

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de L'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique



Université Ibn Khaldoun de Tiaret  
Faculté des Sciences Appliquées  
Département de Génie Mécanique



## MÉMOIRE DE FIN D'ETUDES

Pour L'obtention du Diplôme de Master

**Domaine :** Sciences et Technologie

**Filière :** Génie Mécanique

**Parcours :** Master

**Spécialité :** Construction Mécanique

**Thème**

Analyse de la vibration libre des  
plaques sandwiches poreuses en FGM  
sous diverses conditions aux bords

Préparé par :

MERDAF Ahmed  
TABGHOUNA Abderrazaq

Soutenu publiquement le : .. / 07 / 2021, devant le jury composé de :

M. BENAMAR Badr	Maître Assistant "A"	(Univ. Ibn Khaldoun)	Président
M. HAMMOU Mahmoud	Maître de Conférences "B"	(Univ. Ibn Khaldoun)	Examineur
M. BOUZIDANE Ahmed	Professeur	(Univ. Ibn Khaldoun)	Examineur
M. HADJI Lazreg	Maître de Conférences "B"	(Univ. Ibn Khaldoun)	Encadreur

Année universitaire : 2020 – 2021

## **Remerciements**

*En premier lieu nous remercions "ALLAH" le tout puissant, de nous avoir donné la volonté, la force et la patience pour accomplir de ce modeste travail.*

*Nos profonds remerciements et sincère gratitude s'adressent à notre encadreur «**M.HADJI Lazreg** » pour ses conseils, ses encouragements, sa patience sa compétence et sa gentillesse qui nous ont permis de bien mener ce travail. Le suivi et l'orientation dont nous avons pu bénéficier.*

*Un grand merci à « **M.BENAMAR Badr** » qui nous a fait l'honneur de présider notre jury, qu'elle trouve l'expression de notre profond respect.*

*Nos vifs remerciements s'adressent aussi « **M.HAMMOU Mahmoud** et **P.BOUZIDANE Ahmed** » qui a accepté d'examiner notre travail avec bienveillance et nous en sommes très honoré*

*Nous portons une importance particulière à remercier tout le soutien et conseils.*

# *Dédicace*

*A travers mes prières je remercie **DIEU** le tout puissant et le miséricordieux pour m'avoir aidé et permis de finalise mon*

*Je dédie ce travail à mes parents que je tiens à remercier affectueusement pour m'avoir accordé toute leur confiance, leur soutien et permis de faire de longues études. Aussi pour leur grande compréhension dans les ,moments difficiles, pour m'avoir supporté, aidée et encouragé. je m'excuse pour tous les tracas et stress que vous avez subi avec moi, en ces quelques lignes je vous exprime ma profonde reconnaissance « que dieu vous garde pour moi ».*

*De même façon je remercie mes frères et mes sœurs pour toute l'aide et la patience dont ils fait preuve et toute ma famille proche ou éloignée pour leur soutien moral.*

*Merci pour mon binôme pour les moments les merveilleux qu'ils étaient inoubliables.*

*Tout le respect à toutes les personnes qui ont contribué de pré ou de loin a l'élaboration de ce mémoire.*

*A tous ceux qui nous ont soutenus, je dit merci.*

*Abderrazaq*

*Ahmed*

## Sommaire

Liste des figures .....	I
Liste des tableaux .....	II
Liste des notations .....	III
Introduction générale.....	1
Chapitre I	
I.1. Introduction.....	4
I.2. Qu'est ce qu'un matériau sandwich .....	4
I.3. Les éléments constituant les matériaux sandwiches .....	6
I.3.1. Matériaux des peaux .....	6
I.3.2. Matériaux de l'âme .....	6
I.3.3. L'interface.....	8
I.4. Conception des structures sandwiches.....	8
I.4.1. Sélection des matériaux-âme.....	8
I.4.1.1. Résistance en flexion.....	9
I.4.1.2. Résistance aux chocs.....	9
I.4.1.3. Résistance à la compression.....	9
I.4.1.4. Résistance au décollement (pelage).....	9
I.4.1.5. L'isolation.....	10
I.4.1.6. Absorption d'eau.....	10
I.5. Sollicitations et Modes de dégradations des sandwiches.....	10
I.5.1. Flambement généralisé des peaux.....	11
I.5.2. Rupture des peaux en traction ou en compression.....	11
I.5.3. Modes locaux de rupture.....	12
I.5.4. Rupture de l'âme en cisaillement.....	12
I.5.5. Flambement généralisé de l'âme ou « crimping ».....	13
I.5.6. Flambement localisé, « wrinkling » ou « dimpling ».....	13
I.5.7. Dégradation de l'adhésive.....	14
I.6. Théorie des plaques sandwiches.....	15
I.6.1. Hypothèses de la théorie des matériaux sandwiches.....	15
I.7. Techniques d'assemblages des matériaux sandwiches.....	16
I.7.1. Le collage de peau sur l'âme .....	16
I.7.2. Technique de pliage .....	16

1.8. Intérêt des structures sandwiches.....	17
I.9. Domaines d’application des matériaux sandwiches.....	17
I.9.1 Construction aérospatiale.....	18
I.10. Conclusion.....	19

## Chapitre II

II.1. Introduction .....	21
II 2. FGM et Composites.....	21
II.3. Historique sur les FGM.....	23
II.4. Domaines d’application.....	24.
II.4. 1.Dans l’aérospatiale et l'automobile.....	25
II.4.2. Dans l’industrie.....	25
II.4.3.Dans la défense .....	26.
II.4.4. Dans les capteurs et les applications énergétiques .....	26
II.4.5. Dans l’optoélectronique .....	26
II.4.6. Articles de sports.....	26
II.4.7. Dans les biomatériaux.....	26
II.5 Méthodes et techniques de mise en œuvre des FG.....	27
II.6 Méthodes d’Homogénéisation des FGM.....	29
II.7. Les différentes lois qui régissent la variation des propriétés matérielles suivant l’épaisseur d’une plaque FGM .....	29
II.7.1. Propriétés matérielles de la plaque P-FGM.....	29
II.7.2 Propriétés matérielles de la plaque S-FGM.....	30
II.7.3 Les propriétés matérielles de la plaque E-FGM.....	31
II.8. Conclusion.....	33

## Chapitre III

III.1. Introduction .....	35
III.2. Les Différents Modèles des structures composites dans l’élasticité bidimensionnelles :.....	36
III.2.1. Approche monocouche équivalente.....	36
III.2.1.1. Les modèles classiques Love-Kirchhoff (théorie classique des plaque stratifiées CLPT) .....	36
III.2.1.2. Les modèles Reissner-Mindlin (théorie de déformation en cisaillement du premier ordre FSDPT).....	37
III.2.1.3.les modèles d'ordre élevée.....	39
III.2.2. Approche par couche.....	42
III.2.2.1. Les modèles zig-zag.....	43
III.2.2.2. Les modèles couches discrètes.....	45
III.3. Conclusion.....	47

## Chapitre IV

IV.1. Introduction.....	49
IV.2. Formulation du problème.....	50.
IV.2.1. Cinématique équations et constitutive.....	52
IV.2.2. Equations gouvernantes.....	54
IV.2.3. La solution du problème.....	58
IV.3. Conclusion.....	61

## Chapitre V

V.1. Introduction.....	63.
V.2. Études de comparaison.....	64
V.2.1. Comparaison 1.....	64
V.2.2. Comparaison 2.....	65
V.3. Études paramétriques.....	66
V.3.1. Étude 1 .....	66
V.3.2. Étude 2.....	68
V.3.3. Étude 3.....	69
V.3.4. Étude 4.....	71
V.4. Conclusion.....	72
Conclusion générale et perspectives.....	75
Références bibliographique .....	77

Résumé

Abstract

ملخص

## Liste des figures

Figure. I.1 : schéma d'un sandwich (Nora et al, 2011) .....	4
Figure.I.2 : propriétés schéma d'un sandwich (Nora et al, 2011).b) résistance mécanique.....	5
Figure. I.3 : Matériaux pour les peaux (Lachguer et al, 2013).....	6
Figure. I.4 : (Matériaux pour les âmes) (Lachguer et al, 2013).....	7
Figure. I.5: (Matériaux des renforts) (Lachguer et al, 2013).....	8
Figure. I.6 : différentes sollicitations (M, N, T) appliquées à un sandwich. (Amina Messabih et Sabrina Messahel, 2011).....	11
Figure. I.7: : Flambement généralisé des peaux du sandwich (Gognard,2010).....	11
Figure. I.8: Rupture des peaux en traction ou en compression (Gognard,2010).....	12
Figure.I.9 : : Modes locaux de rupture par indentation (Gognard,2010).....	12
Figure. I.10: : Rupture de l'âme en cisaillement (Hexcel composite). .....	13
Figure.I.11: Flambement généralisé de l'âme du sandwich (Hexcel composite).....	13
Figure. II.12: Flambement localisé « wrinkling » (Hexcel composite).....	14
Figure. II.13: Flambement localisé «damppling» (Hexcel composite).....	14
Figure.I.14: Type de dégradation de l'adhésifntl'.....	15
Figure. I.15: : panneaux réalisés par collage à partir de profiles divers.....	17
Figure. I.16: : Pliage de panneaux sandwiches.....	17
Figure. II.1: Schéma d'une microstructure graduée continue avec les constituants céramique-métal, Jha et al. (2013).....	22
Figure.II.2: : Caractéristiques des matériaux composites FGM en comparaison avec les matériaux composites conventionnels (Hadji 2012).....	24
Figure.II.3: Les principaux domaines d'application des FGM (HEBBAR et al, 2019)... ..	24
Figure. II.4 : Exemples des matériaux à gradient de propriétés (l'automobile) (Cox, H. 2004).....	25
FigureII.5 : : Exemples des matériaux à gradient de propriétés. (HEBBAR et al, 2019).....	27
Figure. II.6 : . Techniques d'élaboration des matériaux à gradient de propriétés. (Koizumi et al. 1996).....	28
Figure. II.7 : La variation du module de Young dans une plaque P-FGM.....	30
Figure. II.8 : Variation de la fraction volumique dans une plaque S-FGM.....	31

Figure. II.9 : Variation du module de Young dans une plaque E-FGM.....	32
Figure. III.1 : Cinématique de Love-Kirchhoff.....	36
Figure. III.2 : : Cinématique de Reissner-Mindlin.....	38
Figure. III.3 : Variation de la fonction de gauchissement $f(x_3)=x_3$ et $f'(x_3)$ suivant l'épaisseur. ....	39
Figure. III.4 : Cinématique de la théorie d'ordre supérieur.....	40
Figure.III.5 : Champs de déplacements des modèles couches discrètes, approche cinématique. (Viet.Tung 2004).....	43
Figure. III.6 : : Champs de déplacements des modèles zig-zag, approche cinématique. (Viet.Tung 2004).....	43
Figure. III.7 : Champs de déplacements des modèles zig-zag du premier ordre. (Viet.Tung 2004).....	44
Figure. III.8 : Champs de déplacements des modèles zig-zag d'ordre supérieur (Viet.Tung 2004).....	44
Figure IV.1 : a) Géométrie de la plaque sandwich à faces poreuses FGM et coeur céramique b) Les modèles de porosité.....	50
Figure V.1 : Variation de la fréquence fondamentale adimensionnelle de la plaque sandwich (1-2-1) carrée en FGM en fonction du rapport a/h.....	68.
Figure V.2 : Variation de la fréquence fondamentale adimensionnelle des différents schémas des plaques sandwichs carrées en FGM en fonction de l'indice de loi de puissance k.....	69
Figure V.3 : Variation des fréquences fondamentale adimensionnelle des différents schémas des plaques sandwichs poreuses en FGM en fonction du rapport a/h.....	70
Figure V.4 : Variation des fréquences fondamentale adimensionnelle des différents schémas des plaques sandwichs poreuses en FGM en fonction de la fraction volumique de la porosité $\xi$ .....	72



## Liste des tableaux

Tableau IV.1 : Les fonctions admissibles pour différentes conditions aux limites (Sobhy 2013).....	59
Tableau V.1 : Comparaison des fréquences fondamentales sans dimension de la plaque carrée sandwich en FGM en fonction de l'indice de loi de puissance $k$ ( $a/h=10$ ).....	65
Tableau V.2 : Comparaison des fréquences fondamentales sans dimension du sandwich carré en FGM avec cœur rigide en fonction de l'indice de loi de puissance $k$ . ( $a/h=5$ ).....	66
Tableau V.3 : Comparaison des fréquences fondamentales sans dimension du sandwich carré en FGM avec cœur souple en fonction de l'indice de loi de puissance $k$ . ( $a/h=5$ ).....	66
Tableau V.4 : Variation des fréquences fondamentales adimensionnelles de la plaque sandwich carrée en FGM en fonction de l'indice de loi de puissance $k$ sous différentes conditions aux bords ( $a/h=10$ ).....	67

## Liste des notations

$[ ]$	Matrice.
$\{ \}$	Vecteur colonne.
$E$	Module de Young
$E_c$	Module de Young de la céramique
$E_m$	Module de Young de métal
$E_1$	Module de Young de la face supérieure
$E_2$	Module de Young de la face inférieure
$E(z)$	Module de Young en fonction de « z »
$\nu$	Coefficient de Poisson
$\nu(z)$	Coefficient de Poisson en fonction de « z »
$V(z)$	Fraction volumique
$k$	indice matériel
$b$	la largeur de la plaque
$h$	L'épaisseur total de la plaque
$L$	La longueur de la plaque
$u, v, w$	Les déplacements suivant les directions x, y et z
$u_0, v_0, w_0$	Les composantes du champ de déplacement sur le plan moyen de la plaque
$\phi_x, \phi_y, \phi_z$	Les rotations autour des axes x, y et z
$f(z)$	Fonction de gauchissement (fonction de cisaillement transverse)
$g(z)$	La première dérivée de la fonction par rapport à z
$\rho$	la densité massique
$\sigma_x, \sigma_y$	Contraintes normales
$\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$	Contraintes de cisaillement
$\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$	Déformations dans les directions x et y et z
$\gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$	Déformations de distors
$\delta$	Opérateur de variation
$\delta u, \delta v, \delta w_b, \delta w_s$	Champ virtuel de déplacement

$\delta U$	Variation de l'énergie de déformation interne de la plaque.
$\delta V$	Variation de l'énergie de déformation externe de la plaque.
$\delta T$	Variation de l'énergie de déformation cinétique de la plaque.
$w_b$	Composante de la flèche due à la flexion
$w_s$	Composante de la flèche due au cisaillement
$N$	Efforts normaux de membrane
$M^b$	Moments de flexion pure
$M^s$	Moments de flexion supplémentaire due au cisaillement transverse
$S$	Effort de cisaillement pur
$m, n$	Nombres de mode
$A_{ij}$	Termes de rigidité en membrane de la plaque
$B_{ij}$	Termes de rigidité de couplage de la plaque
$D_{ij}$	Termes de rigidité de flexion de la plaque
$A_{ij}^s$	Termes de rigidité de la plaque en cisaillement
$B_{ij}^s$	Termes de rigidité de la plaque en cisaillement
$D_{ij}^s$	Termes de rigidité de la plaque en cisaillement
$H_{ij}^s$	Termes de rigidité de la plaque en cisaillement
$I_0, I_1, I_2, J_1, J_2, K_2$	constante d'inertie
$Q_{ij}$	Les coefficients de rigidité
$\partial$	Dérivée partielle
$a_{ij}$	Valeurs propres
$i, j$	Nombres naturels
[K]	Matrice de rigidité
[M]	Matrice de masse
{ $\Delta$ }	Le vecteur de colonne
$\bar{\omega}$	Les fréquences adimensionnelles
$\omega$	Fréquence naturelle de la plaque FGM
$\xi$	Fraction volumique de la porosité
$\phi_\alpha$	Rotation de la normale au plan moyen autour des axes $x \alpha$
$\gamma_\alpha^0$	Déformation de cisaillement mesurée sur le plan
$\phi_i$	Rotations des sections déformées autour des axes 1 $x$ et 2 $x$ (termes du Premier ordre)

$k_x^b$  Courbure suivant X due à la flexion.

$k_x^s$  Courbure suivant X due au cisaillement.

$U_{mn}, V_{mn}, W_{bmn}$ , et  $W_{smn}$  Paramètres arbitraires.

# INTRODUCTION GÉNÉRALE

---

## ***Introduction générale***

Les matériaux à gradient évalués (FGM : Functionally Graded Materials) sont une nouvelle gamme des structures composites qui ont un grand intérêt pour la conception et la fabrication d'ingénierie. Ces types de matériaux possèdent des propriétés souhaitables pour des applications spécifiques, en particulier les avions, les véhicules spatiaux, l'optique, le biomécanique, l'électronique, la chimie, la mécanique, la construction navale et autres ouvrages de génie civil, soumise à des concentrations des contraintes et des contraintes thermiques et résiduelles élevées. Généralement, les FGM sont des composites avancés, macroscopiquement et microscopiquement hétérogènes qui sont réalisés par exemple à partir d'un mélange de céramique et de métal avec une gradation continue de composition à travers l'épaisseur. Ceci est réalisé par une variation graduelle de la fraction volumique des matériaux constitutifs.

Le concept de " Matériaux à Gradient de Propriétés" a été développé dans le laboratoire national d'aérospatial du Japon en 1984 par M. Niino et ses collègues à Sendai. L'idée est de réaliser des matériaux utilisés comme barrière thermique dans les structures spatiales et les réacteurs à fusion.

Au stade de la production des matériaux fonctionnellement gradués (FGM), des micro-vides et des porosités peuvent se produire en raison d'erreurs de production ou techniques. Avec la porosité, le comportement mécanique des matériaux fonctionnellement gradués change considérablement. Ainsi, l'effet de la porosité sur les matériaux fonctionnellement gradués est un problème important et doit être étudié afin de concevoir en toute sécurité ces composites.

L'objectif principal de notre travail est l'étude de la vibration libre des plaques sandwichs avec des peaux poreuses en matériau et un cœur homogène et isotrope sous diverses conditions aux bords. Pour l'analyse de ce problème des plaques en considérant les porosités qui peuvent se produire à l'intérieur des matériaux à gradient de propriétés (FGM) au cours de leur fabrication, on a développé un champ de déplacement avec une théorie de cisaillement à quatre variables. Cette théorie de cisaillement satisfait la nullité des contraintes aux surfaces supérieures et inférieures de la plaque sans utiliser le facteur de correction de cisaillement. La loi du mélange modifiée couvrant les phases de porosité est utilisée pour décrire approximativement les propriétés de la structure sandwich en FGM. Sur la base de la présente théorie des plaques, les équations de mouvement sont dérivées du principe d'Hamilton, et les résultats de la vibration des plaques sandwichs ont été trouvés en résolvant le problème aux valeurs propres.

Le présent travail de mémoire s'articule autour de deux aspects essentiels qui reflètent toute notre démarche, à savoir :

**L'aspect théorique** comprend trois chapitres :

Le premier chapitre est consacré à une étude bibliographique des matériaux sandwichs.

Le deuxième chapitre traite des généralités sur les matériaux à gradients évalués FGM et leurs domaines d'application.

Dans le deuxième chapitre, les différentes théories applicables aux plaques FGM ont été étudiées et analysées.

**L'aspect analytique** en son rôle est scindé en deux chapitres :

Au troisième chapitre, une analyse de la vibration des plaques sandwiches avec des peaux poreuses et cœur homogène sous diverses conditions aux bords en tenant compte de l'effet de cisaillement transverse.

Le cinquième chapitre contient une validation et comparaison des résultats.

Le présent travail se termine par une conclusion générale où on souligne l'efficacité de la présente théorie de cisaillement dans la résolution du comportement dynamique des plaques sandwiches poreuses en FGM ainsi par des perspectives envisagées pour des travaux futures.

# **CHAPITRE I:**

## **RECHERCHE BIBLIORPHIQUE SUR LES MATRIAUX SANDWICHES**

---



## Chapitre I

### Recherche bibliographique sur les matériaux sandwiches

#### I.1.Introduction

Le développement des technologies modernes exige que l'on utilise des matériaux présentant des propriétés mécaniques élevées spécifiques à leur emploi, mais dont les masses volumiques soient faibles. L'objectif est notamment de réduire la masse des structures. Les matériaux composites sont des matériaux qui répondent aux exigences précédentes. En raison de leur faible densité, grande résistance, rigidité importante et de leur excellente durabilité, les matériaux composites ont d'abord été utilisés dans de nombreuses composantes structurales, notamment dans le domaine de génie civil.

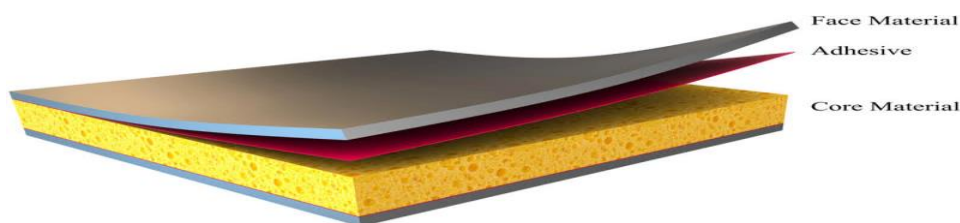
Parmi les matériaux composites les plus utilisés, on notera les matériaux sandwiches. Les sandwiches occupent un large créneau dans la construction des pièces composites.

Historiquement, ce sont les premières structures composites allégées et performantes.

L'objectif de ce chapitre est de positionner la problématique des matériaux sandwiches. Tout nous attache à mettre en évidence toutes leurs particularités propres (Nora et al, 2011).

#### I.2. Qu'est ce qu'un matériau sandwich ? :

Une structure sandwich résulte de l'assemblage par collage ou soudure de deux semelles ou peaux (Fig. I.1) et d'un matériau d'âme. Les peaux sont de faibles épaisseurs et possèdent de très bonnes caractéristiques mécaniques ( module élevé, grande résistance). Entre les deux peaux est intercalé un matériau d'âme de forte épaisseur et de faible densité. En gardant une distance constante entre les deux peaux, l'insertion de cette âme permet d'augmenter le moment d'inertie de la structure, et par conséquent sa rigidité en flexion, tout en minimisant la masse de l'ensemble.

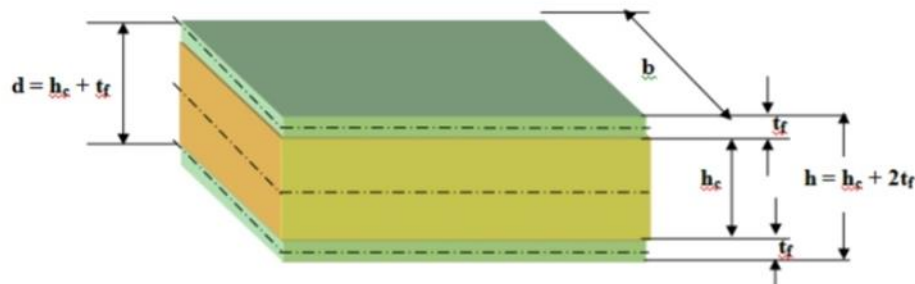


**Fig.I.1:** schéma d'un sandwich (Nora et al, 2011).

Les matériaux sandwichs se caractérisent des matériaux classiques par une intégration étroite des connaissances, reliées aux procédés de fabrication et aux performances mécaniques des pièces obtenues. Une structure sandwich est constituée par collage ou soudure d'une âme de faible rigidité

et de deux peaux relativement rigides. Dans un sandwich, il ne faut pas oublier un troisième composant : l'adhésif. C'est ce dernier qui permet un bon assemblage de la structure et aussi une bonne transmission des contraintes d'un milieu à l'autre. Sa principale caractéristique doit être une bonne résistance en cisaillement. Dans le cas de peaux en matériau composite, l'insertion de cette troisième phase peut être évitée par l'utilisation d'une résine auto-adhésive (Jamal et al, 2009).

De part la constitution des matériaux sandwiches, on peut adapter leurs propriétés mécaniques en faisant varier la nature des peaux (identiques ou non) et de l'âme ainsi que l'épaisseur de chacune des phases. En règle générale, les peaux ont la même épaisseur  $t_f$ . Le rapport  $t_f / t_c$  ( $t_c$  étant l'épaisseur de l'âme) est compris entre 0,1 et 0,01. D'après Allen (Nora et al, 2011). on peut classer les sandwiches en trois catégories selon la valeur du rapport  $d / t_f$  ( $d$  étant la distance séparant l'axe neutre de chacune des peaux). Pour un sandwich symétrique (peaux de même épaisseur)  $d = t_c + t_f$ .



**Figure I.2** : propriétés schéma d'un sandwich (Nora et al, 2011).

En fonction des valeurs du rapport  $d / t_f$ , on peut classer les sandwiches de la manière suivante :

- Si le rapport  $d / t_f$  est supérieur à 100, on parle de sandwiches à peaux très fines ;
- Pour un rapport  $d / t_f$  compris entre 100 et 5,77 le sandwich est considéré comme ayant des peaux fines ;
- Dans le cas où  $d / t_f$  est inférieur à 5,77 la structure est dite à peaux épaisses.

On définira les bornes limites par rapport à la contribution de chaque constituant vis-à-vis de la rigidité en flexion et en cisaillement du sandwich.

### I.3. Les éléments constituant les matériaux sandwichs

#### I.3.1. Matériaux des peaux:

Généralement de faibles épaisseurs, les peaux sont constituées de tout matériau pouvant être obtenu sous forme de couche. Elles peuvent être en bois, métal ou matériau composite. Le choix de la nature et de la séquence des couches dépendra de l'utilisation des matériaux composites. Les peaux ont pour but de reprendre les efforts de flexion traduit par des contraintes normales (traction ou compression). (Lazreg et al, 2012).

La figure.3 ci-dessous représente les matériaux de fabrication de ces types.

