

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique



Université Ibn Khaldoun de Tiaret  
Faculté des Sciences Appliquées  
Département de Génie Mécanique



## MÉMOIRE DE FIN D'ETUDES

Pour l'obtention du Diplôme de Master

**Domaine :** Sciences et Technologie

**Filière :** Génie Mécanique

**Parcours :** Master

**Spécialité :** Construction Mécanique

**Thème**

**Influence de la température environnementale  
sur les plaques minces en composite**

Préparé par :

BENSAHA Abdelhafid  
BERREDJEM Oussama

Soutenu publiquement le : .. /11 / 2020, devant le jury composé de :

Mr ABED Belkacem	Maître de Conférences "A" (Univ. Ibn Khaldoun)	Président
Mr.BENARIBA Aboubaker	Maître Assistant "B" (Univ. Ibn Khaldoun)	Examineur
Mr. HADJI Lazreg	Maître de Conférences "A" (Univ. Ibn Khaldoun)	Examineur
Mr. ELGUERRI Mohamed	Maître de Conférences "B" (Univ. Ibn Khaldoun)	Encadreur

Année universitaire : 2019 - 2020

## DEDICACE

J'ai l'immense plaisir de dédier ce travail à mon défunt mon grand père maternel que j'aurais tellement aimé qu'il soit là aujourd'hui que je puisse le témoigner lui aussi de vive voix ma gratitude . que dieu l'accueille dans son vaste paradis .

À mes chère grand mère que dieu vous protège .

À mes très chères parents que j'espère verront dans ce labeur le couronnement de leur efforts , sacrifices et leurs prières . quoi que je fasse je ne pourrai jamais le récompensez assez !

À mon père qui a toujours veille sur moi avec un grand amour , affection , avec ses précieuses conseils et sa générosité indiscutable que dieu le garde et le bénisse .

À la plus douce maman que j'ai j'oublierai jamais ses prières et ses belle paroles qui m'a réchauffée le cœur , que dieu te bénisse maman !

À toute la famille Bensaha

À toute la famille Boukanoun et Benbada

À monsieur El Guerri Mohamed je vous remercie d'avoir accepter de m'encadrer et de m'orienter

À mes chères futurs docteurs Benouïs et Benadda vous étiez l'ami et le professeur au même temps que dieu vous guide vers le mieu ,je vous souhaite une très bonne continuation vous méritez que du bien

À mon chère binôme qui était le frère et l'ami on a partagé tellement de bons moments ensemble que dieu te garde et te guide vers le bon et le mieu t'es un frangin

À mon chère collègue Bellasbet Sidahmed pour toutes les sacrifices qu'on a fournies ensemble , pour les bons et les pires moments qu'on a vus et partagés , ravi de te recontrer et re-voir mon chère .

À mon chère collègue Bekheira Ilyes , pour tout l'aide et le soutien que tu as fournis au long de notre parcours master

À mon chère collègue Taïbi Mohamed pour tout le soutien que tu as fournis j'oublie jamais ta main tendue pour nous voir revenir de loin . Une grande reconnaissance à toi et à ta famille et un grand remerciement t'étais plus qu'un collègue que dieu guérisse et bénisse ta chère maman .

## DEDICACE

J'ai l'immense plaisir de dédier ce travail à mon défunt mon grand père paternel que j'aurais tellement aimé qu'il soit là aujourd'hui que je puisse le témoigner lui aussi de vive voix ma gratitude. Que dieu l'accueille dans son vaste paradis.

À mes chères grands parents que dieu vous protège.

À mes très chères parents que j'espère verront dans ce labeur le couronnement de leur efforts, sacrifices et leurs prières. Quoi que je fasse je ne pourrai jamais le récompensez assez !

À mon père qui a toujours veille sur moi avec un grand amour, une grande affection et avec ses précieuses conseils et sa générosité indiscutable que dieu le garde et le bénisse.

À la plus douce maman, que j'oublierai jamais ses prières et ses belle paroles qui m'a réchauffées le cœur, que dieu te bénisse maman !

À ma unique et chère sœur je te souhaite tout le bonheur du monde .

À toute la famille Berredjem .

À toute la famille Taïbi et Chaker .

À monsieur El Guerri Mohamed je vous remercie d'avoir accepté de m'encadrer et de m'orienter, Que dieu vous garde et vous protège , vous étiez le pilier où tout le monde s'enfuit ...

À mes chères futurs docteurs Benouïs et Benadda vous étiez l'ami et le professeur au même temps que dieu vous guide vers le mieux, je vous souhaite une très bonne continuation vous méritez que du bien

À mon chère binôme qui était le frère et l'ami, on a partagé tellement de bons moments ensemble que dieu te garde et te guide vers le bon et le mieux t'es un frangin

À mon chère collègue Bellasbet Sidahmed pour toutes les sacrifices qu'on a fournies ensemble, pour les bons et les pires moments qu'on a vus et partagés, ravi de te recontrer et revoir mon chère.

À mon chère collègue Taïbi Mohamed pour tout le soutien que tu as fournis je n'oublierai jamais ta main tendue pour nous voir revenir de loin. Une grande reconnaissance à toi et à ta famille et un grand remerciement t'étais plus qu'un collègue que dieu guérisse et bénisse ta chère maman.

## REMERCIEMENT

Dieu Merci d'avoir nous aider et nous orienter toujours vers le bon et le mieux. Louange à Allah jusqu'à ce que la louange atteint sa fin

On tient à exprimer toutes nos reconnaissances à notre encadreur le docteur et le chercheur EL GUERRI Mohamed la pierre précieuse de département de la génie mécanique, que Dieu le bénisse on le remercie de nous avoir encadrés, orientés, aidés et conseillés.

On adresse nos sincères remerciements à tous les professeurs, intervenants et toutes les personnes qui par leurs paroles, leurs écrits, leurs conseils et leurs critiques ont guidé nos réflexions et ont accepté de nous rencontrer et de répondre à nos questions durant nos études et recherches.

En cette occasion on veut aussi adresser nos sincères reconnaissances à toute l'équipe pédagogique de l'université Ibn Khaldoun

Tout le respect et immense reconnaissance à notre docteur CHAÏB Khaled monsieur le chef de département, d'avoir nous orienter et nous conseiller avec le meilleur accueil et la bonne humeur.

Au passage une grande salutation à tous les membres du jury

Enfin, je remercie tous ces intervenants pour leur soutien inconditionnel et leurs encouragements ont été d'une grande aide vraiment.

On vous présente nos remerciements, nos respects et nos gratitude.

Merci Beaucoup .

