
République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique



Université Ibn Khaldoun de Tiaret
Faculté des Sciences Appliquées
Département de Génie Mécanique



MÉMOIRE DE FIN D'ETUDES

Pour l'obtention du diplôme de Master

Domaine : Sciences et Technologie
Filière : Electromécanique
Spécialité : Maintenance industrielle

Thème

ANALYSE VIBROACOUSTIQUE DES DEFAUTS D'ENGRENAGES

Préparé par :

LARBI Mohamed Seif El Islem et HALIMI Wahid

Soutenu publiquement le : **17 / 07 / 2021**, devant le jury composé de :

M. HAMMOU Mahmoud	Maître de conférences "B" (Université de Tiaret)	Président
M. BOUZIDANE Ahmed	Professeur (Université de Tiaret)	Examineur
M. AISSAT Sahraoui	Maître de conférences "A" (Université de Tiaret)	Examineur
M. GUEMMOUR Mohamed	Maître de conférences "B" (Université de Tiaret)	Encadreur

Année universitaire : 2020 - 2021

REMERCIEMENTS

On tient avant tout à remercier chaleureusement Monsieur **Guemmour** Mohamed Boutkhil, Maître de conférences classe "B" à l'université Ibn-Khaldoun de Tiaret de nous avoir encadré et assuré le suivi de notre travail. En nous faisant confiance depuis le début de nos travaux, il a su diriger ce travail tout en nous laissant une complète autonomie. On le remercie non seulement pour la qualité de son encadrement mais également pour l'inestimable qualité humaine dont il a toujours fait preuve.

On est reconnaissant de l'honneur que nous ont fait Monsieur **Bouزيدane Ahmed**, Professeur à l'université de Tiaret et Monsieur **Aissat Sahraoui**, Maître de conférences classe "A" à l'université de Tiaret, pour avoir accepté de prendre part au jury. On les remercie vivement d'avoir accepté la tâche d'évaluer notre mémoire en qualité de rapporteur, en consacrant de leur précieux temps à l'examen, à l'évaluation de notre travail et pour l'intérêt qu'ils ont porté à notre travail. On les remercie aussi pour la patience et la pertinence dont ils ont fait preuve à la lecture de ce document afin de l'expertiser et estimer sa valeur scientifique .

On remercie tout autant Monsieur **Hammou Mahmoud**, maître de conférence classe "B" à l'université Ibn Khaldoun de tiaret, pour avoir accepté de prendre part au jury, de le présider et de proclamer le résultat de la délibérations du jury notre soutenance.

Enfin, on tient aussi à remercier l'équipe pédagogique, constituée de l'ensemble des enseignants permanents et vacataires qui ont assurés notre formation durant notre cycle de master, ainsi que l'équipe de formation, constituée du responsable de filière et du responsable de la spécialité qui ont assurés la promotion de la spécialité maintenance industrielle, sans oublier le staff administratif du département de génie mécanique qui a veillé à l'organisation, la planification, le contrôle et le suivi des activités pédagogiques et à leur tête Monsieur le chef de département.

NOMENCLATURES

$\overline{(\cdot)}$ Tenseur Du Deuxième Ordre.

(\cdot) Amplitude Complexe Associée A Une Dépendance Temporelle Sinusoïdale De L'argument.

$(\cdot)^e$ Exposant Indiquant Que La Quantité Entre Parenthèses Fait Référence A Un Élément.

$\vec{(\cdot)}$ Vecteur

(\cdot) Valeur Prescrite Entre Parenthèses

$\langle \cdot \rangle = \{ \cdot \}^T$ Transpose D'un Vecteur.

$\{ \cdot \}$ $\{ \mathbf{a} \} = \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix}$ Est Un Vecteur De Composants a_1, a_2, a_3 , L'utilisation Du Vecteur Est Egalement

Adoptée Pour Se Référer A Un Point (A).

σ Densité De Potentiel Monocouche

$\overline{\sigma}$ Tenseur Des Contraintes Structurelles De La Composante Σ_{ij} (Pa)

$\rho(\vec{r}, t)$ Fluctuation De La Densité Du Fluide ($\text{Kg}\cdot\text{m}^{-3}$)

ρ_s Densité Structurelle ($\text{Kg}\cdot\text{M}^{-3}$)

ρ_0 Densité Du Domaine Fluide

\vec{r} Position Du Point Source Ou Récepteur Dans Le Système De Coordonnées Physiques (X_1, X_2, X_3)

P_E pression de référence p_0

T Température Acoustique (K) Ou Energie Cinétique (J)

S Section Transversale D'une Poutre Ou Surface D'une Structure (M^2)

c_v Capacité Calorifique A Volume Constant (Jk^{-1})

β Niveau De Singularité Réel ≥ 0 Constant

$\hat{\beta}$ Admittance Acoustique Normalisée Spécifique Définie Comme $\beta = \rho_0 c_0 / Z_n$

Q_m Débit Massique

Q_v Débit Volumique

$\vec{u}(\vec{r}, t)$ Vecteur De Déplacement Structurel De La Composante U_i (M)

$\vec{U}(\vec{r}, t)$ Déplacement De Particules Acoustiques

\bar{U}' déplacement

$\vec{v}(\vec{r}, t)$ Vecteur Vitesse Structurel De La Composante V_i ($M s^{-1}$)

$\vec{V}(\vec{r}, t)$ Vitesse Des Particules Acoustiques ($M s^{-1}$)

\hat{Z}_n Impédance Acoustique Spécifique ($P a m^{-1} S$)

ω Fréquence Circulaire ($R a d s^{-1}$)

$\Re(.)$ Partie Réelle De La Quantité Entre Parenthèses

$\varphi(\vec{r}, t)$ Potentiel De Vitesse Acoustique

k Nombre D'onde Dans Le Domaine Fluide (M^{-1})

\hat{Q} Coefficient De Couplage Entre La Déformation Du Solide Phase Et La Phase Fluide

$(.)^T$ Transposer Un Vecteur

\vec{F}_v Vecteur De Force Corporelle Par Unité De Volume (Composant $F_{v,i}$) ($N m^{-3}$)

\vec{I} Vecteur De Force D'inertie Du Composant $I_i = -\rho_s \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}$

\bar{C} Tenseur D'élasticité Des Composants C_{ijkl} .

β Niveau De Singularité Réel ≥ 0 Constante.

β L'admission Acoustique Normalisée Spécifique Définie Comme $\beta = \rho_0 c_0 / Z_n$.

c_0 Vitesse Du Son Dans Le Domaine Des Fluides ($m s^{-1}$).

\hat{c}_0 Vitesse Sonore Complexe Dans Le Domaine Des Fluides $c_0(1 + j\eta_a)^{1/2}$ ($m s^{-1}$).

δ_{ij} Symbole Kronecker.

$\partial\Omega$ Limite De Surface.

$\partial\Omega_f$ Limite De Domaine Fluide.

$\partial\Omega_{f,N}$ Limite De Domaine Fluide Avec Condition De Neumann.

$\partial\Omega_{f,D}$ Limite De Domaine Fluide Avec Condition De Dirichlet.

$\partial\Omega_{f,R}$ Limite De Domaine Fluide Avec Condition De Robin.

$\partial\Omega_s$ Limite Structurelle.

$\partial\Omega_{s,N}$ Limite De Domaine Structurelle Avec Condition De Neumann.

$\partial\Omega_{s,D}$ Limite De Domaine Structurelle Avec Condition De Dirichlet.

$\partial\Omega_{s,R}$ Limite De Domaine Structurale Avec Condition De Robin.

δp Variation Cinématique Admissible De La Pression Acoustique (Pa).

$\left[\frac{\delta p}{\partial n} \right]$ Saut De Gradient De Pression Normal Défini Comme $\frac{\delta p^+}{\partial n} - \frac{\delta p^-}{\partial n}$.

$\vec{\delta u}$ Variation Cinématique Admissible Du Vecteur De Déplacement.

E Module Structurel De Young (Pa).

E Le Module De Young Qui Tient Compte De L'amortissement Structurel Défini Comme

Suit : $E(1+i\eta_s)$ (Pa).

$\bar{\varepsilon}$ Tenseur De Déformation Structurale Du Composant ε_{ij} .

\bar{F} Vecteur De Force De Contact Par Unité De Surface (Pa).

h, h^e Taille D'un Elément Fini 1d Défini Comme $x_2^e - x_1^e$ (M).

h_s Épaisseur De La Structure (M).

η Viscosité Dynamique Des Fluides (Pa S).

N Module De Cisaillement En Phase Solide (Pa).

μ Densité De Potentiel Double Couche.

\bar{n} Vecteur Normal Sortant Vers Une Limite De Domaine.

L Longueur Du Faisceau Ou Longueur Du Domaine 1d (M).

$\Re(.)$ Partie Réelle De La Quantité Entre Parenthèses.

$\bar{\nabla}_y(.)$ Gradient Du Scalaire Entre Parenthèses.

$\bar{\nabla}_y^2(.)$ Laplacien Du Scalaire Entre Parenthèses.

$\bar{\nabla}_y \cdot (.)$ Divergence Du Vecteur Entre Parenthèses.

\bar{n}' Vecteur Normal Vers Une Limite De Domaine.

Ω Volume.

Ω^e Volume Des Eléments Finis

Ω_f Domaine De Fluide.

Ω_s Domaine De Structure.

$p(\vec{r}, t)$ Pression Acoustique (Pa).

$[p]$ Saut De Pression Défini Comme $p^+ - p^-$.

$\langle p^2 \rangle$ Pression Quadratique Moyenne (pa^2).

p_s Pression Statique.

p^+ Pression Acoustique Sur Le Côté Positif D'une Surface Mince.

p^- Pression Acoustique Sur Le Côté Négatif D'une Surface Mince.

p_0 Pression Ambiante.

$Q(\vec{r}, t)$ Densité Volumique De La Source Acoustique.

$Q_s(\vec{r}, t)$ Vitesse Volumique Ou Force De La Source.

ABRIVIATIONS

FEM Méthode Des Eléments Fini.

BEM Méthode Des Eléments Limites

RCFA Analyse de l'origine des causes de la défaillance

SEA Analyse Statistique De L'énergie.

EFEM Méthode D'éléments Finis Energétiques

AG Acoustique Géométrique.

Liste des figures

CHAPITRE 01. ANALYSE DES ENGRENAGES

Figure 1.1 Situation la fonction maintenance dans l'entreprise industrielle	05
Figure1.2 Différentes catégories de maintenance	06
Figure 1.3 Liaison par engrenage	09
Figure 1.5 Transmission de puissance par un train d'engrenage à deux étages	10
Figure 1.6 Engrenages avec une configuration d'axes parallèles.	11
Figure 1.7 Engrenages avec une configuration d'axes sécants.	12
Figure 1.8 Exemple d'une paire d'engrenages à crémaillère et pignon.	12
Figure 1.9 Exemple d'une paire d'engrenages à vis sans fin.	13
Figure 1.10 Surface de fracture par fatigue de flexion de dents d'engrenage. La dent supérieure a plusieurs origines de l'échec	14
Figure 1.11 Fissure de fatigue dans le congé de racine de dents d'engrenage	14
Figure 1.12 Rupture par fatigue(piqures) dans le contact. Surfaces d'une dent d'engrenage. Les marques de plage sont visibles dans certaines des plus grandes fosses	15
Figure 1.13 Type d'adhérence usure des dents d'engrenage	16
Figure 1.14 Usure excessive du type d'abrasion	17
Figure 1.15 Usure du type de polissage	18
Figure 1.16 Eraflure des surfaces des dents d'engrenage	19
Fig. 1.17 Le profile normal est symétrique	23
Figure 1.18 L'usure ou un jeu excessif modifie l'espacement des bandes latérales	24
Figure 1.19 Une dent cassée produira un profile de bandes latérales asymétrique	24
Figure. 1.20 Phénomène pompage de fluide	25

CHAPITRE 02. VIBROACOUSTIQUE LINEAIRE 1D ASPECT ANALYTIQUE ET NUMERIQUE

Figure 2.1 Problème de simulation en vibroacoustique	31
Figure 2.2 Mécanismes de couplage typique dans un problème de vibroacoustique.	32
Figure 2.3 Problèmes de vibroacoustique couplée à l'intérieur (a) et à l'extérieur (b).	32
Figure 2.4 Réponse fréquentielle en vibroacoustique.	34

Figure 2.5 Exemple de l'effet de l'incertitude structurale sur la réponse vibroacoustique d'un simple écran plat. Les FRF (mobilité d'entrée) ont été obtenus en faisant varier au hasard les paramètres géométriques et physiques du système. Valeur moyenne (ligne noire) et étendue (gris).	35
Figure 2.6 Problème de propagation sonore dans un tube contenant un fluide	36
Figure.2.7 Condition aux limites type Dirichlet	42
Figure. 2.8 Conditions aux limites type Neumann	42
Figure 2.9 Deux types de discrétisation géométrique du problème unidimensionnel.	47
Figure 2.10 Convergence du premier mode. Solution exacte par rapport à la solution FEM utilisant deux éléments linéaires	58
Figure 2.11 Convergence des deux premiers modes. Solution exacte par rapport à la solution FEM utilisant trois éléments linéaires	59
Figure 2.6 Domaine des fluides et conditions aux limites.	38
Figure 2.7 Domaine solide et conditions limites.	41

CHAPITRE 3. ETUDE DE CAS

Figure 3.1 Réducteur de vitesse à engrenages droit	63
Figure 3.2 Mise en situation de la source d'excitation en vibroacoustique	64
Figure 3.3 Paramétrage de l'onde acoustique	65
Figure 3.4 les modes de pression acoustique (5 éléments linéaire)	66
Figure 3.5 les modes de pression acoustique linéaire (10 éléments)	68
Figure 3.6 les modes de pression acoustique linéaire (15 éléments)	70
Figure 3.7 les modes de pression acoustique linéaire (20 éléments)	72
Figure 3.8 les modes de pression acoustique quadratique (5 éléments)	74
Figure 3.3 les modes de pression acoustique linéaire (15 éléments)	76
Figure 3.10 les modes de pression acoustique quadratiue (15 éléments)	78
Figure 3.11 les modes de pression acoustique quadratique (20 éléments)	80

Liste des tableaux

Tableau 1.1 : Catégorie de maintenance industrielle	06
Tableau 1.2 : Nomenclature de défaillance des dents d'engrenage	21
Tableau 3.1 caractéristique géométrique des engrenages	64
Tableau 4.2 Données de simulation	65

SOMMAIRE

REMERCIEMENTS

LISTE DES FIGURES

LISTE DES TABLEAUX

NOMENCLATURES

SOMMAIRE

INTRODUCTION GÉNÉRALE 02

CHAPITRE I : DÉFAUTS DES ENGRENAGES

I.1. Introduction.....	04
I.2. La fonction maintenance.....	05
I.2.1. Situation de la fonction maintenance dans une entreprise industrielle	05
I.2.2. Philosophies de la fonction maintenance	06
I.2.3. Maintenance systématique (ou maintenance à base du temps)	07
I.2.4. Maintenance conditionnelle (ou maintenance à base de l'état)	07
I.2.5. Maintenance proactive	08
I.3. Surveillance des engrange	09
I.3.1. Notions sur les engrenages	09
I.3.1.1. Définition.....	09
I.3.1.2. Fonction globale	09
I.3.1.3. Principe fonctionnement des engrenages.....	10
I.3.2. Classification des d'engrenages.....	11
I.3.2.1. Engrenage cylindrique à dents droites	11
I.3.2.2. Engrenage conique.....	11
I.3.2.3. Engrenage à crémaillère	12
I.3.2.4. Engrenage à vis sans fin	12
I.3.3. Défaits et modes de défaillances.....	13
I.3.3.1. Défaits d'engrenages.....	13
I.3.3.2 Modes de défaillances.....	20
I.3.4. Sources d'excitation	25
I.3.4.1. Les principales sources d'excitation.....	25
I.4. Conclusion	20

CHAPITRE II : VIBROACOUSTIQUE LINEAIRE 1D ASPECT ANALYTIQUE ET NUMERIQUE

II.1. Introduction	28
II.2. Acoustique	29
II.2.1. Définition.....	29
II.2.2. Acoustique physique	29
II.3. Vibroacoustique.....	31
II.3.1. Définition.....	31
II.3.2. Phénomène de vibroacoustique	31
II.3.3. Catégories de problèmes en vibroacoustique	32
II.3.4. Domaines des fréquences	34
II.4. Acoustique Physique Lineaire.....	36
II.4.1. Position du problème physique	36
II.4.2. Hypothèses simplificatrices.....	36
II.4.3. Equations gouvernantes en milieu fluide	37
II.4.3.1. Equation de conservation de masse.....	37
II.4.3.2 Equation de conservation des quantités de mouvement.....	39
II.4.3.3. Equation de compressibilité	40
II.4.3.4. Equation d'onde	41
II.5. Solution Analytique.....	42
II.5.1. Conditions aux frontières	42
II.5.1.1. Conditions aux limites.....	42
II.5.1.2. Conditions initiales.....	43
II.5.2. Étude de la solution analytique	43
II.5.2.1. Solution analytique.....	43
II.5.2.2. Solution pour une onde stationnaire.....	44
II.5.3. Cas général	44
II.6. Solution numérique	45
II.6.1. Formulation intégrale faible	45
II.6.2. Maillage ou discrétisation géométrique	46
II.6.3. Approximation des variables et calcul des matrices élémentaires	46
II.6.3.1. Approximation nodale de la variable	47
II.6.3.2. Approximation linéaire.....	47
II.6.3.3. Approximation quadratique.....	47
II.6.3.4. Approximation nodale de la forme faiblement intégrale.....	49

II.6.3.5. Évaluation des matrices élémentaires.....	51
II.6.4. Assemblage	54
II.6.5. Imposition de conditions ou contraintes limites.....	56
II.6.6. Invocation de la condition de stationnarité et étude de la convergence de la SN	57
II.7. Conclusion.....	60
CHAPITRE III : ETUDE DE CAS	
III.1. Introduction.....	62
III 2. Description du problème	63
III.3. Simulation numérique	65
III.3.1. Enoncés du problème	65
III.3.2. Résultats et discussions.....	66
III.3.2.1. Simulation éléments finis linéaire.....	66
III.3.2.1. Simulation éléments finis quadratique.....	74
III.4. Conclusion	82
CONCLUSION GENERALE	84
BIBLIOGRAPHIES	86

INTRODUCTION GÉNÉRALE

Le présent mémoire s'intègre dans un contexte technologique, en relation avec le diagnostic machine et plus particulièrement celui des défauts d'engrenages. Deux catégories d'engrenages sont à distinguer. La catégorie des engrenages ouverts, où les roues dentées ne sont pas contenues dans un carter et la catégorie des engrenages fermés, c'est-dire ceux dont les roues dentées sont contenues et renfermées dans un carter. Cette dernière catégorie trouve son application dans les boîtes de vitesses, les réducteurs et les multiplicateurs de vitesses utilisés dans le secteur des installations industrielles, du transport et manutention.

Cependant, ces organes à dominante mécanique émettent du bruit et le bruit rayonné par ces systèmes mécaniques est souvent perçu comme gênant, de telle manière que les fabricants tentent par tous les moyens de le limiter, voire de l'éliminer. Afin de résoudre efficacement le problème du rayonnement acoustique, il est primordial de comprendre le comportement dynamique du système. Ainsi l'ingénieur-concepteur pourra déterminer la cause profonde du problème et préconiser une solution appropriée.

A ce propos, l'analyse modale constitue un outil efficace pour identifier la résonance structurelle et aider ainsi à résoudre les problèmes de bruits et vibrations excessifs. Les méthodes d'analyse modale expérimentale et analytique en se subdivisant en deux grandes familles : les méthodes opérant dans le domaine temporel et celles opérant dans le domaine fréquentiel. Les calculs modaux sont très efficaces et permettent une évaluation performante des modifications structurelles de réponses de toute sorte. Les résultats des tests et analyses modales sont utilisés dans différentes applications de simulation et de test, y compris les calculs de réponse vibratoire, l'analyse des causes profondes des problèmes de vibration et la détection des dommages, mais également pour accroître la flexibilité de l'analyse multi-corps et accélérer la durabilité et les simulations vibro-acoustiques.

Pour ce faire, notre mémoire a été structuré en trois chapitres. Le premier chapitre est consacré à la fonction maintenance et ses philosophies ainsi qu'aux engrenages et leurs défauts. Le deuxième chapitre présente la vibroacoustique à travers sa définition, son aspect analytique avec la solution générale de l'équation de la propagation des ondes acoustiques et son aspect numérique avec la méthode des éléments finis. Le troisième chapitre est une analyse modale unidimensionnelle du signal acoustique à travers la comparaison entre éléments finis linéaire et élément quadratique à 5, 10, 15 et 20 nœuds tel que pour chaque cas un résultat et des interprétations physiques ont été donnés. A la fin une conclusion générale concernant l'atteinte des objectifs et la qualité des résultats obtenus a été donnée accompagné des perspectives futures de notre travail.

Chapitre 01

DÉFAUTS DES ENGRENAGES

1.1 INTRODUCTION

Le marché des installations et des machines industrielles étant soumis à une concurrence sévère, l'appréhension de l'utilisateur final de ce type de produit industriel change de jour en jour. Car la perception de ce type de produits est dictée par critères tels que la qualité totale, la sûreté de fonctionnement, la santé, l'environnement, l'économie d'énergie et le coût de possession. Ainsi, pour s'adapter à la dynamique du marché industriel et pour fournir les biens d'équipement requis, les systèmes industriels, les installations ainsi que les machines doivent aussi évoluer en fonction des exigences des clients industriels potentiels

Dans le cas des machines tournantes qui occupent une place prépondérante dans les installations industrielles elles sont actuellement conçues pour fonctionner de manière presque supercritique, et cette tendance est susceptible de se poursuivre sous les exigences concurrentielles du marché. Ainsi, leurs capacités, leurs systèmes de contrôle, de surveillance et de traitement doivent être améliorés, actualisés et modernisés de manière continue.

Dans ce contexte, la surveillance et le contrôle des vibrations excessives, du bruit, de la température, des poussières et émissions dangereuses des installations et des machines de divers types sont requis par une législation sur la responsabilité des produits défectueux et l'application sans scrupules de la technologie. Ainsi, l'ingénieur d'aujourd'hui partage la responsabilité morale de minimiser les risques de toute natures liés aux processus industriels [1].

1.2. LA FONCTION MAINTENANCE

1.2.1. Situation de la fonction maintenance dans une entreprise industrielle

Du point de vue fonctionnel, une entreprise industrielle est érigée sur deux grandes catégories de fonctions (**figure 1.1**).

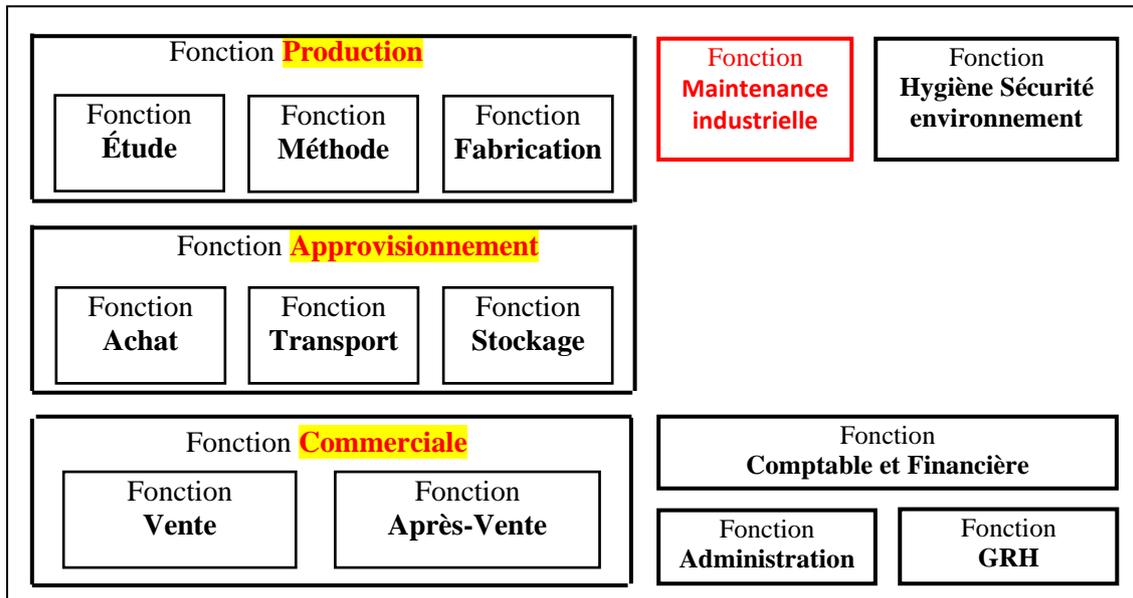


Fig. 1.1: Situation la fonction maintenance dans l'entreprise industrielle

Les fonctions principales : Production, approvisionnement et commercialisation et les fonctions auxiliaires : Administration, ressources humaines, finances, maintenance, sécurité, etc... Toutes ces fonctions sont interconnectées et interfacées pour assurer l'acte de production. Dans une entreprise industrielle, la maintenance peut être appelé à jouer deux grands rôles :

Rôle N°1: Maintenance de l'outil de production.

- Assurer la disponibilité la plus élevée possibles des équipements de production (Machines, machines-outils, fours, installations et engins de levage et de manutention).
- Maintenir les appareils de mesure ou de contrôle (opérations d'étalonnage, de calibration, d'entretien ou de réparation)

Rôle N°2 : Maintenance des infrastructures.

- Entretien et maintenir la structure des bâtiments en bon état.
- Maintenir l'installation de ventilation, chauffage, climatisation, éclairage,
- Maintenir les équipements de sécurité et de protection de l'environnement tel que les extracteurs d'airs, ventilateurs.
- Contrôler et surveiller les travaux concernant l'hygiène, la sécurité, la pollution, la gestion de l'énergie...

Dans le contexte du premier rôle, les hommes qui assurent l'activité de la fonction maintenance sont constamment confrontés au problème suivant : " Comment assurer la disponibilité de l'outil de production tout en visant à rentabiliser toute action de maintenance". Les éléments de la solution sont :

1. L'adoption d'une stratégie de maintenance et mettre en œuvre un plan d'action afin de faire diminuer le taux de défaillance ou bien le cas échéant ne plus subir de défaillances.
2. Prévision de l'apparition et des conséquences des défaillances par des modèles probabilistes

1.2.2 Philosophies de la fonction maintenance

Malgré la grande différence dans la nature de leurs opérations, les différentes philosophies de maintenance appliquées pour les installations industrielles sont légèrement semblable (**Figure 1.2**). Ces philosophies sont habituellement classées en quatre catégories. Le **tableau 1.1** donne les différentes catégories sous dénomination francophone et anglophone

Tableau 1.1: Catégorie de maintenance industrielle

Catégorie	Dénomination francophone	Dénomination anglophone
I	- Maintenance corrective - Maintenance palliative - Maintenance de catastrophe	- Breakdown maintenance - Run to failure maintenance
II	- Maintenance systématique - Maintenance à base de l'âge	- Preventive maintenance - Time-Based Maintenance (TBM)
III	- Maintenance conditionnelle - Maintenance prévisionnelle - Maintenance prédictive - Maintenance à base de l'état	- Predictive maintenance - Condition-Based Maintenance (CBM)
IV	- Maintenance proactive	- Proactive maintenance - Prevention maintenance

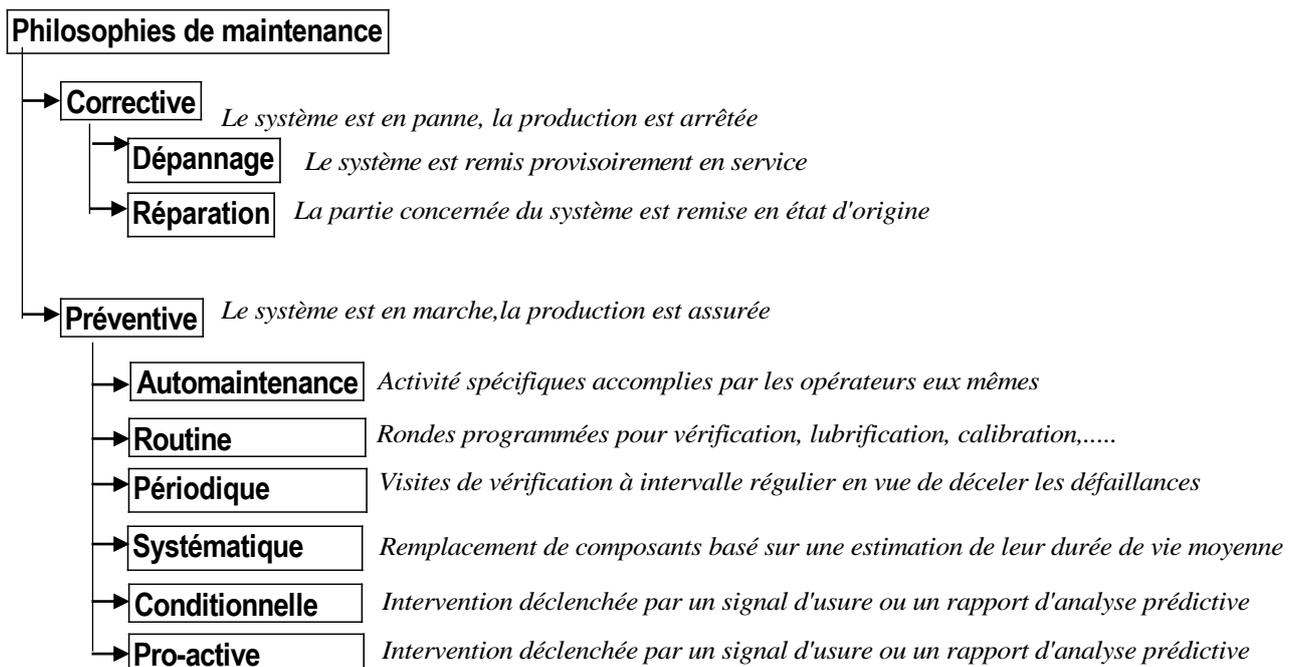


Fig.1.2: Différentes catégories de maintenance [2]

1.2. 3 Maintenance systématique (ou maintenance à base du temps)

C'est une philosophie qui sous-tend la maintenance préventive. Elle concerne la planification des activités de maintenance à intervalles de temps prédéterminés, basés sur des jours calendaires ou des heures de fonctionnement des équipements de production. Le remplacement de l'élément endommagé est effectué avant la survenance de sa défaillance.

