont montré la nécessité d'intervention au niveau de la discrétisation physique pour améliorer au mieux la solution. Cette intervention consiste en la diminution de la taille des éléments (raffinement h) pour obtenir des résultats

satisfaisants ; l'objectif étant de minimiser l'écart entre la solution exacte et la solution approchée et tendre asymptotiquement vers zéro l'erreur qui en résulte.

Ceci rend le niveau de précision de la solution tributaire du nombre d'éléments à utiliser dans la discrétisation physique. Ce qui pose à ce niveau une problématique en terme économique dans sa mise en œuvre : Quel rapport entre « la précision de la solution » et « le coût pour son obtention » ? Pour répondre à ce questionnement, d'autres études ont été entreprises par Ashwel[40] et utilisant cette fois-ci le modèle en déformation à la place du modèle en déplacement. Cette approche a abouti à des résultats plus performants sans avoir recours à un grand nombre d'éléments dans la discrétisation physique.

Ces résultats ont encouragé beaucoup de chercheurs pour développer des éléments d'ordre supérieurs, des éléments nécessitant uniquement les degrés de liberté essentiels. Ainsi beaucoup d'éléments finis d'élasticité plane et des éléments de coques ont vu le jour. On cite entre autres [41], [42], [43], [44], [45], [46], [47], [48], [49].

III.15 Principe de formulation:

Dans cette approche, l'approximation est faite sur le champ des déformations en considérant l'élément cinématiquement admissible; c'est-à-dire la continuité et l'intégrabilité du champ de déformation à l'intérieur de l'élément.

La démarche à ce niveau consiste à :

- Choisir, en premier lieu, une forme paramétrique simple du champ de déformations (discrétisation fonctionnelle) à l'intérieur des éléments finis de la structure.
- Le champ des déplacements est déduit, en second lieu, par intégration du champ des déformations.
- Il est, enfin, appliqué à chacun des éléments le principe des travaux virtuels.

En considérant la continuité du champ de déplacement dans toute la structure, l'assemblage des fonctionnelles, ainsi obtenues au niveau élémentaire, conduit à un système d'équations qui traduit les conditions de stationnarité de la fonctionnelle dans la structure dans sa globalité.

III.16 La formulation élémentaire au niveau de l'élément fini:

Pour chaque élément et dans un repère local, on choisit une fonction d'interpolation qui représente la variation des déplacements à l'intérieure de cet élément en termes de déplacements nodaux. Puis, on calcule pour chaque élément ses matrices de rigidité et de masse. Ainsi que son vecteur des forces. Ces caractéristiques élémentaires sont transformées par la suite dans le repère global de la structure.

III.17 La formulation globale au niveau de la structure complète:

Elle consiste à rechercher pour la structure complète l'expression matricielle de l'énergie potentielle en fonction des déplacements inconnus entre les nœuds de la structure. Cette étape nécessite l'assemblage des matrices de rigidité et de masse et les vecteurs force et déplacements de la structure à partir des caractéristiques élémentaires (matrices de rigidité et de masse et vecteurs forces et déplacements de chaque élément). L'assemblage des matrices de rigidité et de masse et les vecteurs force.

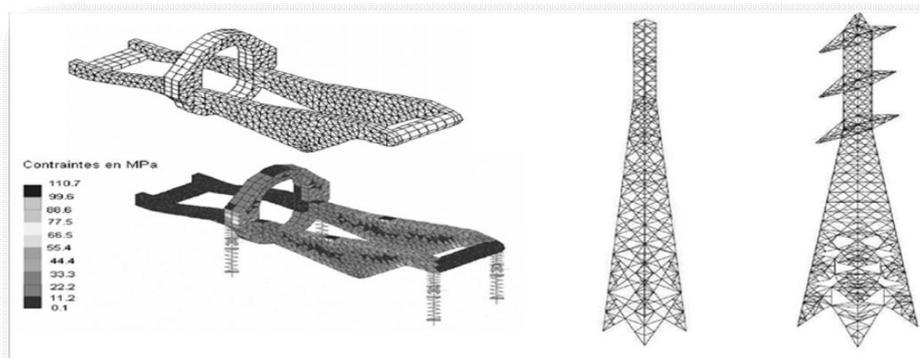


Figure III-6 : Exemples de modélisation par la M.E.F

III.18 Modèles d'éléments finis :

Le plus souvent, le champ interpolé est celui des déplacements, et il est rarement celui des déformations ou des contraintes. Ces interpolations portent sur tout l'élément ou une partie de celui-ci, à l'intérieur ou à la frontière. On peut créer divers types, dits « modèles » d'éléments finis selon la combinaison choisie comme :

III.18.1 Modèle déplacement :

Ce modèle est le plus populaire, le plus connu et le plus développé. Dans cette catégorie, les éléments finis sont basés sur une interpolation du champ des déplacements, étendu à tout l'élément. Alors, les déplacements sont déterminés de manière détaillée et unique dans la structure, donc les contraintes ne peuvent être connues que par certaines moyennes et ne sont pas continués aux frontières.

III.18.2 Modèle en déformation :

Ce modèle présente une approximation qui se fait sur le champ de déformation, puis on intègre pour retrouver le champ de déplacement de telle sorte que les équations d'équilibres et de compatibilité soient satisfaites à l'intérieur de l'élément.

III.19 Relation en déformations et déplacements:

Il s'agit ici de trouver la matrice B reliant les déformations de l'élément à ses déplacements nodaux U^e cette relation est exprimée par :

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}\} = \mathbf{B}U^e \quad \text{III-2}$$

III.19.1 Champ de déplacement :

Les déplacements obtenus sont les déplacements aux nœuds du maillage, et suivent l'interpolation adoptée dans les éléments finis. Soit un élément Ω_e la discrétisation fonctionnelle du champ de déplacement u à l'intérieur de l'élément est donné sous forme matricielle par la relation suivant.

Le champ de déplacement, noté par :

$$U(x) : \begin{bmatrix} u(x, y, z) \\ v(x, y, z) \\ w(x, y, z) \end{bmatrix} \quad \text{III-3}$$

III.19.2 Le champ des contraintes :

Le calcul des contraintes est fait élément par élément, éventuellement en certains points particuliers de chaque élément (par exemple lorsque le degré de l'approximation élément fini est plus grand que 1). Il est aussi possible de calculer tout critère basé sur le tenseur des contraintes (en plasticité par exemple, Von Mises et/ou Tresca). Ceci implique que l'utilisateur fasse preuve de vigilance dans l'analyse des résultats obtenus. En particulier, si cet utilisateur souhaite visualiser un champ de contrainte approché, le logiciel effectuera un « transport aux nœuds », qui n'est pas le même d'un logiciel à un autre (moyenne sur les éléments adjacents, utilisation des fonctions de forme des éléments finis). L'analyse des résultats devra donc être faite en ayant à l'esprit cette transformation graphique, et ne pas « lire » ses graphiques sans discernement.