# Sommaire

CHAPITRE I .....	4
I.1 Introduction .....	4
I.2 Définition .....	4
I.3 Classification des matériaux composites .....	4
I.4 Architecture des matériaux composites .....	6
I.4.1 Composites stratifiés.....	6
I.4.2 Stratifiés symétriques.....	7
I.4.3 Stratifiés hybride .....	7
I.4.4 La symétrie miroir .....	8
I.4.5 Les composites sandwiches .....	9
I.4.6 Composites à matrice métallique .....	10
I.5 La rupture des stratifiés.....	10
CHAPITRE II Les plaques stratifiées.....	4
II.1 Revue de la théorie de la stratification classique .....	12
II.1.1 Équation constitutive du pli (couche).....	12
II.1.2 Matrices de transformation des Contraintes - déformations .....	13
II.1.3 Équation constitutive du stratifié.....	14
II.1.4 Contrainte et déformation de la couche dans les coordonnées stratifiées.....	16
II.1.5 Résultantes de la force et du moment du stratifié .....	17
II.2 Déformations thermiques.....	19
II.3 Effet hygrothermique.....	20
II.3.1 Propriétés matérielles de composites sous conditions hygrothermiques .....	20
II.3.2 Propriétés matérielles du composite hybride.....	22
II.3.3 Propriétés matérielles du composite non hybride .....	25
II.3.4 Formulation de la théorie raffinée pour les plaques stratifiées .....	26
II.4 Déformations hygrothermiques.....	27
II.5 Méthode analytique de déformation du stratifié .....	29

II.5.1	Plaque A - Stratifié symétrique équilibré.....	30
II.5.2	Plaque B - Stratifié symétrique non équilibré.....	30
II.5.3	Plaque C & D - Stratifiés asymétriques .....	31
II.6	Changement d'épaisseur du stratifié sous charge thermique.....	32
II.7	Formulation Des Éléments Finis .....	32
II.8	Conclusion .....	35
CHAPITRE III	Partie Numérique.....	36
III.1	Introduction.....	36
III.2	1 <sup>er</sup> Cas : (4 couches) .....	39
III.2.1	Les résultats obtenus.....	41
III.3	Le 2 <sup>ème</sup> cas (5 couches).....	46
III.4	3 <sup>ème</sup> Cas (7 couches).....	52
III.5	Conclusion .....	57

## NOMENCLATURE

$\varepsilon_\theta$  : La déformation tangentielle.

$\varepsilon_y$  : La déformation latérale.

$\gamma_{y\theta}$  : La déformation de cisaillement.

u, v et w : Les déplacements dans la direction de la coque.

$\varepsilon_\theta^0, \varepsilon_y^0, \gamma_{\theta y}^0$  : Les déformations dans le plan médian.

$K_\theta, K_y, k_{\theta y}$  : Les courbures.

[T] : La matrice de transformations

[Q] : La matrice de rigidité.

[Q'] : La matrice de rigidité transformée autour de l'axe z puis autour de l'axe y.

$[\bar{Q}]^n$  : La matrice de rigidité transformée autour de l'axe y.

$[\alpha_{xy}]$  : Coefficient de dilatation thermique.

$N_x'', N_y'', N_{xy}''$  : comme les charges mécaniques résultantes appliquées par unité de largeur.

$M_x'', M_y'', M_{xy}''$  : comme les moments résultants appliqués par unité de largeur agissant sur l'élément différentiel de tube composite.

[H] : matrice de déformation

$\varepsilon$  : déformations.

$\sigma$  : contraintes.

$\sigma_0$  : contraintes initiales.

V : volume.

m : nombre d'éléments.

A = aire élémentaire.

$[Q_{ij}]^{(k)}$  : La matrice de propriétés généralement orthotrope de la k ème couche.

T : élévation de température, qui sera une fonction de (x, y, z)

RI : matrice de transformation des coordonnées du matériau

l,t : directions matérielles principales.

[K] : La matrice de rigidité des éléments.

{f} : vecteur de charge thermique cohérent .

E : La variation radiale du module de Young.

A : Le coefficient de dilatation thermique.

$E_m$  :Module d'élasticité de la matrice

$E_f$  : Module d'élasticité des fibres

$E_c$  : Module d'élasticité du composite

$V$  : Fraction volumique du composite

$V_m$  : Fraction volumique de la matrice

$V_f$  : Fraction volumique de la fibre

$K_L$  :Module de compressibilité latéral total du composite

$K_m$  :Module de compressibilité latéral de la matrice

$K_f$  :Module de compressibilité latéral de la fibre

$u, v, w$  :Déplacements suivant les directions x, y et z

$u_0, v_0$  : Composantes du champ de déplacement sur le plan moyen de la plaque

$f(z)$  :Fonction de gauchissement (fonction de cisaillement transverse)



## Listes Des Figures

Figure I.1 : Pli unidirectionnel.....	19
Figure I.2 : Composite Stratifié .....	19
Figure I.3 : Structure Sandwich Classification suivant le type renfort.....	19
Figure I.4 : Classification de composites selon le type du renfort.....	19
Figure I.5 : Classification de composites selon la nature des matrices .....	19
Figure I.6 : Constitution d'un stratifié .....	20
Figure I.7 : Désignation d'un stratifié.....	21
Figure I.8 : Exemple de désignation pour empilement symétrique.....	21
Figure I.9 : Désignation de stratifiés hybrides avec la même résine.....	22
Figure I.10 : Illustration de la symétrie miroir dans les stratifiés [2].....	23
Figure I.11 : Matériau sandwichs à âme pleine.....	23
Figure I.12 : Matériau sandwichs à âme creuse.....	23
Figure I.13 : Composite à matrice métallique.....	24
Figure I.14 : Différents modes de rupture dans un stratifié.....	25
Figure I.15 : Principaux modes d'endommagement.....	25
Figure II.1 Systèmes de coordonnées de la couche et du stratifié.....	27
Figure II.2 Section stratifiée sous déformation.....	30
Figure II.3 Stratifié composite à n couches.....	32
Figure II.4. Comparaison du champ de contraintes transversales entre une structure à une couche et une structure à trois couches [29].....	34
Figure II.5 Système de coordonnées des plaques composites.....	36
Figure II.6 Déformation d'un pli sujet à une augmentation de température.....	43
Figure II.7. Construction stratifiée d'un élément de coque.....	49
Figure III.1. La variation de module de Young longitudinale en fonction de la température.....	54
Figure III.2.La variation de module de Young transversal en fonction de la température .....	54
Figure III.3.La variation de module de cisaillement longitudinal en fonction de la température .....	55

Figure III.4.La variation de module de cisaillement transversal en fonction de la température  
.....55

## INTRODUCTION GENERALE

L'importance économique des matériaux composites est maintenant notoire, et les prévisions portent à penser que cette importance va aller croître de plus en plus. En effet, les matériaux composites sont souhaitables dans les structures légères en raison de leur rigidité et de leur résistance spécifique élevées, et en raison de leur stabilité dimensionnelle sous des charges mécaniques, thermomécaniques et même hygrothermiques. En outre, les propriétés globales d'une structure stratifiée dépendent de la conception de celle-ci. C'est-à-dire, elles dépendent de l'épaisseur, de l'orientation et du matériau de chaque pli ainsi que de la séquence d'empilement de ces plis. Ce profil est bien avantageux, car il donne la possibilité à l'ingénieur de concevoir des structures aux propriétés précises par rapport aux besoins. Cependant, ce caractère complexe n'est pas du tout évident, compte tenu des nombreux choix auxquels on est confronté et une analyse approfondie du comportement mécanique est d'une grande importance. Le mode de stratification possède aussi un intérêt particulier surtout par rapport à la conception ainsi qu'à la méthode de fabrication.

La micromécanique est un complément naturel à la macro mécanique lorsqu'elle est considérée dans un cadre de conception plutôt que d'analyse. Mais, l'efficacité du design réel est mise en évidence lorsque la prédiction micromécanique des propriétés d'un pli est conforme aux propriétés mesurées. Cependant, les théories relatives à la micromécanique doivent être validées par un travail expérimental attentif.

Les ouvrages de génie civil sont soumis à des effets thermiques à long terme induits par le rayonnement solaire et la température de l'air ambiant. Les composants structurels peuvent recevoir l'énergie thermique du rayonnement direct, du rayonnement diffus et du rayonnement réfléchi causés par les changements de température saisonniers et quotidiens. Les charges thermiques variant dans le temps dans la structure peuvent induire des déformations structurelles et des contraintes thermiques qui, en raison de leur indétermination, peuvent provoquer l'endommagement des composants ou même l'effondrement de l'ensemble de la structure. Par conséquent, la charge thermique et les effets thermiques ont attiré une grande attention à travers le monde au cours des dernières décennies. Les effets thermiques sur les structures de génie civil ont été étudiés pour simuler la distribution de température et prédire les réponses structurelles en utilisant un modèle de rayonnement solaire et une analyse de transfert de chaleur à l'aide de la méthode des éléments finis (FEM).

