

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de L'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique



Université Ibn Khaldounde Tiaret
Faculté des Sciences Appliquées
Département de Génie Mécanique



MÉMOIRE DE FIN DE CYCLE

Pour l'obtention du diplôme de master

Domaine : Sciences et Technologie

Filière : Génie Mécanique

Parcours : Master

Spécialité : Construction Mécanique

Thème

Estimation des fréquences de vibration des
plaques sandwiches en matériau hétérogène

Préparé par :

BOUALI Khadidja

GUERGOUR Khaled

Soutenu publiquement le : 05/ 06 / 2022, devant le jury composé de :

Nom et Prénoms	Grade	Lieu d'exercice	Qualité
M. GUEMMOUR Mohamed	Maitre de conférences B	UIK Tiaret	Président
M. SAAD Mohamed	Maitre de conférences B	UIK Tiaret	Examineur
M. BALTACH Abdelghani	Maitre de conférences A	UIK Tiaret	Examineur
M.HADJI Lazreg	Professeur	UIK Tiaret	Encadreur

Année universitaire : 2021– 2022

Remerciements

Tout d'abord nous remercions avant tous, «الله» le tout puissant qui nous a donné le courage, et la volonté pour atteindre notre objectif, et tous les enseignants qui ont contribués à notre formation durant tous les cycles.

*Nos profonds remerciements et sincère gratitudes s'adressent à notre encadreur « **M. HADJILazreg** » pour ses conseils, ses encouragements, sa patience sa compétence et sa gentillesse qui nous ont permis de bien mener ce travail. Le suivi et l'orientation dont nous avons pu bénéficier.*

*Un grand merci à « **M. GUEMMOUR Mohamed** » qui nous a fait l'honneur de présider notre jury, qu'elle trouve l'expression de notre profond respect.*

*Nos vifs remerciements s'adressent aussi « **M. SAAD Mohamed et M. BALTACH Abdelghani** » qui a accepté d'examiner notre travail avec bienveillance et nous en sommes très honoré.*

Nous portons avec gratitude de reconnaissance pour l'ensemble des enseignants du département de Génie Mécanique qui ont contribué à notre formation du master en Génie Mécanique.

A tous ceux ou celles qui nous apportés leur soutien, trouvent ici, l'expression de notre vive et sincère reconnaissance.

Dédicaces

Je dédie le travail :

A mes chers parents.

A ma famille..., mes frères et sœurs.

A tous mes amis et collègues.

A la mémoire de ceux qu'on aime et qui sont partis.

BOUALI Khadidja

Dédicace

A travers mes prières je remercie ﷻ le tout puissant et le miséricordieux pour m'avoir aidé et permis de finalise mon travail

Je dédie ce travail à mes parents que je tiens à remercier affectueusement pour m'avoir accordé toute leur confiance, leur soutient et permis de faire de longues études. Aussi pour leur grande compréhension dans les, moments difficiles, pour m'avoir supporté, aidée et encouragé. Je m'excuse pour tous les tracas et stress que vous avez subi avec moi, en ces quelques lignes je vous exprime ma profonde reconnaissance « que dieu vous garde pour moi ».

De même façon je remercie mes frères et mes sœurs pour toute l'aide et la patience dont ils faits preuve et toute ma famille proche ou éloignée pour leur soutien moral.

Merci pour mon binôme pour les moments les merveilleux qu'ils étaient inoubliables.

Tout le respect à toutes les personnes qui ont contribué de pré ou de loin a l'élaboration de ce mémoire.

A tous ceux qui nous ont soutenus, je dis merci.

Guergourkhaled

Sommaires

Introduction général.....	1
---------------------------	---

CHAPITRE I

I.1	Introduction	3
I.2	QU'EST CE QU'UN MATERIAU SANDWICH ?	3
I.3	LES ELEMENTS CONSTITUANTS LES MATERIAUX SANDWICHES	5
I.3.1	Matériaux des peaux.....	5
I.3.2	Matériaux de l'âme.....	6
I.3.3	L'interface.....	8
I.4	CONCEPTION DES STRUCTURES SANDWICHES	8
I.4.1	Sélection des matériaux âme.....	9
I.4.2	Résistance en flexion.....	9
I.4.3	Résistance aux chocs	9
I.4.4	Résistance à la compression	10
I.4.5	Résistance au décollement (pelage)	10
I.4.6	L'isolation.....	10
I.4.7	Absorption d'eau.....	11
I.5	SOLLICITATIONS ET MODES DE DEGRADATIONS DES SANDWICHES	11
I.5.1	Flambement généralisé des peaux.....	11
I.5.2	Rupture des peaux en traction ou en compression	12
I.5.3	Modes locaux de rupture	13
I.5.4	Rupture de l'âme en cisaillement.....	13
I.5.5	Flambement généralisé de l'âme ou « crimping »	13
I.5.6	Flambement localisé, « wrinkling » ou « dimpling ».....	14
I.5.7	Dégradation de l'adhésive	15
I.6	THEORIE DES PLAQUES SANDWICHES	16
I.6.1	Hypothèses de la théorie des matériaux sandwiches.....	16
I.7	TECHNIQUES D'ASSEMBLAGES DES MATERIAUX SANDWICHES	17
I.7.1	Le collage de peau sur l'âme	17
I.7.2	Technique de pliage	17
I.8	INTERET DES STRUCTURES SANDWICHES	18

I.9	DOMAINES D'APPLICATION DES MATERIAUX SANDWICHES	19
I.9.1	Construction aérospatiale	19
I.10	CONCLUSION	20

CHAPITRE II

II.1	INTRODUCTION	21
II.2	LA DEFINITION ET LE CONCEPT D'UN MATERIAU A GRADIENT DE PROPRIETES	22
II.3	HISTORIQUE SUR LES FGM.....	23
II.4	DOMAINES D'APPLICATION	24
II.5	L'INTERET D'UTILISATION DES FGM	25
II.6	METHODES ET TECHNIQUES DE MISE EN ŒUVRE DES FGM.....	26
II.7	PROPRIETES PHYSIQUES ET MECANIQUES DES MATERIAUX DES PLAQUES.....	26
II.8	DIFFERENCES ENTRE FGM ET LES MATERIEAUX COMPOSITES TRADISTIONNELS	26
II.9	METHODES D'HOMOGENEISATION DES FGM.....	27
II.10	PROPRIETES MATERIELLES EFFECTIVES D'UN MATERIAU FGM	28
II.11	LES DIFFERENTES LOIS QUI REGISSENT LA VARIATION DES PROPRIETES MATERIELLES SUIVANT L'ÉPAISSEUR D'UNE PLAQUE FGM	30
II.11.1	Propriétés matérielles de la plaque P-FGM	30
II.11.2	Propriétés matérielles de la plaque S-FGM	32
II.11.3	Les propriétés matérielles de la plaque E-FGM.....	32
II.12	CONCLUSION	33

CHAPITRE III

III.1	INTRODUCTION	34
III.3	LES DIFFERENTS MODELES DES STRUCTURES COMPOSITES DANS L'ELASTICITE BIDIMENSIONNELLES:	34
III.3.1	Approche monocouche équivalente	34
III.3.2	Approche par couche.....	41
III.4	CONCLUSION	46

CHAPITRE IV

IV.1	INTRODUCTION	47
IV.2	FORMULATION DU PROBLEME.....	48
IV.2.1	Configuration géométrique.....	48
IV.2.2	Procédure de simulation numérique	49

IV.2.3 Propriétés matérielles effectives des plaques sandwiches en FGM.....	50
IV.2.4 Hypothèses de base	51
IV.2.5 Cinématique et équations constitutive.....	52
IV.2.6 Equations gouvernantes.....	54
IV.2.7 La solution de Navier pour les plaques sandwiches en FGM.....	58
IV.3 CONCLUSION	61

CHAPITRE V

V.1 INTRODUCTION	63
V.2 VALIDATION DES RESULTATS DE LA VIBRATION LIBRE.....	64
V.3 CONCLUSION	72
REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES	74

Liste des figures

FIGURE I.1 :SCHEMA D'UN SANDWICHE .	4
FIGURE I.2 : PROPRIETES SCHEMA D'UN SANDWICHE	4
FIGURE I.3 : SANDWICH TYPIQUE.	5
FIGURE I.4 : MATERIAUX POUR LES PEAUX.	6
FIGURE I.5 : MATERIAUX SANDWICHES A AMES PLEINES	7
FIGURE I.6 : MATERIAUX SANDWICHES A AMES CREUSES:	8
FIGURE I.7 : DIFFÉRENTES SOLLICITATIONS (M, N, T) APPLIQUÉES À UN SANDWICHE	11
FIGURE I.8 : FLAMBEMENT GÉNÉRALISÉ DES PEAUX DU SANDWICHE	12
FIGURE I.9 : RUPTURE DES PEAUX EN TRACTION OU EN COMPRESSION	12
FIGURE I.10 : MODES LOCAUX DE RUPTURE PAR INDENTATION	13
FIGURE I.11 : RUPTURE DE L'ÂME EN CISAILLEMENT.	13
FIGURE I.12 : FLAMBEMENT GÉNÉRALISÉ DE L'ÂME DU SANDWICHE.	14
FIGURE I.13 : FLAMBEMENT LOCALISÉ « WRINKLING »	14
FIGURE I.14 : FLAMBEMENT LOCALISÉ «DAMPLING»	15
FIGURE I.15 : TYPE DE DÉGRADATION DE L'ADHÉSIF	15
FIGURE I.16 :PANNEAUX RÉALISÉS PAR COLLAGE À PARTIR DE PROFILES DIVERS.	17
FIGURE I.17 : PLIAGE DE PANNEAUX SANDWICHES	18
FIGURE II.1 :CONCEPT DESMATERIAUX A GRADIENT DE PROPRIETES	21
FIGURE II.2 :CARACTERISTIQUES DES MATERIAUX COMPOSITES FGM EN COMPARAISON AVECLES MATERIAUX COMPOSITES CONVENTIONNELS	23
FIGURE II.3 : PRINCIPAUX DOMAINES D'APPLICATION DES FGM	24
FIGURE II.4 : TECHNIQUES D'ELABORATION DES MATERIAUX A GRADIENT DE PROPRIETES	25
FIGURE II.5 : LA DISTRIBUTIONCOMPOSANTE DES MATERIAUX :	27
FIGURE II.6 : MODELES ANALYTIQUES POUR UNE COUCHE EN FGM.	29
FIGURE II.7 : LES DIMENSIONS DE LA PLAQUE FGM.	30
FIGURE II.8 : LA VARIATION DU MODULE DE YOUNG DANS UNE PLAQUE P-FGM.	30
FIGURE II.9 : VARIATION DE LA FRACTION VOLUMIQUE DANS UNE PLAQUE S-FGM.	32
FIGURE II.10 : VARIATION DU MODULE DE YOUNG DANS UNE PLAQUE E-FGM.	32
FIGURE III.1 : PLAQUE DE LOVE KIRCHHOFF	36
FIGURE III.2 : PLAQUE DE REISSNER-MINDLIN	37
FIGURE III.3 : VARIATION DE LA FONCTION DE GAUCHISSEMENT.	38
FIGURE III.4 :CINEMATIQUE DE LA THEORIE D'ORDRE SUPERIEUR	39

FIGURE III.5 : LES CHAMPS DE DEPLACEMENTS DES MODELS	42
FIGURE III.6 : CHAMPS DE DEPLACEMENTS DES MODELES ZIG-ZAG DU PREMIER ORDRE.	43
FIGURE III.7 : CHAMPS DE DEPLACEMENTS DES MODELES ZIG-ZAG D'ORDRE SUPERIEUR	44
FIGURE IV.1 : GEOMETRIE D'UNE PLAQUE SANDWICHE RECTANGULAIRE FGM EN OORDONNEES CARTESIENNES.....	48
FIGURE IV.2 : VARIATION MATERIELLE SUIVANT L'ÉPAISSEUR DE LA PLAQUE SANDWICHE : (A) PEAUX EN FGM ET CŒUR HOMOGENE. (B) PEAUX HOMOGENES ET COEUR EN FGM.	49
FIGURE V.1 : INFLUENCE DE LA POROSITÉ SUR LA FRÉQUENCE FONDAMENTALE EN FONCTION DU RAPPORT D'ÉPAISSEUR H/A POUR UNE PLAQUE SANDWICH FGM AVEC COEUR RIGIDE ET HOMOGÈNE.....	66
FIGURE V.2 : INFLUENCE DE LA POROSITÉ SUR LA FRÉQUENCE FONDAMENTALE EN FONCTION DU RAPPORT D'ÉPAISSEUR H/A POUR UNE PLAQUE SANDWICH FGM AVEC COEUR SOUPLE ET HOMOGÈNE.....	67
FIGURE V.3 : INFLUENCE DE LA POROSITÉ SUR LA FRÉQUENCE FONDAMENTALE EN FONCTION DU RAPPORT D'ÉPAISSEUR H/A POUR UNE PLAQUE SANDWICH FGM AVEC COEUR FGM.	68

Liste des tableaux

TABLEAU II.1: EXEMPLES SUR DES FGM QUI SE COMPOSENT DE METAL-CERAMIQUE	21
TABLEAU II.2 : PROPRIETES DE CERAMIQUE ET DE METAL	26
TABLEAU V.1: HYPOTHESES CINEMATQUES POUR DIFFERENTES THEORIES DE PLAQUES	63
TABLEAU V.2 : COMPARAISON DES PARAMETRES DE FREQUENCE FONDAMENTALE NATURELS $\bar{\omega}$ DES PLAQUES SANDWICHS P-FGM CARREES SIMPLEMENT APPUYEES DU TYPE A AVEC D'AUTRES THEORIES ($A/H = 10$).....	69
TABLEAU V.3 : COMPARAISON DES PARAMETRES DE FREQUENCE FONDAMENTALE $\bar{\omega}$ POUR UNE PLAQUE SANDWICH FGM PARFAITE ET IMPARFAITE AVEC CŒUR RIGIDE ET HOMOGENE....	70
TABLEAU V.4 : COMPARAISON DES PARAMETRES DE FREQUENCE FONDAMENTALE $\bar{\omega}$ POUR UNE PLAQUE SANDWICH FGM PARFAITE ET IMPARFAITE AVEC CŒUR SOUPLE ET HOMOGENE....	71
TABLEAU V.5 : COMPARAISON DES PARAMETRES DE FREQUENCE FONDAMENTALE $\bar{\omega}$ POUR UNE PLAQUE SANDWICH FGM PARFAITE ET IMPARFAITE AVEC UN CŒUR FGM.	72

Résumé

Dans le présent travail, l'effet des porosités sur les fréquences de vibration des plaques sandwiches FGM simplement appuyées est étudié en utilisant une nouvelle théorie de déformation de cisaillement raffinée prenant en compte les effets de déformation de cisaillement transverse. Cette porosité peut éventuellement se produire à l'intérieur des matériaux fonctionnellement gradués (FGM) lors de leur fabrication. Deux types de plaques sandwich FGM sont considérés, à savoir, le sandwich avec des peaux FGM et le cœur homogène et le sandwich avec des peaux homogènes et le cœur en FGM. Les équations de mouvement pour les plaques sandwiches en FGM sont obtenus en utilisant le principe d'Hamilton's. La solution analytique est obtenue en utilisant la méthode de Navier. Les résultats obtenus révèlent que la réponse dynamique est significativement influencée par la fraction volumique de la porosité, l'indice de loi de puissance, les rapports épaisseur-côté et l'épaisseur de la couche fonctionnellement graduée.

Mots clés : Sandwich ; Vibration libre ; Porosité ; Principe d'Hamilton ; l'indice de loi de puissance.

Abstract

In the present work, the effect of porosity on the vibration frequencies of simply supported FGM sandwich plates is investigated using a new refined shear deformation theory that takes into account transverse shear deformation effects. This porosity can eventually occur inside functionally graded materials (FGMs) during their fabrication. Two types of FGM sandwich plates are considered, namely, the sandwich with FGM skins and homogeneous core and the sandwich with homogeneous skins and FGM core. The equations of motion for the FGM sandwich plates are obtained using Hamilton's principle. The analytical solution is obtained using the Navier method. The obtained results reveal that the dynamic response is significantly influenced by the porosity volume fraction, power law index, thickness-side ratios and functionally graded layer thickness.

Keywords: Sandwich; Free vibration; Porosity; Hamilton's principle; power law index.

ملخص

في هذا العمل قمنا بدراسة تأثير المسامية على ترددات الإهتزاز لصفائح الساندويتش ذات مساند بسيطة بإستعمال نظرية إجهاد القص المكرر مع مراعاة تأثير إجهاد القص العرضي. هذه المسامات تنتج داخل هذه المواد المتدرجة وظيفياً عند صناعتها نوعين من الصفائح الساندويتش المتدرجة وظيفياً تم استخدامها: النوع الأول عبارة عن ساندويتش ذو طبقتين من مواد متدرجة ولب متجانس، أما النوع الثاني عبارة عن ساندويتش متجانسة ولب متدرج وظيفياً.

معادلات الحركة لصفائح الساندويتش تحصلنا عليها بإستعمال مبدأ هاملتون الحل التحليلي باستخدام طريقة نافبي. في النهاية أظهرت النتائج المتحصل عليها أن الإستجابة الديناميكية تتأثر بشكل كبير بدلالة حجم المسامية ومؤشر قانون القوة ونسبة السمك على الطول وسمك الطبقة المتدرجة وظيفياً.

الكلمات المفتاحية: صفيحة السندويش، الاهتزاز الحر، مبدأ هميلتون، مؤشر قانون القوة.

Liste des notations

$[]$	Matrice
$\{ \}$	Vecteur colonne
E	Module de Young
E_c	Module de Young de la céramique
E_m	Module de Young de métal
E_I	Module de Young de la face supérieure
E_I	Module de Young de la face inférieure
$E(z)$	Module de Young en fonction de « z »
N	Coefficient de Poisson
$\nu(z)$	Coefficient de Poisson en fonction de « z »
$V(z)$	Fraction volumique
K	Indice matériel
b	La largeur de la plaque
h	L'épaisseur totale de la plaque
L	La longueur de la plaque
u, v, w	Les déplacements suivant les directions x, y et z
u_0, v_0, w_0	Les composantes du champ de déplacement sur le plan moyen de la plaque
ϕ_x, ϕ_y, ϕ_z	Les rotations autour des axes x, y et z
$f(z)$	Fonction de gauchissement (fonction de cisaillement transverse)
$g(z)$	La première dérivée de la fonction par rapport à z
P	La densité massique
σ_x, σ_y	Contraintes normales
$\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$	Contraintes de cisaillement
$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$	Déformations dans les directions x et y et z
$\gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$	Déformations de distors
δ	Opérateur de variation
$\delta u, \delta v, \delta w_b, \delta w_s$	Champ virtuel de déplacement
δU	Variation de l'énergie de déformation interne de la plaque
δV	Variation de l'énergie de déformation externe de la plaque
δT	Variation de l'énergie de déformation cinétique de la plaque
w_b	Composante de la flèche due à la flexion

w_s	Composante de la flèche due au cisaillement
N	Efforts normaux de membrane
M^b	Moments de flexion pure
M^s	Moments de flexion supplémentaire due au cisaillement transverse
S	Effort de cisaillement pur
m, n	Nombres de mode
A_{ij}	Termes de rigidité en membrane de la plaque
B_{ij}	Termes de rigidité de couplage de la plaque
D_{ij}	Termes de rigidité de flexion de la plaque
A_{ij}^s	Termes de rigidité de la plaque en cisaillement
B_{ij}^s	Termes de rigidité de la plaque en cisaillement
D_{ij}^s	Termes de rigidité de la plaque en cisaillement
H_{ij}^s	Termes de rigidité de la plaque en cisaillement
$I_0, I_1, I_2, J_1, J_2, K_2$	Constantes d'inertie
Q_{ij}	Les coefficients de rigidité
$\hat{\partial}$	Dérivée partielle
a_{ij}	Valeurs propres
i, j	Nombres naturels
[K]	Matrice de rigidité
[M]	Matrice de masse
$\{\Delta\}$	Le vecteur de colonne
$\bar{\omega}$	Les fréquences adimensionnelles
ω	Fréquence naturelle de la plaque FGM
ξ	Fraction volumique de la porosité
ϕ_α	Rotation de la normale au plan moyen autour des axes $x\alpha$
γ_α^0	Déformation de cisaillement mesurée sur le plan
ϕ_i	Rotations des sections déformées autour des axes $1x$ et $2x$ (termes du Premier ordre)
k_x^b	Courbure suivant X due à la flexion
k_x^s	Courbure suivant X due au cisaillement
$U_{mn}, V_{mn}, W_{bmn}, W_{smn}$	Paramètres arbitraires

INTRODUCTION GENERALE

Introduction générale

Le développement des matériaux composites a permis d'associer des propriétés spécifiques à différents matériaux au sein d'une même pièce. L'optimisation locale de ces propriétés, par association d'un matériau de haute dureté à la surface d'un matériau tenace par exemple, pose alors le problème de l'interface. Cette transition brutale de compositions peut générer localement de fortes concentrations de contraintes. La solution d'une transition continue des propriétés recherchées, par un gradient de composition, permet d'atténuer cette singularité par l'utilisation des matériaux à gradient de propriétés (en anglais : Functionally Graded Materials "F.G.M").

Les matériaux à gradient évalués (FGM) sont une nouvelle gamme des structures composites qui ont un grand intérêt pour la conception et la fabrication d'ingénierie. Ces types des matériaux possèdent des propriétés souhaitables pour des applications spécifiques, en particulier les avions, les véhicules spatiaux, l'optique, le biomécanique, l'électronique, la chimie, la mécanique, la construction navale et autres ouvrages de génie civil, soumise à des concentrations des contraintes et des contraintes thermiques et résiduelles élevées. Généralement, les FGMs sont des composites avancés, macroscopiquement et hétérogènes qui sont réalisés par exemple à partir d'un mélange de céramique et de métal avec une gradation continue de composition à travers l'épaisseur. Ceci est réalisé par une variation graduelle de la fraction volumique des matériaux constitutifs.

Suite à l'importance de ces matériaux ainsi que leur large application, des analyses statiques, vibratoires, thermomécaniques et de flambement des structures en FGM ont été exposé par des nombreux chercheurs.

De plus, l'apparition des micro-vides ou de porosités au cours des procédés de fabrication de ces matériaux est inévitable. L'existence de la porosité dans le matériau peut affecter les propriétés mécaniques ainsi que les performances de la structure. Par conséquent, il est nécessaire d'étudier les effets de ces défauts de fabrication sur le comportement dynamique de la structure.

Le présent travail s'intéresse à l'étude de la vibration des plaques sandwichs poreuses en FGM. Pour ce fait, notre mémoire est composée de cinq chapitres :

Dans le premier chapitre : des généralités sur les matériaux sandwichs ainsi que leurs domaines d'utilisation.

Le deuxième chapitre est consacré à la présentation des matériaux à gradients de propriétés tous en définissant leur concept et leurs caractéristiques puis nous définissons les lois qui régissent ce matériau. Dans le troisième chapitre, les différentes théories applicables aux structures FGM ont été étudiées et analyses.

Dans le quatrième chapitre, une analyse de la vibration libre des plaques sandwich poreuses en FGM a été présentée en détail par une théorie des plaques raffinée avec une nouvelle fonction de forme. Deux types communs des plaques sandwiches en FGM sont considérés, c'est-à-dire un sandwich avec deux peaux FGM et cœur homogène et un autre sandwich avec deux peaux homogènes et cœur FGM.

Quant au cinquième chapitre : une procédure de résolution exacte pour l'analyse de la vibration libre des plaques sandwich poreuses en FGM est développée pour les deux types des plaques sandwich, une à deux peaux FGM et cœur homogène, et l'autre avec deux peaux homogènes et cœur FGM.

Le présent travail se termine par une conclusion générale où on souligne l'efficacité de cette théorie dans la résolution du comportement de vibration libre des plaques sandwich poreuses en FGM ainsi par des perspectives envisagées pour des travaux futures.

CHAPITRE I :

**RECHERCHE BIBLIORPHIQUE SUR LES
MATRIAUX SANDWICHES**

Chapitre I

Recherche bibliographique sur les matériaux sandwiches

I.1 Introduction

Le développement de la technologie moderne nécessite l'utilisation de matériaux à hautes propriétés mécaniques propres à leur application mais de faible densité. L'objectif principal est de réduire la masse de la structure. Les matériaux composites sont des matériaux qui répondent aux exigences ci-dessus. En raison de leur faible densité, haute résistance, grande rigidité et de leur excellente durabilité, les matériaux composites ont d'abord été utilisés dans de nombreux composants structurels, en particulier dans le domaine aérospatial. Aujourd'hui, la réduction de leurs coûts de production permet à ces matériaux d'être utilisés dans un nombre croissant d'applications différentes (automobile, navigation, construction, etc.).

Parmi les matériaux composites les plus couramment utilisés, on note les matériaux sandwiches. Les structures sandwiches occupent une place importante dans la construction de pièces composites. Historiquement, ce sont les premières structures composites allégées et performantes.

L'objectif de ce premier chapitre est de positionner la problématique des matériaux sandwiches. Tout nous attachant à mettre en évidence toutes leurs particularités propres (Nora et al, 2011).

I.2 Qu'est ce qu'un matériau sandwich ?