Le champ des contraintes est noté :

$$\boldsymbol{\sigma}(x) = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad \text{III-4}$$

Relier les contraintes internes $\{\boldsymbol{\sigma}(x, y)\}$ aux déformations $\{\boldsymbol{\varepsilon}(x, y)\}$ et aux déplacements nodaux $\{q^e\}$.

$$\{\boldsymbol{\delta}(x, y)\} = [D]\{\boldsymbol{\varepsilon}(x, y)\} \quad \text{III-5}$$

III.20 La relation entre contraintes et déformations :

Pour un matériau élastique linéaire, les contraintes σ sont des fonctions linéaires des déformations ϵ .

Elles sont exprimées par l'expression :

$$\{\sigma\} = D\{\epsilon\} \quad \text{III-6}$$

Où D est la matrice d'élasticité.

III.21 Calcul des matrices élémentaires:

Cette étape constitue la partie la plus importante du problème.

Le déplacement U^e aux nœuds sont déterminés de telle façon que les contraintes engendrées dans l'élément équilibrent le chargement extérieur F^e , c'est-à-dire que:

$$K^e U^e = F^e \quad \text{III-7}$$

K^e est la matrice de rigidité de l'élément exprimé dans le repère local.

K^e elle est déduite de l'énergie de déformation de l'élément et exprimée par:

$$K^e = \int_0^v B^T D B dv \quad \text{III-8}$$

Il faut aussi calculer la matrice de masse M^e de chaque élément. Cette matrice est déduite de l'énergie cinétique de l'élément (Rocky, 1979). Dans le repère local de l'élément, cette matrice est donnée par l'expression :

$$M^e = \int_0^v \rho N^T N dv \quad \text{III-9}$$

Où ρ est la masse volumique du matériau constituant l'élément.

Finalement, on exprime les matrices K^e , M^e , U^e et F^e dans le repère global défini pour toute la structure.

K^e est la matrice de rigidité de l'élément exprimée dans le repère local. Elle est déduite de l'énergie de déformation de l'élément (Rocky, 1979) et exprimée par :

$$K^e = \int B^T D B dv \quad \text{III-10}$$

Il faut aussi calculer la matrice de masse M^e de chaque élément. Cette matrice est déduite de l'énergie cinétique de l'élément (Rocky, 1979). Dans le repère local de l'élément, cette matrice est donnée par l'expression :

$$M^e = \int_V \rho N^T N dv \quad \text{III-11}$$

Où ρ est la masse volumique du matériau constituant l'élément.

Finalement, on exprime les matrices K^e , M^e , U^e et F^e dans le repère global défini pour toute la structure.

III.22 Relation entre déformation et déplacement :

La déformation est déduite des expressions:

$$\{\varepsilon\} = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{U}_{xi} \\ \bar{U}_{xj} \end{bmatrix} = B \bar{U}^e \quad \text{III-12}$$

la matrice B reliant les déformations de l'élément à ses déplacements nodaux est alors :

$$B = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{III-13}$$

III.23 Equation fondamentale pour éléments finis en termes de déplacements :

La MEF est basée sur la méthode matricielle des déplacements en mécanique des solides et des structures. L'équation fondamentale est :

$$[K]^e \cdot \{q\}^e = \{F\}^e \quad \text{III-14}$$

Avec :

$[K]^e$: Est la matrice de rigidité élémentaire.

$\{q\}^e$: Le vecteur de déplacement aux nœuds (inconnu).

$\{F\}^e$: Le vecteur des forces nodales.

III.24 Principe des déplacements virtuels :

Cette méthode demande l'application du principe des déplacements virtuels (ou des Travaux virtuels) exprimé par la relation dont le développement est donné par

La relation suivante la relation dont le développement est donné parla relation suivante :

$$\int_V \delta \varepsilon^T \sigma dv = \int_V \delta u^T f_v dv + \int_A \delta u^t f_s dA \quad \text{III-15}$$

Sachant que :

$$\{\delta u\} = \{N\}\{\delta q^e\} \quad \text{III-16}$$

III.25 Vecteur des forces nodales :

L'approximation des déplacements à partir uniquement des coefficients des polynômes d'interpolation n'a pas de sens physique évident. Aussi pour des raisons de compréhension, on exprime les déplacements sur un élément à partir des déplacements de ces sommets, ou d'autre point de la figure, appelé **Nœud**. Nous allons développer un exemple avec un triangle à trois nœuds.

Le vecteur des sollicitations externes, communément appelé vecteur des forces, pour un élément est composé de trois parties :

$$\{F\}^e = \int_{v^e} [N]^T \cdot \{f_i\} dv^e + \int_{s^e} [N]^T \{x_i\} ds^e + \sum_{i=1}^n P_i \quad \text{III-17}$$

Avec (P_i) : est une charge concentrée aux i (nœuds).

De manière générale, un élément de structure sera de type poutre si l'une de ses dimensions (la longueur) est supérieure devant les deux autres. Il est à noter que ce type d'élément appelé élément "barre" quand les forces extérieures sont axiales.

III.26 Programme de résolution statique par la MEF :

On a présenté dans ce chapitre les étapes nécessaires à l'obtention de la matrice de rigidité élémentaire. La résolution d'un problème par la méthode des éléments finis entraîne le calcul de la matrice de rigidité de toute la structure. Dans cette méthode, les quantités inconnues sont les déplacements et l'objet de la résolution est la détermination des déplacements nodaux. Une fois que ceux-ci sont calculés, on peut obtenir les contraintes de l'élément en utilisant la matrice $[k]$.

La figure résume les parties de base du programme pour la résolution complète d'un problème par la méthode des éléments finis :

- Entrée des données décrivant le maillage (nœuds et éléments).
- Construction des matrices et vecteurs élémentaires, puis assemblage de ceux-ci pour former la matrice globale et le vecteur global.

- Résolution du système d'équations après prise en compte des conditions aux limites. ·
Impression des résultats après calcul éventuel des variables additionnelles (déplacement, contraintes).