La thermoélasticité représente une extension de la théorie classique de l'élasticité dans laquelle la déformation et les contraintes sont générées non seulement par l'application de forces mécaniques, mais également par la variation de température. L'introduction du champ de température dans l'analyse du corps déformable continu complique considérablement l'ensemble des équations régissant différentielles. La complication est due à la nature même du phénomène. En particulier, les aspects mécaniques et thermiques sont couplés, et indissociables. Lorsqu'un continuum est soumis à une déformation, cela entraînera un changement de sa température. Cependant, d'un point de vue pratique, il est généralement possible d'écarter le couplage et d'évaluer séparément les champs de température et de déformation.

Plusieurs rapports ont en fait prouvé que la plupart des matériaux composites peuvent être dégradés par des attaques environnementales telles que les rayons thermiques, les rayonnements ultraviolets, l'oxydation thermique et la diffusion d'humidité. Il est essentiel de prendre en compte les effets environnementaux sur les matériaux composites dans les premières étapes du processus de conception, un échec qui entraînerait beaucoup de gaspillage d'argent, d'énergie et de temps. Souvent, le niveau de sensibilité des matériaux composites à des facteurs environnementaux spécifiques varie.

Lorsque les structures sont soumises à un changement de température, des contraintes thermiques peuvent se produire. Puisqu'il s'agit d'un état d'auto-équilibre, la répartition des contraintes sur une section transversale de la structure entraîne des contraintes de compression et de traction. Les contraintes de compression peuvent augmenter à un point tel qu'un flambage se produit. Les structures à parois minces peuvent devenir instables à une température relativement basse et se déformer dans la région élastique.

Cependant, les composites sont généralement soumis à des conditions environnementales changeantes pendant la fabrication initiale et l'utilisation finale, et il est important de pouvoir inclure les effets de ces changements dans l'analyse. Parmi les nombreuses conditions environnementales qui peuvent influencer le comportement mécanique des composites, les changements de température et de teneur en humidité sont retenus ici pour discussion en raison des effets particulièrement importants qu'ils ont sur les matériaux de matrice polymère et des propriétés des composites polymères qui sont dominés par la matrice. Les effets de la température sont généralement appelés effets « thermiques », tandis que ceux de l'humidité sont souvent appelés effets « hygroscopiques ». Le mot « hygrothermique » a évolué pour décrire les

effets combinés de la température et de l'humidité. Les changements de l'environnement hygrothermique ont deux effets principaux sur le comportement mécanique des composites polymères:

Les propriétés dominées par la matrice telles que la rigidité et la résistance sous une charge transversale, hors axe ou de cisaillement sont modifiées. L'augmentation de la température provoque un ramollissement progressif du matériau de matrice polymère jusqu'à un certain point. Les dilatations ou contractions hygrothermiques modifient les distributions de contraintes et de déformations dans le composite. Une température et / ou une teneur en humidité accrues provoquent un gonflement de la matrice polymère, tandis qu'une température et / ou une teneur en humidité réduites provoquent une contraction.

Le présent mémoire étudie l'analyse de stabilité thermique de plaques en matériau composite soumises à une charges thermiques, à savoir; élévation de température uniforme et élévation de température linéaire à travers l'épaisseur, en utilisant une formulation par élément finis. L'influence de divers facteurs tels que l'indice de gradient, les charges de température, l'épaisseur et les rapports d'aspect sont soigneusement étudiés.

**CHAPITRE I**  
**MATERIAUX COMPOSITE**

### **I.1 Introduction**

Dans le présent chapitre, un aperçu général sur les matériaux composites est donné tout en faisant l'accent sur les composites stratifiés. Cette vue d'ensemble a permis de situer ce genre de matériaux, largement utilisé, par rapport aux autres structures. L'étude a aussi permis de revoir les définitions et les désignations relatives ainsi que quelques architectures les plus courantes. Le chapitre présente l'intérêt de l'utilisation des stratifiés dans les différents domaines de l'industrie moderne. Un aperçu sur les problèmes rencontrés dans les structures à base de composites stratifiés a été présenté.

### **I.2 Définition**

**Matériau composite :** Un matériau composite est constitué de l'assemblage de deux matériaux de natures différentes, se complétant et permettant d'aboutir à un matériau dont l'ensemble des performances est supérieur à celui des composants pris séparément. [1]

**Renfort :** C'est l'armature qui assure la résistance à la traction et la rigidité (matériau résistant). Ils sont, le plus souvent, présentés par des fibres courtes ou longues pour les matériaux composites fibreux.

**Matrice :** Dans laquelle sont noyées les fibres. C'est l'emballage qui sert à lier le renfort, et conserve sa disposition et assure une protection chimique. Sa résistance mécanique est plus faible. Remarque : La liaison fibres-matrice est créée pendant la phase d'élaboration du matériau composite. Elle a une influence fondamentale sur les propriétés mécanique de ce dernier.

### **I.3 Classification des matériaux composites**

Les différentes variétés de matériaux composites, sont résumées par : Le pli composite unidirectionnel : C'est pratiquement le demi-produit renfort plus matrice, présenté sous forme quasi-bidimensionnel (figure I.1). Les matériaux stratifiés : On appelle ainsi ce qui résulte de la superposition de plusieurs couches ou plis de nappes unidirectionnelles de tissus ou de mats, avec des orientations propres à chaque pli : c'est l'opération de drapage (figure I.2).

Les matériaux sandwichs : Une structure sandwich résulte de l'assemblage par collage ou soudure de deux revêtements ou peaux minces sur une âme ou cœur plus léger qui maintient leur écartement (figure I.3) [1]. Autres architectures :

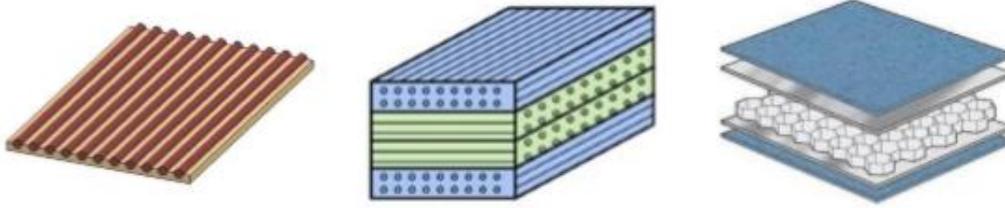


Figure I.1 : Pli unidirectionnel    Figure I.2 : Composite Stratifié    Figure I.3 : Structure Sandwich  
 Classification suivant le type renfort :

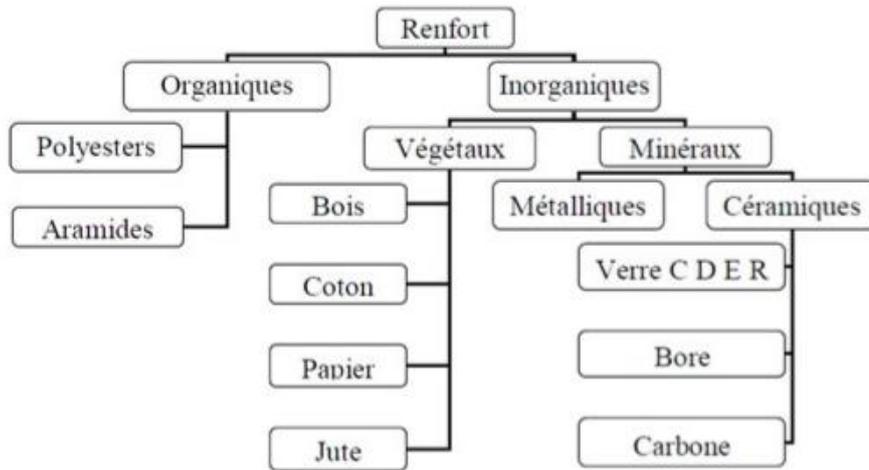


Figure I.4 : Classification de composites selon le type du renfort [1].