La maintenance systématique est appliquée aux équipements dits essentiels. C'est-à-dire des équipements indispensables au processus de production ayant de grandes puissances ou grandes vitesses mais sans service continu et dont les défaillances entravent le processus de production et/ou affecte la sécurité de l'installation. Ce type d'équipement requière un système d'instrumentation installé afin de nous fournir des signaux de sortie sur son état.

Les principaux inconvénients de ce type de maintenance sont que :

- L'échéancier de maintenance peut mener à l'exécution des tâches d'entretien trop tôt ou trop tard par rapport à la limite de la durée de vie d'un composant ou d'un élément.
- Risques de remplacer des éléments sans aucune preuve de leurs dysfonctionnement, alors qu'ils peuvent encore avoir une durée de vie résiduelle.
- Risques d'une diminution de la production pour cause de maintenance.
- Risques de diminution des performances en raison de méthodes de maintenance incorrectes. C'est le cas des équipements en bon état qui se retrouvent démontés, leurs bonnes pièces remplacées par de nouvelles pièces mal montées avec pour conséquences des résultats néfastes pour la production.
- Risques de priver le processus de production d'un équipement, suite à l'absence de la maintenance d'une demande de mise à disposition, pour révision programmée après un certain nombre d'heures de fonctionnement de l'équipement en question.

1.2.4 Maintenance conditionnelle (ou maintenance à base de l'état)

C'est une philosophie qui sous-tend la maintenance préventive. Elle concerne le déclenchement d'une action de maintenance uniquement lorsqu'une défaillance fonctionnelle est détectée. Elle est subordonnée à un type d'événement prédéterminé (auto diagnostic, information d'un capteur, mesure d'une usure, etc.) révélateur de l'état de dégradation du bien. Elle s'applique aux éléments dont la dégradation peut être mise en évidence par des indicateurs.

Cette forme de maintenance permet d'assurer le suivi continu des équipements en service, dans le but de prévenir des défaillances attendues. Elle n'implique pas la connaissance de la loi de dégradation, la décision d'intervention préventive est prise lorsqu'il y a évidence expérimentale de défaut imminent en approche d'un seuil de dégradation prédéterminé.

La condition première est que le matériel s'y prête (existence d'une dégradation progressive et détectable) et qu'il mérite cette prise de charge (criticité du matériel). Par exemple elle est peu exploitée pour surveiller les machines de production des industries type atelier (taux de pollution des huiles de graissage, le PH des liquides d'arrosage, les vibrations, les bruits, etc..). Mais, elle est largement pratiquée sur les machines de production des industries type process.

La maintenance conditionnelle est appliquée aux équipements dits critiques. C'est-à-dire des équipements indispensables au processus de production ayant une forte valeur ajoutée, de grandes puissances ou grandes vitesses avec service continu et dont les défaillances entravent le processus de production et affecte la sécurité de l'installation. Si l'équipement est laissé sans surveillance, l'occurrence d'une défaillance pourrait entraîner des défaillances secondaires coûteuses. En conséquence, ce type d'équipement requiert l'installation à plein temps une instrumentation pour une surveillance continue de son état. Ainsi, les conditions opérationnelles sont surveillées de manière continue et lorsque les tendances d'un paramètre de suivi dérivent par rapport aux normes, les anomalies et les défauts sont détectés. Il s'en suit que les éléments défectueux de l'équipement sont identifiés et programmés pour une intervention de maintenance. Par suite, l'équipement en question, sera alors mis à disposition du service de maintenance durant une période qui convient au service de production et les éléments défaillants seront remplacés.

Les principaux inconvénients de ce type de maintenance est que :

- Les travaux de maintenance peuvent durer longtemps en raison d'une mauvaise évaluation de la défaillance de l'équipement.
- Pour suivre les tendances malsaines dans les vibrations, la température ou la lubrification nécessitent que l'établissement acquière un équipement spécialisé pour surveiller ces paramètres et assurer la formation du personnel (ou embaucher du personnel qualifié).
- L'alternative consiste à sous-traiter cette tâche à un entrepreneur compétent pour effectuer les tâches de surveillance des machines.

1.2.5 Maintenance proactive

C'est une philosophie qui sous-tend la maintenance préventive. Elle met l'accent sur la recherche de toutes les défaillances jusqu'à l'origine de leur cause première. Chaque défaillance est analysée et des mesures proactives sont prises pour éviter qu'elle ne se reproduise. Pour détecter et localiser l'origine qui cause le défaut, la maintenance proactive utilise toutes les techniques de maintenance systématique et conditionnelle en association avec la RCFA (Root Cause Failure Analysis ou Analyse de l'origine des causes de la défaillance). La RCFA nous fournit le moyen d'isoler et d'identifier les causes spécifiques des anomalies ou des défauts observés sur un système technique.

1.3 SURVEILLANCE DES ENGRANGES

1.3.1 Notions sur les engrenages

1.3.1.1 Définition

L'engrenage est un mécanisme élémentaire constitué de deux pièces dentées appelés roues dentées (Pignon + Roue), dont l'une entraîne l'autre par l'action de dents successivement en contact. Les roues dentées, généralement de géométries cylindriques ou coniques adoptant une de position relative invariable, seront animées de mouvements de rotation autour d'axes fixes Δ_1 et Δ_2 . Si la différence de diamètre entre la roue motrice et la roue menée est grande, la plus petite est appelée pignon (Figure 1.3).

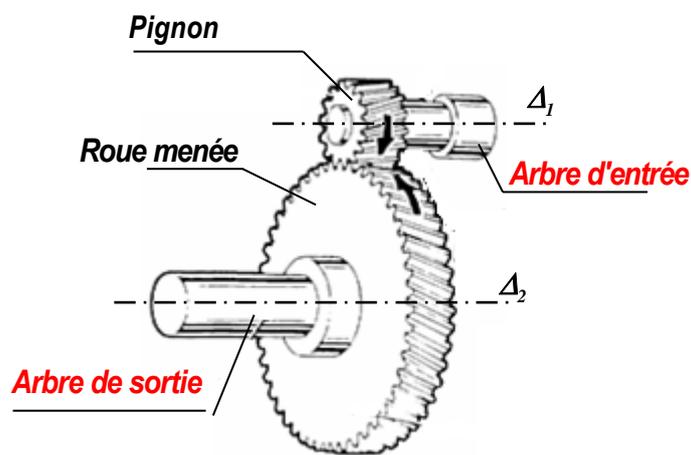


Fig 1.3: Liaison par engrenage

1.3.1.2 Fonction globale

La fonction globale d'un mécanisme à base d'engrenages est d'assurer sans modification du mouvement, la transmission par obstacles (Dents) d'une puissance mécanique, entre deux arbres non en prolongement avec variation du couple et de la vitesse de transmission.

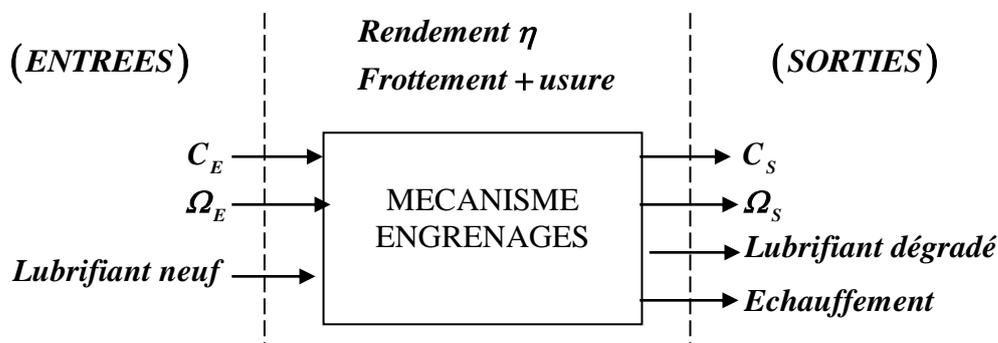


Fig 1.4: Fonction globale d'un engrenage

1.3.1.3 Principe de fonctionnement des engrenages

Le principe de la transmission par engrenages est basé sur l'utilisation d'une roue dentée menante qui transmet le mouvement et la puissance à une autre roue dentée menée. Ces deux roues dentées doivent présenter le même pas, pour permettre une continuité d'engrènement. La transmission de puissance est basée sur le transfert du couple mécanique d'un arbre de transmission à un autre. Ce couple est généré par l'action mécanique de contact entre les dents des roues menantes et menées (figure 1.5).

- Lors de l'engrènement, les dents en contact sont sollicitées au phénomène de flexion et sous l'effet d'actions mécaniques cycliques on assiste à la fatigue et par suite la rupture des dents.
- Les défauts caractéristiques des engrenages sont liés à :
 - L'endommagement de la denture (Usure de dents, Denture abîmée ou brisée)
 - Mauvais centrage,
 - Mauvaise lubrification, etc...

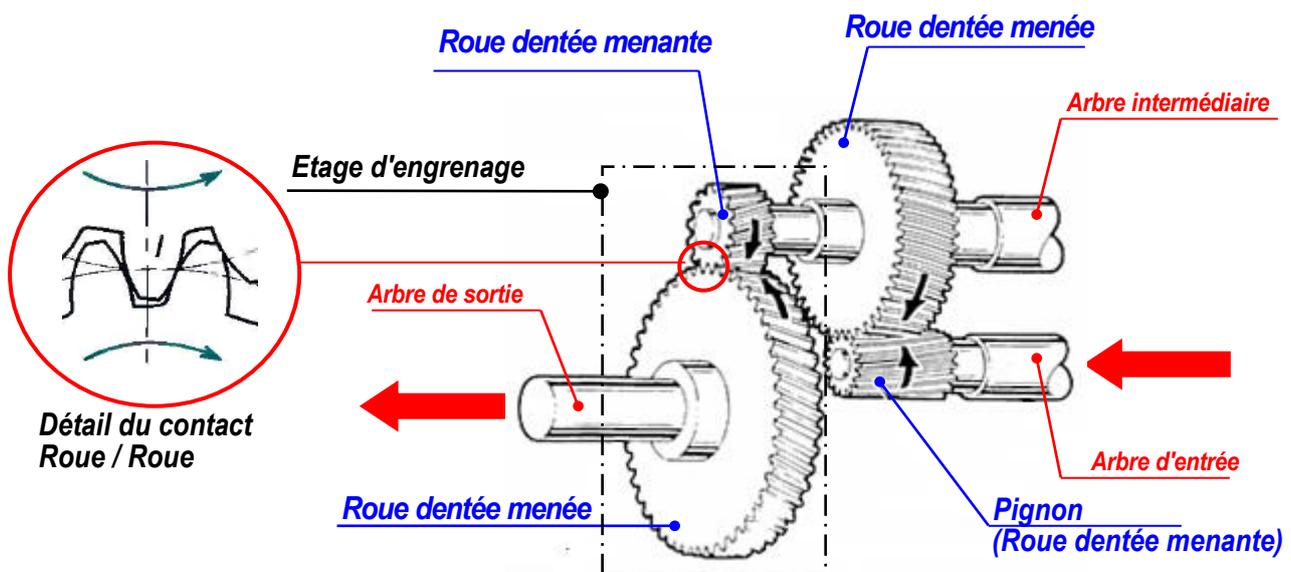


Fig 1.5: Transmission de puissance par un train d'engrenage à deux étages

Les engrenages servent principalement à transmettre un mouvement circulaire ou de rotation. S'ils sont munis de roues engrenant des sections dentées rectilignes, ils transforment un mouvement rectiligne, alternatif ou non, en mouvement de rotation, et inversement. Plusieurs roues d'engrenage transmettant le mouvement d'un arbre à un autre constituent un équipage ou train d'engrenages.

1.3.2 Classification des engrenages

1.3.2.1 Engrenage cylindrique à dents droites

Ce sont les engrenages les plus simples. Leurs roues comportent, au niveau de leur circonférence, des dents taillées parallèlement à l'axe. Les engrenages droits transmettent un mouvement de rotation entre deux arbres ou d'autres organes dont les axes sont parallèles. Dans l'engrenage droit le plus simple - l'engrenage extérieur (pour lequel les dents sont sur la face externe du cylindre) -, l'arbre mené tourne dans le sens opposé à celui de l'arbre moteur. Pour que les deux arbres effectuent une rotation dans le même sens, un arbre intermédiaire doit intervenir entre l'arbre menant et l'arbre mené. L'arbre intermédiaire tourne dans le sens opposé à celui de l'arbre moteur et entraîne donc l'arbre mené dans une rotation de même sens que celle de l'arbre moteur.

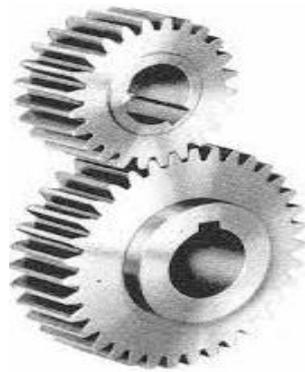


Figure 1.6 Engrenages avec une configuration d'axes parallèles. [6]

Le rapport des vitesses de rotation de deux roues est l'inverse du rapport de leur rayon, donc de leur circonférence. La vitesse de rotation de l'arbre mené est donc proportionnelle au nombre de dents de chaque roue. Ainsi, une roue comportant dix dents a une vitesse de rotation double d'une roue à vingt dents qu'elle entraîne. En faisant appel à un train d'engrenages, le rapport entre la vitesse de l'arbre moteur et celle de l'arbre mené peut varier dans de larges proportions.

Les engrenages intérieurs, ou à couronne, sont des variantes de l'engrenage droit, les dents étant taillées sur le pourtour interne d'une couronne ou d'une roue à rebord. En général, les engrenages intérieurs consistent en une couronne qui mène ou est menée par un pignon.

1.3.2.2 Engrenage conique

Les roues de ces engrenages ne sont pas des cylindres, mais des cônes. Il existe des roues dentées coniques à denture droite et des roues dentées coniques à dents obliques et à dents spirales. Tous ces engrenages servent à transmettre la rotation entre des arbres dont les axes sont concourants. Ceux à dents spirales, c'est-à-dire dont les dents ont la forme d'un arc de cercle, sont les plus utilisés, car ils sont plus silencieux.



Figure 1.7 Engrenages avec une configuration d'axes sécants. [6]

1.3.2.3 Engrenage à crémaillère

La crémaillère est une plaque ou une barre dentée, déterminant un mouvement rectiligne, équivalant à une roue d'engrenage de rayon infini. Elle sert à transformer la rotation d'un pignon en un déplacement rectiligne, alternatif ou non, de l'axe de rotation du pignon ou l'inverse.



Figure 1.8 Exemple d'une paire d'engrenages à crémaillère et pignon. [6]

1.3.2.4 Engrenage à vis sans fin

On l'appelle également engrenage à roue et vis. La vis sans fin est constituée d'un long cylindre étroit, présentant une denture hélicoïdale continue, analogue au filetage d'une vis cylindrique, se mettant en prise avec une roue à denture hélicoïdale. Les engrenages à vis sans fin diffèrent des engrenages à roues à denture hélicoïdale. En effet, les dents de la vis sans fin s'engagent continûment en glissant sur celles de la roue menée, mais ne leur appliquent pas directement un effort de rotation. Les vis sans fin servent principalement à transmettre une rotation, avec une forte réduction de vitesse, entre deux arbres orthogonaux.



Figure 1.9 Exemple d'une paire d'engrenages à vis sans fin. [6]

1.3.3 Défauts et modes de défaillances

1.3.3.1 Défauts d'engrenages

1°. Fatigue en flexion.

Ce type de défaillance courant est une défaillance lente et progressive causée par des charges répétées. Il se déroule en trois étapes :

- Initiation à la fissure. La déformation plastique se produit dans les zones de concentration de contraintes ou de discontinuités, telles que des encoches ou des inclusions, conduisant à des fissures microscopiques.
- Propagation d'une fissure. Une fissure lisse se développe perpendiculairement à la contrainte de traction maximale.
- Fracture. Lorsque la fissure s'agrandit suffisamment, elle provoque une rupture soudaine. Au fur et à mesure qu'une fissure de fatigue se propage, elle laisse une série de « marques de plage » (visibles à l'œil nu) qui correspondent aux positions où la fissure s'est arrêtée (*figure 1.10*). L'origine de la fissure est généralement entourée de plusieurs marques de plage incurvées concentriques.



Figure 1.10 Surface de fracture par fatigue de flexion de dents d'engrenage .La dent supérieur a plusieurs origines de l'échec[7]

Classe/mode : fatigue de flexion/cycle élevé

Définition : Fatigue dominée par la déformation élastique avec défaillance dans plus de 10 000 cycles

Morphologie : Surface de rupture lisse avec marques de plage ou de cliquet. Balayage d'électrons la microscopie peut montrer des stries.

Cause : Contrainte de flexion élevée. Faible fatigue

Remède : Réduire la contrainte de flexion. Augmenter la fatigue . Utiliser une microstructure appropriée

La plupart des défaillances par fatigue des dents d'engrenage se produisent dans le congé de fond de dent (**Figure 1.11**) où la contrainte cyclique est inférieure à la limite d'élasticité du matériau et le nombre de cycles est supérieur à 10 000. Cette condition est appelée fatigue à cycle élevé. Une grande partie de la durée de vie en fatigue est consacrée à l'amorçage des fissures, alors qu'un temps plus court est nécessaire pour que les fissures se propagent.



Figure 1.11 Fissure de fatigue dans le congé de racine de dents d'engrenage[7]

Classe/mode : fatigue de flexion/cycle élevé/racine fissures de filet

Définition : Fatigue à haut cycle avec fissures dans filets de racine

Morphologie : Fissure à la base de la dent. Origine sur le congé de racine au point de contrainte de flexion maximale

Cause : Contrainte de flexion élevée. Faible fatigue force

Remède : Réduire la contrainte de flexion.

Les concentrations de contraintes dans le congé provoquent souvent des origines de fissures multiples, chacune produisant des fissures distinctes. Dans de tels cas, les fissures se propagent sur différents plans et peuvent se rejoindre pour former une marche, appelée marque de cliquet .

2°. fatigue des contacts.

Dans un autre mode de défaillance, appelé contact ou fatigue hertzienne, des contraintes répétées provoquent des fissures superficielles et le détachement de fragments métalliques de la surface de contact de la dent (Figure 1.12). Les types de fatigue de surface les plus courants sont les macropiqûres (visibles à l'œil nu) et les micropiqûres.



Figure 1.12 Rupture par fatigue (piques) dans le contact. Surfaces d'une dent d'engrenage. Les marques de plage sont visibles dans certaines des plus grandes fosses [7]

Classe/Mode : *fatigue hertzienne/macropitting/flocon*

Définition : *Macropitting progressif provoquant de minces flocons de matériau à éclater*

Morphologie : *Grandes fosses peu profondes. En forme d'éventail les fissures se développent à partir de l'origine et séparent de minces flocons.*

Cause : *Stress de contact élevé. Faible fatigue force. Épaisseur de film spécifique inadéquate*

Remède : *Réduisez le stress de contact. Augmenter la fatigue force. Augmenter l'épaisseur spécifique du film*

La macropiqûre se produit lorsque les fissures de fatigue commencent à la surface ou sous la surface. Au fur et à mesure que les fissures se développent, elles provoquent l'éclatement d'un morceau de matériau de surface, formant une fosse aux arêtes vives. En fonction du type de dommage, le macropitting est classé comme non progressif, progressif, éclat ou éclat. Le type non progressif consiste en des fosses de moins de 1 mm de diamètre dans des zones localisées. Ces fosses répartissent la charge plus uniformément en supprimant les points hauts sur la surface, après quoi les piqûres s'arrêtent. La macropiqûre progressive consiste en des piqûres de diamètre supérieur à 1 mm qui couvrent une partie importante de la surface de la dent. Dans un type, appelé orthographe, les fosses fusionnent et forment des cratères irréguliers sur une grande surface. Dans le macropitting d'éclats, de minces flocons de matériau éclatent et forment des fosses triangulaires relativement peu profondes, mais de grande surface. Le micropitting a un aspect givré, mat ou teinté gris. Au grossissement, la surface est couverte de très fines piqûres (< 20 µm de profondeur). Les

coupes métallurgiques à travers ces fosses montrent des fissures de fatigue qui peuvent s'étendre plus profondément que les fosses.

3°. Portée

L'usure de la surface des dents d'engrenage implique l'enlèvement ou le déplacement de matériau en raison d'une action mécanique, chimique ou électrique. Les trois principaux types d'usure sont l'adhérence, l'abrasion et le polissage. L'adhérence est le transfert de matière de la surface d'une dent à celle d'une autre en raison du soudage et du déchirement (*Figure 1.13*). Il est confiné aux couches d'oxyde sur la surface de la dent. L'adhérence est classée comme légère ou modérée, tandis qu'une adhérence sévère est appelée éraflure (décrite plus loin).

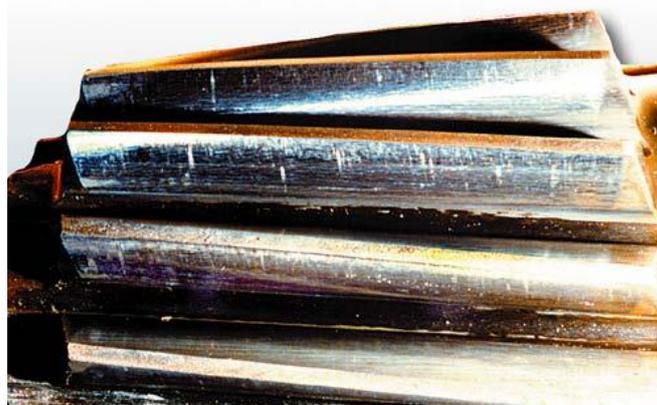


Figure 1.13 Type d'adhérence usure des dents d'engrenage[7]

Classe/mode : usure/adhérence

Définition : transfert de matière entre les accouplements surfaces dentaires dues à la microsoudure et à la déchirure

Morphologie : Les dents semblent intactes. La microscopie électronique à balayage montre lisse microplateau entre les sillons.

Cause : Usure normale des aspérités lors du rodage

Remède : Utiliser des surfaces lisses. Rodage neuf engrenages. Vidanger, rincer et remplacer l'huile après le rodage

En règle générale, une légère adhérence se produit pendant le rodage du train d'engrenages et disparaît après l'usure des imperfections locales de la surface. À l'œil nu, la surface semble intacte et les marques d'usinage sont toujours visibles. Une adhérence modérée enlève tout ou partie des marques d'usinage de la surface de contact. Dans certaines conditions, cela peut entraîner une usure excessive. L'abrasion est causée par des contaminants dans le lubrifiant tels que le sable, le tartre, la

rouille, les copeaux d'usinage, la poussière de meulage, les éclaboussures de soudure et les débris d'usure. Il se présente sous la forme de rayures ou de rainures lisses et parallèles (*Figure 1.14*).

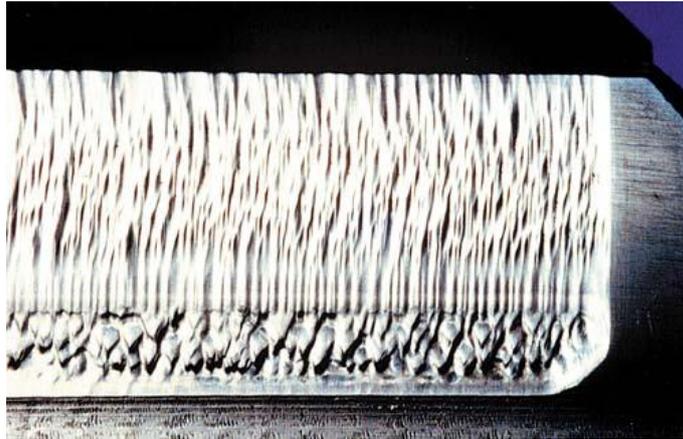


Figure 1.14 Usure excessive du type d'abrasion[7]

Classe/Mode : Usure/abrasion

Définition : Enlèvement et déplacement de surface matériau par des particules dures ou des aspérités dures

Morphologie : Rayures ou rainures en direction de glissement. Spectacles de microscopie électronique à balayage lisse, propre, sillons.

Cause : Contamination par des particules dures et coupantes (3 corps). Aspérités dures sur le maté (2 corps)

Remède : Enlevez les abrasifs. Utilisez des dents à surface durcie et des surfaces lisses.

L'abrasion varie de légère à sévère. L'abrasion légère consiste en de fines rayures qui n'enlèvent pas une quantité importante de matière de la surface de contact de la dent, alors qu'une abrasion modérée enlève la plupart des marques d'usinage. Une abrasion sévère, qui fait disparaître toutes les marques d'usinage, peut provoquer des gradins d'usure aux extrémités de la surface de contact et dans le creux. L'épaisseur de la dent peut être considérablement réduite et, dans certains cas, la pointe de la dent est réduite à une arête vive. Enfin, le polissage est une abrasion à petite échelle qui confère une finition semblable à un miroir aux dents d'engrenage (*Figure 1.15*). Le grossissement montre la surface à couvrir de fines rayures dans le sens du glissement. Le polissage est favorisé par des lubrifiants chimiquement actifs qui sont contaminés par un abrasif fin.

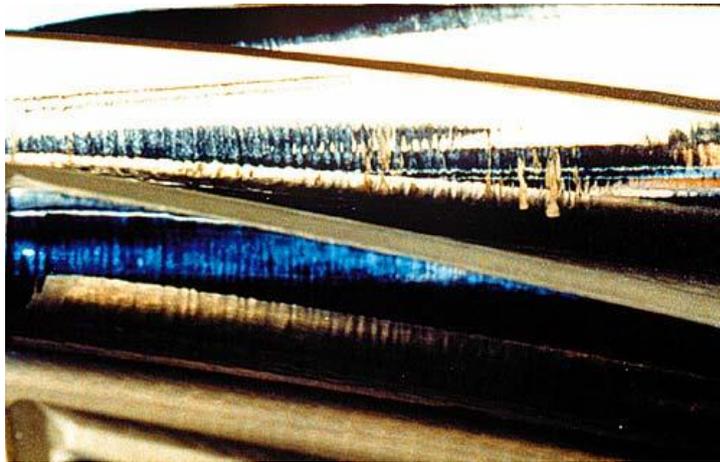


Figure 1.15 Usure du type de polissage[7]

Classe/Mode : Usure/polissage

Définition : Abrasion à petite échelle favorisée par additifs anti-usure chimiquement réactifs

Morphologie : Finition miroir. Lisse ou ondulé surface. La microscopie électronique à balayage montre bien rayures.

Cause : formation de films additifs et élimination de films par abrasifs fins

Remède : Utilisez des additifs moins actifs chimiquement. Enlever les abrasifs

Le polissage va de léger à sévère. Sa forme douce, qui se limite aux points hauts de la surface, se produit généralement pendant le rodage et cesse avant que les marques d'usinage ne soient supprimées. Un polissage modéré supprime la plupart des marques d'usinage. Un polissage sévère supprime toutes les marques d'usinage de la surface de contact de la dent. La surface peut être ondulée ou présenter des gradins d'usure aux extrémités de la zone de contact et dans le creux.