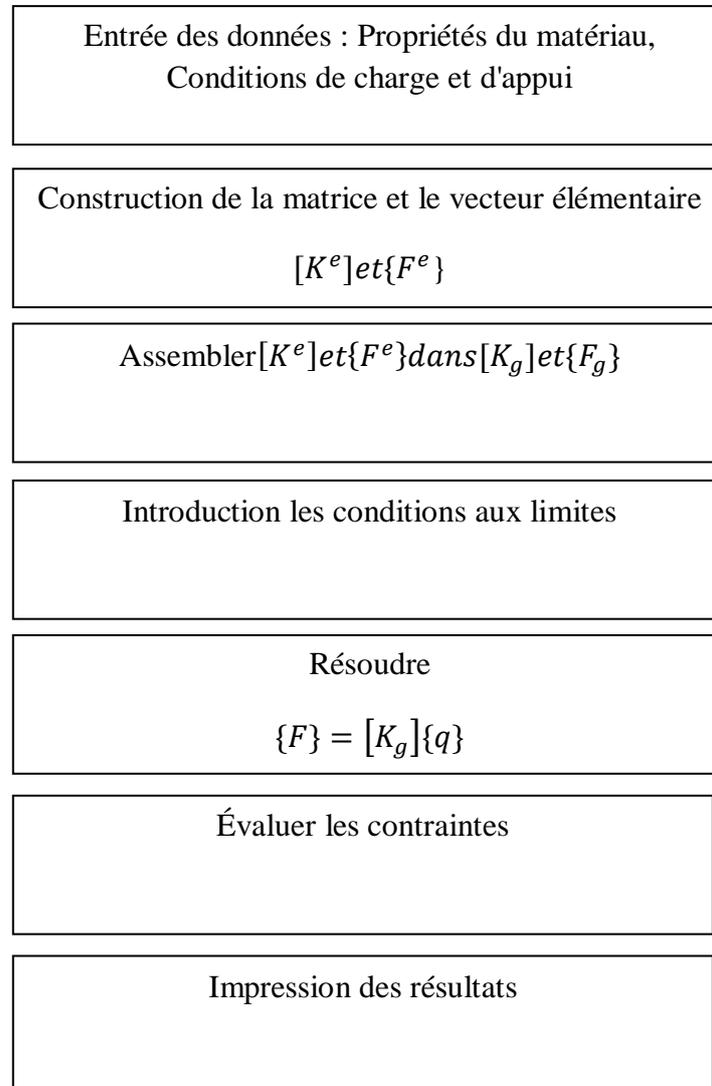


Figure III-7: parties de base du programme pour la résolution d'un problème par la méthode des éléments finis

III.27 Conclusion :

Le calcul d'une structure par la méthode des éléments finis exige, pour être efficace d'accorder le plus grand soin à la phase de modélisation du comportement de plus en plus performant, et prenant en compte les spécifications de ces matériaux-structures. Du point de vue pratique, les méthodes numériques, notamment le calcul par la méthode des éléments finis est essentiel pour la conception et le calcul de ces structures complexes. Et cette méthode à travers les deux approches en déplacement et en déformation ; utilisés pour l'étude des poutres FGM.

Enfin elle consiste à déterminer de manière approximative les déplacements d'un certain nombre de points du milieu appelés « nœuds » avec Le Modèle de déformation présente une interpolation directe sur les déformations permet d'avoir une meilleure précision sur ces grandeurs, sur les contraintes et sur les déplacements (obtenus par intégration), contrairement à la formulation classique où les déformations sont obtenues par dérivation du champ adopté pour déplacements.

chapitre IV

Modélisation d'une Poutre FGM par la MEF.

chapitre IV Modélisation d'une Poutre FGM par la MEF.

IV.1 Introduction :

L'étude ou l'analyse du comportement des objets n'est pas une science récente et pourtant elle connaît depuis quelques années un regain d'intérêt pour des besoins de conception et de dimensionnement des structures répondant aux meilleures conditions de fonctionnement, de sécurité, d'économie, et d'isolation acoustique. Face à ces exigences, les matériaux FGM paraissent une solution idéale grâce à leur multifonctionnalité intégrée.

Les poutres sont largement utilisées dans les structures civiles, mécaniques, aéronautiques, et surtout aérospatiales. Cela est principalement dû à leur très grande résistance et rigidité spécifique et l'avantage de l'adaptation de leurs propriétés pour répondre aux exigences de la pratique, ce qui a rendu nécessaire l'étude de leur comportement statique et dynamique.

Donc, dans ce présent chapitre, on va faire une étude analytique du comportement statique d'une poutre en matériaux à gradient fonctionnel en négligeant l'effet de cisaillement.

D'abord, on va développer un modèle d'éléments finis pour analyser le comportement statique des poutres en flexion caractérisée par une graduation matérielle à travers l'épaisseur. Les solutions analytiques sont déterminées en appliquant la méthode des éléments finis. La détermination de la flèche et la contrainte normale développée dans l'épaisseur des poutres soumises à la flexion est habituellement effectuée sous quelques théories déjà existantes dans la littérature.

IV.2 Description du problème:

On considère une poutre en FGM de longueur L , épaisseur b et hauteur h . Dont les coordonnées x et y définissent le plan de la poutre, tandis que l'axe z origine à la surface du milieu de la poutre et dans le sens de l'épaisseur. La poutre est soumise à une charge uniformément répartie q .



Figure IV-1:une poutre en FGM.

IV.3 Formulation en éléments :

IV.3.1 Champs de déplacement :

Dans le calcul de cette poutre FGM l'effet de cisaillement est négligé.

Le champ de déplacement de n'importe quel point M situé à (x, z) de la poutre s'écrit comme suit :

$$u = -z \cdot \frac{\delta w}{\delta x} \quad \text{IV-1}$$

$$w = w(x) \quad \text{IV-2}$$

Où u et w sont respectivement les déplacements ; axial et transversal de n'importe quel point situé au plan médian.

IV.3.2 Le champ de déformation :

Le champ de déformation est obtenu grâce à la formule suivante :

$$\varepsilon_x = \frac{du}{dx} = -z \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad \text{IV-3}$$

ε_x est la déformation normale suivant la direction x.

IV.3.3 Les contraintes normales :

Considérant le matériau de poutre FGM obéit à la loi de Hooke, L'expression des contraintes peut être déterminée comme :

$$\sigma_x = E(z) \cdot \varepsilon_x \quad \text{IV-4}$$

$E(z)$ est le module de Young du matériau FGM.

IV.3.4 Principe des travaux virtuels :

Les travaux virtuels des efforts internes et externes est exprimé par :

$$W_{int} - W_{ext} = 0 \quad \text{IV-5}$$

$$\int_v \{\varepsilon\}^T \cdot \{\sigma\} dv - \int_s \{w\}^T \cdot \{F\} ds = 0 \quad \text{IV-6}$$

Le déplacement transversale en un point de coordonnées x de la poutre est données par :

$$w(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 + \alpha_4 x^3 \quad \text{IV-7}$$

Ou : $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ sont des constantes.



Figure IV-2: un élément de poutre.

Il peut être écrit comme suit :

$$w(x) = N_1(x) \cdot w_1 + N_2(x) \cdot \theta_1 + N_3(x) \cdot w_2 + N_4(x) \cdot \theta_2 \quad \text{IV-8}$$

Sous forme matricielle on obtient l'équation suivante :

$$w(x) = \langle N_1 N_2 N_3 N_4 \rangle \begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_1 \\ w_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \quad \text{IV-9}$$

w_i est le déplacement transversal de chacune des nœuds.

θ_i est la rotation de chacune des nœuds.