Nature des principales fibres : elles sont en :

- Verre - Aramide (ou « Kevlar »), plus légère
- Carbone (module d'élasticité élevé)
- Bore
- Carbure de silicium (tenue en température)

Classification suivant la nature de la matrice :

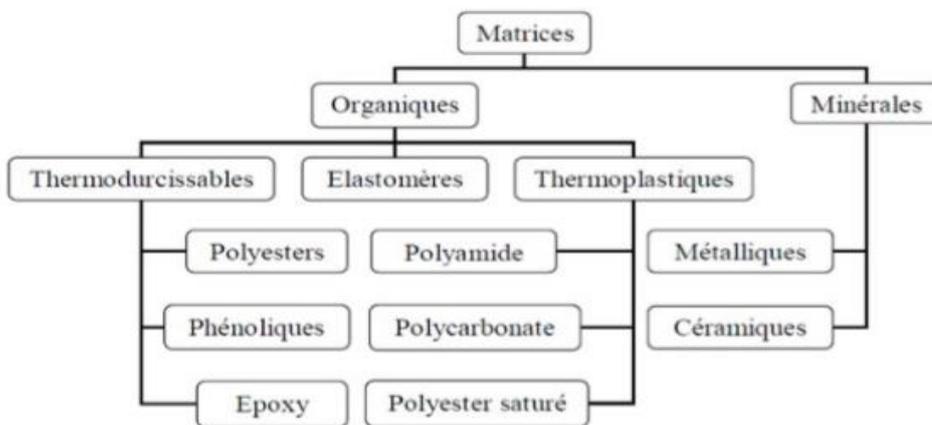


Figure I.5 : Classification de composites selon la nature des matrices [1].

Les matrices résineuses se présentent en générale en deux types : Matrices thermodurcissables : mises en forme et se polymérisent selon la forme souhaitée. La transformation est irréversible. Matrice thermoplastique : mises en forme par chauffage, durcissent au cours du refroidissement. La transformation est réversible.

#### I.4 Architecture des matériaux composites

Pratiquement, selon l'ensemble des procédés de mise en œuvre, il existe une prépondérance d'une conception des pièces en matériaux composites, à savoir : Par surface : plaque, coques ; Par stratification de couches successives.

Une importance est donc donnée aux matériaux composites sous la forme de plaques ou de coques constituées de différentes couches (plis) différentes ou non.

##### I.4.1 Composites stratifiés

Les stratifiés sont constitués de couches successives (appelées le plus souvent plis) de renfort (fils, stratifils, mats, tissus, etc.) imprégnés de résines.

On s'intéresse dans ce qui suit uniquement au stratifiés à base de plis ou de tissus unidirectionnels. C'est en fait, la structure de base à la quelle peut se ramener en théorie tout autre type de stratifié. Ces stratifiés sont constitués de couches de fils ou de tissus unidirectionnels, dont la direction est déclarées dans chaque couche (Figure I.6).

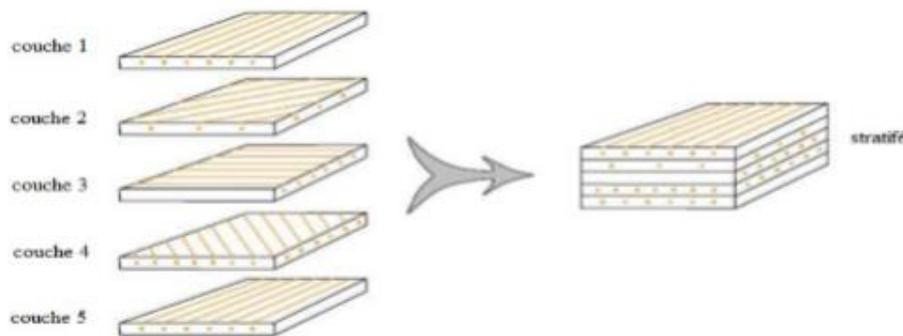


Figure I.6 : Constitution d'un stratifié [1].

Les règles de désignation d'un stratifié sont les suivantes : - Chaque pli est désigné par la valeur de son angle d'orientation (angle d'orientation des fibres en degrés par rapport à l'axe x de référence). Le sens de l'orientation est pris en compte : - Des plis adjacents sont séparés par une barre oblique (/) si leurs angles ont de différentes valeurs absolues - Un indice est utilisé afin d'indiquer le nombre de plis adjacents possédant la même orientation. - Si deux plis successifs ont des orientations de mêmes valeurs et de sens opposés, elles peuvent être

désignées par le signe  $\pm$  ; - La séquence d'empilement commence à partir du premier pli supérieur et se termine au dernier pli. Un exemple de désignation d'un stratifié est donné à la figure I-7.

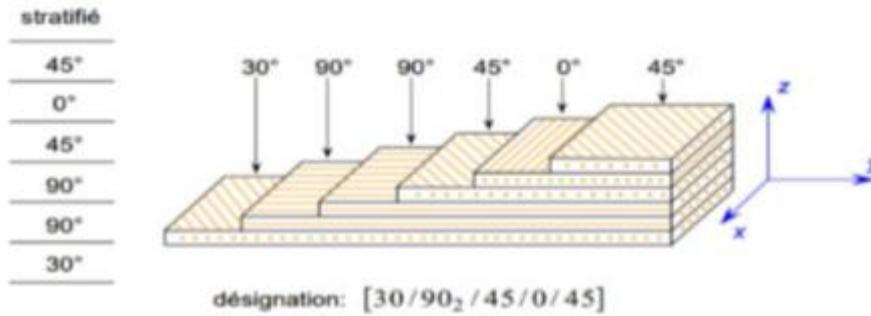


Figure I.7 : Désignation d'un stratifié.

### I.4.2 Stratifiés symétriques

Un stratifié est symétrique si son plan moyen est plan de symétrie. Sa désignation ne nécessite que la moitié des plis successifs.

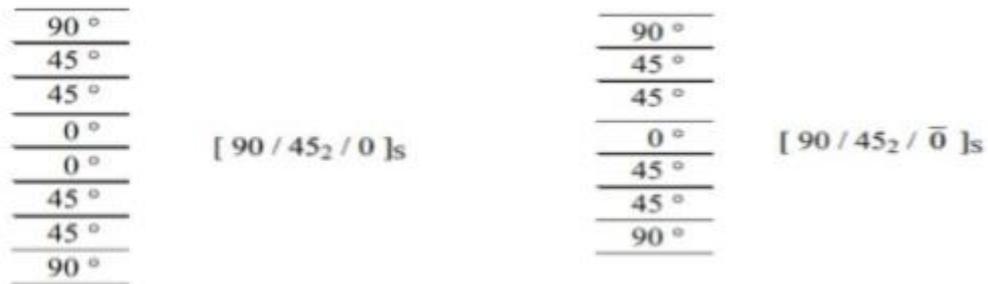


Figure I.8 : Exemple de désignation pour empilement symétrique.

### I.4.3 Stratifiés hybride

Un stratifié hybride est constitué de couches successives comportant des fibres de natures différentes. Il sera alors nécessaire de les mentionner dans la désignation. Ces stratifiés permettent des performances voulues en utilisant aux mieux les propriétés des diverses fibres

disponibles.