Une structure sandwich résulte de l'assemblage par collage ou soudure de deux semelles ou peaux (Figure I.1) et d'un matériau d'âme. Les peaux sont de faibles épaisseurs et possèdent de très bonnes caractéristiques mécaniques (module élevé, grande résistance). Entre les deux peaux est intercalé un matériau d'âme de forte épaisseur et de faible densité. En gardant une distance constante entre les deux peaux, l'insertion de cette âme permet d'augmenter le moment d'inertie de la structure, et par conséquent sa rigidité en flexion, tout en minimisant la masse de l'ensemble.

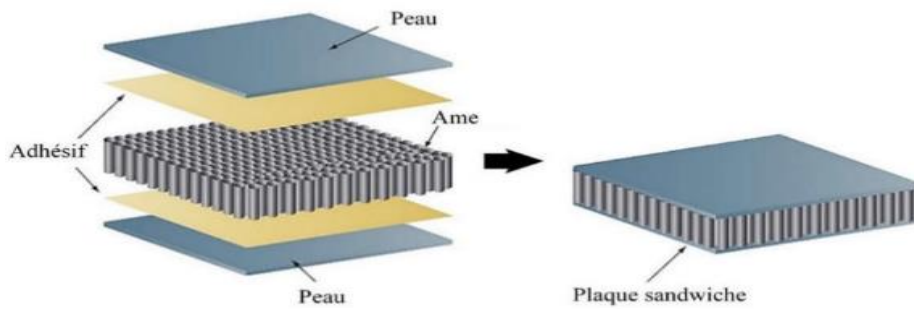


Figure I.1: schéma d'un sandwich (Ahmed AmineDaikh, 2017).

Les matériaux sandwiches se caractérisent des matériaux classiques par une intégration étroite des connaissances, reliées aux procédés de fabrication et aux performances mécaniques des pièces obtenues. Une structure sandwich est constituée par collage ou soudure d'une âme de faible rigidité et de deux peaux relativement rigides. Dans un sandwich, il ne faut pas oublier un troisième composant : l'adhésif. C'est ce dernier qui permet un bon assemblage de la structure et aussi une bonne transmission des contraintes d'un milieu à l'autre. Sa principale caractéristique doit être une bonne résistance en cisaillement. Dans le cas de peaux en matériau composite, l'insertion de cette troisième phase peut être évitée par l'utilisation d'une résine auto-adhésive (Jamal et al, 2009).

De part la constitution des matériaux sandwiches, on peut adapter leurs propriétés mécaniques en faisant varier la nature des peaux (identiques ou non) et de l'âme ainsi que l'épaisseur de chacune des phases. En règle générale, les peaux ont la même épaisseur t_f . Le rapport t_f/t_c (t_c étant l'épaisseur de l'âme) est compris entre 0,1 et 0,01. D'après Allen (Nora et al, 2011). On peut classer les sandwiches en trois catégories selon la valeur du rapport d/t_f (d étant la distance séparant l'axe neutre de chacune des peaux). Pour un sandwich symétrique (peaux de même épaisseur) $d = t_c + t_f$.

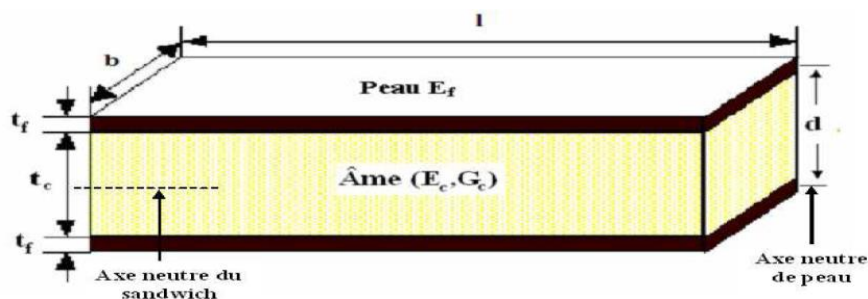


Figure I.2: Propriétés schéma d'un sandwich (Hadji, 2012).

En fonction des valeurs du rapport d/t_f , on peut classer les sandwichs de la manière suivante :

- Si le rapport d/t_f est supérieur à 100, on parle de sandwich à peaux très fines.
- Pour un rapport d/t_f compris entre 100 et 5,77 le sandwich est considéré comme ayant des peaux fines.
- Dans le cas où d/t_f est inférieur à 5,77 la structure est dite à peaux épaisses.

On définira les bornes limites par rapport à la contribution de chaque constituant vis-à-vis de la rigidité en flexion et en cisaillement du sandwich.

I.3 Les éléments constituant les matériaux sandwichs

Une plaque sandwich typique est représentée sur la (figure. I.3) est constitué :

- De deux peaux fines.
- D'une âme ou cœur.

Ces différentes couches sont liées par un film de colle, cette liaison est couramment appelée l'interface.

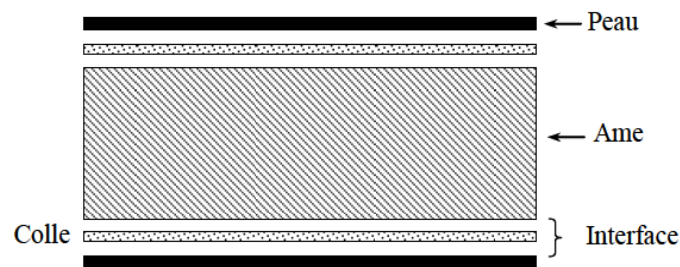


Figure I.3: Sandwich Typique (Morslifreiha, 2013).

I.3.1 Matériaux des peaux

Généralement de faibles épaisseurs, les peaux sont constituées de tout matériau pouvant être obtenu sous forme de couche. Elles peuvent être en bois, métal ou matériau composite. Le choix de la nature et de la séquence des couches dépendra de l'utilisation des matériaux composites. Les peaux ont pour but de reprendre les efforts de flexion traduits par des

contraintes normales (traction ou compression) (Hadji et al, 2012). La figure.4 ci-dessous représente les matériaux de fabrication de ces types.

Les structures sandwichs sont classées selon la nature de leurs âmes. Les âmes peuvent être classées en trois catégories principales, les mousses, les mousses renforcées et les parois minces.

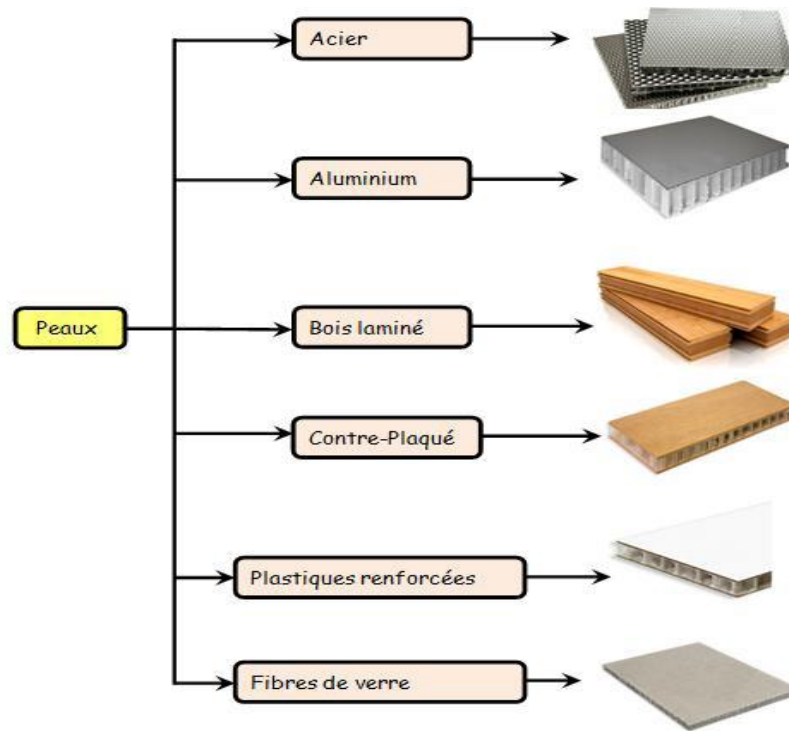


Figure I.4:Matériaux pour les peaux (Kaddouri Ahmed, 2021).

I.3.2 Matériaux de l'âme

L'âme, l'élément central d'une structure sandwich, est généralement un matériau ayant de faibles caractéristiques mécaniques. Elle a pour rôle de résister aux contraintes de cisaillement engendrées suite au mouvement de glissement des peaux sous charge, et de maintenir leur écartement. Elle peut être réalisée avec les matériaux suivants:

- **Mousses** : Ces matériaux légers peu onéreux, facilement usinables et ont cependant de très faibles caractéristiques mécaniques (Fairouz,2011).
- **Balsa** : Est un bois bien connu pour ces différentes utilisations et de leurs principales qualités que la légèreté, le haut pouvoir d'isolation thermique et acoustique et la non déformation aux variations thermiques (Fairouz,2011).
- **Nid d'abeille**: Cette structure est réalisée généralement à partir d'un matériau en plaques minces (alliage d'aluminium, papier polyamide). Des raies de colle sont disposées en

bande régulières sur les plaques qui sont collées entre elles pour former un bloc, ce dernier est coupé en tranches qui seront, transformées à leur tour en planche de nid d'abeille ' par expansion (Fairouz, 2011).

Il existe deux types d'âmes :

- **Les âmes pleines** parmi laquelle on retrouve :
 - Le balsa ou bois cellulaire (Figure I.5 a).
 - Diverses mousses cellulaires (Figure I.5 b).
 - Des résines chargées de microsphères creuses de verres appelés mousses syntactiques.

Cette âme pleine ou alvéolaire est considérée comme isotrope (propriétés matérielles identiques dans toutes les directions : 2 constantes indépendantes suffisent alors pour définir la loi de comportement du matériau).

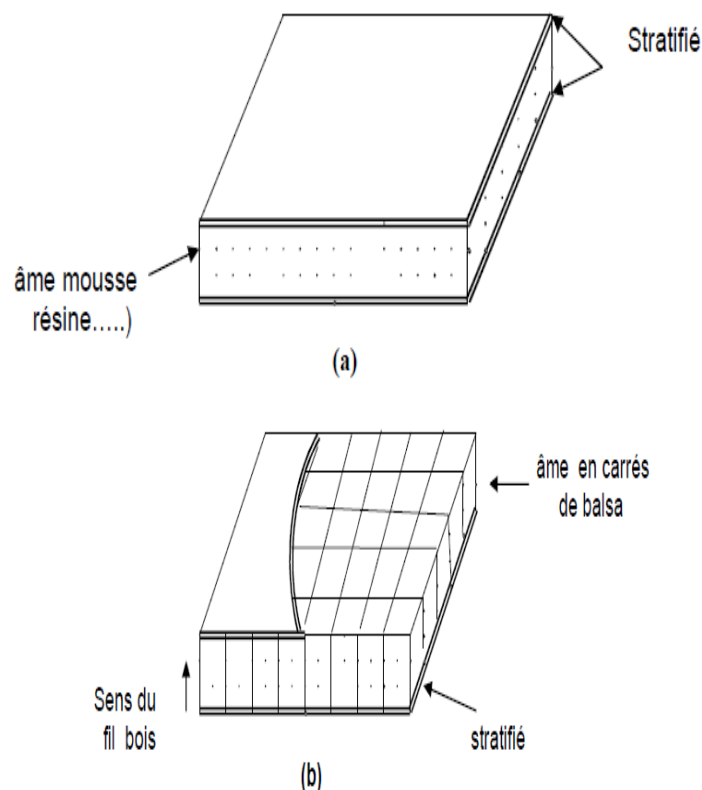


Figure I.5: Matériaux sandwiches à âmes pleines (Hadji, 2012).

- **âmes creuses** essentiellement de type nid d'abeilles (Figure I.6) elles sont:
 - Des alliages métalliques légers.

- Des papiers kraft.
- Du papier polyamide, type papier Nomex.

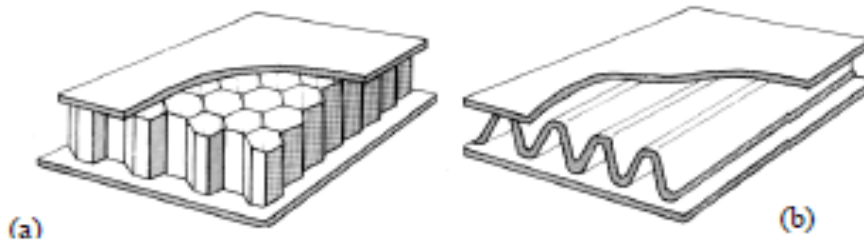


Figure I.6: Matériaux sandwiches à âmes creuses : (a) nid d'abeilles ; (b) âme ondulée (Hadji, 2012).

I.3.3 L'interface

L'assemblage de la structure sandwich peut être réalisé par collage, soudage ou brasage. Lors des simulations numériques, on suppose que, quel que soit le mode d'assemblage des différentes couches, le lien est parfait entre les constituants.

Les matériaux sandwiches sont caractérisés par :

- Une grande légèreté à titre de comparaison la masse surfacique de la coupole de la basilique Saint – Pierre (45 mètres de portée) est de $2600 \text{ kg} / \text{m}^2$ (construction en pierre). La masse surfacique d'une même coupole en sandwich acier/ mousse de polyuréthane est de $33 \text{ kg} / \text{m}^2$ (M. Chatin, 2000).
- Une grande rigidité flexionnelle due à l'écartement des peaux.
- Excellentes caractéristiques d'isolation thermiques. En revanche, les matériaux sandwiches n'amortissent pas et leur tenue au feu n'est pas bonne pour certaines catégories d'âmes et le risque de flambement est plus élevé que pour les structures classiques (Hadji, 2012).

I.4 Conception des structures sandwiches

Bien que généralement conçues pour être soumises à des efforts en flexion, les structures sandwiches sont aussi pour répondre à d'autres exigences, comme l'isolation thermique, acoustique, etc.

Le choix du type de sandwich dépend surtout de son application. Les principaux objectifs du concepteur d'un « sandwich » sont de choisir les matériaux appropriés constituant la structure ainsi que de déterminer les épaisseurs respectives des peaux et de l'âme de façon à résister aux moments fléchisseurs, au cisaillement et aux contraintes axiales induites par les forces appliquées sur elles.

Généralement, la conception est basée sur la théorie des sandwiches (théorème des poutres homogènes) et la sélection des matériaux ayant les propriétés appropriées.

I.4.1 Sélection des matériaux âme

D'un point de vue mécanique, le critère de sélection du matériau de l'âme est une résistance élevée au cisaillement. Son faible coût de production, sa fiabilité dans le temps, sa faible absorption d'eau ou humidité, son comportement face au feu et à la chaleur, ses capacités d'isolation acoustique et thermique peuvent aussi être des critères décisifs dans le choix du matériau.

I.4.2 Résistance en flexion

Généralement, les structures sandwiches sont plus rigides que les poutres conventionnelles. Cela étant dû à la distribution géométrique efficace et au support des efforts par les peaux qui permettent l'obtention d'un facteur de rigidité $\langle EI \rangle$ plus élevé.

Les peaux doivent adhérer le mieux possible à l'âme puisque le comportement mécanique final de la structure sandwich est directement lié à cette adhérence.

I.4.3 Résistance aux chocs

La résistance à l'impact d'une structure sandwich composite est largement influencée par la capacité d'absorption de l'énergie par l'âme.

Cette capacité d'absorption peut être améliorée en augmentant la densité du matériau qui compose l'âme. Soumis à un impact, on observe un comportement tout à fait différent s'il s'agit d'une âme en mousse ou d'une âme en nid d'abeilles.

L'âme en mousse diffusera l'énergie de l'impact à l'intérieur même du sandwich en l'absorbant dans sa structure cellulaire. C'est pourquoi les mousses PVC d'origine thermoplastique ainsi que les mousses thermodurcissables flexibles ont une bonne capacité d'absorption des chocs.

Dans le cas d'une âme en nid d'abeilles, les parois transfèrent l'énergie perpendiculairement d'une peau à l'autre, ce qui peut donc occasionner la déchirure de la peau opposée.

I.4.4 Résistance à la compression

Les charges de compression sont totalement transférées à l'âme du sandwich. Les structures en nid d'abeilles permettent de supporter des contraintes de compression, normales aux panneaux, élevées. Par contre leur anisotropie favorise leur rupture lorsqu'elles sont chargées dans plusieurs directions comme dans le cas des pièces soumises à des charges hydrostatiques. On préconise alors comme solution une combinaison nid d'abeilles et mousse.

I.4.5 Résistance au décollement (pelage)

Une résistance insuffisante au décollement peut conduire au délaminage des peaux et être la cause de ruptures catastrophiques. En général, dans les sandwiches à âme en mousse, la résistance du joint de colle entre les peaux et l'âme doit être supérieure à la résistance au cisaillement de l'âme. Les mousses de PVC donnent des forces d'adhésion supérieures à celles obtenues avec le balsa ou le poly méthacrylimide (PMI). Les mousses de polyuréthane (PU), elles sont fragiles, ce qui rend leur collage difficile. Quant aux âmes en nid d'abeilles, leur surface de contact réduite explique qu'il est difficile d'obtenir une résistance élevée au pelage.

I.4.6 isolation

La diminution de poids, l'isolation acoustique et thermique ainsi que l'amortissement des vibrations sont nécessaires dans plusieurs applications.

Grâce à leur structure cellulaire, beaucoup de mousses obtiennent de très bons résultats en ce qui a trait à l'isolation thermique et acoustique alors que les structures en nid d'abeilles offrent des performances moins probantes, plus limitées.

Par conséquent, lorsqu'il est nécessaire d'avoir des bonnes propriétés en termes d'isolation thermique et acoustique, les structures sandwiches avec âme en mousse sont des choix judicieux. Lorsque la diminution de poids est le seul objectif, les structures sandwiches avec âme en nid d'abeilles devraient être envisagées.

I.4.7 Absorption d'eau

L'absorption d'humidité et d'eau par l'âme des structures sandwichs peut causer une diminution importante et significative de ses propriétés mécaniques. Dans le cas où les peaux des sandwichs seraient abîmées, l'utilisation d'âmes sensibles à l'eau ou à l'humidité augmente encore plus le risque de délaminage. Même en service normal, l'évaporation interne d'eau absorbée peut causer un délaminage des peaux. Pour solutionner ce problème, un traitement thermique additionnel de l'âme est parfois nécessaire avant la mise en œuvre du sandwich.

I.5 Sollicitations et modes de dégradations des sandwichs

Les principales charges supportées par ces structures sont la flexion, la torsion, la compression ou l'extension. Un sandwich peut-être donc soumis à un :

- Moment de flexion.
- Moment de torsion.
- Effort normal.
- Effort tranchant.

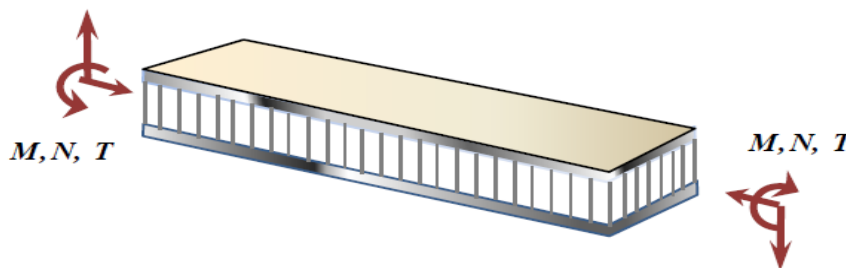


Figure I.7: Différentes sollicitations (M, N, T) appliquées à un sandwich (Hadji, 2012).

Nous représentons ici les différents modes de rupture des structures sandwichs soumis à la flexion afin de mieux cerner le comportement mécanique de ces structures (Belouettaret Triantafillou ; Hadji, 2012).

I.5.1 Flambement généralisé des peaux

Une poutre sandwich soumise à la compression peut céder sous l'effet de conditions d'instabilité concernant toute la poutre (Figure I.8). Le flambement généralisé peut également survenir quand les contraintes dans les peaux et dans l'âme sont inférieures à leurs résistances

à la rupture respective. La charge qui cause le flambement du sandwich dépend des paramètres tels que les dimensions du sandwich, le type de sandwich, la rigidité en flexion, l'épaisseur des peaux, l'épaisseur de l'âme et le module de cisaillement de l'âme.

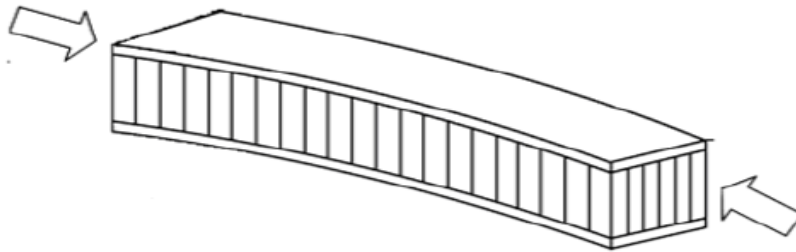


Figure I.8: Flambement généralisé des peaux du sandwich (Gognard, 2010; Hadji, 2012).

Si l'on craint un flambement généralisé, on peut utiliser des peaux ayant un module d'élasticité plus élevé, augmenter l'épaisseur des peaux, augmenter l'épaisseur de l'âme, ou encore utiliser pour l'âme un matériau avec un module de cisaillement plus élevé.

I.5.2 Rupture des peaux en traction ou en compression

Il s'agit du cas où les contraintes dans les peaux sont supérieures aux contraintes admissibles pour le matériau constituant les peaux (Figure I.9). Ce phénomène peut être évité en utilisant un matériau dont les contraintes à rupture sont plus élevées, en augmentant l'épaisseur des peaux (ce qui réduit les contraintes appliquées), ou en augmentant l'épaisseur de l'âme (ce qui permet également de réduire les contraintes dans les peaux). La manière la plus adéquate de résoudre le problème est d'augmenter l'épaisseur de l'âme. Par contre, une âme de plus forte densité (plus rigide) n'affecte pas les contraintes dans la peau.

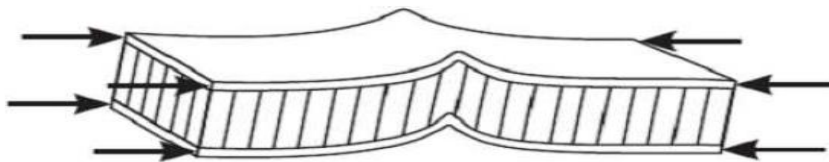


Figure I.9: Rupture des peaux en traction ou en compression (Gognard, 2010; Hadji, 2012).

I.5.3 Modes locaux de rupture

L'indentation locale est un mode localisé de rupture dû à une concentration de contrainte résultant, soit de l'application d'une charge localisée, soit de la position d'un appui de type ponctuel ou linéique (Figure I.9).

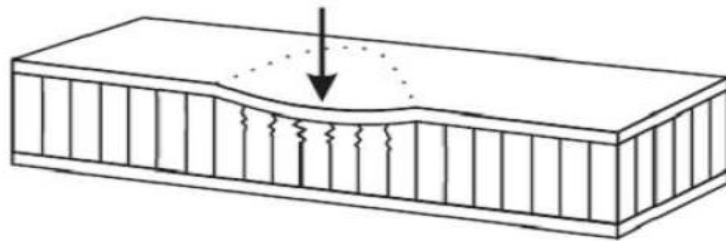


Figure I.10: Modes locaux de rupture par indentation (Gognard,2010; Hadji, 2012).

I.5.4 Rupture de l'âme en cisaillement

Si la contrainte de cisaillement (prépondérante dans l'âme) dépasse la résistance au cisaillement du matériau de l'âme, il y a rupture de l'âme (Figure I.10). Si l'on se trouve dans ce cas, on peut soit utiliser un matériau d'âme qui possède une résistance au cisaillement plus élevée, soit augmenter l'épaisseur de l'âme. Par contre, utiliser un matériau différent pour les peaux, ou changer leur épaisseur n'aura pas d'effet.

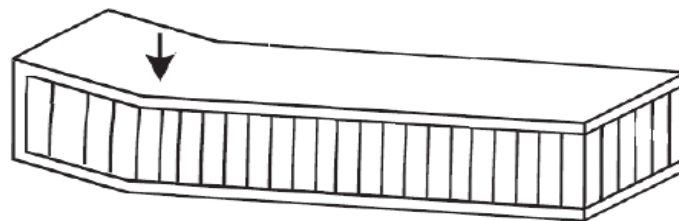


Figure I.11: Rupture de l'âme en cisaillement (Hexcel composite; Hadji, 2012).

I.5.5 Flambement généralisé de l'âme ou « crimping »

Si le rapport longueur/épaisseur est relativement faible, et que la rigidité de cisaillement est négligeable devant la rigidité de flexion, le flambement généralisé prend la forme du flambement de l'âme. Le flambement de l'âme ne dépend pratiquement pas des propriétés des peaux ; par contre, il augmente de façon linéaire avec l'épaisseur de l'âme et le module de cisaillement de l'âme. Pour augmenter la résistance à cette charge critique, il faut donc soit

augmenter l'épaisseur de l'âme, soit utiliser une âme avec un module de cisaillement plus élevé.

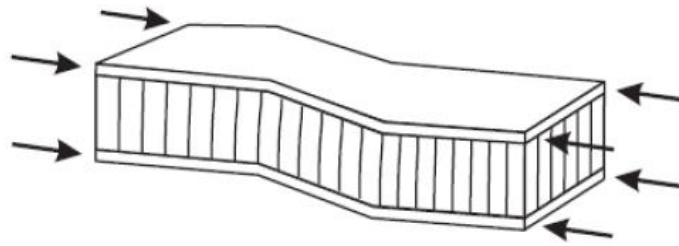


Figure I.12: Flambement généralisé de l'âme du sandwich (Hexcel composite; Hadji,2012).