4°Égratignures.

Une forte adhérence ou éraflure transfère le métal de la surface d'une dent à celle d'une autre (**Figure 1.16**). En règle générale, il se produit dans l'addendum ou le creux en bandes le long de la direction du glissement, bien que les concentrations de charge puissent provoquer des éraflures localisées. Les surfaces ont une texture rugueuse ou mate qui, sous grossissement, semble être déchirée et déformée plastiquement.

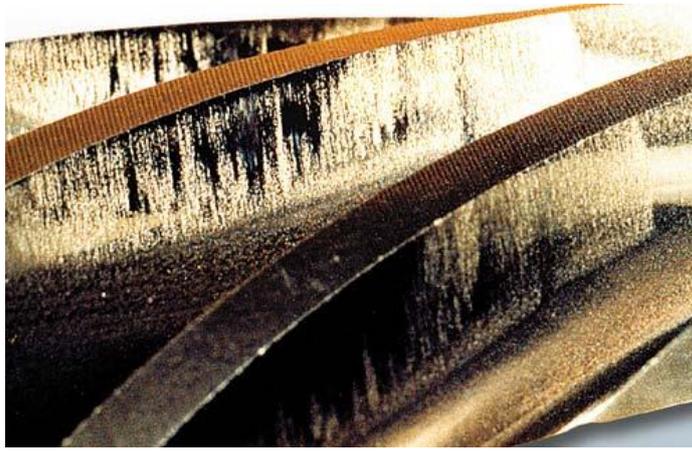


Figure 1.16 Érafleur des surfaces des dents d'engrenage[7]

Classe/mode : érafleur

Définition : Adhérence sévère et transfert de métal entre les dents en raison de la soudure et de la déchirure

Morphologie : Stries rugueuses et mates le long sens de glissement dans les addenda, les dedenda ou les deux

Cause : la température de contact de la dent dépasse température de frottement du lubrifiant.

Remède : Réduire la température de contact. Utilisez une huile anti-usure à haute viscosité. Améliorer le refroidissement.

Les éraflures vont de légères à sévères. Une légère érafleur se produit sur de petites zones d'une dent et se limite aux pics de surface. Généralement, il n'est pas progressif. Des éraflures modérées se produisent dans des plaques qui couvrent des parties importantes des dents. Si les conditions de fonctionnement ne changent pas, cela peut être progressif. Des éraflures sévères se produisent sur des parties importantes d'une dent d'engrenage (par exemple, l'intégralité de l'addenda ou du dedendum). Dans certains cas, le matériau de surface est déformé plastiquement et déplacé sur la pointe de la dent ou dans la racine de la dent. À moins d'être corrigé, il est généralement progressif.

1.3.3.2 Modes de défaillances

De nombreux trains de machines utilisent des ensembles d'entraînement par engrenages pour connecter le conducteur au machine principale. Les engrenages et les boîtes de vitesses ont généralement plusieurs spectres de vibration associé au fonctionnement normal. Caractérisation de la vibration d'une boîte de vitesses signature box est difficile à acquérir mais est un outil précieux pour le diagnostic problèmes de train-machine.

La difficulté est que (1) il est souvent difficile de monter le transducteur à proximité des engrenages individuels, et (2) le nombre de vibrations sources dans un entraînement à plusieurs engrenages se traduit par un assortiment complexe d'engrenages, modulation et fréquences de fonctionnement. Fortes vibrations de la transmission (boîte de vitesses) sont généralement dues à la résonance entre la fréquence naturelle d'un système et la vitesse de certains arbres. L'excitation résonnante provient de, et est proportionnelle aux imprécisions des engrenages qui provoquent de petites fluctuations périodiques de la vitesse de la ligne de pas.

Les machines complexes ont généralement de nombreuses zones de résonance dans leur fonctionnement plage de vitesse car chaque arbre peut exciter une résonance du système. En résonance ces les excitations cycliques peuvent provoquer des amplitudes vibratoires et des contraintes importantes. Fondamentalement, le couple de forçage résultant des imprécisions des engrenages est faible. Cependant, sous conditions de résonance la croissance de l'amplitude de torsion n'est limitée que par l'amortissement ce mode de vibration. Dans les boîtes de vitesses typiques, cet amortissement est souvent faible et permet au couple excité par l'engrenage de générer de grandes amplitudes de vibration sous conditions de résonance. Un autre fait important à propos des jeux d'engrenages est que tous les jeux d'engrenages ont une conception précharger et créer une charge induite (poussée) en fonctionnement normal.

La direction, radiale ou axiale, de la charge axiale des trains d'engrenages typiques fournira un aperçu dans la précharge normale et les charges induites associées à chaque type d'engrenage. Pour mettre en œuvre un programme de maintenance prédictive, il faut beaucoup de temps passé à comprendre la dynamique du fonctionnement des engrenages/boîtes de vitesses et les fréquences généralement associé à la boîte de vitesses. Au minimum, les éléments suivants doivent être identifié. Les engrenages génèrent un profil dynamique unique qui peut être utilisé pour évaluer les engrenages état. De plus, ce profil peut être utilisé comme un outil pour évaluer le fonctionnement dynamique de la boîte de vitesses et de son système de processus associé.

Tableau 1.2 Nomenclature de défaillance des dents d'engrenage[8]

Class	Mode général	Mode spécifique
Pliant Fatigue	Fatigue à bas cycle Fatigue à cycle élevé	Fissures du filet de racine Fissures de profil Fissures au bout des dents
Contact Fatigue	Macro piqûres Micripiter Fatigue sous-cas	Non progressif Progressive Éclatement Flocon
Porter	Adhésion Abrasion Corrosion Corrosion de contact Polissage Décharge électrique Cavitation Érosion	Bénin Modérer Bénin Modérer Sévère Bénin Modérer Sévère
Éraflure	Éraflure	Bénin Modérer Sévère
Surcharge	Fracture fragile Rupture ductile Fracture à modes mixtes Déformation plastique	Flux froid Flux chaud Échancrure Roulant Claquer Billonnage Rendement du filet de racine Interférence pointe-racine
Craquer	Fissures de durcissement Meulage des fissures Fissures de la toile de rimande Séparation cas-noyau	

1°. Dommages à l'équipement

Tous les jeux d'engrenages créent une composante de fréquence, appelée maillage d'engrenage. Les fondamentaux la fréquence d'engrènement est égale au nombre de dents d'engrenage multiplié par la vitesse de fonctionnement de l'arbre. De plus, tous les ensembles d'engrenages créeront une série de bandes latérales ou modulations qui seront visibles des deux côtés de la fréquence d'engrènement de l'engrenage primaire. Dans un jeu d'engrenages normal, chacune des bandes latérales sera espacée exactement au $1X$ ou la vitesse de fonctionnement de l'arbre et le profil de l'ensemble de l'engrènement seront symétriques.

2°. Profil normal

Dans un jeu d'engrenages normal, chacune des bandes latérales sera espacée exactement du $1X$ vitesse de fonctionnement de l'arbre d'entrée, et l'ensemble de l'engrènement sera symétrique. De plus, les bandes latérales apparaîtront toujours par paires, une en dessous et une au-dessus de la fréquence d'engrènement. L'amplitude de chacune de ces paires sera identique. Pour exemple, la paire de bandes latérales indiquée par 1 et $p1$ sur la *figure 1.16* sera espacées exactement à la vitesse d'entrée et ont la même amplitude. Si le profil d'engrènement était divisé en traçant une ligne verticale à travers le maillage (c'est-à-dire nombre de dents multiplié par la vitesse de l'arbre d'entrée), les deux moitiés seraient exactement identiques. Tout écart par rapport à un profil d'engrènement symétrique indique un problème d'engrenage. Cependant, il faut veiller à ce que le problème est interne aux engrenages et induit par des influences extérieures. Externe désalignement, charges induites anormales et diverses autres influences extérieures détruira la symétrie du profil d'engrènement. Par exemple, le célibataire réducteur utilisé pour transmettre la puissance au système d'oscillateur de moule sur un la roulette continue entraîne deux excentriques. La rotation excentrique de ces deux cames est transmise directement dans la boîte de vitesses et créera l'apparence de engrènement excentrique des engrenages. L'espacement et l'amplitude de l'engrènement le profil sera détruit par cette charge induite anormale.

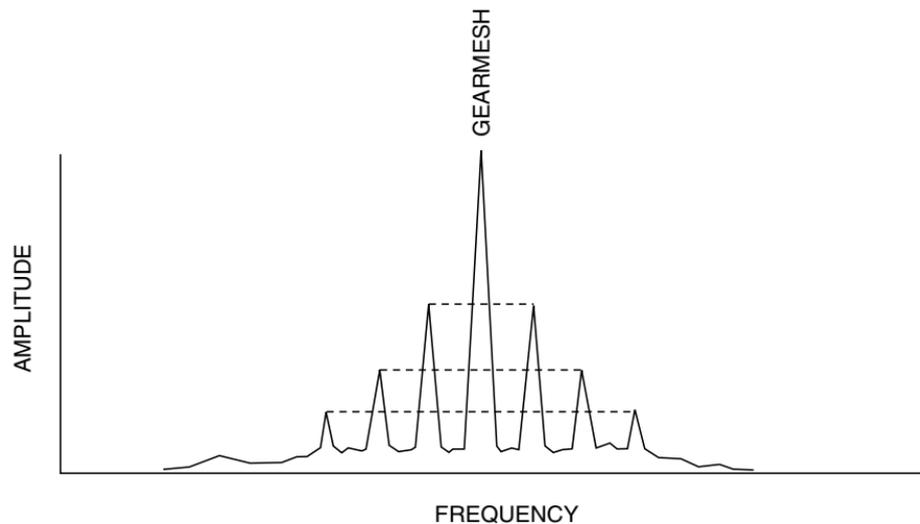


Figure 1.16 Le profil normal est symétrique[8]

3°. Port excessif

La figure 1.17 illustre un profil d'engrenage typique avec des engrenages usés. Notez que l'espacement entre les bandes latérales devient erratique et elles ne sont plus espacées à la vitesse de l'arbre d'entrée. Les bandes latérales auront tendance à varier entre l'entrée et vitesses de sortie mais ne seront pas uniformément espacées plus de l'usure des dents d'engrenage, la distance centre à centre entre les arbres créera un espacement et une amplitude erratiques. Si les arbres sont trop rapprochés, l'espacement aura tendance à être à la vitesse de l'arbre d'entrée, mais l'amplitude chutera considérablement. Parce que les engrenages sont profondément engrenés (c'est-à-dire en dessous de la ligne de pas normale), les dents maintiennent le contact à travers tout le maillage. Cette perte d'autorisation entraînera amplitudes inférieures mais exagérera tout défaut de profil de dent qui peut être présent. Si les arbres sont trop éloignés, les dents s'engrèneront au-dessus de la ligne de pas. Ce type d'engrènement augmentera le jeu entre les dents et amplifiera l'énergie de la fréquence d'engrènement réelle et toutes ses bandes latérales. De plus, les caractéristiques de portance des dents d'engrenage seront considérablement réduites. Étant donné que la pression est concentrée sur la pointe de chaque dent, il y a moins de section transversale et de force dans les dents. Le potentiel de défaillance dentaire est augmenté en proportion directe de la quantité de jeu excédentaire entre les arbres.

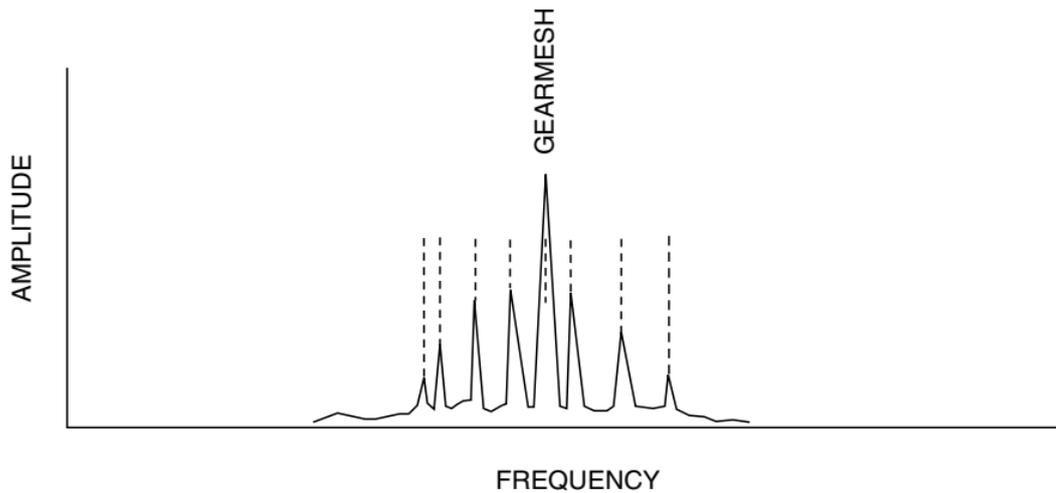


Figure 1.17 L'usure ou un jeu excessif modifie l'espacement des bandes latérales[8]

4°. Dent fissurée ou cassée

La **figure 1.18** illustre le profil d'un train d'engrenages avec une dent cassée. Comme l'engrenage tourne, l'espace laissé par la dent ébréchée ou cassée augmentera le jeu mécanique entre le pignon et la couronne. Le résultat sera une bande latérale de faible amplitude qui se produira à gauche de la fréquence d'engrènement réelle. Lorsque le prochain maillage des dents non endommagées, le jeu supplémentaire se traduira par un impact plus énergétique. La bande latérale résultante, à droite de la fréquence de maille, aura beaucoup plus grande amplitude. Les bandes latérales appariées auront une amplitude non symétrique qui représente ce jeu et cette énergie d'impact disproportionnés. Si le train d'engrenages développe des problèmes, l'amplitude de la fréquence d'engrènement augmentera et la symétrie des bandes latérales changera.

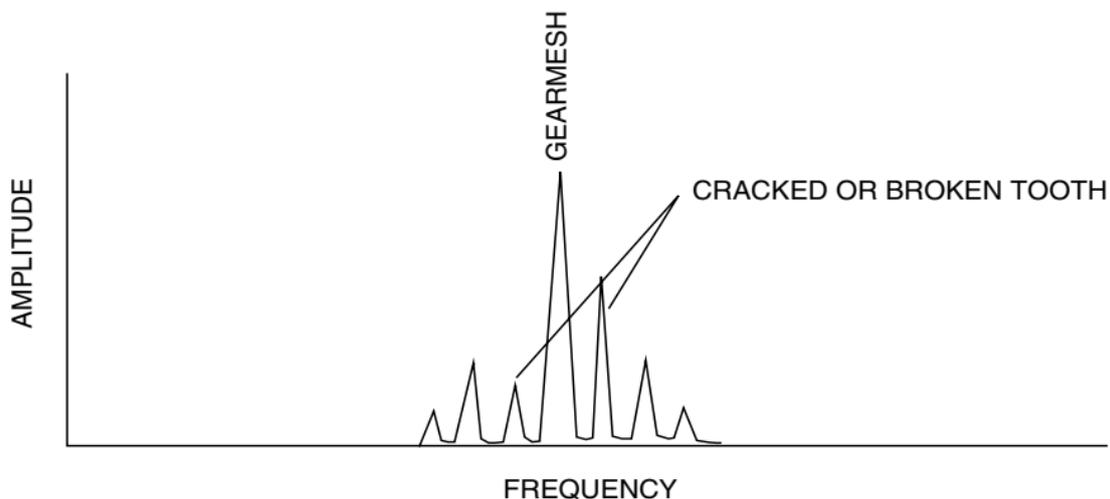


Figure 1.18 Une dent cassée produira un profile de bandes latérale asymétrique[8]

1.3.4 Sources d'excitation

1.3.4.1 Les principales sources d'excitation

Les sources d'excitation vibratoire ou acoustique d'une transmission sont multiples. Une distinction est faite entre les sources internes, spécifiques au fonctionnement de la transmission, provenant de sources externes.

1°. Sources internes d'excitation

Les sources internes peuvent être liées aux interactions du type fluide-solide ou aux interactions du type solide-solide. Parmi les excitations résultant des interactions fluide-solide, nous identifions en particulier :

- l'excitation du carter par des écoulements et des projections de lubrifiant,
- l'excitation du boîtier par les émissions acoustiques internes : parmi ces émissions internes, les deux principales contributions sont liées au phénomène de pompage des fluides (*Figure. 1.19*) dénotant le processus cyclique d'aspiration et d'expulsion de l'air entre la tête et le pied des dents en engagement et rayonnements des corps d'engrenages qui vibrent sous l'effet de surcharges dynamiques exercées sur les dents. En ce qui concerne les excitations résultant des interactions solide-solide, il s'agit principalement de:
 - les fluctuations des forces de contact normales au niveau de l'engrenage qui résultent d'une erreur de transmission statique, qui sont transmises aux roulements puis aux carter,
 - les fluctuations des forces de contact sur les paliers causées par leurs défauts propres,
 - Fluctuations des forces de frottement aux dents,
 - les forces de contact générées par les chocs liés à la présence de dégagements fonctionnels dont les engrenages de ralenti, par exemple, sont le siège dans certaines conditions.

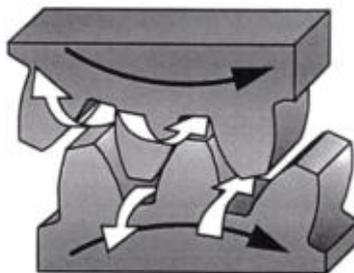


Figure. 1.19 Phénomène pompage de fluide[9]

2°. Sources d'excitation externes

Les sources d'excitation externes sont associées aux fluctuations du couple moteur, fluctuations du couple de charge, variations de l'inertie de charge et vibrations transmis par les points de fixation sur la structure de réception. Toutes les sources d'excitation mentionnées ci-dessus n'ont pas la même importance : par exemple, dans un régime de lubrification Elastodynamique, les composants tangentiels des forces sont très petits par rapport aux composants normaux, les effets excitateurs du frottement sont limités par la présence du lubrifiant. Il est donc bien établi que l'erreur de transmission statique sous charge constitue la source d'excitation vibratoire interne dominante.

1.4 CONCLUSION

Ce chapitre aborde la mise en situation et l'importance de l'activité de la surveillance des défauts d'engrenages ainsi que leur diagnostic dans le contexte de la maintenance industrielle des équipements critiques. En premier lieu un rappel descriptif sur la fonction maintenance ainsi que les différentes philosophies, politiques ou stratégies sur lesquelles sont fondées les activités techniques de la fonction maintenance au sein d'une entreprise industrielle. L'accent a été mis sur les catégories de maintenance systématique, conditionnelle et proactive. En deuxième lieu, sera présentée.

Chapitre 02

Vibroacoustique linéaire unidimensionnelle
- Aspect analytique et numérique -

2.1 INTRODUCTION

Les vibrations structurelles s'associent aux champs acoustiques intérieurs et extérieurs pour produire du son. Une structure vibrante génère des ondes sonores dans un champ acoustique, et inversement, l'acoustique la pression influe sur la vibration structurelle, ainsi que sur les contraintes qui peuvent dégrader la structure intégrité.

Les méthodes de calcul pour résoudre les problèmes de vibration et de son ont été développement continu depuis le début des années 1960, lorsque les ordinateurs numériques sont devenus disponibles. Utilisation ordinateurs, formules analytiques complexes disponibles pour représenter les solutions acoustiques ont alors pu être résolues numériquement.

Pour les systèmes géométriques complexes, la méthode des éléments finis (FE) a été développée, où toute forme, source ou condition aux limites pourrait être discrétisée. Régions structurelles et acoustiques peuvent être assemblées pour capturer les formes d'onde et leurs interactions, tandis que diverses conditions aux limites et fonctions de forçage sont généralement appliquées.

Alors que la méthode FE est couramment utilisée pour résoudre les problèmes structuro-acoustiques intérieurs, la méthode de l'élément limite (BE) a ensuite été développée, ce qui est plus approprié pour résoudre les problèmes structuro-acoustiques extérieurs, bien qu'il soit aussi souvent utilisé pour l'acoustique intérieure.

Bien que les méthodes FE et BE soient généralement applicables dans la gamme de basse fréquence, d'autres on a mis au point des méthodes qui dépendent de la gamme de fréquences d'intérêt et du niveau d'incertitude du système structuro-acoustique.

Ces méthodes comprennent l'analyse statistique de l'énergie (SEA), qui a été la première méthode de ce type qui a été développée pour l'application dans gamme de fréquences pour obtenir des solutions approximatives et statistiquement pertinentes. Par la suite, transférer analyse des trajectoires (TPA), analyse de la FE énergétique (EFEA), modélisation structurelle basée sur les vagues, d'autres ont été développées pour résoudre un large éventail de problèmes structuro-acoustiques [10-12].

2.2 ACOUSTIQUE

2.2.1 Définition

L'acoustique est la science du son. Quelle que soit la gamme de fréquences, elle s'étend à l'étude des ondes mécaniques au sein des gaz, des liquides et des solides. Elle trouve ses applications dans les domaines des sciences de la terre et de l'atmosphère, des sciences de l'ingénieur, des sciences de la vie et de la santé, ainsi que dans les sciences humaines et sociale. Les domaines de l'acoustique sont :

- L'acoustique humaine
- **L'acoustique physique**
- L'acoustique musicale
- L'instrumentation et la métrologie acoustiques.
- L'acoustique environnementale
- L'acoustique des transports (maritime, ferroviaire, aérien et automobile)
- L'acoustique industrielle (Contrôle non destructif)
- Le contrôle du bruit.

2.2.2. Acoustique physique

L'acoustique physique (ou acoustique fondamentale ou bien acoustique théorique) est un domaine de l'acoustique qui détermine les principes de la génération et de la propagation des sons et en développe le formalisme mathématique. Elle s'intéresse aussi bien aux ultrasons et infrasons, qui obéissent aux mêmes lois physiques [12].

Comme la physique théorique, l'acoustique théorique constitue un champ d'études intermédiaire entre l'acoustique expérimentale et les mathématiques. [13,14] La théorie ondulatoire des phénomènes acoustiques constitue la pierre angulaire de l'acoustique théorique.[15,16]

Ainsi les principaux centres d'intérêt de l'acoustique physique sont :

- La détermination des principes de la génération et de la propagation des sons et développement de formalismes mathématiques.[17]
- démontre notamment que la propagation des sons satisfait l'équation des ondes [18], et s'intéresse aux hypothèses effectuées afin de délimiter son domaine de validité : on distingue par exemple l'acoustique linéaire d'un fluide parfait [19, 20], de l'acoustique linéaire d'un fluide dissipatif [21], de l'acoustique linéaire d'un solide [22] ou encore de l'acoustique non linéaire [23,24] qui s'attache à étudier les effets non linéaires dans la propagation des sons.

- L'acoustique théorique s'intéresse aussi à l'étude d'autres phénomènes en relation avec la propagation des ondes acoustiques, tels que la réflexion [25,26], la transmission [25,26], la diffusion [27] et la diffraction [28, 29,30] de celles-ci.
- D'autres thématiques étudiées dans le cadre de l'acoustique théorique sont les sources acoustiques[31] (type, directivité), l'étude des fonctions de Green [32] associées à un problème acoustique déterminé, la formulation intégrale des champs acoustiques [33] (intégrale de Kirchhoff-Helmholtz [34], extension du principe de Huygens pour les ondes acoustiques, intégrale de Rayleigh [35]), les circuits acoustiques [36,37] et les guides d'onde acoustiques[38,39,40].

L'acoustique théorique a de nombreux domaines d'application spécialisés [16].

1. L'acoustique architecturale étudie la propagation des sons dans les salles et les bâtiments y compris l'isolation phonique.
2. L'électro-acoustique étudie spécialement les transducteurs électroacoustiques (microphones, haut-parleurs, hydrophones).
3. **La vibro-acoustique** (ou acoustique des structures) étudie les ondes mécaniques dans les structures et comment celles-ci interagissent et rayonnent dans les fluides environnants.
4. La thermo-acoustique, se basant sur l'effet thermo-acoustique, étudie la conversion de chaleur en énergie acoustique et vice-versa.
5. Le contrôle non destructif utilise les résultats de l'acoustique non linéaire pour caractériser l'état d'intégrité et la « santé » de structures ou de matériaux, sans les dégrader, soit au cours de la production, soit en cours d'utilisation, soit dans le cadre de maintenance.
6. L'acoustique sous-marine étudie la propagation du son dans l'eau et l'interaction des ondes mécaniques constituant le son avec l'eau et les frontières avec d'autres milieux.
7. L'aéro-acoustique étudie la génération d'un bruit par un écoulement turbulent (ex : turbulence d'un jet libre), ou interagissant avec une surface (profil d'aile, pales de rotor d'un hélicoptère, roues de compresseur ou de turbine, cavité...)
8. L'imagerie médicale utilise pour les échographies, les échographies Doppler, les techniques chirurgicales par ultrasons focalisés de haute intensité, des applications acoustiques des ultrasons.

L'acoustique non linéaire étudie les cas où les écarts à la linéarité postulée dans les équations de l'acoustique générale sont trop importants pour qu'on puisse, comme dans le cas général, les négliger.

2.3 VIBROACOUSTIQUE

2.3.1 Définition

La vibroacoustique est une discipline scientifique qui traite l'interaction des vibrations des structures et les ondes sonores. La vibro-acoustique est axée sur la simulation, l'analyse, la surveillance et le contrôle du comportement vibro-acoustique des produits et procédés mécaniques, mécatroniques et biomécaniques, tels qu'ils sont habituellement rencontrés dans le transport, les machines industrielles, l'énergie et le secteur de la santé.

2.3.2 Phénomènes de vibroacoustique

La **figure 2.1a** présente un schéma du problème et la **figure 2.1 b** fournit un exemple de l'industrie automobile. La structure générique peut être une structure homogène ou bien hétérogène en multicouche composée de différents matériaux et contenir une cavité et être immergé dans un fluide.

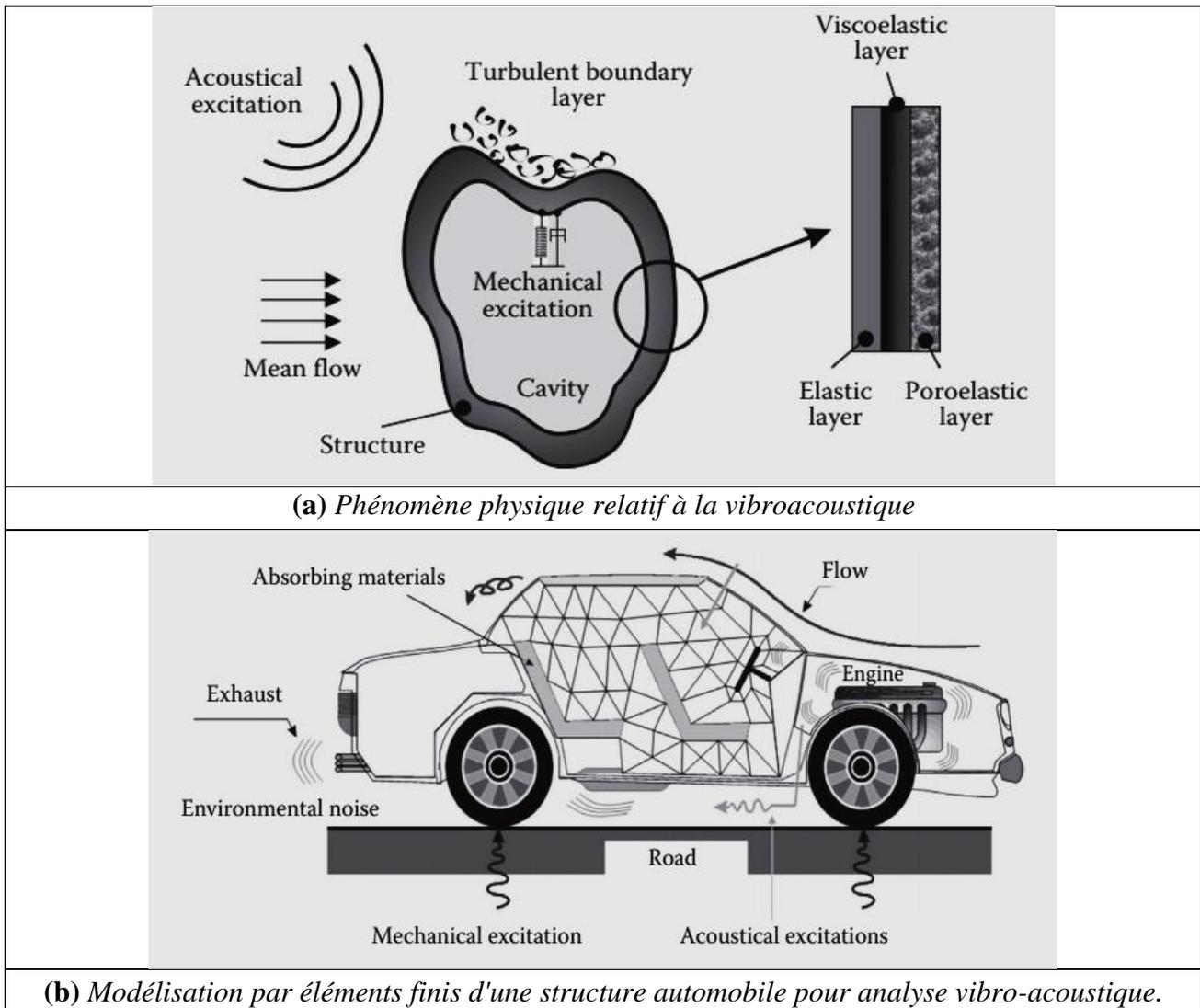


Figure 2.1 : Problème de simulation en vibroacoustique [55]

La structure peut être excitée par différents mécanismes excitateurs ayant comme source différentes formes d'énergie d'origine mécanique, électrique, hydrodynamique et aérodynamique. En plus, le problème vibroacoustique implique l'interaction entre une structure solide et les fluctuations de pression des fluides environnants. La **figure 2.2** présente les mécanismes de couplage impliqués. La réponse de la structure sera régie par l'excitation, les conditions aux limites et le couplage avec le milieu environnant. Ce couplage dépend de la géométrie du problème et des propriétés de la structure et des fluides.