0° V
45° C
-45° C
90° C
90° C
-45° C
45° C
0° V

[ 0<sub>V</sub> / ±45<sub>C</sub> / 90<sub>C</sub> ]<sub>S</sub>

0° K
0° K
45° V
90° V
45° V
0° C
0° C

[ 0<sub>2C</sub> / (45 / 90)<sub>SV</sub> / 0<sub>2K</sub> ]

Figure I.9 : Désignation de stratifiés hybrides avec la même résine.

Avec V : verre, C : carbone, K : Kevlar

#### I.4.4 La symétrie miroir

On dit qu'une pièce stratifiée est dotée d'une symétrie miroir lorsque les empilements de plis de part et d'autre du plan moyen sont identiques.

Pourquoi la symétrie miroir ?

Lors de la constitution de la pièce stratifiée, les plis successifs imprégnés de résine sont drapés à température ambiante, puis placés dans une étuve pour la polymérisation. Dans le composite ainsi créé à chaud, la dilatation d'ensemble de la pièce, d'origine thermique, s'effectue sans qu'il y ait variation globale de sa forme par voilement ou gauchissement. Par contre, lors du refroidissement, les plis ont tendance à se contracter différemment suivant le sens des fibres ou suivant le sens travers. De là, l'apparition de contraintes d'origine thermique.

Lorsque la symétrie miroir est réalisée, elle entraîne la symétrie de ces contraintes, et empêche ainsi l'apparition des déformations d'ensemble de la pièce tel que voilement gauchissement (Figure I.10).

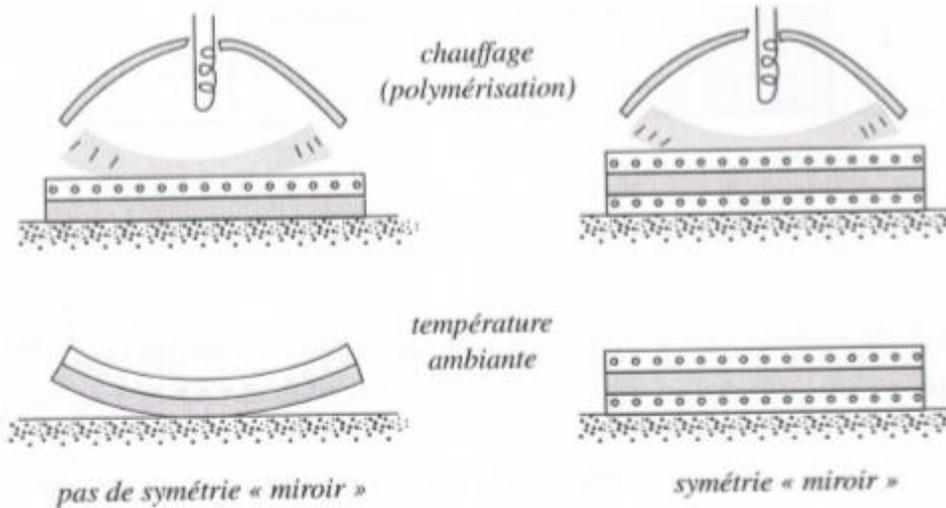


Figure I.10 : Illustration de la symétrie miroir dans les stratifiés [2].

### I.4.5 Les composites sandwichs

Le principe de la technique sandwich consiste à appliquer sur une âme (constituée d'un matériau ou d'une structure légère possédant de bonnes propriétés en compression) deux feuilles ou peaux (possédant de bonnes caractéristiques en traction). Le choix des matériaux est fait avec pour objectif initial d'avoir une masse minimale en tenant compte ensuite des conditions d'utilisation (conditions thermiques, corrosion, prix, etc.)

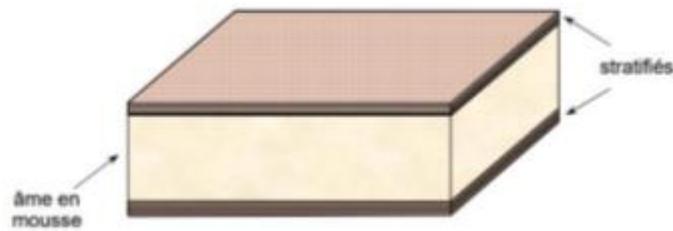


Figure I.11 : Matériau sandwichs à âme pleine

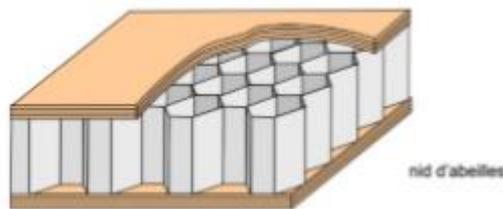


Figure I.12 : Matériau sandwichs à âme creuse.

### I.4.6 Composites à matrice métallique

Leur architecture correspond généralement à celle des stratifiés. On peut citer un certain nombre de produits constitués comme suit :

Matrices : aluminium, magnésium, titane. Fibres : aramide, carbone, bore, carbure de silicium.

Avantage essentiel : une meilleure tolérance aux dommages du fait : D'une bonne résistance à la fissuration pour les couches minces métalliques ; De l'absence de propagation d'une couche à l'autre.

Exemple : ARALL (aluminium renforcé d'aramide) ou GLARE (aluminium renforcé de verre), Figure I.11.



Figure I.13 : Composite à matrice métallique.

### I.5 La rupture des stratifiés

La figure I.14 résume schématiquement les différents types de rupture conduisant à l'endommagement d'un stratifié.

Les principaux modes d'endommagement sont illustrés ci – dessous, sur les figures I.15, lorsque les sollicitations dépassent des seuils critiques [2].

Vis-à-vis de ce phénomène de rupture complexe, on ne peut se contenter des critères classiques basés sur la contrainte maximale.

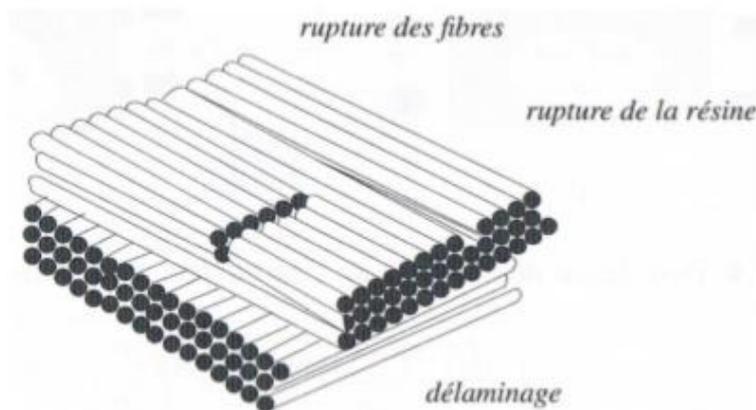


Figure I.14 : Différents modes de rupture dans un stratifié.

En traction



En compression



En cisaillement ; dé laminage



Figure I.15 : Principaux modes d'endommagement.

Dans ce chapitre, une vue d'ensemble sur les matériaux composites est exposée. L'accent est fait particulièrement sur les stratifiés où il a été question d'étudier leur désignation, les formes d'empilement particulières ainsi que la notion de symétrie. Les différents modes d'endommagement conduisant à la rupture des matériaux stratifiés ont été analysés et mis en évidence.

**CHAPITRE II**  
**LES PLAQUES STRATIFIEES**

## II.1 Revue de la théorie de la stratification classique

### II.1.1 Équation constitutive du pli (couche)

L'analyse composite a deux systèmes de coordonnées – x-y-z représente le système de coordonnées global, et les coordonnées 1-2-3 illustrent le système de coordonnées local. La direction de la fibre, la direction transversale de la fibre et la direction perpendiculaire au pli dans le plan sont indiquées par les 1, 2 et 3 dans les coordonnées locales (Fig. 2.1).