Les structures sandwichs sont classées selon la nature de leurs âmes. Les âmes peuvent être classées en trois catégories principales, les mousses, les mousses renforcées et les parois minces

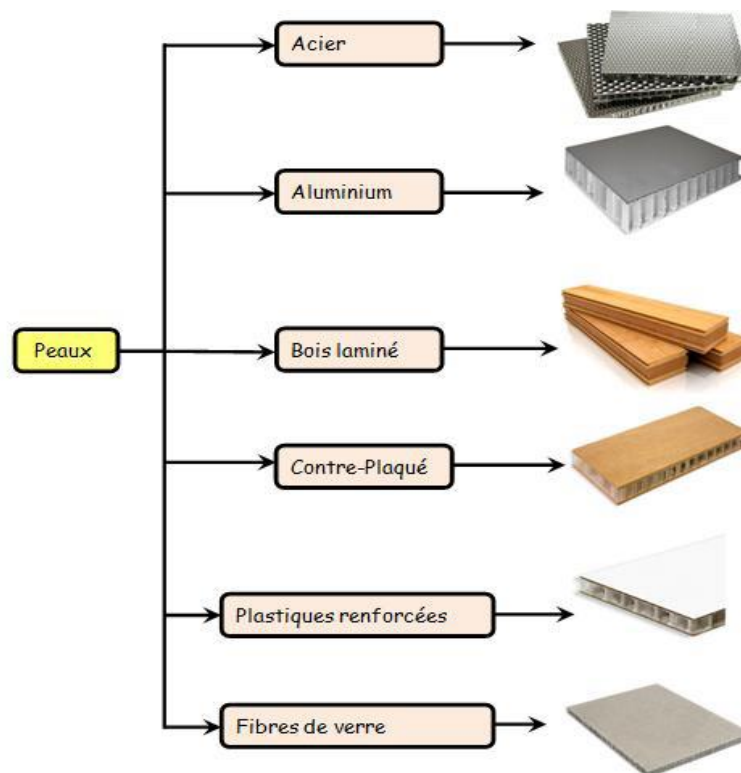


Figure I.3 Matériaux pour les peaux (Lachguer et al, 2013)

#### I.3.2. Matériaux de l'âme :

L'âme, l'élément central d'une structure sandwich, est généralement un matériau ayant de faibles caractéristiques mécaniques. Elle a pour rôle de résister aux contraintes de cisaillement engendrées suite au mouvement de glissement des peaux sous charge, et de maintenir leur écartement. Elle peut être réalisée avec les matériaux suivants:

- Mousses : Ces matériaux légers peu onéreux, facilement usinables et ont cependant de très faibles caractéristiques mécaniques (Fairouz. Brouis).
- Balsa : Est un bois bien connu pour ces différentes utilisations et de leurs principales qualités que la légèreté, le haut pouvoir d'isolation thermique et acoustique et la non déformation aux variations thermiques (Fairouz. Brouis).
- Nid d'abeille : Cette structure est réalisée généralement à partir d'un matériau en plaques minces (alliage d'aluminium, papier polyamide). Des raies de colle sont disposées en bande régulières sur les plaques qui sont collées entre elles pour former un bloc, ce dernier est coupé en tranches qui seront, transformées à leur tour en planche de nida ' Nid d'abeille ' par expansion (Fairouz. Brouis).

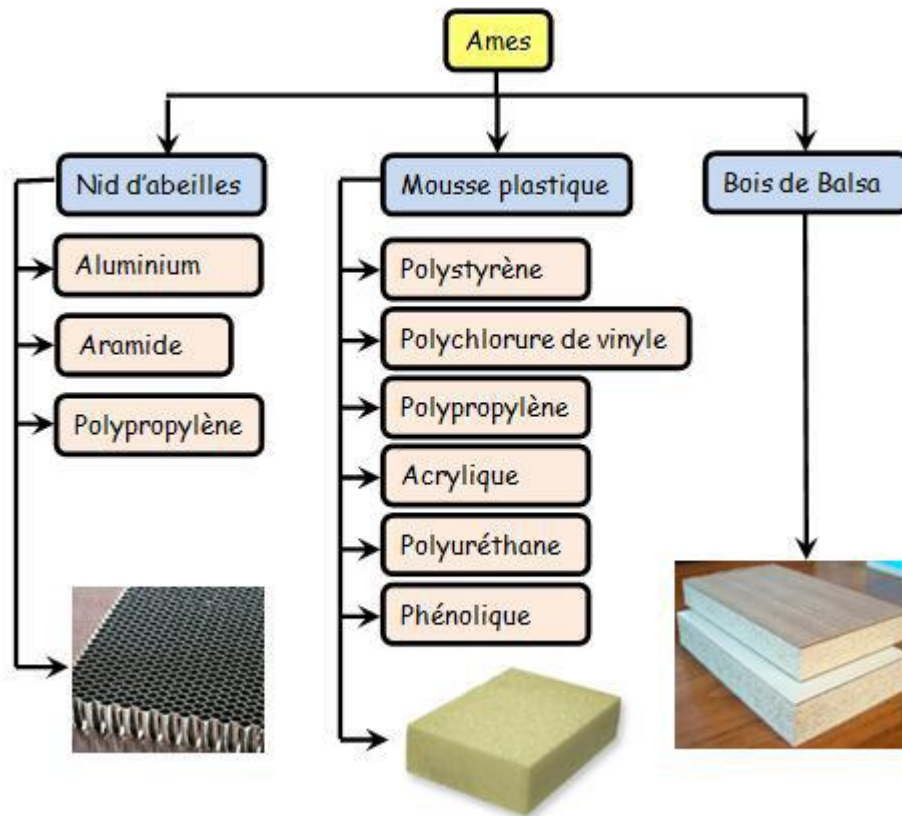


Figure I.4 (Matériaux pour les âmes) (Lachguer et al, 2013)

### I.3.3. L'interface

Les renforts assurent la tenue mécanique (résistance à la traction et rigidité). Souvent de nature filamenteuse (des fibres organiques ou inorganiques). La figure I.5 suivante illustre les différents matériaux des renforts.

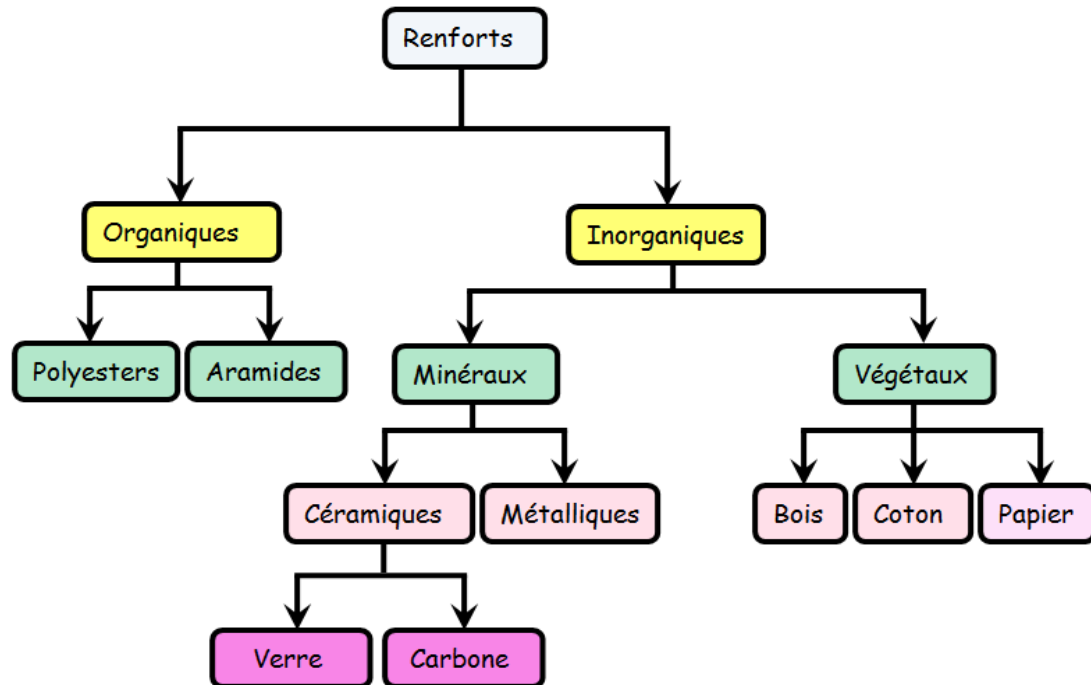


Figure I.5 (Matériaux des renforts) (Lachguer et al, 2013)

## I.4. Conception des structures sandwichs

Bien que généralement conçues pour être soumises à des efforts en flexion, les structures sandwichs le sont aussi pour répondre à d'autres exigences, comme l'isolation thermique, acoustique, etc.

Le choix du type de sandwich dépend surtout de son application. Les principaux objectifs du concepteur d'un «sandwich» sont de choisir les matériaux appropriés constituant la structure ainsi que de déterminer les épaisseurs respectives des peaux et de l'âme de façon à résister aux moments fléchisseurs, au cisaillement et aux contraintes axiales induites par les forces appliquées sur elles.

Généralement, la conception est basée sur la théorie des sandwichs (théorème des poutres homogènes) et la sélection de matériaux ayant les propriétés appropriées.

### I.4.1. Sélection des matériaux-âme

D'un point de vue mécanique, le critère de sélection du matériau de l'âme est une résistance élevée au cisaillement. Son faible coût de production, sa fiabilité dans le temps, sa faible absorption

d'eau ou humidité, son comportement face au feu et à la chaleur, ses capacités d'isolation acoustique et thermique peuvent aussi être des critères décisifs dans le choix du matériau.

#### **I.4.1.1. Résistance en flexion**

Généralement, les structures sandwiches sont plus rigides que les poutres conventionnelles. Cela étant dû à la distribution géométrique efficace et au support des efforts par les peaux qui permettent l'obtention d'un facteur de rigidité  $\langle EI \rangle$  plus élevé.

Les peaux doivent adhérer le mieux possible à l'âme puisque le comportement mécanique final de la structure sandwich est directement lié à cette adhérence.

#### **I.4.1.2. Résistance aux chocs**

La résistance à l'impact d'une structure sandwich composite est largement influencée par la capacité d'absorption de l'énergie par l'âme.

Cette capacité d'absorption peut être améliorée en augmentant la densité du matériau qui compose l'âme. Soumis à un impact, on observe un comportement tout à fait différent s'il s'agit d'une âme en mousse ou d'une âme en nid d'abeilles.

L'âme en mousse diffusera l'énergie de l'impact à l'intérieur même du sandwich en l'absorbant dans sa structure cellulaire. C'est pourquoi les mousses PVC d'origine thermoplastique ainsi que les mousses thermodurcissables flexibles ont une bonne capacité d'absorption des chocs.

Dans le cas d'une âme en nid d'abeilles, les parois transfèrent l'énergie perpendiculairement d'une peau à l'autre, ce qui peut donc occasionner la déchirure de la peau opposée.

#### **I.4.1.3. Résistance à la compression**

Les charges de compression sont totalement transférées à l'âme du sandwich. Les structures en nid d'abeilles permettent de supporter des contraintes de compression, normales aux panneaux, élevées. Par contre leur anisotropie favorise leur rupture lorsqu'elles sont chargées dans plusieurs directions comme dans le cas des pièces soumises à des charges hydrostatiques. On préconise alors comme solution une combinaison nid d'abeilles et mousse.

#### **I.4.1.4. Résistance au décollement (pelage)**

Une résistance insuffisante au décollement peut conduire au délaminage des peaux et être la cause de ruptures catastrophiques. En général, dans les sandwichs à âme en mousse, la résistance du joint de colle entre les peaux et l'âme doit être supérieure à la résistance au cisaillement de l'âme. Les mousses de PVC donnent des forces d'adhésion supérieures à celles obtenues avec le balsa ou le poly méthacrylate (PMI). Les mousses de polyuréthane (PU), elles, sont fragiles, ce

qui rend leur collage difficile. Quant aux âmes en nid d'abeilles, leur surface de contact réduite explique qu'il est difficile d'obtenir une résistance élevée au pelage.

#### **I.4.1.5.L'isolation**

La diminution de poids, l'isolation acoustique et thermique ainsi que l'amortissement des vibrations sont nécessaires dans plusieurs applications.

Grâce à leur structure cellulaire, beaucoup de mousses obtiennent de très bons résultats en ce qui a trait à l'isolation thermique et acoustique alors que les structures en nid d'abeilles offrent des performances moins probantes, plus limitées.

Par conséquent, lorsqu'il est nécessaire d'avoir de bonnes propriétés en termes d'isolation thermique et acoustique, les structures sandwiches avec âme en mousse sont des choix judicieux. Lorsque la diminution de poids est le seul objectif, les structures sandwiches avec âme en nid d'abeilles devraient être envisagées.

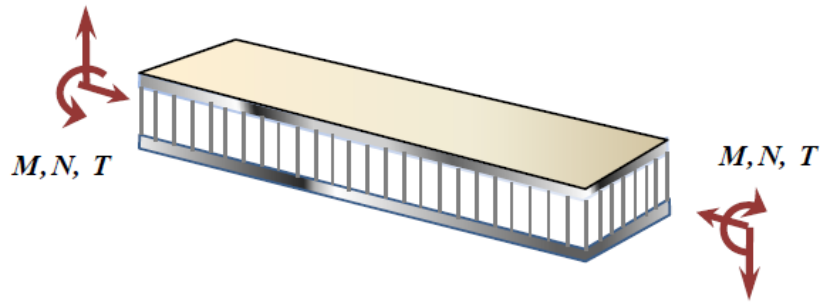
#### **I.4.1.6. Absorption d'eau**

L'absorption d'humidité et d'eau par l'âme des structures sandwiches peut causer une diminution importante et significative de ses propriétés mécaniques. Dans le cas où les peaux des sandwiches seraient abîmées, l'utilisation d'âmes sensibles à l'eau ou à l'humidité augmente encore plus le risque de délaminage. Même en service normal, l'évaporation interne d'eau absorbée peut causer un délaminage des peaux. Pour solutionner ce problème, un traitement thermique additionnel de l'âme est parfois nécessaire avant la mise en œuvre du sandwich.

### **I.5.Sollicitations et Modes de dégradations des sandwiches**

Les principales charges supportées par ces structures sont la flexion, la torsion, la compression ou l'extension. Un sandwich peut être donc soumis à un :

- Moment de flexion,
- Moment de torsion,
- Effort normal,
- Effort tranchant.

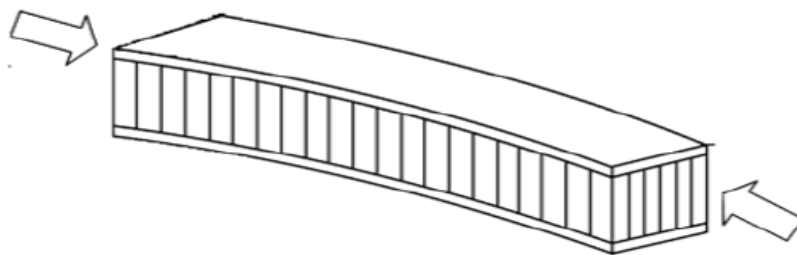


**Figure I.6 :** différentes sollicitations (M, N, T) appliquées à un sandwich. (Amina Messabih et Sabrina Messahel, 2011)

Nous représentons ici les différents modes de rupture des structures sandwiches soumis à la flexion afin de mieux cerner le comportement mécanique de ces structures ( Belouettar et Triantafillou).

### I.5.1. Flambement généralisé des peaux

Une poutre sandwich soumise à la compression peut céder sous l'effet de conditions d'instabilité concernant toute la poutre (Fig. I.7). Le flambement généralisé peut également survenir quand les contraintes dans les peaux et dans l'âme sont inférieures à leurs résistances à la rupture respectives. La charge qui cause le flambement du sandwich dépend de paramètres tels que les dimensions du sandwich, le type de sandwich, la rigidité en flexion, l'épaisseur des peaux, l'épaisseur de l'âme et le module de cisaillement de l'âme.



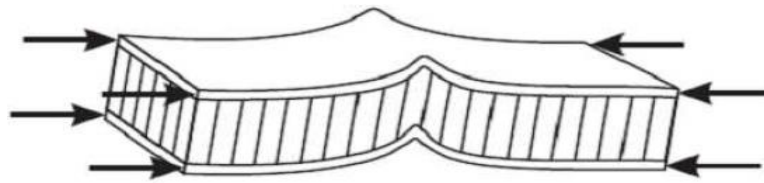
**Figure I.7:** Flambement généralisé des peaux du sandwich (Gognard,2010).

Si l'on craint un flambement généralisé, on peut utiliser des peaux ayant un module d'élasticité plus élevé, augmenter l'épaisseur des peaux, augmenter l'épaisseur de l'âme, ou encore utiliser pour l'âme un matériau avec un module de cisaillement plus élevé.



### I.5.2. Rupture des peaux en traction ou en compression

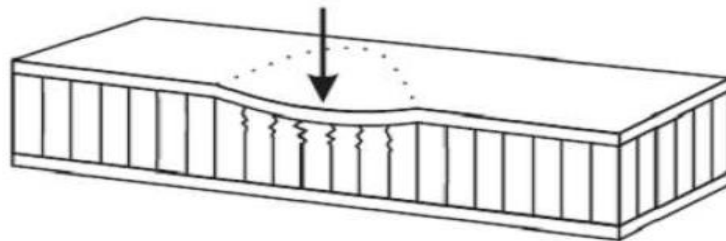
Il s'agit du cas où les contraintes dans les peaux sont supérieures aux contraintes admissibles pour le matériau constituant les peaux (Fig.I.8). Ce phénomène peut être évité en utilisant un matériau dont les contraintes à rupture sont plus élevées, en augmentant l'épaisseur des peaux (ce qui réduit les contraintes appliquées), où en augmentant l'épaisseur de l'âme (ce qui permet également de réduire les contraintes dans les peaux). La manière la plus adéquate de résoudre le problème est d'augmenter l'épaisseur de l'âme. Par contre, une âme de plus forte densité (plus rigide) n'affecte pas les contraintes dans la peau.



**Figure I.8 :** Rupture des peaux en traction ou en compression (Gognard,2010).

### I.5.3. Modes locaux de rupture

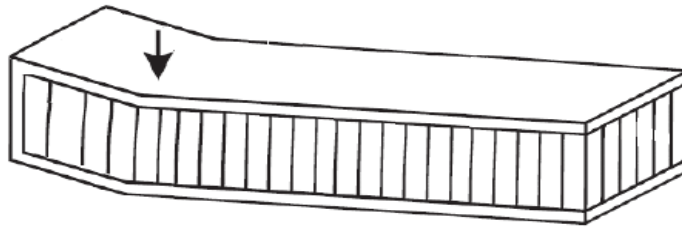
L'indentation locale est un mode localisé de rupture dû à une concentration de contraintes résultant, soit de l'application d'une charge localisée, soit de la position d'un appui de type ponctuel ou linéique (Fig. I.9).



**Figure I.9:** Modes locaux de rupture par indentation (Gognard,2010).

### I.5.4. Rupture de l'âme en cisaillement

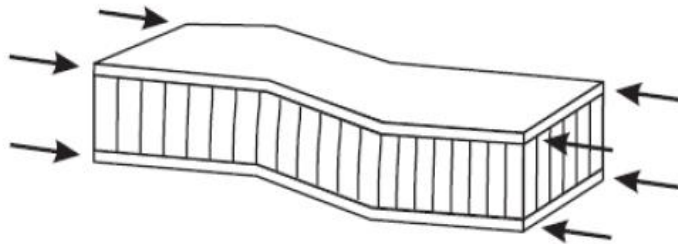
Si la contrainte de cisaillement (prépondérante dans l'âme) dépasse la résistance au cisaillement du matériau de l'âme, il y a rupture de l'âme (Fig. I.10). Si l'on se trouve dans ce cas, on peut soit utiliser un matériau d'âme qui possède une résistance au cisaillement plus élevée, soit augmenter l'épaisseur de l'âme. Par contre, utiliser un matériau différent pour les peaux, ou changer leur épaisseur n'aura pas d'effet.



**Figure I.10:** Rupture de l'âme en cisaillement (Hexcel composite).

### I.5.5. Flambement généralisé de l'âme ou « crimping »

Si le rapport longueur/épaisseur est relativement faible, et que la rigidité de cisaillement est négligeable devant la rigidité de flexion, le flambement généralisé prend la forme du flambement de l'âme. Le flambement de l'âme ne dépend pratiquement pas des propriétés des peaux ; par contre, il augmente de façon linéaire avec l'épaisseur de l'âme et le module de cisaillement de l'âme. Pour augmenter la résistance à cette charge critique, il faut donc soit augmenter l'épaisseur de l'âme, soit utiliser une âme avec un module de cisaillement plus élevé.



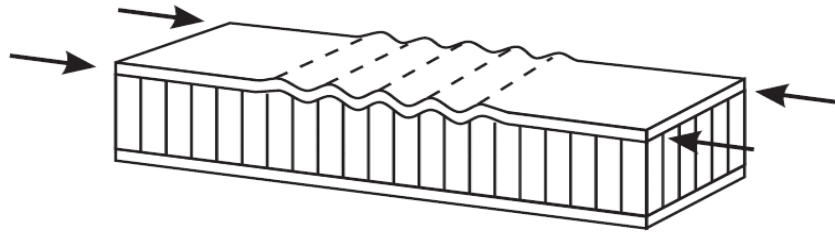
**Figure I.11:** Flambement généralisé de l'âme du sandwich (Hexcel composite).

### I.5.6. Flambement localisé, « wrinkling » ou « dimpling »

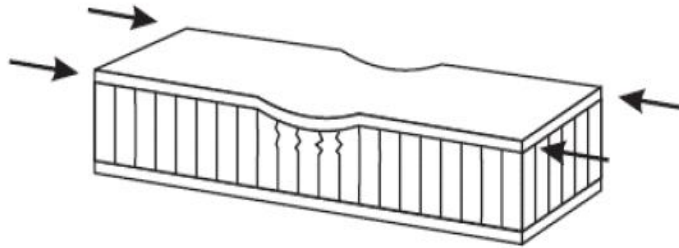
Les peaux, considérées par elles-mêmes, sans connexion avec l'âme, flambent très facilement à cause de leur faible épaisseur. C'est l'âme qui empêche leur flambement. Cependant, si on atteint la contrainte limite, il se peut que l'âme ne soit plus capable d'empêcher le flambement.

Dans ce cas, le flambement localisé des peaux, ou « wrinkling » (Fig. I.12), se produit.

Contrairement au flambement généralisé, le flambement localisé peut prendre des configurations différentes qui ne dépendent pas de la géométrie de la structure. Par contre, il est influencé par les modules élastiques des peaux et de l'âme, et le module de cisaillement de l'âme. Si l'on craint un flambement localisé de la peau, on peut soit utiliser pour les peaux, un matériau avec un module élastique plus élevé, soit utiliser pour l'âme, un matériau présentant des propriétés élastiques plus élevées. Dans le cas d'une âme en nid d'abeille, mise à part les ruptures par « wrinkling », il peut survenir aussi un autre mode de rupture par flambement localisé de la peau en fossettes, appelé « dampling » (Fig. I.13).



**Figure I.12:** Flambement localisé « wrinkling » (Hexcel composite).



**Figure I.13:** Flambement localisé « dimpling » (Hexcel composite).

### 1.5.7 Dégradation de l'adhésive

La dégradation de l'adhésive, entre les peaux et l'âme en nid d'abeille se fait généralement selon trois types :

- Dégradation de l'adhésive entre les peaux et l'âme,
- Dégradation de l'attachement des cellules de l'âme,
- Dégradation de l'attachement du nœud des cellules de l'âme.

La Fig. I.14 illustre les modes de dégradation de l'adhésif. L'exposition à l'humidité provoque des dégradations remarquables de la résistance de l'adhésif ce qui peut changer le mode de dégradation et causer la ruine avancée du panneau sandwich.

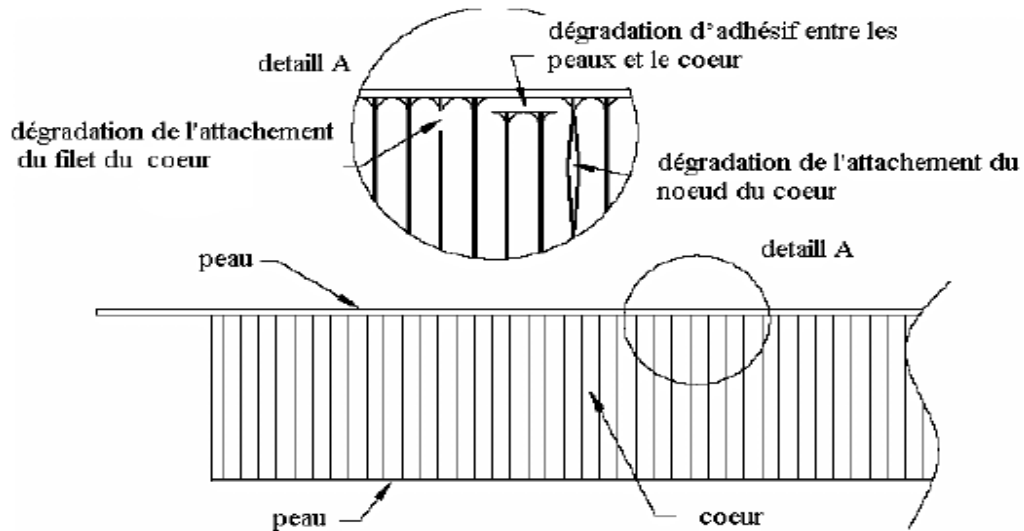


Figure I.14: Type de dégradation de l'adhésif.

## I.6. Théorie des plaques sandwiches

Un matériau sandwich est constitué d'un matériau de faible masse volumique (cœur) sur lequel sont collées des couches (les peaux) à rigidité et résistance élevées. La fonction essentielle de l'âme du sandwich est de transmettre par cisaillement transverse, les actions mécaniques d'une peau à l'autre. Les peaux peuvent être constituées par des stratifiés ou par des matériaux métalliques d'épaisseur  $h_1$  (peau inférieure) et d'épaisseur  $h_2$  (peau supérieure).