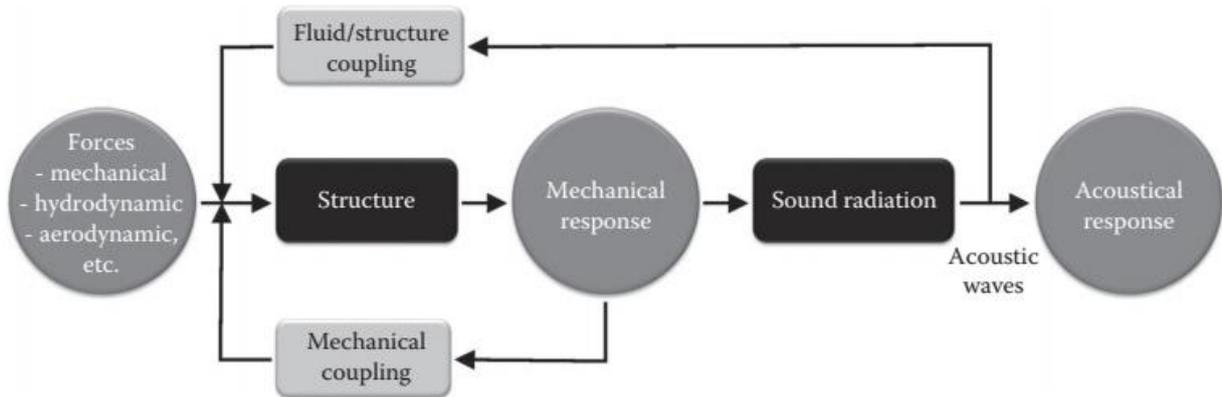


Figure 2.2 Mécanismes de couplage typique dans un problème de vibroacoustique. [55]

2.3.3 Catégories de problèmes en vibroacoustique

Les problèmes de vibroacoustique liés à la structure et aux fluides peuvent être classés en trois grandes catégories (**Figure 2.3**): Problème intérieurs, Problèmes extérieurs et problèmes mixtes.

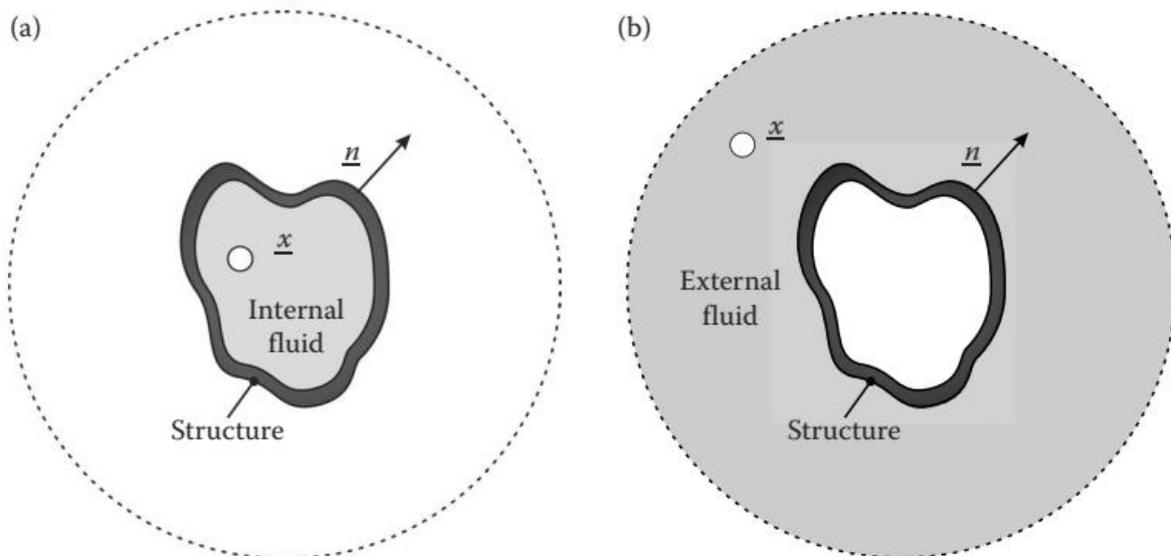


Figure 2.3 : Problèmes de vibroacoustique couplée à l'intérieur (a) et à l'extérieur (b). [55]

1°. Problèmes intérieurs

Dans le cas d'un problème intérieur, le domaine fluide est limité. C'est le cas des problèmes impliquant une structure couplée à une cavité interne. La résistance du couplage dépend de la géométrie de la cavité et des propriétés du fluide (densité, vitesse du son). Pour cette classe de problèmes, le couplage fluide-structure est toujours pris en considération. Les formulations numériques utilisées pour résoudre le couplage problème intérieur sont généralement basés sur la méthode d'élément fini (FEM) pour le fluide et le structure.

2°. Problèmes extérieurs

Dans le cas d'un problème extérieur, le domaine fluide est illimité. Le couplage est généralement régi par les propriétés du fluide et de la masse de la structure. C'est le cas du rayonnement libre et du problème de la diffusion. Lorsque le couplage est négligeable, le problème peut être résolu en deux étapes :

- Tout d'abord, la réponse de la structure est calculée en supposant qu'elle soit sous vide.
- Ensuite, le champ de vibration de la structure est utilisé comme une source du problème acoustique.

Les formulations utilisées pour résoudre les problèmes couplés sont généralement basés sur la méthode des éléments finis (FEM) mixte pour la structure et la méthode des éléments aux frontières (BEM) pour le fluide. Les méthodes modernes utilisent des méthodes basées sur la FEM pour la structure et le domaine illimité. Plus tard, et en particulier les couches d'absorption parfaitement conjuguées sont largement en cours d'utilisation.

3°. Problèmes mixtes

Dans le cas d'un problème mixte, la structure est en contact avec plusieurs domaines fluides et au moins l'un d'entre eux est illimité. Le domaine intérieur est délimité et le domaine extérieur est illimité. Selon la nature du domaine extérieur, les équations entièrement couplées devraient être résolues. Si le couplage avec le domaine extérieur est négligeable, le problème de couplage interne est d'abord résolu, suivi du rayonnement ou du problème de la diffusion. Il est courant d'utiliser une combinaison de FEM pour la structure et le domaine de fluide intérieur et la BEM pour le fluide extérieur.

2.3.4 Domaines des fréquences

Le choix de la méthode de solution n'est pas strictement défini uniquement par la classe du problème de la vibroacoustique couplée, mais il dépend aussi de la fréquence du domaine. La **figure 2.4** présente la réponse fréquentielle typique d'un système technique excité. Ainsi, trois domaines sont définis.

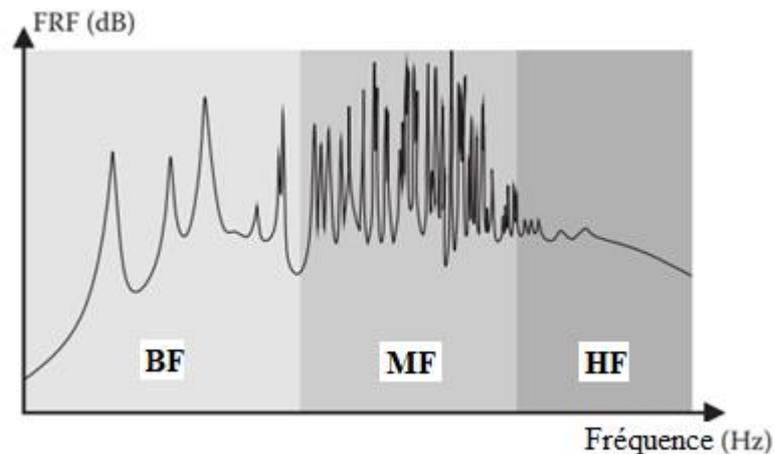


Figure 2.4 : Domaines des fréquences. [55]

1°. Domaine des basses fréquences (BF)

Ce domaine se caractérise par des résonances claires et visibles qui font référence à un comportement modalement contrôlé. Dans ce domaine, le nombre de modes est faible et les longueurs d'onde sont longues. On a affaire à un système déterministe pour lequel la FEM ou BEM est utilisé. Une description précise de la géométrie, des propriétés du fluide et des structures, c'est-à-dire les lois constitutives des matériaux impliqués (Lois de comportement) ainsi que les conditions aux limites, sont nécessaires pour la précision de la réponse vibroacoustique.

2°. Domaines des moyennes fréquences (MF)

C'est une caractéristique des systèmes techniques complexes où coexistent le comportement à basse et à haute fréquences. La réponse fréquentielle montre de fortes irrégularités, indiquant que la densité modale du système conservateur associé n'est pas uniforme ; elle peut être localement élevée ou faible. C'est généralement le cas lorsqu'une partie du système (sous-système) décrit le comportement local (HF) tandis que les autres sous-systèmes décrivent le comportement (BF). Dans ce domaine, les détails concernant les conditions aux limites, la géométrie ainsi que les lois constitutives des matériaux sont a priori nécessaires pour les sous-systèmes à BF, alors que l'effet des incertitudes est important pour les sous-systèmes EF. Cette observation conduit les ingénieurs à utiliser des méthodes déterministes-statistiques hybrides pour de tels systèmes

3°. Domaines des hautes fréquences (HF)

Dans ce domaine de fréquences, la réponse fréquentielle du système n'a pas de résonance ou bien de fortes variations locales visibles. Le comportement est très lisse indiquant que la densité modale du système est uniforme et le nombre de modes est élevé. Les longueurs d'onde sont courtes comparées aux dimensions caractéristiques du système. En conséquence, la taille et donc le coût des modèles basés sur l'élément fini (FE) deviennent excessivement élevés. Dans cette gamme de fréquences, la réponse vibroacoustique est extrêmement sensible à la variabilité, à l'incertitude en géométrie (tolérances de fabrication et d'assemblage) et aux paramètres physiques (variations des propriétés des matériaux, comportement des articulations, conditions d'exploitation et conditions environnementales).

La **figure 2.5** illustre l'utilisation d'un modèle FE déterministe. Les résultats des bandes étroites ne présentent aucune valeur aux gammes des hautes fréquences. Dans ce cas, la fréquence et les prédictions des space-averaged de la réponse moyenne sont plus utile. L'utilisation des méthodes statistiques et énergétiques sont donc privilégiée dans cette gamme de fréquences. L'approche largement utilisée est la SEA (Statistical Energy Anlysis) .

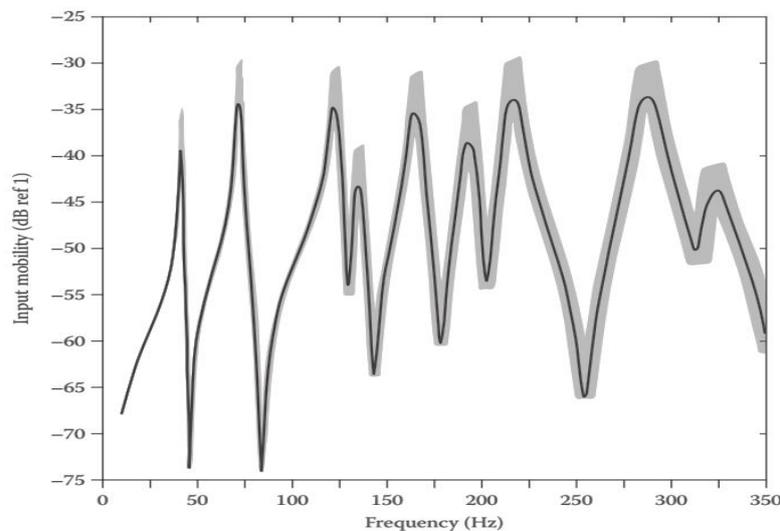


Figure 2.5 : Exemple de l'effet de l'incertitude structurale sur la réponse vibroacoustique d'un simple écran plat. Les FRF (mobilité d'entrée) ont été obtenus en faisant varier au hasard les paramètres géométriques et physiques du système. Valeur moyenne (ligne noire) et étendue (gris) . [55]

En résumé, le choix des méthodologies de modélisation dépend des éléments suivants :

- la physique du problème (linéaire ou non linéaire ; stationnaire, non stationnaire, harmonique...),
- la géométrie du problème (forme, symétrie, périodicité, rapports d'aspect géométriques...),
- le domaine de fréquence,
- le degré de précision ou de détails requis dans la solution (problème local ou global ; déterministe ou stochastique).

2.4 ACOUSTIQUE PHYSIQUE LINEAIRE

2.4.1 Position du problème physique

On considère la propagation d'une onde sonore plane à l'intérieur d'un tube de longueur L contenant un milieu fluide (**Figure 2.6**). L'**onde sonore plane** est un concept issu de la physique de la propagation des ondes. C'est une onde dont les fronts d'onde sont des plans infinis, perpendiculaires à une même direction de propagation désignée par le vecteur unitaire \vec{n} de la normale aux fronts d'onde.

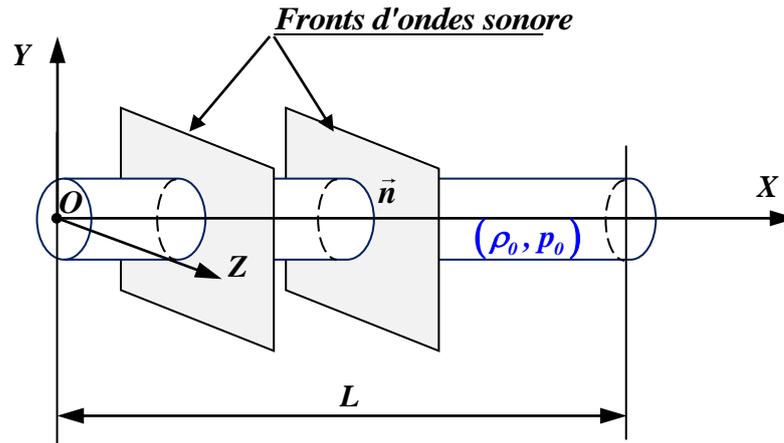


Figure 2.6 : Problème de propagation sonore dans un tube contenant un fluide

2.4.2 Hypothèses simplificatrices

L'équation de base décrivant la propagation des ondes dans un fluide est basée sur un nombre d'hypothèses simplificatrices. Ainsi, comme situation de départ, on considère les hypothèses suivantes :

1. Fluide parfait (non visqueux) initialement supposé au repos.
2. Les fluctuations étant faibles, le mouvement du fluide est supposé isentropique (adiabatique réversible), décrit par les équations d'Euler.
3. Initialement avant perturbation, le milieu physique considéré est en état d'équilibre, tel que dans n'importe quel point M du milieu, les champs de température, de pression, de masse volumique et de vitesse sont supposés constantes par rapport au temps (champ stationnaire) et constantes dans l'espace (champ uniforme). Ainsi, avant perturbation du milieu, on a :

$$\left\{ \begin{array}{ll} T(M, t) = T_0 & (a) \\ p(M, t) = p_0 & (b) \\ \rho(M, t) = \rho_0 & (c) \\ \vec{v}(M, t) = \mathbf{0} & (d) \end{array} \right. \quad (2.1)$$

4. En présence d'une perturbation qui conduit à la formation d'une onde, on a :

$$\begin{cases} \vec{v}_i(x, y, z, t) = v_0 + \vec{v}(x, y, z, t) & (a) \\ p_i(x, y, z, t) = p_0 + p(x, y, z, t) & (b) \\ \rho_i(x, y, z, t) = \rho_0 + \rho(x, y, z, t) & (c) \end{cases} \quad (2.2)$$

$\vec{v}(\vec{r}, t)$, $p(\vec{r}, t)$ et $\rho(\vec{r}, t)$ sont des perturbations infiniment petites du même ordre de grandeur. Dans le cas présent, les calculs se limitent au premier ordre dans les infiniment petits d'ordre 1

5. Le vecteur unitaire \vec{n} sera orienté suivant la direction OX , et l'onde sera indépendante des coordonnées y et z . les relations (2.2) deviennent:

$$\begin{cases} \vec{v}(x, t) = \vec{v}_0 + \vec{v}(x, t) & (a) \\ p(x, t) = p_0 + p(x, t) & (b) \\ \rho(x, t) = \rho_0 + \rho(x, t) & (c) \end{cases} \quad (2.3)$$

A partir de ces hypothèses, et grâce aux équations locales (ou formes différentielles) des milieux continus, on peut obtenir l'équation de Helmholtz qui représente la formulation générale d'un problème acoustique linéaire.

2.4.3 Equations gouvernantes en milieu fluide

Dans le domaine de l'acoustique, les équations fondamentales qui régissent la propagation linéaire des ondes sonores dans les milieux fluides sont :

1. *Equation de conservation de la masse (ou équation de continuité)*
2. *Equation de conservation de la quantité de mouvement (ou Equation d'Euler)*
3. *Equation de compressibilité*

Cet ensemble d'équations met en relation les paramètres caractérisant le fluide, tels que la pression, la masse volumique et la vitesse.

2.4.3.1 Equation de conservation de masse

En vue de l'application de la forme intégrale générique pour la formulation de l'équation de la conservation de la masse, on considère la masse m du système au lieu de la grandeur G . La propriété intensive correspondante η sera égale à 1.

$$\eta = \frac{G}{m} = \frac{m}{m} = 1 \quad (2.4)$$

En appliquant ces considérations dans l'équation (2.3), on obtient :

$$\frac{dm}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{V_c} \rho \cdot dV + \iint_{S_c} \rho \cdot \vec{v} \cdot d\vec{S} \quad (2.5)$$

Un système fermé représente une partie de la matière fixe, de sorte que la loi de conservation de la masse, qui détermine qu'il n'est pas possible de créer ou d'éliminer la matière pour la transformer, que ce soit dans un système physique ou chimique, c'est-à-dire que son taux de changement temporel est nul. Ainsi :

$$\frac{dm}{dt} = 0 \rightarrow m = cte \quad (2.6)$$

La formulation finale de la conservation de masse, dans sa forme intégrale, est :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho_t dV + \int_S \rho_t (\vec{v} \cdot \vec{n}) dS = 0 \quad (2.7)$$

La vitesse des particules est donnée par le vecteur vitesse \vec{v} . Le vecteur unitaire \vec{n} est perpendiculaire à la surface S du volume de contrôle et orienté vers l'extérieur.

L'équation (2.7) en combinaison avec le théorème intégral de Gauss donne :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho_t dV + \int_S \rho_t (\vec{v} \cdot \vec{n}) dS = \int_V \left[\frac{\partial \rho_t}{\partial t} + \text{div}(\rho_t \cdot \vec{v}) \right] dV = 0 \quad (2.8)$$

Pour que l'intégrale (2.8) soit nulle, il faut que :

$$\frac{\partial \rho_t}{\partial t} + \text{div}(\rho_t \cdot \vec{v}) = 0 \quad (2.9)$$

Puisque $\rho_0 \gg \rho$, la fluctuation de densité $\rho(\vec{r}, t)$ causée par une quelconque perturbation est très petite comparé à la densité ρ_0 de l'état stationnaire. Cela signifie que les paramètres \vec{v} et ρ sont de même ordre de grandeur respectivement à ρ_0 . En négligeant les termes de second ordre, le deuxième terme du premier membre de l'équation (2.9) peut être écrit comme suit :

$$\begin{aligned} \text{div}(\rho_t \cdot \vec{v}) &= \text{grad}(\rho_t) \cdot \vec{v} + (\rho_t) \cdot \text{div}(\vec{v}) \\ &= \text{grad}(\rho_0 + \rho) \cdot \vec{v} + (\rho_0 + \rho) \cdot \text{div}(\vec{v}) \\ &= \text{grad}(\rho) \cdot \vec{v} + \rho_0 \cdot \text{div}(\vec{v}) \\ &\approx \rho_0 \cdot \text{div}(\vec{v}) \end{aligned} \quad (2.10)$$

L'équation de continuité ainsi linéarisée devient :

$$\frac{\partial \rho_t}{\partial t} + \rho_0 \cdot \text{div}(\vec{v}) = 0 \quad (2.11)$$

Ou bien en faisant introduire l'opérateur Nabla (∇) :

$$\frac{\partial \rho_t}{\partial t} + \rho_0 \cdot (\nabla \cdot \vec{v}) = 0 \quad (2.12)$$

Dans notre cas, il s'agit d'exploiter l'équation (2.12) suivant la direction OX :

$$\frac{\partial \rho_t}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial v(x, t)}{\partial x} = 0 \quad (2.13)$$

2.4.3.2 Equation de conservation des quantités de mouvement

La détermination des caractéristiques du mouvement d'un fluide consiste à rechercher la distribution du champ des grandeurs telles que les pressions et les vitesses en tout point du fluide. En plus, selon les hypothèses déjà faites, le fluide se trouve uniquement sous l'action des forces de pression. l'équation de mouvement s'obtient en appliquant la deuxième loi de Newton :

$$\vec{F}_{pression} = \frac{d(m \cdot \vec{v})}{dt} \quad (2.14)$$

En faisant appel à l'équation de bilan (2.11), la formulation générique de la quantité de mouvement est obtenue en remplaçant la grandeur extensive G par le vecteur quantité de mouvement $m \cdot \vec{v}$ et la grandeur intensive η par la vitesse \vec{v} , de sorte que le deuxième membre de l'équation (2.14) devient :

$$\vec{F}_{pression} = \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{V_c} \rho_t \cdot \vec{v} \cdot dV + \iint_{S_c} \vec{v} \cdot \rho_t \cdot \vec{v} \cdot \vec{n} \cdot dS \quad (2.15)$$

La pression à la surface S du volume est $p(\vec{r}, t)$. La densité du fluide à l'intérieur du volume est la même que précédemment $\rho_t(\mathbf{M}, t) = \rho_0 + \rho(x, t)$ et la vitesse des particules est définie par $\vec{v}(\vec{r}, t)$. En l'absence de forces externes, la deuxième loi de Newton donne:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho_t \vec{v} dV + \int_S (p \cdot \vec{n}) dS = 0 \quad (2.16)$$

Le vecteur unitaire \vec{n} pointe vers l'extérieur du volume de contrôle. La pression $p(\vec{r}, t)$ est comptée positive dans le sens de la compression. Le théorème de la divergence combine avec l'équation intégrale donne :

$$\int_V \left[\frac{d(\rho_t \cdot \vec{v})}{dt} + \overrightarrow{grad}(p) \right] dV = 0 \quad (2.17)$$

On sait que la dérivée totale d'une fonction $f(x, y, z, t)$ en coordonnées cartésiennes est définie par :

$$\frac{d f(x, y, z, t)}{d t} = \frac{\partial f}{\partial t} + \overrightarrow{grad} f \cdot \vec{v} = \frac{\partial f}{\partial t} + \nabla f \cdot \vec{v} \quad (2.18)$$

L'équation (2.18) combinée avec l'équation (2.16) mène à :

$$\frac{\partial(\rho_t \cdot \vec{v})}{\partial t} + \vec{v} \cdot \overrightarrow{div}(\rho_t \cdot \vec{v}) + \overrightarrow{grad}(p) = 0 \quad (2.19)$$

En négligeant les termes d'ordres supérieurs, la linéarisation donne :

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \overrightarrow{grad}(p) = 0 \quad (2.20)$$

2.4.3.3 Equation de compressibilité

Tout milieu fluide ou solide possède une certaine élasticité. Pour les solides, elle est traduite par le coefficient de rigidité K . Cependant, pour les fluides ce n'est plus la notion d'élasticité, mais le concept de compressibilité qui est adopté. La compressibilité est l'inverse du module de compression K .

Pour un fluide de volume V , s'il est sollicité à une petite perturbation de pression externe Δp il subit un accroissement de volume ΔV .

$$\frac{\Delta V}{V} = -\Delta p \cdot k_T \quad (2.21)$$

Le paramètre k_T représente la compressibilité isotherme du fluide. La compression est supposée adiabatique, c'est-à-dire que l'entropie du fluide est constante. Équation (2.21) peut également être interprété d'une manière alternative.

Ainsi, si un volume fermé V est modifié de la quantité ΔV , la pression à l'intérieur du volume de contrôle augmente de Δp . En compression, ΔV est négative entraînant une augmentation de la pression à l'intérieur du volume. Le volume V du fluide est égal à la masse m du volume de contrôle divisé par la densité totale ρ_t du fluide ou $V = m/\rho_t$. Sachant que $\rho_t = \rho_0 + \rho$ et $\rho_t \gg \rho$ il s'ensuit que:

$$\Delta V = -\frac{m}{\rho_t^2} \Delta \rho_t = -\frac{V}{\rho_t} \Delta \rho_t \approx -\frac{V}{\rho_0} \Delta \rho \quad (2.22)$$

L'accroissement $\Delta \rho$ de la densité est provoquée par la diminution ΔV du volume de contrôle. Les équations (2.21) et (2.22) conduisent à :

$$\frac{\partial \rho}{\partial p} = \rho_0 \cdot k_T \quad (2.23)$$

Pour un écoulement adiabatique et en introduisant l'équation (2.23), l'équation de continuité (2.20) devient :

$$k_T \cdot \frac{\partial p}{\partial t} + \text{div } \vec{v} = 0 \quad (2.24)$$

Pour un gaz parfait, sa compressibilité peut être obtenue à partir des équations d'état. En plus, Pour des fréquences inférieures à 10^9 Hz , la compression adiabatique dans un gaz peut être supposée.

Etant donné qu'il n'y a aucun échange de chaleur dans le gaz.

Dans un tronçon où le gaz est comprimé, la température augmente, le transfert de chaleur vers une zone adjacente avec du gaz décomprimé est négligé. Pour ce type de processus particulier, la pression totale p_t et la densité totale ρ_t de gaz sont liés par la relation suivante :

$$p_t = C \cdot \rho_t^\gamma \quad (2.25)$$

Où :

C : Constante

γ : Rapport entre la chaleur spécifique du gaz à pression constante et sa chaleur spécifique à volume constant : tel que :

$$\gamma = C_p / C_v \quad (2.26)$$

gaz monoatomique (<i>He</i>)	gaz polyatomiques	Air
$\gamma = 5/3$	$\gamma = 4/3$	$\gamma = 7/5$

Puisque $p_t = p + p_0$ et $\rho_t = \rho + \rho_0$ il s'en suit que:

$$\frac{\partial \rho}{\partial p} = \frac{1}{\gamma} \left[\frac{\rho + \rho_0}{p + p_0} \right] = \frac{1}{\gamma} \cdot \frac{\rho_t}{p_t} \quad (2.27)$$

Pour un gaz parfait :

- A une température T , ayant une densité ρ_t et sous une pression p_t , les trois paramètres sont liés par la loi des gaz parfait défini par :

$$p_t = \frac{\rho_t \cdot T \cdot R}{M} \quad (2.28)$$

- La compressibilité k_T est obtenu à partir des équations (2.23) et (2.27).

$$k_T = 1 / (\gamma p_t) \quad (2.29)$$

En remplaçant la relation (2.28) dans (2.29), et en considérant $\rho_t \approx \rho_0$ on obtient :

$$k_T = \frac{M}{\gamma R T \rho_0} \quad (2.30)$$

2.4.4.4 Equation d'onde

Le bilan de conservation de la quantité de mouvement et le bilan de conservation de la masse ont fourni les équations (2.30) et (2.28). Les termes dépendant de la vitesse peuvent être annulés en prenant la divergence de la première équation et en soustrayant la dérivée temporelle de la deuxième équation.