Pour une couche, la relation contrainte / déformation est donnée par

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{13} \\ \tau_{23} \\ \tau_{12} \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

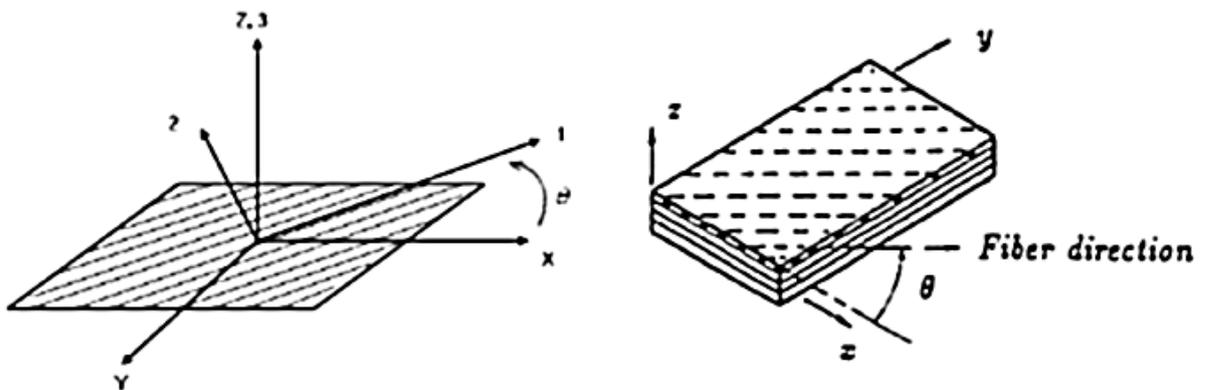


Figure 2.1 Systèmes de coordonnées de la couche et du stratifié.

Comme la couche est mince dans les composites, la condition de contrainte plane est donnée comme :

$$\sigma_3 = 0 \quad \tau_{23} = 0 \quad \tau_{13} = 0 \quad (2.2)$$

Par conséquent, la relation entre contrainte et déformation pour une couche peut être simplifiée comme :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix}_{1-2} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ S_{12} & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

Et

$$\varepsilon_3 = S_{13}\sigma_1 + S_{23}\sigma_2 \neq 0 \quad (2.4)$$

Les éléments de la matrice de compliance [S] sont les fonctions de constante élastique de la couche composite et sont donnés comme :

$$\begin{aligned} S_{11} &= \frac{1}{E_1} \\ S_{22} &= \frac{1}{E_2} \\ S_{33} &= \frac{1}{E_3} \\ S_{12} &= -\frac{\nu_{12}}{E_1} \\ S_{13} &= -\frac{\nu_{13}}{E_1} \\ S_{23} &= -\frac{\nu_{23}}{E_2} \\ S_{66} &= \frac{1}{G_{12}} \end{aligned} \quad (2.5)$$

La matrice de compliance réduite pour une couche mince peut être inversée pour former la matrice de rigidité réduite de l'équation 2.3 :

$$[\sigma]_{1-2} = \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

Les éléments de la matrice de rigidité [Q] sont exprimés comme :

Dans l'équation 2.7, E1 et E2 représentent le module de Young de la couche, G12 représente le module de cisaillement et  $\nu_{12}$  représente le rapport de Poisson de la couche.

### II.1.2 Matrices de transformation des Contraintes - déformations

En général, le système de coordonnées global x-y de la couche ne coïncide pas avec le système de coordonnées local 1-2. Par conséquent, les matrices de transformation sont utilisées pour transformer la matrice de rigidité et les déformations ou contraintes du système de coordonnées local au système global pour un pli d'angle.

$$\begin{aligned}
Q_{11} &= \frac{E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}} \\
Q_{22} &= \frac{E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}} \\
Q_{12} &= \frac{\nu_{21}E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}} = \frac{\nu_{12}E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}} \\
Q_{66} &= G_{12}
\end{aligned} \tag{2.7}$$

La matrice de rigidité pour un pli angulaire par rapport au système global peut être obtenue en faisant tourner la matrice de rigidité de  $0^\circ$  pli comme suit

$$[\bar{Q}]_{x-y} = [T_\sigma - (-\theta)][Q]_{1-2}[T(\theta)] \tag{2.8}$$

Où  $[T_\sigma]$  et  $[T_\varepsilon]$  sont les matrices de transformation pour la contrainte et la déformation, données par

$$[T_\sigma] = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & 2mn \\ n^2 & m^2 & -2mn \\ -mn & mn & m^2 - n^2 \end{bmatrix} \tag{2.7}$$

$$[T_\varepsilon] = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & 2mn \\ n^2 & m^2 & -mn \\ -2mn & 2mn & m^2 - n^2 \end{bmatrix}$$

Où  $m = \cos\theta$  et  $n = \sin\theta$

### II.1.3 Équation constitutive du stratifié

La «théorie de la stratification», également appelée «théorie de la plaque stratifiée classique» ou «théorie de la stratification classique», abrégée par CLPT (“Classical Laminated Plate Theory”) ou CLT (“Classical Lamination Theory”), est la procédure de base pour obtenir les matrices de rigidité des stratifiés, des déformations du plan médian et courbures pour le stratifié, contraintes et déformations dans le plan pour chaque couche.

Les hypothèses de base de la théorie de la stratification classique sont

1. Le stratifié est obtenu en collant plusieurs couches d'orientations de fibres différentes
2. La couche individuelle du stratifié a son propre système de coordonnées principal
3. Un système de coordonnées de référence est introduit commun à toutes les couches qui est placé au milieu du plan du stratifié.

4. Le stratifié est mince et large, c'est-à-dire que la condition de contrainte du plan est appliquée
5. Un lien parfait existe entre les différentes couches
6. Le plan en coupe du stratifié reste plan après déformation
7. Chaque couche et tout le stratifié se comportent de façon linéaire élastique

La couche est supposée se plier sans glisser sur l'autre, et la section transversale de la couche reste non enveloppée. Par conséquent, le déplacement du plan médian est supposé être

$$\begin{aligned} u_0 &= u_0(x, y) \\ v_0 &= v_0(x, y) \\ w_0 &= w_0(x, y) \end{aligned} \quad (2.10)$$

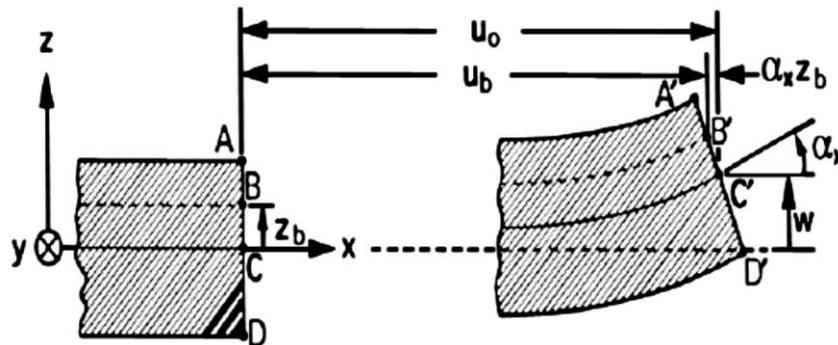


Figure 2.2 Section stratifiée sous déformation.

Le déplacement en tout point du stratifié est donné par (Fig. 2.2)

$$\begin{aligned} u &= u_0 - z \frac{\partial w}{\partial x} \\ v &= v_0 - z \frac{\partial w}{\partial x} \\ w &= w_0 \end{aligned} \quad (2.11)$$

Où  $u_0$ ,  $v_0$  et  $w_0$  se réfèrent aux déplacements dans les directions  $x$ ,  $y$  et  $z$  mais sont uniquement fonction de  $x$  et  $y$ . Ces déplacements sont dans le plan de référence ou médian.