I.5.6 Flambement localisé, « wrinkling » ou « dimpling »

Les peaux, considérées par elles-mêmes, sans connexion avec l'âme, flambent très facilement à cause de leur faible épaisseur. C'est l'âme qui empêche leur flambement. Cependant, si on atteint la contrainte limite, il se peut que l'âme ne soit plus capable d'empêcher le flambement. Dans ce cas, le flambement localisé des peaux, ou « wrinkling » (Figure I.13), se produit.

Contrairement au flambement généralisé, le flambement localisé peut prendre des configurations différentes qui ne dépendent pas de la géométrie de la structure. Par contre, il est influencé par les modules élastiques des peaux et de l'âme, et le module de cisaillement de l'âme. Si l'on craint un flambement localisé de la peau, on peut soit utiliser pour les peaux, un matériau avec un module élastique plus élevé, soit utiliser pour l'âme, un matériau présentant des propriétés élastiques plus élevées. Dans le cas d'une âme en nid d'abeille, mise à part les ruptures par « wrinkling », il peut survenir aussi un autre mode de rupture par flambement localisé de la peau en fossettes, appelé « dampling » (Figure I.14).

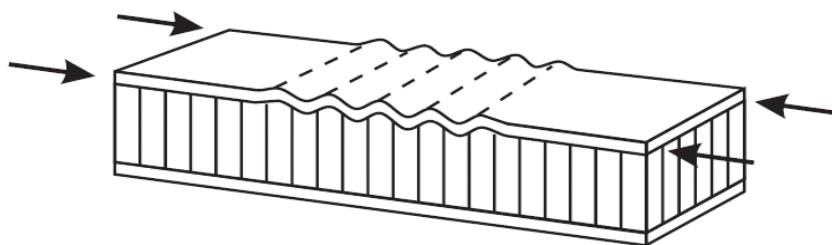


Figure I.13: Flambement localisé « wrinkling » (Hexcel composite; Hadji, 2012).

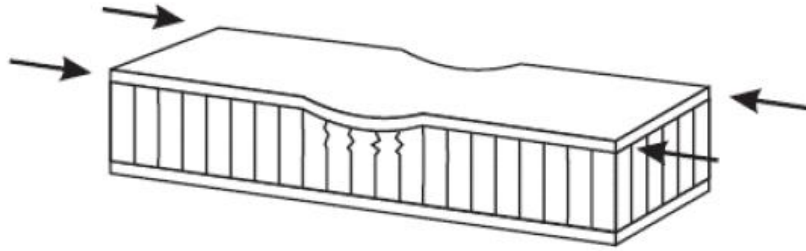


Figure I.14: Flambement localisé «damping» (Hexcel composite; Hadji, 2012).

I.5.7 Dégradation de l'adhésive

La dégradation de l'adhésive, entre les peaux et l'âme en nid d'abeille se fait généralement selon trois types :

- Dégradation de l'adhésive entre les peaux et l'âme.
- Dégradation de l'attachement des cellules de l'âme.
- Dégradation de l'attachement du nœud des cellules de l'âme.

La Figure I.15 illustre les modes de dégradation de l'adhésif. L'exposition à l'humidité provoque des dégradations remarquables de la résistance de l'adhésif ce qui peut changer le mode de dégradation et causer la ruine avancée du panneau sandwich.

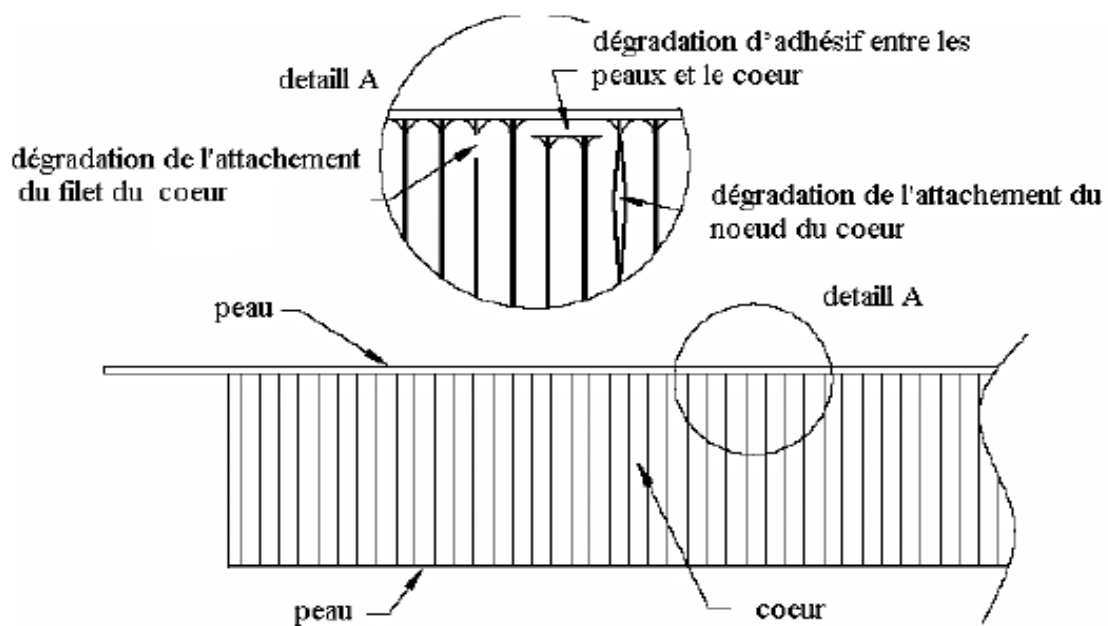


Figure I.15: Type de dégradation de l'adhésif (Hadji, 2012).

I.6 Théorie des plaques sandwichs

Un matériau sandwich est constitué d'un matériau de faible masse volumique (cœur) sur lequel sont collées des couches (les peaux) à rigidité et résistance élevées. La fonction essentielle de l'âme du sandwich est de transmettre par cisaillement transverse, les actions mécaniques d'une peau à l'autre. Les peaux peuvent être constituées par des stratifiés ou par des matériaux métalliques d'épaisseur h_1 (peau inférieure) et d'épaisseur h_2 (peau supérieure) (Hadji, 2012).

L'épaisseur de l'âme sera notée h_c et l'épaisseur totale du sandwich H ($H = h_1 + h_c + h_2$). En chaque point de la structure sandwich, le système de coordonnées sera choisi de manière que le plan (x, y) soit le plan moyen (Hadji, 2012).

I.6.1 Hypothèses de la théorie des matériaux sandwichs

La théorie des matériaux sandwichs est basée sur les hypothèses suivantes :

- L'épaisseur de l'âme est plus élevée que celle des peaux ($h_c \gg h_1, h_2$).
- Les déplacements du cœur u_c et v_c suivant les directions x et y sont des fonctions linéaires de la coordonnée z .
- Les déplacements u et v suivant les directions x et y sont uniformes dans l'épaisseur des peaux.
- Le déplacement transverse w est indépendant de la variable z : la déformation ε_{zz} est négligée.
- L'âme ne transmet que les contraintes de cisaillement transverse σ_{xz}, σ_{yz} : les contraintes σ_{xx} et σ_{yy}, σ_{xy} et σ_{zz} sont négligées.
- Les contraintes de cisaillement transverse τ_{xz} et τ_{yz} sont négligées dans les peaux.
- Enfin la théorie traite les problèmes d'élasticité en faibles déformations (Hadji, 2012).

I.7 Techniques d'assemblages des matériaux sandwiches

I.7.1 Le collage de peau sur l'âme

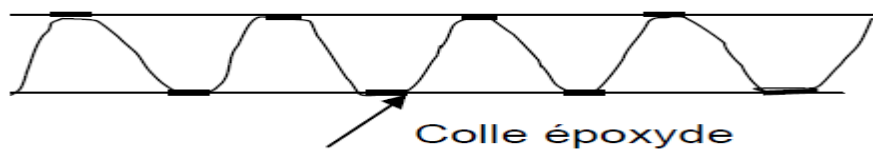
Pour que les structures sandwiches jouent pleinement leur rôle, il est nécessaire de veiller à avoir une solidarisation parfaite de l'ensemble âme – peaux de manière à répartir les efforts entre âme et peaux.

L'assemblage est réalisé selon la (Figure I.15) par un collage à l'aide de résines compatibles avec les matériaux en présence.

I.7.2 Technique de pliage

Après mise en œuvre les panneaux sandwiches peuvent être formés par pliage comme il est indiqué sur la (Figure I.16).

On commence par dégarnir une bande de l'un des revêtements en suivant l'axe de la pliure et sur une largeur qui est fonction de l'épaisseur de la plaque et l'angle de pliage souhaité, ensuite on plie et on maintient l'angle dans la position choisie.



(a) : collage de tôle ondulée ou raidisseurs ω sur tôle.



(b) : panneaux avec tubes carrés.



(c) : panneaux avec ω inverses.

Figure I.16: panneaux réalisés par collage à partir de profils divers.

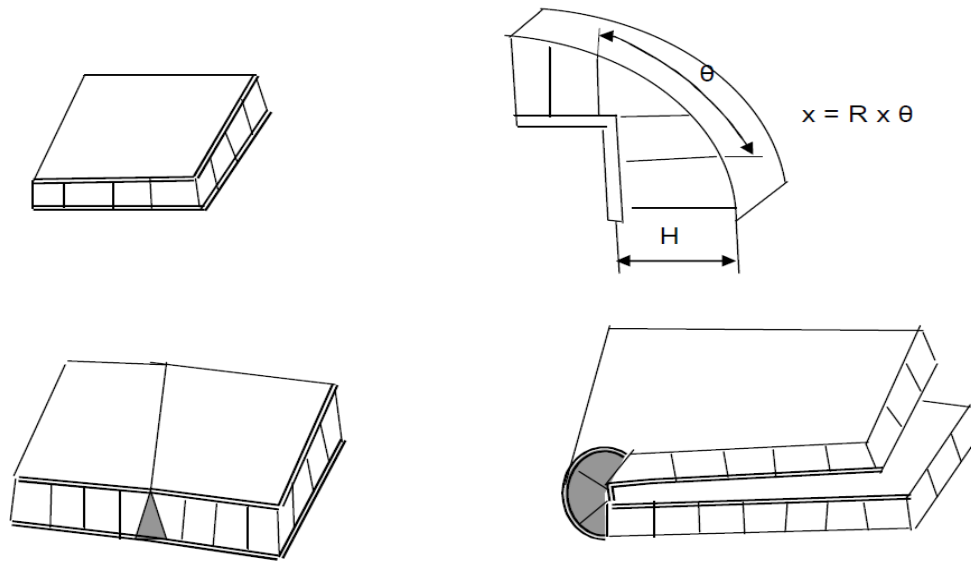


Figure I.17: Pliage des panneaux sandwiches (Hadji, 2012).

I.8 Intérêt des structures sandwiches

L'intérêt principal des structures sandwiches, par opposition aux composites traditionnels dits monolithiques, réside dans leur rigidité spécifique très élevée. La densité de l'âme est couramment de l'ordre de 100 kg m^{-3} . En modifiant la nature et l'épaisseur de la peau et/ou de l'âme, on parvient à donner à la structure le matériau qui convient le mieux. Ainsi, l'amélioration de la rigidité qui traduit le comportement en flexion du matériau, s'obtient en augmentant soit l'épaisseur de l'âme qui conduit à l'augmentation de son moment d'inertie, soit le module d'élasticité des peaux. Puisque l'âme du sandwich possède une faible densité, la masse du composite n'évolue pas de façon importante.

Les matériaux composites sandwiches disposent d'atouts importants par rapport aux matériaux traditionnels. Ils apportent de nombreux avantages fonctionnels : légèreté, résistance mécanique et chimique, maintenance réduite, liberté de formes. Ils permettent d'augmenter la durée de vie de certains équipements grâce à leurs propriétés mécaniques et chimiques. Ils contribuent au renforcement de la sécurité grâce à une meilleure tenue aux chocs et au feu. Ils offrent une meilleure isolation thermique ou phonique et, pour certains d'entre eux, une bonne isolation électrique. Ils enrichissent aussi les possibilités de conception en permettant d'alléger des structures et de réaliser des formes complexes, aptes à remplir plusieurs fonctions. Dans chacun des marchés d'application (automobile, bâtiment, électricité,

équipements industriels, ...), ces performances remarquables sont à l'origine des solutions technologiques innovantes (Hadji, 2012).

I.9 Domaines d'application des matériaux sandwiches

Les panneaux sandwiches sont de plus en plus utilisés dans la conception des structures minces. Ils trouvent leurs applications dans l'aéronautique, aérospatial, l'automobile, la construction navale et ferroviaire et le domaine du génie civil (Hadji, 2012).

Dans construction aérospatial les portes trappes de train d'atterrissages, carénages divers (entre aile de fuselage, mâts de réacteurs, glissières de volets) sont des pièces secondaires réalisés en panneaux sandwiches et par cocuisson de stratifiés composites (carbone/époxyde, kevlar/époxyde) sur nida nomex ou aluminiums collés avec des adhésifs époxydes en films.

Les capots des moteurs sont les plus souvent réalisés avec des sandwiches constitués de peaux en carbone / époxyde collés sur des âmes en nida aluminium (Belouettar et Abbadi, al 2009).

Afin d'obtenir la résistance à la chaleur nécessaire, on utilise des adhésifs époxydes phénoliques ou polyamides.

Les panneaux acoustiques sont des structures sandwiches dont la peau intérieure, coté moteur est constitué d'une peau perforée sur laquelle est collé un tissu microporeux.

Des nombreuses pièces d'hélicoptères sont constituées de pièces monolithiques ou de sandwiches avec peaux en composites collées sur nida (Hadji, 2012).

Dans les domaines astronautique et d'armement, on à besoin de tenue à la chaleur et aux variations thermiques encore plus élevées. Les réflecteurs solaires sont en peaux de carbone/époxyde et l'âme en nida nomex.

I.10 Conclusion

Dans ce chapitre, nous nous sommes attachés à présenter et à définir la notion de matériau sandwich. Dans un premier temps, nous avons présenté les principales propriétés mécaniques des structures sandwiches, ainsi que les différents modes d'endommagements les différents types d'assemblages. Le chapitre suivant va porter sur la présentation des matériaux à gradient de propriétés « FGM » tous en définissant leur concept et leurs caractéristiques puis nous définissons les lois qui gouvernent ce matériau.

CHAPITRE II :

GENERALITES SUR LES MATERIAUX A GRADIENTS DE PROPRIETE

Chapitre II

Généralités sur les matériaux à gradient de propriétés.

II.1 Introduction

Les matériaux composites légers, avec des rapports de résistance/poids et épaisseur/poids très grandes, ont été utilisés avec succès dans l'industrie aéronautique et dans d'autres applications technologiques. Cependant, les matériaux composites traditionnels sont inutilisables sous un environnement à hautes températures. Les métaux ont été généralement utilisés dans le domaine de la technologie pendant plusieurs années grâce à leur excellente résistance mécanique et dureté. Mais dans des conditions de hautes températures, la résistance mécanique du métal devient faible comme pour les matériaux composites traditionnels. Les matériaux en céramique ont d'excellentes caractéristiques en résistance thermique. Cependant, les applications de la céramique sont habituellement limitées dues à leur faible dureté. Récemment, une nouvelle classe de matériaux composites connue sous le nom de matériaux fonctionnellement gradués (FGM), ou matériaux à gradient de propriétés, a attiré une attention particulière (Ait Atmane,2011).

L'idée est de réaliser des matériaux utilisés comme barrière thermique dans les structures spatiales et les réacteurs à fusion (Hirai T. and Chen L. (1999), Chan S.H. (2001), Uemura S. (2003)).

En variant graduellement la fraction de volume des matériaux constitutifs, leurs propriétés matérielles montrent un changement minime et continu d'un point à un autre, de ce fait en remédient aux problèmes d'interface et en atténuant des concentrations des contraintes thermiques. C'est dû au fait que les constituants en céramique de FGM peuvent résister aux hautes températures que le produit final possède des meilleures caractéristiques de résistance thermique, tandis que les constituants métalliques fournissent une résistance mécanique plus forte et réduisent la possibilité de rupture catastrophique. Donc un FGM (functionallygradedmaterial) typique est un composé non homogène constitué des différentes phases matérielles (habituellement en céramique-métal). Cette solution permet une transition continue des propriétés recherchées (H. Ait Atmane, 2011). Un exemple d'un tel matériau est montré sur la figure I.1 (Yin H.M., Sun L.Z., and Paulino G.H, 2004).

Tableau II.1:Exemple sur des FGM qui se composent de Métal-Céramique (Nguyen, 2008)

Face à haute température	Céramique	- Bonne résistance thermique. - Haute résistance à l'oxydation. - Faible conductivité thermique.
Couche intermédiaire	FGM	- Élimination des problèmes d'interfaces
Face à basse température	Métal	- Bonne résistance mécanique. - Ténacité élevée. - Conductivité thermique élevée.

II.2 La définition et le concept d'un matériau à gradient de propriétés

Généralement, les FGM sont des matériaux constitués de plusieurs couches contenant des composants différents tels que les céramiques et les métaux. Ils sont donc des composites présentant des caractéristiques macroscopiquement inhomogènes.

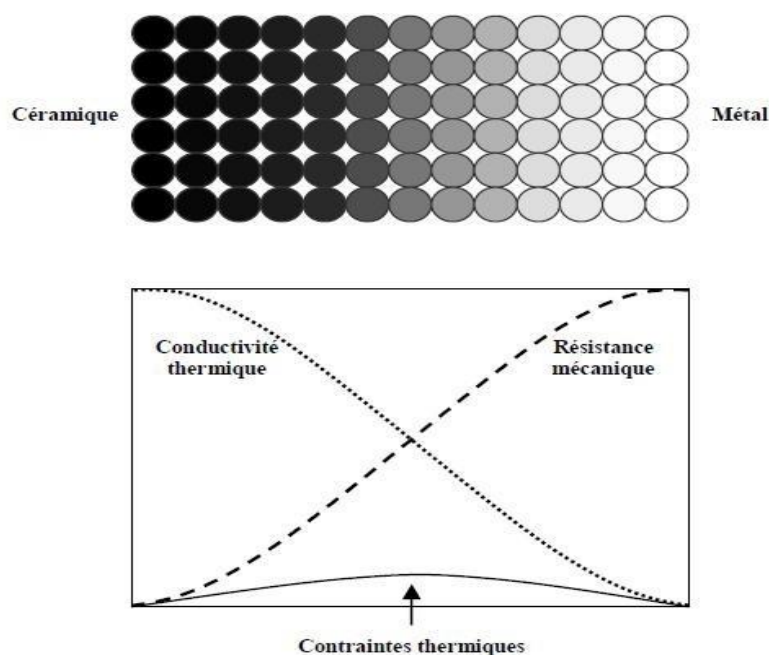


Figure II.1:Concept des matériaux à gradient de propriétés (P.Boch., Chartier, M.Huttepain, 1986).

Les matériaux constituant les parois des engins spatiaux sont appelés à travailler à des températures de surface de 1800°C ainsi qu'à un gradient de température de l'ordre de 1300°C. A cette année-là, aucun matériau industriel n'était connu pour supporter de telles

sollicitationsthermomécaniques. Trois caractéristiques sont à considérer pour la conception de telsmatériaux :

- Résistance thermique et résistance à l'oxydation à haute température de la couche superficielledu matériau.
- Ténacité du matériau côté basse température.
- Relaxation effective de la contrainte thermique le long du matériau.

II.3 Historique sur les FGM

En 1987, le gouvernement Japonais a lancé un vaste projet intitulé " la recherche sur la technologie de base pour développement des matériaux à Gradient fonctionnels et l'étude de la relaxation des contraintes thermiques". L'intérêt du projet est de développer des matériaux présentant des structures utilisées comme barrière thermique dans les programmes aérospatiaux.

Pour répondre à un tel cahier de charges, l'idée originale des FGM a été proposée pour élaborer un nouveau composite profitant à la fois des propriétés des céramiques (Coté haute températures) et des métaux (Coté basse température).

À la fin de la première étape (1987-1989), les chercheurs avaient réussi à fabriquer des petites pièces expérimentales (1-10 mm d'épaisseur et 30 mm de diamètre) pouvant résister à des températures maximales de 2000 K (Température de surface) et à un gradient de température de 1000 K. Quatre techniques ont été utilisées pour fabriquer les matériaux présentant un gradient de composition et de structure ; les techniques utilisées dans la fabrication de tels matériaux sont les suivantes :

- Le système SIC/C par C.V.D (Chemical VaporDeposition ou dépôt chimique en phase vapeur).
- Le système PSZ/Mo par la technique de la compaction sèche des poudres.
- Le système TIB2/Cu par synthèse par auto-propagation à haute température.
- Et enfin le système (Ni-Cr-Al-Y) / (zro2-Y2O3) par projection plasma à double torches.

Dans la seconde étape (1990-1991), le but était de réaliser des pièces de tailles plus grandes et de forme plus complexes par rapport à celles réalisées dans la première étape. Pendant les années 90, non seulement les champs d'application des FGM s'est développé

pour les matériaux de structure fonctionnant à haute température, mais s’est aussi élargi à d’autres applications : biomécaniques, technologie de capteur, optique, etc.

On trouve une littérature très importante sur l’utilisation de ce matériau. Cependant, l'utilisation des structures en FGM dans les environnements avec de grands changements de température exige la connaissance des déformations(Tlidji, 2015).

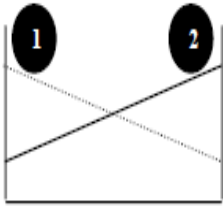
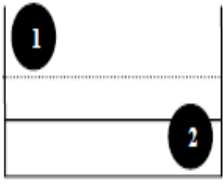
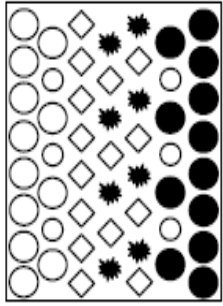
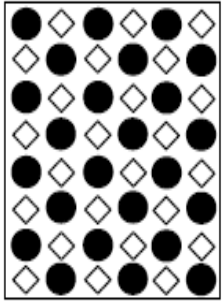
Propriétés	<p>1 Résistance mécanique</p> <p>2 Conductivité thermique</p>		
Structure	<p>Eléments constitutifs:</p> <p>céramique ○</p> <p>métal ●</p> <p>microporosité ◊</p> <p>fibre ★</p>		
Matériaux	exemple	FGM	NON-FGM

Figure II.2: Caractéristiques des matériaux composites FGM en comparaison avec les matériaux composites conventionnels (Hadji, 2012).

II.4 Domaines d’application

Le concept des matériaux fonctionnellement gradués est applicable dans des nombreux domaines, comme il est illustré dans la figure II.3. Il a été initialement conçu pour l’industrie de l’aéronautique, où les FGM ont fournis deux propriétés contradictoires telles que la conductivité et l’isolation thermique dans un matériau. Actuellement, ils permettent la production des matériaux légers, forts et durables, et ils sont applicables dans un large intervalle des domaines tels que les matériaux de construction, matériaux de conversion d’énergie, nucléaire et semi-conducteurs.

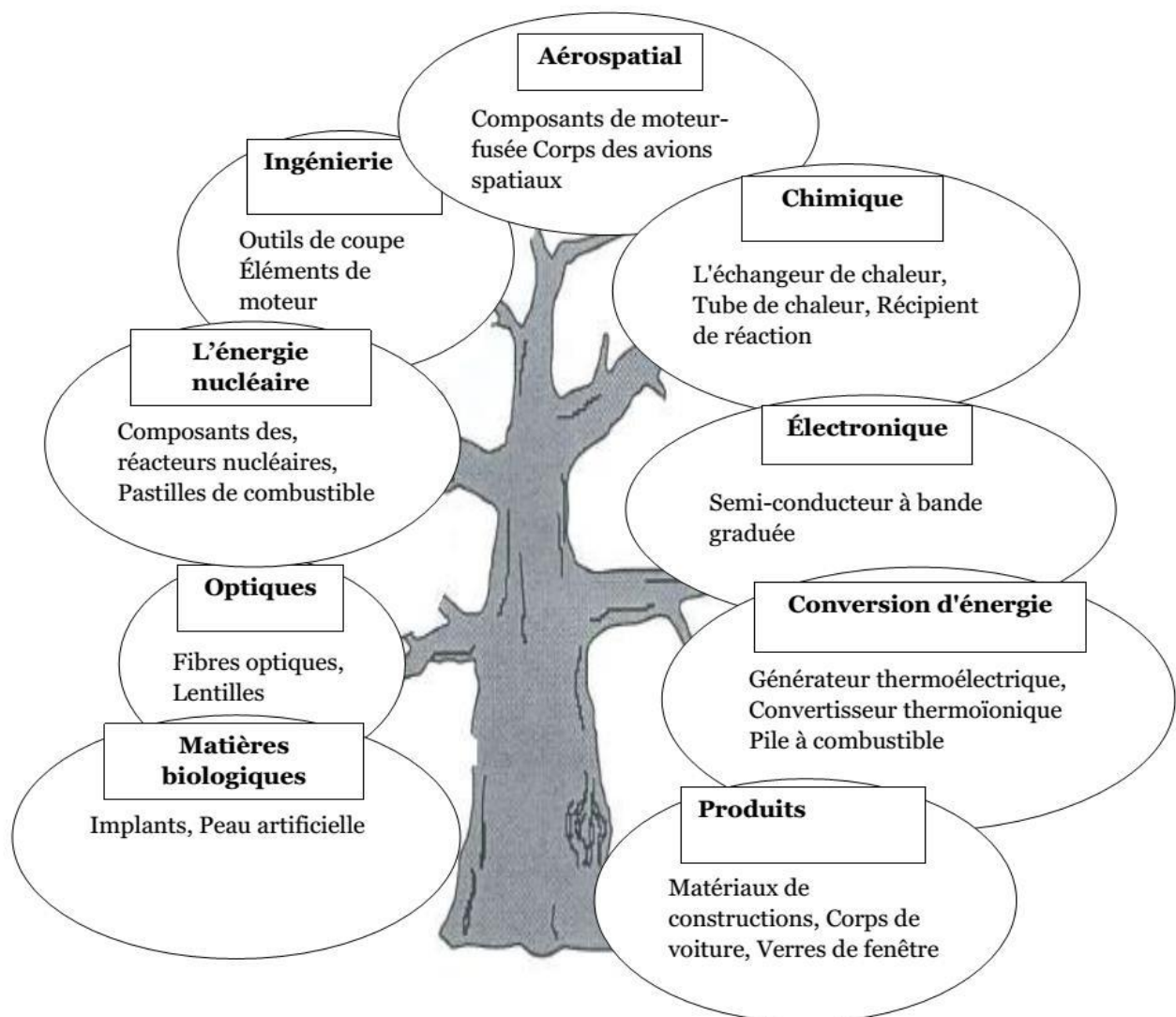


Figure II.3:Principaux domaines d'application des FGM (Tlidji, 2016).