Le résultat de ces transformations, fournit l'équation d'onde

$$\nabla^2 p - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0 \quad (2.31)$$

Avec c , vitesse d'ondes acoustiques dans le fluide donnée par :

$$c = \sqrt{\frac{1}{k_T \rho_0}} = \sqrt{\frac{\gamma R T}{M}} \quad (2.32)$$

2.5 SOLUTION ANALYTIQUE

2.5.1 Conditions aux frontières

2.5.1.1 Conditions aux limites

1°. Conditions de Dirichlet

Dans le cas où les deux extrémités du tube sont ouvertes, on peut considérer que la pression y est constante et égale à p_0 . Ainsi, la fluctuation de pression vérifie alors une condition de Dirichlet homogène :

$$\begin{cases} p(0,t) = 0 \\ p(L,t) = 0 \end{cases} \quad (2.34)$$

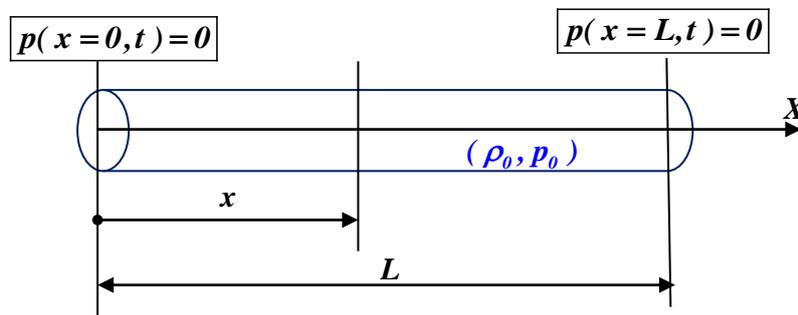


Figure.2.7 : Condition aux limites type Dirichlet

2°. Conditions de Neumann

À partir de l'équation $\rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0$ on a :

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} \quad (2.35)$$

Dans le cas où les extrémités du tube sont fermées (parois solides rigides) on peut considérer que la vitesse y est nulle :

$$\begin{cases} v(0,t) = 0 \\ v(L,t) = 0 \end{cases} \quad (2.36)$$

Ainsi, la fluctuation de pression vérifie une condition de Neumann.

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad (2.37)$$

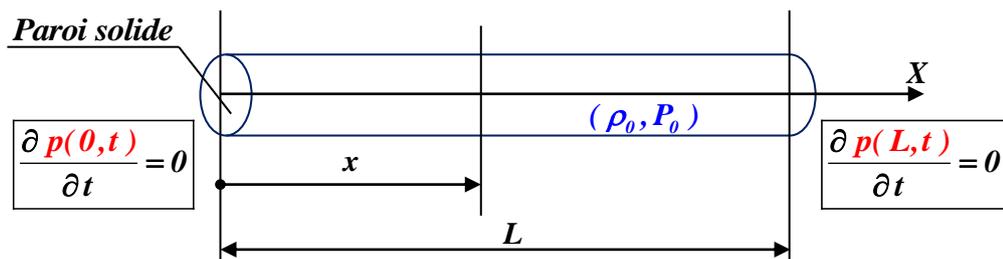


Figure. 2.8: Conditions aux limites type Neumann

2.5.1.2 Conditions initiales

- Si le milieu est perturbé à l'instant initial ($t = 0$) par une fluctuation de pression $w(x)$ ne dépendant que de la direction spatiale x , alors :

$$p(x, 0) = w(x) \quad (2.38)$$

- Si la perturbation se fait sans vitesse initiale, alors :

$$\frac{\partial p(x, 0)}{\partial t} = 0 \quad (2.39)$$

Conclusion : pour un tube ouvert, la fluctuation de pression $p(x, t)$ est solution de l'équation des ondes, tel que :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = 0 \\ p(0, t) \\ p(L, t) = 0 \\ p(x, 0) = w(x) \\ \frac{\partial p(x, 0)}{\partial t} = 0 \end{cases} \quad (2.40)$$

2.5.2 Étude de la solution analytique

2.5.2.1 Solution analytique

En effectuant le changement de variables suivant :

$$\begin{cases} X = x - c_0 t \\ Y = x + c_0 t \end{cases} \quad (2.41)$$

L'équation (2.40) s'écrit :

$$\frac{\partial^2 u(X, Y)}{\partial X \partial Y} = 0 \quad (2.42)$$

dont la solution est:

$$v(X, Y) = F(X) + G(Y). \quad (2.43)$$

La solution générale $v(x, t)$ de l'équation des ondes (2.40) s'écrit :

$$v(x, t) = F(x - c_0 t) + G(x + c_0 t) \quad (2.44)$$

qui est la somme d'une onde progressive F qui se propage avec la célérité c_0 et d'une onde régressive G qui se propage avec la célérité $-c_0$.

Les fonctions F et G sont déterminées par les conditions initiales et aux limites du problème.

2.5.2.2 Solution pour une onde stationnaire

Dans le cas d'une solution initiale harmonique, c'est-à-dire de période multiple de $2L$:

$$w(x) = \cos \left[\frac{(2k+1)\pi}{2L} x \right] \quad (2.45)$$

D'après

$$\frac{\gamma P_0}{\rho_0} = c^2$$

La solution s'écrit :

$$v(x,t) = \frac{1}{2} \left\{ \cos \left[\frac{(2k+1)\pi}{2L} (x - c_0 t) \right] + \cos \left[\frac{(2k+1)\pi}{2L} (x + c_0 t) \right] \right\} \quad (2.46)$$

Après transformation trigonométrique on obtient :

$$v(x,t) = \cos \left[\frac{(2k+1)\pi}{2L} x \right] \cos \left[\frac{(2k+1)\pi}{2L} c_0 t \right] \quad (2.47)$$

C'est une onde stationnaire de période :

$$T = \frac{4L}{(2k+1)c_0} \quad (2.48)$$

2.5.3 Cas général

On peut montrer, en utilisant la méthode de séparation de variables, que la solution générale de l'équation des ondes (2.40) est une combinaison linéaire d'ondes stationnaires :

$$v(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} U_k \cos \left[\frac{(2k+1)\pi}{2L} x \right] \cos \left[\frac{(2k+1)\pi}{2L} c_0 t \right] \quad (2.49)$$

Les coefficients U_k sont alors les coefficients de Fourier de la solution initiale $w(x)$.

2.6 SOLUTION NUMERIQUE

2.6.1 Formulation intégrale faible

Il s'agit d'écrire la forme intégrale faible (ou forme variationnelle) des équations gouvernantes du problème

Soit $\delta \hat{p}$ une variation admissible de la pression \hat{p} , en multipliant l'équation (2.50) par $\delta \hat{p}$ et en intégrant sur Ω donne

$$\nabla^2 \bar{u} + \frac{1}{1-2\nu} \nabla(\nabla \cdot \bar{u}) = - \begin{pmatrix} \bar{f} \\ \bar{\mu} \end{pmatrix} \quad (2.50)$$

$$W(p, \delta p) = \int_0^L \delta p \left(c_0^2 \frac{d^2 p}{dx^2} + \omega^2 p \right) dx = 0 \quad (2.51)$$

Une intégration par parties conduit à

$$W(p, \delta p) = \int_0^L \left(-c_0^2 \frac{d\delta p}{dx} \frac{dp}{dx} + \omega^2 p \delta p \right) dx + \left[c_0^2 \delta p \frac{dp}{dx} \right]_0^L = 0 \quad (2.52)$$

$\delta \hat{p}$ étant admissible, il doit satisfaire à la forme homogène des conditions limites; dans notre exemple ($\delta \hat{p}(0) = \delta \hat{p}(L) = 0$)

En conséquence, la forme intégrale faible associée à l'équation (2.50) se lit comme suit :

$$W(p, \delta p) = \int_0^L \left(c_0^2 \frac{d\delta p}{dx} \frac{dp}{dx} - \omega^2 p \delta p \right) dx = 0 \quad (2.53)$$

$$\forall \delta p / \delta p(0) = \delta p(L) = 0 \text{ et } p(0) = p(L) = 0$$

On définit

$$K(p, \delta p) = c_0^2 \int_0^L \frac{d\delta p}{dx} \frac{dp}{dx} dx \quad (2.54)$$

Et

$$M(p, \delta p) = \int_0^L \delta p \cdot p dx \quad (2.55)$$

L'équation (2.50) indique

$$\begin{cases} W(p, \delta p) = K(p, \delta p) - \omega^2 M(p, \delta p) = 0 \\ \forall \delta p / \delta p(0) = \delta p(L) = 0 \text{ et } p(0) = p(L) = 0 \end{cases} \quad (2.56)$$

De façon équivalente, l'énoncé variationnel associé se lit comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Pi(p) = \frac{1}{2} [K(p, p) - \omega^2 M(p, p)] \\ \text{avec :} \\ \delta \Pi(p) = 0 / p(0) = p(L) = 0 \end{array} \right. \quad (2.57)$$

Notez que $\mathbf{k}(\hat{\mathbf{p}}, \hat{\mathbf{p}})$ est une forme de bilinguisme semi-définie positive alors que $\mathbf{M}(\hat{\mathbf{p}}, \hat{\mathbf{p}})$ est une forme de bilinguisme définie positive. Les conséquences pratiques de cette situation seront précisées plus loin dans ce chapitre

2.6.2 Maillage ou discrétisation géométrique

Il s'agit de décomposer la géométrie du domaine Ω en un ensemble de sous-domaines Ω_e appelés « les éléments ». Les sous-domaines sont habituellement des primitives géométriques simples (p. ex., lignes, triangles, quadrangles, tétraèdres...).

. Il consiste à subdiviser le domaine Ω en un ensemble d'éléments disjoints Ω^e . Dénotant par n_e le nombre d'éléments, nous écrivons

$$\Omega = \bigcup_{e=1}^{n_e} \Omega^e \quad e = 1, \dots, n_e \quad (2.58)$$

Chaque élément Ω^e est défini par un ensemble de points n_e (sommets) appelés nœuds.

Classiquement, deux configurations sont rencontrées :

Élément linéaire à deux nœuds : $n_e = 2$. Nous désignerons par x_1^e et x_2^e les deux coordonnées des deux nœuds de l'élément dans un système de coordonnées cartésiennes. Les indices 1 et 2 se réfèrent ici à une numérotation locale des nœuds de l'élément. 2. Élément quadratique à trois nœuds :

$n_e = 3$. Nous désignerons par x_1^e , x_2^e et x_3^e les coordonnées des trois nœuds de l'élément. Encore une fois, les indices 1, 2 et 3 font référence à une numérotation locale des nœuds de l'élément.

2.6.3 Approximation des variables et calcul des matrices élémentaires

Elle consiste à définir sur chaque sous-domaine Ω_e une fonction approximative p^e de la fonction exacte p . Cette fonction dite d'approximation nodale doit avoir les caractéristiques suivantes :

- Elle ne doit impliquer que les variables nodales attachées aux nœuds situés sur Ω_e et ses limites :

- Elle doit être continue sur Ω_e . En outre, toutes les fonctions d'approximation nodale doivent satisfaire aux conditions de continuité entre sous-domaines.

Le calcul des matrices élémentaires consiste alors à évaluer, sur chaque sous-domaine Ω_e , l'approximation nodale de la forme intégrale.

2.6.3.1 Approximation nodale de la variable

Comme la variable \hat{p} (pression) doit être différentiable, nous devons sélectionner au moins une approximation linéaire pour évaluer la forme $K(\hat{p}, \hat{p})$ et assurer la continuité des intérêts. Nous allons présenter deux approximations : la première est linéaire (ordre 1) et la seconde est quadratique (Ordre 2).

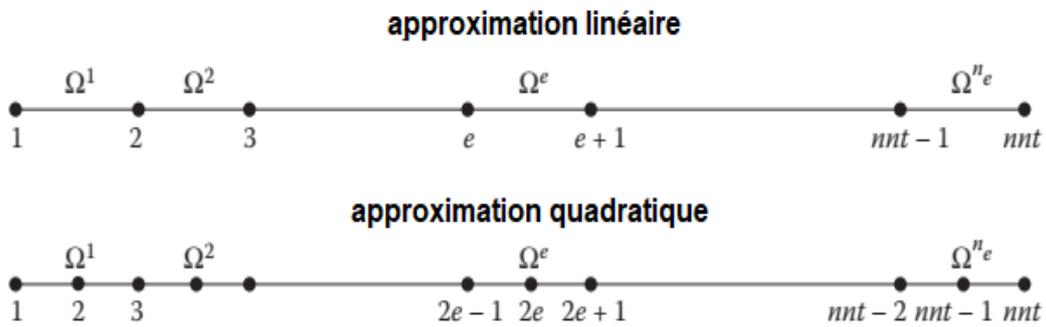


Figure 2.9 Deux types de discrétisation géométrique du problème unidimensionnel. [55]

2.6.3.2 Approximation linéaire

Ω_e représenter un élément linéaire à deux nœuds. Connaissant les valeurs p_1^e et p_2^e de la pression aux deux nœuds de l'élément, nous cherchons à construire une approximation linéaire de la pression à l'intérieur de l'élément :

$$p(x) = ax + b, \quad x \in \Omega^e \tag{2.59}$$

En conséquence,

$$p(x_1^e) = p_1^e = ax_1^e + b, \quad p(x_2^e) = p_2^e = ax_2^e + b \tag{2.60}$$

cela conduit à

$$p(x) = \frac{x_2^e - x}{h^e} p_1^e + \frac{x - x_1^e}{h^e} p_2^e \tag{2.61}$$

avec $h^e = x_2^e - x_1^e$ la longueur de l'élément Ω^e . Paramètre

$$N_1^e(x) = \frac{x_2^e - x}{h^e}, N_2^e(x) = \frac{x - x_1^e}{h^e} \tag{2.62}$$

L'approximation nodale de p peut-être écrite comme

$$p(x) = N_1^e(x)p_1^e + N_2^e(x)p_2^e = \sum_{i=1}^2 N_i^e(x)p_i^e \tag{2.63}$$

Ou sous forme de matrice

$$p(x) = \langle N_1^e(x) N_2^e(x) \rangle \begin{Bmatrix} p_1^e \\ p_2^e \end{Bmatrix} = \langle N^e(x) \rangle \begin{Bmatrix} p^e \end{Bmatrix} \quad (2.64)$$

Remarques

- Les fonctions N_1^e et N_2^e sont appelées fonctions d'interpolation nodale.
- Les fonctions d'interpolation nodale doivent satisfaire aux deux conditions suivantes :
 - Elles ne doivent impliquer que les variables nodales attachées aux nœuds de l'élément.
 - Ils doivent être continus à travers l'élément et différentiables selon la forme intégrale faible.
- En général, les fonctions polynomiales sont choisies pour construire des fonctions d'interpolation nodale, car le processus est simple et l'évaluation numérique des intégrales impliquées dans la forme intégrale faible est facile.
- Lorsque les fonctions d'interpolation sont des polynômes, ces polynômes doivent être complets afin de représenter toutes les variations possibles de la variable indépendante.
- Une approximation nodale nécessite des fonctions d'interpolation nn_e . Sous forme symbolique, nous écrivons

$$p(x) = \sum_{i=1}^e N_i^e(x) p_i^e, \quad x \in \Omega^e \quad (2.65)$$

Avec p_i^e , la valeur de la variable indépendante p au nœud i de l'élément et N_i^e la fonction d'interpolation associée. Quand N_i^e est polynôme, son ordre est égal à $(nn_e - 1)$.

- Les fonctions d'interpolation construites uniquement à partir des valeurs nodales de la variable indépendante (fonctions assurant la continuité de C_0 entre les éléments) sont appelées fonctions d'interpolation de la famille Lagrange.
- Les fonctions d'interpolation construites à partir des valeurs nodales de la variable indépendante et de ses dérivés sont appelées fonctions d'interpolation de la famille Hermite.
- Les fonctions d'interpolation de la famille Lagrange satisfont aux relations suivantes :

$$\begin{cases} N_i^e(x_i^e) = \delta_{ij} \\ \sum_{i=1}^{nn_e} N_i^e = 1 \Rightarrow \sum_{i=1}^{nn_e} \frac{dN_i^e}{dx} = 0 \end{cases} \quad (2.66)$$

Où δ_{ij} désigne le symbole Kronecker.

Ces deux relations peuvent être facilement obtenues à partir de l'approximation nodale

$p(x) = \sum_{i=1}^{nn_e} N_i^e(x) p_i^e$. Le premier assure que $p(x_i^e) = p_i^e$ et le second garantit que l'approximation

nodale permet de représenter un état rigide sans déformation sur l'élément (p constante sur l'élément). Les deux conditions peuvent être utilisées pour construire les fonctions d'interpolation de manière systématique

2.6.3.3 Approximation quadratique

Considérez Ω^e comme un élément de ligne à trois nœuds. Soit x_1^e, x_2^e, x_3^e , désigne les coordonnées de ses nœuds d'extrémité, x_2^e la coordonnée de son nœud médian, et h^e sa longueur. Nous recherchons une approximation quadratique de la forme :

$$p(x) = ax^2 + bx + c, \quad x \in \Omega^e \quad (2.67)$$

Connaître les valeurs nodales des variables indépendantes :

$$\begin{cases} p(x_1^e) = p_1^e = ax_1^e + b(x_1^e)^e + c \\ p(x_2^e) = p_2^e = ax_2^e + b(x_2^e)^e + c \\ p(x_3^e) = p_3^e = ax_3^e + b(x_3^e)^e + c \end{cases} \quad (2.68)$$

En modifiant la variable $x = \xi + x_1^e$, les coordonnées des trois nœuds se transforment en :

$$\xi_1^e = 0, \quad \xi_2^e = h^e/2 \text{ et } \xi_3^e = h^e$$

Les fonctions d'interpolation associées peuvent être construites directement à partir des propriétés indiquées dans l'équation (2.64) :

$$\begin{cases} N_1^e(\xi) = \left(1 - \frac{\xi}{h^e}\right)\left(1 - \frac{2\xi}{h^e}\right) \\ N_2^e(\xi) = \frac{4\xi}{h^e}\left(1 - \frac{\xi}{h^e}\right) \\ N_3^e(\xi) = \frac{-\xi}{h^e}\left(1 - \frac{2\xi}{h^e}\right) \end{cases} \quad (2.69)$$

2.6.3.4 Approximation nodale de la forme faiblement intégrale

Nous partons de l'équation (2.60) :

$$W(p, \delta p) = K(p, \delta p) - \omega^2 M(p, \delta p) = 0 \quad (2.70)$$

Avec

$$K(p, \delta p) = c_0^2 \int_0^L \frac{d\delta p}{dx} \frac{dp}{dx} dx \quad (2.71)$$

Et

$$M(p, \delta p) = \int_0^L \delta p p dx \quad (2.72)$$

Puisque $\Omega = \bigcup_{e=1}^{n_e} \Omega^e$, les intégrales ci-dessus sont écrites en termes d'intégrales d'éléments :

$$K(p, \delta p) = \sum_{e=1}^{n_e} K^e(p, \delta p) \quad (2.73)$$

Avec

$$K^e(p, \delta p) = c_0^2 \int_{\Omega^e} \frac{d\delta p}{dx} \frac{dp}{dx} dx \quad (2.74)$$

Et

$$M(p, \delta p) = \sum_{e=1}^{n_e} M^e(p, \delta p) \quad (2.75)$$

Avec

$$M^e(p, \delta p) = \int_{\Omega^e} \delta p p dx \quad (2.76)$$

Utilisation des approximations nodales de p et δp

$$p = \langle N^e \rangle \{ p^e \} \text{ et } \delta p = \langle N^e \rangle \{ \delta p^e \} \quad (2.77)$$

On écrit

$$K^e(p, \delta p) = \langle \delta p \rangle [K^e] \{ p^e \} \quad (2.78)$$

Et

$$M^e(p, \delta p) = \langle \delta p^e \rangle [M^e] \{ p^e \} \quad (2.79)$$

Avec

$$[K^e] = c_0^2 \int_{\Omega^e} \left\{ \frac{dN^e}{dx} \right\} \left\langle \frac{dN^e}{dx} \right\rangle dx \quad (2.80)$$

Et

$$[M^e] = \int_{\Omega^e} \{ N^e \} \langle N^e \rangle dx \quad (2.81)$$

L'approximation nodale de la forme intégrale faible se lit enfin

$$W(p, \delta p) = \sum_{e=1}^{n_e} W^e(p, \delta p) = 0 \quad (2.82)$$

Avec

$$W^e(p, \delta p) = \left\langle \delta p \right\rangle \left([K^e] - \omega^2 [M^e] \right) \left\{ p^e \right\} \quad (2.81)$$

Les matrices $[M^e]$ et $[K^e]$ sont appelées matrices élémentaires du système.

2.6.3.5 Évaluation des matrices élémentaires

Cela correspond à l'évaluation des intégrales Équations (2.80) et (2.81) En général, l'évaluation se fait numériquement. Dans le cas simple de notre problème unidimensionnel, une intégration exacte est possible. Nous présentons des calculs pour les deux types d'éléments. Pour l'élément linéaire, en utilisant l'équation (2.62) dans les équations (2.80) et (2.81), nous obtenons

$$[K^e] = c_0^2 \int_{x_1^e}^{x_2^e} \left\{ \begin{array}{c} -\frac{1}{h^e} \\ \frac{1}{h^e} \end{array} \right\} \left\langle -\frac{1}{h^e} \quad \frac{1}{h^e} \right\rangle dx \quad (2.82)$$

$$[M^e] = \int_{x_1^e}^{x_2^e} \left[\begin{array}{cc} \left(\frac{x_2^e - x}{h^e}\right)^2 & \left(\frac{x_2^e - x}{h^e}\right)\left(\frac{x - x_1^e}{h^e}\right) \\ \left(\frac{x_2^e - x}{h^e}\right)\left(\frac{x - x_1^e}{h^e}\right) & \left(\frac{x - x_1^e}{h^e}\right)^2 \end{array} \right] dx \quad (2.83)$$

Ce qui conduit à

$$[K^e] = \frac{c_0^2}{h^e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.84)$$

Et

$$[M^e] = \frac{h^e}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (2.85)$$

Pour l'élément quadratique, en utilisant l'équation (2.69) des équations (2.80) et (2.81), nous obtenons :

$$[K^e] = \frac{c_0^2}{3h^e} \begin{bmatrix} 7 & -8 & 1 \\ -8 & 16 & -8 \\ 1 & -8 & 7 \end{bmatrix} \quad (2.86)$$

Et

$$[M^e] = \frac{h^e}{30} \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 2 & 16 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \quad (2.87)$$

Remarques

- Matrix $[K^e]$ est carré et symétrique. Ses éléments diagonaux sont positifs. De plus, il est singulier puisque sans contraintes, l'élément peut présenter un comportement rigide (pression constante ici). Notons en particulier que la somme de ses éléments est nulle puisque $K^e(p, \delta p) = 0$ pour $p = \delta p = 1$; voir équation (2.74).

- La matrice $[M^e]$ est carrée et symétrique. La somme de ses éléments est égale à la longueur de l'élément puisque $M^e(p, \delta p) = h^e$ pour $p = \delta p = 1$; voir équation (2.76).
- Dans le cas d'une source acoustique avec densité de volume Q dans le domaine Ω , le problème acoustique, devient

$$\begin{cases} c_0^2 \frac{d^2 p}{dx^2} + \omega^2 p = -Q & x \in \Omega =]0, L[\\ p(0) = p(L) = 0 \end{cases} \quad (2.88)$$

La forme intégrale faible associée est donnée par

$$\begin{cases} W(p, \delta p) = K(p, \delta p) - \omega^2 M(p, \delta p) - R(\delta p) = 0 \\ \forall \delta p / \delta p(0) = \delta p(L) = 0 \text{ et } p(0) = p(L) = 0 \end{cases} \quad (2.89)$$

Avec

$$\begin{aligned} R^e(\delta p) &= \langle \delta p^e \rangle \\ \{f^e\} &= \frac{Q^e h^e}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \\ (Q(x), x \in \Omega^e), \{f^e\} \end{aligned} \quad (2.90)$$

Sous forme discrète, nous obtenons

$$R(\delta p) = \sum_{e=1}^{n_e} R^e(\delta p) \quad (2.91)$$

Avec

$$R^e(\delta p) = \int_{\Omega^e} \delta p Q dx = \langle \delta p^e \rangle \{f^e\} \quad (2.92)$$

Et

$$\{f^e\} = \int_{\Omega^e} \{N^e\} Q dx \quad (2.93)$$

Vector $\{f^e\}$ est appelé vecteur source ou de charge.

Pour une densité de source constante ($Q(x) = Q^e, x \in \Omega^e$), $\{f^e\}$ est donné par

$$\{f^e\} = \frac{Q^e h^e}{6} \begin{Bmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (2.94)$$

Pour un élément linéaire et

$$\left\{ f^e \right\} = \frac{Q^e h^e}{6} \begin{Bmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (2.95)$$

Pour un élément quadratique.

- Dans le cas d'une source ponctuelle située à $x = x_0$, le vecteur de charge de l'élément $\left\{ f^e \right\}$ devient

$$\left\{ f^e \right\} = \int_{\Omega^e} \left\{ N^e \right\} Q \delta(x - x_0) dx = \begin{cases} \left\{ 0 \right\} & x_0 \notin \Omega^e \\ Q \left\{ N^e(x_0) \right\} & x_0 \in \Omega^e \end{cases} \quad (2.96)$$

Reconsidérer le problème (3.3), avec un Neumann Pour exemple, c'est le cas d'un milieu acoustique entraîné par un piston, avec déplacement $\bar{U}_n \exp(i\omega t)$, situé $x = L$.

Condition limite du type :

$$\begin{cases} c_0^2 \frac{d^2 p}{dx^2} + \omega^2 p = 0 & x \in \Omega =]0, L[\\ p(0) = 0 \\ \frac{dp}{dx}(L) = \rho_0 \omega^2 \bar{U}_n \end{cases} \quad (2.97)$$

La forme intégrale associée est donnée par

$$\begin{cases} W(p, \delta p) = K(p, \delta p) - \omega^2 M(p, \delta p) - R(\delta p) = 0 \\ \forall \delta p / \delta p(0) = 0 \text{ et } p(0) = 0 \end{cases} \quad (2.98)$$

Avec

$$R(\delta p) = \delta p(L) \rho_0 c_0^2 \omega^2 \bar{U}_n \quad (2.99)$$

Sous forme discrète, nous obtenons

$$R^e(\delta p) = \begin{cases} 0 & \text{si } e \neq n_e \\ \delta p_{n_e} \rho_0 c_0^2 \omega^2 \bar{U}_n & \text{si } e = n_e \end{cases} \quad (2.100)$$

Le seul vecteur de charge élémentaire non nul $\left\{ f^e \right\}$ est associé à l'élément Ω^{n_e} .