D'après l'équation 2.11, la relation déformation-déplacement en tout point peut être donnée comme :

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\
\varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v_0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\
\gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial x} - 2z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y}
\end{aligned} \tag{2.12}$$

Pour simplifier, nous réécrivons l'équation 2.12 sous la forme matricielle

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} K_x \\ K_y \\ K_{xy} \end{bmatrix}$$

Où,

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x^0 &= \frac{\partial u_0}{\partial x} \\
\varepsilon_y^0 &= \frac{\partial v_0}{\partial x} \\
\gamma_{xy}^0 &= \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \\
K_x &= -z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\
K_y &= -z \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\
K_{xy} &= -2z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y}
\end{aligned} \tag{2.13}$$

Où 2.13 représente les déformations et les courbures du plan médian.

#### II.1.4 Contrainte et déformation de la couche dans les coordonnées stratifiées

Les déformations dans la  $k$ ème couche sont données par

$$\begin{aligned}
[\varepsilon_{x-y}]_k &= [\varepsilon^0] + Z_k [K] \\
\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} + Z_k \begin{bmatrix} K_x \\ K_y \\ K_{xy} \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{2.14}$$

Les contraintes des  $k$ èmes couches dans le stratifié sont données par  $[\sigma - y]_{kth} =$

$$\begin{aligned} [\sigma_{x-y}]_{k^{th}} &= [\bar{Q}_{x-y}]_{k^{th}} [\varepsilon_{x-y}]_{k^{th}} \\ [\sigma_{x-y}]_{k^{th}} &= [\bar{Q}_{x-y}]_{k^{th}} \left( [\varepsilon^0_{x-y}] + Z_{k^{th}} [K_{x-y}] \right) \end{aligned} \quad (2.15)$$

### II.1.5 Résultantes de la force et du moment du stratifié

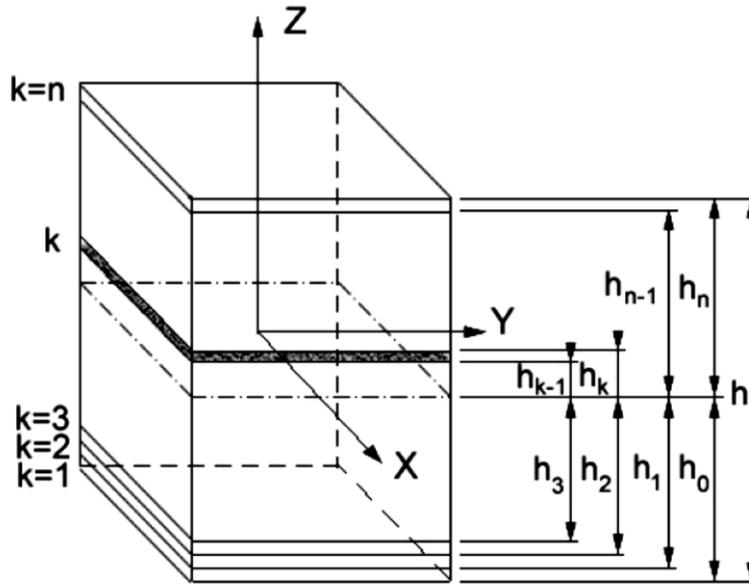


Figure 2.3 Stratifié composite à n couches

La relation générale pour la Force / Moments et la Contrainte du stratifié est donnée par

$$\begin{bmatrix} \bar{N} \\ \bar{M} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon^0 \\ \kappa \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

Où  $[\varepsilon^0]$  et  $[\kappa]$  représentent respectivement les courbures de déformation et de plan médian, données par l'équation 2.13

où  $[\bar{N}]$  et  $[\bar{M}]$  sont les matrices de Force et Moment, sont données par

$$\begin{bmatrix} \bar{N} \\ \bar{M} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N \\ M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N^T \\ M^T \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

Où  $[N]$  et  $[M]$  représentent respectivement la charge appliquée et le moment appliqué dus aux forces mécaniques. Ils sont donnés par l'équation

$$\begin{aligned}
[N] &= \sum_{k=1}^n \int_{4-1}^4 [\sigma]_k \cdot dz \\
[M] &= \sum_{k=1}^n \int_{4-1}^4 [\sigma]_k \cdot z \cdot dz
\end{aligned} \tag{2.18}$$

La force et le moment induits par les charges thermiques sont donnés par  $[N^T]$  et  $[M^T]$  comme

$$\begin{aligned}
[N^T] &= \left\{ \sum_{k=1}^n [\bar{Q}]_k \cdot [a_{x-y}]_k \cdot (h_k - h_{k-1}) \right\} \cdot \Delta T \\
[M^T] &= \frac{1}{2} \left\{ \sum_{k=1}^n [\bar{Q}]_k \cdot [a_{x-y}]_k \cdot (h_k^2 - h_{k-1}^2) \right\} \cdot \Delta T
\end{aligned} \tag{2.19}$$

Dans l'équation 2.19,  $[a_{x-y}]$  représente le coefficient de dilatation thermique (CDT), du  $k$ ème pli transformant des couches locales au système de coordonnées global.  $\Delta T$  est la différence entre la température appliquée et la température ambiante.  $h^k$  représente la distance jusqu'au sommet du  $k$ ème pli, comme illustré à la figure 2.4.

Les matrices  $[A]$ ,  $[B]$  et  $[D]$  données dans l'équation 2.16 représentent respectivement la matrice de rigidité extensionnelle dans le plan, la matrice de rigidité de couplage extension-flexion et la matrice de rigidité flexion. Celles-ci sont évaluées par unité de largeur du stratifié et sont données par

$$\begin{aligned}
[A] &= \sum_{k=1}^n [\bar{Q}]_k \cdot (h_k - h_{k-1}) \\
[B] &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n [\bar{Q}]_k \cdot (h_k^2 - h_{k-1}^2) \\
[D] &= \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n [\bar{Q}]_k \cdot (h_k^3 - h_{k-1}^3)
\end{aligned} \tag{2.20}$$

Où  $[\bar{Q}]$  est obtenu à partir de la matrice transformée de rigidité réduite de l'équation 2.8.

De l'équation 2.16,

$$\begin{bmatrix} \varepsilon^o \\ K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ b^T & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N \\ M \end{bmatrix} \tag{2.21}$$

Où

$$\begin{bmatrix} a & b \\ b^T & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix}^{-1} \tag{2.22}$$

L'équation 2.21 donne la déformation et la courbure au milieu du plan du stratifié.

Les propriétés mécaniques transversales discontinues provoquent des déplacements de champs  $u$  dans le sens de l'épaisseur qui peuvent présenter un changement rapide de leurs

pentés en correspondance avec chaque interface de couche (voir figure 2.4). C'est ce qu'on appelle la forme Zig-Zag, ZZ, des champs de déplacement dans le sens de l'épaisseur.