N_1, N_2, N_3 et N_4 sont les fonctions d'interpolation.

$$w(x) = \sum_{i=1}^4 N_i(x) \cdot u_i \quad \text{IV-10}$$

Avec :

$$u_i = \langle w_1 \quad \theta_1 \quad w_2 \quad \theta_2 \rangle^T \quad \text{IV-11}$$

Donc le champ de déplacement devient :

$$\begin{cases} u = -z. \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i(x)}{\partial x} \cdot u_i \\ w = \sum_{i=1}^4 N_i(x) \cdot u_i \end{cases} \quad \text{IV-12}$$

Le champ de déformation sera écrit comme suit :

$$\varepsilon_x = -z. \sum_{i=1}^4 \frac{\partial^2 N_i(x)}{\partial x^2} \cdot u_i \quad \text{IV-13}$$

Et la contrainte normale :

$$\sigma_x = -E(z).z. \sum_{i=1}^4 \frac{\partial^2 N_i(x)}{\partial x^2} \cdot u_i \quad \text{IV-14}$$

L'équation sera :

$$\begin{aligned} \int_v z^2 \cdot \left(\sum_{i=1}^4 \frac{\partial^2 N_i(x)}{\partial x^2} \cdot u_i \right)^T \cdot E(z) \cdot \sum_{i=1}^4 \frac{\partial^2 N_i(x)}{\partial x^2} \cdot u_i dv & \quad \text{IV-1} \\ - \int_s \left(\sum_{i=1}^4 N_i(x) \cdot u_i \right)^T \cdot \{F\} ds = 0 & \quad 5 \end{aligned}$$

$$\int_A E(z).z^2 dA. \int_0 \left(N_{1,xx} w_1 + N_{2,xx} \theta_1 + N_{3,xx} w_2 + N_{4,xx} \theta_2 \right)^T \cdot \langle N_{1,xx} \quad N_{2,xx} \quad N_{3,xx} \quad N_{4,xx} \rangle \quad \text{IV-16}$$

$$\int_s \left(\langle N_1 N_2 N_3 N_4 \rangle \cdot u_i \right)^T \cdot \{F\}$$

$$\begin{aligned} \int E(z)z^2 dA. \int \begin{bmatrix} N_{1,xx} \\ N_{2,xx} \\ N_{3,xx} \\ N_{4,xx} \end{bmatrix} \cdot \{u_i\}^T \cdot \langle N_{1,xx} \quad N_{2,xx} \quad N_{3,xx} \quad N_{4,xx} \rangle \cdot \{u_i\} \\ - \int_s \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F_y \\ M \\ F_y \\ M \end{bmatrix} \cdot \{u_i\}^T ds = 0 \end{aligned} \quad \text{IV-17}$$

Par l'utilisation du principe des travaux virtuel, le système des équations d'élément fini peut être exprimé comme suit :

$$\int E(z).z^2 dA \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13}k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23}k_{24} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33}k_{34} \end{bmatrix} \cdot \{u_i\} = \begin{bmatrix} N_1.F \\ N_2.M \\ N_3.F \\ N_4.M \end{bmatrix} \quad \text{IV-18}$$

Elle est sous la forme de l'équation fondamentale d'éléments finis :

$$[k].\{u\} = \{F\} \quad \text{IV-19}$$

$[k]$: La matrice de rigidité globale.

$\{u\}$: Le vecteur des déplacements nodaux.

$\{F\}$: Le vecteur des forces.

Avec les composants de la matrice de rigidité :

- 1ere ligne :

$$k_{11} = \int_0^{L^{(e)}} N_{1,xx}^2 dx. \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} E(z).z^2 . dz \quad \text{IV-20}$$

$$k_{12} = \int_0^{L^{(e)}} N_{1,xx} \cdot N_{2,xx} dx. \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} E(z).z^2 . dz \quad \text{IV-21}$$

$$k_{13} = \int_0^{L^{(e)}} N_{1,xx} \cdot N_{3,xx} dx. \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} E(z).z^2 . dz \quad \text{IV-22}$$

$$k_{14} = \int_0^{L^{(e)}} N_{1,xx} \cdot N_{4,xx} dx. \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} E(z).z^2 . dz \quad \text{IV-23}$$

- 2eme ligne :

$$k_{21} = \int_0^{L^{(e)}} N_{2,xx} \cdot N_{1,xx} dx. \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} E(z).z^2 . dz \quad \text{IV-24}$$

$$k_{22} = \int_0^{L^{(e)}} N_{2,xx}^2 dx. \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} E(z).z^2 . dz \quad \text{IV-25}$$

$$k_{23} = \int_0^{L^{(e)}} N_{2,xx} \cdot N_{3,xx} dx. \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} E(z).z^2 . dz \quad \text{IV-26}$$

$$k_{24} = \int_0^{L^{(e)}} N_{2,xx} \cdot N_{4,xx} dx \cdot \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} E(z) \cdot z^2 \cdot dz \quad \text{IV-27}$$

- 3^{ème} ligne :

$$k_{31} = \int_0^{L^{(e)}} N_{3,xx} \cdot N_{1,xx} dx \cdot \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} E(z) \cdot z^2 \cdot dz \quad \text{IV-28}$$

$$k_{32} = \int_0^{L^{(e)}} N_{3,xx} \cdot N_{2,xx} dx \cdot \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} E(z) \cdot z^2 \cdot dz \quad \text{IV-29}$$

$$k_{33} = \int_0^{L^{(e)}} N_{3,xx}^2 dx \cdot \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} E(z) \cdot z^2 \cdot dz \quad \text{IV-30}$$

$$k_{34} = \int_0^{L^{(e)}} N_{3,xx} \cdot N_{4,xx} dx \cdot \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} E(z) \cdot z^2 \cdot dz \quad \text{IV-31}$$

- Et la 4^{ème} ligne :

$$k_{41} = \int_0^{L^{(e)}} N_{4,xx} \cdot N_{1,xx} dx \cdot \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} E(z) \cdot z^2 \cdot dz \quad \text{IV-32}$$

$$k_{42} = \int_0^{L^{(e)}} N_{4,xx} \cdot N_{2,xx} dx \cdot \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} E(z) \cdot z^2 \cdot dz \quad \text{IV-33}$$

$$k_{43} = \int_0^{L^{(e)}} N_{4,xx} \cdot N_{3,xx} dx \cdot \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} E(z) \cdot z^2 \cdot dz \quad \text{IV-34}$$

$$k_{44} = \int_0^{L^{(e)}} N_{4,xx}^2 dx \cdot \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} E(z) \cdot z^2 \cdot dz \quad \text{IV-35}$$

IV.4 Résultats numériques et discussion :

Dans cette étude, l'analyse de flexion des poutres FGM simplement appuyées par la méthode des éléments finis est effectuée pour discussion.