Il est donné par :

Pour l'élément linéaire

$$\left\{ f^e \right\} = \rho_0 \omega^2 c_0^2 \bar{U}_n \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (2.101)$$

Et

Pour l'élément quadratique.

$$\left\{ f^e \right\} = \rho_0 \omega^2 c_0^2 \bar{U}_n \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (2.102)$$

2.6.4 Assemblage

Sous forme discrète, la forme intégrale faible (3.35) se lit comme suit :

$$W(p, \delta p) = \sum_{e=1}^{n_e} \left\langle \delta p^e \right\rangle ([K^e] - \omega^2 [M^e]) \left\{ p^e \right\} \quad (2.103)$$

La procédure d'assemblage consiste à écrire cette somme en termes de vecteurs d'inconnues nodales. Cela nécessite la continuité de la variable entre les éléments. Pour introduire l'idée de base, considérez le cas de l'approximation par des éléments linéaires. Pour n_e nouveaux éléments, numérotions séquentiellement les nœuds géométriques de 1 à nn_t . Le vecteur global associé des inconnues nodales est donné par

$$\left\langle p \right\rangle = \left\langle p_1, p_2, \dots, p_{nn_t} \right\rangle \quad (2.104)$$

Dans cette numérotation séquentielle, les nœuds ID de l'élément Ω_e sont donnés par (e) et $(e + 1)$. Dans le cas particulier de notre problème, la procédure d'assemblage est réduite à l'imposition des conditions de continuité suivantes :

$$p_2^e = p_1^{e+1} = p_{e+1} \quad (2.105)$$

En utilisant cette numérotation globale, une matrice de localisation d'éléments, $[L^e]$ de dimension $(nn_e * nn_t)$, relative à la numérotation locale et globale est introduite :

$$\left\{ p^e \right\} = [L^e] \left\{ p \right\} \quad (2.106)$$

Pour l'élément linéaire à deux nœuds, $[L_e]$ est donné par

$$[L^e] = \begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (2.107)$$

En utilisant l'équation (2.106), la forme intégrale faible discrétisée, l'équation (2.103), devient

$$W(p, \delta p) = \sum_{e=1}^{n_e} \left\langle \delta p \right\rangle [L^e]^T ([K^e] - \omega^2 [M^e]) [L^e] \left\{ p \right\} \quad (2.108)$$

Sous forme compacte

$$W(p, \delta p) = \langle \delta p \rangle ([K] - \omega^2 [M]) \{p\} \quad (2.109)$$

Avec

$$[K] = \sum_{e=1}^{n_e} [L^e]^T [K^e] [L^e] \quad (2.110)$$

Et

$$[M] = \sum_{e=1}^{n_e} [L^e]^T [M^e] [L^e] \quad (2.111)$$

Les matrices $[K]$ et $[M]$ résultant de l'assemblage de matrices élémentaires $[K^e]$ et $[M^e]$ sont appelées respectivement rigidité globale et matrice de masse du système. Dans le cas de l'élément linéaire à deux nœuds, il est facile de vérifier que $[K]$ et $[M]$ sont donnés par

$$[K] = \frac{c_0^2}{h} \begin{bmatrix} 1 & -1 & & & \\ & 2 & -1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & \text{sym} & & 2 & -1 \\ & & & & 1 \end{bmatrix} \quad (2.112)$$

$$[M] = \frac{h}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 & & & \\ & 4 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & \text{sym} & & 4 & 1 \\ & & & & 2 \end{bmatrix} \quad (2.113)$$

En résumé, le processus d'assemblage est utilisé pour écrire la forme intégrale faible dans une forme discrète impliquant les inconnues nodales du problème.

Sachant que $p(0) = p_1$ et $p(L) = p_{nnt}$, la forme faiblement intégrale est écrite sous forme discrète :

$$\begin{cases} W(p, \delta p) = \langle \delta p \rangle ([K] - \omega^2 [M]) \{p\} = 0 \\ \forall \langle \delta p \rangle / \delta p_1 = \delta p_{nnt} = 0 \text{ et } p_1 = p_{nnt} = 0 \end{cases} \quad (2.114)$$

Remarques

- Les matrices $[K]$ et $[M]$ sont des matrices symétriques.
C'est une conséquence de la symétrie de la forme intégrale faible, et limitées par bande. C'est une propriété générale des matrices dérivées du FEM.
- Pour le problème d'une source acoustique définie dans l'équation (2.88), le vecteur de charge globale est de la forme :

$$\{f\} = \sum_{e=1}^{n_e} [L^e]^T \{f^e\} \quad (2.115)$$

Pour l'élément à deux nœuds il est donné par

$$\{f\} = \frac{Qh}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ 2 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (2.116)$$

Pour le problème de Neumann défini dans l'équation (2.102), le vecteur de charge global est de la forme

$$\{f\} = \rho_0 c_0^2 \omega^2 \bar{U}_n \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (2.117)$$

Les matrices élémentaires sont combinées pour former des matrices globales. En d'autres termes, la forme intégrale est évaluée sur l'ensemble du domaine Ω . Ce faisant, les conditions de continuité entre les éléments sont appliquées.

2.6.5 Imposition de conditions ou contraintes limites

Avant d'invoquer la stationnarité dans l'équation (2.114) pour résoudre le système, nous devons imposer les conditions limites essentielles du problème. C'est-à-dire $\delta p_1 = \delta p_{m_t} = 0$ et $p_1 = p_{m_t} = 0$. Pour l'approximation par éléments linéaires, l'équation (2.114) devient

$$W(p, \delta p) = \langle 0, \delta p_2, \dots, \delta p_{n-1}, 0 \rangle ([K] - \omega^2 [M]) \begin{Bmatrix} 0 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_{n-1} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.118)$$

Ou en utilisant explicitement les équations (2.112) et (2.113)

$$\langle \delta p_2, \dots, \delta p_{m_t-1} \rangle \left(\frac{c_0^2}{h} \begin{bmatrix} 2 & -1 & & \\ & 2 & \ddots & \\ & & \ddots & -1 \\ sym & & & 2 \end{bmatrix} - \omega^2 \frac{h}{6} \begin{bmatrix} 4 & 1 & & \\ & 4 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ sym & & & 4 \end{bmatrix} \right) * \begin{Bmatrix} p_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ p_{m_t-1} \end{Bmatrix} = 0 \quad (2.119)$$

Pour tout vecteur arbitraire $\langle \delta p_2, \dots, \delta p_{m_t-1} \rangle$. En conséquence, on obtient le problème de valeur propre suivant :

$$\frac{c_0^2}{h} \begin{bmatrix} 2 & -1 & & \\ & 2 & \ddots & \\ & & \ddots & -1 \\ \text{sym} & & & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_2 \\ p_3 \\ \vdots \\ p_{mnt-1} \end{Bmatrix} = \omega^2 \frac{h}{6} \begin{bmatrix} 4 & 1 & & \\ & 4 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ \text{sym} & & & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_2 \\ p_3 \\ \vdots \\ p_{mnt-1} \end{Bmatrix} \quad (2.120)$$

Pour le problème avec une source acoustique à densité constante Q , défini dans l'équation (2.88), le système global obtenu est donné par

$$\left(\begin{bmatrix} 2 & -1 & & \\ & 2 & \ddots & \\ & & \ddots & -1 \\ \text{sym} & & & 2 \end{bmatrix} - \omega^2 \frac{h}{6} \begin{bmatrix} 4 & 1 & & \\ & 4 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ \text{sym} & & & 4 \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} p_2 \\ p_3 \\ \vdots \\ p_{mnt-2} \\ p_{mnt-1} \end{Bmatrix} = \frac{Qh}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ 2 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (2.121)$$

Pour le problème de Neumann défini dans l'équation (2.114), le système global est donné par

$$\left(\begin{bmatrix} 2 & -1 & & \\ & 2 & \ddots & \\ & & \ddots & -1 \\ \text{sym} & & & 2 \end{bmatrix} - \omega^2 \frac{h}{6} \begin{bmatrix} 4 & 1 & & \\ & 4 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ \text{sym} & & & 4 \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} p_2 \\ p_3 \\ \vdots \\ p_{mnt-2} \\ p_{mnt-1} \end{Bmatrix} = \rho_0 c_0^2 \omega^2 \bar{U}_n \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (2.122)$$

2.6.6 Invocation de la condition de stationnarité et Etude de la convergence de la solution numérique :

On a mené à un système d'équations algébriques. Ce système est résolu à l'aide d'algorithmes numériques classiques.

Calcul des indicateurs physiques et interprétation des résultats. Dans le jargon des éléments finis

Considérons d'abord la solution résultant de l'utilisation de deux éléments linéaires

$n_e = 2; nnt = 3; h = L/2$ et $\langle p \rangle = \langle p_1, p_2, p_3 \rangle$ avec $p_1 = p_3 = 0$. Le problème de valeur propre,

réduit à

$$\left(-\omega^2 \frac{h}{6} 4 + \frac{c_0^2}{h} 2 \right) p_2 = 0 \quad (2.123)$$

Sa solution est donnée par

$$\omega_1 = \sqrt{3} \frac{c_0}{h} = 2\sqrt{3} \frac{c_0}{L} \quad (2.124)$$

Pour comparer la forme de mode associée à la solution analytique, nous devrions normaliser l'amplitude suivante :

$$\int_0^L (p(x))^2 dx = \langle p \rangle [M] \{ p \} = 1 \quad (2.125)$$

Conduisant à $p_2 = \sqrt{3/L}$. La solution exacte pour le premier mode ($m = 1$) est obtenue à partir de $\omega_m = m\pi c_0 / L$ et $p_m(x) = \sqrt{2/L} \sin(m\pi x / L)$. La comparaison est illustrée à la **figure 2.10**. L'erreur relative sur la première fréquence circulaire est donnée par

$$\frac{\omega_1 - \omega_{ex}}{\omega_{ex}} = \frac{2\sqrt{3} - \pi}{\pi} = 10\% \quad (2.126)$$

Et l'erreur sur l'amplitude de p_2 est

$$\frac{\sqrt{3/L} - \sqrt{2/L} \sin \pi/2}{\sqrt{2/L} \sin \pi/2} = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 22\% \quad (2.127)$$

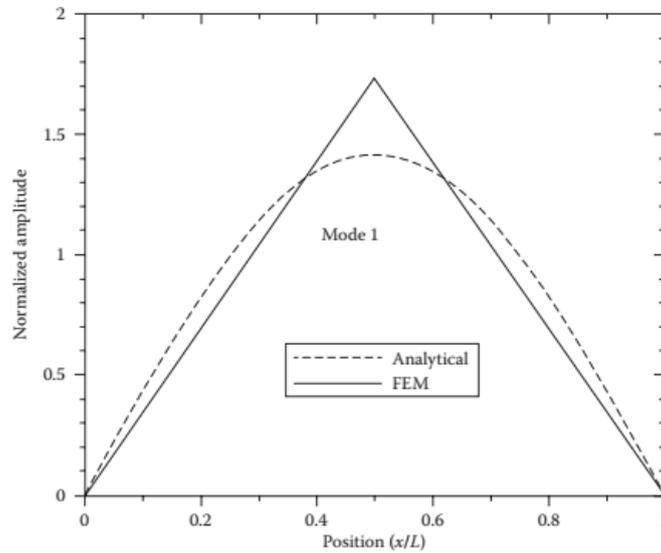


Figure 2.10 Convergence du premier mode. Solution exacte par rapport à la solution FEM utilisant deux éléments linéaires[55]

Notez que la fréquence calculée est supérieure à la fréquence exacte (pourquoi ?). Pour améliorer la convergence, il faut utiliser plus d'éléments. Par exemple, en utilisant trois éléments linéaires que nous avons : $n_e = 3, nnt = 4, h = L/3, \langle p \rangle = \langle p_1, p_2, p_3, p_4 \rangle$ avec $p_1 = p_4 = 0$. Le problème de valeur propre associé est donné par

$$\left(-\omega^2 \frac{h}{6} \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} + \frac{c_0^2}{h} \begin{bmatrix} 2 & +1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} p_2 \\ p_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.128)$$

Sa solution est donnée par

$$\begin{cases} \omega_1 = \sqrt{\frac{6}{5}} \frac{c_0}{h} = 3\sqrt{\frac{6}{5}} \frac{c_0}{L} \\ \omega_2 = \sqrt{6} \frac{c_0}{h} = 3\sqrt{6} \frac{c_0}{L} \end{cases} \quad (2.129)$$

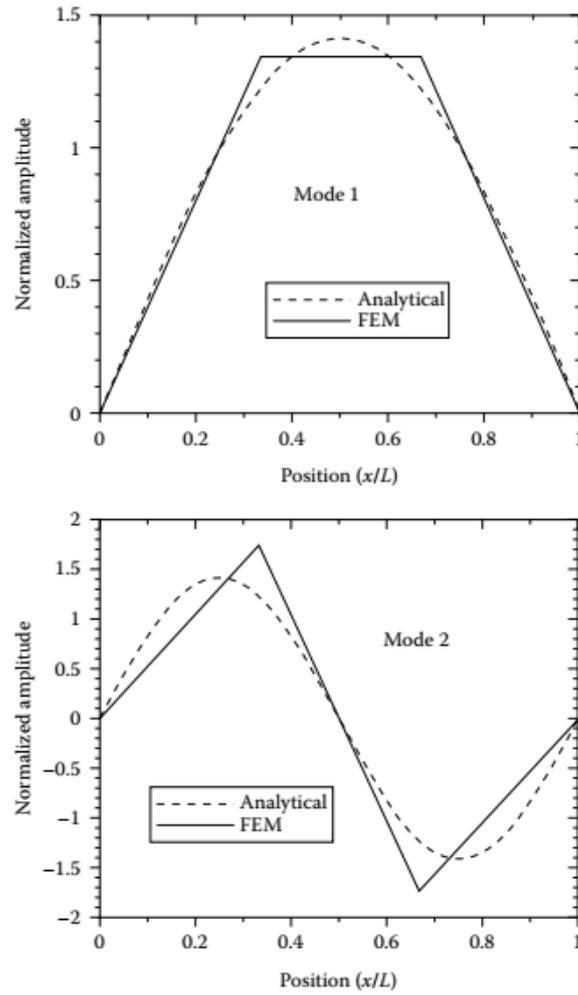


Figure 2.11 : Convergence des deux premiers modes. Solution exacte par rapport à la solution FEM utilisant trois éléments linéaires[55]

La comparaison avec la solution analytique est illustrée à la **figure 2.11**. Pour $\omega_1 = 3\sqrt{6/5}c_0/L$ on obtient $p_2 = p_3 = \sqrt{1.8/L}$ Les erreurs relatives sur la fréquence circulaire sont données par $(3\sqrt{6/5} - \pi)/\pi = 4.6\%$ et sur l'amplitude par $(\sqrt{1.8} - \sqrt{2} \sin \pi/3)/(\sqrt{2} \sin \pi/3) = 9.5\%$ à $x = L/3$.

Pour $\omega_2 = 3\sqrt{6}c_0/L$, on obtient $p_2 = -p_3 = \sqrt{3/L}$ Les erreurs relatives sur la fréquence circulaire sont $(3\sqrt{6} - 2\pi)/2\pi = 17\%$ et sur l'amplitude $(\sqrt{3} - \sqrt{2} \sin 2\pi/3)/(\sqrt{2} \sin 2\pi/3) = 41\%$ à $x = 2L/3$

2.7 CONCLUSION

Au terme de ce chapitre, on a pu dégager que dans la pratique, un problème vibroacoustique implique un milieu solide couplé à un milieu fluide (Limité ou illimité) pour lesquels on cherche à prédire la réponse vibroacoustique couplée de l'ensemble du système soumis à des excitations données avec des conditions aux limites et conditions initiales. Dans ce chapitre ont été présentées les techniques analytiques classiques pour résoudre divers problèmes de vibroacoustique à travers les équations gouvernantes de l'acoustique et de l'Elastodynamique linéaire. Toutes les équations aux dérivées partielles seront ensuite résolues en utilisant des méthodes numériques spécifiques, qui seront présentées dans le chapitre trois. En plus les techniques numérique classiques pour résoudre divers problèmes de vibroacoustique à travers les équations gouvernantes de l'acoustique et de l'Elastodynamique linéaire est les concepts fondamentaux de la FEM à travers l'étude d'un problème acoustique.

Chapitre 03

ETUDE DE CAS

- Analyse vibroacoustique

unidimensionnelle des engrenages -

3.1 INTRODUCTION

Le bruit est une source de pollution sonore et la réduction de celle-ci est devenue nécessaire pour la santé de l'humain. Du bruissement des feuilles au bruit d'un moteur thermique, les bruits quotidiens ont des origines multiples. En comparaison avec l'ensemble de ces bruits, celui lié à la circulation routière ne semble pas jouer le rôle principal, mais c'est la durée associée à ce bruit qui le classe au rang de premier facteur de pollution sonore. La réglementation sur les émissions sonores des véhicules ont conduit à une réduction de l'ordre de 1 à 2 dB(A), essentiellement sur les voitures particulières. Pour les poids lourds, la valeur limite fixée en novembre 1992 par la directive 92/97/CEE du 10 novembre 1992 s'élève à 80 dB(A). A partir de 1995-1996, dans des conditions de trafic urbain, le bruit de 25 camions n'équivaut plus qu'à celui d'un seul poids lourd du début des années quatre-vingts. Mais cette réduction s'accompagne de l'expansion du réseau routier et d'un accroissement du nombre de véhicules motorisés.

Dans le cas d'un véhicule automobile, dès qu'il se déplace à plus de 50 km/h, les bruits d'échappement mis à part, le bruit de roulement couvre celui du groupe motopropulseur. Dans le cas d'un véhicule poids lourd, ce seuil critique se situe entre 70 km/h et 80 km/h si bien que le bruit lié au groupe motopropulseur constitue la source dominante en trafic urbain [63].

Les principales sources de bruit d'un véhicule sont :

- Le bruit du moteur qui dépend du régime moteur, de la charge,
- Les bruits d'échappement,
- **Le bruit des transmissions mécaniques,**
- Les bruits de roulement liés au contact pneumatique-chaussée,
- Les bruits aérodynamiques liés à la turbulence de l'air, mais qui restent faibles aux vitesses usuellement pratiquées par les véhicules.

Concernant, le bruit des transmissions mécaniques, parmi les systèmes mécaniques impliqués on a les réducteurs de vitesses fréquemment utilisés dans l'industrie (**Figure 3.1**). Leur fonctionnement engendre des vibrations qui perturbent le comportement des machines (chocs, arrêt du système...) et accélèrent la défaillance de quelques composants mécaniques (dents d'engrenages).

L'importance des engrenages et leur vaste utilisation dans la vie quotidienne et le fonctionnement industriel ont montré leur sensibilité aux conditions de fonctionnement et la complexité de leur diagnostic.

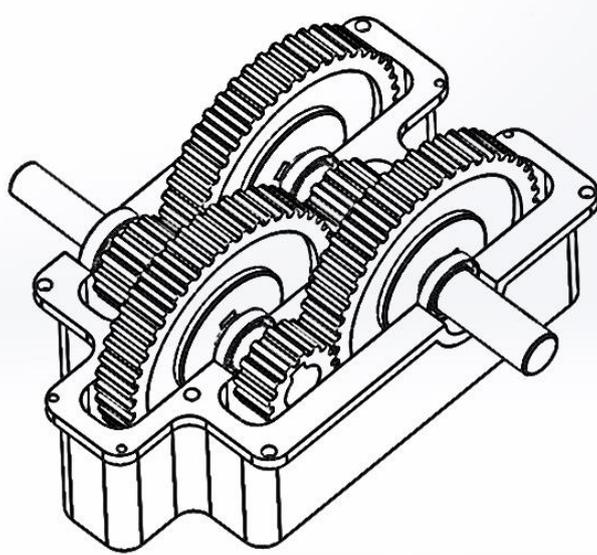


Figure. 3.1 : Réducteur de vitesse à engrenages droit

Le présent chapitre traite la simulation numérique du phénomène physique de la vibroacoustique appliquée aux systèmes mécaniques à engrenages. A ce propos, une étude de cas portant sur les défauts d'engrenages cylindriques à dentures droites est proposée. Le système d'engrenage en question, sera constitué d'un étage de deux roues dentées ayant un mode de défaillance causé par une fatigue par contact qui a pour effet la génération d'un bruit d'engrènement source d'excitation. L'objectif est de mener une simulation numérique de la propagation de l'onde acoustique et de dégager les modes de propagation dans un milieu fluide. Enfin une interprétation des résultats obtenus sera discutée.

3.2 DESCRIPTION DE PROBLEME

Afin d'analyser la propagation de l'onde acoustique et les défauts affectant les engrenages, des d'hypothèses simplificatrices doivent être supposées :

- Les roues dentées sont considérées comme solides élastiques
- Toutes les déformations seront régies par la théorie de contact d'Hertz.
- Seuls les petits mouvements élastiques sont considérés,
- L'étude de la propagation de la pression acoustique sera menée

Cette section présente les caractéristiques de l'engrenage à étudier (**Figure 3.2**).

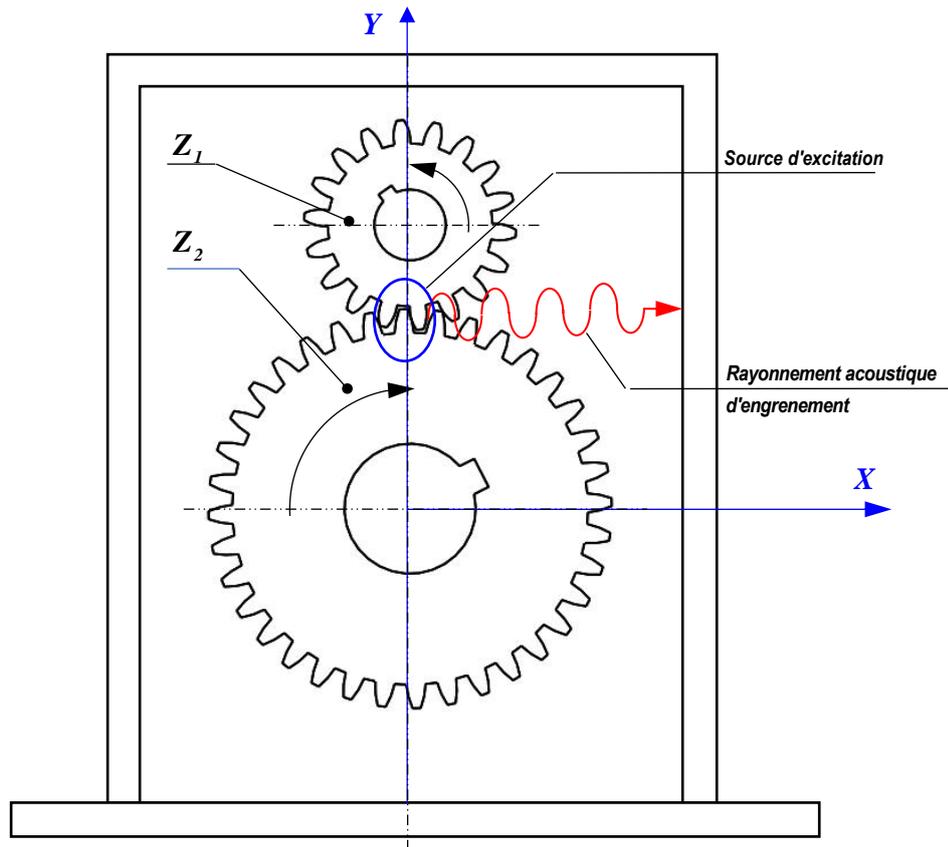


Figure. 3.2 : Mise en situation de la source d'excitation en vibro-

Le tableau 3.1, expose Les caractéristiques du système d'engrenage donné par la figure 3.2

Tableau. 3.1 : Caractéristique géométrique des engrenages [64]

Caractéristiques	Désignation	Pignon	Roue
Module	m	2	
Nombre de dents	z	18	36
Pas	p	6.28	
Saillie	h_a	2	
Creux	h_f	2.5	
Hauteur de dent	h	4.5	
Diamètre primitif	d	36	72
Diamètre de tête	d_a	40	76
Diamètre de pied	d_f	31	67
Largeur de denture	b	12	
Entraxe de deux roues	a	54	

3.3 SIMULATION NUMERIQUE

La simulation numérique est amenée à jouer un rôle majeur dans les réponses que les sciences et techniques pourront apporter aux enjeux de demain (usine du futur, mécanique pour la santé, énergies et transports). Il s'agit alors pour les ingénieurs de proposer les modèles qui, à partir du minimum d'ingrédients, permettent de rendre compte de la réalité. Cette section décrit une étude de cas d'un modèle géométrique pignon-roue réalisé à l'aide du logiciel SOLIDWORKS 2018,

3.3.1 Enoncés du problème

Pour le besoin de la simulation, on considère le problème de la propagation des ondes acoustiques harmoniques unidimensionnelles (**figure.4.3**). Il s'agit d'un problème de valeurs propres (PVP) avec conditions aux limites et conditions initiales. Les données du problème sont présentées sur le tableau 4 :

Tableau 3.2 : Données de simulation

Longueur du domaine	$L(m)$	1							
Vitesse du son (m/s)	$c(m/s)$	342							
Type d'éléments	EL	Eléments linéaires ELL				Eléments quadratiques ELQ			
Nombre d'éléments	NE	5	10	15	20	5	10	15	20

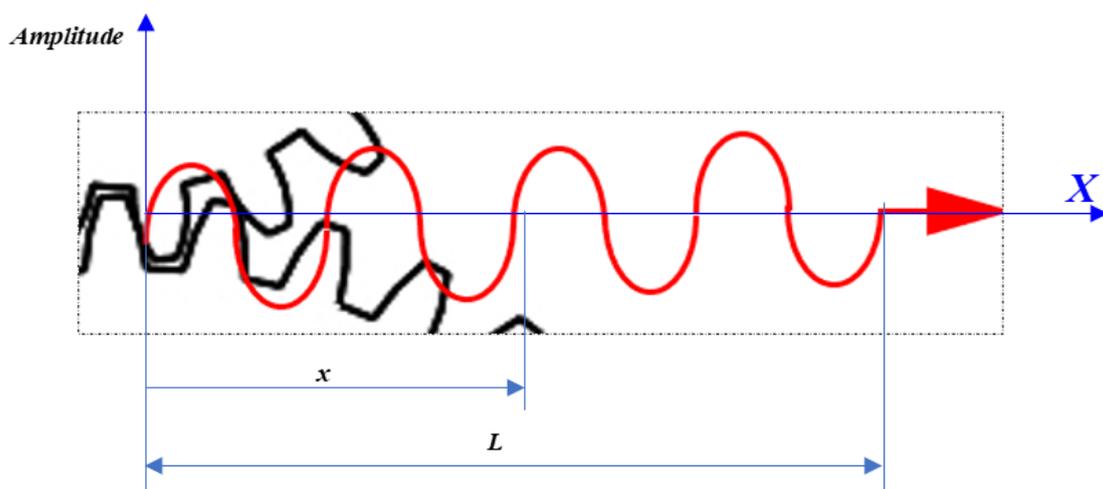


Fig.3.3 : paramétrage de l'onde acoustique

3.3.2 Résultats et discussions

3.3.2.1 Simulation élément finis linéaire

1°. Pour 5 éléments linéaires

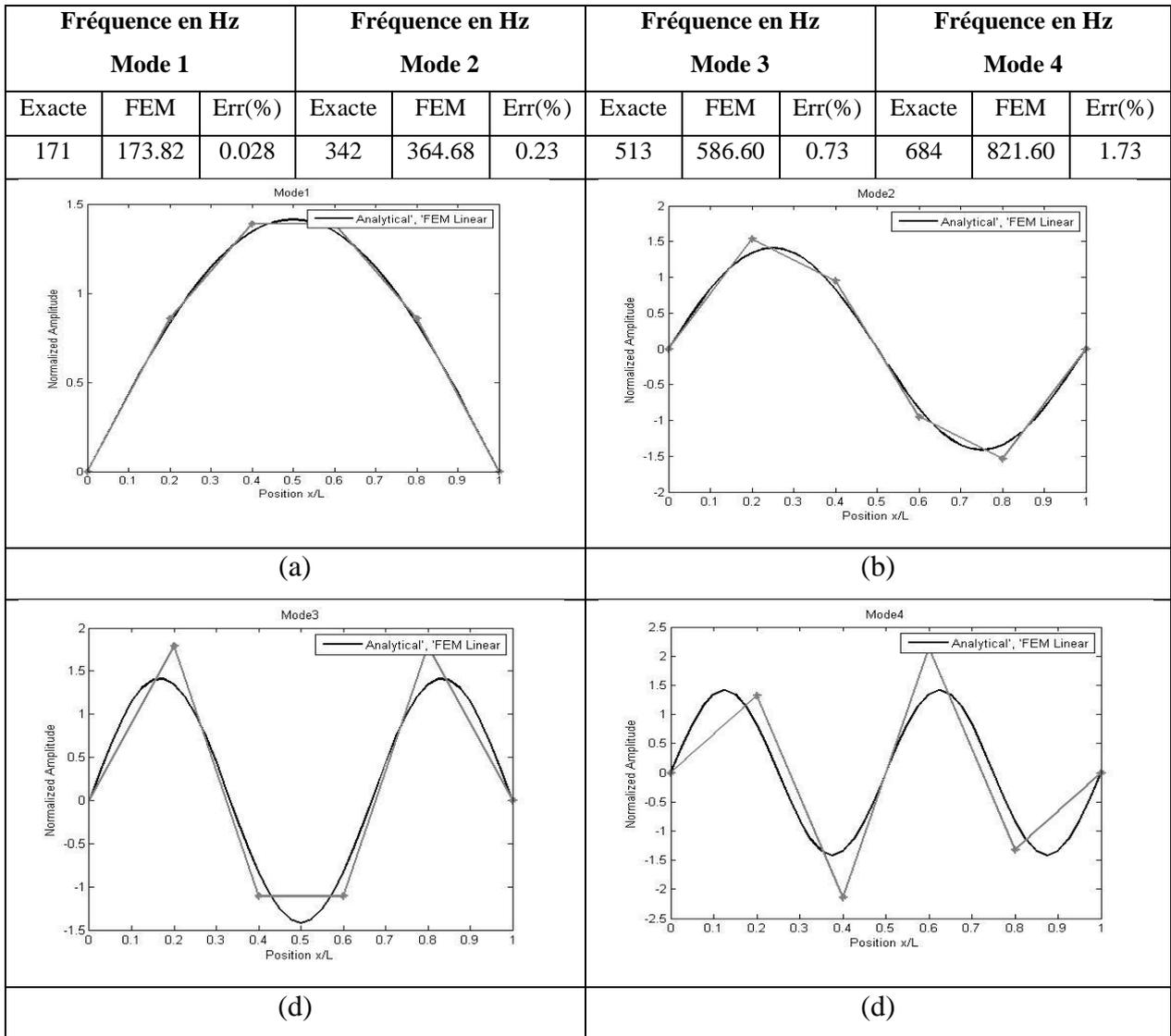


Figure 3.4 les modes de pression acoustique (5 éléments linéaire)

La figure 3.4 montre la variation de l’amplitude normalisée d’une onde acoustique en fonction du rapport entre un déplacement x et la longueur d’onde L . Tel que :

- La figure 3.4a, illustre le mode 1 avec demi ondulation de l’onde acoustique en fournissant des résultats montrant une err (a) entre l’approche analytique et numérique. En plus, le mode 1 est une courbe sinusoïdale symétrique par rapport à l’axe passant par l’abscisse 0.5, où on relève une amplitude maximale valant +1.4.