L'épaisseur de l'âme sera notée  $h_c$  et l'épaisseur totale du sandwich  $H$  ( $H = h_1 + h_c + h_2$ ). En chaque point de la structure sandwich, le système de coordonnées sera choisi de manière que le plan  $(x, y)$  soit le plan moyen.

### I.6.1 Hypothèses de la théorie des matériaux sandwiches

La théorie des matériaux sandwiches est basée sur les hypothèses suivantes :

- L'épaisseur de l'âme est plus élevée que celle des peaux ( $h_c \gg h_1, h_2$ ).
- Les déplacements du cœur  $u_c$  et  $v_c$  suivant les directions  $x$  et  $y$  sont des fonctions linéaires de la coordonnée  $z$ .
- Les déplacements  $u$  et  $v$  suivant les directions  $x$  et  $y$  sont uniformes dans l'épaisseur des peaux.

- Le déplacement transverse  $w$  est indépendant de la variable  $z$  : la déformation  $\varepsilon_{zz}$  est négligée.
- L'âme ne transmet que les contraintes de cisaillement transverse  $\sigma_{xz}, \sigma_{yz}$  : les contraintes  $\sigma_{xx}$  et  $\sigma_{yy}, \sigma_{xy}$  et  $\sigma_{zz}$  sont négligées.
- Les contraintes de cisaillement transverse  $\tau_{xz}$  et  $\tau_{yz}$  sont négligées dans les peaux.
- Enfin la théorie traite les problèmes d'élasticité en faibles déformations.

## I.7. Techniques d'assemblages des matériaux sandwiches

### I.7.1. Le collage de peau sur l'âme :

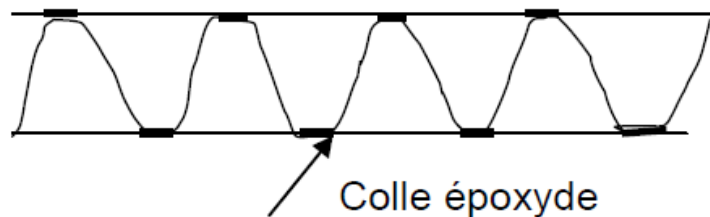
Pour que les structures sandwiches jouent pleinement leur rôle, il est nécessaire de veiller à avoir une solidarisation parfaite de l'ensemble âme – peaux de manière à répartir les efforts entre âme et peaux.

L'assemblage est réalisé selon la (Figure I.15) par un collage à l'aide de résines compatibles avec les matériaux en présence.

### I.7.2. Technique de pliage :

Après mise en œuvre les panneaux sandwiches peuvent être formés par pliage comme il est indiqué sur la (Figure I.16).

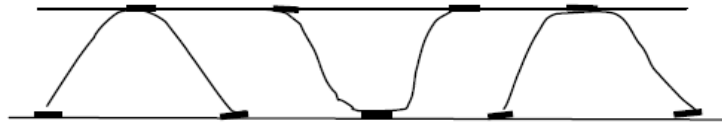
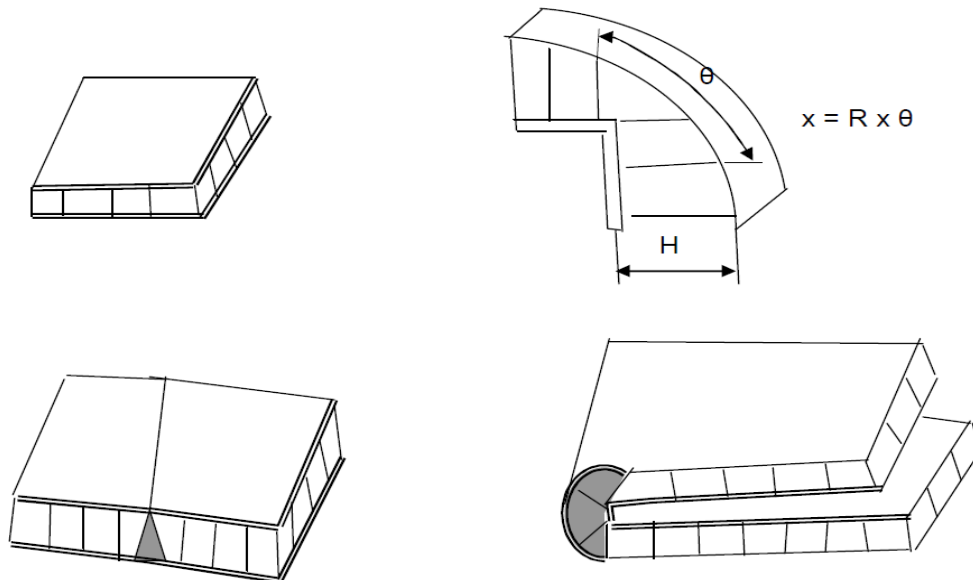
On commence par dégarnir une bande de l'un des revêtements en suivant l'axe de la pliure et sur une largeur qui est fonction de l'épaisseur de la plaque et l'angle de pliage souhaité, ensuite on plie et on maintient l'angle dans la position choisie.



(a) : collage de tôle ondulée ou raidisseurs  $\omega$  sur tôle



(b) : panneaux avec tubes carrés

(c) : panneaux avec  $\omega$  inversés**Figure I.15:** panneaux réalisés par collage à partir de profils divers.**Figure I.16 :** Pliage de panneaux sandwichs.

### 1.8. Intérêt des structures sandwichs

L'intérêt principal des structures sandwichs, par opposition aux composites traditionnels dits monolithique, réside dans leur rigidité spécifique très élevée. La densité de l'âme est couramment de l'ordre de  $100 \text{ kg m}^{-3}$ . En modifiant la nature et l'épaisseur de la peau et/ou de l'âme, on parvient à donner à la structure le matériau qui convient le mieux. Ainsi, l'amélioration de la rigidité qui traduit le comportement en flexion du matériau, s'obtient en augmentant soit l'épaisseur de l'âme qui conduit à l'augmentation de son moment d'inertie, soit le module d'élasticité des peaux. Puisque l'âme du sandwich possède une faible densité, la masse du composite n'évolue pas de façon importante.

Les matériaux composites sandwiches disposent d'atouts importants par rapport aux matériaux traditionnels. Ils apportent de nombreux avantages fonctionnels : légèreté, résistance mécanique et chimique, maintenance réduite, liberté de formes. Ils permettent d'augmenter la durée de vie de certains équipements grâce à leurs propriétés mécaniques et chimiques. Ils contribuent au renforcement de la sécurité grâce à une meilleure tenue aux chocs et au feu. Ils offrent une meilleure isolation thermique ou phonique et, pour certains d'entre eux, une bonne isolation électrique. Ils enrichissent aussi les possibilités de conception en permettant d'alléger des structures et de réaliser des formes complexes, aptes à remplir plusieurs fonctions. Dans chacun des marchés d'application (automobile, bâtiment, électricité, équipements industriels,...), ces performances remarquables sont à l'origine de solutions technologiques innovantes.

## **I.9. Domaines d'application des matériaux sandwiches**

Les panneaux sandwiches sont de plus en plus utilisés dans la conception des structures minces. Ils trouvent leurs applications dans l'aéronautique, l'automobile, la construction navale et ferroviaire et le domaine du génie civil.

### **I.9.1 Construction aérospatiale**

Les portes trappes de train d'atterrissages, carénages divers (entre aile de fuselage, mâts de réacteurs, glissières de volets) sont des pièces secondaires réalisés en panneaux sandwiches et par cuisson de stratifiés composites (carbone/époxyde, kevlar/époxyde) sur nida nomex ou aluminium collés avec des adhésifs époxydes en films.

Les capots des moteurs sont les plus souvent réalisés avec des sandwiches constitués de peaux en carbone / époxyde collés sur des âmes en nida aluminium (Belouettar et Abbadi, al 2009)

Afin d'obtenir la résistance à la chaleur nécessaire, on utilise des adhésifs époxyde phénoliques ou polyamides.

Les panneaux acoustiques sont des structures sandwiches dont la peau intérieure, coté moteur est constituée d'une peau perforée sur laquelle est collé un tissu microporeux.

Des nombreuses pièces d'hélicoptères sont constituées de pièces monolithiques ou de sandwiches avec peaux en composites collées sur nida (Hexcel Composite).

Dans les domaines astronautique et d'armement, on a besoin de tenue à la chaleur et aux variations thermiques encore plus élevées. Les réflecteurs solaires sont en peaux de carbone/époxyde et l'âme en nida nomex.

**I.10. Conclusion**

Dans ce chapitre, nous nous sommes attachés à présenter et à définir la notion de matériau sandwich. Dans un premier temps, nous avons présenté les principales propriétés mécaniques des structures sandwiches, ainsi que les différents modes d'endommagements. Le chapitre suivant va porter sur la présentation des matériaux à gradient de propriétés «FGM» tous en définissant leur concept et leurs caractéristiques puis nous définissons les lois qui gouvernent ce matériau.



## **CHAPITRE II:**

**GÉNÉRALITÉS SUR LES MATÉRIAUX**

**GRADIENTS DE PROPRIÉTÉ**

---

## Chapitre II

### Généralités sur les matériaux à gradient de propriétés.

#### II.1. Introduction

Les matériaux à gradient de propriétés (FGM); Un type de matériau composite fabriqué en changeant sans interruption les fractions de volume dans la direction de l'épaisseur pour obtenir un profil bien déterminé ; ces types de matériaux ont suscité beaucoup d'attention récemment en raison de leurs avantages, puisqu'ils réduisent la disparité dans les propriétés matérielles et les contraintes thermiques. La solution d'une transition continue des propriétés recherchées, par un gradient de composition, permet d'atténuer cette singularité par l'utilisation des matériaux à gradient de propriétés (en anglais : Functionally Graded Matériel " F.G.M ").

L'utilisation des FGM a augmenté considérablement Les structures sandwiches sont un type spécial de matériaux composites composés d'un noyau à deux couches collées, et elles ont été utilisées dans de nombreux domaines d'ingénierie tels que les structures d'engins spatiaux, d'avions, de chemins de fer et de voitures, les pales d'éoliennes, grâce à leurs propriétés impressionnantes, c'est-à-dire un rapport rigidité/poids élevé (Vinson 2005).

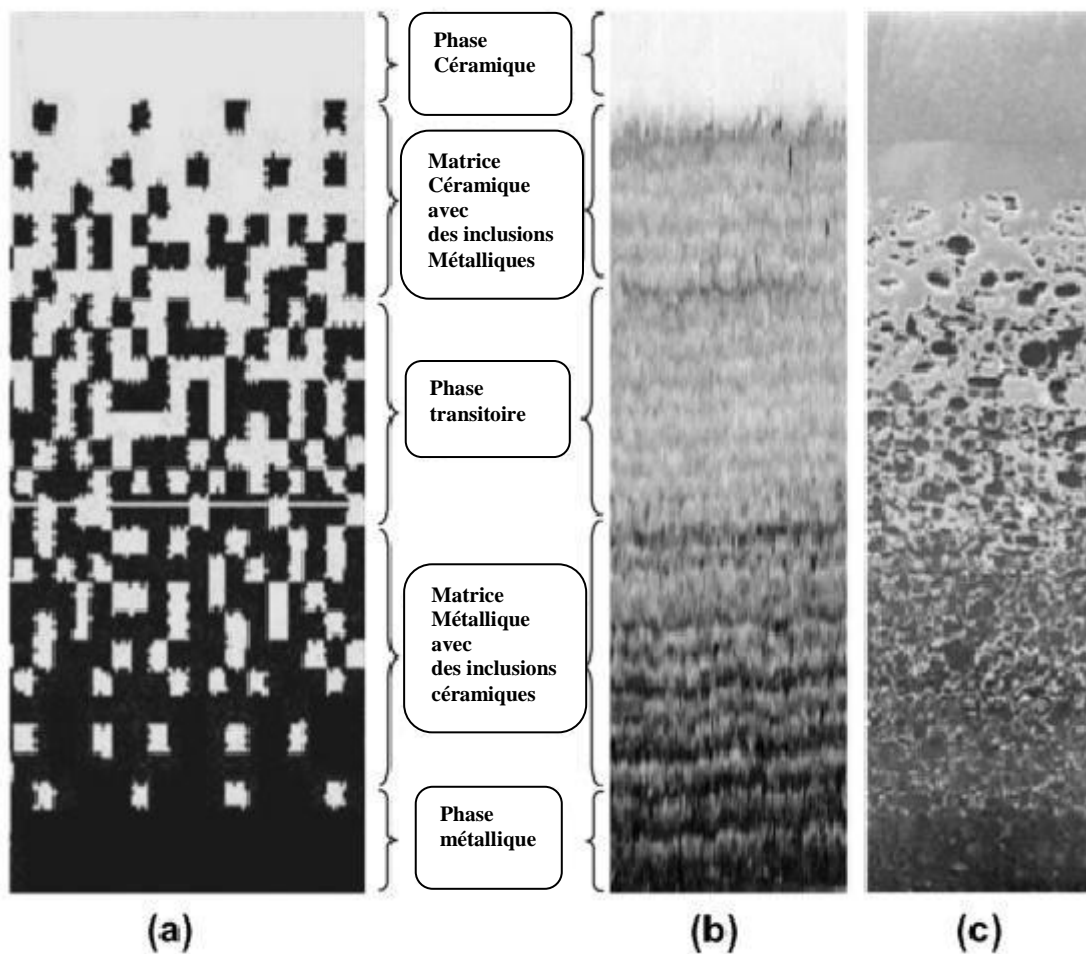
Ces dernières années, les matériaux à gradient évalués ont été développés pour leurs excellentes propriétés mécaniques. Ces matériaux ont de grandes performances et sont capables de résister aux températures des plus chaudes.

Au début les FGM ont été conçus en tant que matériaux de barrière dans les applications et les réacteurs, c'est par suite que les FGM ont été développés dans le domaine militaire, automobile, biomédicale l'industrie des semi-conducteurs et toutes utilisations dans un environnement à haute température (Hadjji 2012).

#### II 2. FGM et Composites

En général, les matériaux à gradient de propriétés FGM ou dits « Functionally graded materiels », sont des matériaux composites constitués de deux différents matériaux de base, céramique et métal, dans lesquelles leurs propriétés mécaniques et thermiques sont variées d'une façon continue, quelconque et sans interruption dans l'épaisseur du matériau (Figure II.1). Cette variation est atteinte par les fractions volumiques en fonction de ces deux composantes, afin de former un matériau dense et homogène dans l'épaisseur, cette complétant permet d'aboutir à un matériau dont l'ensemble des performances techniques est supérieur à la performance de ces composantes prisent séparément. Dans cet onglet et face aux problèmes liés aux matériaux classiques tels que le vieillissement, la corrosion, l'exposition à la haute température et les phénomènes de dégradation, on considère les matériaux à gradient de propriétés comme des matériaux optimaux dans l'environnement dans lesquels sont placés.

Les matériaux à gradient de propriétés sont considérés comme une nouvelle classe améliorée des matériaux composites, les multicouches et les stratifiés ont des caractéristiques discrètes à travers les interfaces entre les plis constituants. Par conséquent, leurs composants (fibres et matrice) sont plus exposés au délaminage/rupture dû au chargement thermique/mécanique dans les conditions extrêmes. Cela est dû aux différentes valeurs des paramètres tels que le coefficient de dilatation thermique, le coefficient de Poisson et le module de Young discontinus à travers l'épaisseur, en plus de ça, la présence des contraintes résiduelles et inter-laminaires (concentrations des contraintes) entre les plis contribue à la propagation des fissures qui conduisent à l'endommagement des multicouches ou des stratifiés.



**Figure II.1** :Schéma d'une microstructure graduée continue avec les constituants céramique-métal, Jha et al. (2013).

Nous pouvons résoudre ou réduire ces problèmes par une variation continue de leurs Matériaux constituants à travers l'épaisseur, cette graduation permet d'éliminer la concentration des contraintes, de réduire les contraintes thermiques résiduelles et de résister contre les extrêmes conditions de service.

### II.3. Historique sur les FGM

Généralement, les F.G.M sont des matériaux constitués de plusieurs couches contenant des composants différents tels que les céramiques et les métaux. Ils sont donc des composites présentant des caractéristiques macroscopiquement inhomogènes. Le changement continu dans la composition et donc dans la microstructure du matériau distingue les F.G.M des matériaux composites conventionnels comme c'est illustré dans la Figure. II.2. Il en résulte un gradient qui déterminera les propriétés matérielles des FGM. Dans certains cas, on peut avoir un FGM constitué d'un même matériau mais de microstructure différente Figure. II.2

Les matériaux à gradient de propriétés existent dans la nature et dans les différentes configurations. Nous citons à titre d'exemple le bois, le bambou, les os et les dents. Avec le progrès de l'industrie, cette classe des matériaux est élaborée par un groupe de chercheurs japonais à Sendai, Tokyo, notamment Dr. NIno et al. dans le laboratoire national d'Aerospace à Tokyo en 1984 (Koizumi et al.1993), le but été de développer des matériaux qui résistent à haute température, par une combinaison variée à travers l'épaisseur des matériaux, une face métallique arrive à l'autre face céramique, ils les ont utilisées comme une barrière thermique dans les structures spatiales et aéronautiques où elles sont placées dans un environnement thermique extrême.

Dans la fin des années 80 et début des années 90, l'état Japonais a lancé des programmes de recherche sur ces matériaux sous titre : « Fundamental Study on the Relaxation of Thermal Stress for High Temperature Materials by the Tailoring of Graded Structures » avec un budget important, sous la direction de l'agence nationale des sciences et de la technologie. Leurs objectifs été le développement des matériaux à gradient de propriétés sous différentes architectures et configurations pour résister vis-à-vis des environnements à haute température, tels que les réacteurs de fusion, le lanceur des fusées et les structures aéronautiques, ensuite et en collaboration avec plusieurs laboratoires de recherches et universités, beaucoup de colloques et des séminaires internationaux ont été organisés dans le but de discuter les avantages, les techniques de la mise en oeuvres, l'extension vers d'autres domaines d'applications et la modélisation des matériaux à gradient de propriétés, (Kiyoshi et al. 2001). Dans le second temps, au début des années 90, après une évolution rapide de cette classe des matériaux, nombreux travaux citent les différentes techniques d'élaborer les FGMs en utilisant des configurations compatibles, les matériaux souvent utilisés sont : les alliages de magnésium, aluminium, cuivre, titane, tungstène, acier, etc...., et les céramiques d'une structure avancée comme : zircon, alumine, silicium-carbure et tungstène-carbure. Le champ d'application de ces matériaux est élargi et étendu vers plusieurs domaines d'industrie notamment le domaine énergétique où plusieurs programmes de recherches ont été lancé sous le nom « Research on energy conversion materials with functionally gradient structure », (Kiyoshi et al. 2001).

À partir de l'année 2000, une bibliothèque volumineuse est réservée aux nouveaux processus de fabrication des matériaux à gradient de propriétés ainsi leurs domaines d'application, et le plus important, leurs modélisations théoriques et numériques. Tout ça est discuté à l'échelle technologique très avancée, (Kiyoshi et al. 2001). Pour des informations supplémentaires, les ouvrages de Kiyoshi et al. (2001). et Miyamoto et al. (1997) citent explicitement l'évolution historique des matériaux à gradient de propriétés.

<b>Propriétés</b>	<p>1 Résistance mécanique</p> <p>2 Conductivité thermique</p>		
<b>Structure</b>	<p>Eléments constitutifs:</p> <p>céramique ○</p> <p>métal ●</p> <p>microporosité ○</p> <p>fibre ◇*</p>		
<b>Matériaux</b>	<b>exemple</b>	<b>FGM</b>	<b>NON-FGM</b>

Figure. II.2 : Caractéristiques des matériaux composites FGM en comparaison avec les matériaux composites conventionnels (Hadji 2012).

### II.4. Domaines d'application

Les matériaux à gradient de propriété sont introduit dans plusieurs domaines (figure II.3), cela grâce à leurs potentielles très importantes et ceci en fonction de leur caractéristique telle que la conductivité thermique, la ténacité, la résistance et la légèreté de ces matériaux.

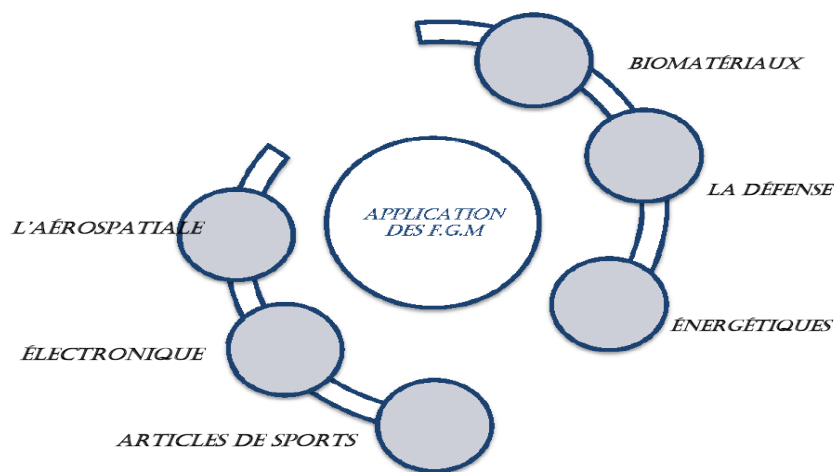


Figure II.3: Les principaux domaines d'application des FGM (HEBBAR et al, 2019)

Les matériaux à gradient de propriété ont un large intervalle d'application dans des domaines tels que les matériaux de construction, matériaux de transformation d'énergie, nucléaire et biomécanique. Certaines des applications des matériaux à gradient de propriété sont discutées ci-dessous :

#### II.4. 1. Dans l'aérospatiale et l'automobile :

Les matériaux à gradient de propriété sont en évolution constante dans le domaine de l'aérospatiale grâce au programme de développement de la NASA. Cette évolution est due au problème rencontré dans les coûts très élevés des navettes spatiales qui est en rapport avec le poids. À cet effet, et afin de réduire ce coût très élevé, il est indispensable d'élaborer une conception optimale qui induit de créer un équilibre entre le poids et la performance de ces navettes spatiales en utilisant des plaques FGM. Plusieurs travaux présentés par Arnold (Arnold, S. M. 2001) appliquent le modèle théorique pour simuler la réponse du FGM pour le refroidissement des plaques de blindage thermique pour les navettes spatiales (Hopkinson et al. 2006 ; Saiyathibrahim et al. 2015).



**Figure II.4:** Exemples des matériaux à gradient de propriétés (l'automobile) (Cox, H. 2004).

#### II.4.2. Dans l'industrie :

Dans un domaine important qui a une relation avec l'économie il est nécessaire d'investir au maximum étant donné que dans le domaine de l'industrie l'innovation de l'outil est primordiale, vu que récemment l'industrie exige des pièces récentes avec des paramètres qui admettent des résistances à l'usure et la ténacité, étant des éléments maîtres dans l'innovation de l'industrie et qui induisent la réduction des coûts de ces composants. De ce fait, la solution à cette problématique est l'utilisation des matériaux à gradient de propriété.

Parmi les matériaux à gradient de propriété qui ont été utilisés dans des applications importantes ont fait allusion aux matériaux à gradient à matrice d'aluminium, ces derniers ont été utilisés dans l'industrie à une échelle telle que les emballages électroniques et des matériaux de blindage (Saiyathibrahim et al. 2015) .

**II.4.3. Dans la défense :**

Les matériaux à gradient de propriété sont la base de la fabrication du sabre japonais traditionnel. Ce dernier est fabriqué par plusieurs plaques d'acier de forge avec une teneur en carbone qui permet de se présenter dans la surface extérieure en grande quantité par rapport à la partie intérieure. Ils induisent une résistance élevée et une dureté remarquable (Misra et al. 2011). Parmi les capacités du matériau fonctionnellement gradué est d'empêcher la propagation des fissures.

**II.4.4. Dans les capteurs et les applications énergétiques :**

Les matériaux à gradient de propriété procurent une variété de fonction, par exemple le thermoélectrique gradué, ces matériaux piézoélectriques sont appliqués dans les ultrasonores à large bande et les électrodes composites graduées pour les combustibles à base d'oxydes solides (Müller et al. 2003). Les matériaux à gradient de propriété sont utilisés dans les procédés de changement d'énergie, protection des aubes de turbine comme revêtement.

**II.4.5. Dans l'optoélectronique :**

Aujourd'hui, il est possible de réaliser des procédés photoniques qui pourraient fonctionner dans une large gamme spectrale et cela en utilisant des matériaux à gradient de propriété (Wo et al. 2005).

Il existe plusieurs domaines d'application des FGM comme les revêtements, les composants des moteurs, les échangeurs de chaleur, les réacteurs nucléaires etc. (Rasheedat et al, 2012; Bohidar et al, 2014). A cet effet, on remarque une amélioration dans le coût de production et les propriétés des matériaux à gradient de propriété.

**II.4.6. Articles de sports :**

Aujourd'hui les matériaux à gradient de propriété sont introduits comme un composant dans la production des articles de sport de haute performance telle que les chaussures de baseball et les outils d'escalade sur glace (crampons et piolets) dans le même concept de réduction d'usure (Hopkinson et al, 2006 ; Saiyathibrahim et al, 2015).