II.5 L'intérêt d'utilisation des FGM

Il y a beaucoup d'intérêt pour la mise sur pied des structures ainsi les conditions fonctionnelles peuvent varier avec l'endroit. Les FGM ont d'excellentes caractéristiques qui diffèrent de ceux des matériaux plans composés et reliés. Par conséquent, les FGM attirent l'attention en termes de leurs applications dans les domaines industriels puisqu' " ils ont une double propriété des deux matières premières qui sont mélangées ensemble, et la distribution de la composante est graduée sans interruption. Par exemple, l'un des FGM qui se compose du métal et de la céramique a la caractéristique de la conductivité

thermique et de la forcemétallique dans le côté en métal et la résistivité aux hautes températures dans le côté encéramique. (Boubabouri, 2018).

II.6 Méthodes et techniques de mise en œuvre des FGM

Comme décrit précédemment, un matériau à gradient de propriétés est caractérisé par lavariation continue de leurs propriétés à travers l'épaisseur du matériau. En générale, les constitutions de base d'un FGM sont : les céramiques et les métaux. Alors l'élaboration d'unmatériau dense et gradué à partir de ces deux matériaux dépend des techniques et les méthodesde fabrication. La figure II.4 montre les méthodes les plus populaires dans le domaine defabrication des FGM.

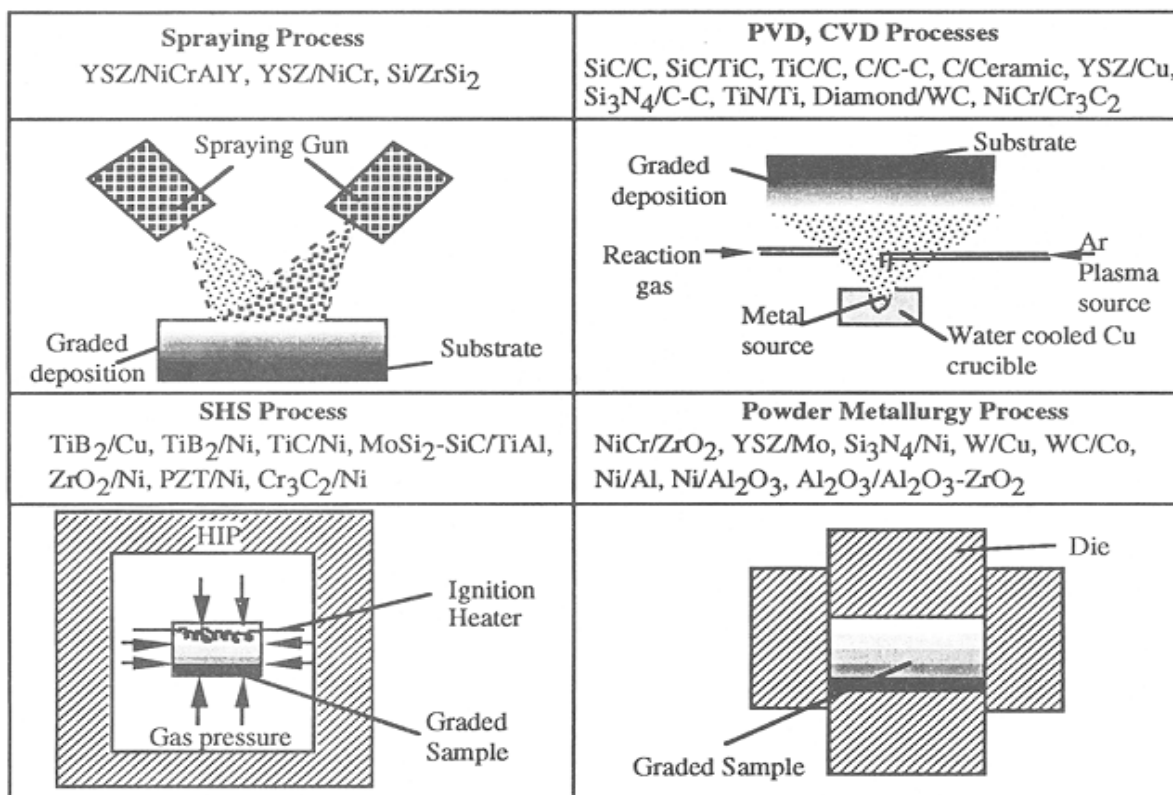


Figure II.4:Techniques d'élaboration des matériaux à gradient de propriétés (Koizumi et al. 1996).

Une qualité idéale pour élaborer un FGM nécessite une technologie avancée, l'autre part deconcept des FGM est basée sur le développement des processus de fabrication. Plusieurschercheurs ont contribué des techniques plus avancées depuis la naissance de cette

classe des matériaux (Jha et al.2013), (Kieback et al. 2003), dans la suite, nous citons la plupart des méthodes de la mise en œuvre des FGM:

- Technique de dépôt par évaporation (chimique ou électrique).
- Métallurgie des poudres.
- Méthode au centrifuge.
- Méthode de fabrication solide libre.
- Projection au plasma.
- Synthèse de Frittage à haute température.
- Méthode de placage à laser.

Pour plus d'informations,(Kieback et al. 2013) font une synthèse détaillée sur les techniques et les méthodes d'élaborations des matériaux à gradient de propriétés.

II.7 Propriétés physiques et mécaniques des matériaux des plaques

Tableau II.2 : Propriétés de Céramique et de Métal (Freiha, 2013).

		Caractéristiques Mécaniques
Céramique	Hautes températures à la surface inférieure	<ul style="list-style-type: none"> • Bonne résistance thermique. • Bonne résistance à l'oxydation. • Basse conductivité thermique.
Céramique/Métal	Continuité du matériau d'un point à l'autre	<ul style="list-style-type: none"> • Éliminer les problèmes d'interface. • Relaxer la contrainte thermique
Métal	Basse température à la surface supérieure	<ul style="list-style-type: none"> • Bonne résistance mécanique. • Conductivité thermique élevée. • Très bonne ténacité.

II.8 Différences entre FGM et les matériaux composites traditionnels

Un modèle simple illustrant les différences entre les matériaux à gradient de propriétés (FGM) et les matériaux plus conventionnels est montré sur la (figure.II.5) : (a) un matériau plans composé, (b) un matériau relié et (c) un matériau à gradient de propriété. Le matériau plan composé à une caractéristique plane, et le matériau relié a une frontière sur l'interface de deux matériaux. Les FGM ont de excellentes caractéristiques qui diffèrent de ceux des matériaux plans composés et reliés. Par conséquent, les FGM attirent l'attention en termes de

leur application dans les domaines industriels. Puisque les FGM ont une double propriété des deux matières premières qui sont mélangées ensemble, et la distribution composante est graduée sans interruption (KawtharElomari, 2011).

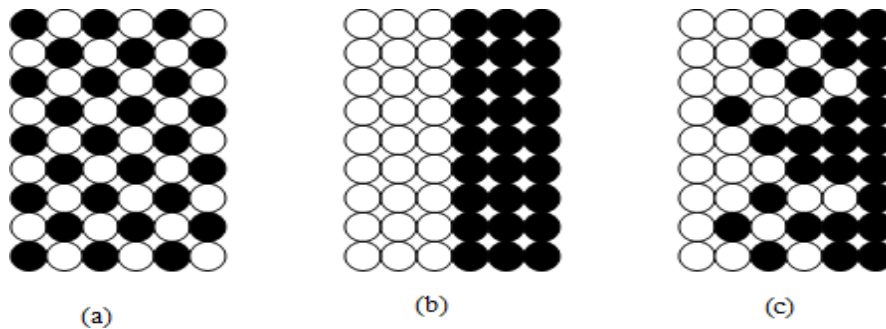


Figure II.5: La distribution composante des matériaux :

(a) Matériau plan composé, (b) Matériau relié, (c) Matériau à gradient de propriété (KawtharElomari, 2011).

II.9 Méthodes d'homogénéisation des FGM

Les matériaux à gradient de propriétés sont interprétés comme des matériaux hétérogènes ou non homogènes à cause de leurs structures microscopiques ou/et macroscopiques. Dans le premier temps, nous allons présenter les différents modèles d'homogénéisation permettant de prédire le comportement équivalent d'un matériau à gradient de propriétés, et de déterminer leurs propriétés physiques effectives. Afin d'analyser les structures en FGM comme des structures homogènes à l'échelle macroscopique.

D'une façon générale, les méthodes d'homogénéisation pour traiter les matériaux non homogènes se définissent par deux techniques:

- Techniques d'homogénéisation analytiques.
- Techniques d'homogénéisation numériques.

Pour la première classe, il s'agit de déterminer les propriétés matérielles d'un matériau FGM en utilisant des modèles mathématiques, ces modèles permettent d'exprimer les propriétés physiques des différentes phases constituant le matériau hétérogène.

Les modèles analytiques sont basés sur le choix d'un volume élémentaire représentatif pour prédire correctement les propriétés physiques effectives.

Les modèles numériques décrivent le comportement de ces matériaux en basant sur la simulation micromécanique. En effet, ces modèles considèrent la forme géométrique, les propriétés matérielles et le nombre des phases constituant le matériau hétérogène. Pour une étude approfondie, on pourra se référer aux ouvrages de Siboni et al. (1991) et de Bary et al. (2009).

Une présentation détaillée a été faite par (Akbarzadeh et al. 2015) pour examiner l'influence des modèles micromécaniques sur la réponse des plaques en FGM. Parmi les modèles d'homogénéisation dans la littérature, quelques modèles micromécaniques standards pourraient être mentionnés :

- 3) Loi exponentielle.
- 1) Loi des puissances.
- 2) La distribution sigmoïde.
- 4) Schéma de Mori-Tanaka.

II.10 Propriétés matérielles effectives d'un matériau FGM

Les matériaux à gradient de propriétés sont généralement fabriqués par deux phases matérielles avec des propriétés différentes. Une description détaillée des microstructures graduées réelles n'est pas disponible, excepté peut-être pour l'information sur la distribution de fraction volumique. Puisque la fraction de volume de chaque phase varie graduellement dans la direction de la graduation, les propriétés effectives des FGM changent le long de cette direction. Par conséquent, nous avons deux approches possibles pour modéliser un FGM.

- La première approche : une variation par tranche de fraction volumique de la céramique ou du métal est assumée, et le FGM est pris pour être posé avec la même fraction de volume dans chaque région, c.-à-d., couches quasi homogènes de céramique-métal (figure. II.a).
- La deuxième approche : une variation continue de la fraction volumique de la céramique ou du métal est assumée (figure. II.b), et la fraction de volume en métal peut être représentée suivant une fonction dépendante de la coordonnée Z (épaisseur) (Hadji, 2012).

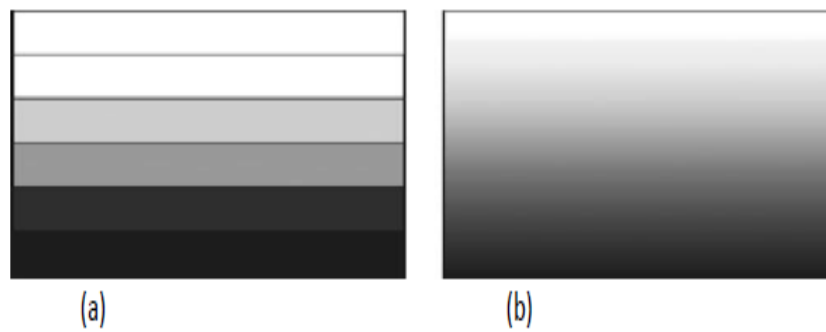


Figure II.6: Modèles analytiques pour une couche en FGM.

La plupart des chercheurs emploient la fonction de loi de puissance ; la fonction exponentielle, ou la fonction sigmoïde pour décrire les fractions de volume. Par conséquent, on considère dans notre travail des plaques FGM avec des variations de la fraction de volume qui suit des fonctions de la loi de puissance.

II.11 Les différentes lois qui régissent la variation des propriétés matérielles suivant l'épaisseur d'une plaque FGM

II.11.1 Propriétés matérielles de la plaque P-FGM

La fraction volumique de la classe P-FGM obéit à une fonction en loi de puissance.

$$V(z) = \left(\frac{z + h/2}{h} \right)^p \quad (\text{II.1})$$

Où p est un paramètre du matériau et h est l'épaisseur de la plaque. Une fois que la fraction de volume local $V(z)$ est définie, les propriétés matérielles d'une plaque P-FGM peuvent être déterminées par la loi des mélanges :

$$E(z) = V(z).E_1 + [1 - V(z)].E_2 \quad (\text{II.2})$$

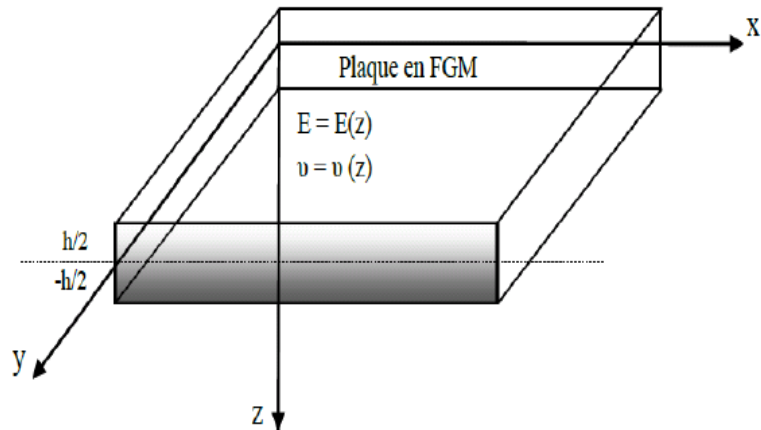


Figure II.7: Les dimensions de la plaque FGM.

Où E_2 et E_1 sont respectivement les propriétés matérielles (modules de Young ou densité) de la surface inférieure ($z = -h/2$) et de la surface supérieure ($z = h/2$) de la plaque FGM. La variation de ces propriétés dans la direction de l'épaisseur de la plaque P-FGM est représentée dans (Figure II.7), il apparaît clairement que le module de Young par exemple change rapidement près de la surface inférieure pour $p > 1$, et augmente rapidement près de la surface supérieure pour $p < 1$.

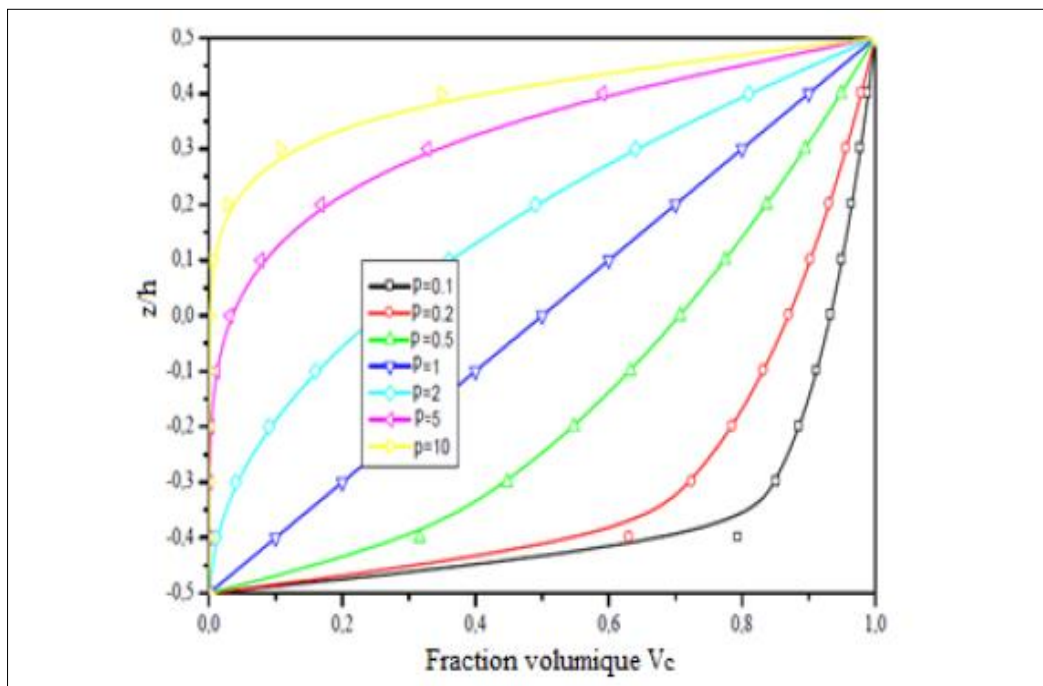


Figure II.8 : La variation du module de Young dans une plaque P-FGM.

II.11.2 Propriétés matérielles de la plaque S-FGM

Dans le cas d'ajouter une plaque P-FGM d'une simple fonction de loi de puissance à une plaque composite multicouche, les concentrations des contraintes apparaissent sur l'interfaces où le matériau est continu mais change rapidement. Par conséquent, Chung et chi ont défini la fraction de volume de la plaque FGM en utilisant deux fonctions de loi de puissance pour assurer une bonne distribution des contraintes parmi toutes les interfaces. Les deux fonctions de loi de puissance sont définies par :

$$V_1(z) = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{h/2 - z}{h/2} \right)^p \text{ Pour } 0 \leq z \leq h/2 \quad (\text{II.3.1})$$

$$V_2(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{h/2 + z}{h/2} \right)^p \text{ Pour } -h/2 \leq z \leq 0 \quad (\text{II.3.2})$$

En utilisant la loi des mélanges, le module de Young de la plaque S-FGM peut être calculé par:

$$E(z) = V_1(z).E_1 + [1 - V_1(z)].E_2 \text{ Pour } 0 \leq z \leq h/2 \quad (\text{II.4})$$

$$E(z) = V_2(z).E_1 + [1 - V_2(z)].E_2 \text{ Pour } -h/2 \leq z \leq 0$$

La figure II.10 montre que la variation de la fraction volumique dans les équations (II.3) et (II.4) représente les distributions sigmoïdes, et cette plaque FGM est appelée (Plaque S-FGM).

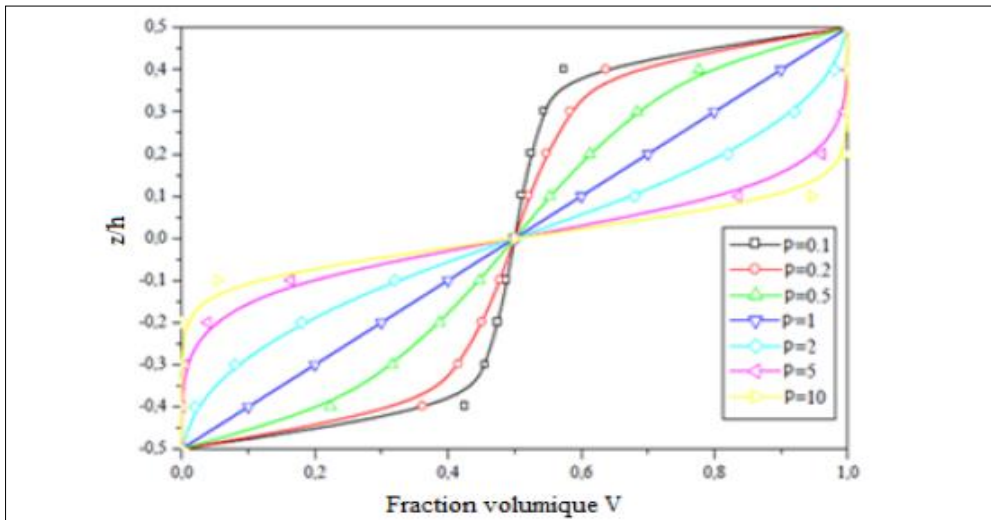


Figure II.9: Variation de la fraction volumique dans une plaque S-FGM.

II.11.3 Les propriétés matérielles de la plaque E-FGM

Pour décrire les propriétés matérielles des matériaux FGM, la plupart des chercheurs utilisent la fonction exponentielle qui s'écrit sous la forme:

$$E(z) = A.e^{B.(z+h/2)} \tag{II.5}$$

Avec,

$$A = E_2 \text{ et } B = \frac{1}{h} \cdot \ln\left(\frac{E_1}{E_2}\right) \tag{II.6}$$

La variation du module de Young à travers l'épaisseur de la plaque E-FGM est représentée dans (Figure II.10).

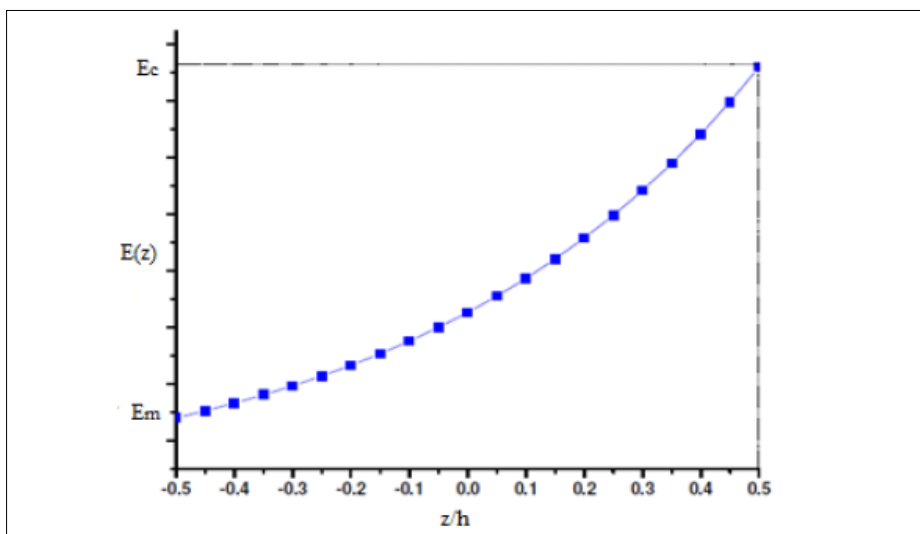


Figure II.10: Variation du module de Young dans une plaque E-FGM.

II.12 Conclusion

Les domaines d'applications des matériaux fonctionnellement gradués s'est élargi (Aéronautique, le génie civil, et les énergies), les recherches les concernant ont augmenté aussi, et le point le plus important dans ces recherches c'est bien, la variation des propriétés matérielles (module de Young, masse volumique et coefficient de poisson) et leurs différentes lois qui sont soit de puissance, exponentielles ou sigmoïdes, qui ont également été abordées dans ce chapitre.

CHAPITRE III :

LES THEORIES DES STRUCTURES FGM

Chapitre III

Les théories des structures FGM

III.1 Introduction

Pour pouvoir étudier un comportement quel que soit statique ou dynamique des structures ayant comme éléments structuraux des poutres, des plaques ou des coques en FGM dans le domaine élastique, il est nécessaire de bien choisir la théorie adéquate qui peut décrire correctement leurs comportements vis-à-vis des charges mécaniques, thermique on pourra ainsi résoudre les différents problèmes de structures. En général, le comportement des matériaux fonctionnellement gradués (FGM) plaques ou coques sous des chargements mécaniques et thermiques peut être prédit en utilisant l'une des théories d'élasticité tridimensionnelle (3-D) ou d'autres théories des plaques monocouches « Equivalent single layer theory (ESL) ». Ces théories d'ESL tiennent en compte à la fois du cisaillement et des effets de déformation normale selon le niveau d'hypothèses (Benbakhti, 2017).

Durant ces dernières années, plusieurs modèles bidimensionnels ont été développés pour la modélisation des structures multicouches tenant compte des cisaillements transverses. Ils peuvent être regroupés en fonction du type d'approche adopté :

- Approche monocouche équivalente.
- Approche par couche.
- Approche développement asymptotique.

III.2 Les Différents Modèles des structures composites dans l'élasticité

bidimensionnelles:

III.2.1 Approche monocouche équivalente

Parmi les modèles de plaque, on distingue deux grandes familles, les modèles Equivalent Single Layer (ESL – modèle couche équivalente) et les modèles Layer-Wise (LW – par couche). Les modèles ESL expriment chaque composante du champ de déplacement en fonction de variables définies sur un plan de référence, décrit par les coordonnées x et y dans le plan, et fonction de z la direction normale au plan $x ; y$ traduit ce qui se passe dans l'épaisseur.