Exemple 1:

Pour la poutre FGM, les propriétés matérielles utilisées dans la présente étude sont : Céramique (P1, alumine, Al₂O₃), E_c=380GPa, Métal (P2, Aluminium, Al), E_m=70GPa.

Les résultats du déplacement transversal (w), les contraintes normales sont normalisées par les équations suivantes respectivement :

$$\bar{w} = 100 \frac{E_m h^3}{q a^4} w \left(\frac{a}{2} \right), \bar{\sigma}_{xx} = \frac{h}{q a} \sigma \left(\frac{a}{2}, \frac{h}{2} \right)$$

Le tableau IV-1 présente les flèches et les contraintes non dimensionnelles d'une poutre FGM soumise à une charge uniformément répartie q pour différents paramètres du matériau k et différents rapports L/h .

Tableau IV-1: Comparaison des flèches et des contraintes non-dimensionnelles de la poutre FGM sous charge uniformément répartie. (b=0.1)

k	L/h=5			L/h=20		
	NE	\bar{w}	$\bar{\sigma}_{xx}$	NE	\bar{w}	$\bar{\sigma}_{xx}$
0	4x2	28.423	37.49	4x2	28.423	149.99
	8x2	28.692	37.49	8x2	28.692	149.99
	16x2	28.760	37.50	16x2	28.760	149.99
	CBT [50]	28.78	37.5	CBT [50]	28.78	150
1	4x2	54.67	91.45	4x2	54.674	365.81
	8x2	52.37	94.5	8x2	52.37	378.01
	16x2	50.68	96.34	16x2	50.68	385.36
	CBT [50]	51.02	97.5	CBT [50]	51.02	387.2
2	4x2	68.46	133.45	4x2	68.463	533.81
	8x2	63.32	137.19	8x2	63.326	578.76
	16x2	60.2	140.34	16x2	60.201	561.386
	CBT [50]	61.8	141.4	CBT [50]	61.8	563.5
5	4x2	81.58	150.6	4x2	81.586	602.407
	8x2	76.43	155.48	8x2	76.438	621.94
	16x2	73.08	159.02	16x2	73.086	636.08
	CBT [50]	74.1	160.6	CBT [50]	74.1	637.4

Nous observons que les valeurs numériques obtenues en utilisant la formulation en éléments finis sont satisfaisantes en comparaison avec ceux de la théorie des poutres (CBT)[50], tout en augmentant le nombre d'éléments, pour tous les paramètres du matériau k et les rapports a/h . Cela implique que notre modèle numérique est validé.

Notons qu'on augmente le nombre d'éléments pour que les résultats divergent.

Pour illustrer l'effet de paramètre k et le rapport a/h sur le comportement de la poutre FGM sous une charge uniformément répartie, la contrainte normale non dimensionnelle et la flèche sont représentés sur les figures IV-3, IV-4 et IV-5.

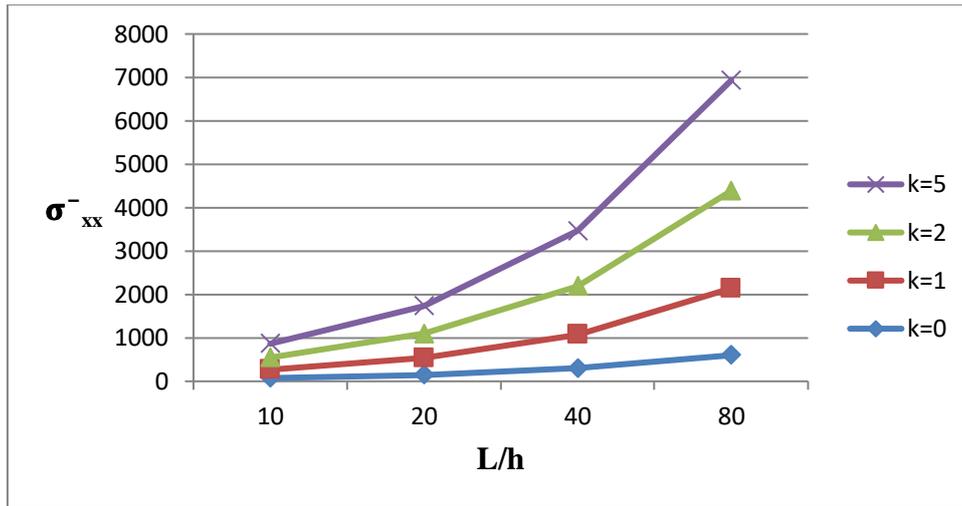


Figure IV-3: La variation de la contrainte normale non dimensionnelle en fonction de L/h d'une poutre FGM soumise sous une charge uniformément répartie.

Nous remarquons que la contrainte augmente avec l'augmentation du rapport L/h ainsi que le paramètre du matériau k . Ceci est dû à l'influence du module de Young qui est élevé pour la céramique par rapport à celui du métal.

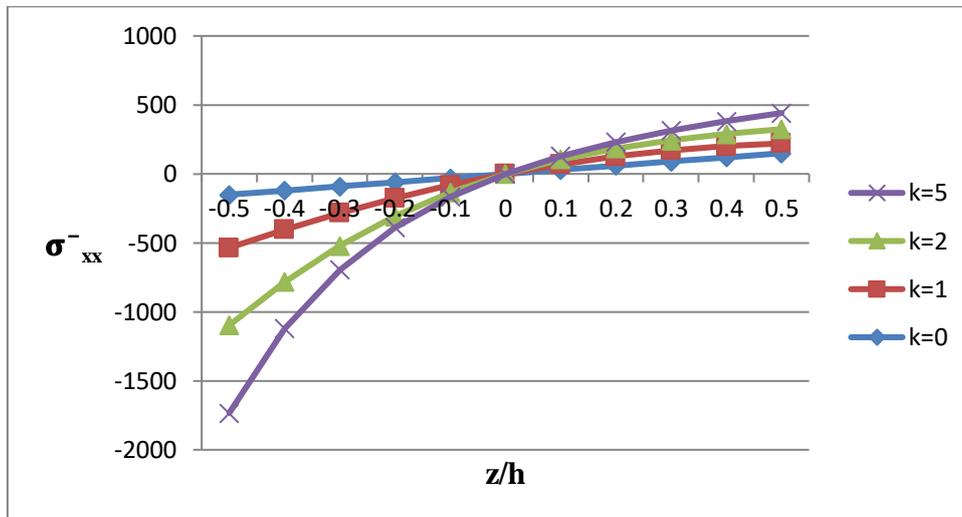


Figure IV-4: La distribution des contraintes normales dans la direction de l'épaisseur pour $L/h=20$.