**II.4.7. Dans les biomatériaux**

Aujourd'hui ce domaine sensible sollicite l'admission de ce type de matériaux, car les matériaux à gradient de propriété sont l'innovation du siècle dans ce domaine sensible, pour éclaircir mieux on prend l'exemple de la réparation de l'os et ligaments humains ou son remplacement en cas de fissuration, plusieurs chercheurs ont travaillé sur cette thématique.

comme Miao et Sun (Xigeng Miao et al. 2010), où les recherches expérimentales ont montré que ces matériaux ont une capacité de résistance et de durabilité.



a. L'os



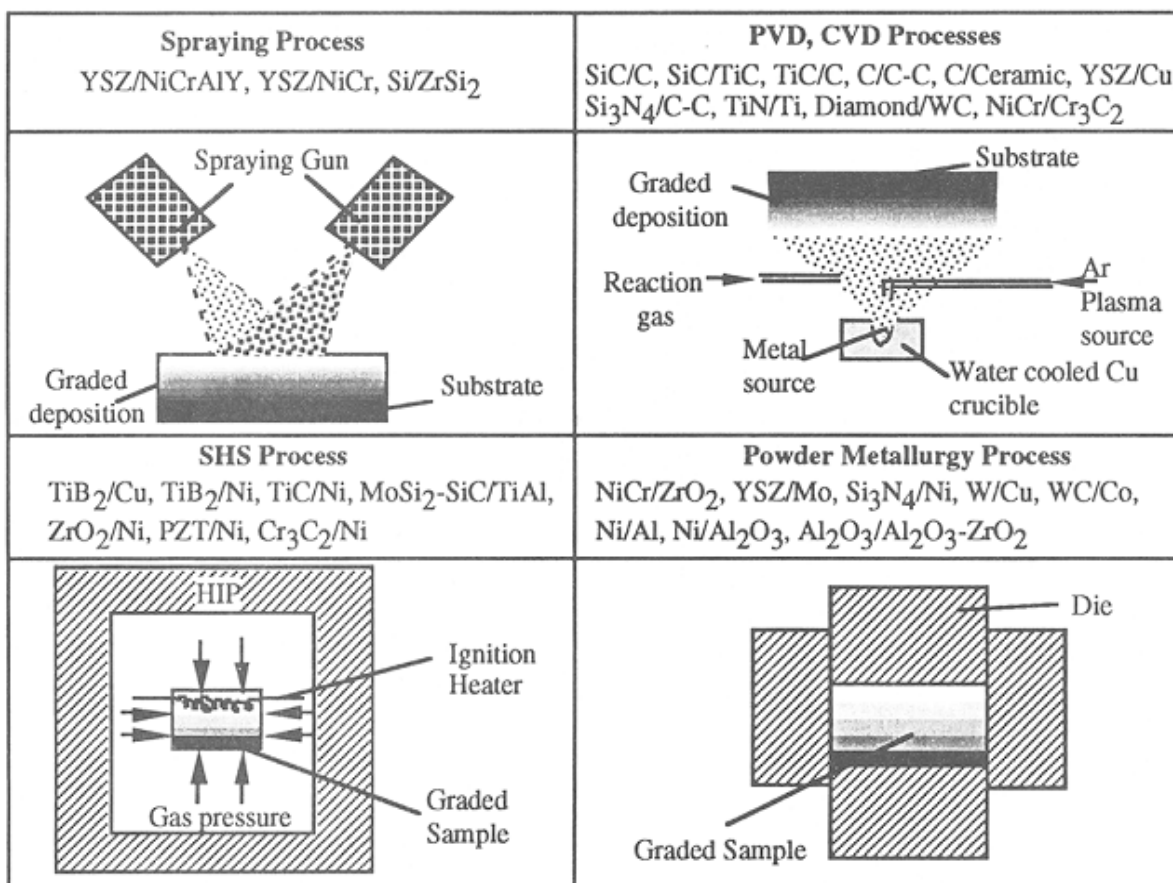
b. hanche biocompatible

**Figure II.5:** Exemples des matériaux à gradient de propriétés. (HEBBAR et al, 2019)

## II.5 Méthodes et techniques de mise en œuvre des FG

Comme décrit précédemment, un matériau à gradient de propriétés est caractérisé par la variation continue de leurs propriétés à travers l'épaisseur du matériau. En générale, les constitutions de base d'un FGM sont : les céramiques et les métaux. Alors l'élaboration d'un matériau dense et gradué à partir de ces deux matériaux dépend des techniques et les méthodes de fabrication. La figure II.6 montre les méthodes les plus populaires dans le domaine de fabrication des FGM.





**Figure II.6.** Techniques d'élaboration des matériaux à gradient de propriétés. (Koizumi et al. 1996)

Une qualité idéale pour élaborer un FGM nécessite une technologie avancée, l'autre part de concept des FGM est basée sur le développement des processus de fabrication. Plusieurs chercheurs ont contribué des techniques plus avancées depuis la naissance de cette classe des matériaux (Jha et al.2013), (Kieback et al. 2003), dans la suite, nous citons la plupart des méthodes de la mise en œuvre des FGM :

- 1) Technique de dépôt par évaporation (chimique ou électrique),
- 2) Métallurgie des poudres,
- 3) Méthode au centrifuge,
- 4) Méthode de fabrication solide libre,
- 5) Projection au plasma,
- 6) synthèse de Frittage à haute température,
- 7) Méthode de placage à laser.

Pour plus d'informations, Kieback et al. (2013) font une synthèse détaillée sur les techniques et les méthodes d'élaborations des matériaux à gradient de propriétés.

## II.6 Méthodes d'Homogénéisation des FGM

Les matériaux à gradient de propriétés sont interprétés comme des matériaux hétérogènes ou non homogènes à cause de leurs structures microscopiques ou/et macroscopiques. Dans le premier temps, nous allons présenter les différents modèles d'homogénéisation permettant de prédire le comportement équivalent d'un matériau à gradient de propriétés, et de déterminer leurs propriétés physiques effectives. Afin d'analyser les structures en FGM comme des structures homogènes à l'échelle macroscopique.

D'une façon générale, les méthodes d'homogénéisation pour traiter les matériaux non homogènes se définissent par deux techniques :

- a) techniques d'homogénéisation analytiques,
- b) techniques d'homogénéisation numériques.

Pour la première classe, il s'agit de déterminer les propriétés matérielles d'un matériau FGM en utilisant des modèles mathématiques, ces modèles permettent d'exprimer les propriétés physiques des différentes phases constituant le matériau hétérogène.

Les modèles analytiques sont basés sur le choix d'un volume élémentaire représentatif pour prédire correctement les propriétés physiques effectives.

Les modèles numériques décrivent le comportement de ces matériaux en basant sur la simulation micromécanique. En effet, ces modèles considèrent la forme géométrique, les propriétés matériels et le nombre des phases constituant le matériau hétérogène. Pour une étude approfondie, on pourra se référer aux ouvrages de Siboni et al. (1991) et de Bary et al. (2009).

Une présentation détaillée a été faite par Akbarzadeh et al. (2015) pour examiner l'influence des modèles micromécaniques sur la réponse des plaques en FGM. Parmi les modèles d'homogénéisation dans la littérature, quelques modèles micromécaniques standards pourraient être mentionnées.

- 1) Loi exponentielle ;
- 2) Loi des puissances;
- 3) La distribution sigmoïde;
- 4) Schéma de Mori-Tanaka.

## II.7. Les différentes lois qui régissent la variation des propriétés matérielles suivant l'épaisseur d'une plaque FGM

### II.7.1. Propriétés matérielles de la plaque P-FGM

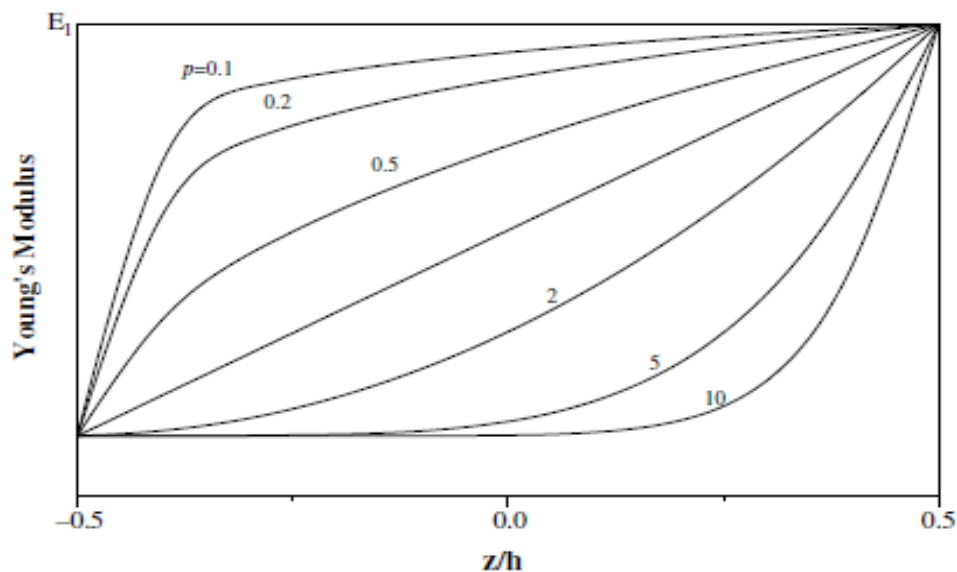
La fraction volumique de la classe P-FGM obéit à une fonction en loi de puissance.

$$V(z) = \left( \frac{z + h/2}{h} \right)^p \quad (\text{I.1})$$

Où  $p$  est un paramètre du matériau et  $h$  est l'épaisseur de la plaque. Une fois que la fraction de volume local  $V(z)$  est définie, les propriétés matérielles d'une plaque P-FGM peuvent être déterminées par la loi des mélanges :

$$E(z) = V(z).E_1 + [1 - V(z)].E_2 \quad (\text{I.2})$$

Où  $E_2$  et  $E_1$  sont respectivement les propriétés matérielles (modules de Young ou densité) de la surface inférieure ( $z = -h/2$ ) et de la surface supérieure ( $z = h/2$ ) de la plaque FGM. La variation de ces propriétés dans la direction de l'épaisseur de la plaque P-FGM est représentée dans (Figure II.7), il apparaît clairement que le module de Young par exemple change rapidement près de la surface inférieure pour  $p > 1$ , et augmente rapidement près de la surface supérieure pour  $p < 1$ .



**Figure II.7 :** La variation du module de Young dans une plaque P-FGM.

### II.7.2 Propriétés matérielles de la plaque S-FGM

Dans le cas d'ajouter une plaque P-FGM d'une simple fonction de loi de puissance à une plaque composite multicouche, les concentrations des contraintes apparaissent sur l'interfaces où le matériau est continu mais change rapidement. Par conséquent, Chung et chi ont défini la fraction de volume de la plaque FGM en utilisant deux fonctions de loi de puissance pour assurer une bonne

distribution des contraintes parmi toutes les interfaces. Les deux fonctions de loi de puissance sont définies par :

$$V_1(z) = 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{h/2 - z}{h/2} \right)^p \quad \text{Pour } 0 \leq z \leq h/2$$

$$V_2(z) = \frac{1}{2} \left( \frac{h/2 + z}{h/2} \right)^p \quad \text{Pour } -h/2 \leq z \leq 0$$
(I.3)

En utilisant la loi des mélanges, le module de Young de la plaque S-FGM peut être calculé par :

$$E(z) = V_1(z) \cdot E_1 + [1 - V_1(z)] \cdot E_2 \quad \text{Pour } 0 \leq z \leq h/2$$

$$E(z) = V_2(z) \cdot E_1 + [1 - V_2(z)] \cdot E_2 \quad \text{Pour } -h/2 \leq z \leq 0$$
(I.4)

La figure I.9 montre que la variation de la fraction volumique dans les équations (I.3) et (I.4) représente les distributions sigmoïdes, et cette plaque FGM est appelée (Plaque S-FGM).

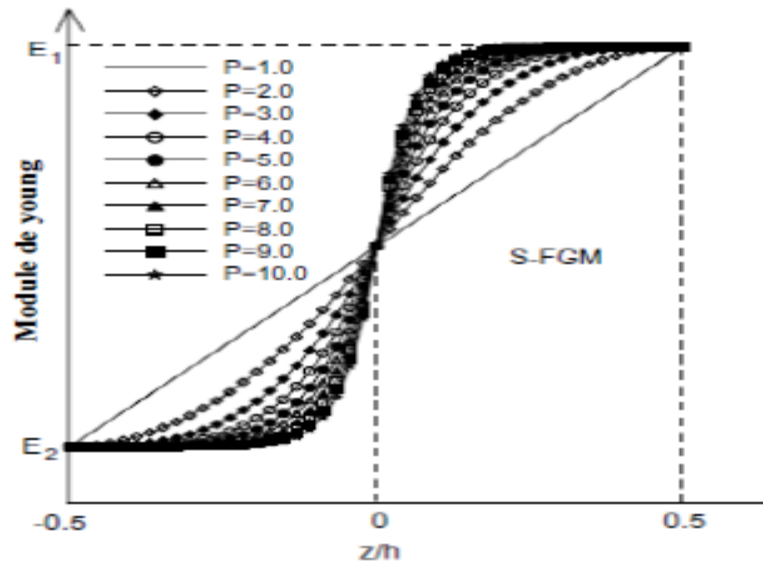


Figure II.8 : Variation de la fraction volumique dans une plaque S-FGM.

### II.7.3 Les propriétés matérielles de la plaque E-FGM

Pour décrire les propriétés matérielles des matériaux FGM, la plupart des chercheurs utilisent la fonction exponentielle qui s'écrit sous la forme :

$$E(z) = A \cdot e^{B \cdot (z+h/2)}$$
(I.5)

Avec,

$$A = E_2 \quad \text{et} \quad B = \frac{1}{h} \cdot \ln \left( \frac{E_1}{E_2} \right)$$
(I.6)

La variation du module de Young à travers l'épaisseur de la plaque E-FGM est représentée dans (Figure I.10).

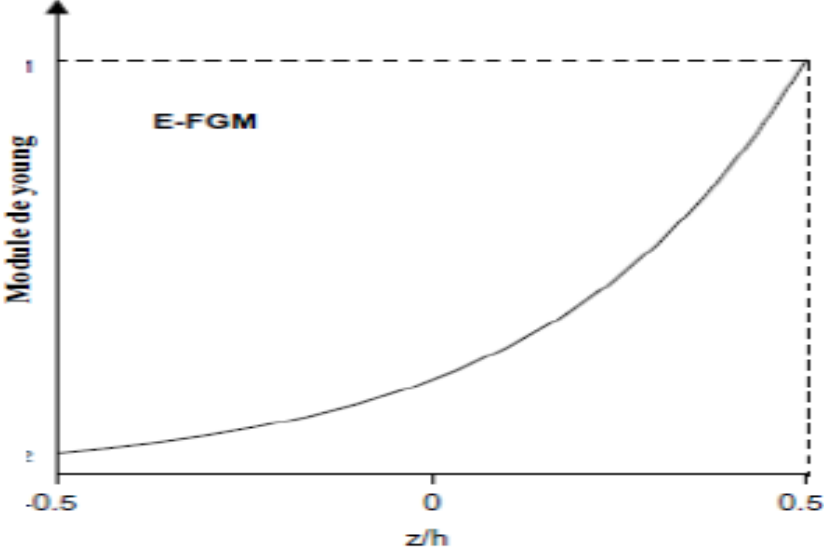


Figure II.9 : Variation du module de Young dans une plaque E-FGM.

**II.8. Conclusion**

Ce chapitre est dédié à l'acquisition des connaissances théoriques nécessaires pour étudier notre problématique, nous avons présenté un bref historique sur les matériaux à gradients de propriétés et leur développement, leurs propriétés, leurs principales méthodes de fabrication, domaines d'application, leurs modes de la mise en œuvre et les modèles de l'homogénéisation de ce type des matériaux, et finalement, décrire les lois de constitution matérielle.

## **CHAPITRE III:**

### **LES THÉORIES DES STRUCTURES FGM**

---

## *Chapitre III*

### *Les théories des structures FGM*

#### **III.1. Introduction**

Une structure FGM peut être considérée comme un corps hétérogène. La caractéristique géométrique d'une plaque est une épaisseur faible par rapport aux autres dimensions. La modélisation des structures FGM modernes avec une forte anisotropie (par exemple : faible rapport du module de cisaillement transverse de l'âme par rapport au module d'élasticité longitudinal des peaux dans le cas des structures sandwich) exige des théories raffinées qui prennent en compte une bonne description des cisaillements transverses. On trouve dans des revues complètes sur les différents modèles existants de type élasticité tridimensionnelle ou de type plaque. L'intérêt d'une approche tridimensionnelle réside dans l'obtention de résultats exacts tridimensionnels, utiles notamment comme référence. L'adoption d'une approche tridimensionnelle ne présente toutefois d'utilité que dans la mesure où les équations différentielles finalement obtenues peuvent être résolues. L'approche tridimensionnelle (3D) est donc limitée à certains cas de géométrie, empilement et chargement simple. La encore une approche 3D peut fournir des informations dans certains cas (bord libre droit, plaque trouée .) mais il est préférable d'envisager des démarches bidimensionnelles (2D) de type plaque plus opératoires. Dans la suite ce sont ces approches 2D qui seront mentionnées.

Durant ces dernières années, plusieurs modèles bidimensionnels ont été développés pour la modélisation des structures multicouches tenant compte des cisaillements transverses. Ils peuvent être regroupés en fonction du type d'approche adopté :

Approche monocouche équivalente.

Approche par couche.

Approche développement asymptotique.



## III.2. Les Différents Modèles des structures composites dans l'élasticité bidimensionnelles :

### III.2.1. Approche monocouche équivalente

Dans l'approche monocouche équivalente, le nombre d'équations ne dépend pas du nombre de couche, la plaque multicouche est homogénéisée et est donc considérée comme une seule couche (fekrar 2010) .

Depuis le premier travail de Sophie Germain en 1815 sur les plaques minces en passant par les modèles du premier ordre de Love-Kirchhoff et de Reissner-Mindlin, de nombreux auteurs ont développé des théories de plaques à partir de cinématiques ou champs de contraintes plus raffinés. J'ai passé en revue, dans ce qui suit, les principaux modèles ( Ait Atman 2011) .

#### III.2.1.1. Les modèles classiques Love-Kirchhoff (théorie classique des plaque stratifiées CLPT)

En commence par le model le plus simple est le plus général appelé model de Love-Kirchhoff. Ce modèle est basé sur une distribution linéaire des déplacements suivant l'épaisseur (Stavsky 1967 ; reissner 1967).

L'hypothèse adoptée est celle de Love-Kirchhoff (Kirchhoff. 1850) des contraintes planes, les déformations dues au cisaillement transverse sont négligées. La normale à la surface moyenne de la plaque reste perpendiculaire et droite à celle-ci après déformation (Figure. II.1) [68] (kirechhoff 1850).

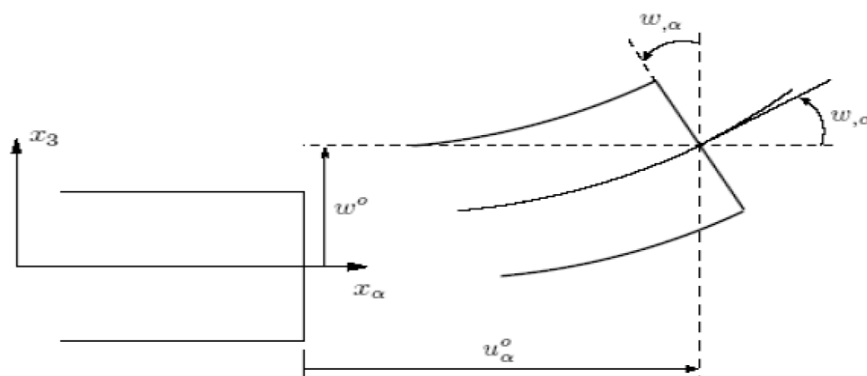


Figure. III. 1 : Cinématique de Love-Kirchhoff.

Le champ de déplacements de Love-Kirchhoff s'écrit alors,

$$\begin{cases} u_{\alpha}(x_1, x_2, x_3 = z) = u_{\alpha}^0(x_1, x_2) - zw_{,\alpha}(x_1, x_2) \\ u_3(x_1, x_2, x_3 = z) = w(x_1, x_2) \end{cases}, \alpha = 1, 2 \quad (\text{III.1})$$

Avec,

$u_{\alpha}^0$  : Le déplacement membrane dans la direction,  $\alpha$

$w$  : La flèche de la plaque.

$w_{,\alpha}$  : La rotation due a la flexion (sans cisaillement).

### III.2.1.2. Les modèles Reissner-Mindlin (théorie de déformation en cisaillement du premier ordre FSDPT)

Le cisaillement transverse ne peut être négligé; sa prise en compte est adoptée par Mandin dont l'hypothèse cinématique est la suivante :

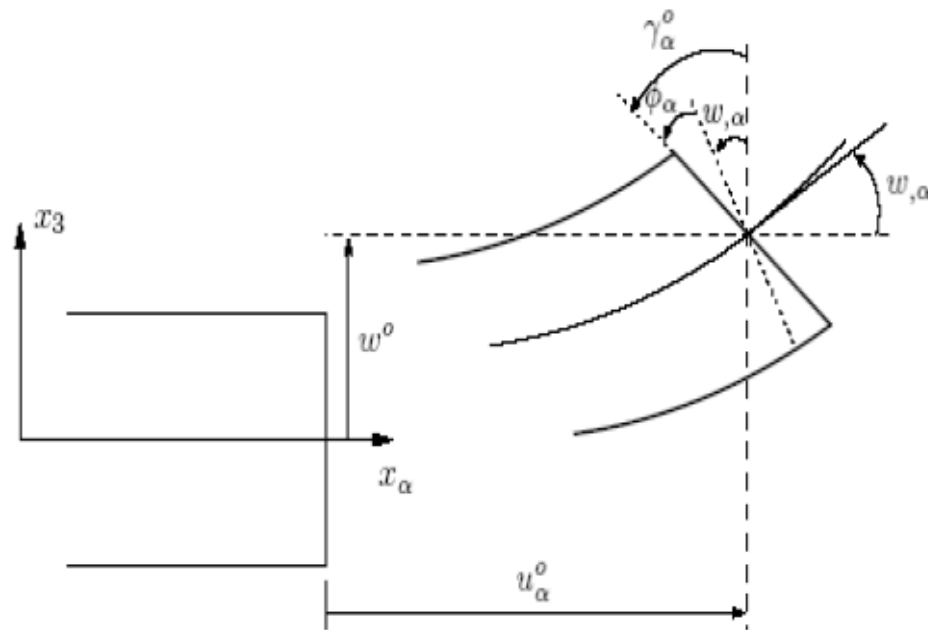
La normale reste droite mais non perpendiculaire à la surface moyenne (à cause de l'effet du cisaillement transverse) dans la configuration déformée (Figure.II.2). Le champ de déplacements de Reissner-Mindlin s'écrit :

$$\begin{cases} u_{\alpha}(x_1, x_2, x_3 = z) = u_{\alpha}^0(x_1, x_2) - z\phi_{,\alpha}(x_1, x_2) \\ u_3(x_1, x_2, x_3 = z) = w(x_1, x_2) \end{cases} \quad (\text{III.2})$$

Avec,

$\phi_{\alpha}$  : La rotation de la normale au plan moyen autour des axes  $x_{\alpha}$ ,

$\gamma_{\alpha}^0 = (w_{,\alpha} + \phi_{\alpha})$  : La déformation de cisaillement transverse mesurée sur le plan moyen.

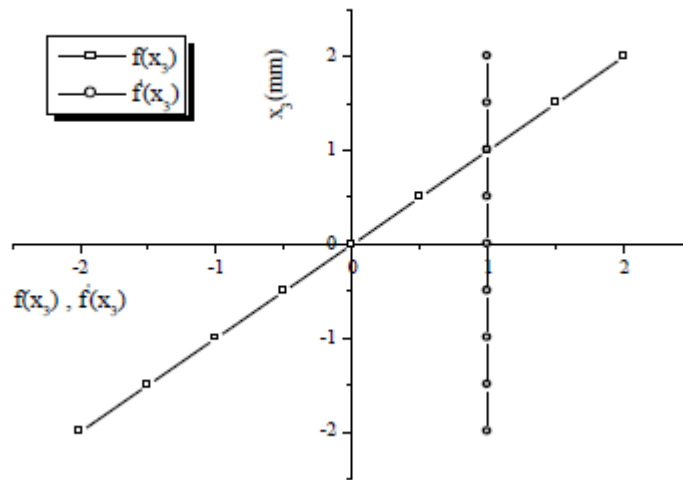


**Figure. III.2** : Cinématique de Reissner-Mindlin.

Avec ce choix de la forme des champs de déplacements, les déformations transversales  $\gamma_\alpha^0$  sont constantes en  $z$ . Les contraintes de cisaillement sont donc uniformes à n'importe quel point suivant l'épaisseur et ça évitent la discontinuité entre les couches dans les composites conventionnels. Cette mauvaise description d'uniformité de distribution des contraintes oblige à introduire des coefficients correcteurs pour mieux prendre en compte, dans l'écriture de l'énergie, les effets du cisaillement transversal (Whitney 1973).

Les résultats obtenus dépendent essentiellement du choix empirique dans des situations complexes des coefficients correcteurs et l'étude des plaques épaisses reste aléatoire par ce type d'approche cinématique.

La (Figure. III.3) montre la variation de la fonction de forme ainsi que sa dérivée par rapport à l'épaisseur de la plaque. Cette variation est plus authentique pour le cas des plaques stratifiées ou au niveau de l'interface il ya une discontinuité de distribution des propriétés alors que pour les FGM ce problème est résolu.



**Figure. III.3** Variation de la fonction de gauchissement  $f(x_3) = x_3, f'(x_3) = x_3$  et  $f''(x_3)$  suivant l'épaisseur.

### III.2.1.3. LES MODÈLES D'ORDRE ÉLEVÉE

Pour franchir les limites des théories du premier ordre, plusieurs auteurs proposent des théories à un ordre élevé. Les modèles sont basés sur une distribution non linéaire des champs suivant l'épaisseur. Ces modèles permettent de représenter le gauchissement de la section dans la configuration déformée (Figure. III.4).

La plupart des modèles d'ordre élevé utilisent un développement en série de Taylor des champs de déplacements qui s'écrivent de la forme :

$$u_i(x_1, x_2, x_3) = u_i^0(x_1, x_2) + z\phi_i^{0(1)}(x_1, x_2) + z^2\phi_i^{0(2)}(x_1, x_2) + z^3\phi_i^{0(3)}(x_1, x_2) + z^4\phi_i^{0(4)}(x_1, x_2) + \dots \quad (\text{III.3})$$

Partons de ce principe j'ai prouvé utiliser différents ordres, en fonction de la complexité du problème et de la précision souhaitée. La plupart des études sont basées sur un développement en 3ème ordre, assurant ainsi un niveau minimum de complexité. La valeur de  $\phi_j^{0(i)}$  détermine la nature de la théorie. Ainsi, la théorie du premier ordre de Reissner et Mindlin est obtenue en posant :  $\phi_i^{0(j)} = 0$  pour  $j = 2, 3, 4$  et  $\phi_3^{0(1)} = 0$ .