Depuis le premier travail de Sophie Germain en 1815 sur les plaques minces en passant par les modèles de Love-Kirchhoff et de Reissner-Mindlin, de nombreux auteurs ont développé des théories des plaques à partir de cinématiques ou champs de contraintes plus raffinés. Nous passons en revue, dans ce qui suit, les principaux modèles (Tlidji, 2016).

III.2.1.1 Les modèles classiques Love-Kirchhoff (théorie classique des plaque stratifiées CLPT)

Ce modèle est la généralisation pour des matériaux anisotropes du modèle de Love-Kirchhoff. Cette théorie ne tient pas compte du cisaillement transverse et suppose que les déplacements de membrane, en tout point de la plaque, sont uniquement dépendants des déplacements de membrane et des dérivées de la flèche.

Le champ de déplacement associé est présenté dans l'équation (III.3). La figure 3.1 illustre l'état déformé d'une structure monocouche avec le modèle de Love-Kirchhoff: la section de la plaque déformée reste orthogonale à la surface neutre, les contraintes et les déformations de cisaillement transverse sont nulles. Cette formulation a tendance à sous-estimer les flèches et sur-estimer les charge critiques de flambement et les fréquences propres des structures modélisées, cette erreur étant encore plus grande pour les stratifiés fortement anisotropes. Cependant, ce modèle permet de décrire correctement le comportement de plaques simples fortement élancées ou avec une épaisseur faible par rapport à la longueur d'onde de flexion, d'où son appellation de modèle de plaques minces (Tlidji, 2016).

$$\begin{aligned}
 u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} \\
 v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} \\
 w(x, y, z) &= w_0(x, y)
 \end{aligned}
 \tag{III.1}$$

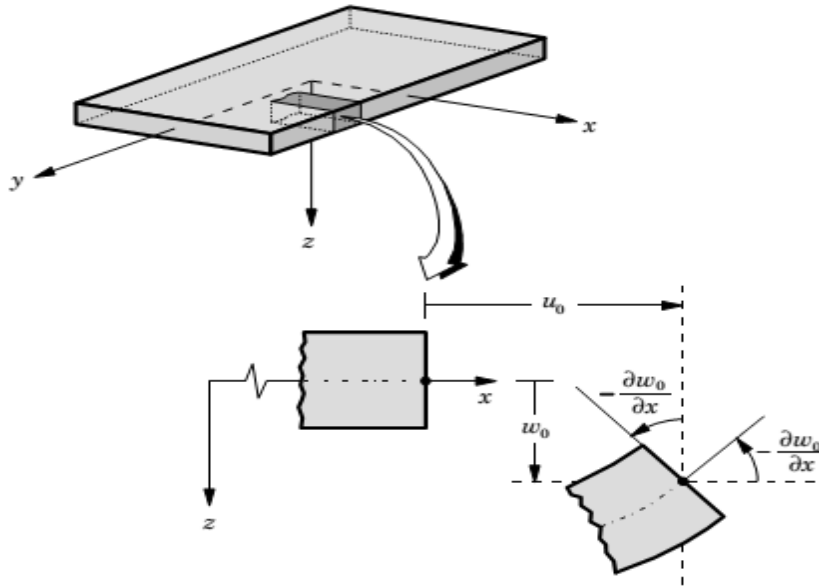


Figure III.1:Plaque de Love Kirchhoff (Tlidji, 2016).

III.2.1.2 Les modèles Reissner-Mindlin (théorie de déformation en cisaillement du premier ordre FSDPT)

Aussi appelé modèle de Mindlin-Reissner ou encore "théorie des plaques épaisses", ce modèle pose pour hypothèse une déformation de cisaillement transverse constante au travers de l'épaisseur de la plaque, le déplacement d'un point de la plaque dépend cette fois de u_0, v_0 , des dérivées de la flèche w_0 et des cisaillements. L'équation (III.2) présente le champ de déplacement associé à ce modèle. Celui-ci, développé par Mindlin fut le premier modèle de plaque prenant en compte les contraintes de cisaillement transverse; (Mindlin, 1951) développera la théorie de déformation en cisaillement au premier ordre basé sur les déplacements.

Le plus souvent, le champ de déplacement lié à la FSDT est écrit en fonction des Rotations $\phi_x(x, y)$ et $\phi_y(x, y)$. Il est donc commun de rencontrer le champ de déplacement associé sous la forme suivante:

$$\begin{cases} u(x, y, z) = u_0(x, y) - z\phi_x(x, y) \\ v(x, y, z) = v_0(x, y) - z\phi_y(x, y) \\ w(x, y, z) = w_0(x, y) \end{cases} \quad (III.2)$$

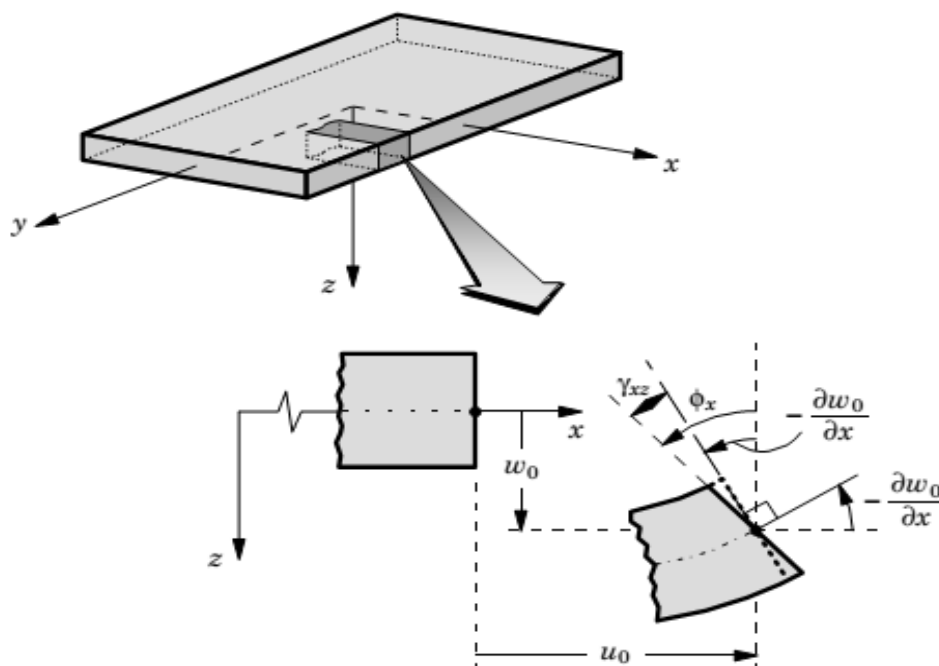


Figure III.2:Plaque de Reissner-Mindlin (Mindlin 1951).

Avec ce choix de la forme des champs de déplacements, les déformations transversales γ_{α}^0 sont constantes en z . Les contraintes de cisaillement sont donc uniformes à n'importe quel point suivant l'épaisseur et ça évitent la discontinuité entre les couches dans les composites conventionnels. Cette mauvaise description d'uniformité de distribution des contraintes oblige à introduire des coefficients correcteurs pour mieux prendre en compte, dans l'écriture de l'énergie, les effets du cisaillement transversal (Whitney, 1973).

Les résultats obtenus dépendent essentiellement du choix empirique dans des situations complexes des coefficients correcteurs et l'étude des plaques épaisses reste aléatoire par ce type d'approche cinématique.

La Figure III.3 montre la variation de la fonction de forme ainsi que sa dérivée par rapport à l'épaisseur de la plaque. Cette variation est plus authentique pour le cas des plaques stratifiées ou au niveau de l'interface, il y a une discontinuité de distribution des propriétés alors que pour les FGM ce problème est résolu.

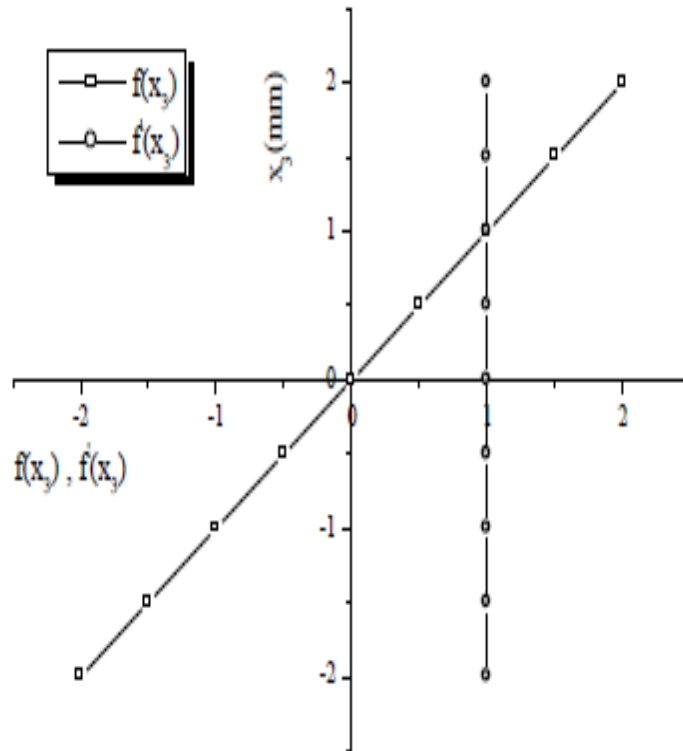


Figure III.3 : Variation de la fonction de gauchissement $f(x_3) = x_3$ et $f'(x_3) = 1$ suivant l'épaisseur.

III.2.1.3 Les modèles d'ordre élevé

Pour franchir les limites des théories du premier ordre, plusieurs auteurs proposent des théories à un ordre élevé. Les modèles sont basés sur une distribution non linéaire des champs suivant l'épaisseur. Ces modèles permettent de représenter le gauchissement de la section dans la configuration déformée (Figure. III.4).

La plupart des modèles d'ordre élevé utilisent un développement en série de Taylor des champs de déplacements qui s'écrivent de la forme:

$$\begin{cases} u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x}(x, y) + \psi(z) \theta_x \\ v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y}(x, y) + \psi(z) \theta_y \\ w(x, y, z) = w_0(x, y) \end{cases} \quad \text{(III.3)}$$

Où u, v, w sont les déplacements suivant les directions x, y et z respectivement, u_0, v_0 et w_0 sont les déplacements d'un point situé dans le plan médian, θ_x et θ_y sont les rotations dues à la flexion suivant X et Y respectivement. $\Psi(z)$ Représente la fonction de forme pour déterminer la répartition des déformations de cisaillement transversales et les contraintes à travers l'épaisseur.

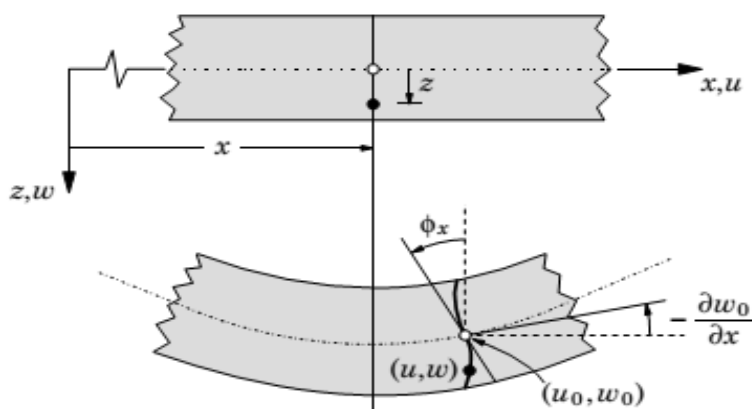


Figure III.4: Cinématique de la théorie d'ordre supérieur (Tlidji, 2016).

Voici quelques contributions importantes de développement de modèles d'ordre supérieur qui se sont distingués dans la littérature et qui diffèrent par la fonction de cisaillement $f(z)$:

L'approche d'Ambartsumyan (Ambartsumyan, 1969):

$$f(z) = \frac{z}{2} \left(\frac{h^2}{4} - \frac{z^2}{3} \right) \tag{III.4}$$

L'approche de Reissner (Reissner, 1945):

$$f(z) = \frac{5}{4} z \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right) \tag{III.5}$$

L'approche de Reddy (Reddy, 1987):

$$f(z) = z \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right) \tag{III.6}$$

Dans le modèle de, le champ de déplacement membranaire est cubique et le déplacement normal w est constant. Ce modèle donne une bonne approximation pour les contraintes de cisaillement transverse par rapport à la solution élastique tridimensionnelle. La distribution des contraintes de cisaillement transversal est parabolique suivant l'épaisseur. Les conditions aux limites sur les surfaces libres sont satisfaites.

L'approche de Touratier (Touratier, 1991) :

$$f(z) = \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{z}{h}\right) \quad (\text{III.7})$$

Touratier propose le modèle "sinus" qui est différent des autres modèles d'ordre supérieur puisqu'il n'utilise pas de fonction polynomiale. Une fonction trigonométrique sinusoïdale est donc introduite pour modéliser la répartition des contraintes de cisaillement suivant l'épaisseur. La fonction de cisaillement transverse s'écrit comme suit :

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) = \frac{h}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \left(\frac{\pi z}{h}\right)^{2n+1} \\ &= z \left(1 - \frac{\pi^2}{3!} \frac{z^2}{h^2} + \frac{\pi^4}{5!} \frac{z^4}{h^4} - \frac{\pi^6}{7!} \frac{z^6}{h^6} + \dots \right) \end{aligned} \quad (\text{III.8})$$

Les différents termes du développement correspondent aux différents modèles cités précédemment. Suivant la troncature choisie, on obtient la théorie Love-Kirchhoff, la théorie Reissner-Mindlin ou les modèles d'ordre supérieur (aux coefficients près). Les contraintes de cisaillement transversal déterminées par le modèle "sinus" prennent une forme cosinusoidale dans l'épaisseur de la plaque. La précision de ce modèle par rapport à la solution exacte est meilleure que la théorie de (Reddy, 1984).

Récemment, Afaq et al. (Kamraa, 2003; Mistou, 2003) propose un modèle exponentiel avec une cinématique plus riche.

La fonction de cisaillement transverse est de la forme suivante :

$$f(z) = ze^{-2\left(\frac{z}{h}\right)^2} \quad (\text{III.9})$$

Le choix de la fonction exponentielle permet un développement en puissance pair et impair de la variable z alors que la fonction "sinus" [Touratier] ne permet qu'un développement en puissances impaires.

L'approche d'Aydogdu (Aydogdu, 1975):

$$f(z) = z\alpha^{\frac{-2\left(\frac{z}{h}\right)^2}{\ln(\alpha)}} \quad \alpha > 0 \quad (\text{III.10})$$

h : Étant l'épaisseur de la plaque FGM.

Il faut remarquer que les modèles issus d'une approche monocouche équivalente présentent des contraintes de cisaillement transverse discontinues aux interfaces si les couches ont des propriétés différentes, même si la continuité du champ de déformation est assurée. Ceci présente un inconvénient sérieux lors de l'analyse locale à l'interface des structures multicouches (effets de bord sur les contraintes, délaminage . . .). mais pour le cas des matériaux FGM cette approche paraît très appropriée, du fait que la variation des propriétés se fait continuellement selon l'épaisseur.

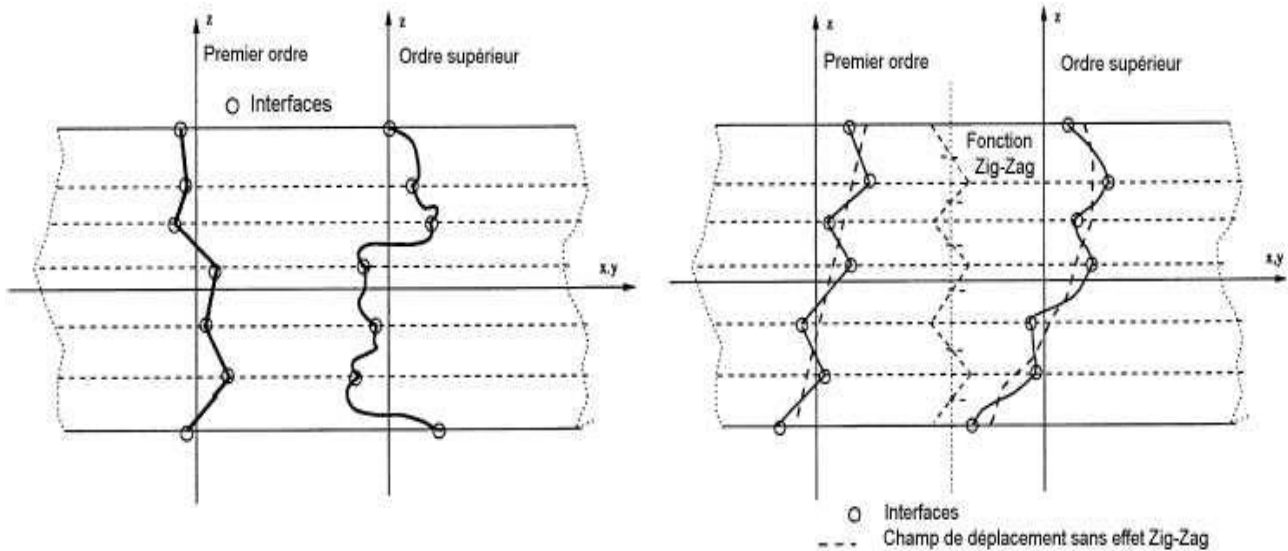
III.2.2 Approche par couche

Ces approches sont destinées justement à mieux décrire les effets d'interface pour les matériaux composites conventionnels. La Figure.II.20. a et les Equations (II.3) et (II.4) montrent aussi que cette approche est applicable pour les matériaux FGM. Ainsi différents modèles issus de l'approche par couche ont été proposés (Chabot,1987; Afaq,2003; karma,2003;Reddy, 1984). Di Sciuva 1987. Le multicouche est subdivisée en sous structures (correspondant en fait à chaque couche ou chaque ensemble de couches). On applique à chaque sous structure une théorie du premier ordre ou un modèle d'ordre supérieur, imposant un champ de déplacement vérifiant la continuité aux interfaces entre les différentes couches. Les modèles de ce type sont relativement coûteux (l'ordre des équations de comportement

dépend du nombre de couche), mais ils permettent l'obtention de résultats plus précis, notamment en ce qui concerne le calcul des contraintes hors plan.

D'une manière générale, les modèles issus de l'approche par couche peuvent être classés en deux groupes:

- Les modèles couches discrètes ou chaque couche est considérée comme une plaque en imposant les conditions de continuité en déplacements ou en contraintes aux interfaces.
- Les modèles zig-zag ou la cinématique satisfait à priori les conditions de contact est indépendante du nombre de couches. (Figures. III.5).



(a) : Champs de déplacements des modèles couches discrètes, approche cinématique. (Viet.Tung, 2004)
 (b) : Champs de déplacements des modèles zig-zag, approche cinématique. (Viet.Tung, 2004)

Figure III.5: Les champs de déplacements des models.

III.2.2.1 Les modèles zig-zag

Afin de réduire le nombre de paramètres inconnus, Di Sciuva est le premier à proposer le modèle zig-zag du premier ordre (Reddy, 1984). Dans ce modèle, les déplacements membranaires sont les résultats de la superposition du champ de déplacement global d'une

théorie du premier ordre et d'une fonction zig-zag (avec l'emploi de la fonction d'Heaviside). La fonction zig-zag donne une contribution des déplacements membranaires qui est continue en z mais sa dérivée première est discontinue à l'interface (voir Figure. III.6). Les déformations transversales sont donc discontinues et la continuité des contraintes de cisaillement transverse aux interfaces est assurée.

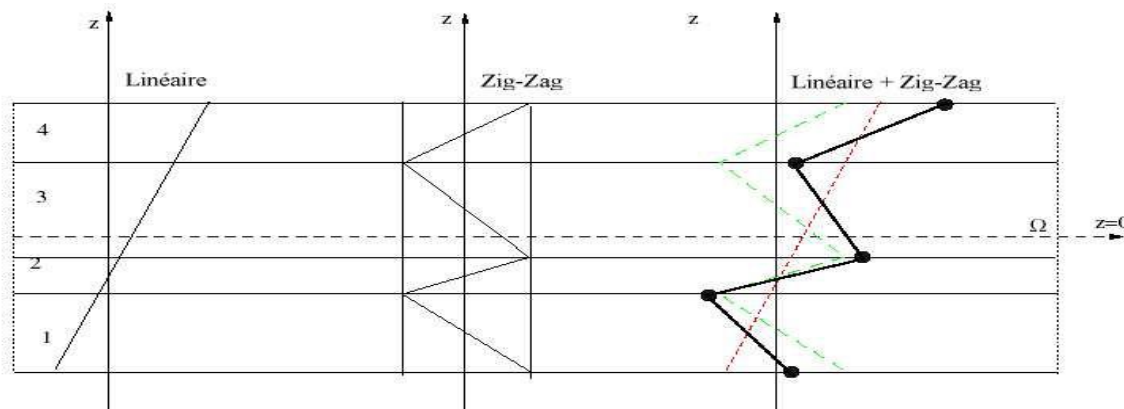


Figure III.6 : Champs de déplacements des modèles zig-zag du premier ordre. (Viet.Tung, 2004).

L'avantage principal du champ de déplacement des modèles zig-zag réside dans la bonne modélisation de la distorsion de la normale de la surface déformée, ainsi que dans la vérification des conditions de continuité, et ce sans augmenter pour autant le nombre et l'ordre des équations fondamentales de la théorie du premier ordre. Le recours à des coefficients de correction pour le cisaillement transverse est évité.

En se basant sur le concept de (Di Sciuva, 1984), plusieurs auteurs ont réalisé des améliorations significatives pour le modèle zig-zag (Viet.Tung, 2004). L'amélioration principale est l'introduction d'une distribution non linéaire des déplacements. On superpose le champ zig-zag (linéaire par morceau) à un champ de déplacement d'ordre supérieur (souvent cubique) (voir Figure.III.7). Les conditions de compatibilité sont satisfaites sur les surfaces supérieure et inférieure des plaques pour réduire le nombre de paramètres.

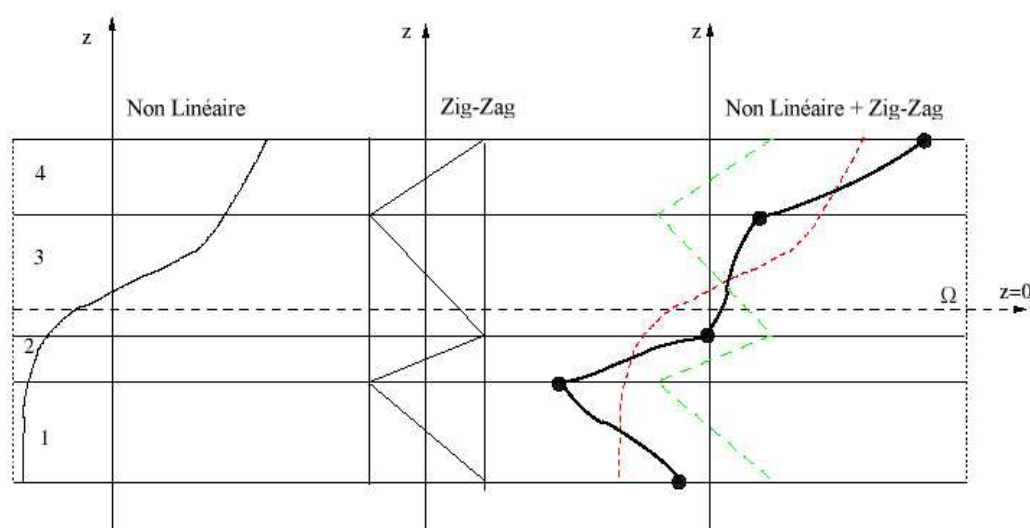


Figure III.7 : Champs de déplacements des modèles zig-zag d'ordre supérieur (Viet.Tung, 2004).

Dans les travaux de (Di Sciuva, 1984 ; Karama, 1998), la fonction sinus de (Touratier, 1991) est combiné avec la fonction zig-zag pour raffiner les effets de cisaillement.

Récemment, Afaq et al (Karama, 2003 ; Mistou, 2003) combine le modèle exponentiel avec l'effet zig-zag pour une cinématique plus riche.

Les résultats numériques de tous ces travaux montrent que le modèle zig-zag assure un bon compromis entre la précision des solutions et le coût de calcul. Néanmoins, les modèles zig-zag ont des limites de validation dans l'analyse du délaminage. En effet rien de physique ne pousse à penser que ce modèle quelque peu artificiels peuvent prévoir les délaminages, par exemple. Le calcul des contraintes de cisaillement transverse par les équations constitutives des modèles zig-zag devient moins précis quand le rapport d'élanement diminue (Icardi, 2001). Un autre inconvénient des modèles zig-zag, tout comme pour les modèles d'ordre supérieur est la continuité de type C^1 demandée qui complique leur implémentation numérique.

III.2.2.2 Les modèles couches discrètes

Les modèles couches discrètes adoptent une approximation plus fine des champs suivant l'épaisseur du multicouche que les modèles de plaque d'ordre supérieur ou zig-zag puisqu'ils proposent une cinématique par couche plutôt qu'une cinématique globale (voir Figure. III.5). En fait, avec les modèles couches discrètes, le multicouche est représenté par un ensemble de plaques (objets 2D) couplés par des efforts d'interface. Les conditions de

continuité aux interfaces sont assurées. Le nombre de paramètres inconnus dépend du nombre de couche de la plaque composite.