- La **figure 3.4b**, illustre le mode 2 avec une ondulation de l'onde acoustique en fournissant des résultats montrant une err (b) entre l'approche analytique et numérique. En plus, le mode 2 est une courbe sinusoïdale par rapport à l'axe passant des abscisses, où on relève une amplitude maximale valant +1.4 au niveau du rapport $x/L=0.25$ et une amplitude maximale valant -1.4 au niveau du rapport $x/L=0.75$.
- La **figure 3.4c**, illustre le mode 3 avec une ondulation et demi de l'onde acoustique en fournissant des résultats montrant une err (c) entre l'approche analytique et numérique. En plus, le mode 3 est une courbe sinusoïdale par rapport à l'axe passant des abscisses, où on relève une amplitude maximale valant +1.4 au niveau du rapport $x/L=0.15$, $x/L=0.85$ et une amplitude maximale valant -1.4 au niveau du rapport $x/L=0.5$.
- La **figure 3.4d**, illustre le mode 4 avec deux ondulations de l'onde acoustique en fournissant des résultats montrant une err (d) entre l'approche analytique et numérique. En plus, le mode 4 est une courbe sinusoïdale par rapport à l'axe passant des abscisses, où on relève une amplitude maximale valant +1.4 au niveau du rapport $x/L=0.15$, $x/L=0.65$ et une amplitude maximale valant -1.4 au niveau du rapport $x/L=0.4$, $x/L=0.9$.

2°. Pour 10 éléments

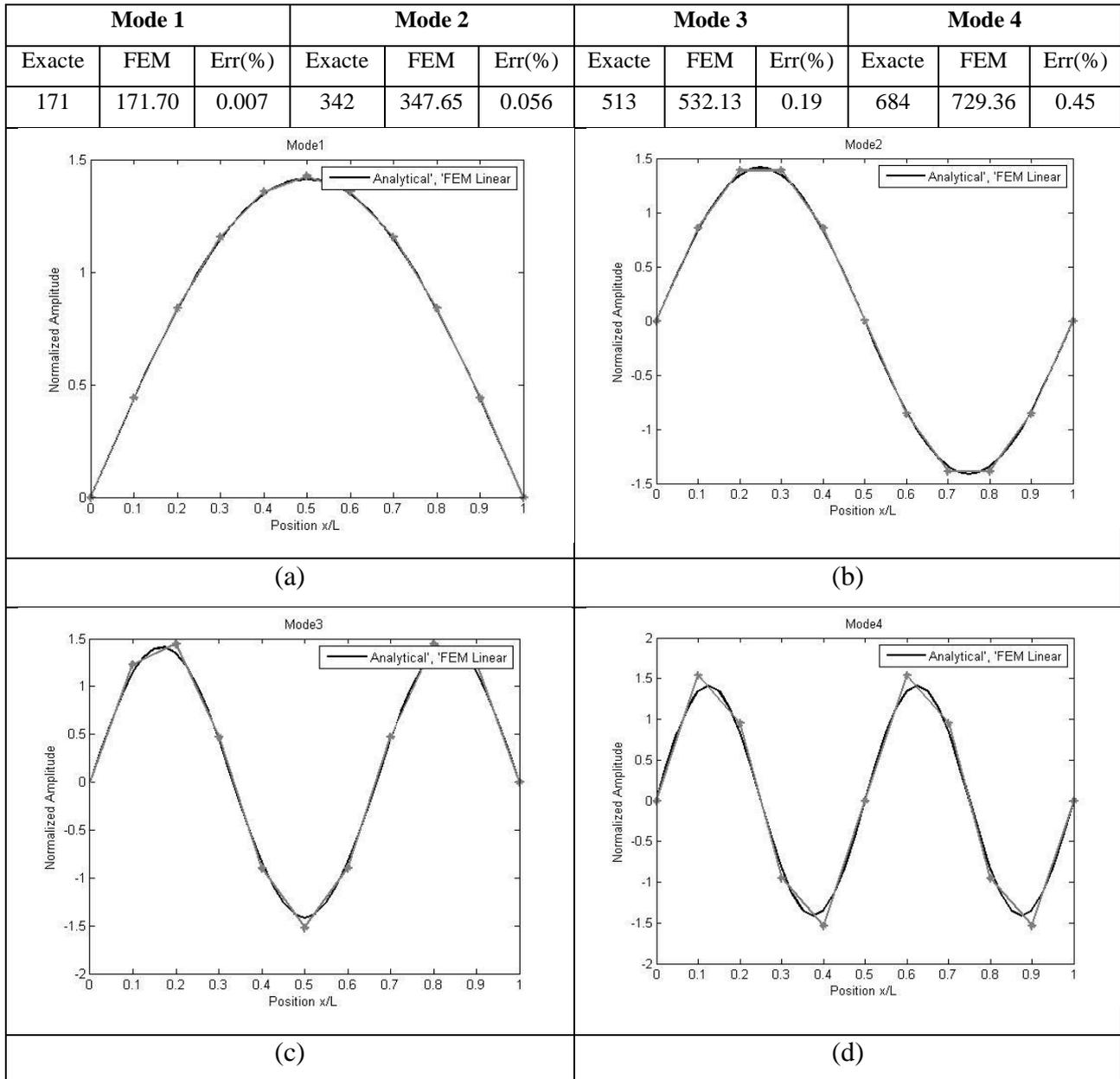


Figure 3.5 les modes de pression acoustique linéaire (10 éléments)

La figure 3.5 , montre la variation de l’amplitude normalisée d’une onde acoustique en fonction du rapport entre un déplacement x et la longueur d’onde L . Tel que :

- La figure 3.5a, illustre le mode 1 avec demi ondulation de l’onde acoustique en fournissant des résultats montrant une err (a) entre l’approche analytique et numérique. En plus, le mode 1 est une courbe sinusoïdale symétrique par rapport à l’axe passant par l’abscisse 0.5, où on relève une amplitude maximale valant +1.4.

- La **figure 3.5b**, illustre le mode 2 avec une ondulation de l'onde acoustique en fournissant des résultats montrant une err (b) entre l'approche analytique et numérique. En plus, le mode 2 est une courbe sinusoïdale par rapport à l'axe passant des abscisses, où on relève une amplitude maximale valant +1.4 au niveau du rapport $x/L=0.25$ et une amplitude maximale valant -1.4 au niveau du rapport $x/L=0.75$.
- La **figure 3.5c**, illustre le mode 3 avec une ondulation et demi de l'onde acoustique en fournissant des résultats montrant une err (c) entre l'approche analytique et numérique. En plus, le mode 3 est une courbe sinusoïdale par rapport à l'axe passant des abscisses, où on relève une amplitude maximale valant +1.4 au niveau du rapport $x/L=0.15$, $x/L=0.85$ et une amplitude maximale valant -1.4 au niveau du rapport $x/L=0.5$.
- La **figure 3.5d**, illustre le mode 4 avec deux ondulations de l'onde acoustique en fournissant des résultats montrant une err (d) entre l'approche analytique et numérique. En plus, le mode 4 est une courbe sinusoïdale par rapport à l'axe passant des abscisses, où on relève une amplitude maximale valant +1.4 au niveau du rapport $x/L=0.15$, $x/L=0.65$ et une amplitude maximale valant -1.4 au niveau du rapport $x/L=0.4$, $x/L=0.9$.

3° .Pour 15 éléments

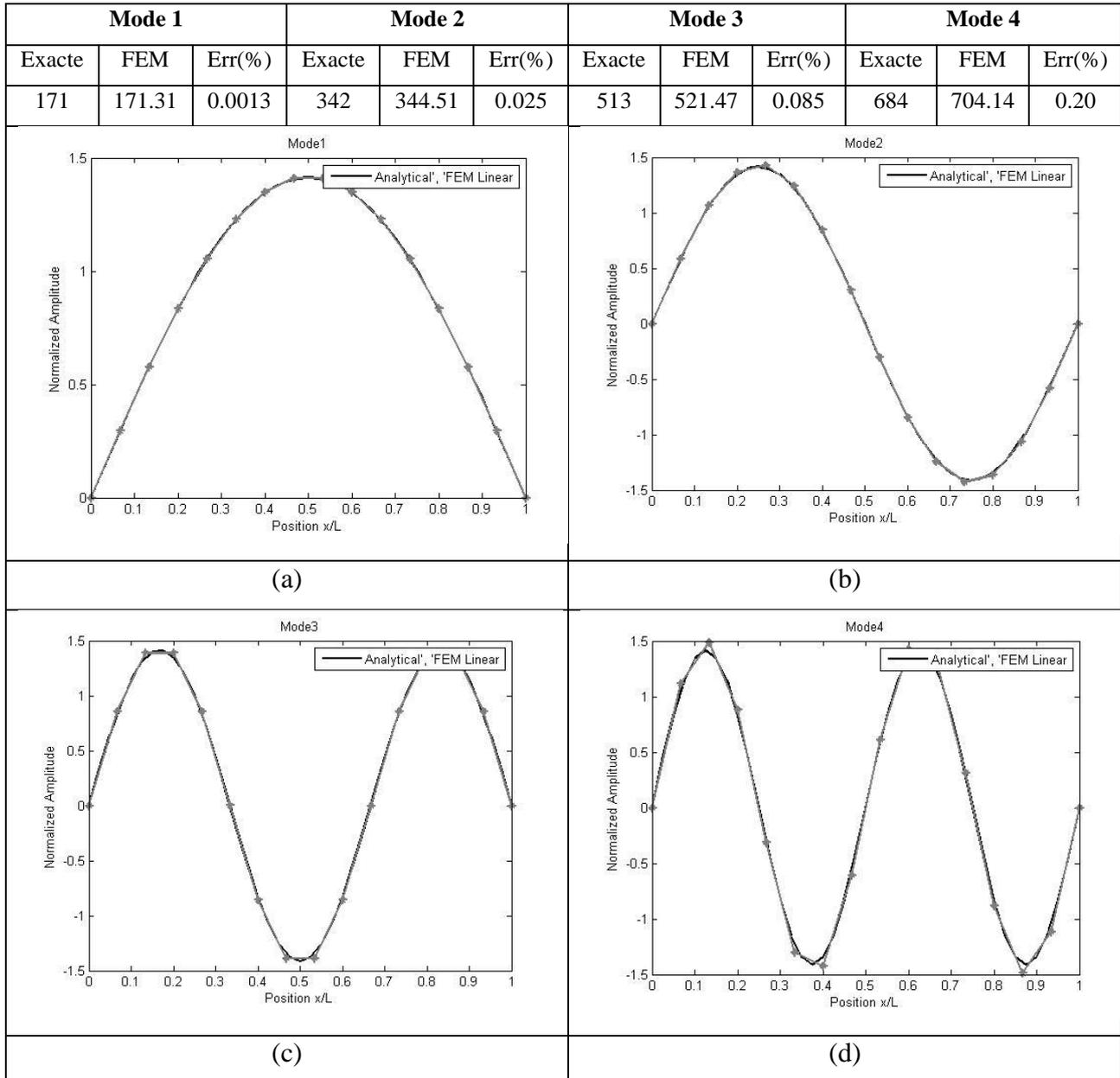


Figure 3.6 les modes de pression acoustique linéaire (15 éléments)

La **figure 3.6** montre la variation de l'amplitude normalisée d'une onde acoustique en fonction du rapport entre un déplacement x et la longueur d'onde L . Tel que :

- La **figure 3.6a**, illustre le mode 1 avec demi ondulation de l'onde acoustique en fournissant des résultats montrant une err (a) entre l'approche analytique et numérique. En plus, le mode 1 est une courbe sinusoïdale symétrique par rapport à l'axe passant par l'abscisse 0.5, où on relève une amplitude maximale valant +1.4.

- La **figure 3.6b**, illustre le mode 2 avec une ondulation de l'onde acoustique en fournissant des résultats montrant une err (b) entre l'approche analytique et numérique. En plus, le mode 2 est une courbe sinusoïdale par rapport à l'axe passant des abscisses, où on relève une amplitude maximale valant +1.4 au niveau du rapport $x/L=0.3$ et une amplitude maximale valant -1.4 au niveau du rapport $x/L=0.75$.
- La **figure 3.6c**, illustre le mode 3 avec une ondulation et demi de l'onde acoustique en fournissant des résultats montrant une err (c) entre l'approche analytique et numérique. En plus, le mode 3 est une courbe sinusoïdale par rapport à l'axe passant des abscisses, où on relève une amplitude maximale valant +1.4 au niveau du rapport $x/L=0.15$, $x/L=0.85$ et une amplitude maximale valant -1.4 au niveau du rapport $x/L=0.5$.
- La **figure 3.6d**, illustre le mode 4 avec deux ondulations de l'onde acoustique en fournissant des résultats montrant une err (d) entre l'approche analytique et numérique. En plus, le mode 4 est une courbe sinusoïdale par rapport à l'axe passant des abscisses, où on relève une amplitude maximale valant +1.4 au niveau du rapport $x/L=0.15$, $x/L=0.65$ et une amplitude maximale valant -1.4 au niveau du rapport $x/L=0.4$, $x/L=0.9$.

4°. Pour 20 éléments

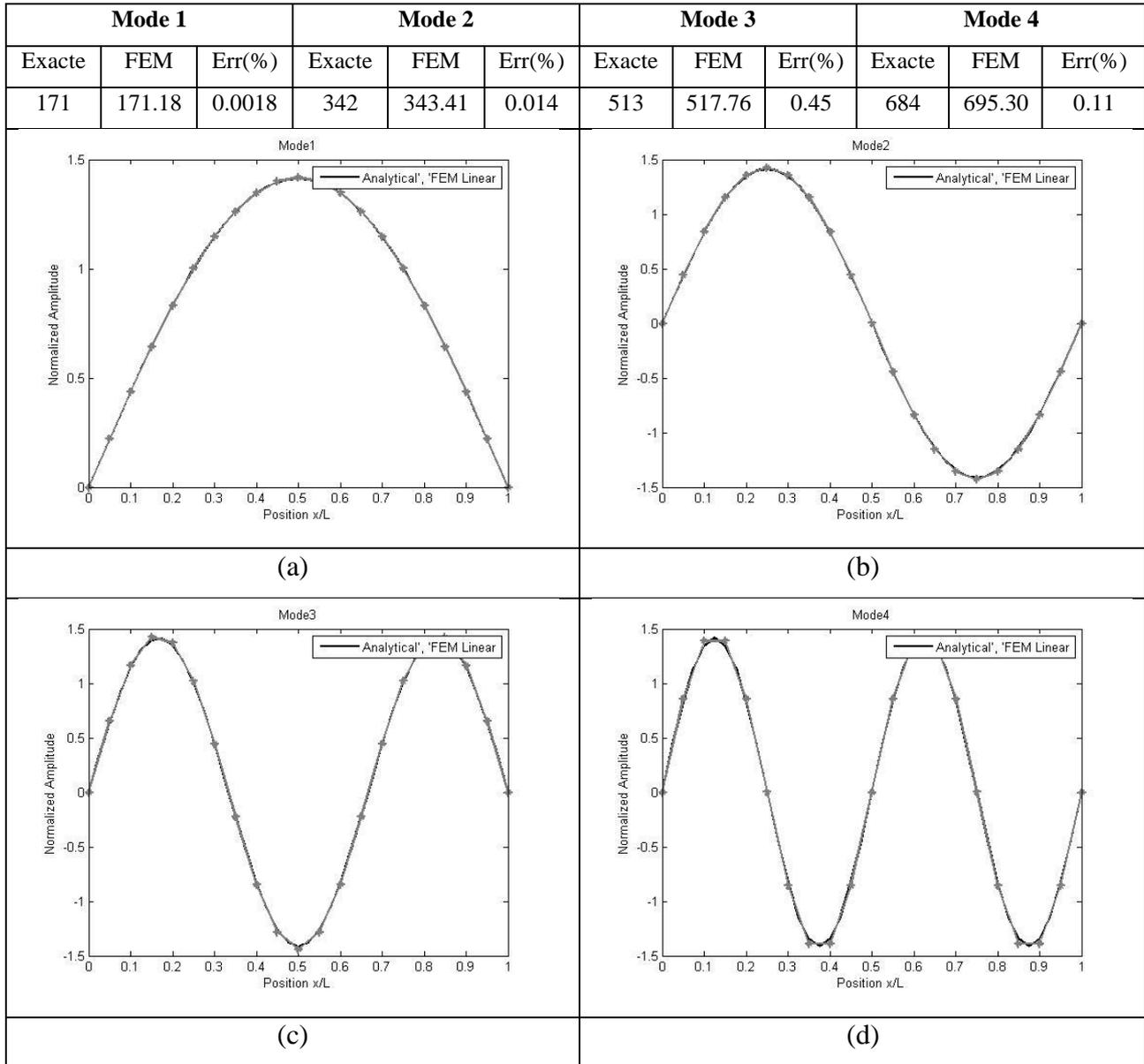


Figure 3.7 les modes de pression acoustique linéaire (20 éléments)

La **figure 3.7** montre la variation de l’amplitude normalisée d’une onde acoustique en fonction du rapport entre un déplacement x et la longueur d’onde L . Tel que :

- La **figure 3.7a**, illustre le mode 1 avec demi ondulation de l’onde acoustique en fournissant des résultats montrant une err (a) entre l’approche analytique et numérique. En plus, le mode 1 est une courbe sinusoïdale symétrique par rapport à l’axe passant par l’abscisse 0.5, où on relève une amplitude maximale valant +1.4.

- La **figure 3.7b**, illustre le mode 2 avec une ondulation de l'onde acoustique en fournissant des résultats montrant une err (b) entre l'approche analytique et numérique. En plus, le mode 2 est une courbe sinusoïdale par rapport à l'axe passant des abscisses, où on relève une amplitude maximale valant +1.4 au niveau du rapport $x/L=0.25$ et une amplitude maximale valant -1.4 au niveau du rapport $x/L=0.75$.
- La **figure 3.7c**, illustre le mode 3 avec une ondulation et demi de l'onde acoustique en fournissant des résultats montrant une err (c) entre l'approche analytique et numérique. En plus, le mode 3 est une courbe sinusoïdale par rapport à l'axe passant des abscisses, où on relève une amplitude maximale valant +1.4 au niveau du rapport $x/L=0.15$, $x/L=0.85$ et une amplitude maximale valant -1.4 au niveau du rapport $x/L=0.5$.
- La **figure 3.7d**, illustre le mode 4 avec deux ondulations de l'onde acoustique en fournissant des résultats montrant une err (d) entre l'approche analytique et numérique. En plus, le mode 4 est une courbe sinusoïdale par rapport à l'axe passant des abscisses, où on relève une amplitude maximale valant +1.4 au niveau du rapport $x/L=0.15$, $x/L=0.65$ et une amplitude maximale valant -1.4 au niveau du rapport $x/L=0.4$, $x/L=0.9$.

4.3.2.1 Simulation élément finis quadratique

1°. Pour 5 éléments

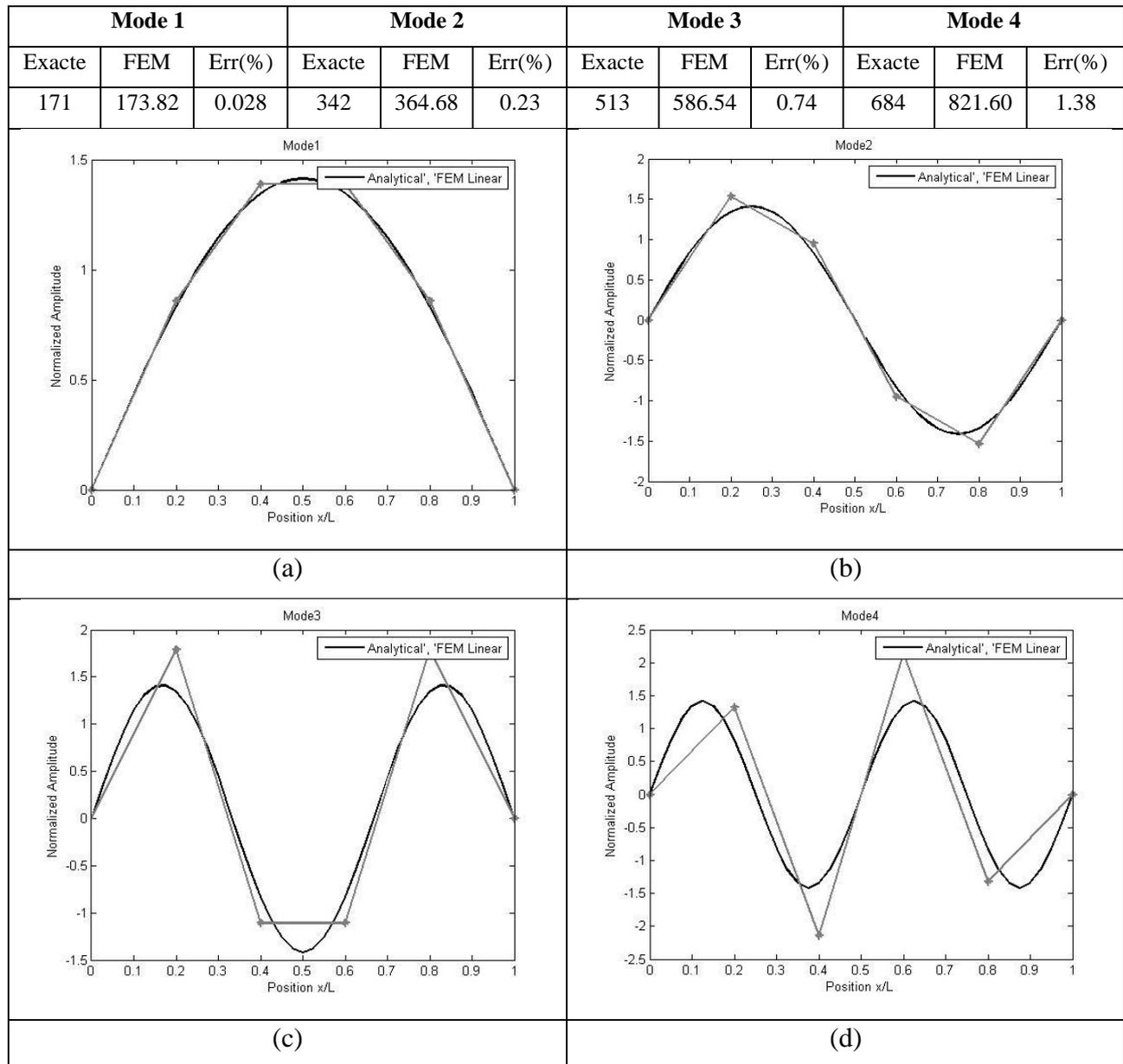


Figure 3.8 les modes de pression acoustique quadratique (5 éléments)

La figure 3.8 montre la variation de l’amplitude normalisée d’une onde acoustique en fonction du rapport entre un déplacement x et la longueur d’onde L . Tel que :

- La figure 3.8a, illustre le mode 1 avec demi ondulation de l’onde acoustique en fournissant des résultats montrant une err (a) entre l’approche analytique et numérique. En plus, le mode 1 est une courbe sinusoïdale symétrique par rapport à l’axe passant par l’abscisse 0.5, où on relève une amplitude maximale valant +1.4.

- La **figure 3.8b**, illustre le mode 2 avec une ondulation de l'onde acoustique en fournissant des résultats montrant une err (b) entre l'approche analytique et numérique. En plus, le mode 2 est une courbe sinusoïdale par rapport à l'axe passant des abscisses, où on relève une amplitude maximale valant +1.4 au niveau du rapport $x/L=0.3$ et une amplitude maximale valant -1.4 au niveau du rapport $x/L=0.75$.
- La **figure 3.8c**, illustre le mode 3 avec une ondulation et demi de l'onde acoustique en fournissant des résultats montrant une err (c) entre l'approche analytique et numérique. En plus, le mode 3 est une courbe sinusoïdale par rapport à l'axe passant des abscisses, où on relève une amplitude maximale valant +1.4 au niveau du rapport $x/L=0.20$, $x/L=0.85$ et une amplitude maximale valant -1.4 au niveau du rapport $x/L=0.5$.
- La **figure 3.8d**, illustre le mode 4 avec deux ondulations de l'onde acoustique en fournissant des résultats montrant une err (d) entre l'approche analytique et numérique. En plus, le mode 4 est une courbe sinusoïdale par rapport à l'axe passant des abscisses, où on relève une amplitude maximale valant +1.4 au niveau du rapport $x/L=0.15$, $x/L=0.65$ et une amplitude maximale valant -1.4 au niveau du rapport $x/L=0.4$, $x/L=0.9$.

2°.Pour 10 éléments

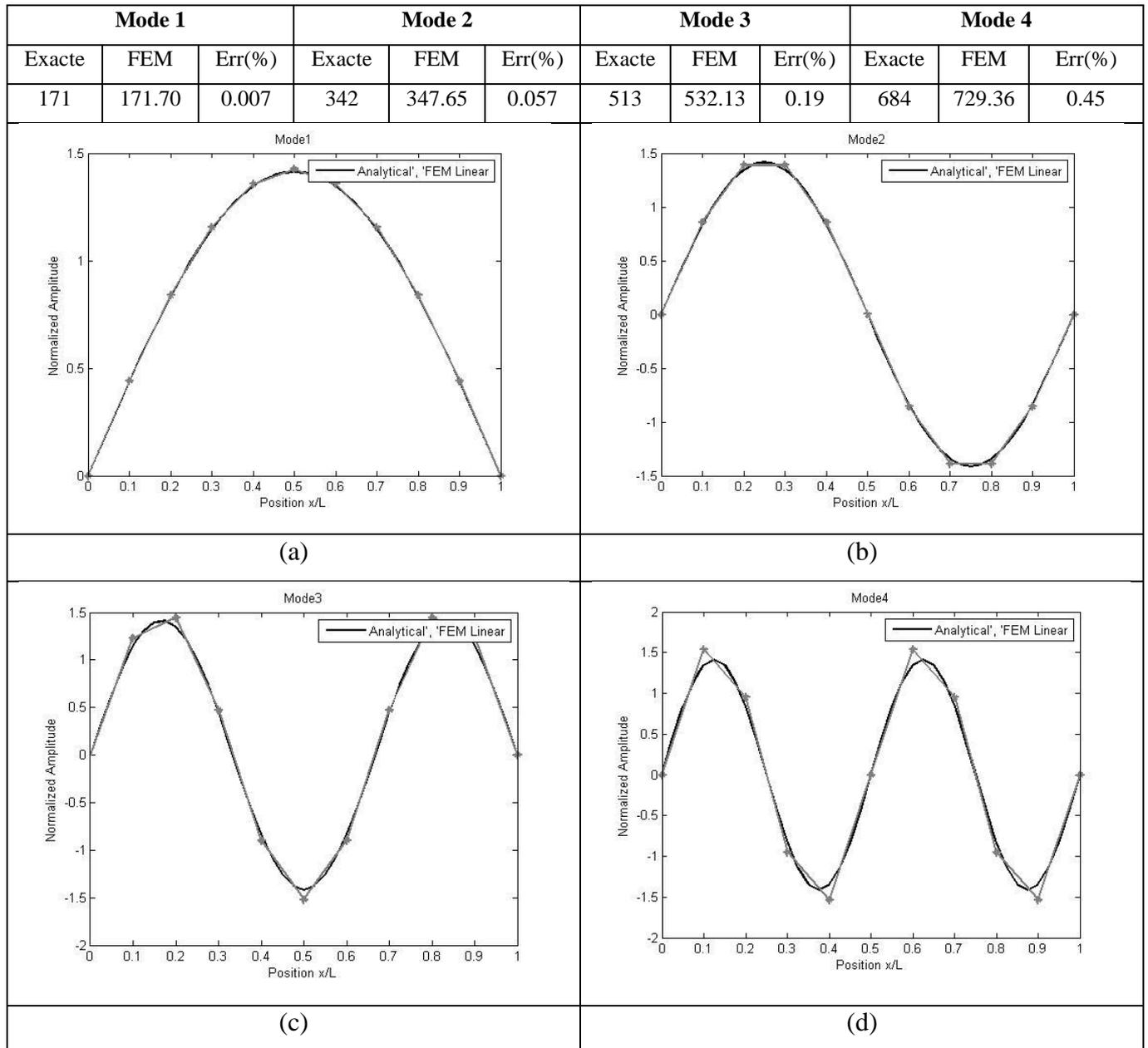


Figure 3.9 les modes de pression acoustique quadratique (10 éléments)

La figure 3.9 montre la variation de l’amplitude normalisée d’une onde acoustique en fonction du rapport entre un déplacement x et la longueur d’onde L . Tel que :

- La figure 3.9a, illustre le mode 1 avec demi ondulation de l’onde acoustique en fournissant des résultats montrant une err (a) entre l’approche analytique et numérique. En plus, le mode 1 est une courbe sinusoïdale symétrique par rapport à l’axe passant par l’abscisse 0.5, où on relève une amplitude maximale valant +1.4.