En principe, ces modèles d'ordre élevé sont plus précis que les modèles du premier ordre. La précision augmente avec l'ordre de développement, c'est à dire avec le nombre de paramètres

supplémentaires. Cependant, les conditions aux limites sur les bords sont difficiles à satisfaire et le nombre de variables de déplacement indépendantes dépasse celui des modèles classiques. Pour réduire le nombre de paramètres de déplacement, plusieurs simplifications sont proposées. On impose souvent les conditions de nullité des contraintes de ci

Salement transverse aux surfaces supérieure et inférieure de la plaque. Le développement en série de Taylor est utilisé avec  $\phi_i^{(4)} = \phi_i^{(2)} = \phi_i^{(1)} = 0$ ,  $\phi_i^{(3)}$ ,  $\alpha = \{1, 2\}$ . Le champ de déplacement devient :

$$\begin{cases} u_\alpha(x_1, x_2, x_3 = z) = u_\alpha^o(x_1, x_2) - zw_{,\alpha} + f(z)\gamma_\alpha^o(x_1, x_2) \\ u_3(x_1, x_2, x_3 = z) = w(x_1, x_2) \end{cases} \quad (III.4)$$

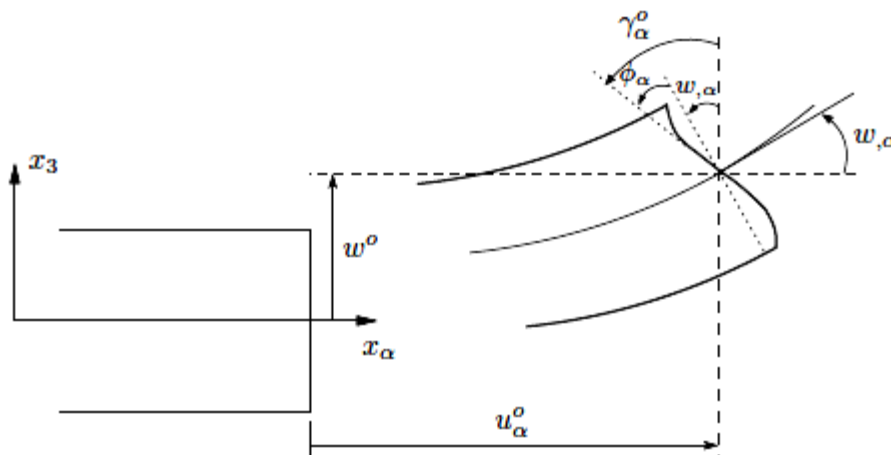


Figure .III.4 : Cinématique de la théorie d'ordre supérieur.

Voici quelques contributions importantes de développement de modèles d'ordre supérieur qui se sont distingués dans la littérature et qui diffèrent par la fonction de cisaillement  $f(z)$  :

L'approche d'Ambartsumyan (Ambartsumyan 1969) :

$$f(z) = \frac{z}{2} \left( \frac{h^2}{4} - \frac{z^2}{3} \right) \quad (III.5)$$

L'approche de Reissner (Reissner 1945) :

$$f(z) = \frac{5}{4} z \left( 1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right) \quad (\text{III.6})$$

L'approche de Reddy (Reddy 1987):

$$f(z) = z \left( 1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right) \quad (\text{III.7})$$

Dans le modèle de, le champ de déplacement membranaire est cubique et le déplacement normal  $w$  est constant. Ce modèle donne une bonne approximation pour les contraintes de cisaillement transverse par rapport à la solution élastique tridimensionnelle. La distribution des contraintes de cisaillement transversal est parabolique suivant l'épaisseur. Les conditions aux limites sur les surfaces libres sont satisfaites.

L'approche de Touratier (Touratier 1991) :

$$f(z) = \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{z}{h}\right) \quad (\text{III.8})$$

Touratier propose le modèle "sinus" qui est différent des autres modèles d'ordre supérieur puisqu'il n'utilise pas de fonction polynomiale. Une fonction trigonométrique sinusoïdale est donc introduite pour modéliser la répartition des contraintes de cisaillement suivant l'épaisseur. La fonction de cisaillement transverse s'écrit comme suit :

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) = \frac{h}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \left(\frac{\pi z}{h}\right)^{2n+1} \\ &= z \left( 1 - \frac{\pi^2}{3!} \frac{z^2}{h^2} + \frac{\pi^4}{5!} \frac{z^4}{h^4} - \frac{\pi^6}{7!} \frac{z^6}{h^6} + \dots \right) \end{aligned} \quad (\text{III.9})$$

Les différents termes du développement correspondent aux différents modèles cités précédemment. Suivant la troncature choisie, on obtient la théorie Love-Kirchhoff, la théorie Reissner-Mindlin ou les modèles d'ordre supérieur (aux coefficients près). Les contraintes de

cisaillement transversal déterminées par le modèle "sinus" prennent une forme cosinusoidale dans l'épaisseur de la plaque. La précision de ce modèle par rapport à la solution exacte est meilleure que la théorie de (Reddy 1984).

Récemment, Afaq et al. (Kamraa 2003 ; Mistou 2003) propose un modèle exponentiel avec une cinématique plus riche.

La fonction de cisaillement transverse est de la forme suivante :

$$f(z) = ze^{-2\left(\frac{z}{h}\right)^2} \quad (\text{III.10})$$

Le choix de la fonction exponentielle permet un développement en puissance pair et impair de la variable  $z$  alors que la fonction "sinus" [Touratier] ne permet qu'un développement en puissances impaires.

L'approche de Aydogdu (Aydogdu 1755) :

$$f(z) = z\alpha^{\frac{-2\left(\frac{z}{h}\right)^2}{\ln(\alpha)}} \quad \alpha > 0 \quad (\text{III.11})$$

$h$  : étant l'épaisseur de la plaque FGM.

Il faut remarquer que les modèles issus d'une approche monocouche équivalente pressentent des contraintes de cisaillement transverse discontinues aux interfaces si les couches ont des propriétés différentes, même si la continuité du champ de déformation est assurée. Ceci présente un inconvénient sérieux lors de l'analyse locale à l'interface des structures multicouches (effets de bord sur les contraintes, délaminage . . .).mais pour le cas des matériaux FGM cette approche paraît très appropriée, du fait que la variation des propriétés se fait continuellement selon l'épaisseur.

### III.2.2. Approche par couche

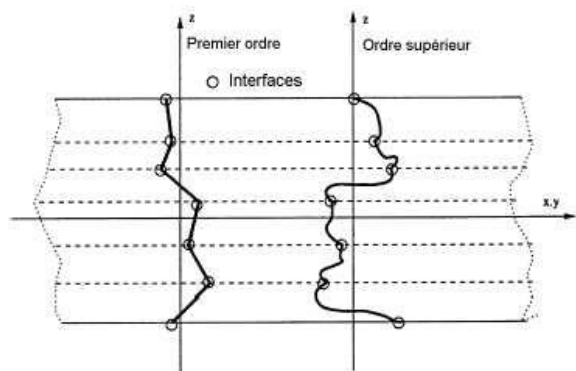
Ces approches sont destinées justement à mieux décrire les effets d'interface pour les matériaux composites conventionnels. La Figure.II.20.a et les Equations (II.3) et (II.4) montrent aussi que cette approche est applicable pour les matériaux FGM. Ainsi différents modèles issus de l'approche par couche ont été proposés (Chabot 1987 ; Afaq 2003 ; karma 2003 ; Reddy 1984). Di

Sciuva 1987. Le multicouche est subdivise en sous structures (correspondant en fait à chaque couche ou chaque ensemble de couches). On applique à chaque sous structure une théorie du premier ordre ou un modèle d'ordre supérieur, imposant un champ de déplacement vérifiant la continuité aux interfaces entre les différentes couches. Les modèles de ce type sont relativement coûteux (l'ordre des équations de comportement dépend du nombre de couche), mais ils permettent l'obtention de résultats plus précis, notamment en ce qui concerne le calcul des contraintes hors plan.

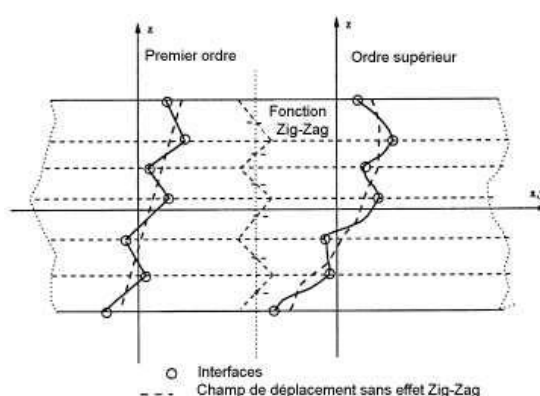
D'une manière générale, les modèles issus de l'approche par couche peuvent être classes en deux groupes :

les modèles couches discrètes ou chaque couche est considérée comme une plaque en imposant les conditions de continuité en déplacements ou en contraintes aux interfaces.

les modèles zig-zag ou la cinématique satisfait à priori les conditions de contact est indépendante du nombre de couches. (Figures. III.5 et III.6).



**Figure. III.5 :** Champs de déplacements des modèles couches discrètes, approche cinématique. ( Viet.Tung 2004)

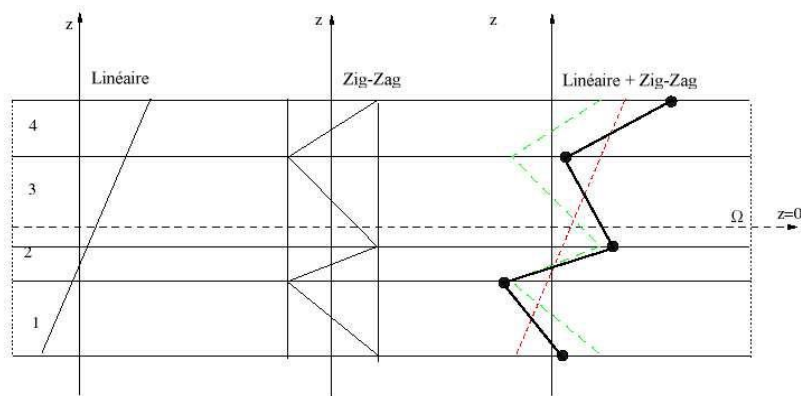


**Figure. III.6 :** Champs de déplacements des modèles zig-zag, approche cinématique. (Viet.Tung 2004)

### III.2.2.1. Les modèles zig-zag

Afin de réduire le nombre de paramètres inconnus, Di Sciuva est le premier à proposer le modèle zig-zag du premier ordre (Reddy 1984). Dans ce modèle, les déplacements membranaires sont les résultats de la superposition du champ de déplacement global d'une théorie du premier ordre et d'une fonction zig-zag (avec l'emploi de la fonction d'Heaviside). La fonction zig-zag donne une contribution des déplacements membranaires qui est continue en  $z$  mais sa dérivée première est discontinue à l'interface (voir Figure. III.7). Les déformations transversales sont donc discontinues et la continuité des contraintes de cisaillement transverse aux interfaces est assurée.

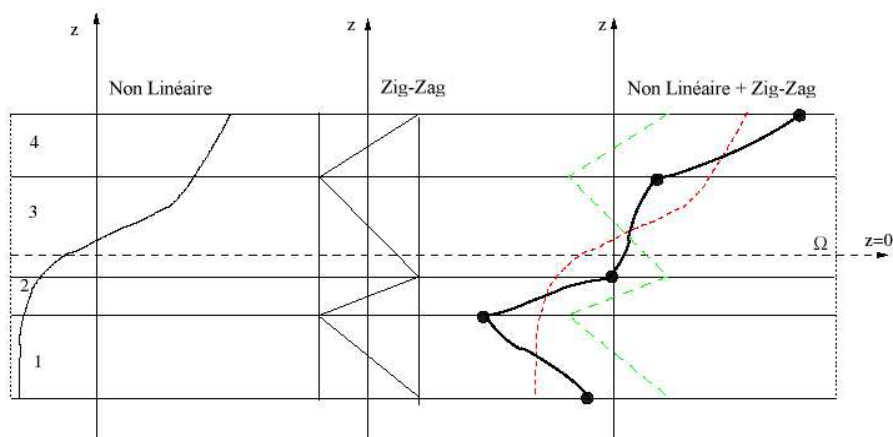




**Figure. III.7 :** Champs de déplacements des modèles zig-zag du premier ordre. (Viet.Tung 2004).

L'avantage principal du champ de déplacement des modèles zig-zag réside dans la bonne modélisation de la distorsion de la normale de la surface déformée, ainsi que dans la vérification des conditions de continuité, et ce sans augmenter pour autant le nombre et l'ordre des équations fondamentales de la théorie du premier ordre. Le recours à des coefficients de correction pour le cisaillement transverse est évité.

En se basant sur le concept de (Di Sciuva 1984) ,plusieurs auteurs ont réalisé des améliorations significatives pour le modèle zig-zag (Viet.Tung 2004). L'amélioration principale est l'introduction d'une distribution non linéaire des déplacements. On superpose le champ zig-zag (linéaire par morceau) à un champ de déplacement d'ordre supérieur (souvent cubique) (voir Figure.III.8). Les conditions de compatibilité sont satisfaites sur les surfaces supérieure et inférieure des plaques pour réduire le nombre de paramètres.



**Figure. III.8 :** Champs de déplacements des modèles zig-zag d'ordre supérieur (Viet.Tung 2004) .

Dans les travaux de (Di Sciuva 1984 ; Karama 1998) , la fonction sinus de (Touratier 1991) est combiné avec la fonction zig-zag pour raffiner les effets de cisaillement.

Récemment, Afaq et al (Karama 2003 ; Mistou 2003) combine le modèle exponentiel avec l'effet zig-zag pour une cinématique plus riche.

Les résultats numériques de tous ces travaux montrent que le modèle zig-zag assure un bon compromis entre la précision des solutions et le cout de calcul. Néanmoins, les modèles zig-zag ont des limites de validation dans l'analyse du délaminage. En effet rien de physique ne pousse à penser que ces modèles quelque peut artificiels peuvent prévoir les délaminages, par exemple. Le calcul des contraintes de cisaillement transverse par les équations constitutives des modèles zig-zag devient moins précis quand le rapport d'élanement diminue (Icardi 2001). Un autre inconvénient des modèles zig-zag, tout comme pour les modèles d'ordre supérieur est la continuité de type  $C^1$  demandée qui complique leur implémentation numérique.

### III.2.2.2. Les modèles couches discrètes

Les modèles couches discrètes adoptent une approximation plus fine des champs suivant l'épaisseur du multicouche que les modèles de plaque d'ordre supérieur ou zig-zag puisqu'ils proposent une cinématique par couche plutôt qu'une cinématique globale (voir Figure. III.5). En fait, avec les modèles couches discrètes, le multicouche est représenté par un ensemble de plaques (objets 2D) couplés par des efforts d'interface. Les conditions de continuité aux interfaces sont assurées. Le nombre de paramètres inconnus dépend du nombre de couche de la plaque composite.

Dans les travaux de (Reddy 1987 ; Tahani 2003 ; Nosier 2003) , on postule une cinématique du premier ordre ou d'ordre supérieur par couche. Les équations fondamentales par couche sont obtenues en utilisant le principe des travaux virtuels. Les conditions aux limites sont également données couche par couche.

D'une manière alternative, les travaux de utilisent une approximation des champs de contraintes par couche ou une mixte contrainte cinématique. Ainsi (Ren 1986) utilise un champ de contrainte dont la composante de cisaillement transversal est quadratique par couche et les déplacements sont considères cubiques par couche et continus aux interfaces. Dans (Kassapoglou 1987 ; Lagace 1987), le champ de contrainte est construit sous la forme d'un produit de fonctions à variables séparées, par couche, à partir de l'équilibre des forces et moments. Les contraintes planes sont supposées constantes suivant l'épaisseur. Dans (Interlaminar 1994), les fonctions de contraintes sont utilisées par couche pour déterminer les contraintes inter laminaires. Elles sont approximées de farçons polynomiale dans l'épaisseur.

Nous passons à présent à une famille de modèles couches discrètes particulières, les modèles multi particulières. Le premier travail semble être celui de Pagano qui propose le modèle local dans (Pagano 1978). Le modèle local a été construit à partir de la formulation variationnelle d'Hellinger-Reissner et d'une approximation polynomiale des champs de contraintes par couche.

Les polynômes sont du premier degré pour les contraintes membranaires, quadratique pour les contraintes de cisaillement et donc cubique pour les contraintes normales.

La formulation variationnelle d'Hellinger-Reissner restreinte aux approximations de ces champs de contraintes conduit à une cinématique du multicouches à  $7n$  champs en  $(x; y)$ ,  $n$  étant le nombre de couches de la plaque. Ces champs cinématiques contiennent des composantes correspondantes à des moments du second ordre qui n'ont pas un sens physique très clair.

La formulation mixte d'Hellinger-Reissner permet de déduire le comportement élastique linéaire généralisé du modèle. Ce modèle pose quelques difficultés au niveau des conditions aux limites et reste assez lourd compte tenu du nombre élevée de champs cinématiques intervenants. Ce modèle a été le point de départ pour un ensemble de travaux menés à l'ENPC dont l'objectif est de proposer une série de simplifications permettant d'alléger tout en conservant un bon niveau de prédictibilité ( Viet.Tung 2004).

**III.3. Conclusion**

Dans ce chapitre on a décrit les différentes théories des plaques à savoir l'approche monocouche équivalente, l'approche par couche.

Nous concluons aussi que l'approche monocouche équivalente est mieux adaptée pour les matériaux FGM car il n'y a pas de changement brusque dans les caractéristiques mécaniques contrairement aux composites conventionnels où le délaminage est un problème à ne pas écarter.

Donc on a eu recours au modèle monocouche équivalent pour les plaques épaisses et les poutres courtes pour différentes théories d'ordre élevé ou la prise en compte du cisaillement transversal est nécessaire pour une étude plus exacte.

## **CHAPITRE IV :**

**ÉTUDE ANALYTIQUE DE LA VIBRATION  
LIBRE DES PLAQUES SANDWICHES POREUSES  
EN FGM SOUS DIVERSES CONDITIONS AUX  
BORDS.**

---

## **Chapitre IV**

### ***Etude analytique de la vibration des plaques sandwichs poreuses en FGM sous diverses conditions aux bords***

#### **IV.1. Introduction**

Les FGM sont des composites avancés non homogènes composés de différentes phases de constituants (généralement la céramique et le métal), à savoir les propriétés matérielles des FGM varient de manière unidirectionnelle (épaisseur ou longueur) ou bidirectionnelle (épaisseur et longueur) progressivement et continuellement en fonction d'une fonction avec la finalité des tâches souhaitées. Les FGM ont des applications complètes dans les domaines de l'aérospatiale, de la médecine, de la défense, de l'énergie, de l'optoélectronique, de l'automobile, de la biotechnologie, de l'aviation, des structures d'ingénierie civile et mécanique (Avcar 2018 ; Sayyad et al. 2019 ; Akbaş 2020).

Les structures sandwichs sont un type spécial de matériaux composites composés d'un noyau à deux couches collées, et elles ont été utilisées dans de nombreux domaines d'ingénierie tels que les structures d'engins spatiaux, d'avions, de chemins de fer et de voitures, les pales d'éoliennes, grâce à leurs propriétés impressionnantes, c'est-à-dire un rapport rigidité/poids élevé (Vinson 2005). Les structures sandwichs pourraient être conçues de différentes manières, dans lesquelles l'utilisation de FGM avancées augmentant de jour en jour en raison des FGM offre une variation douce, progressive et continue des propriétés du matériau d'une surface à l'autre et, de cette manière, augmente les niveaux de contrainte, les fissures de matrice, et l'échec du délaminage peut être éliminé dans les structures sandwichs.

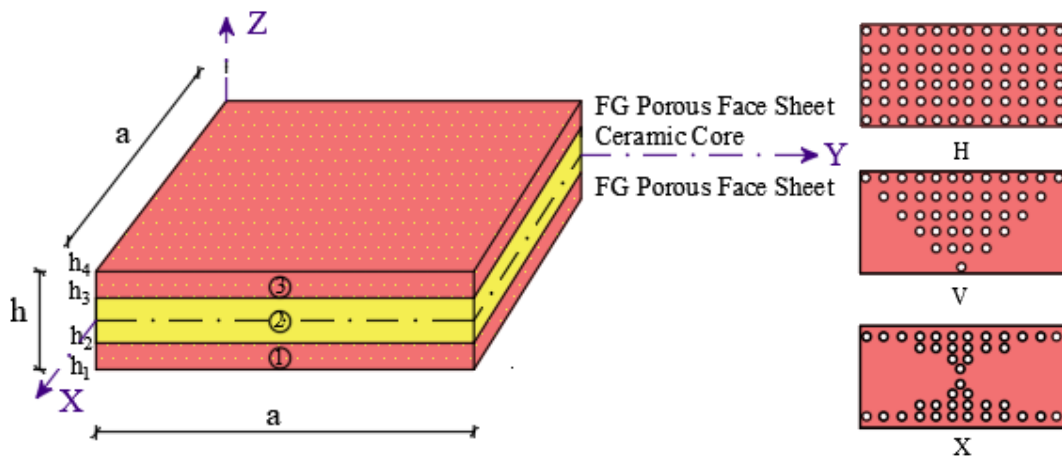
Tout au long de la production des matériaux FGM, certains problèmes techniques tels que la différence de températures de solidification entre les constituants du matériau pendant le frittage et la production d'échantillons de FGM à l'aide d'une technique d'infiltration séquentielle en plusieurs étapes pourraient provoquer des porosités dans les FGM et ainsi les propriétés mécaniques des FGM peuvent changer sensiblement (Zhu et al. 2001). Ainsi, l'effet de la porosité sur les FGM est un problème important et doit être étudié pour la conception sûre des structures FGM. Par conséquent, l'étude du comportement mécanique des structures poreuses en FGM est devenue un sujet brûlant pour les scientifiques ces dernières années.

L'objectif visé dans ce chapitre est de présenter une analyse de la vibration libre des plaques sandwichs carrée avec des peaux poreuses en FGM et un cœur en céramique homogène en tenant

compte de diverses conditions aux bords. Pour ce faire, les propriétés des matériaux de la plaque sandwich sont supposées varier de manière continue dans la direction de l'épaisseur en fonction de la fraction volumique des constituants définie avec la règle de mélange modifiée incluant la fraction volumique de porosité avec trois types différents de distribution de porosité sur la section transversale. De plus, une théorie de cisaillement hyperbolique est utilisée dans la relation cinématique de la plaque sandwich poreuse FGM, et les équations du mouvement sont dérivées en utilisant le principe d'énergie d'Hamilton. Des solutions analytiques sont obtenues pour l'analyse de la vibration libre des plaques sandwichs carrées avec des couches poreuses en FGM dans diverses conditions aux limites, c'est-à-dire que des combinaisons de bords encastrés (C), simplement appuyés et libres (F) sont présentées. Plusieurs études paramétriques sont présentées pour examiner les effets de la fraction volumique de la porosité, du type de modèle de distribution de la porosité, du schéma de stratification, du rapport côté/épaisseur et des conditions aux limites sur la vibration libre des plaques sandwichs FGM.

#### IV.2. Formulation du problème

Considérons une plaque sandwich FGM carrée avec des faces poreuses en FGM et un cœur en céramique homogène, comme le montre la figure IV.1, où  $a$ ,  $b$  et  $h$  montrent les dimensions de la plaque sandwich dans les directions  $X$ ,  $Y$  et  $Z$ , respectivement. Le système de coordonnées cartésiennes  $O(x,y,z)$  est placé sur le bord gauche de l'axe central de la plaque sandwich, les bords sont parallèles aux axes  $x$  et  $y$  et les faces supérieure et inférieure sont situées à  $z = \pm h/2$ .



**Figure IV.1 :** a) Géométrie de la plaque sandwich à faces poreuses FGM et coeur céramique  
b) Les modèles de porosité.

La plaque sandwich est composée de trois couches, d'un cœur en céramique homogène et de deux faces poreuses en FGM. Les propriétés matérielles des peaux varient du métal à la céramique et le cœur en céramique. La fraction volumique des peaux et du cœur varie selon la fonction de loi de puissance à travers l'épaisseur de la plaque sandwich.

$$V^{(1)} = \left( \frac{z - h_1}{h_2 - h_1} \right)^k \quad z \in [h_1, h_2] \quad (\text{IV.1a})$$

$$V^{(2)} = 1 \quad z \in [h_2, h_3] \quad (\text{IV.1b})$$

$$V^{(3)} = \left( \frac{z - h_4}{h_3 - h_4} \right)^k \quad z \in [h_3, h_4] \quad (\text{IV.1c})$$

Où  $h_1$ ,  $h_2$  et  $h_3$  et  $h_4$  sont les valeurs d'épaisseur et indiquées sur la figure 1.  $k$  indique le coefficient de loi de puissance (indice de fraction volumique). Notez que  $k=0$ , les propriétés matérielles de la plaque sandwich se transforment en matériau céramique homogène.