Dans les travaux de (Reddy,1987 ;Tahani2003 ; Nosier, 2003), on postule une cinématique du premier ordre ou d'ordre supérieur par couche. Les équations fondamentales par couche sont obtenues en utilisant le principe des travaux virtuels. Les conditions aux limites sont également données couche par couche.

D'une manière alternative, les travaux de utilisent une approximation des champs de contraintes par couche ou une mixte contrainte cinématique. Ainsi (Ren, 1986) utilise un champ de contrainte dont la composante de cisaillement transversal est quadratique par couche et les déplacements sont considérés cubiques par couche et continus aux interfaces. Dans (Kassapoglou,1987 ;Lagace, 1987), le champ de contrainte est construit sous la forme d'un produit de fonctions à variables séparées, par couche, à partir de l'équilibre des forces et moments. Les contraintes planes sont supposées constantes suivant l'épaisseur. Dans (Interlaminar, 1994), les fonctions de contraintes sont utilisées par couche pour déterminer les contraintes inters laminaires. Elles sont approximées de façons polynomiale dans l'épaisseur.

Nous passons à présent à une famille de modèles couches discrètes particulières, les modèles multi particulières. Le premier travail semble être celui de Pagano qui propose le modèle local dans (Pagano, 1978). Le modèle local a été construit à partir de la formulation variationnelle d'Hellinger-Reissner et d'une approximation polynomiale des champs de contraintes par couche.

Les polynômes sont du premier degré pour les contraintes membranaires, quadratique pour les contraintes de cisaillement et donc cubique pour les contraintes normales.

La formulation variationnelle d'Hellinger-Reissner restreinte aux approximations de ces champs de contraintes conduit à une cinématique du multicouches à $7n$ champs en $(x; y)$, n étant le nombre des couches de la plaque. Ces champs cinématiques contiennent des composantes correspondantes à des moments du second ordre qui n'ont pas un sens physique très clair.

La formulation mixte d'Hellinger-Reissner permet de déduire le comportement élastique linéaire généralisé du modèle. Ce modèle pose quelques difficultés au niveau des conditions aux limites et reste assez lourd compte tenu du nombre élevé de champs cinématiques intervenants. Ce modèle a été le point de départ pour un ensemble de travaux menés à l'ENPC

dont l'objectif est de proposer une série de simplifications permettant d'alléger tout en conservant un bon niveau de prédictibilité (Viet.Tung, 2004).

III.3 Conclusion

Ce chapitre fournit une introduction aux trois théories des plaques les plus couramment utilisées.

Nous concluons aussi que l'approche monocouche équivalente est mieux adaptée pour les matériaux FGM car il n'y a pas de changement brusque dans les caractéristiques mécaniques contrairement aux composites conventionnels où le délaminage est un problème à ne pas écarter.

D'autres théories de la plaque telles que « la théorie couche par couche » ou « zig-zag » sont également disponibles, mais ne sont pas abordées ici.

Donc on a eu recours au modèle monocouche équivalent pour les plaques épaisses et les poutres courtes pour différentes théories d'ordre élevé où la prise en compte du cisaillement transversal est nécessaire pour une étude plus exacte.

CHAPITRE IV :

**ESTIMATION DES FREQUENCES DE
VIBRATION DES PLAQUES SANDWICHES
EN FGM**

Chapitre IV

Estimation des fréquences de vibration des plaques sandwiches en FGM

IV.1 Introduction

Les Matériaux Fonctionnellement gradués (FGM) sont de plus en plus utilisés dans de nombreux candidats d'ingénierie tels que l'aérospatiale, l'énergie éolienne, les turbomachines, les réacteurs nucléaires. Les matériaux (FGM) sont fabriqués à partir d'une combinaison de métaux et de céramiques pour résister aux quantités de charges mécaniques et thermiques. L'application de FGM peut être particulièrement avantageuse dans des environnements à haute température lorsque la structure est soumise à des charges thermiques. Cependant, le flambement thermique des structures fabriquées à partir de FGM est un problème qui pourrait limiter leur application et nécessite une enquête approfondie.

Les structures sandwiches sont un type spécial de matériaux composites composés d'un noyau à deux couches collées, et elles ont été utilisées dans des nombreux domaines d'ingénierie tels que les structures d'engins spatiaux, d'avions, de chemins de fer et de voitures, les pales d'éoliennes, grâce à leurs propriétés impressionnantes, c'est-à-dire un rapport rigidité/poids élevé (Vinson, 2005). Les structures sandwiches pourraient être conçues de différentes manières, dans lesquelles l'utilisation de FGM avancées augmentant de jour en jour en raison des FGM offre une variation douce, progressive et continue des propriétés du matériau d'une surface à l'autre et, de cette manière, augmente les niveaux de contrainte, les fissures de matrice, et l'échec du délaminage peut être éliminé dans les structures sandwiches.

De plus, l'apparition des micro-vides et de porosités au cours des procédés de fabrication de ces matériaux est inévitable. L'existence de la porosité dans le matériau peut affecter les propriétés mécaniques ainsi que les performances de la structure. Par conséquent, il est nécessaire d'étudier les effets de ces défauts de fabrication sur le comportement mécanique de la structure.

Dans ce chapitre, l'effet de la porosité sur les fréquences de vibration des plaques sandwiches FGM simplement appuyées est étudié en utilisant une nouvelle théorie de déformation de cisaillement raffinée prenant en compte les effets de déformation de cisaillement transverse. Cette porosité peut éventuellement se produire à l'intérieur des matériaux fonctionnellement gradués (FGM) lors de leur fabrication. Deux types de plaques sandwiches FGM sont considérés, à savoir, le sandwich avec des peaux FGM et le cœur homogène et le sandwich avec des peaux homogènes et le cœur en FGM. Les équations de

mouvement pour les plaques sandwiches en FGM sont obtenus en utilisant le principe d'Hamilton's. La solution analytique est obtenue en utilisant la méthode de Navier. Les résultats obtenus révèlent que la réponse dynamique est significativement influencée par la fraction volumique de la porosité, l'indice de loi de puissance, les rapports épaisseur-côté et l'épaisseur de la couche fonctionnellement graduée.

IV.2 Formulation du problème

IV.2.1 Configuration géométrique

Considérons le cas d'une plaque sandwich rectangulaire en FGM, d'épaisseur uniforme composée de trois couches hétérogènes rapportée à un système de coordonnées cartésiennes (x, y, z) comme montré en figure IV.1. Les faces supérieure et inférieure se situent à $z = \pm h/2$, et les côtés de la plaque sont parallèles aux axes x et y .

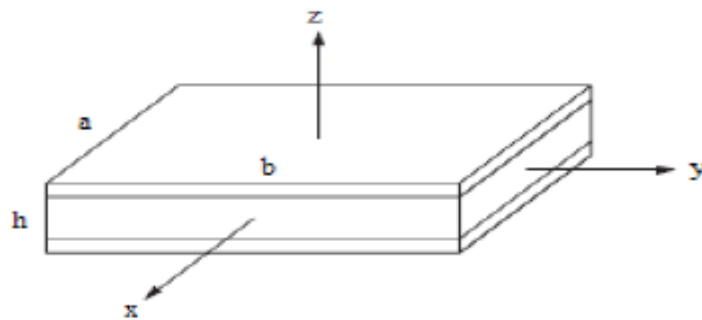


Figure IV.1 : Géométrie d'une plaque sandwich rectangulaire FGM en coordonnées cartésiennes.

La plaque sandwich est composée de trois couches élastiques, nommées, Couche 1, Couche 2, et Couche 3 de la face inférieure à celle supérieure de la plaque. Les coordonnées verticales de la face inférieure, les deux interfaces, et la face supérieure sont dénotées par $h_1 = -h/2$, h_2 , h_3 , et $h_4 = h/2$, respectivement. Le rapport d'épaisseur dans chaque couche du bas en haut est dénoté brièvement par les combinaisons de trois chiffres "1-0-1", "2-1-2" comme il est montré en figure. IV.2, deux types (a) et (b) sont considérés dans cette présente étude :

- Type (a) : Faces externes (peaux) en FGM et cœur homogène.
- Type (b) : Faces externes (peaux) homogènes et cœur en FGM.

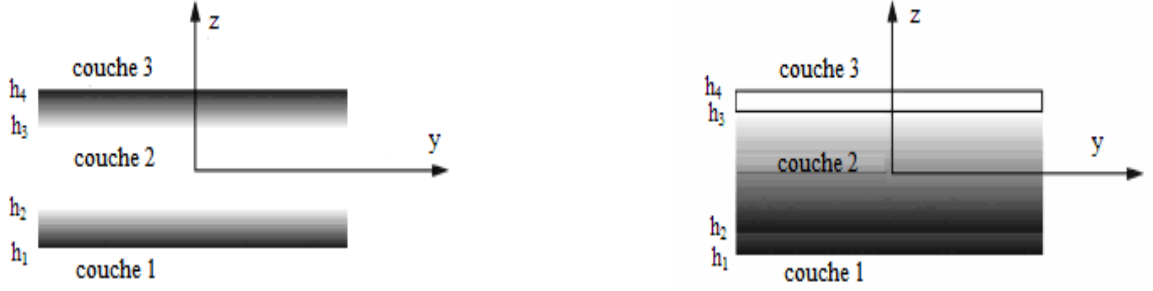


Figure IV.2: Variation matérielle suivant l'épaisseur de la plaque sandwich : (a) peaux en FGM et cœur homogène. (b) peaux homogènes et cœur en FGM.

IV.2.2 Procédure de simulation numérique

Deux types différents de plaques fonctionnellement graduées sont étudiés (Hadjj et al. 2015).

IV.2.2.1 Type (a) : plaque sandwich à peaux P- FGM et à cœur homogène :

La fraction volumique dans les P-FGM est assurée par une loi de puissance suivant l'épaisseur :

$$V^{(1)} = \left(\frac{z - h_1}{h_2 - h_1} \right)^k, \quad z \in [h_1, h_2] \quad (\text{IV.1a})$$

$$V^{(2)} = 1, \quad z \in [h_2, h_3] \quad (\text{IV.1b})$$

$$V^{(3)} = \left(\frac{z - h_4}{h_3 - h_4} \right)^k, \quad z \in [h_3, h_4] \quad (\text{IV.1c})$$

IV.2.2.2 Type (b) : Plaque sandwich à cœur P- FGM et à peaux homogènes

La fraction volumique dans les P-FGM est assurée par une loi de puissance suivant l'épaisseur :

$$V^{(1)} = 0, \quad z \in [h_1, h_2] \quad (\text{IV.2a})$$

$$V^{(2)} = \left(\frac{z - h_2}{h_3 - h_2} \right)^k, \quad z \in [h_2, h_3] \quad (\text{IV.2b})$$

$$V^{(3)} = 1, \quad z \in [h_3, h_4] \quad (\text{IV.2c})$$

Où $V^{(n)}$, ($n=1,2,3$) dénote la fonction de la fraction volumique de la couche n ; k est l'indice de la fraction volumique ($0 \leq k \leq +\infty$), qui indique la variation matérielle à travers l'épaisseur.

IV.2.3 Propriétés matérielles effectives des plaques sandwiches en FGM

Une plaque FGM constituée d'un mélange de deux phases matérielles, par exemple un métal et la céramique. Les propriétés matérielles des plaques FGM sont supposées varier de manière continue à travers l'épaisseur de la plaque.

Dans cette étude, la plaque imparfaite est supposée avoir des porosités se propageant dans l'épaisseur en raison d'un défaut pendant la production. Considérons un FGM imparfait avec une fraction volumique de porosité, α ($\alpha \ll 1$), répartie uniformément entre le métal et la céramique, la règle de mélange modifiée proposée par Wattanasakulpong et Ungbhakorn (2014) est utilisée comme :

$$P(z) = P_m \left(V_m - \frac{\alpha}{2} \right) + P_c \left(V_c - \frac{\alpha}{2} \right) \quad (IV.3)$$

Les propriétés matérielles telle que le module de Young E , le coefficient de Poisson ν et la densité de masse ρ de la plaque sandwich en FGM imparfaite peuvent être exprimer par la règle du mélange modifiée comme :

$$P^{(n)}(z) = (P_c - P_m) V^{(n)} + P_m - \frac{\alpha}{2} (P_c + P_m) \quad (IV.4)$$

Où $P^{(n)}$ est la propriété matérielle effective du FGM de la couche n . Pour le type (a), P_c et P_m sont les propriétés des faces supérieure et inférieure de la couche 1, respectivement, et vice versa pour la couche 3 dépendant de la fraction volumique $V^{(n)}$, ($n=1,2,3$). Pour type (b), P_c et P_m sont les propriétés des couches 3 et 1, respectivement.

Les propriétés matérielles effectives (P) pour chaque couche sont données comme suit :

Pour type A :

$$\begin{aligned}
 P^{(1)}(z) &= (P_c - P_m)V^{(1)} + P_m - \frac{\alpha}{2}(P_c + P_m) \\
 P^{(2)}(z) &= (P_c - P_m)V^{(2)} + P_m \\
 P^{(3)}(z) &= (P_c - P_m)V^{(3)} + P_m - \frac{\alpha}{2}(P_c + P_m)
 \end{aligned} \tag{IV.5}$$

Pour type B :

$$\begin{aligned}
 P^{(1)}(z) &= (P_c - P_m)V^{(1)} + P_m \\
 P^{(2)}(z) &= (P_c - P_m)V^{(1)} + P_m - \frac{\alpha}{2}(P_c + P_m) \\
 P^{(3)}(z) &= (P_c - P_m)V^{(3)} + P_m
 \end{aligned} \tag{IV.6}$$

Où α ($\alpha < 1$) désigne la fraction volumique de porosité.

Ces deux types de plaques sandwiches FGM seront discutés ci-après dans les sections suivantes. Dans cette étude, on suppose que le coefficient de poisson est constant (Delaleand Erdogan, 1983).

IV.2.4 Hypothèses de base

Les hypothèses de la présente théorie raffinée des plaques sont les suivantes :

- Les déplacements sont petits par rapport à l'épaisseur de la plaque et, en conséquence les déformations sont infinitésimales.
- Le déplacement transverse w contient deux composantes de flexion w_b et de cisaillement w_s . Ces composantes sont en fonction des coordonnées x et y et du temps t .

$$w(x, y, z, t) = w_b(x, y, t) + w_s(x, y, t) \tag{IV.7}$$

- La contrainte normale transversale σ_z est négligeable devant les autres contraintes planes σ_x et σ_y .
- Les déplacements u dans la direction x et v dans la direction y sont définis par superposition des déplacements dus aux effets d'extension, de flexion et de cisaillement.

$$u = u_0 + u_b + u_s, v = v_0 + v_b + v_s \quad (\text{IV.8})$$

- Les composantes de flexion u_b et v_b sont supposées les mêmes déplacements donnés par la théorie classique des plaques. Donc, les expressions pour u_b et v_b peuvent être donné comme :

$$u_b = -z \frac{\partial w_b}{\partial x}, v_b = -z \frac{\partial w_b}{\partial y} \quad (\text{IV.9.a})$$

- À partir de l'état de déplacement de composantes u_s et v_s se dérivent les composantes de déformation γ_{xz}, γ_{yz} qui varient paraboliquement à travers l'épaisseur de la plaque, tout en assurant la condition de nullité des contraintes de cisaillement τ_{xz}, τ_{yz} aux surfaces inférieure et supérieure de la plaque. Par conséquent, les expressions pour u_s et v_s peuvent être donné comme :

$$u_s = -f(z) \frac{\partial w_s}{\partial x}, v_s = -f(z) \frac{\partial w_s}{\partial y} \quad (\text{IV.9b})$$

IV.2.5 Cinématique et équations constitutive

En se basant, sur les hypothèses de la section précédente, le champ de déplacement peut être obtenu utilisant Eqs. (IV.7) – (IV.9) comme :

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w_b}{\partial x} - f(z) \frac{\partial w_s}{\partial x} \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z \frac{\partial w_b}{\partial y} - f(z) \frac{\partial w_s}{\partial y} \end{aligned} \quad (\text{IV.10})$$

$$w(x, y, z) = w_b(x, y) + w_s(x, y)$$

Où u, v , et w sont les déplacements dans les directions X, Y et Z, respectivement. Notez que, l'équation. (IV.10) introduit seulement quatre inconnues (u_0, v_0, w_b et w_s).

Dans l'équation (IV.10), $f(z)$ est défini en utilisant la théorie de cisaillement des plaques d'ordre élevé comme suit :

Modèle1 :

$$f(z) = z - \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \quad (\text{IV.11a})$$

Modèle2 :

$$f(z) = z \left[1 + \frac{3\pi}{2} \sec h\left(\frac{1}{2}\right)^2 \right] - \frac{3\pi}{2} h \tanh\left(\frac{z}{h}\right) \quad (\text{IV.11a})$$

Le champ de déformations se déduit des déplacements de l'équation (IV.10) soit

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} k_x^b \\ k_y^b \\ k_{xy}^b \end{Bmatrix} + f(z) \begin{Bmatrix} k_x^s \\ k_y^s \\ k_{xy}^s \end{Bmatrix} \quad (\text{IV.12})$$

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = g(z) \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^s \\ \gamma_{xz}^s \end{Bmatrix} \quad (\text{IV.13})$$

Où

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial x} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} k_x^b \\ k_y^b \\ k_{xy}^b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w_b}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \quad (\text{IV.14})$$

$$\begin{Bmatrix} k_x^s \\ k_y^s \\ k_{xy}^s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w_s}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^s \\ \gamma_{xz}^s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial w_s}{\partial y} \\ \frac{\partial w_s}{\partial x} \end{Bmatrix}$$

et

$$g(z) = 1 - \frac{df(z)}{dz} \quad (\text{IV.15})$$

Pour les FGMs élastiques et isotropes, les relations constitutives peuvent être écrites comme :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (\text{IV.16a})$$

et

$$\begin{Bmatrix} \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{44} & 0 \\ 0 & Q_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} \quad (\text{IV.16b})$$

Où $(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{yx})$ et $(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{yx})$ sont les composantes de contraintes et de déformations, respectivement. Les coefficients de rigidité Q_{ij} , peuvent être exprimés comme :

$$Q_{11} = Q_{22} = \frac{E(z)}{1-\nu^2}, \quad (\text{IV.17a})$$

$$Q_{12} = \frac{\nu E(z)}{1-\nu^2}, \quad (\text{IV.17b})$$

$$Q_{44} = Q_{55} = Q_{66} = \frac{E(z)}{2(1+\nu)}, \quad (\text{IV.17c})$$

IV.2.6 Equations gouvernantes

Les équations du mouvement peuvent être déterminées en utilisant le principe de Hamilton comme :

$$0 = \int_0^t \delta(U - T) dt \quad (\text{IV.18})$$

Où δU et δT sont les variations de l'énergie de déformation et d'énergie cinétique de la plaque sandwich respectivement. La variation de l'énergie de déformation de la plaque sandwich est donnée par :

$$\begin{aligned} \delta U &= \int_V \left[\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz} + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz} \right] dV \\ &= \int_A \left[N_x \delta \varepsilon_x^0 + N_y \delta \varepsilon_y^0 + N_{xy} \delta \gamma_{xy}^0 + M_x^b \delta k_x^b + M_y^b \delta k_y^b + M_{xy}^b \delta k_{xy}^b \right. \\ &\quad \left. + M_x^s \delta k_x^s + M_y^s \delta k_y^s + M_{xy}^s \delta k_{xy}^s + S_{yz}^s \delta \gamma_{yz}^s + S_{xz}^s \delta \gamma_{xz}^s \right] dA = 0 \end{aligned} \quad (IV.19)$$

Où les forces et moments résultants sont donnés comme :

$$\begin{aligned} (N_x, N_y, N_{xy}) &= \sum_{n=1}^3 \int_{h_n}^{h_{n+1}} (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) dz \\ (M_x^b, M_y^b, M_{xy}^b) &= \sum_{n=1}^3 \int_{h_n}^{h_{n+1}} (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) z dz \\ (M_x^s, M_y^s, M_{xy}^s) &= \sum_{n=1}^3 \int_{h_n}^{h_{n+1}} (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) f dz \\ (S_{xz}^s, S_{yz}^s) &= \sum_{n=1}^3 \int_{h_n}^{h_{n+1}} (\tau_{xz}, \tau_{yz}) g dz \end{aligned} \quad (IV.20)$$

La variation de l'énergie cinétique de la plaque sandwich peut être exprimée comme :

$$\begin{aligned} \delta T &= \int_{\frac{-h\Omega}{2}}^{\frac{h}{2}} \int \left[\dot{u} \delta \dot{u} + \dot{v} \delta \dot{v} + \dot{w} \delta \dot{w} \right] \rho(z) d\Omega dz \\ &= \int_A \left\{ I_0 \left[\dot{u}_0 \delta \dot{u}_0 + \dot{v}_0 \delta \dot{v}_0 + (\dot{w}_b + \dot{w}_s) (\delta \dot{w}_b + \delta \dot{w}_s) \right] \right. \\ &\quad - I_1 \left(\dot{u}_0 \frac{\partial \delta \dot{w}_b}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}_b}{\partial x} \delta \dot{u}_0 + \dot{v}_0 \frac{\partial \delta \dot{w}_b}{\partial y} + \frac{\partial \dot{w}_b}{\partial y} \delta \dot{v}_0 \right) \\ &\quad + J_1 \left(\dot{u}_0 \frac{\partial \delta \dot{w}_s}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}_s}{\partial x} \delta \dot{u}_0 + \dot{v}_0 \frac{\partial \delta \dot{w}_s}{\partial y} + \frac{\partial \dot{w}_s}{\partial y} \delta \dot{v}_0 \right) \\ &\quad - I_2 \left(\frac{\partial \dot{w}_b}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{w}_b}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}_b}{\partial y} \frac{\partial \delta \dot{w}_b}{\partial y} \right) + K_2 \left(\frac{\partial \dot{w}_s}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{w}_s}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}_s}{\partial y} \frac{\partial \delta \dot{w}_s}{\partial y} \right) \\ &\quad \left. + J_2 \left(\frac{\partial \dot{w}_b}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{w}_s}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}_s}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{w}_b}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}_b}{\partial y} \frac{\partial \delta \dot{w}_s}{\partial y} + \frac{\partial \dot{w}_s}{\partial y} \frac{\partial \delta \dot{w}_b}{\partial y} \right) \right\} d\Omega \end{aligned} \quad (IV.21)$$

Où (\cdot) représente la dérivée par rapport au variable temps t ; $\rho(z)$ est la densité de masse, et (I_i, J_i, K_i) sont les inerties massiques défini par :

$$(I_0, I_1, I_2) = \int_{-h/2}^{h/2} (1, z, z^2) \rho(z) dz \quad (IV.22a)$$

$$(J_1, J_2, K_2) = \int_{-h/2}^{h/2} (f, z f, f^2) \rho(z) dz \quad (IV.22b)$$

Les expressions suivantes sont obtenues après substitution des Eqs. (IV.19) et (IV.21) dans l'équation (IV.18) :

$$\begin{aligned} \delta u_0 : \quad \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} &= I_0 \ddot{u}_0 - I_1 \frac{\partial \ddot{w}_b}{\partial x} - J_1 \frac{\partial \ddot{w}_s}{\partial x} \\ \delta v_0 : \quad \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} &= I_0 \ddot{v}_0 - I_1 \frac{\partial \ddot{w}_b}{\partial y} - J_1 \frac{\partial \ddot{w}_s}{\partial y} \\ \delta w_b : \quad \frac{\partial^2 M_x^b}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^b}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^b}{\partial y^2} &= I_0 (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) + I_1 \left(\frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} + \frac{\partial \ddot{v}_0}{\partial y} \right) - I_2 \nabla^2 \ddot{w}_b - J_2 \nabla^2 \ddot{w}_s \\ \delta w_s : \quad \frac{\partial^2 M_x^s}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^s}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^s}{\partial y^2} + \frac{\partial S_{xz}^s}{\partial x} + \frac{\partial S_{yz}^s}{\partial y} &= I_0 (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) + J_1 \left(\frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} + \frac{\partial \ddot{v}_0}{\partial y} \right) - J_2 \nabla^2 \ddot{w}_b - K_2 \nabla^2 \ddot{w}_s \end{aligned} \quad (IV.23)$$

Substituant l'équation (IV.16) dans l'équation (IV.20) et en intégrant suivant l'épaisseur de la plaque, les forces et moments résultants sont donnés comme :

$$\begin{Bmatrix} N \\ M^b \\ M^s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B & B^s \\ B & D & D^s \\ B^s & D^s & H^s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon \\ k^b \\ k^s \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} S_{yz}^s \\ S_{xz}^s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{44}^s & 0 \\ 0 & A_{55}^s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^s \\ \gamma_{xz}^s \end{Bmatrix} \quad (IV.24)$$

Où

$$N = \{N_x, N_y, N_{xy}\}^t, \quad M^b = \{M_x^b, M_y^b, M_{xy}^b\}^t \quad (IV.25a)$$

$$M^s = \{M_x^s, M_y^s, M_{xy}^s\}^t$$

$$\varepsilon = \{\varepsilon_x^0, \varepsilon_y^0, \gamma_{xy}^0\}, \quad k^b = \{k_x^b, k_y^b, k_{xy}^b\} \quad (IV.25b)$$

$$k^s = \{k_x^s, k_y^s, k_{xy}^s\}$$

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 \\ B_{12} & B_{22} & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} \end{bmatrix}, \quad (IV.25c)$$

$$D = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix},$$

$$, D^s = \begin{bmatrix} D_{11}^s & D_{12}^s & 0 \\ D_{12}^s & D_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & D_{66}^s \end{bmatrix}, H^s = \begin{bmatrix} H_{11}^s & H_{12}^s & 0 \\ H_{12}^s & H_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & H_{66}^s \end{bmatrix} \quad (IV.25d)$$