- La **figure 3.9b**, illustre le mode 2 avec une ondulation de l'onde acoustique en fournissant des résultats montrant une err (b) entre l'approche analytique et numérique. En plus, le mode 2 est une courbe sinusoïdale par rapport à l'axe passant des abscisses, où on relève une amplitude maximale valant +1.4 au niveau du rapport $x/L=0.3$ et une amplitude maximale valant -1.4 au niveau du rapport $x/L=0.75$.
- La **figure 3.9c**, illustre le mode 3 avec une ondulation et demi de l'onde acoustique en fournissant des résultats montrant une err (c) entre l'approche analytique et numérique. En plus, le mode 3 est une courbe sinusoïdale par rapport à l'axe passant des abscisses, où on relève une amplitude maximale valant +1.4 au niveau du rapport $x/L=0.20$, $x/L=0.85$ et une amplitude maximale valant -1.4 au niveau du rapport $x/L=0.5$.
- La **figure 3.9d**, illustre le mode 4 avec deux ondulations de l'onde acoustique en fournissant des résultats montrant une err (d) entre l'approche analytique et numérique. En plus, le mode 4 est une courbe sinusoïdale par rapport à l'axe passant des abscisses, où on relève une amplitude maximale valant +1.4 au niveau du rapport $x/L=0.15$, $x/L=0.65$ et une amplitude maximale valant -1.4 au niveau du rapport $x/L=0.4$, $x/L=0.9$.

3°. Pour 15 éléments

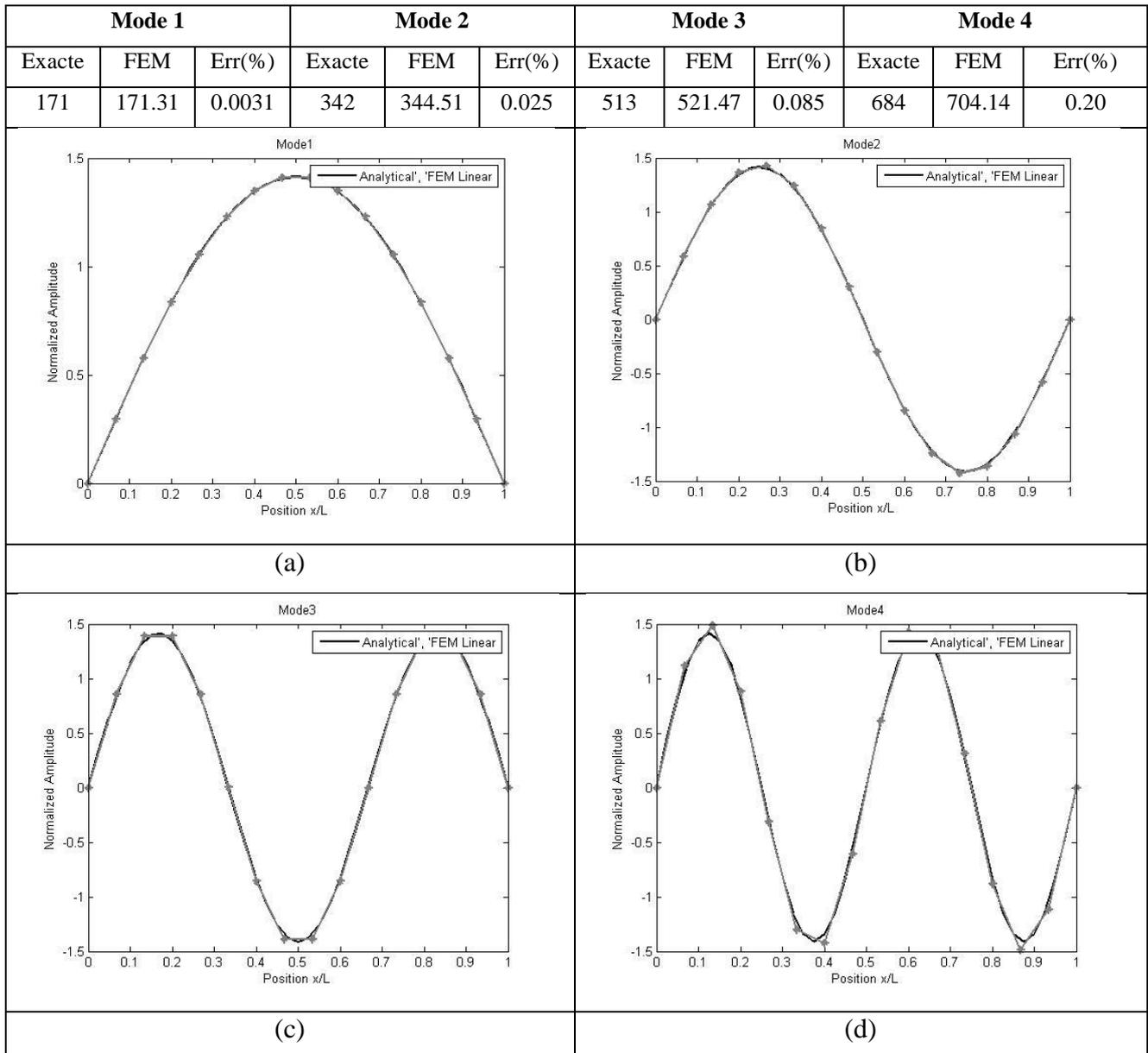


Figure 3.10 les modes de pression acoustique quadratique (15 éléments)

La **figure 3.10** montre la variation de l’amplitude normalisée d’une onde acoustique en fonction du rapport entre un déplacement x et la longueur d’onde L . Tel que :

- La **figure 3.10a**, illustre le mode 1 avec demi ondulation de l’onde acoustique en fournissant des résultats montrant une err (a) entre l’approche analytique et numérique. En plus, le mode 1 est une courbe sinusoïdale symétrique par rapport à l’axe passant par l’abscisse 0.5, où on relève une amplitude maximale valant +1.4.

- La **figure 3.10b**, illustre le mode 2 avec une ondulation de l'onde acoustique en fournissant des résultats montrant une err (b) entre l'approche analytique et numérique. En plus, le mode 2 est une courbe sinusoïdale par rapport à l'axe passant des abscisses, où on relève une amplitude maximale valant +1.4 au niveau du rapport $x/L=0.25$ et une amplitude maximale valant -1.4 au niveau du rapport $x/L=0.75$.
- La **figure 3.10c**, illustre le mode 3 avec une ondulation et demi de l'onde acoustique en fournissant des résultats montrant une err (c) entre l'approche analytique et numérique. En plus, le mode 3 est une courbe sinusoïdale par rapport à l'axe passant des abscisses, où on relève une amplitude maximale valant +1.4 au niveau du rapport $x/L=0.20$, $x/L=0.85$ et une amplitude maximale valant -1.4 au niveau du rapport $x/L=0.5$.
- La **figure 3.10d**, illustre le mode 4 avec deux ondulations de l'onde acoustique en fournissant des résultats montrant une err (d) entre l'approche analytique et numérique. En plus, le mode 4 est une courbe sinusoïdale par rapport à l'axe passant des abscisses, où on relève une amplitude maximale valant +1.4 au niveau du rapport $x/L=0.15$, $x/L=0.65$ et une amplitude maximale valant -1.4 au niveau du rapport $x/L=0.35$, $x/L=0.85$.

4°. Pour 20 éléments

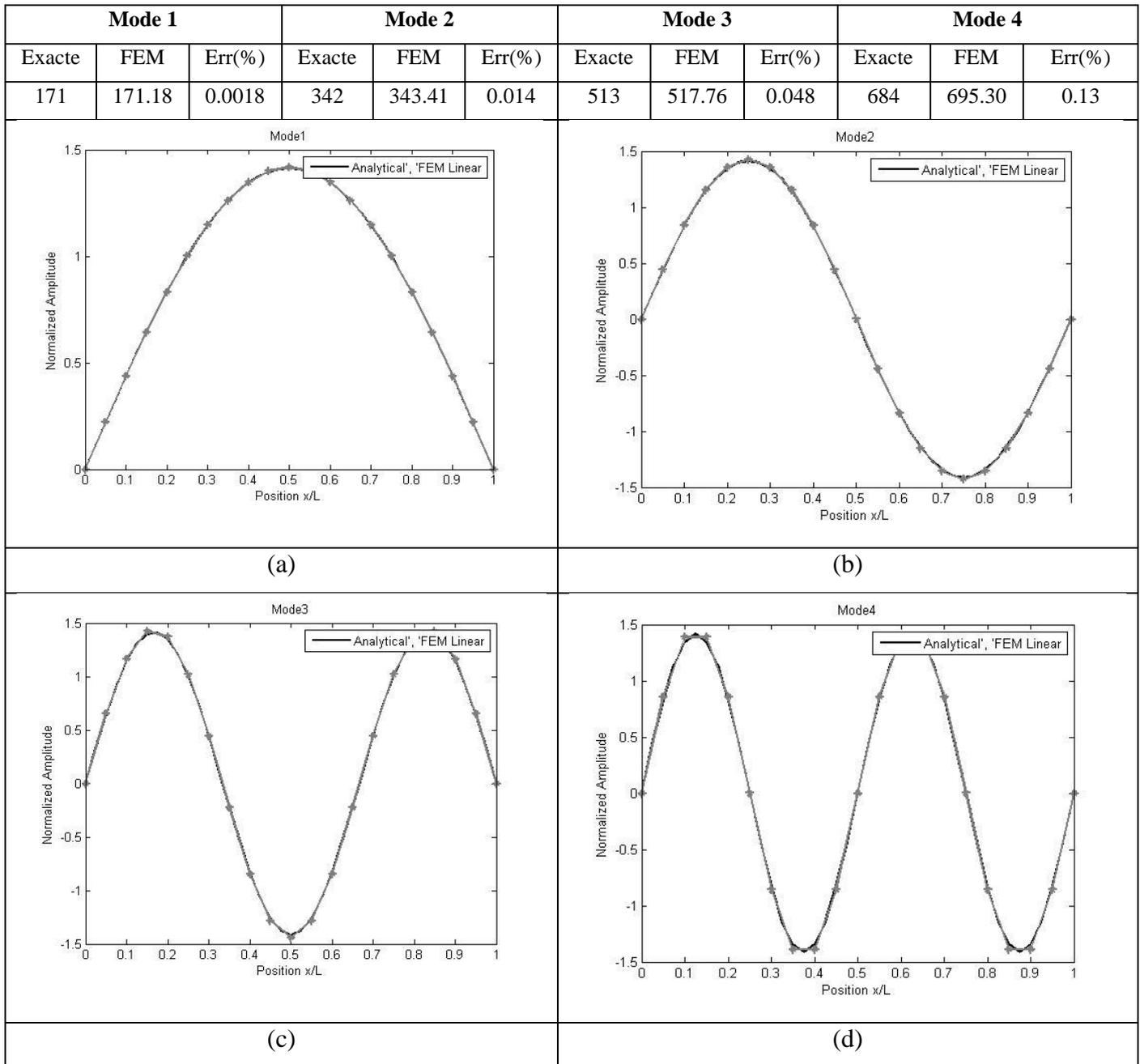


Figure 3.11 les modes de pression acoustique quadratique (20 éléments)

La figure 3.11 montre la variation de l’amplitude normalisée d’une onde acoustique en fonction du rapport entre un déplacement x et la longueur d’onde L . Tel que :

- La figure 3.11a, illustre le mode 1 avec demi ondulation de l’onde acoustique en fournissant des résultats montrant une err (a) entre l’approche analytique et numérique. En plus, le mode 1 est une courbe sinusoïdale symétrique par rapport à l’axe passant par l’abscisse 0.5, où on relève une amplitude maximale valant +1.4.

- La **figure 3.11b**, illustre le mode 2 avec une ondulation de l'onde acoustique en fournissant des résultats montrant une err (b) entre l'approche analytique et numérique. En plus, le mode 2 est une courbe sinusoïdale par rapport à l'axe passant des abscisses, où on relève une amplitude maximale valant +1.4 au niveau du rapport $x/L=0.25$ et une amplitude maximale valant -1.4 au niveau du rapport $x/L=0.75$.
- La **figure 3.11c**, illustre le mode 3 avec une ondulation et demi de l'onde acoustique en fournissant des résultats montrant une err (c) entre l'approche analytique et numérique. En plus, le mode 3 est une courbe sinusoïdale par rapport à l'axe passant des abscisses, où on relève une amplitude maximale valant +1.4 au niveau du rapport $x/L=0.20$, $x/L=0.85$ et une amplitude maximale valant -1.4 au niveau du rapport $x/L=0.5$.
- La **figure 3.11d**, illustre le mode 4 avec deux ondulations de l'onde acoustique en fournissant des résultats montrant une err (d) entre l'approche analytique et numérique. En plus, le mode 4 est une courbe sinusoïdale par rapport à l'axe passant des abscisses, où on relève une amplitude maximale valant +1.4 au niveau du rapport $x/L=0.15$, $x/L=0.65$ et une amplitude maximale valant -1.4 au niveau du rapport $x/L=0.35$, $x/L=0.85$.

3.4 CONCLUSION

Dans ce chapitre a été présentée une simulation numérique menée sur le cas du bruit engrènement, à travers la théorie de la vibroacoustique. La simulation en question nous a permis de dégager les différentes fréquences et modes propres de la propagation d'une onde acoustique le long d'un domaine unidimensionnel. Les résultats ont été obtenus par discrétisation du domaine en utilisant des éléments finis linéaires à deux nœuds et quadratiques à trois nœuds. En plus les courbes obtenus nous ont permis de comparer entre la solution exacte et numérique approchée et dégager l'écart généré par le traitement numérique. La discrétisation du domaine en 10 éléments linéaires ou en 5 éléments quadratique a fournit des résultats probants où on assiste à une parfaite superposition entre la solution analytique et numérique.

CONCLUSION GENERALE

Au terme de ce mémoire, qui synthétise notre projet de fin d'études, le fait de traiter l'analyse par vibroacoustique des défauts des engrenages, nous a donné l'occasion d'acquérir et de renforcer nos connaissances sur les réalités techniques de l'une des activités de maintenance industrielle à savoir le diagnostic machines.

Le but de ce mémoire étant l'analyse vibroacoustique des défauts des engrenages, nous avons d'abord abordé les différents défauts qu'on peut trouver dans les systèmes mécaniques à base d'engrenages ainsi que les différentes sources d'excitations (externes ou internes). La notion d'acoustique a été présentée tant qu'outil théorique pour approcher le problème du rayonnement acoustique de manière générale. Pour ce faire, l'équation d'onde a été développée à partir des équations de bilan de masse et de quantité de mouvement en addition de l'équation de compressibilité des gaz. Ensuite, ont été présentées les solutions analytique et numérique pour le cas d'une propagation d'une onde acoustique unidimensionnelle. Cette dernière a fait l'objet d'une simulation numérique.

En ce qui concerne les résultats obtenus, on peut dire et juger que les objectifs fixés dans notre plan de travail ont été atteints étant donné qu'on n'a pu effectuer une simulation numérique qui nous a fourni une superposition et une comparaison des résultats issus de la solution analytique avec ceux issus de la solution numérique avec discrétisation par éléments finis. Chose qui a été menée par le traitement du cas unidimensionnel avec éléments finis linéaire et éléments quadratiques à 5, 10, 15 et 20 nœuds. La discrétisation du domaine en 10 éléments linéaires ou en 5 éléments quadratique a fourni des résultats probants où on assiste à une parfaite superposition entre la solution analytique et numérique.

En conclusion on peut affirmer sur la lumière de l'exemple étudié que la méthode est vraiment une méthode très prometteuse pour l'identification des défauts dans les engrenages. Comme perspectives, on propose l'application simultanée et le test de cette méthode sur d'autres types de problèmes vibroacoustique.

BIBLIOGRAPHIE

Bibliographie

- [1] **B. K. N. RAO, A. DAVIES**, "*Handbook of Condition Monitoring Techniques and Methodology*"
- [2] **M ST-MARSEILLE, J B LAPOINTE**, "*La gestion des équipements- vers l'entretien préventif. Guide pour la PME*", 2e édition, **2015**
- [3] **P. GIRDHAR, C.SCHEFFER** "*Practical Machinery Vibration Analysis and Predictive Maintenance*", IDC Technologies. **2004**.
- [4] **ALAN CHALIFOUX, JOYCE BAIRD**, "*Reliability Centered Maintenance*", CERL Technical Report 99/41, 1999
- [5] <https://www.futura-sciences.com/sciences/dossiers/physique-fonctionnement-montre-quartz/21/page/4/>
- [6] <https://www.thomasnet.com/articles/machinery-tools-supplies/understanding-gears/>
- [7] **ROBERT ERRICHELLO** "How To Analyze Gear Failures " Article 2002
- [8] **R. KEITH MOBLEY** "Maintenance Fundamentals, Second Edition "
- [9] **THAMEUR KIDAR** Thèse de doctorat "*Diagnostic des défauts de fissures d'engrenages par l'analyse cyclostationnaire* "Université Jean Monnet 2015
- [10] https://ume.ensta-paristech.fr/theme-vibroacoustique_lang_FR_menu_2
- [11] **N.F. DECLERCQ & C.S.A. DEKEYSER**, « Acoustic diffraction effects at the Hellenistic amphitheater of Epidaurus : seat rows responsible for the marvelous acoustics », *Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 121, n° 4, 2007, p. 2011-22.
- [12] **RICHARD E. BERG**, « Acoustics », dans *Encyclopædia Britannica*, Encyclopædia Britannica Online Academic Edition, 2012
- [13] **POTEL ET BRUNEAU** 2006, p. 11-17, chapitre I, section 2, "Éléments d'histoire de l'acoustique".
- [14] **PIERCE** 1989, p. 3-6, section 1.1 "A Little History".
- [15] **RICHARD TAILLET**, Loïc Villain et Pascal Febvre, *Dictionnaire de physique*, Bruxelles, De Boeck, 2013, p. 10.
- [16] Le livre blanc de l'acoustique en France en 2010 [archive] publié par la Société française d'acoustique présente un répertoire des domaines d'expertise des acousticiens en France.

[17] **RICHARD TAILLET**, Loïc Villain et Pascal Febvre, *Dictionnaire de physique*, Bruxelles, De Boeck, 2013, p. 11

[18] **POTEL ET BRUNEAU** 2006, p. 60-74, chapitre III, section 3, "Les équations de l'acoustique en milieu fluide".

[19] **POTEL ET BRUNEAU** 2006, p. 74-82, chapitre III, section 4, "Hypothèses conduisant à une simplification des équations fondamentales de l'acoustique en milieu fluide".

[20] **BRUNEAU** 2006, p. 15-49, chapitre 1, "Equations of Motion in Non-dissipative Fluid".

[21] **BRUNEAU** 2006, p. 55-110, chapitre 2, "Equations of Motion in Dissipative Fluid".

[22] **B. A. HAMILTON**, *Acoustic Fields and Waves in Solids*, Krieger Publishing Company, 1990 (ISBN 0894644904).

[23] **BRUNEAU** 2006, p. 511-576, chapitre 10, "Introduction to Non-linear Acoustics, Acoustics in Uniform Flow, and Aero-acoustics"

[24] **M.F. HAMILTON ET D.T. BLACKSTOCK**, *Nonlinear Acoustics*, Academic Press, 1998 (ISBN 0-12-321860-8), p. 55.

[25] **BRUNEAU** 2006, p. 187-193, chapitre 4, section 4.4, "Reflection and transmission at the interface between two different fluids".

[26] **POTEL ET BRUNEAU** 2006, p. 128-141, chapitre IV, section 2.2, "Réflexion et transmission à l'interface entre deux milieux fluides différents".

[27] **BRUNEAU** 2006, p. 357-362, chapitre 7, section 7.1, "Acoustic diffusion: examples".

[28] **POTEL ET BRUNEAU** 2006, p. 172-175, chapitre V, section 3, "Diffraction d'une onde plane par un cylindre dont la surface est caractérisée par son impédance acoustique".

[29] **POTEL ET BRUNEAU** 2006, p. 211-213, chapitre VI, section 3, "Diffraction d'une onde plane par une sphère dont la surface est caractérisée par son impédance acoustique"

[30] **BRUNEAU** 2006, p. 362-385, chapitre 7, section 7.2, "Acoustic diffraction by a screen".

[31] **POTEL ET BRUNEAU** 2006, p. 59-60, chapitre III, section 2, "Les différentes sources acoustiques".

- [32] **POTEL ET BRUNEAU** 2006, p. 222-233, chapitre VII, section 1, "La fonction de Green".
- [33] **POTEL ET BRUNEAU** 2006, p. 234-240, chapitre VII, section 2, "La formulation intégrale".
- [34] **BRUNEAU** 2006, p. 297-300, chapitre 6, section 6.2.2, "Integral formalism".
- [35] **POTEL ET BRUNEAU** 2006, p. 240-249, chapitre VII, section 3, "Rayonnement de sources de frontières en espace semi-infini (intégrale de Rayleigh)".
- [36] **BERANEK** 1993, p. 128-143, part XIII, "Acoustic Elements".
- [37] **PIERCE** 1989, p. 319-324, section 7.2 "Lumped-Parameter Models".
- [38] **BRUNEAU** 2006, p. 193-205, chapitre 4, section 4.5, "Harmonic waves propagation in an infinite waveguide with rectangular cross-section".
- [39] **BRUNEAU** 2006, p. 238-245, chapitre 5, section 5.1.4, "Propagation of harmonic waves in cylindrical waveguides".
- [40] **PIERCE** 1989, p. 313-319, section 7.1 "Guided Waves".
- [41] **POTEL ET BRUNEAU** 2006, p. 72.
- [42] **POTEL ET BRUNEAU** 2006, p. 66-70, chapitre III, section 3.3, "L'équation de conservation de la masse : traduction de l'élasticité (compressibilité du fluide)".
- [43] **BERANEK** 1993, p. 20-21, section "The Continuity Equation"
- [44] **PIERCE** 1989, p. 6-8, section 1.2 "The conservation of mass".
- [45] **BRUNEAU** 2006, p. 20-25, section 1.2.1, "Basis of thermodynamics".
- [46] **POTEL ET BRUNEAU** 2006, p. 57-58, chapitre III, section 1.3.1, "Transformations adiabatiques".
- [47] **POTEL ET BRUNEAU** 2006, p. 25-26, chapitre I, section 4.3, "Les effets dissipatifs".
- [48] **ZIENKIEWICZ, O. C. AND R. L. TAYLOR.** 2000a. *The Finite Element Method*. 5th ed. Vol. 1. Woburn, MA, USA: Butterworth-Heinemann
- [49] **CISKOWSKI, R. D. AND C. A. BREBBIA.** 1991. *Boundary Element Methods in Acoustics*. Computational Mechanics Publications, Southampton, UK

- [50] **BERENGER, J.-P.** 1994. A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves. *Journal of Computational Physics* 114 (2): 185–200
- [51] **ZAMPOLLI, M., T. ALESSANDRA, F. B. JENSEN, N. MALM, AND J. B. BLOTTMAN III.** 2007. A computationally efficient finite element model with perfectly matched layers applied to scattering from axially symmetric objects. *The Journal of the Acoustical Society of America* 122 (3): 1472–85.
- [52] **SOIZE, C.** 1993. A model and numerical method in the medium frequency range for vibroacoustic predictions using the theory of structural fuzzy. *The Journal of the Acoustical Society of America* 94 (2): 849–65
- [53] **LANGLEY, R.** 2008. Recent advances and remaining challenges in the statistical energy analysis of dynamic systems. In *Proceedings of the 7th European Conference on Structural Dynamics*, Southampton, UK.
- [54] **LYON, R. H. AND R. G. DEJONG.** 1994. *Theory and Application of Statistical Energy Analysis, Second Edition*. 2nd ed. Boston: Butterworth-Heinemann.
- [55] **“NOUREDDINE ATALLA, FRANCK SGARD”** *Finite Element and Boundary Methods in Structural Acoustics and Vibration* 2015 by Taylor & Francis Group, LLC
- [56] **“MCGRAW-HILL”.** *An Introduction to the Finite Element Method*. New York, USA : Reddy, J.N. 1993
- [57] **ZIENKIEWICZ, O. C. AND R. L. TAYLOR.** 2000a. *The Finite Element Method*. 5th ed. Vol. 1. Woburn, MA, USA: Butterworth-Heinemann.
- [58] **ZIENKIEWICZ, O. C. AND R. L. TAYLOR.** 2000b. *The Finite Element Method*. 5th ed. Vol. 2. Woburn, MA, USA: Butterworth-Heinemann.
- [59] **Harris, S.** \Dynamic loads on the teeth of spur gears". *Proceedings of Institution of Mechanical Engineering*, 1958. 172 :87{112
- [60] **Welbourn, D.** \Fundamental knowledge of gear noise - a survey". Dans *Proceedings of IMechE Conference on Noise and Vibrations of Engines and Transmissions Conference*, pages 09{29, Cranfield (UK), 1979. Paper C117/79.
- [61] **Emeline REBOUL.** \Vibroacoustique des mécanismes à hautes fréquences : application aux transmissions par engrenages". Thèse de doctorat, Ecole centrale de LYON, 2005, p :230

[62] **G. Dalpiaz, A. Fernández del Rincon, E. Mucchi, A. Rivola,** "Model-based analysis of dynamic phenomena in gear pumps", *Surveillance* 5 CETIM Senlis, Oct 2004.

[63] **Emeline Sadoulet-Reboul** thèse "Vibroacoustique des mécanismes à hautes fréquences
Application aux transmissions par engrenage"

[64] **ANDRE CHEVALIER** "guide du dessinateur industriel "HACHETTE TECHNIQUE

Résumé

Ce travail nous a permis d'exposer les différents aspects des engrenages et de leurs défauts dans un contexte de maintenance et aussi donner un aperçu sur sa modélisation. Le cas étudié a montré l'efficacité de l'utilisation de la MEF pour identifier les différents types de défauts dans les engrenages et son avantage par rapport à les autres méthodes. Le modèle mathématique étudié dans le chapitre 3 peut être appliqué aux autres études sur des autres dispositifs qui font partie du même projet de recherche pour étudier l'influence du vibroacoustique sur le système en générale

Mots clés : Maintenance, MEF, vibroacoustique ,engrenages

ABSTRACT

This work allowed us to expose the different aspects of gears and their faults in a maintenance context and also give an overview on its modeling. The studied case demonstrated the effectiveness of using FEM to identify different types of gear faults and its advantage over other methods. The mathematical model studied in chapter 3 can be applied to other studies on other devices that are part of the same research project to study the influence of vibroacoustics on the system in general.

Keywords: Maintenance, FEM, vibroacoustics, gears

ملخص

سمح لنا هذا الجانب بكشف الجوانب المختلفة للتروس و أخطاءها سياق الصيانة و كذلك إعطاء نظرة عامة على نمذجة أثبتت الحالة لتحديد أنواع مختلفة من أعطال التروس و ميزته عن الطرق الأخرى .يمكن تحليل طريقة العناصر المحددة. المدروسة فعالية إستخدام تطبيق النموذج الرياضي المدروس في الفصل الثالث على دراسات أخرى على أجهزة أخرى و التي هي جزء من نفس المشروع البحثي لدراسة تأثير الصوتيات الإهتزازية على النظام بشكل عام.
الكلمات المفتاحية: الصيانة ،تحليل طريقة العناصر المحددة،المسننات،الصوتيات الإهتزازية.