La figure 1b montre trois modèles de distribution différents pour la porosité dans les couches FGM, c'est-à-dire des distributions de porosité homogènes (H), V et X. Selon ces modèles, les propriétés matérielles effectives (P) pour chaque couche sont données comme suit :

Pour une distribution homogène de la porosité :

$$\begin{aligned} P^{(1)}(Z) &= P_m + (P_c - P_m)V^{(1)}(Z) - \frac{\xi}{2}(P_c + P_m) \\ P^{(2)}(Z) &= P_m + (P_c - P_m)V^{(2)}(Z) \\ P^{(3)}(Z) &= P_m + (P_c - P_m)V^{(3)}(Z) - \frac{\xi}{2}(P_c + P_m) \end{aligned} \quad (\text{IV.2})$$

Pour la distribution de porosité X :

$$\begin{aligned} P^{(1)}(Z) &= P_m + (P_c - P_m)V^{(1)}(Z) - \frac{\xi}{2}(P_c + P_m) \left| \frac{2Z - (h_1 + h_2)}{h_1 - h_2} \right| \\ P^{(2)}(Z) &= P_m + (P_c - P_m)V^{(2)}(Z) \\ P^{(3)}(Z) &= P_m + (P_c - P_m)V^{(3)}(Z) - \frac{\xi}{2}(P_c + P_m) \left| \frac{2Z - (h_3 + h_4)}{h_3 - h_4} \right| \end{aligned} \quad (\text{IV.3})$$

Pour la distribution de porosité V :



$$\begin{aligned}
 P^{(1)}(Z) &= P_m + (P_c - P_m)V^{(1)}(Z) - \frac{\xi}{2}(P_c + P_m)\left(\frac{Z - h_2}{h_1 - h_2}\right) \\
 P^{(2)}(Z) &= P_m + (P_c - P_m)V^{(2)}(Z) \\
 P^{(3)}(Z) &= P_m + (P_c - P_m)V^{(3)}(Z) - \frac{\xi}{2}(P_c + P_m)\left(\frac{Z - h_4}{h_3 - h_4}\right)
 \end{aligned} \tag{IV.4}$$

Où  $\xi(\xi < 1)$  désigne la fraction volumique de porosité.

### IV.2.1. Cinématique équations et constitutive

Sur la base de la théorie des plaques d'ordre élevé, le champ de déplacement de la plaque est présenté comme suit (Chikr et al. 2020);

$$\begin{aligned}
 U(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w_b}{\partial x} - f(z) \frac{\partial w_s}{\partial x} \\
 V(x, y, z) &= v_0(x, y) - z \frac{\partial w_b}{\partial y} - f(z) \frac{\partial w_s}{\partial y} \\
 W(x, y, z) &= w_b(x, y) + w_s(x, y)
 \end{aligned} \tag{IV.5}$$

Ou,  $U$ ,  $V$ , et  $W$  sont les déplacements dans les directions  $X$ ,  $Y$  et  $Z$ , respectivement. Notez que, l'Éq. (IV.5) introduit seulement quatre inconnues ( $u_0$ ,  $v_0$ ,  $w_b$  et  $w_s$ ).

Dans l'équation (IV.5),  $f(z)$  est défini en utilisant la théorie de cisaillement des plaques d'ordre élevé comme suit :

$$f(z) = z \left[ 1 + \frac{3\pi}{2} \operatorname{sech} \left( \frac{1}{2} \right)^2 \right] - \frac{3\pi}{2} h \tanh \left( \frac{z}{h} \right) \tag{IV.6}$$

Le champ de déformations se déduit des déplacements de l'équation (IV.5) soit

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} k_x^b \\ k_y^b \\ k_{xy}^b \end{Bmatrix} + f(z) \begin{Bmatrix} k_x^s \\ k_y^s \\ k_{xy}^s \end{Bmatrix} \tag{IV.7}$$

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = g(z) \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^s \\ \gamma_{xz}^s \end{Bmatrix} \quad (IV.8)$$

Ou

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial x} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} k_x^b \\ k_y^b \\ k_{xy}^b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w_b}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \quad (IV.9)$$

$$\begin{Bmatrix} k_x^s \\ k_y^s \\ k_{xy}^s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w_s}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^s \\ \gamma_{xz}^s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial w_s}{\partial y} \\ \frac{\partial w_s}{\partial x} \end{Bmatrix}$$

Et

$$g(z) = 1 - \frac{df(z)}{dz} \quad (IV.10)$$

Pour les FGMs élastiques et isotropes, les relations constitutives peuvent être écrites comme :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ C_{12} & C_{22} & 0 \\ 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (IV.11a)$$

Et

$$\begin{Bmatrix} \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{44} & 0 \\ 0 & C_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} \quad (IV.11b)$$

Où  $(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{yx})$  et  $(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{yx})$  sont les composantes de contraintes et de déformations, respectivement. Les coefficients de rigidité  $C_{ij}$ , peuvent être exprimés comme :

$$C_{11} = C_{22} = \frac{E(z)}{1-\nu^2}, \quad (\text{IV.12a})$$

$$C_{12} = \frac{\nu E(z)}{1-\nu^2}, \quad (\text{IV.12b})$$

$$C_{44} = C_{55} = C_{66} = \frac{E(z)}{2(1+\nu)}, \quad (\text{IV.12c})$$

#### **IV.2.2. Equations gouvernantes**

Les équations du mouvement peuvent être déterminées en utilisant le principe de Hamilton comme

$$0 = \int_0^t \delta(U - T) dt \quad (\text{IV.13})$$

Où  $\delta U$  et  $\delta T$  sont les variations de l'énergie de déformation et d'énergie cinétique de la plaque sandwich respectivement. La variation de l'énergie de déformation de la plaque sandwich est donnée par :

$$\begin{aligned} \delta U &= \int_V \left[ \sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz} + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz} \right] dV \\ &= \int_A \left[ N_x \delta \varepsilon_x^0 + N_y \delta \varepsilon_y^0 + N_{xy} \delta \gamma_{xy}^0 + M_x^b \delta k_x^b + M_y^b \delta k_y^b + M_{xy}^b \delta k_{xy}^b \right. \\ &\quad \left. + M_x^s \delta k_x^s + M_y^s \delta k_y^s + M_{xy}^s \delta k_{xy}^s + S_{yz}^s \delta \gamma_{yz}^s + S_{xz}^s \delta \gamma_{xz}^s \right] dA = 0 \end{aligned} \quad (\text{IV.14})$$

Où les forces et moments résultants sont donnés comme :

$$\begin{aligned}
 (N_x, N_y, N_{xy}) &= \sum_{n=1}^3 \int_{h_n}^{h_{n+1}} (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) dz \\
 (M_x^b, M_y^b, M_{xy}^b) &= \sum_{n=1}^3 \int_{h_n}^{h_{n+1}} (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) z dz \\
 (M_x^s, M_y^s, M_{xy}^s) &= \sum_{n=1}^3 \int_{h_n}^{h_{n+1}} (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) f dz \\
 (S_{xz}^s, S_{yz}^s) &= \sum_{n=1}^3 \int_{h_n}^{h_{n+1}} (\tau_{xz}, \tau_{yz}) g dz
 \end{aligned} \tag{IV.15}$$

La variation de l'énergie cinétique de la plaque sandwich peut être exprimée comme :

$$\begin{aligned}
 \delta T &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_{\Omega} [\dot{u} \delta \dot{u} + \dot{v} \delta \dot{v} + \dot{w} \delta \dot{w}] \rho(z) d\Omega dz \\
 &= \int_A \left\{ I_0 [\dot{u}_0 \delta \dot{u}_0 + \dot{v}_0 \delta \dot{v}_0 + (\dot{w}_b + \dot{w}_s)(\delta \dot{w}_b + \delta \dot{w}_s)] \right. \\
 &\quad - I_1 \left( \dot{u}_0 \frac{\partial \delta \dot{w}_b}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}_b}{\partial x} \delta \dot{u}_0 + \dot{v}_0 \frac{\partial \delta \dot{w}_b}{\partial y} + \frac{\partial \dot{w}_b}{\partial y} \delta \dot{v}_0 \right) \\
 &\quad - I_2 \left( \dot{u}_0 \frac{\partial \delta \dot{w}_s}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}_s}{\partial x} \delta \dot{u}_0 + \dot{v}_0 \frac{\partial \delta \dot{w}_s}{\partial y} + \frac{\partial \dot{w}_s}{\partial y} \delta \dot{v}_0 \right) \\
 &\quad + J_1 \left( \frac{\partial \dot{w}_b}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{w}_b}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}_b}{\partial y} \frac{\partial \delta \dot{w}_b}{\partial y} \right) + K_2 \left( \frac{\partial \dot{w}_s}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{w}_s}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}_s}{\partial y} \frac{\partial \delta \dot{w}_s}{\partial y} \right) \\
 &\quad \left. + J_2 \left( \frac{\partial \dot{w}_b}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{w}_s}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}_s}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{w}_b}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}_b}{\partial y} \frac{\partial \delta \dot{w}_s}{\partial y} + \frac{\partial \dot{w}_s}{\partial y} \frac{\partial \delta \dot{w}_b}{\partial y} \right) \right\} dA
 \end{aligned} \tag{IV.16}$$

Ou  $(.)$  représente la dérivée par rapport au variable temps  $t$  ;  $\rho(z)$  est la densité de masse, et  $(I_i, J_i, K_i)$  sont les inerties massiques défini par :

$$(I_0, I_1, I_2) = \int_{-h/2}^{h/2} (1, z, z^2) \rho(z) dz \tag{IV.17a}$$

$$(J_1, J_2, K_2) = \int_{-h/2}^{h/2} (f, z f, f^2) \rho(z) dz \tag{IV.17b}$$

Les expressions suivantes sont obtenues après substitution des Eqs. (IV.14) et (IV.16) dans l'équation (IV.13)

$$\begin{aligned}
 \delta u_0 : \quad & \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = I_0 \ddot{u}_0 - I_1 \frac{\partial \ddot{w}_b}{\partial x} - J_1 \frac{\partial \ddot{w}_s}{\partial x} \\
 \delta v_0 : \quad & \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} = I_0 \ddot{v}_0 - I_1 \frac{\partial \ddot{w}_b}{\partial y} - J_1 \frac{\partial \ddot{w}_s}{\partial y} \\
 \delta w_b : \quad & \frac{\partial^2 M_x^b}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^b}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^b}{\partial y^2} = I_0 (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) + I_1 \left( \frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} + \frac{\partial \ddot{v}_0}{\partial y} \right) - I_2 \nabla^2 \ddot{w}_b - J_2 \nabla^2 \ddot{w}_s \\
 \delta w_s : \quad & \frac{\partial^2 M_x^s}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^s}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^s}{\partial y^2} + \frac{\partial S_{xz}^s}{\partial x} + \frac{\partial S_{yz}^s}{\partial y} = I_0 (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) + J_1 \left( \frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} + \frac{\partial \ddot{v}_0}{\partial y} \right) - J_2 \nabla^2 \ddot{w}_b - K_2 \nabla^2 \ddot{w}_s
 \end{aligned} \tag{IV.18}$$

En remplaçant les équations. (IV.7), (IV.8) dans l'équation (IV.11) et les résultats ultérieurs dans les équations. (IV.15), les résultantes des contraintes sont obtenues en termes de déformations sous la forme compacte suivante :

$$\begin{Bmatrix} N \\ M^b \\ M^s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B & B^s \\ B & D & D^s \\ B^s & D^s & H^s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon \\ k^b \\ k^s \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} S_{yz}^s \\ S_{xz}^s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{44}^s & 0 \\ 0 & A_{55}^s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^s \\ \gamma_{xz}^s \end{Bmatrix} \tag{IV.19}$$

Où

$$N = \{N_x, N_y, N_{xy}\}^t, \quad M^b = \{M_x^b, M_y^b, M_{xy}^b\}^t, \tag{IV.20a}$$

$$M^s = \{M_x^s, M_y^s, M_{xy}^s\}^t$$

$$\varepsilon = \{\varepsilon_x^0, \varepsilon_y^0, \gamma_{xy}^0\}, \quad k^b = \{k_x^b, k_y^b, k_{xy}^b\}, \tag{IV.20b}$$

$$\begin{aligned}
 k^s &= \{k_x^s, k_y^s, k_{xy}^s\} \\
 A &= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 \\ B_{12} & B_{22} & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} \end{bmatrix}, \tag{IV.20c}
 \end{aligned}$$

$$D = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix},$$

$$B^s = \begin{bmatrix} B_{11}^s & B_{12}^s & 0 \\ B_{12}^s & B_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & B_{66}^s \end{bmatrix}, \quad D^s = \begin{bmatrix} D_{11}^s & D_{12}^s & 0 \\ D_{12}^s & D_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & D_{66}^s \end{bmatrix}, \quad H^s = \begin{bmatrix} H_{11}^s & H_{12}^s & 0 \\ H_{12}^s & H_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & H_{66}^s \end{bmatrix} \tag{IV.20d}$$

Ou Les composantes de rigidité  $A_{ij}$ ,  $B_{ij}$ , etc , sont définis comme :

$$\begin{Bmatrix} A_{11} & B_{11} & D_{11} & B_{11}^s & D_{11}^s & H_{11}^s \\ A_{12} & B_{12} & D_{12} & B_{12}^s & D_{12}^s & H_{12}^s \\ A_{66} & B_{66} & D_{66} & B_{66}^s & D_{66}^s & H_{66}^s \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} C_{11} \left( 1, z, z^2, f(z), z f(z), f^2(z) \right) \begin{Bmatrix} 1 \\ \nu \\ \frac{1-\nu}{2} \end{Bmatrix} dz$$

$$(A_{22}, B_{22}, D_{22}, B_{22}^s, D_{22}^s, H_{22}^s) = (A_{11}, B_{11}, D_{11}, B_{11}^s, D_{11}^s, H_{11}^s) \quad (\text{IV.21})$$

$$A_{44}^s = A_{55}^s = \int_{-h/2}^{h/2} C_{44} [g(z)]^2 dz,$$

Équations (IV.18) peuvent être exprimées en termes des déplacements  $(u_0, v_0, w_b, w_s)$  en remplaçant les forces résultantes de l'équation (IV.19). Pour la plaque de FGM, les équations d'équilibre (IV.18) prennent la forme :

$$A_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + A_{66} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} - B_{11} \frac{\partial^3 w_b}{\partial x^3} - (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 w_b}{\partial x \partial y^2} - B_{11}^s \frac{\partial^3 w_s}{\partial x^3} - (B_{12}^s + 2B_{66}^s) \frac{\partial^3 w_s}{\partial x \partial y^2} = I_0 \ddot{u}_0 - I_1 \frac{\partial \ddot{w}_b}{\partial x} - J_1 \frac{\partial \ddot{w}_s}{\partial x},$$

$$(A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + A_{66} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + A_{22} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} - (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 w_b}{\partial x^2 \partial y} - B_{22} \frac{\partial^3 w_b}{\partial y^3} - B_{22}^s \frac{\partial^3 w_s}{\partial y^3} - (B_{12}^s + 2B_{66}^s) \frac{\partial^3 w_s}{\partial x^2 \partial y} = I_0 \ddot{v}_0 - I_1 \frac{\partial \ddot{w}_b}{\partial y} - J_1 \frac{\partial \ddot{w}_s}{\partial y},$$

(IV.22)

$$B_{11} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} + B_{22} \frac{\partial^3 v}{\partial y^3} - D_{11} \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^4} - 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^2 \partial y^2} - D_{22} \frac{\partial^4 w_b}{\partial y^4} - D_{11}^s \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^4} - 2(D_{12}^s + 2D_{66}^s) \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^2 \partial y^2} - D_{22}^s \frac{\partial^4 w_s}{\partial y^4} = I_0 (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) + I_1 \left( \frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} + \frac{\partial \ddot{v}_0}{\partial y} \right) - I_2 \nabla^2 \ddot{w}_b - J_2 \nabla^2 \ddot{w}_s,$$

$$B_{11}^s \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + (B_{12}^s + 2B_{66}^s) \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + (B_{12}^s + 2B_{66}^s) \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} + B_{22}^s \frac{\partial^3 v}{\partial y^3} - D_{11} \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^4} - 2(D_{12}^s + 2D_{66}^s) \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^2 \partial y^2} - D_{22}^s \frac{\partial^4 w_b}{\partial y^4} - H_{11}^s \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^4} - 2(H_{12}^s + 2H_{66}^s) \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^2 \partial y^2} - H_{22}^s \frac{\partial^4 w_s}{\partial y^4} + A_{55}^s \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} + A_{44}^s \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} = I_0 (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) + J_1 \left( \frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} + \frac{\partial \ddot{v}_0}{\partial y} \right) - J_2 \nabla^2 \ddot{w}_b - K_2 \nabla^2 \ddot{w}_s$$

Il est clair, lorsque l'effet de cisaillement de déformation transversale est négligé, l'équation. (IV.22) donne les équations du mouvement de la plaque FGM de la théorie classique CPT.

### IV.2.3. La solution du problème

La solution exacte des équations. (IV.22) pour la plaque sandwich poreuse en FGM sous diverses conditions aux bords peuvent être construits. Les conditions aux limites pour un bord arbitraire avec des conditions de bord simplement appuyées et encastrées sont :

- Encastré (C)

$$u_0 = v_0 = w_b = \partial w_b / \partial x = \partial w_b / \partial y = w_s = \partial w_s / \partial x = \partial w_s / \partial y = 0 \text{ à } x = 0 \text{ et } y = 0, b \quad (\text{IV.23})$$

- Simplement appuyé (S)

$$v_0 = w_b = \partial w_b / \partial y = w_s = \partial w_s / \partial y = 0 \text{ à } x = 0, a \quad (\text{IV.24a})$$

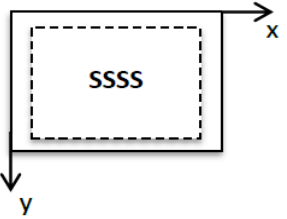
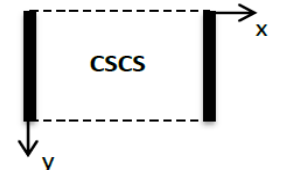
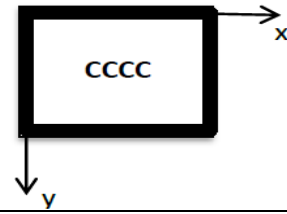
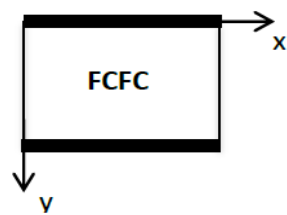
$$u_0 = w_b = \partial w_b / \partial x = w_s = \partial w_s / \partial x = 0 \text{ à } y = 0, b \quad (\text{IV.24b})$$

Dans le présent problème, les expressions suivantes sont considérées pour les déplacements qui satisfont les conditions aux limites considérées

$$\begin{cases} u_0 \\ v_0 \\ w_b \\ w_s \end{cases} = \begin{cases} U_{mn} \frac{\partial X_m(x)}{\partial x} Y_n(y) e^{i\omega t} \\ V_{mn} X_m(x) \frac{\partial Y_n(y)}{\partial y} e^{i\omega t} \\ W_{bmn} X_m(x) Y_n(y) e^{i\omega t} \\ W_{smn} X_m(x) Y_n(y) e^{i\omega t} \end{cases} \quad (\text{IV.25})$$

Où  $U_{mn}$ ,  $V_{mn}$ ,  $W_{bmn}$ , et  $W_{smn}$  sont des paramètres à déterminer, et  $\omega$  est la fréquence propre associée au  $(m, n)$  nième mode propre. Les fonctions suggérées  $X_m(x)$  et  $Y_n(y)$  satisfont les conditions aux limites géométriques données dans les équations. (IV.24) et (IV.24) et désignent des formes approximatives de la surface déviée de la plaque sandwich. Les fonctions admissibles pour différents cas de conditions aux limites sont présentées dans le tableau IV.1, où  $\lambda = m\pi/a$  et  $\mu = n\pi/b$ .

**Tableau IV.1 :** Les fonctions admissibles pour différentes conditions aux limites (Sobhy 2013)

Conditions aux bords	$x = 0$	$y = 0$	$x = a$	$y = b$	$X_m(x)$	$Y_n(y)$
	S	S	S	S	$\sin(\lambda x)$	$\sin(\mu y)$
	C	S	C	S	$\sin^2(\lambda x)$	$\sin(\mu y)$
	C	C	C	C	$\sin^2(\lambda x)$	$\sin^2(\mu y)$
	F	C	F	C	$\cos^2(\lambda x) [\sin^2(\lambda x) + 1]$	$\sin^2(\mu y)$

En remplaçant l'équation. (IV.25) dans les équations. (IV.22), puis en multipliant chaque équation avec la fonction propre appropriée et en intégrant sur le domaine de la solution, après quelques réarrangements mathématiques, les solutions analytiques peuvent être obtenues à partir des équations suivantes :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{pmatrix} - \omega^2 \begin{pmatrix} m_{11} & 0 & m_{13} & m_{14} \\ 0 & m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{34} \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & m_{44} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} U_{mn} \\ V_{mn} \\ W_{mn} \\ X_{mn} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{IV.26})$$

Dans lesquelles :

$$\begin{aligned} a_{11} &= A_{11}\alpha_{12} + A_{66}\alpha_8, & a_{12} &= (A_{12} + A_{66})\alpha_8, & a_{13} &= -B_{11}\alpha_{12} - (B_{12} + 2B_{66})\alpha_8, & a_{14} &= -(B_{12}^s + 2B_{66}^s)\alpha_8 - B_{11}^s\alpha_{12} \\ a_{21} &= (A_{12} + A_{66})\alpha_{10}, & a_{22} &= A_{22}\alpha_4 + A_{66}\alpha_{10}, & a_{23} &= -B_{22}\alpha_4 - (B_{12} + 2B_{66})\alpha_{10}, & a_{24} &= -(B_{12}^s + 2B_{66}^s)\alpha_{10} - B_{22}^s\alpha_4 \\ a_{31} &= B_{11}\alpha_{13} + (B_{12} + 2B_{66})\alpha_{11}, & a_{32} &= (B_{12} + 2B_{66})\alpha_{11} + B_{22}\alpha_5, & a_{33} &= -D_{11}\alpha_{13} - 2(D_{12} + 2D_{66})\alpha_{11} - D_{22}\alpha_5, & & \\ a_{34} &= -D_{11}^s\alpha_{13} - 2(D_{12}^s + 2D_{66}^s)\alpha_{11} - D_{66}^s\alpha_5 \end{aligned} \quad (\text{IV.27})$$



$$\begin{aligned}
 a_{41} &= B_{11}^s \alpha_{13} + (B_{12}^s + 2B_{66}^s) \alpha_{11}, \quad a_{42} = (B_{12}^s + 2B_{66}^s) \alpha_{11} + B_{22}^s \alpha_5, \quad a_{43} = -D_{11}^s \alpha_{13} - 2(D_{12}^s + 2D_{66}^s) \alpha_{11} - D_{22}^s \alpha_5 \\
 a_{44} &= -H_{11}^s \alpha_{13} - 2(H_{12}^s + 2H_{66}^s) \alpha_{11} - H_{22}^s \alpha_5 + A_{44}^s \alpha_9 + A_{55}^s \alpha_3 \\
 m_{11} &= -I_0 \alpha_6, \quad m_{13} = -I_1 \alpha_6, \quad m_{14} = J_1 \alpha_6 \\
 m_{22} &= -I_0 \alpha_2, \quad m_{23} = I_1 \alpha_2, \quad m_{24} = J_1 \alpha_2 \\
 m_{31} &= -I_1 \alpha_9, \quad m_{32} = -I_1 \alpha_3, \quad m_{33} = -I_0 \alpha_1 + I_2 (\alpha_3 + \alpha_9), \quad m_{34} = -I_0 \alpha_1 + J_2 (\alpha_3 + \alpha_9) \quad (\text{IV.28}) \\
 m_{41} &= -J_1 \alpha_9, \quad m_{42} = -J_1 \alpha_3, \quad m_{44} = -I_0 \alpha_1 + K_2 (\alpha_3 + \alpha_9)
 \end{aligned}$$

Ou

$$\begin{aligned}
 (\alpha_1, \alpha_3, \alpha_5) &= \int_0^b \int_0^a (X_m Y_n, X_m Y_n'', X_m Y_n''') X_m Y_n dx dy, \quad (\alpha_2, \alpha_4, \alpha_{10}) = \int_0^b \int_0^a (X_m Y_n', X_m Y_n'', X_m Y_n''') X_m Y_n' dx dy \\
 (\alpha_6, \alpha_8, \alpha_{12}) &= \int_0^b \int_0^a (X_m' Y_n, X_m' Y_n'', X_m''' Y_n) X_m' Y_n dx dy \quad (\text{IV.29}) \\
 (\alpha_7, \alpha_9, \alpha_{11}, \alpha_{13}) &= \int_0^b \int_0^a (X_m' Y_n', X_m'' Y_n, X_m' Y_n'', X_m''' Y_n) X_m Y_n dx dy
 \end{aligned}$$

La solution non triviale est obtenue comme déterminant de l'équation. (IV.26) est égal à zéro.

### **IV.3. Conclusion**

Dans ce chapitre, l'analyse de la vibration libre d'une plaque sandwich carrée avec des peaux poreuses en FGM et un cœur homogène isotrope est analysée en tenant compte de diverses conditions aux bords. Pour ce faire, les propriétés des matériaux de la plaque sandwich sont supposées varier en continu dans la direction de l'épaisseur en fonction de la fraction volumique des constituants définie avec la règle modifiée du mélange comprenant la fraction volumique de porosité avec trois différents forme de distribution de porosité sur la section transversale. De plus, une théorie de déplacement de cisaillement hyperbolique est utilisée dans la relation cinématique de la plaque sandwich poreuse en FGM, et les équations du mouvement sont dérivées en utilisant le principe de Hamilton. Des solutions analytiques sont obtenues pour l'analyse vibratoire des plaques sandwichs carrées avec des couches poreuses en FGM dans diverses conditions aux limites.

## **CHAPITRE V:**

# **VALIDATION ET COMPARAISON DES RÉSULTATS.**

---

## Chapitre V

### Validation et comparaison des résultats

#### V.1. Introduction

Ce chapitre vise à mettre en évidence la nouvelle théorie de déformation de cisaillement hyperbolique des plaques développé dans le chapitre précédent. La théorie proposée contient quatre inconnues et quatre équations gouvernantes, par ailleurs elle vérifie les conditions limites sans contraintes sur les surfaces supérieure et inférieure de la plaque sandwich poreuse, sans tenir compte du facteur de correction de cisaillement. Dans ce contexte, l'étude de la réponse mécanique sera réalisée pour l'analyse de la vibration libre des plaques sandwichs poreuses en matériaux fonctionnellement gradués FGM sous diverses conditions aux bords, en considérant les porosités qui peuvent se produire à l'intérieur des matériaux en cours de leur fabrication. L'effet de la forme de distribution de la porosité est également étudié. Dans les exemples numériques, les effets des paramètres de porosité, le type de porosité, l'indice matériel, les conditions aux bords et les paramètres de géométrie de la plaque sur la vibration libre des plaques sandwichs poreuses en FGM sous diverses conditions aux bords sont étudiés.