Où Les composantes de rigidité A_{ij} , B_{ij} , etc, sont définis comme :

$$\begin{Bmatrix} A_{11} & B_{11} & D_{11} & B_{11}^s & D_{11}^s & H_{11}^s \\ A_{12} & B_{12} & D_{12} & B_{12}^s & D_{12}^s & H_{12}^s \\ A_{66} & B_{66} & D_{66} & B_{66}^s & D_{66}^s & H_{66}^s \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} C_{11} \left(1, z, z^2, f(z), z f(z), f^2(z) \right) \begin{Bmatrix} 1 \\ \nu \\ \frac{1-\nu}{2} \end{Bmatrix} dz$$

$$\left(A_{22}, B_{22}, D_{22}, B_{22}^s, D_{22}^s, H_{22}^s \right) = \left(A_{11}, B_{11}, D_{11}, B_{11}^s, D_{11}^s, H_{11}^s \right) \quad (IV.26)$$

$$A_{44}^s = A_{55}^s = \int_{-h/2}^{h/2} C_{44} [g(z)]^2 dz,$$

Équations (IV.23) peuvent être exprimées en termes des déplacements (u_0, v_0, w_b, w_s) en remplaçant les forces résultantes de l'équation (IV.24). Pour la plaque de FGM, les équations d'équilibres (IV.23) prennent la forme :

$$A_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + A_{66} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - B_{11} \frac{\partial^3 w_b}{\partial x^3} - (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 w_b}{\partial x \partial y^2} - B_{11}^s \frac{\partial^3 w_s}{\partial x^3} - (B_{12}^s + 2B_{66}^s) \frac{\partial^3 w_s}{\partial x \partial y^2} = I_0 \ddot{u}_0 - I_1 \frac{\partial \ddot{w}_b}{\partial x} - J_1 \frac{\partial \ddot{w}_s}{\partial x},$$

$$(A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + A_{66} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + A_{22} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} - (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 w_b}{\partial x^2 \partial y} - B_{22} \frac{\partial^3 w_b}{\partial y^3} - B_{22}^s \frac{\partial^3 w_s}{\partial y^3} - (B_{12}^s + 2B_{66}^s) \frac{\partial^3 w_s}{\partial x^2 \partial y} = I_0 \ddot{v}_0 - I_1 \frac{\partial \ddot{w}_b}{\partial y} - J_1 \frac{\partial \ddot{w}_s}{\partial y},$$

(IV.27)

$$B_{11} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} + B_{22} \frac{\partial^3 v}{\partial y^3} - D_{11} \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^4} - 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^2 \partial y^2} - D_{22} \frac{\partial^4 w_b}{\partial y^4} - D_{11}^s \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^4} - 2(D_{12}^s + 2D_{66}^s) \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^2 \partial y^2} - D_{22}^s \frac{\partial^4 w_s}{\partial y^4} = I_0 (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) + I_1 \left(\frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} + \frac{\partial \ddot{v}_0}{\partial y} \right) - I_2 \nabla^2 \ddot{w}_b - J_2 \nabla^2 \ddot{w}_s,$$

$$B_{11}^s \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + (B_{12}^s + 2B_{66}^s) \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + (B_{12}^s + 2B_{66}^s) \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} + B_{22}^s \frac{\partial^3 v}{\partial y^3} - D_{11}^s \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^4} - 2(D_{12}^s + 2D_{66}^s) \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^2 \partial y^2} - D_{22}^s \frac{\partial^4 w_b}{\partial y^4} - H_{11}^s \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^4} - 2(H_{12}^s + 2H_{66}^s) \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^2 \partial y^2} - H_{22}^s \frac{\partial^4 w_s}{\partial y^4} + A_{55}^s \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} + A_{44}^s \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} = I_0 (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) + J_1 \left(\frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} + \frac{\partial \ddot{v}_0}{\partial y} \right) - J_2 \nabla^2 \ddot{w}_b - K_2 \nabla^2 \ddot{w}_s,$$

IV.2.7 La solution de Navier pour les plaques sandwiches en FGM

Pour une solution analytique des équations (IV.27), la méthode de Navier est utilisée pour une plaque sandwich rectangulaire en FGM avec des conditions de frontière spécifiques (appuyée - appuyée). Les conditions aux limites suivantes sont imposées aux bords de la plaque.

$$\begin{aligned} v_0(0, y) &= w_b(0, y) = w_s(0, y) \\ &= \frac{\partial w_b}{\partial y}(0, y) = \frac{\partial w_s}{\partial y}(0, y) = 0 \end{aligned} \quad (IV.28a)$$

$$\begin{aligned} v_0(a, y) &= w_b(a, y) = w_s(a, y) \\ &= \frac{\partial w_b}{\partial y}(a, y) = \frac{\partial w_s}{\partial y}(a, y) = 0 \end{aligned} \quad (IV.28b)$$

$$\begin{aligned} N_x(0, y) &= M_x^b(0, y) = M_x^s(0, y) = N_x(a, y) \\ &= M_x^b(a, y) = M_x^s(a, y) = 0 \end{aligned} \quad (IV.28c)$$

$$\begin{aligned} u_0(x,0) &= w_b(x,0) = w_s(x,0) \\ &= \frac{\partial w_b}{\partial x}(x,0) = \frac{\partial w_s}{\partial x}(x,0) = 0 \end{aligned} \quad (\text{IV.28d})$$

$$\begin{aligned} u_0(x,b) &= w_b(x,b) = w_s(x,b) \\ &= \frac{\partial w_b}{\partial x}(x,b) = \frac{\partial w_s}{\partial x}(x,b) = 0 \end{aligned} \quad (\text{IV.28e})$$

$$\begin{aligned} N_y(x,0) &= M_y^b(x,0) = M_y^s(x,0) \\ &= N_y(x,b) = M_y^b(x,b) = M_y^s(x,b) = 0 \end{aligned} \quad (\text{IV.28f})$$

Les fonctions des déplacements qui satisfont les équations des conditions aux limites (IV.23) sont développées en séries de Fourier comme suit :

$$\begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_b \\ w_s \end{Bmatrix} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \begin{Bmatrix} U_{mn} \cos(\lambda x) \sin(\mu y) e^{i\omega t} \\ V_{mn} \sin(\lambda x) \cos(\mu y) e^{i\omega t} \\ W_{bmn} \sin(\lambda x) \sin(\mu y) e^{i\omega t} \\ W_{smn} \sin(\lambda x) \sin(\mu y) e^{i\omega t} \end{Bmatrix} \quad (\text{IV.29})$$

Où U_{mn}, V_{mn}, W_{bmn} , et W_{smn} sont des paramètres à déterminer, et ω est la fréquence propre associée au (m,n) nième mode propre, et $\lambda = m\pi/a$ et $\mu = n\pi/b$.

Substituant les équations (IV.29) dans les équations de mouvement (IV.27) nous obtenons les équations, ci-dessous, aux valeurs propres pour n'importe quelle valeur fixe de m et n , pour le problème de vibration libre :

$$([K] - \omega^2[M])\{\Delta\} = \{0\} \quad (\text{IV.30})$$

Où $\{\Delta\}$ représente le vecteur de colonne des inconnus

$$\{\Delta\}^T = \{U_{mn}, V_{mn}, W_{bmn}, W_{smn}\}, \quad (\text{IV.31})$$

et

$$[M] = \begin{bmatrix} m_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_{33} & m_{34} \\ 0 & 0 & m_{34} & m_{44} \end{bmatrix} [K] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{bmatrix}, \quad (\text{IV.32})$$

Dans lesquelles :

$$\begin{aligned} a_{11} &= -(A_{11}\lambda^2 + A_{66}\mu^2) \\ a_{12} &= -\lambda \mu (A_{12} + A_{66}) \\ a_{13} &= -\lambda [B_{11}\lambda^2 + (B_{12} + 2B_{66}) \mu^2] \\ a_{14} &= \lambda [B_{11}^s \lambda^2 + (B_{12}^s + 2B_{66}^s) \mu^2] \\ a_{22} &= -(A_{66}\lambda^2 + A_{22}\mu^2) \quad (\text{IV.33}) \\ a_{23} &= \mu [(B_{12} + 2B_{66}) \lambda^2 + B_{22}\mu^2] \\ a_{24} &= \mu [(B_{12}^s + 2B_{66}^s) \lambda^2 + B_{22}^s \mu^2] \\ a_{33} &= -(D_{11}\lambda^4 + 2(D_{12} + 2D_{66})\lambda^2 \mu^2 + D_{22}\mu^4 + N_x^0 \lambda^2 + N_y^0 \mu^2) \\ a_{34} &= -(D_{11}^s \lambda^4 + 2(D_{12}^s + 2D_{66}^s)\lambda^2 \mu^2 + D_{22}^s \mu^4 + N_x^0 \lambda^2 + N_y^0 \mu^2) \\ a_{44} &= -(H_{11}^s \lambda^4 + 2(H_{12}^s + 2H_{66}^s)\lambda^2 \mu^2 + H_{22}^s \mu^4 + A_{55}^s \lambda^2 + A_{44}^s \mu^2) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} m_{11} &= m_{22} = I_1 \\ m_{33} &= I_0 + I_2 (\lambda^2 + \mu^2) \\ m_{34} &= I_0 + J_2 (\lambda^2 + \mu^2) \\ m_{44} &= I_0 + K_2 (\lambda^2 + \mu^2) \end{aligned} \quad (\text{IV.34})$$

IV.3 Conclusion

Dans ce chapitre, l'analyse de la vibration des plaques sandwichs poreuses en FGM sont examinées par une théorie de cisaillement d'ordre élevé à quatre variables. Cette théorie satisfait les conditions des contraintes de cisaillement nulles dans les faces supérieure et inférieure de la plaque. Deux types courants des plaques sandwichs en FGM sont considérés, c'est-à-dire sandwich avec deux peaux FGM et cœur homogène et sandwich avec deux peaux homogènes et cœur FGM. On assume que les propriétés matérielles varient selon l'épaisseur de la plaque sandwich seulement selon une distribution de loi de puissance (P-FGM).

CHAPITRE V :

**VALIDATION ET COMPARAISON
DES RESULTATS**

Chapitre V

Validation et comparaison des résultats

V.1 Introduction

Dans ce chapitre, l'analyse de la vibration libre des plaques sandwichs poreuses en FGM par la théorie raffinée des plaques est effectuée pour discussion.

Nous considérons les différentes formes de fonction de cisaillement $f(z)$ qui permet d'une part de prendre en compte le cisaillement transverse, et d'autre part d'en approcher la forme de distribution suivant l'épaisseur.

Pour la plaque sandwich en FGM les propriétés matérielles utilisées dans la présente étude sont :

- Céramique (Alumine, Al_2O_3) $E_c = 380GPa$, $\nu = 0.3$ et $\rho_c = 3800kg/m^3$.
- Métal (P_2 , Aluminium, Al) $E_m = 380GPa$, $\nu = 0.3$ et $\rho_c = 2707kg/m^3$.

Les résultats numériques sont présentés en termes de fréquences non dimensionnelles. Le paramètre de fréquence naturelle non dimensionnel est défini comme :

$$\bar{\omega} = \frac{\omega a^2}{h} \sqrt{\frac{\rho_0}{E_0}}$$

Où

$$\rho_0 = 1kg/m^3, \text{ et } E_0 = 1GPa.$$

Plusieurs exemples numériques sont décrits et discutés pour vérifier la validité de la présente théorie dans la prévision du comportement de vibration libre des plaques sandwichs poreuses en FGM.

Afin de prouver la validité de la présente théorie, les résultats ont été obtenus pour les plaques sandwichs FGM et comparés avec ceux déjà existants dans la littérature tels que la théorie classique des plaques (CPT), la théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDPT), la théorie de déformation de cisaillement du troisième ordre des plaques (PSDPT) et la théorie de déformation en cisaillement sinusoïdal des plaques (SSDPT) comme indiqué dans le tableau V.1. Généralement on utilise un facteur de correction de cisaillement $K = 5/6$ dans la théorie de cisaillement FSDPT.

Tableau V.1: Hypothèses cinématiques pour différentes théories de plaques.

Théories	Hypothèses de déplacements tri dimensionnels
	$u(x, y, z, t) = u_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial x},$
<i>CPT</i>	$v(x, y, z, t) = v_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial y},$ $w(x, y, z, t) = w_0(x, y, t).$
	$u(x, y, z, t) = u_0(x, y, t) + z \phi_x(x, y),$
<i>FSDPT</i>	$v(x, y, z, t) = v_0(x, y, t) + z \phi_y(x, y),$ $w(x, y, z, t) = w_0(x, y, t).$
	$u(x, y, z, t) = u_0(x, y, t) + z \phi_x(x, y) - \frac{4z^3}{3h^2} \left(\phi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right),$
<i>TSDPT</i>	$v(x, y, z, t) = v_0(x, y, t) + z \phi_y(x, y) - \frac{4z^3}{3h^2} \left(\phi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right),$ $w(x, y, z, t) = w_0(x, y, t).$
	$u(x, y, z, t) = u_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \phi_x(x, y),$
<i>SSDPT</i>	$v(x, y, z, t) = v_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \phi_y(x, y),$ $w(x, y, z, t) = w_0(x, y, t).$

Deux types courants des plaques sandwiches en FGM sont considérés :

- Type A : sandwich avec des peaux poreuses en FGM et cœur homogène.
- Type B : sandwich avec des peaux homogènes et cœur poreux en FGM.

V.2 Validation des résultats de la vibration libre

Le tableau V.2 présente une comparaison des résultats des plaques sandwiches *P-FGM* du type A avec six distributions matérielles utilisant les théories CPT, FSDPT, TSDPT, SSDPT, et la théorie tridimensionnelle linéaire d'élasticité de Li et al. (Li, 2008). Le module de Young

E et la densité de masse ρ sont suit une distribution en loi de puissance Eq (IV.4). Le tableau V.2 montre un bon accord par des comparaisons des plaques FGM de

Cinq différents indices de fraction volumique $k = 0, 0.5, 1, 5, 10$ avec d'autres théories.

En général, les fréquences de vibration obtenue par la théorie classique CPT sont très supérieures que ceux calculés à partir des théories de déformation de cisaillement. Cela implique que les résultats estimés par la théorie CPT donnent une grande erreur pour une plaque épaisse.

Des comparaisons sont données dans les tableaux V.3 et V.4 en utilisant des types de plaque à cour rigide homogène et un cœur souple homogène des plaques sandwichs poreuses en FGM (Type A). Le tableau V.3 considère le cas du cœur rigide homogène dans lequel le module de Young et la densité de masse de la couche 1 sont $E_c = 380GPa$ et $\rho_c = 3800kg/m^3$ (Alumine) dans la face supérieure et $E_m = 70GPa$ et $\rho_m = 2707kg/m^3$ (Aluminium) dans la face inférieure. Le tableau V.4 considère le cas du coeur souple homogène dans lequel le module de Young et la densité de masse de la couche 1 sont $E_m = 70GPa$ et $\rho_m = 2707kg/m^3$ (Aluminium) dans la face supérieure et $E_c = 380GPa$ et $\rho_c = 3800kg/m^3$ (Alumine) dans la face inférieure. Deux rapports cotés sur épaisseur a/h (10 et 100), trois indices de fraction volumique (0, 5 et 10) et trois valeurs de fraction volumique de porosité sont considérées. A partir des résultats présentés dans les tableaux V.3 et V.4, on peut constater que les fréquences fondamentales de cette étude montrent un bon accord avec ceux obtenus par Li et al. (Li, 2008) lorsque $\alpha = 0$ et devient plus élevé lorsque $\alpha \neq 0$. Le tableau V.5 donne les résultats de type de plaque sandwich 1-8-1 en $P-FGM$ du type B . Dans ce cas, le cœur FGM est riche en métal dans la face supérieure et riche en céramique dans la face inférieure. Trois rapports d'épaisseur sur coté a/h (5, 10 et 100), quatre indices de fraction volumique (1, 2, 5 et 10) et trois valeurs de fraction volumique de porosité sont considérées. Le tableau V.5 montre que les résultats de Li et al. (Li, 2008) pour les plaques sandwichs avecun cœur FGM poreux donne des résultats proches de la présente théorie de cisaillement proposée.

A partir des résultats présentés dans les tableaux V.3 – V.5, on remarque que les fréquences fondamentales naturelles diminués avec la diminution de la rigidité du matériau, qui est due à l'augmentation de l'indice de puissance k du type A ou de la diminution de k

pour le type B et de la variation du rapport d'épaisseur de la couche. De plus, les plaques minces sont faiblement sensibles que les plaques épaisses de point de vue rigidité du matériau, c'est-à-dire l'indice k .

L'effet de la porosité sur la fréquence non dimensionnelle en fonction du rapport h/b pour une plaque sandwich FGM avec un cœur rigide homogène est présenté dans la figure V.1.

A partir de ces figures, on remarque que la présence de la porosité dans la plaque sandwich FGM avec un cœur homogène réduit les fréquences non dimensionnelles. En outre, on observe que les résultats diminuent progressivement en fonction du rapport d'épaisseur h/b .

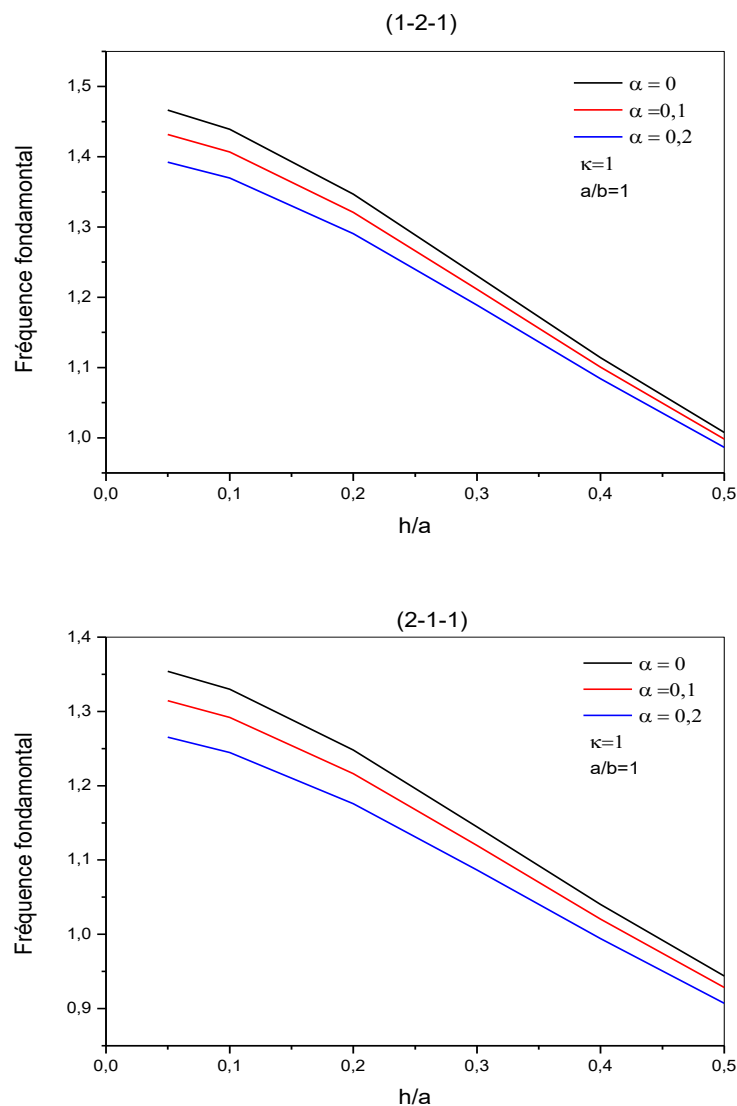


Figure V.1: Influence de la porosité sur la fréquence fondamentale en fonction du rapport d'épaisseur h/a pour une plaque sandwich FGM avec un cœur rigide et homogène.

La figure V.2 présente la variation des fréquences non dimensionnelles pour une plaque sandwich FGM avec un cœur souple homogène pour différentes valeurs de la fraction de volume de porosité α . On remarque que les fréquences diminuent avec l'augmentation du rapport h/b . De plus les fréquences dans les plaques minces sont plus sensibles que dans les plaques épaisses à la fraction volumique de la porosité.

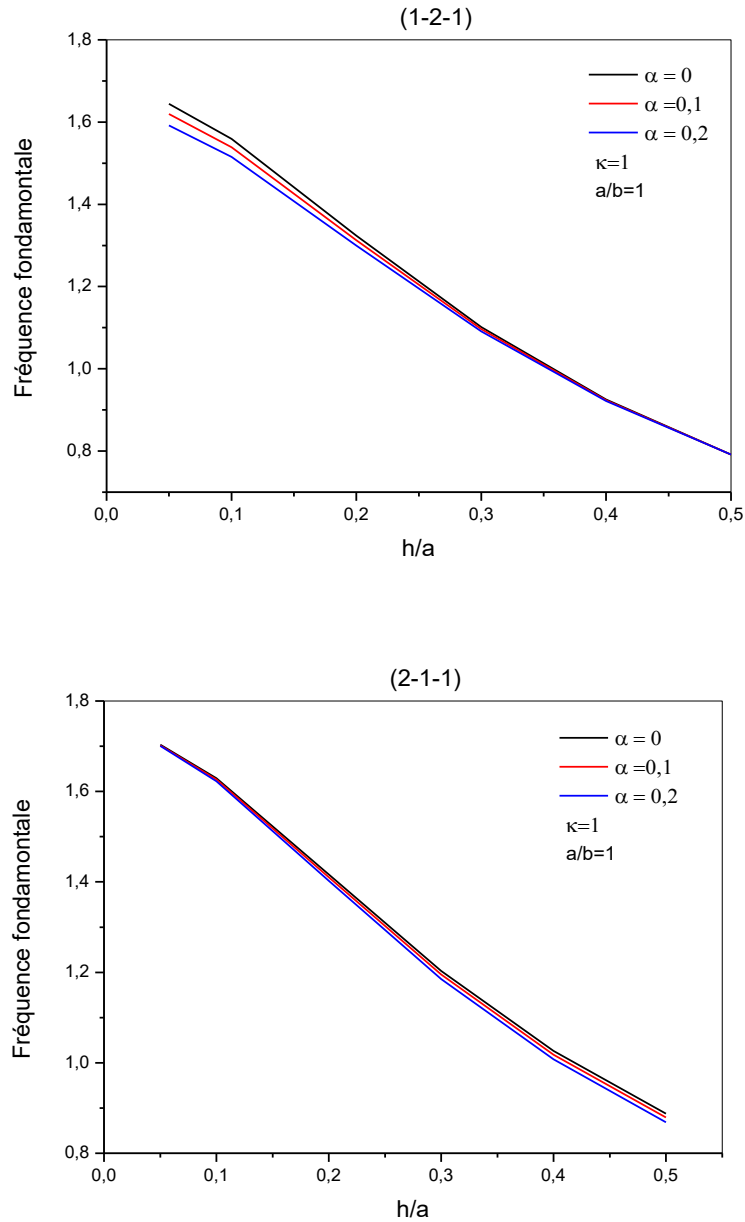


Figure V.2 : Influence de la porosité sur la fréquence fondamentale en fonction du rapport d'épaisseur h/a pour une plaque sandwich FGM avec cœur souple et homogène.

La figure V.3 présente la variation des fréquences non dimensionnelles en fonction du rapport h/b des plaques sandwiches simplement appuyées avec un cœur FGM pour différentes valeurs de l'indice de la fraction de volume de porosité α . Les résultats des fréquences sont maximaux pour les plaques minces et minimales pour les plaques épaisses. On constate que les plaques minces sont légèrement plus sensibles que la plaque épaisse à la porosité pour les plaques sandwiches FGM à cœur FGM.

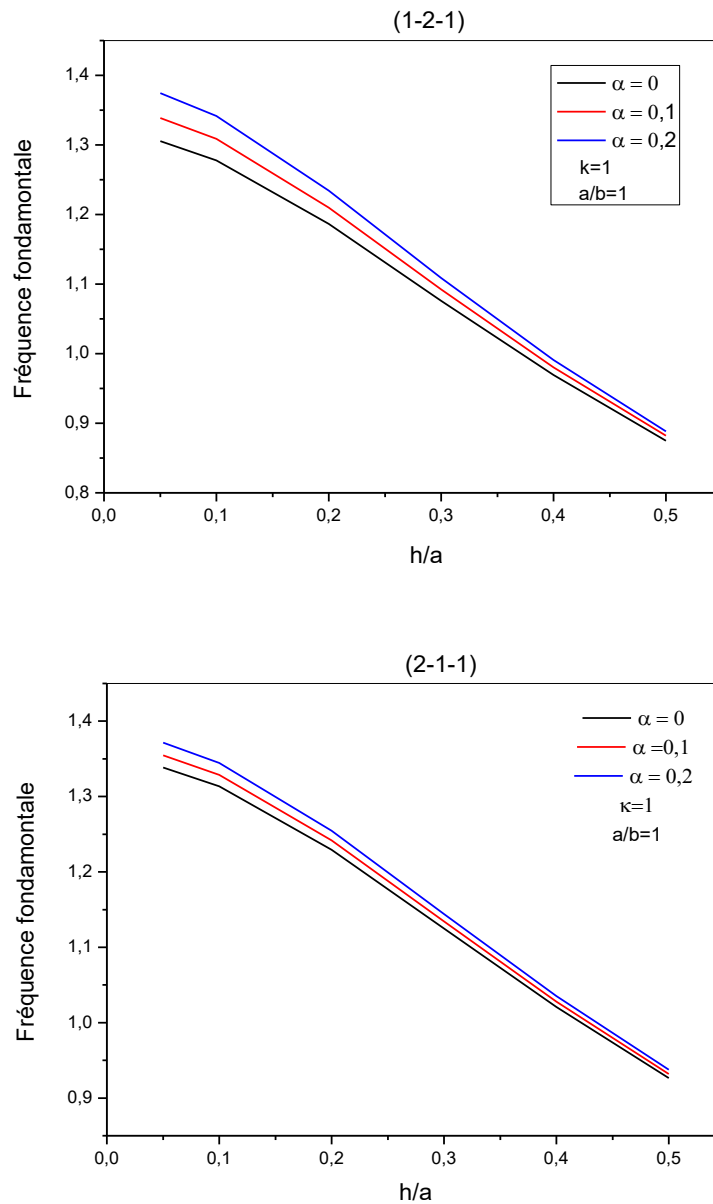


Figure V.3 : Influence de la porosité sur la fréquence fondamentale en fonction du rapport d'épaisseur h/a pour une plaque sandwich FGM avec cœur FGM.