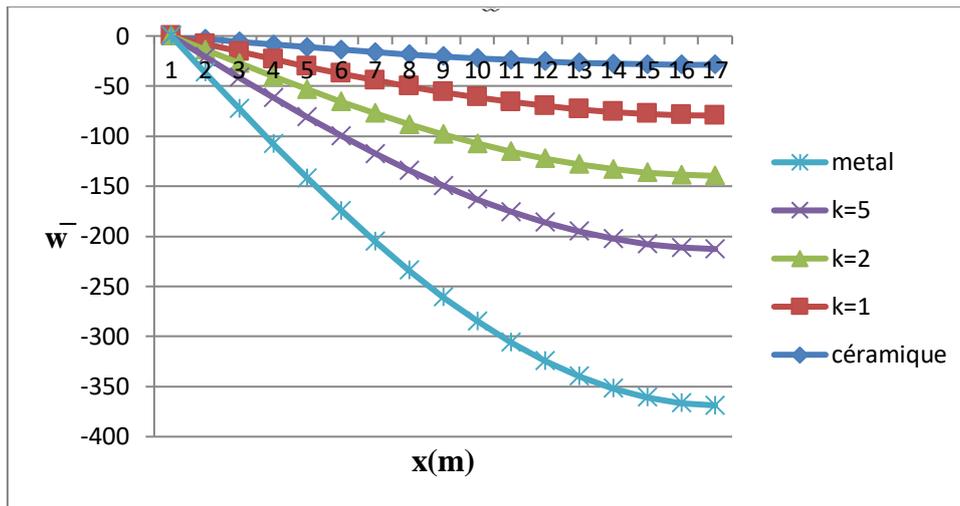


Figure IV-5: L'évolution de la flèche totale le long de la poutre en fonction des divers paramètres du matériau.

Les figures IV-4 et IV-5 présentent la distribution de la flèche et de la contrainte normale de la poutre FGM en fonction des différents élancements et différents paramètres du matériau k , on constate que les contraintes de compression sont sur les surfaces supérieures (face en céramique) et les contraintes de traction sont sur les surfaces inférieures (face en métal). Ces distributions sont linéaires pour les poutres homogènes (poutres entièrement en céramique). Cependant, la distribution de la contrainte normale n'est pas linéaire pour la poutre FGM avec des paramètres du matériau $k=1, 2$ et 5 , l'amplitude des contraintes de compression et de traction sont inégales en grandeur pour la poutre avec le paramètre du matériau k utilisé. De plus les contraintes de compression sont plus grandes en valeur absolue par rapport à la contrainte de traction.

Exemple 2 :

Cet exemple nous s'intéressons une poutre FGM composé d'aluminium ($E_m = 70$ GPa) et de Zirconium ($E_c = 200$ GPa,) pour observer l'influence du changement des matériaux sur les flèches et les contraintes normale des poutres.

On va faire une comparaison entre le comportement les deux matériaux :

Matériau 1 : $E_m = 70$ GPa ; $E_c = 380$ GPa

Matériau 2 : $E_m = 70$ GPa ; $E_c = 200$ GPa

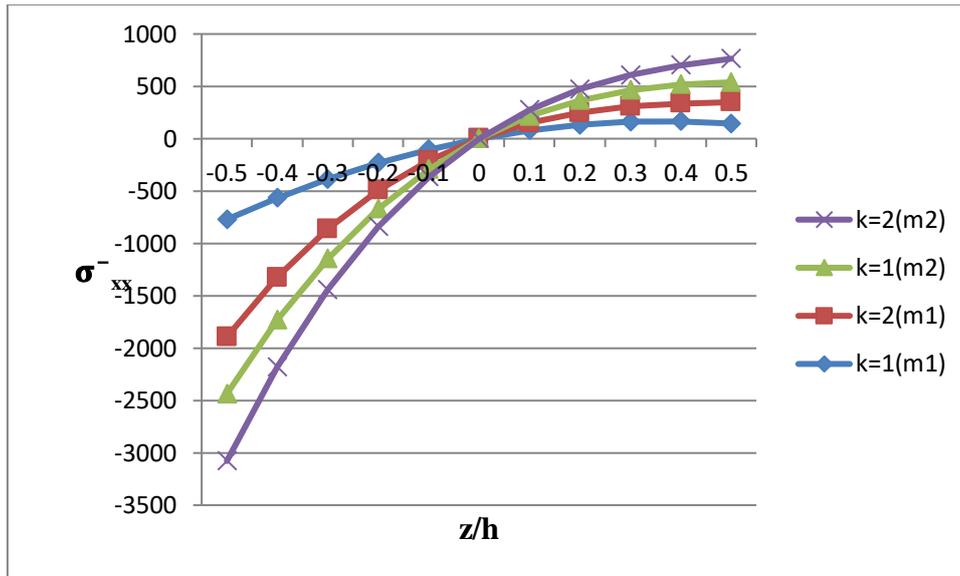


Figure IV-6: Comparaison de la distribution des contraintes normales pour matériau 1 et matériau 2 pour $L/h=40$.

On remarque que les valeurs des contraintes de la poutre en matériau 1 sont plus grandes que les valeurs de matériau 2. Cela implique que le changement de matériau influe sur le comportement des poutres. Ceci est du à l'influence du module de Young.

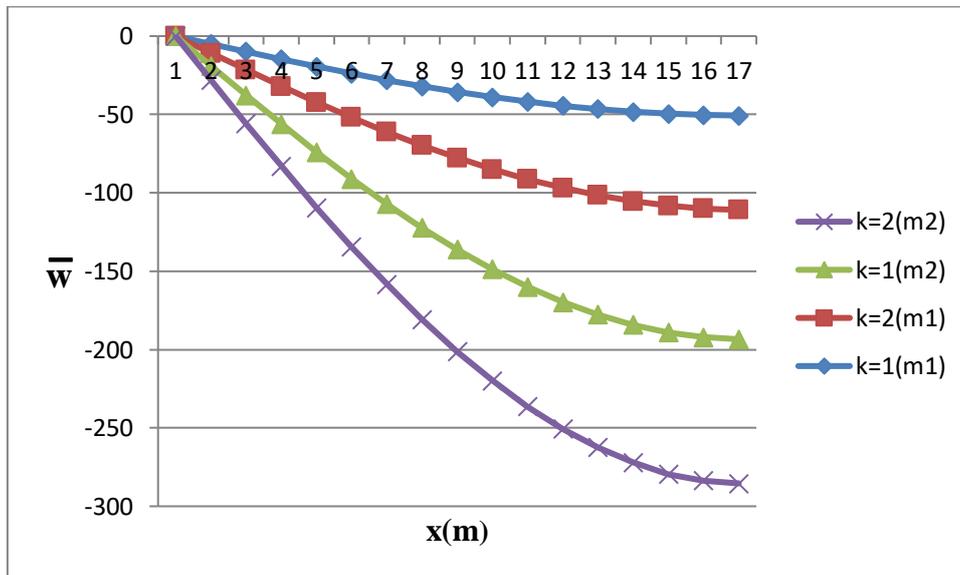


Figure IV-7: Comparaison de l'évolution de la flèche totale le long de la poutre en fonction des divers paramètres du matériau 1 et 2.