Pour la plaque sandwich poreuse en FGM les propriétés matérielles utilisées dans la présente étude sont :

- Céramique (Alumine,  $Al_2O_3$ )  $E_c = 380GPa$ ,  $\nu = 0.3$  et  $\rho_c = 3800kg/m^3$ .
- Métal (Aluminium,  $Al$ )  $E_m = 380GPa$ ,  $\nu = 0.3$  et  $\rho_c = 2707kg/m^3$ .

Les résultats numériques sont présentés en termes de fréquences non dimensionnelles.

Le paramètre de fréquence naturelle non dimensionnel est défini comme :

$$\bar{\omega} = \frac{\omega a^2}{h} \sqrt{\frac{\rho_0}{E_0}} \quad (V.1)$$

Où  $\rho_0 = 1kg/m^3$ , et  $E_0 = 1GPa$ .

Les schémas de stratification suivants sont pris en compte pour la plaque sandwich poreuse en FGM.

Schéma (1-0-1) : La plaque sandwich a deux couches de face d'épaisseur égale alors qu'elle ne comprend pas de cœur :  $h_1=h_3=h/2$ ,  $h_2=0$ .

Schéma (1-1-1) : La plaque sandwich a trois couches d'égale épaisseur :  $h_1=h_2=h_3=h/3$

Schéma (1-2-1) : La plaque sandwich a une couche centrale avec le double de l'épaisseur des couches de face :  $h_1=h_3=h/4$ ,  $h_2=h/2$ .

Schéma (2-1-2) : La plaque sandwich a une couche centrale avec la moitié de l'épaisseur des couches de face :  $h_1=h_3=2h/5$ ,  $h_2=h/5$ .

Schéma (2-2-1) : La plaque sandwich a une couche centrale avec le double de la couche de face supérieure tandis que la même que l'inférieure  $h_1=h_2=2h/5$ ,  $h_3=h/5$ .

## V.2. Études de comparaison

### V.2.1. Comparaison 1

Pour la validation des résultats, trois études comparatives sont réalisées. Le tableau V.1 montre la variation des fréquences fondamentales de la plaque sandwich carrée en FGM avec des conditions aux limites SSSS pour différents schémas de superposition et l'indice de loi de puissance  $k$  et comparé aux résultats de Zenkour (Zenkour 2005) utilisant la théorie de cisaillement sinusoïdale (SSDPT), la théorie de cisaillement parabolique des plaques (TSDPT) et la théorie de cisaillement de premier ordre (FSDPT), Li *et al.* (2008) basé sur la solution tridimensionnelle (3D), El Meiche *et al.* (2011) basé sur la théorie de la plaque de cisaillement hyperbolique (HSDPT), et Thai *et al.* (2014) basé sur la théorie de cisaillement de premier ordre (FSDPT) avec  $a/h=10$ . Comme le montre le tableau V.1 les résultats de la présente théorie sont en bon accord avec ceux publiés précédemment. En outre, comme la présente théorie ne comprend que quatre inconnues contrairement aux cinq inconnues du SSDPT, TSDPT et FSDPT rendent la présente formulation plus importante.

**Tableau V.1 :** Comparaison des fréquences fondamentales sans dimension de la plaque carrée sandwich en FGM en fonction de l'indice de loi de puissance  $k$  ( $a/h=10$ ).

$k$	Théories	Schéma				
		1-0-1	2-1-2	1-1-1	2-2-1	1-2-1
0	3D (Li <i>et al.</i> 2008 )	1.8268	1.8268	1.8268	1.8268	1.8268
	HSDT (El Meiche <i>et al.</i> 2011)	1.8245	1.8245	1.8245	1.8245	1.8245
	SSDPT (Zenkour 2005 )	1.8245	1.8245	1.8245	1.8245	1.8245
	TSDPT (Zenkour 2005 )	1.8245	1.8245	1.8245	1.8245	1.8245
	FSDPT (Zenkour 2005 )	1.8244	1.8244	1.8244	1.8244	1.8244
	FSDPT (Thai 2014)	1.8244	1.8244	1.8244	1.8244	1.8244
	Présente	1.8245	1.8245	1.8245	1.8245	1.8245
	3D (Li <i>et al.</i> 2008 )	1.4461	1.4861	1.5213	1.5493	1.5767
	HSDT (El Meiche <i>et al.</i> 2011)	1.4442	1.4841	1.5192	1.5471	1.5746
	SSDPT (Zenkour 2005 )	1.4444	1.4842	1.5193	1.5520	1.5745
0.5	TSDPT (Zenkour 2005 )	1.4442	1.4841	1.5192	1.5520	1.5727
	FSDPT (Zenkour 2005 )	1.4417	1.4816	1.5170	1.5500	1.5727
	FSDPT (Thai 2014)	1.4442	1.4841	1.5192	1.5471	1.5745
	Présente	1.4447	1.4844	1.5195	1.5474	1.5747
	3D (Li <i>et al.</i> 2008 )	1.2447	1.3018	1.3552	1.3976	1.4414
	HSDT (El Meiche <i>et al.</i> 2011)	1.2431	1.3000	1.3533	1.3956	1.4394
	SSDPT (Zenkour 2005 )	1.2434	1.3002	1.3534	1.4079	1.4393
	TSDPT (Zenkour 2005 )	1.2432	1.3001	1.3533	1.4079	1.4393
	FSDPT (Zenkour 2005 )	1.2403	1.2973	1.3507	1.4056	1.4372
	FSDPT (Thai 2014)	1.2429	1.3000	1.3533	1.3956	1.4393
1	Présente	1.2438	1.3006	1.3537	1.3959	1.4396
	3D (Li <i>et al.</i> 2008 )	0.9448	0.9810	1.0453	1.1098	1.1757
	HSDT (El Meiche <i>et al.</i> 2011)	0.9457	0.9817	1.0446	1.1088	1.1740
	SSDPT (Zenkour 2005 )	0.9463	0.9821	1.0448	1.1474	1.1740
	TSDPT (Zenkour 2005 )	0.9460	0.9818	1.0447	1.1473	1.1740
	FSDPT (Zenkour 2005 )	0.9426	0.9787	1.0418	1.1447	1.1716
	FSDPT (Thai 2014)	0.9431	0.9796	1.0435	1.1077	1.1735
	Présente	0.9469	0.9825	1.0452	1.1095	1.1744
	3D (Li <i>et al.</i> 2008 )	0.9273	0.9408	0.9952	1.0610	1.1247
	HSDT (El Meiche <i>et al.</i> 2011)	0.9281	0.9428	0.9954	1.0608	1.1231
5	SSDPT (Zenkour 2005 )	0.9288	0.9433	0.9952	1.0415	1.1346
	TSDPT (Zenkour 2005 )	0.9284	0.9430	0.9955	1.1053	1.1231
	FSDPT (Zenkour 2005 )	0.9251	0.9396	0.9926	1.1026	1.1207
	FSDPT (Thai 2014)	0.9246	0.9390	0.9932	1.0587	1.1223
	Présente	0.9294	0.9437	0.9961	1.0616	1.1236

## V.2.2. Comparaison 2

Les tableaux V.2 et V.3 présentent la variation des fréquences fondamentales sans dimension de la plaque sandwich carrée en FGM avec des conditions aux bords SSSS en fonction des différents schémas de superposition et de l'indice de loi de puissance  $k$ . Ici le rapport côté sur épaisseur pris  $a/h=5$  ainsi que deux cas de plaques sandwich FGM sont considérés : un sandwich avec cœur en céramique (cœur rigide) dans le tableau V.2 et un sandwich avec cœur souple (cœur souple) dans le tableau V.3. Les fréquences fondamentales sans dimension sont comparées aux solutions exactes 3D de Li *et al.* (2008) et la théorie de cisaillement de premier ordre (FSDPT) de Thai *et al.* (2014). D'après les résultats présentés dans les tableaux V.2 et V.3, un bon accord entre les résultats de la présente théorie et les autres théories de cisaillement existantes dans la littérature.

**Tableau V.2 :** Comparaison des fréquences fondamentales sans dimension du sandwich carré en FGM avec cœur rigide en fonction de l'indice de loi de puissance  $k$ . ( $a/h=5$ ).

$k$	Résultats	Schéma				
		1-0-1	2-1-2	1-1-1	2-2-1	1-2-1
0	3D (Li <i>et al.</i> 2008)	1.6771	1.6771	1.6771	1.6771	1.6771
	FSDPT (Thai 2014)	1.6697	1.6697	1.6697	1.6697	1.6697
	Présente	1.6703	1.6703	1.6703	1.6703	1.6703
0.5	3D (Li <i>et al.</i> 2008)	1.3536	1.3905	1.4218	1.4454	1.4694
	FSDPT (Thai 2014)	1.3473	1.3841	1.4152	1.4386	1.4626
	Présente	1.3481	1.3847	1.4155	1.4389	1.4627
1	3D (Li <i>et al.</i> 2008)	1.1749	1.2292	1.2777	1.3143	1.3534
	FSDPT (Thai 2014)	1.1691	1.2232	1.2714	1.3078	1.3467
	Présente	1.1706	1.2241	1.2719	1.3082	1.3469
5	3D (Li <i>et al.</i> 2008)	0.8909	0.9336	0.9980	1.0561	1.1190
	FSDPT (Thai 2014)	0.8853	0.9286	0.9916	1.0488	1.1118
	Présente	0.8960	0.9370	0.9963	1.0535	1.1136
10	3D (Li <i>et al.</i> 2008)	0.8683	0.8923	0.9498	1.0095	1.0729
	FSDPT (Thai 2014)	0.8599	0.8860	0.9428	1.0012	1.0648
	Présente	0.8733	0.9004	0.9513	1.0098	1.0681

**Tableau V.3 :** Comparaison des fréquences fondamentales sans dimension du sandwich carré en FGM avec cœur souple en fonction de l'indice de loi de puissance  $k$ . ( $a/h=5$ ).

$k$	Résultats	Schéma				
		1-0-1	2-1-2	1-1-1	2-2-1	1-2-1
0	3D (Li <i>et al.</i> 2008)	0.8529	0.8529	0.8529	0.8529	0.8529
	FSDPT (Thai 2014)	0.8491	0.8491	0.8491	0.8491	0.8491
	Présente	0.8501	0.8501	0.8501	0.8501	0.8501
0.5	3D (Li <i>et al.</i> 2008)	1.3789	1.3206	1.2805	1.2453	1.2258
	FSDPT (Thai 2014)	1.3686	1.3115	1.2729	1.2380	1.2185
	Présente	1.3806	1.3255	1.2834	1.2493	1.2243
1	3D (Li <i>et al.</i> 2008)	1.5090	1.4333	1.3824	1.3420	1.3213
	FSDPT (Thai 2014)	1.4915	1.4156	1.3702	1.3302	1.3104
	Présente	1.5146	1.4509	1.3988	1.3593	1.3257
5	3D (Li <i>et al.</i> 2008)	1.6587	1.5801	1.5028	1.4601	1.4267
	FSDPT (Thai 2014)	1.6305	1.5125	1.4589	1.4195	1.4026
	Présente	1.6568	1.6127	1.5586	1.5162	1.4666
10	3D (Li <i>et al.</i> 2008)	1.6728	1.6091	1.5267	1.4831	1.4410
	FSDPT (Thai 2014)	1.6495	1.5196	1.4642	1.4266	1.4101
	Présente	1.6671	1.6349	1.5856	1.5436	1.4928

### V.3. Études paramétriques

#### V.3.1. Étude 1

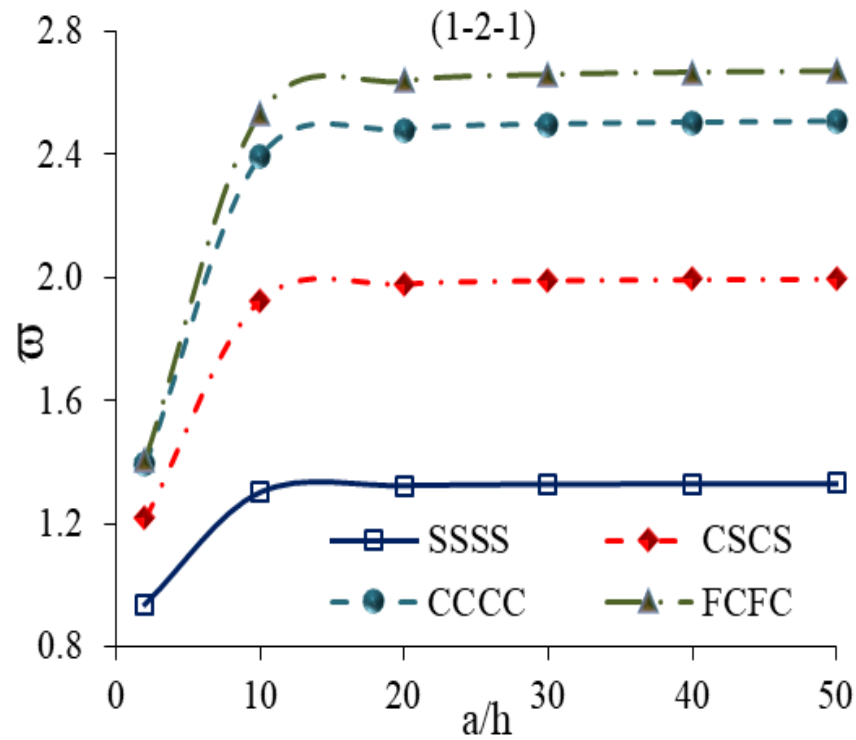
Dans la première étude, les effets des conditions aux bords sur les fréquences fondamentales adimensionnelles des plaques sandwichs carrées en FGM sont examinés. Les variations des fréquences fondamentales adimensionnelles de la plaque sandwich en FGM en fonction des différents schémas et de l'indice de loi de puissance  $k$  sont présentées avec différentes conditions aux bords dans le tableau V.4, où le rapport côté sur épaisseur est considéré comme  $a/h=10$ . En outre, la variation de la fréquence fondamentale adimensionnelle de la plaque sandwich en FGM

avec le schéma (1-2-1) en fonction du rapport côté/épaisseur est illustrée sur la figure V.1, ici l'indice de loi de puissance  $k$  pris égale à 2. On remarque que les valeurs les plus élevées des fréquences fondamentales des plaques sandwiches en FGM apparaissent dans le cas de la plaque FCFC tandis que les plus faibles fréquences sont remarquées dans la plaque SSSS.

**Tableau V.4 :** Variation des fréquences fondamentales adimensionnelles de la plaque sandwich carrée en FGM en fonction de l'indice de loi de puissance  $k$  sous différentes conditions aux bords ( $a/h=10$ ).

Conditions aux bords	$k$	Schéma				
		1-0-1	2-1-2	1-1-1	2-2-1	1-2-1
SSSS	0	1.8245	1.8245	1.8245	1.8245	1.8245
	0.5	1.4447	1.4844	1.5195	1.5474	1.5747
	1	1.2438	1.3006	1.3537	1.3959	1.4396
	2	1.0622	1.1229	1.1889	1.2443	1.3028
	5	0.9469	0.9825	1.0452	1.1095	1.1744
	10	0.9294	0.9437	0.9961	1.0616	1.1236
CSCS	0	2.6703	2.6703	2.6703	2.6703	2.6703
	0.5	2.1287	2.1869	2.2375	2.2772	2.3165
	1	1.8382	1.9221	1.9993	2.0599	2.1231
	2	1.5733	1.6642	1.7607	1.8408	1.9259
	5	1.4023	1.4588	1.5514	1.6448	1.7399
	10	1.3731	1.4014	1.47953	1.5749	1.6661
CCCC	0	3.2942	3.2942	3.2942	3.2942	3.2942
	0.5	2.6389	2.7109	2.7727	2.8205	2.8684
	1	2.2839	2.3881	2.4829	2.5566	2.6337
	2	1.9580	2.0719	2.1911	2.2890	2.3935
	5	1.7450	1.8188	1.9339	2.0485	2.1659
	10	1.7056	1.7476	1.8453	1.9624	2.0753
FCFC	0	3.4696	3.4696	3.4696	3.4696	3.4696
	0.5	2.7889	2.8646	2.9292	2.9789	3.0288
	1	2.4175	2.5276	2.6271	2.7039	2.7846
	2	2.0749	2.1962	2.3217	2.4241	2.5338
	5	1.8491	1.9299	2.0516	2.1719	2.2955
	10	1.8051	1.8545	1.9583	2.0813	2.2004

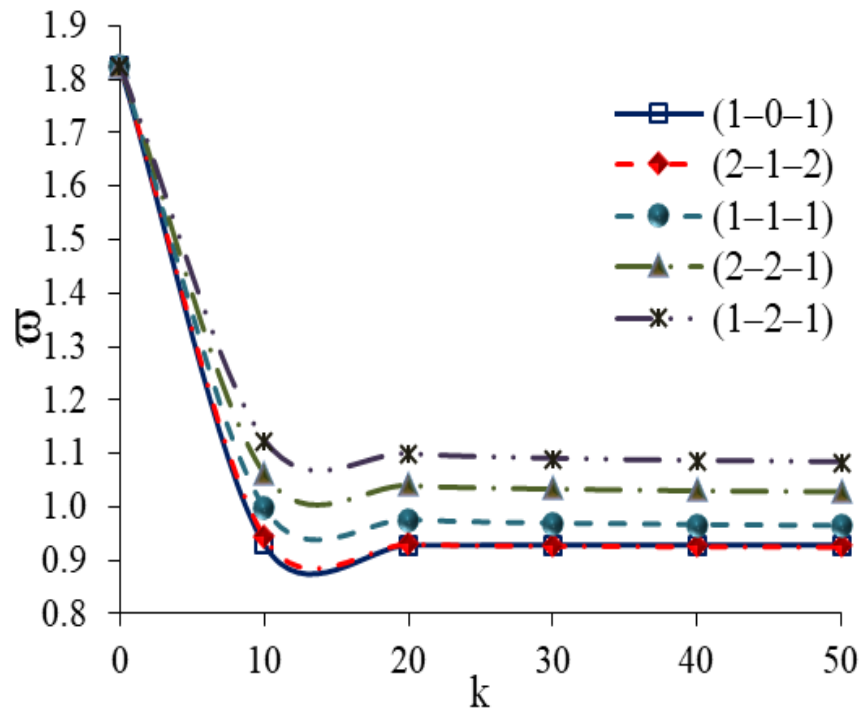




**Figure V.1** : Variation de la fréquence fondamentale adimensionnelle de la plaque sandwich (1-2-1) carrée en FGM en fonction du rapport  $a/h$ .

### V.3.2. Étude 2

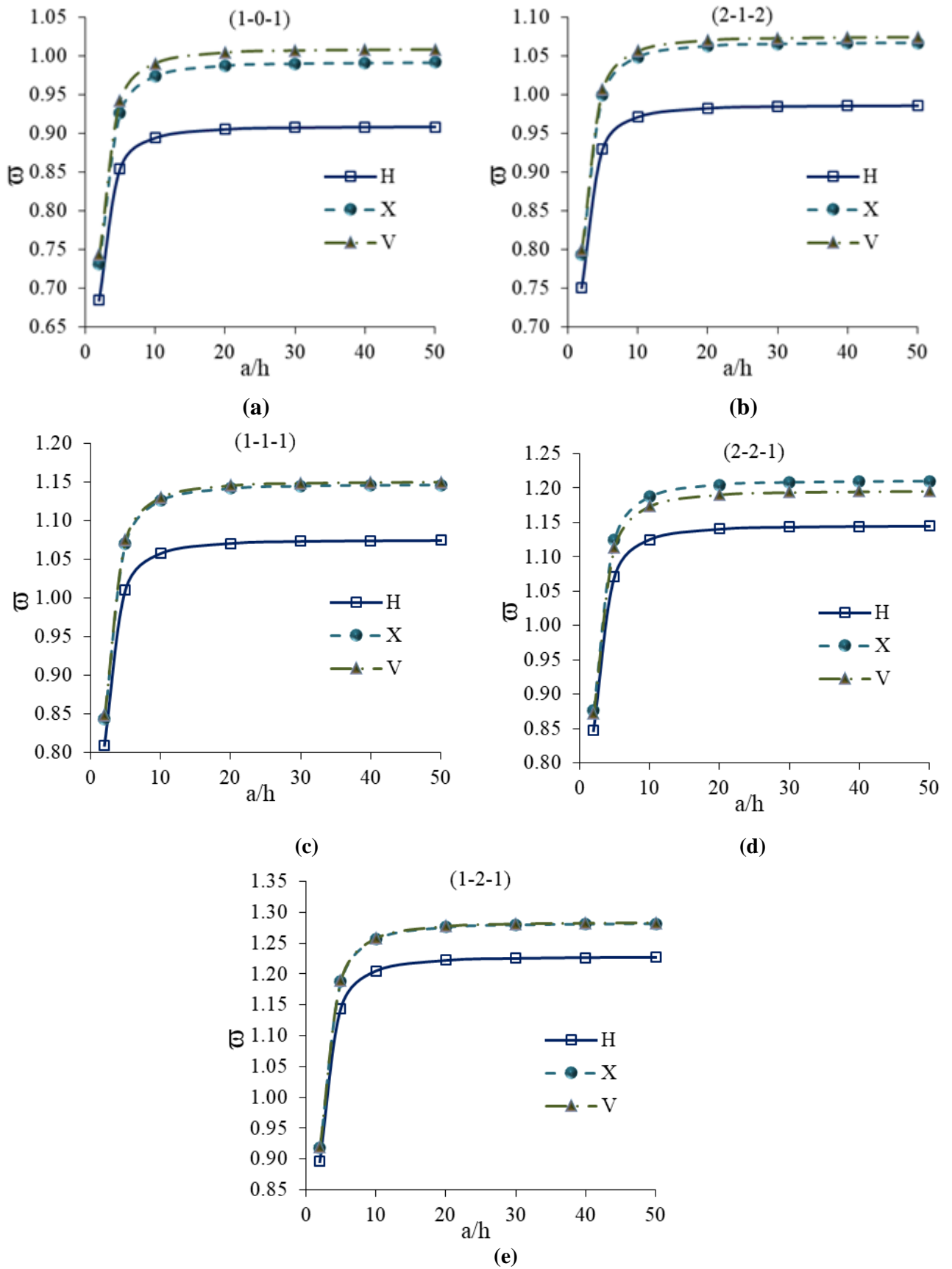
Dans la deuxième étude, les fréquences fondamentales adimensionnelles des plaques sandwichs carrées en FGM avec des conditions aux bords SSSS en fonction des différents schémas et de l'indice de loi de puissance  $k$  sont présentées dans la figure V.2, où le rapport  $a/h=10$ . On remarque que les valeurs de fréquence fondamentale de la plaque sandwich diminuent avec l'augmentation de l'indice de loi de puissance  $k$ ; car l'augmentation de l'indice de loi de puissance réduit la rigidité de la plaque sandwich FGM.



**Figure V.2 :** Variation de la fréquence fondamentale adimensionnelle des différents schémas des plaques sandwichs carrées en FGM en fonction de l'indice de loi de puissance  $k$

### V.3.3. Étude 3

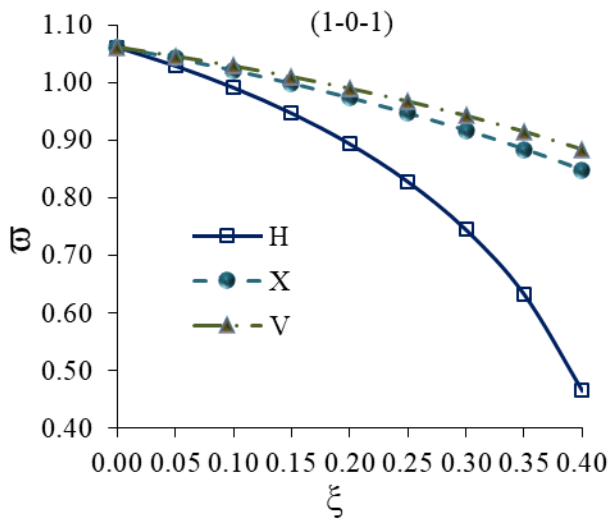
Dans la troisième étude, les effets du type de modèle de porosité et du rapport  $a/h$  sont examinés. La variation de la fréquence fondamentale adimensionnelle de la plaque sandwich poreuse en FGM avec des conditions aux bords SSSS en fonction de différents modèles de porosité et du rapport  $a/h$  est tracée pour différents schémas des plaques sandwichs dans la figure V.3, où l'indice de loi de puissance et la fraction volumique de porosité sont  $k=2$  et  $\xi=0.2$  respectivement. On remarque que la différence entre les modèles de porosité augmente avec l'augmentation du rapport côté sur épaisseur ( $a/h$ ). En particulier, pour des valeurs élevées de rapport  $a/h$ , le type de modèle de distribution de porosité joue un rôle important sur le comportement de vibration des plaques sandwichs poreuses en FGM. Dans tous les schémas, le modèle de porosité homogène (H) a des fréquences fondamentales les plus basses. La raison de cette situation est que le vide s'empile davantage dans la distribution de porosité H, et donc la rigidité de la plaque devient la plus faible dans le modèle H.