Tableau V.2: Comparaison des paramètres de fréquence fondamentaux $\bar{\omega}$ des plaques sandwichs P-FGM carrées simplement appuyées du type A avec d'autres théories ($a/h = 10$).

k	Théories	$\bar{\omega}$					
		1-0-1	2-1-2	2-1-1	1-1-1	2-2-1	1-2-1
0	CPT	1.87359	1.87359	1.87359	1.87359	1.87359	1.87359
	FSDPT	1.82442	1.82442	1.82442	1.82442	1.82442	1.82442
	PSDPT	1.82445	1.82445	1.82445	1.82445	1.82445	1.82445
	SSDPT	1.82452	1.82452	1.82452	1.82452	1.82452	1.82452
	Elasticité	-	-	-	-	-	-
	Présente 1	1.82452	1.82452	1.82452	1.82452	1.82452	1.82452
	Présente 2	1.82448	1.82448	1.82448	1.82448	1.82448	1.82448
0.5	CPT	1.47157	1.51242	1.54264	1.54903	1.58374	1.60722
	FSDPT	1.44168	1.48159	1.51035	1.51695	1.55001	1.57274
	PSDPT	1.44424	1.48408	1.51253	1.51922	1.55109	1.57451
	SSDPT	1.44436	1.48418	1.51258	1.51927	1.55202	1.57450
	Elasticity	1.44614	1.48608	1.50841	1.52131	1.54926	1.57668
	Présente 1	1.44436	1.48418	1.50499	1.51927	1.54600	1.57450
	Présente 2	1.44432	1.48414	1.50534	1.51925	1.54629	1.57449
1	CPT	1.26238	1.32023	1.37150	1.37521	1.43247	1.46497
	FSDPT	1.24031	1.29729	1.34637	1.35072	1.40555	1.43722
	PSDPT	1.24320	1.30011	1.34888	1.35333	1.40789	1.43934
	SSDPT	1.24335	1.30023	1.34894	1.35339	1.40792	1.43931
	Elasticity	1.24470	1.30181	1.33511	1.35523	1.39763	1.44137
	Présente 1	1.24335	1.30023	1.32985	1.35339	1.39279	1.43930
	Présente 2	1.24330	1.30019	1.33060	1.35336	1.39341	1.43930
5	CPT	0.95844	0.99190	1.08797	1.05565	1.16195	1.18867
	FSDPT	0.94256	0.97870	1.07156	1.04183	1.14467	1.17159
	PSDPT	0.94598	0.98184	1.07432	1.04466	1.14731	1.17397
	SSDPT	0.94630	0.98207	1.07445	1.04481	1.14741	1.17399
	Elasticity	0.94476	0.98103	1.02942	1.04532	1.10983	1.17567
	Présente 1	0.94635	0.98207	1.02119	1.04481	1.10042	1.17399
	Présente 2	0.94620	0.98200	1.022630	1.04476	1.10172	1.17398
10	CPT	0.94321	0.95244	1.05185	1.00524	1.11883	1.13614
	FSDPT	0.92508	0.93962	1.03580	0.99256	1.10261	1.12067
	PSDPT	0.92839	0.94297	1.03862	0.99551	1.10533	1.12314
	SSDPT	0.92875	0.94332	1.04558	0.99519	1.04154	1.13460
	Elasticity	0.92727	0.94078	0.98929	0.99523	1.06104	1.12466
	Présente 1	0.92875	0.94313	0.97847	0.99587	1.06094	1.11455
	Présente 2	0.928640	0.94316	0.98384	0.99564	1.05272	1.12317

Tableau V.3 : Comparaison des paramètres de fréquence fondamentale $\bar{\omega}$ pour une plaque sandwich FGM parfaite et imparfaite avec cœur rigide et homogène.

a/h	k	Théories	α	$\bar{\omega}$					
				1-0-1	2-1-2	1-1-1	2-2-1	1-2-1	1-8-1
100	0	Li et al (2008)	0	1.88829	1.88829	1.88829	1.88829	1.88829	1.88829
		Présente 1	0	1.88825	1.88825	1.88825	1.88825	1.88825	1.86512
			0.1	1.91532	1.89813	1.88833	1.88699	1.87938	1.87692
			0.2	1.94749	1.90951	1.88843	1.88543	1.86962	1.86512
	5	Li et al (2008)	0	0.96563	0.99903	1.06309	1.13020	1.19699	1.56988
		Présente1	0	0.96564	0.99903	1.06308	1.13160	1.19696	1.52706
			0.1	0.85897	0.89851	0.97615	1.05351	1.13373	1.54900
			0.2	0.69755	0.76000	0.86469	0.95534	1.05927	1.52706
	10	Li et al (2008)	0	0.95042	0.95934	1.01237	1.08065	1.14408	1.54164
		Présente1	0	0.95044	0.95937	1.01236	1.08294	1.14405	1.54161
			0.1	0.83571	0.84715	0.91456	0.99543	1.07374	1.51974
			0.2	0.65696	0.68733	0.78594	0.88273	0.99015	1.49671
10	0	Li et al (2008)	0	1.82682	1.82682	1.82682	1.82682	1.82682	1.82682
		Pressente1	0	1.82453	1.82453	1.82453	1.82453	1.82453	1.82453
			0.1	1.85068	1.83538	1.82652	1.82503	1.81817	1.81494
			0.2	1.88176	1.84784	1.82866	1.82532	1.81104	1.80489
	5	Li et al (2008)	0	0.94476	0.98103	1.04532	1.10983	1.17567	1.52993
		Pressente1	0	0.94630	0.98207	1.04481	1.10042	1.17399	1.52776
			0.1	0.84366	0.88514	0.96122	1.02107	1.11376	1.50864
			0.2	0.68725	0.75052	0.85324	0.91905	1.04236	1.48844
	10	Li et al (2008)	0	0.92727	0.94078	0.99523	1.06104	1.12466	1.50333
		Présente1	0	0.92874	0.94326	0.99565	1.060905	1.12318	1.50121
			0.1	0.81867	0.83490	0.90136	0.96127	1.05599	1.48106
			0.2	0.64609	0.67926	0.77633	0.84260	0.97535	1.45977

Tableau V.4 : Comparaison des paramètres de fréquence fondamentale $\bar{\omega}$ pour une plaque sandwich FGM parfaite et imparfaite avec cœur souple et homogène.

a/h	k	Théories	α	$\bar{\omega}$					
				1-0-1	2-1-2	1-1-1	2-2-1	1-2-1	1-8-1
100	0	Li et al (2008)	0	0.96022	0.96022	0.96022	0.96022	0.96022	0.96022
		Présente 1	0	0.96020	0.96020	0.96020	0.96020	0.96020	0.96020
			0.1	0.84327	0.83359	0.83195	0.84195	0.83973	0.89251
			0.2	0.65839	0.64315	0.64685	0.67532	0.67720	0.81535
	5	Li et al (2008)	0	1.92090	1.94313	1.93623	1.86207	1.88530	1.57035
		Présente1	0	1.92088	1.94328	1.93652	1.86321	1.88552	1.57034
			0.1	1.95211	1.95841	1.93998	1.86264	1.87466	1.54416
			0.2	1.98952	1.97608	1.94396	1.86196	1.86249	1.51626
	10	Li et al (2008)	0	1.91064	1.94687	1.95044	1.88042	1.91162	1.60457
		Présente1	0	1.91064	1.94698	1.95075	1.88006	1.91197	1.60456
			0.1	1.94026	1.96206	1.95510	1.88053	1.90276	1.57989
			0.2	1.97564	1.97964	1.96007	1.88103	1.89252	1.55364
10	0	Li et al (2008)	0	0.92897	0.92897	0.92897	0.92897	0.92897	0.92897
		Présente1	0	0.92780	0.92780	0.92780	0.92780	0.92780	0.92780
			0.1	0.81481	0.80871	0.80831	0.81669	0.81624	0.86527
			0.2	0.63617	0.62813	0.63312	0.65386	0.66277	0.79314
	5	Li et al (2008)	0	1.84198	1.82611	1.78956	1.72726	1.72670	1.46647
		Présente1	0	1.84113	1.83869	1.81275	1.74557	1.74351	1.46629
			0.1	1.86977	1.85246	1.81669	1.74566	1.73669	1.44600
			0.2	1.90405	1.86854	1.82123	1.74575	1.72890	1.42404
	10	Li et al (2008)	0	1.84020	1.83987	1.80813	1.74779	1.74811	1.49481
		Présente1	0	1.83815	1.84959	1.83337	1.76812	1.77026	1.49450
			0.1	1.86607	1.86389	1.83801	1.76952	1.76494	1.47569
			0.2	1.89939	1.88071	1.84310	1.77108	1.75886	1.45536

Tableau V.5: Comparaison des paramètres de fréquence fondamentale $\bar{\omega}$ pour une plaque sandwich FGM parfaite et imparfaite avec un cœur FGM.

a/h	Théories	α	$\bar{\omega}$			
			1-8-1			
			k=1	k=2	k=5	k=10
100	Li et al (2008)	0	1.38669	1.44491	1.53143	1.59105
	Présente 1	0	1.38665	1.44487	1.53139	1.59103
		0.1	1.44565	1.50356	1.59089	1.65164
		0.2	1.51287	1.57002	1.65790	1.71975
10	Li et al (2008)	0	1.34847	1.40828	1.49309	1.54980
	Présente1	0	1.34533	1.40514	1.49044	1.54755
		0.1	1.39920	1.45965	1.54610	1.60422
		0.2	1.45993	1.52104	1.60856	1.66767
5	Li et al (2008)	0	1.25338	1.31569	1.39567	1.44540
	Présente1	0	1.24352	1.30578	1.38740	1.43843
		0.1	1.28627	1.35095	1.43433	1.48615
		0.2	1.33327	1.40114	1.48653	1.53915

V.3 Conclusion

La théorie raffinée à quatre variables est développée pour l'analyse de la vibration des plaques sandwichs rectangulaires poreuses en FGM. Le nombre de variables dans cette théorie est inférieur à celles des théories de déformation de cisaillement des plaques du premier et d'ordre élevé. La théorie prend en compte les effets de cisaillement transversal et la distribution parabolique des contraintes de cisaillement suivant l'épaisseur de la plaque et satisfait les conditions de nullité de la contrainte de traction sur les bords, sans l'aide de facteurs de correction de cisaillement. Ainsi, contrairement à toute autre théorie, la théorie présentée donne lieu à seulement quatre équations régissant résultant de l'effort de calcul nettement inférieur par rapport aux autres théories d'ordre supérieur rapportées dans la littérature ayant plus de nombre d'équations gouvernantes. La précision et l'efficacité de la présente théorie ont été démontrées pour le comportement de vibration des plaques sandwichs poreuses en FGM. Les plaques sandwichs P – FGM avec des peaux FGM poreuses et cœur homogène et les plaques sandwichs avec des peaux homogènes et cœur FGM poreuse sont considérées comme fondamentales. Les équations gouvernantes ont une forte similarité avec la théorie des plaques classiques CPT en plusieurs aspects. En conclusion, on peut dire que toutes les études comparatives ont démontré que la présente théorie proposée est non seulement précise, mais aussi efficace pour l'analyse de la vibration libre des plaques sandwichs rectangulaire poreuses en FGM.

CONCLUSION GENERALE

Conclusion générale

L'utilisation des matériaux composites type FGM apparaît comme une voie prometteuse dans le domaine des nouveaux matériaux composites grâce à leurs propriétés structurales très particulières. La conception et l'élaboration de ces matériaux nécessitent le développement d'outils d'analyse adaptés à leurs spécificités géométriques et matérielles.

L'objectif de ce travail a été d'apporter une contribution à l'analyse de la vibration des plaques sandwichs poreuses en FGM en tenant compte de l'effet de cisaillement transverse. Deux types de plaque sandwich FGM sont considérés, à savoir, le sandwich avec des peaux FGM et le cœur homogène et le sandwich avec des peaux homogènes et le cœur en FGM. Pour ce faire, nous avons développé notre travail comme suit :

Nous avons proposé un modèle analytique performant basé sur la théorie de cisaillement raffinée pour l'analyse du problème de la vibration des plaques sandwichs en considérant les porosités qui peuvent se produire à l'intérieur des matériaux à gradient de propriétés (FGM) au cours de leur fabrication.

Toutes les études comparatives effectuées dans cette étude ont montré que les résultats obtenus pour l'analyse du problème dynamique sont presque identiques à ceux obtenus avec d'autres théories de déformation de cisaillement. L'effet de plusieurs paramètres de la plaque est aussi présenté dans cette investigation sous forme numérique et graphique dans plusieurs combinaisons de matériaux FGM.

Pour les plaques sandwichs poreuses en FGM les conclusions suivantes ont été observées à partir des résultats typiques obtenus :

- Les fréquences de vibration obtenue par la théorie classique CPT sont très supérieures que ceux calculés à partir des théories de déformation de cisaillement, cela implique que les résultats estimés par la théorie CPT donne une grande erreur pour une plaque épaisse.
- Les comparaisons des résultats des fréquences en utilisant deux types de cœur rigide homogène et un cœur souple homogène des plaques sandwichs FGM (Type A) montrent que les fréquences fondamentales de cette théorie raffinée avec les

résultats obtenus par Li et al. sont presque identiques lorsque la plaque est parfaite (sans porosité) et devient plus élevé lorsque la plaque est imparfaite (avec porosité).

- Il est montré que les fréquences fondamentales naturelles diminuées avec la diminution de la rigidité du matériau, qui est due à l'augmentation de l'indice de puissance k du type A où de la diminution de k pour le type B et de la variation du rapport d'épaisseur de la couche.

En conclusion, on peut dire que la théorie des plaques raffinées à quatre variables proposées est exacte et simple pour la résolution du comportement de vibration libres des plaques sandwichs poreuses en FGM. Cependant, il est à noter que l'amélioration de la présente théorie est nécessaire, surtout lorsqu'il est appliqué à une structure stratifiée pour satisfaire la continuité des contraintes de cisaillement transversale entre les couches. Le développement de la présente théorie est également considéré pour des conditions aux limites générales.

En perspective à ce travail, nous envisagerons d'étudier le problème de cisaillement, et d'utiliser de la nouvelle fonction raffinée pour les cas suivants :

- La prise en compte de l'effet de la température dans l'étude de la vibration.
- Utilisation de la théorie raffinée pour résoudre les problèmes de flambement.
- Utilisation de la théorie raffinée pour d'autres types d'appuis.
- Il s'avère indispensable de recourir à la méthode des éléments finis qui permet de résoudre des problèmes plus compliqués. La méthode des éléments permettra de traiter des problèmes plus complexes comparativement à la méthode analytique.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

Références bibliographiques

A

[Ahmed Amin Daikh 2017] Vibration libre et flambement des structures sandwich en FGM.

[Ait Atman 2011] HASSEN. Ait Atman, « Vibration des structures composites en tenant compte de l'effet du cisaillement », Thèse de Doctorat de l'université Djilali Liabes de Sidi Bel Abbès, 2011.

[Akbarzadeh 2015] Akbarzadeh A.H., Abedini A., Chen Z.T. (2015), "Effect of micromechanical models on structural responses of functionally graded plates", *Compos. Struct.* 119, 598–609,

B

[Bary 2009] Bary B., Ben Haha M., Adam E., Montarnal P., (2009), "Numerical and analytical effective elastic properties of degraded cement pastes". *Cem. Concr. Res.*, 39(10), 902–912.

[Benbakhti 2017] Modélisation du comportement thermomécanique des plaques FGM (Functionally Graded Materials).

[Belouettar 2009] Belouettar S, Abbadi A, Azari Z, Belouettar R, Freres P., *Composites structures*, 87 : 265-273, 2009.

[Boubabourirania, brahimnour el houda 2018] Analyse de flambement des plaques sandwich en FGM en utilisant une nouvelle théorie de déformation de cisaillement avec l'effet d'étirement.

C

[Chabot 1987] A. Chabot. Analyse des efforts à l'interface entre les couches des matériaux composites à l'aide de modèles multiparticulaires de matériaux multicouches. PhD thesis, ENPC, 1997.

[Chan S.H. 2001], Performance and emissions characteristics of a partially insulated Gasoline engine, *International Journal of Thermal Science*, 40, 255–261.

F

[Fairouz2011]Fairouz. Brouis, « étude du comportement mécanique de structure sandwiches A différent matériaux de revêtements », Mémoire de magister de l'université mentouri – Constantine Amina Messabih et Sabrina Messahel, « Analyse du flambement et vibration libre des plaques sandwiches formé par des matériaux à gradient de propriétés », Thèse de master de l'université Ibn Khaldoun Tiaret, 2011

[Fekrar 2010] Abdelkader. Fekrar, « Conception des plaques FGM ayant un comportement similaire aux plaques homogènes », Mémoire de magister de l'université Djilali Liabes de Sidi Bel Abbes, 2010

G

[Gognard2000]Gognard," collage des métaux généralités et caractéristiques ", Techniques de l'ingénieur BT4, 2000.

I

[Icardi2001] U.Icardi. Higher-order zig-zag model for analysis of thick composite beams with inclusion of transverse normal stress and sublaminates approximations. Composites: Part B, vol. 32, pages 343-354, 2001.

[Interlaminar 1994] W.L. Yin. Interlaminar stress analysis of composite laminates using a sublaminate/layer model. International Journal of Solids and Structures, vol. 31, no. 11, pages 1549, 1564, 1994.

H

[Hadji et al. 2012].Hadji, L. Mémoire ou contribution à l'étude de la vibration des plaques sandwiches en FGM. Génie Civil. Université Djilali Liabes de Sidi Belabbes, (2012), p26_30

[Hadji2015]Hadji, L., Tahar, D. and Adda Bedia, E.A., A refined exponential shear deformation theory for free vibration of FGM beam with porosities, Geomech. Eng., 9(3), 2015, 361-372.

[Hexcel 2004] Hexcel Composite. HexWeb tm honeycomb sandwich design technology. <http://www.Hexcel.composite.com>, 2004.

[Hirai T. and Chen L. (1999)] Recent and prospective development of functionally graded Materials in Japan, *Materials Science Forum*, 308–311, 509–514

J

[Jamal 2009] Jamal.E, “étude comparative et caractérisations mécaniques des structures sandwich multicouches”, Thèse de Doctorat de l’université Paul Verlaine, 2009.

[Jha2013] Jha D.K., Kant T., Singh R.K., (2013), “A critical review of recent research on functionally graded plates”, *Compos. Struct.* 96, 833–849.

K

[Kaddouri Ahmed 2021] Analyse et modélisation du comportement mécanique des structures sandwich en matériaux à gradient de propriétés

[Kaddouri Djamel-Eldine2014] Analyse des effets de l’amplitude et température sur le comportement non linéaire d’une plaque annulaire sectorielle à gradient fonctionnel

[Kassapoglou-Lagace1987] C.Kassapoglou & P.A. Lagace. Closed form solutions for the interlaminar stress field in angle-ply and cross-ply laminates. *Journal of Composite Materials*, vol. 27, pages 292,308, 1987.

[Kamraa-Mistou2003] K.S.Afaq, M. Karama & S. Mistou. Un nouveau modèle raffiné pour les structures multicouches. In *Comptes-rendus des 13^{èmes} Journées Nationales sur les Composites*, pages 289-292. Strasbourg, March 2003.

[Kawthar Elomari 2011] “Analyse de la vibration libre des poutres en E-FGM à section transversale variable”, mémoire de master II de l’université Djilali Liabes de Sidi Bel Abbès.

[Kieback2003] Kieback B., Neubrand A., Riedel H., (2003), “Processing techniques for functionally graded materials”, *Mater. Scien. Eng. A.* 362, 81–105.

[Koizumi1997] Koizumi M., (1997), “FGM activities in Japan”. *Compos. Part B*, 28 (1-2), 1–4.

[Koizumi et al. 1996] Koizumi. M, FGM activities in Japan, department of materials chemistry. Ryukoku University, Ohtsu 520-21 Japan, 1996

L

[Li 2008]Li, Q., Iu, V. P., and Kou, K. P. Three-dimensional vibration analysis of functionally graded material sandwich plates. *Journal of Sound and Vibration*, **311**(112), 498–515 (2008).

M

[M .Chatin, 2000], "Matériaux composites – présentation générale", *Technique de l'ingénieur* BT4.

[M. Koizumi, 1992]. The concept of FGM. *Ceramic transaction, functionally graded materials*34, 3–10.

[Morsli freiha2013] Etude et Analyse des problèmes de stabilité des plaques sandwichs en FGM sous chargement thermique

N

[Nguyen, 2008]:Nguyen.T.K., « Quelques méthodes pour l'estimation des propriétés effectivesdesplaques hétérogène ». Thèse de Doctorat, Université de Paris-Est, 2008.

[Nora 2011] Nora.K, “ Etude des contraintes d'interface d'une poutre FGM renforcées par une plaque en matériaux composites”, mémoire de master de l'université Djilali Liabes de Sidi Bel Abbes, 2011.

P

[Pagano 1978] N.J Pagano. Stress fields in composite laminates. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 14, page 385, 1978.

[P.Boch.,T.Chartier.,M.Huttepain1986], Tape casting of Al₂O₃/ZrO₂ laminated Composites, *J. Am. Ceram. Soc.*;69(8):191-192,

R

[Reddy 1987]J.N. Reddy. A generalization of two-dimensional theories of laminated composite plates. *Commun. Appl. Numer. Methods*, vol. 3, pages 173,180, 1987.

[Reddy 1984]J.N.Reddy.A simple higher-order theory for laminated composite plates.*Jornal of Applied Mechanics*, vol. 51, pages 745-752, 1984.

[Reddy 1984]M. Di Sciuva. An improved shear-deformation theory for moderately thick multilayered anisotropic shells and plates. *Journal of Applied Mechanics*, vol. 54, pages 589(596, 1987).

[Ren 1986] J.G. Ren. A new theory of laminated plate. *Composite Science and Technology*, vol. 26, pages 225, 239, 1986.

[R. D. Mindlin 1951], «Influence of rotary inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates., » *Journal of Applied Mechanics*, vol. 18, pp. 31-38.,

S

[Sciuva1984] M. Karama, B. AbouHarb, S. Mistou& S. Caperaa. Bending, buckling and free vibration of laminated composite with a transverse shear stress continuity model. *Composite Part B*, vol. 29, no. 3, pages 223,234, 1998.

[Siboni 1991]Siboni G., Benveniste, Y., (1991), “A micro-mechanics model for the effective Thermomechanical behavior of multiphase composite media”. *Mech. Mater.*, 11, 107– 122

T

[Tahani-Nosier 2003] M. Tahani& A. Nosier. Edge effect of uniformly loaded cross-ply composite laminate. *Material and Design*, vol. 24, pages 647, 658, 2003.

[Touratier1991]M.Touratier. An efficient standard plate theory. *EngngSci*, vol. 29, no. 8, pages 901,916, 1991.

[Tlidjiyoucef 2016] Contribution à l'étude de la stabilité des plaques sandwich en matériaux à gradientpropriété type FGM

U

[Uemura S. 2003], the activities of FGM on new applications, *Materials Science Forum*, 423–425, 1–10

V

[Viet.Tung2004] Viet.Tung. Nguyen. « Modélisation globale et locale des structures multicouches par éléments finis de plaques ». Thèse de doctorat de l'école nationale des ponts et chaussées ,2004.

[Vinson 2005] Vinson J.R., Sandwich Structures: Past, Present, and Future. In: Thomsen O., Bozhevolnaya E., Lyckegaard A. (eds) Sandwich Structures 7: Advancing with Sandwich Structures and Materials, Springer, Dordrecht, 2005.

W

[Wattanasakulpong 2014] Wattanasakulpong, N. and Ungbhakorn, V., Linear and nonlinear vibration analysis of elastically restrained ends FGM beams with porosities, *Aerosp. Sci. Technol.*, 32(1), 2014, 111-120.

[Whitney 1973] J.M. Whitney. « Shear correction factors for orthotropic laminates under static loads ». *J.Applied Mechanics*, Vol.40, pages 302-304, 1973.

Y

[YinH.M., Sun L.Z., and Paulino G.H. 2004], Micromechanics-based elastic model for Functionally graded materials with particle interactions, *Acta Materialia*, 52, 3535–3543.

[Y. Miyamoto, W. Kaysser, B. Rabin, A. Kawasaki, R.G. Ford, 1993] functionally graded materials: design, processing and applications, Springer Science & Business Media.