Nous observons que la flèche augmente avec l'augmentation du paramètre k du matériau et diminution du module de Young pour les deux cas (m1 et m2).

IV.5 Conclusion :

Dans ce chapitre, nous avons présenté la formulation théorique d'un élément fini en FGM, en utilisant la théorie d'Euler Bernoulli (CBT). Puis, nous avons abordé la validation de cet élément pour l'analyse de comportement statique des poutres isotropes ainsi que des poutres en FGM à travers une application en flexion. On peut conclure que l'utilisation de l'élément fini développé est capable de donner d'excellents résultats pour le comportement statique. Par ailleurs, on a aussi montré à travers une étude paramétrique, l'effet de certains paramètres, tels que le paramètre du matériau et le rapport L/h sur cette analyse.

Conclusion Générale

Conclusion générale :

Dans cette étude, un élément fini avec deux degré de liberté par nœud, a été développé, en utilisant la théorie d'Euler Bernoulli (CBT). Cet élément est destiné à l'analyse du comportement statique des poutres fonctionnellement gradué. La performance, la fiabilité et la polyvalence de l'élément développé ont été évaluées à travers une série d'applications en des poutres isotropes, et des poutres FGM avec un chargement uniformément répartie, de géométrie et des conditions aux limites. Les résultats obtenus ont été comparés avec des solutions analytiques de références, et ceux obtenus par des modèles d'éléments finis. Pour l'analyse statique les exemples numériques montrent que les éléments finis développés sont capables de donner d'excellents résultats. En plus, on a montré à travers une étude paramétrique, l'effet de certains paramètres tels que le paramètre de matériau k et le rapport a/h , sur la variation du déplacement transversal et les contraintes normales.

En perspectives à ce travail, nous envisagerons d'utiliser l'analyse numérique par éléments finis pour les cas suivants :

- ❖ Analyse du comportement statique et de la stabilité des poutres FGM par la présente méthode numérique pour les différentes conditions d'appuis.
- ❖ Application de la présente analyse pour d'autres types de matériaux et/ou structures comme par exemple les plaques, poutres et coques en composites stratifiés, en matériaux sandwichs, ...etc.
- ❖ Application pour d'autres conditions de chargement (thermomécaniques, hygrothermiques, ...etc.).
- ❖ Validation du présent modèle analytique avec d'autre solution numérique en utilisant un autre moyen de calcul (nouvelle théorie d'ordre élevée).

Enfin, on peut dire que ce modeste travail s'inscrit dans le cadre de la contribution de notre université dans le domaine du comportement des poutres fonctionnellement graduée, précisément leurs comportements statiques.

Références bibliographiques

Références bibliographiques :

- [1] Patrick HairyTM, « les-matériaux-a-gradient-de fonction », 01/02/2021, CTIF.
URL : <https://metalblog.ctif.com/2021/02/01/les-matériaux-a-gradient-de-fonction/>
- [2] Koizumi, M. 1997. "FGM Activities In Japan". *Composites Part B: Engineering* 28 (1-2): 1-4. doi:10.1016/s1359-8368(96)00016-9.
- [3] Boch, P., Chartier, T., and Huttepain, M. 1986. "Tape casting of Al₂O₃/ZrO₂ laminated composites". *Journal of the American Ceramic Society*. 69(8), C-191. doi:10.1111/j.1151-2916.1986.tb04836.x.
- [4] Uchida, Y., Kato, K., Higa, S., Hayashi, N., and Uchida, Y. 2004. "Air Purification Using Titanium Functionally Graded Materials Produced by Progressive Lamination Method". *Transactions-Materials Research Society Of Japan*, 29, 2713-2716.
- [5] Gayen, D. (2013). Finite element based vibration and stability analysis of functionally graded rotating shaft system under thermal environment. Thèse de doctorat.
- [6] Niino, M., and Kisara, K. 2004. "The Present Status of the Functionally Graded Materials, and Future Prediction". *Journal of the Japan Society of Powder and Powder Metallurgy*, 51(4), 242-249. doi:10.2497/jjspm.51.242.
- [7] Hopkinson, N., Hague, R., and Dickens, P. (Eds.). 2006. "Rapid manufacturing: an industrial revolution for the digital age". John Wiley & Sons.
- [8] Saiyathibrahim, A., Mohamed, N. S. S., and Dhanapal, P. (2015). Processing techniques of functionally graded materials—a review. In *International Conference on Systems, Science, Control, Communication, Engineering and Technology* (pp. 98-105).
- [9] Benferhat, R. 2017. "Analyse et modélisation de l'influence du cisaillement transverse sur le comportement mécanique des plaques en matériaux à gradient de propriétés". (Doctoral dissertation).
- [10] Gérard BERANGER, Georges CIZERON, « POUDRES MÉTALLURGIE DES », *Encyclopædia Universalis* [en ligne], consulté en 2021.
URL : <https://www.universalis.fr/encyclopedie/metallurgie-des-poudres/>
- [11] Ramachandran, T. Kokula, Krishna. Hari, K. Thiruvengadam, B. Daniel, James. 2015. *Proceedings of the International Conference on Systems, Science, Control, communication, Engineering and Technology*, 10-11, Karpagam Institute of Technology, Coimbatore.
- [12] EL-Wazery, M. S. 2013. "Electrical And Mechanical Performance Of Zirconia-Nickel Functionally Graded Materials". *International Journal Of Engineering* 26 (4 (A)). doi:10.5829/idosi.ije.2013.26.04a.06.