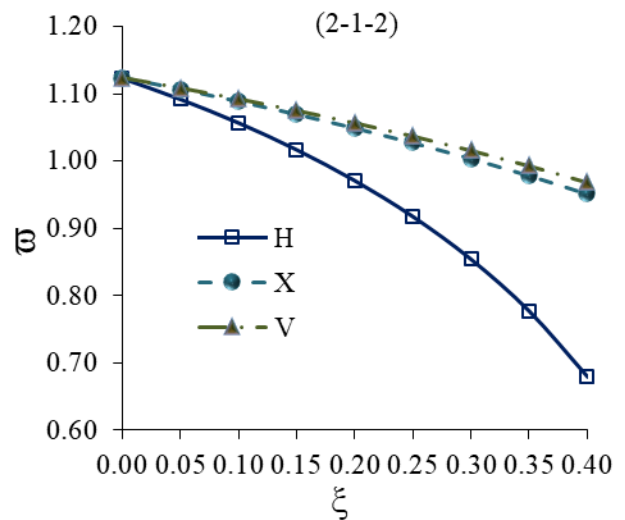
**Figure V.3 :** Variation des fréquences fondamentale adimensionnelle des différents schémas des plaques sandwichs poreuses en FGM en fonction du rapport  $a/h$ .

### V.3.4. Étude 4

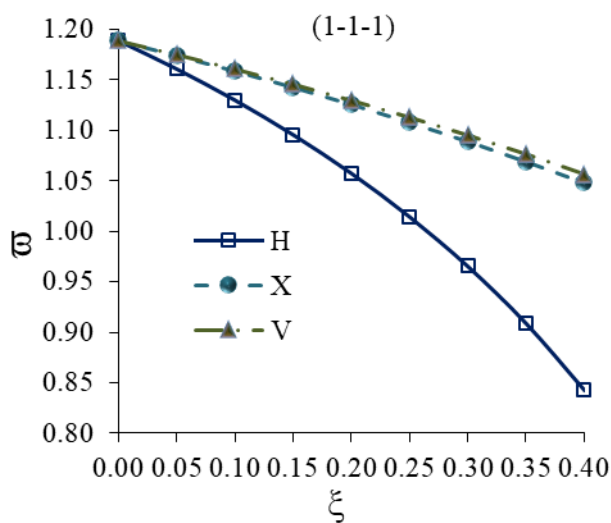
Dans la quatrième étude, les effets du type de modèle de porosité et du rapport de la fraction volumique de porosité sont examinés. La variation de la fréquence fondamentale adimensionnelle de la plaque sandwich poreuse en FGM avec des conditions aux bords SSSS en fonction de différents modèles de porosité et fractions volumiques de porosité est illustrée pour différents schémas de stratification dans la Figure V.5, où l'indice de loi de puissance et le rapport côté/épaisseur sont pris comme étant  $k=2$  et  $a/h=10$ , respectivement. La différence entre les modèles de porosité augmente avec l'augmentation de la fraction volumique de porosité  $\xi$ . Dans tous les schémas des sandwichs, le modèle de porosité homogène (H) a des fréquences fondamentales les plus faibles. De plus, les valeurs des fréquences fondamentales des modèles de porosité (X) et (V) sont très proches les unes des autres dans les schémas (1-1-1) et (1-2-1) alors qu'ils sont très distincts de ceux des schémas (1-0-1), (2-1-2) et (2-2-1).



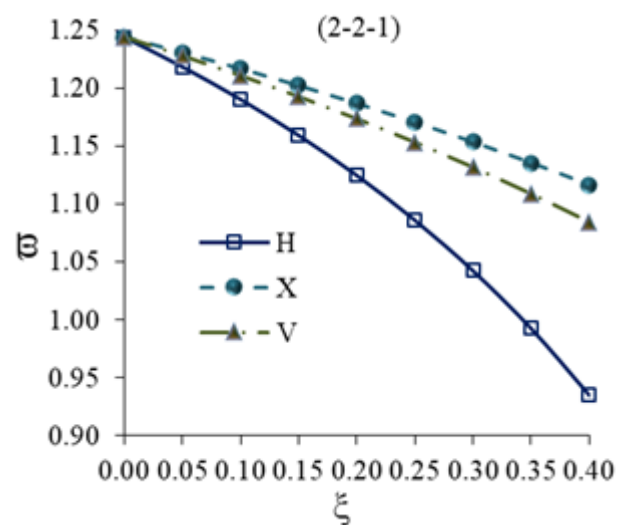
(a)



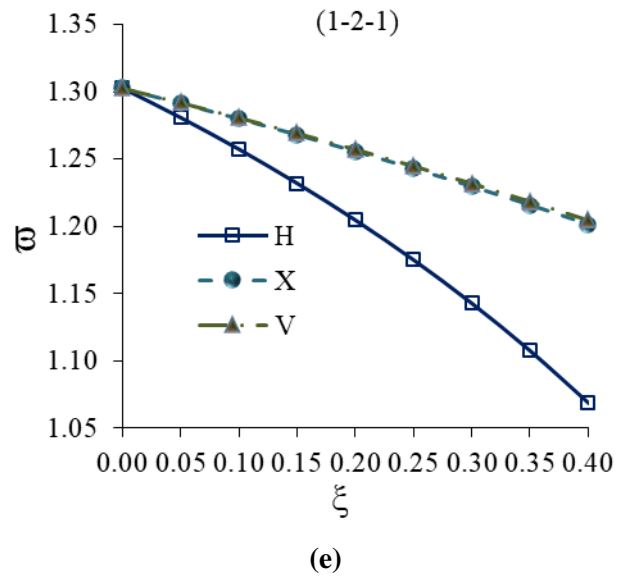
(b)



(c)



(d)



**Figure V.4** : Variation des fréquences fondamentale adimensionnelle des différents schémas des plaques sandwichs poreuses en FGM en fonction de la fraction volumique de la porosité  $\xi$ .

#### V.4. Conclusion

Dans ce chapitre, l'analyse de la vibration libre d'une plaque sandwich carrée avec des peaux poreuses en FGM et un cœur homogène isotrope est analysée en tenant compte de diverses conditions aux bords. Pour ce faire, les propriétés des matériaux de la plaque sandwich sont supposées varier en continu dans la direction de l'épaisseur en fonction de la fraction volumique des constituants définie avec la règle modifiée du mélange comprenant la fraction volumique de porosité avec quatre trois différents forme de distribution de porosité sur la section transversale. De plus, une théorie de déplacement de cisaillement hyperbolique est utilisée dans la relation cinématique de la plaque sandwich poreuse en FGM, et les équations du mouvement sont dérivées en utilisant le principe de Hamilton. Des solutions analytiques sont obtenues pour l'analyse vibratoire des plaques sandwichs carrées avec des couches poreuses en FGM dans diverses conditions aux limites.

Dans ce chapitre, l'analyse de la vibration libre des plaques sandwichs carrée avec des peaux poreuses en FGM et un cœur homogène et isotrope est analysée sous diverses conditions aux bords. Dans ce travail, les propriétés matérielles de la plaque sandwich sont supposées varier dans la direction de l'épaisseur en fonction de la fraction volumique des constituants définie avec la règle de mélange modifiée comprenant la fraction volumique de porosité avec trois types de distribution de porosité dans la section transversale. De plus, une théorie de cisaillement trigonométrique est utilisée dans les relations cinématique de la plaque sandwich poreuse en FGM, et les équations de mouvement sont dérivées en utilisant le principe d'Hamilton. Des solutions analytiques sont obtenues pour l'analyse vibratoire des plaques sandwichs carrées avec des peaux poreuses en FGM sous diverses conditions aux limites. Plusieurs études paramétriques ont été réalisées pour examiner les effets de la fraction volumique de la porosité, du type de modèle de distribution de la porosité, du schéma de stratification, du rapport côté/épaisseur et des conditions aux limites sur la vibration libre des plaques sandwichs FGM.

Brièvement, les résultats suivants ont été obtenus :

- Les valeurs les plus élevées de la fréquence fondamentale adimensionnelle des plaques sandwichs en FGM se produisent dans les conditions aux limites FCFC tandis que les plus faibles se produisent dans les conditions aux limites SSSS.
- Les valeurs de la fréquence fondamentale adimensionnelle de la plaque sandwich FGM diminuent avec l'augmentation de l'indice de loi de puissance  $k$ .
- Le type de modèle de distribution de porosité joue un rôle important dans le comportement dynamique des plaques sandwichs poreuses en FGM, en particulier pour des valeurs élevées de rapport côté/épaisseur ( $a/h$ ).

- Dans tous les schémas de stratification, le modèle de porosité homogène (H) a des fréquences fondamentales les plus basses.
- La différence entre les modèles de porosité augmente avec l'augmentation de la fraction volumique de porosité  $\xi$ .

En conclusion, les types de modèle de distribution de porosité adoptés, la fraction volumique de porosité, le schéma de superposition, le rapport côté/épaisseur et les conditions aux limites ont des effets significatifs sur la vibration libre des plaques sandwiches en FGM. Les effets négatifs de la porosité peuvent être considérablement réduits en adoptant des valeurs appropriées pour lesdits paramètres.

# CONCLUSION GÉNÉRALE ET PERSPECTIVES

---



## ***Conclusion générale et perspectives***

L'objectif de notre étude consiste à analyser la vibration libre des plaques sandwichs poreuses en matériaux à gradients de propriétés « FGM » sous l'effet du cisaillement transverse avec diverses conditions aux bords. La mise en évidence de l'effet du cisaillement transverse dans cette étude nous a permis de décrire avec une bonne précision les champs de contraintes et de déformations induites. La comparaison des résultats de cette étude soit avec des solutions existantes dans la littérature, a permis de dégager plusieurs points :

- Les valeurs les plus élevées de la fréquence fondamentale adimensionnelle des plaques sandwichs en FGM se produisent dans les conditions aux limites FCFC tandis que les plus faibles se produisent dans les conditions aux limites SSSS.
- Les valeurs de la fréquence fondamentale adimensionnelle de la plaque sandwich FGM diminuent avec l'augmentation de l'indice de loi de puissance  $k$ .
- Le type de modèle de distribution de porosité joue un rôle important dans le comportement dynamique des plaques sandwichs poreuses en FGM, en particulier pour des valeurs élevées de rapport côté/épaisseur ( $a/h$ ).
- Dans tous les schémas de stratification, le modèle de porosité homogène (H) a des fréquences fondamentales les plus basses.
- La différence entre les modèles de porosité augmente avec l'augmentation de la fraction volumique de porosité  $\xi$ .

En conclusion, on peut dire que la théorie de cisaillement à quatre variables proposée est exacte et simple pour la résolution du comportement dynamique des plaques sandwichs poreuses en FGM. Cependant, il est noté que l'amélioration de la présente théorie est nécessaire, surtout lorsqu'il est appliqué à une structure stratifiée pour satisfaire la continuité des contraintes de cisaillement transversale entre les couches.

En perspective à ce travail, nous envisageons d'étudier le problème de cisaillement, et l'utilisation de la nouvelle fonction raffinée pour les cas suivants :

- La prise en compte de l'effet de la température dans l'étude de la vibration ;
- Prise en compte de la distribution graduelle arbitraire du matériau FGM ;
- Utilisation de la théorie raffinée pour résoudre les problèmes de flambement ;
- Il s'avère indispensable de recourir à la méthode des éléments finis qui permet de résoudre des problèmes plus complexes comparativement à la méthode analytique.

Finalement, on espère que ce modeste travail reflète la modeste contribution dans le domaine de recherches des matériaux composites (FGM), précisément leurs comportements vis à vis des conditions de chargements vibratoires.

RÉFÉRENCES  
BIBLIOGRAPHIQUE

---

## ***Références bibliographiques***

### **A**

[**Ait Atman 2011**] HASSEN. Ait Atman, « Vibration des structures composites en tenant compte de l'effet du cisaillement », Thèse de Doctorat de l'université Djilali Liabes de Sidi Bel Abbes ,2011.

[**Akbarzadeh 2015**] Akbarzadeh A.H., Abedini A., Chen Z.T. (2015), “Effect of micromechanical models on structural responses of functionally graded plates”, *Compos. Struct.* 119, 598–609,

[**Ambartsumyan 1969**] S.A. Ambartsumyan. Theory of anisotropic plate. Technomic Publishing Co,1969.

[**Arshad 2007**] Arshad S.H., Naeem M.N., Sultana N., (2007), “Frequency analysis of functionally graded material cylindrical shells with various volume fraction laws”. *Proc Inst Mech Eng, Part C: J.Mech Eng Sci*, 221(12),1483–95

[**Avcar 2018**] Avcar, M., Mohammed, W.K.M., Free vibration of functionally graded beams

[**Aydogdu 1755**] Metin Aydogdu,Vibration analysis of cross-ply laminated beams with general boundary conditions by Ritz method, *International Journal of Mechanical Sciences* 47 (2005) 1740–1755.

### **B**

[**Bachir 2013**] Bachir B.R., Adda Bedia E.A. and Tounsi A. (2013), “Nonlinear thermal buckling behavior of functionally graded plates using an efficient sinusoidal shear deformation theory”, *Struct. Eng. Mech.*, 48, 547 – 567.

[**Bary 2009**] Bary B., Ben Haha M., Adam E., Montarnal P., (2009), “Numerical and analytical effective elastic properties of degraded cement pastes”. *Cem. Concr. Res.*, 39(10), 902–912.

[**Belouettar 2009**] Belouettar S, Abbadi A, Azari Z, Belouettar R, Freres P., *Composites structures*, 87: 265-273, 2009.

### **C**

**[Chabot 1987]** A. Chabot. Analyse des efforts a l'interface entre les couches des matériaux composites à l'aide de modèles multiparticulaires de matériaux multicouches. PhD thesis, ENPC, 1997..

**[Chikr 2019]** Chikr, S.C., Kaci, A., Bousahla, A.A., Bourada, F., Tounsi, A., Adda Bedia, E.A., Mahmoud, S.R., Benrahou K.H. and Tounsi, A. (2019), "A novel four-unknown integral model for buckling response of FG sandwich plates resting on elastic foundations under various boundary conditions using Galerkin's approach", *Geomech.Eng.,Int. J.*,21(5), 471-487.

## D

**[Di Sciuva 1984]** M. Di Sciuva. A re\_fined transverse shear deformation theory for multi-layered anisotropic plates. *Atti. Accad. Sci. Torino*, vol. 118, pages 279{295, 1984.

## E

**[El Meiche 2011]** El Meiche, N., Tounsi, A., Ziane, N., Mechab, I., A new hyperbolic shear deformation theory for buckling and vibration of functionally graded sandwich plate, *International Journal of Mechanical Sciences*, 53(4), 237-247.

## F

**[Fairouz2011]** Fairouz. Brouis, « étude du comportement mécanique de structure sandwiches A différent matériaux de revêtements », Mémoire de magister de l'université mentouri – Constantine Amina Messabih et Sabrina Messahel , « Analyse du flambement et vibration libre des plaques sandwiches formé par des matériaux à gradient de propriétés », Thèse de master de l'université Ibn Khaldoun Tiaret, 2011

**[Fekrar 2010]** Abdelkader. fekrar, « Conception des plaques FGM ayant un comportement similaire aux plaques homogènes », Mémoire de magister de l'université Djilali Liabes de Sidi Bel Abbes, 2010

## G

**[Gognard 2000]** Gognard," collage des métaux généralités et caractéristiques ", Techniques de l'ingénieur BT4 , 2000.

## I

**[Icardi 2001]** U. Icardi. Higher-order zig-zag model for analysis of thick composite beams with inclusion of transverse normal stress and sublaminates approximations. *Composites : Part B*, vol. 32, pages 343-354, 2001.

**[Interlaminar 1994]** W.L. Yin. Interlaminar stress analysis of composite laminates using a sublaminate/layer model. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 31, no. 11, pages 1549, 1564, 1994.

## H

**[Hadji et al. 2012].** Hadji, L. Mémoire ou contribution à l'étude de la vibration des plaques sandwiches en FGM. *Génie Civil. Université Djilali Liabes de Sidi Belabbes*, (2011\2012), p26\_30

**[Hebbar et al. 2019]** Hebbar, N. Mémoire ou étude de l'effet de déformation de cisaillement sur la réponse statique et dynamique des structures composites épaisses. . *Génie Civil. Université Djilali Liabes de Sidi Belabbes*, (2018\2019 ). P18

**[Hexcel 2004]** Hexcel Composite. HexWeb tm honeycomb sandwich design technology. <http://www.hexcel.composite.com>, 2004.

**[Hopkinson et al. 2006]** Hopkinson, N. Hague, R.J.M. and Dickens, (2006), "P.M. Rapid Manufacturing: An Industrial Revolution for the Digital Age". John Wiley and Sons, Ltd .

## J

**[Jamal 2009]** Jamal.E, "étude comparative et caractérisations mécaniques des structure sandwiches multicouches", Thèse de Doctorat de l'université Paul Verlaine ,2009.

**[Jha2013]** Jha D.K., Kant T., Singh R.K., (2013), "A critical review of recent research on functionally graded plates", *Compos. Struct.* 96, 833–849.

## K

**[Kassapoglou-Lagace 1987]** C. Kassapoglou & P.A. Lagace. Closed form solutions for the interlaminar stress field in angle-ply and cross-ply laminates. *Journal of Composite Materials*, vol. 27, pages 292,308, 1987.

**[Kamraa-Mistou 2003]** K.S. Afaq, M. Karama & S. Mistou. Un nouveau modèle raffiné pour les structures multicouches. In Comptes-rendus des 13 emes Journées Nationales sur les Composites, pages 289-292. Strasbourg, March 2003.

**[Karama 1998]** C. Ossadzow & M. Touratier. An improved shear-membrane theory for multi-layered shells. *Composite Structures*, vol. 52, pages 85, 95, 2001.

**[Kieback 2003]** Kieback B., Neubrand A., Riedel H., (2003), “Processing techniques for functionally graded materials”, *Mater. Scien. Eng. A.* 362, 81–105.

**[Kirchhoff 1850]** G. Kirchhoff. Über das gleichgewicht und die bewegung einer elastischen schein. *Journal für reine und angewandte Mathematik*, vol. 40, pages 51, 88, 1850.

**[Kirchhoff 1850]** G. Kirchhoff. Über das gleichgewicht und die bewegung einer elastischen schein. *Journal für reine und angewandte Mathematik*, vol. 40, pages 51, 88, 1850.

**[Kiyoshi 2001]** Kiyoshi I.C., (2001), “functionally graded materials in the 21st century, A Workshop on Trends and Forecasts”, *Springer Science Business Media*, New York.

**[Koizumi 1997]** Koizumi M., (1997), “FGM activities in Japan”. *Compos. Part B*, 28 28 (1-2), 1–4.

**[Koizumi et al. 1996]** Koizumi. M, FGM activities in Japan, department of materials chemistry. Ryukoku University, Ohtsu 520-21 Japan, 1996

## L

**[Lazreg 2012]** Lazreg. Hadji, “Contribution à l'étude de la vibration des plaques sandwiches en FGM”, Thèse de Doctorat de l'université Djilali Liabes de Sidi Bel Abbes, 2012.

**[Li 2008]** Li, Q., Iu, V.P., Kou, K.P, Three-dimensional vibration analysis of functionally graded material sandwich plates, *Journal of Sound and Vibration* 311(1-2), 2008, 498-515.

## M

**[Miyamoto1997]** Miyamoto Y., Shiota, I., (1997), “Functionally Graded Materials”, *ELSEVIER*.

## N

[**Nora 2011**] Nora.K, “ Etude des contraintes d’interface d’une poutre FGM renforcées par une plaque en matériaux composites”, mémoire de master de l’université Djilali Liabes de Sidi Bel Abbes, 2011.

## P

[**Pagano 1978**] N.J Pagano. Stress fields in composite laminates. International Journal of Solids and Structures, vol. 14, page 385, 1978.

## R

[**Reddy 1987**] J.N. Reddy. A generalization of two-dimensional theories of laminated composite plates. Commun. Appl. Numer. Methods, vol. 3, pages 173,180, 1987.

[**Reddy 1984**] J.N. Reddy. A simple higher-order theory for laminated composite plates. Journal of Applied Mechanics, vol. 51, pages 745-752, 1984.

[**Reddy 1984**] M. Di Sciuva. An improved shear-deformation theory for moderately thick mul-tilayered anisotropic shells and plates. Journal of Applied Mechanics, vol. 54, pages 589(596, 1987).

[**Reissner 1945**] E Reissner. The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates. J. Appl. Mech., vol. 12, pages 69, 77, 1945

[**Ren 1986**] J.G. Ren. A new theory of laminated plate. Composite Science and Technology, vol. 26, pages 225, 239, 1986.

## S

[**Sayyad 2019**] Sayyad, A., Ghumare, S., A new quasi-3D model for functionally graded plates, *Journal of Applied and Computational Mechanics*, 5(2), 2019, 367-380.

[**Sciuva 1984**] M. Karama, B. Abou Harb, S. Mistou & S. Caperaa. Bending, buckling and free vibration of laminated composite with a transverse shear stress continuity model. Composite Part B, vol. 29, no. 3, pages 223,234, 1998.

[**Siboni 1991**] Siboni G., Benveniste, Y., (1991), “A micro-mechanics model for the effective thermomechanical behavior of multiphase composite media”. *Mech. Mater.*,11, 107– 122.

[**Sobhy 2013**] Sobhy, M., 2013. Buckling and free vibration of exponentially graded sandwich plates resting on elastic foundations under various boundary conditions. *Compos. Struct*, 99, 76-87.

[**Stavsky - reissner** ] E. Reissner & Y. Stavsky. Bending and stretching of certain types of hetero-geneous aelotropic elastic plate. *J. Appl. Mech.*, vol. 28, pages 402,408, 1961.

## T

[**Tahani-Nosier 2003**] M. Tahani & A. Nosier. Edge effect of uniformly loaded cross-ply composite laminate. *Material and Design*, vol. 24, pages 647, 658, 2003.

[**Touratier 1991**] M. Touratier. An efficient standard plate theory. *Engng Sci*, vol. 29, no. 8, pages 901,916, 1991.

[**Thai, 2014**] Thai, H.T., Nguyen, T.K., Vo, T.P., Lee, J., Analysis of functionally graded sandwich plates using a new first-order shear deformation theory, *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 45, 211-225.

resting on Winkler-Pasternak foundation, *Arabian Journal of Geosciences*, 11(10), 2018, 232.

[**Triantafillou 1987**] Triantafillou T. C, Gibson L. J., *Materials Science and Engng*, 95:37-53, 1987

## V

[**Viet.Tung 2004**] Viet.Tung. Nguyen. « Modélisation globale et locale des structures multicouches par éléments finis de plaques ». Thèse de doctorat de l'école nationale des ponts et chaussées ,2004.

[**Vinson 2005**] Vinson J.R., *Sandwich Structures: Past, Present, and Future*. In: Thomsen O., Bozhevolnaya E., Lyckegaard A. (eds) *Sandwich Structures 7: Advancing with Sandwich Structures and Materials*, Springer, Dordrecht, 2005

## W

[**Whitney 1973**] J.M. Whitney. « Shear correction factors for orthotropic laminates under static loads ». *J.Applied Mechanics*, Vol.40, pages 302-304, 1973.

## Z



**[Zenkour 2005]** Zenkour, A.M., A comprehensive analysis of functionally graded sandwich plates: Part 2—Buckling and free vibration, *International Journal of Solids and Structures*, 42(18-19), 5243-5258.

**[Zhu 2001]** Zhu, J., Lai, Z., Yin, Z., Jeon, J., Lee, S., Fabrication of ZrO<sub>2</sub>–NiCr functionally graded material by powder metallurgy, *Materials Chemistry and Physics* 68, 2001, 130–135.

## **Résumé**

Dans le présent travail, une analyse de la vibration libre des plaques sandwichs avec des peaux en FGM poreuses et un cœur homogène isotrope est effectuée sous diverses conditions aux bords. Une théorie de cisaillement hyperbolique est utilisée dans la relation cinématique de la plaque sandwich poreuse en FGM, et les équations de mouvement sont dérivées en utilisant le principe de Hamilton. Des solutions analytiques sont obtenues pour l'analyse de vibration libre des plaques sandwichs poreuses en FGM sous diverses conditions aux bords. Plusieurs études paramétriques sont menées pour examiner les effets de la fraction volumique de porosité, du type de modèle de distribution de porosité, du schéma de stratification, du rapport côté/épaisseur et les conditions aux limites sur la vibration libre des plaques sandwichs en FGM.

**Mots clés :** Plaque Sandwich ; Vibration libre ; Porosité ; Principe d'Hamilton ; conditions aux bords.

## Abstract

In the present work, an analysis of the free vibration of sandwich plates with porous FGM layers and an isotropic homogeneous core is performed under various edge conditions. Hyperbolic shear theory is used in the kinematic relationship of the sandwich plates porous in FGM, and the equations of motion are derived using the principle of Hamilton. Analytical solutions are obtained for the free vibration analysis of the plates porous sandwiches in FGM under various conditions at the edges. Several parametric studies are carried out for examine the effects of the volume fraction porosity, type of porosity distribution model, layering pattern, side/thickness ratio and the boundary conditions on the free vibration of the plates sandwiches FGM.

**Keywords:** Sandwich plate; Free vibration; Porosity; Hamilton principle; Boundary conditions.

## ملخص

في هذا العمل الحالي ، الاهتزاز الحر لصفائح الساندويش المسامية المتدرجة وظيفيا يتم تنفيذ لب المتجانس تحت ظروف مختلفة عند الحواف يتم استخدام نظرية القص الزائدي في العلاقة الحركية لصفحة المسامية المتدرجة وظيفيا ويتم كذلك اشتقاق معادلات الحركة باستخدام مبدأ هميلتون؛ يتم الحصول على الحلول التحليلية لتحليل الاهتزاز الحر لصفائح سندويش المسامية المتدرجة وظيفيا تحت ظروف مختلفة على الحواف تم إجراء العديد من الدراسات البارامترية لفحص تأثيرات الجزء الحجمي للمسامية، نوع نموذج توزيع المسامية ، مخطط التقسيم الطبقي ، نسبة جانب / السماكة وظروف الحدود عند الاهتزاز الحر لصفائح المتدرجة وظيفيا

**الكلمات المفتاحية :** صفيحة السندويش ، الاهتزاز الحر ، مبدأ هميلتون ، شروط الحافة .