Références bibliographiques

- [13] Katayama, T., Sukenaga, S., Saito, N., Kagata, H., and Nakashima, K. (2011). Fabrication of Al₂O₃- W functionally graded materials by slipcasting method. In IOP Conference Series: Materials Science and Engineering (Vol. 18, No. 20, p. 202023). IOP Publishing.
- [14] Harold Osborne, *The Oxford Companion to the Decorative Arts*, Oxford University Press, 1975, p. 746. (ISBN 0-19-866113-4).
- [15] Dumont, Anne-Laure, Jean-Pierre Bonnet, Thierry Chartier, and José M.F. Ferreira. 2001. "Mosi₂/Al₂O₃ FGM: Elaboration By Tape Casting And SHS". *Journal Of The European Ceramic Society* 21 (13): 2353-2360. doi:10.1016/s0955-2219(01)00198-4.
- [16] Wu, A.H., W.B. Cao, C.C. Ge, J.F. Li, and A. Kawasaki. 2005. "Fabrication And Characteristics Of Plasma Facing Sic/C Functionally Graded Composite Material". *Materials Chemistry And Physics* ,91(2-3): 545-550. doi:10.1016/j.matchemphys.2004.12.038.
- [17] Jamaludin, S. N. S., Mustapha, F., Nuruzzaman, D. M., Basri, S. N. (2013). "A review on the fabrication techniques of functionally graded ceramic-metallic materials in advanced composites". *Scientific Research and Essays*, 8(21), 828-840.
- [18] Watari, Fumio, H. Kondo, Shingo Matsuo, Rika Miyao, Atsuro Yokoyama, Mamoru Omori, and Toshio Hirai et al. 2003. "Development Of Functionally Graded Implant And Dental Post For BioMedical Application". *Materials Science Forum* 423-425: 321-326. doi:10.4028/www.scientific.net/msf.423-425.321.
- [19] Cho, K. M., Choi, I. D., and Park, I. M. 2004. Thermal properties and fracture behavior of compositionally graded Al-SiCp composites. In *Materials Science Forum* (Vol. 449, pp. 621-624). Trans Tech Publications.
- [20] Miyamoto Y, Kaysser WA, Rabin BH, Kawasaki A, Ford RG, 1999, *Functionally Graded Materials: Design, Processing and Applications*, Kluwer Academic, Boston.
- [21] Mévrel R., Les systèmes barrières thermiques pour aubes de turbine, Département Matériaux Métalliques et Procédés, *PlastOx 2007* (2009), 255-264.
- [22] Aldo R., Boccaccini O., Van der Biest, Talbot Jan B.,. 2002. "Electrophoretic Deposition, Fundamentals and Applications". in *Proceedings of the International Symposium, Electrochemical Society, Electrodeposition Division, United Engineering Foundation (U.S.)*, 2002.
- [23] Jin, Z. H, Batra, R. C. (1996), *Journal of Thermal Stresses* 19, 317–339.

Références bibliographiques

- [24] H. Ziou, H. Guenfoud, M. Guenfoud (2016), Numerical modelling of a Timoshenko FGM beam using the finite element method. *International Journal of Structural Engineering*; 7(3), 239-261.
- [25] Delale. F, Erdogan. F. (1983), The crack problem for a non homogeneous plane. *ASME Journal of Applied Mechanics*; 50 (3): 609-614
- [26] Chi. Shyang-ho., Chung Yen-Ling. (2003), Cracking in coating-substrate composites of multi-layered and sigmoid FGM coatings. *Engineering Fracture Mechanics*; 70 (10), 1227–1243.
- [27] Roberto Ballarini, *The Da Vinci-Euler-Bernoulli Beam Theory?*, in *Mechanical Engineering Magazine Online*, 18 avril 2003.
- [28] Nguyen, Viet Tung. 2004. "Modélisation Globale Et Locale Des Structures Multicouches Par Éléments Finis Des Plaques". Doctoral dissertation, Ecole des Ponts ParisTech.
- [29] lo 77 Lo, K. H., R. M. Christensen, and E. M. Wu. 1977. "A High-Order Theory Of Plate Deformation— Part 1: Homogeneous Plates". *Journal Of Applied Mechanics* 44 (4): 663. doi:10.1115/1.3424154.
- [30] Ambartsumyan, S. A. 1969. "Basic equations and relations in the theory of anisotropic bodies with different moduli in tension and compression". *Inzh. Zhur. MTT*, 3, 51-61.
- [31] Reissner, E. 1945. "The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates ". *Journal Of Applied Mechanics*, A69-A77.
- [32] Levinson, M. 1980. "An accurate, simple theory of the statics and dynamics of elastic plates". *Mechanics Research Communications*. 7(6), 343-350. doi:10.1016/0093-6413(80)90049-x.
- [33] Murthy, M. V. V. 1981. "An improved transverse shear deformation theory for laminated anisotropic plates".
- [34] Reddy, J. N. 1984. "A Simple Higher-Order Theory For Laminated Composite Plates". *Journal Of Applied Mechanics* 51 (4): 745. doi:10.1115/1.3167719.
- [35] Touratier, M. 1991. "An Efficient Standard Plate Theory". *International Journal Of Engineering Science* 29(8): 901-916. doi:10.1016/0020-7225(91)90165-y.
- [36] Afaq K.S., Karama M. and Mistou S. 2003. "Un nouveau modèle raffiné pour le structures multicouches". In *Comptes-rendus des 13emes Journées Nationales sur les Composites*. Pages 289- 292. Strasbourg.
- [37] Turner G. et Dhatt G, " Une présentation de la méthode des éléments fini", Eds.P.U.L.Q., France, 1981.

Références bibliographiques

- [38] Argyris J.H. and Kelsey S., "Energy theorems and Structural Analysis", Butterworth, London, 1960
- [39] Zienkiewicz O.C et Taylor R.L., "The Finite element Method", McGrawHill, London 1991
- [40] Ashwell D.G, Sabir A.B , Roberts T.M., (1971), Further studies in the application of Curved finite elements to circular arches, IJMS Vol. 13, pp. 507-517
- [41] Ashwell D.G. and Sabir A.B., (1972), A new cylindrical shell finite element based on Simple independent strain functions, IJMS Vol. 14, pp. 171-183.
- [42] Sabir A.B., (1975) ,Stiffness matrices for the general deformation (out of plane and inplane) of curved beam elements based on independent strain functions, The mathematics of finite elements and application II, Editor J.R. Whiteman. Chapter 34, 411-421, Academic Press
- [43] Sabir A.B. and Ashwell D.G., (1978), Displacement of concentrated load on thin Cylindrical shells. The mathematics of finite elements and application III, Editor J.R. White man, Academic Press
- [44] Sabir A.B., (1985), A rectangular and triangular plane elasticity element with drilling Degrees freedom, chapter 9 in proceeding of the 2nd International conference on Variational methods in engineering, Southampton University, Springer verlag, Berlin, pp 17-25.
- [45] Sabir A.B. and Ramadhani F., (1985), A shallow shell finite element for general shell analysis, Variational methods in engineering Proceeding of the 2nd international conference of Southampton England.
- [46] Sabir A.B. and Salhi H. Y., (1986), A strain based finite element for general plane elasticity in polar coordinates, Res. Mathematica 19, pp 1-16.
- [47] Belarbi M. T. et Charif A., (1998), Nouvel élément secteur basé sur le modèle de déformation avec rotation dans le plan, revue européenne des éléments finis, Vol 7, n°4, pp 439-458.
- [48] Belarbi M. T. et Charif A., (1999), Nouvel élément hexaédrique simple basé sur le modèle de déformation pour l'étude des plaques minces et épaisses, apparu dans la revue européenne des éléments finis, Vol 8, n°2.
- [49] Himeur M., (2008), Développement d'éléments membranaires nouveaux d'élasticité plane basés sur la formulation en déformation, Thèse de magistère, Université de Guelma (Algérie), Département de Génie Civil.

Références bibliographiques

[50] Tai, H., Vo, T. (2012), Bending and free vibration of functionally graded beams using various higher-order shear deformation beam theories. *International Journal of Mechanical Sciences*, 62(1). 57 - 66.