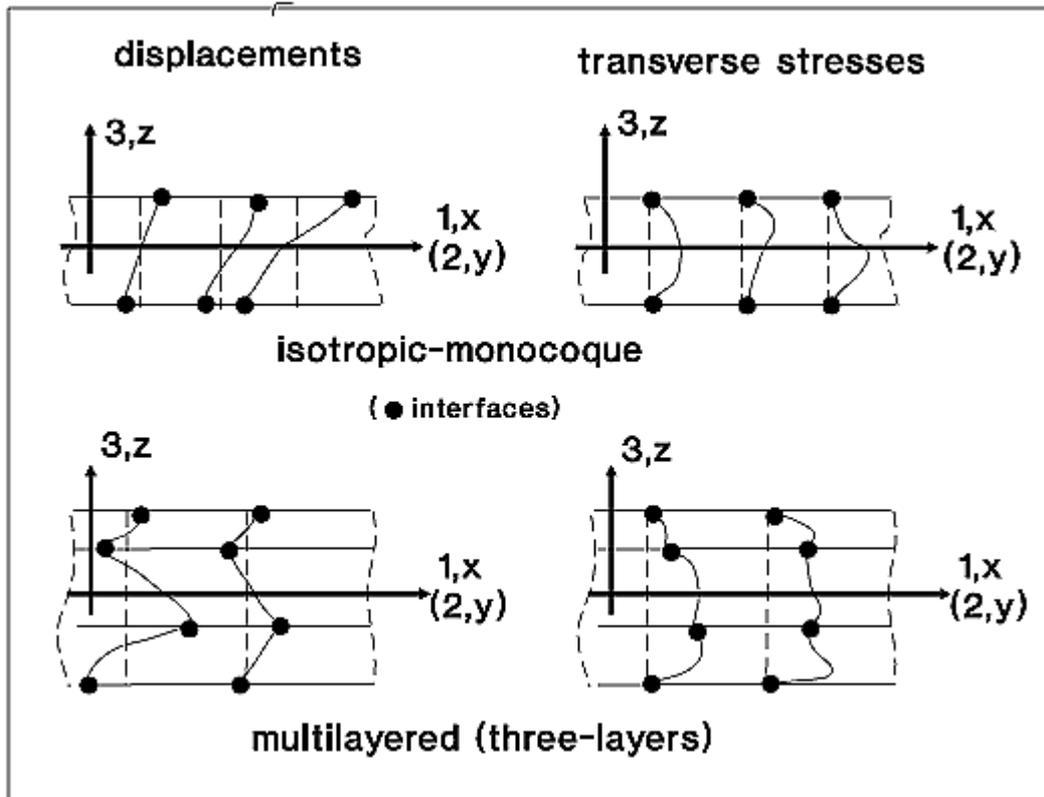


Figure 2.4. Comparaison du champ de contraintes transversales entre une structure à une couche et une structure à trois couches [29].

## II.2 Déformations thermiques

Les composites ont tendance à changer leurs caractéristiques lorsqu'ils sont exposés à la température. Ces changements dans leurs caractéristiques sont dus à leur coefficient de dilatation thermique (CDT). De manière générale, les caractéristiques du changement de réponse structurelle dû à la température sont identiques au changement d'humidité. Par conséquent, en changeant les termes de température en humidité, ou en ajoutant les mêmes termes de température avec des coefficients d'humidité, le stratifié composite peut être analysé pour les environnements hygrothermiques.

La déformation thermique du stratifié est donnée par

$$\varepsilon_i^T = \alpha_i \Delta T \quad (2.23)$$

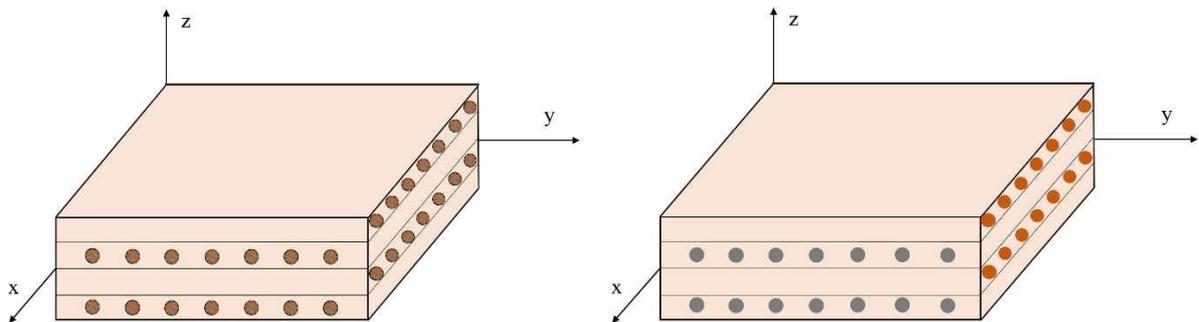
Où  $\alpha_i$  représente le CDT et  $i = 1, 2$  et  $3$  représente les composantes normales de la déformation thermique et  $\Delta T$  représente la différence de température.

### II.3 Effet hygrothermique

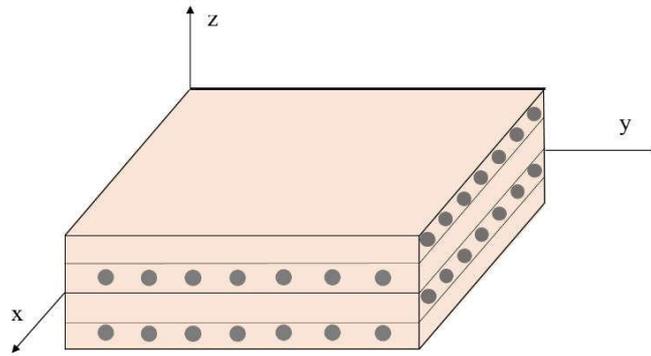
Les propriétés matérielles de la plaque composite sont considérées comme dépendantes de la température et de l'humidité. Les conditions hygrothermiques généralement dégradent les propriétés élastiques et la rigidité des structures qui influe sur le comportement en vibration. En effet, nous allons étudier l'effet hygrothermique où la plaque est soumise à différentes valeurs de température et l'humidité.

#### II.3.1 Propriétés matérielles de composites sous conditions hygrothermiques

On considère une plaque composite stratifiée antisymétrique hybride à couches croisées  $(0/90)_n$ , dans laquelle la plaque peut être hybride intrafils où les couches peuvent comprendre deux types de fibres : Carbone/Verre, Carbone/Kevlar et Kevlar/Verre, hybride intercouche dont les couches peuvent comprendre un type de fibres ou non hybride. Les propriétés mécaniques de ces matériaux dépendent des propriétés des fibres, de la matrice, de la fraction volumique ainsi que des conditions hygrothermiques. Le système de coordonnées des plaques est illustré sur la figure 2.5.



(a)



(c)

**Figure 2.5** Système de coordonnées des plaques composites : (a) hybride intrafils, (b) hybride intercouche et (c) non hybride

### II.3.2 Propriétés matérielles du composite hybride

On suppose que les propriétés mécaniques de la fibre sont insensibles à la température et l'humidité tandis que celles de la matrice sont dépendantes. Selon l'approche analytique [71], le module de Young de la matrice époxy est donné comme suit :

$$E_m = (3.51 - 0.003T - 0.142C) \text{ GPa} \quad (2.24)$$

Où :

$$T = T_0 + \Delta T \quad T_0 \equiv 25^{\circ} \text{ (température ambiante)}$$

$$C = C_0 + \Delta C \quad C_0 = 0\%$$

en poids de H<sub>2</sub>O

Le module longitudinal total du composite  $E_1$  est donné par l'équation suivante en utilisant la loi des mélanges et l'équation (2.24) :

$$E_1 = E_f^{(1)}V_f^{(1)} + E_f^{(2)}V_f^{(2)} + E_m V_m \quad (2.25)$$

$$V_f^{(1)} + V_f^{(2)} + V_m = 1 \quad (2.26)$$

$$V_f = V_f^{(1)} + V_f^{(2)} \quad (2.27)$$

$$w_f^{(1)} = \frac{V_f^{(1)}}{V_f} \quad w_f^{(2)} = \frac{V_f^{(2)}}{V_f} \quad (2.28)$$

D'où : 
$$E_1 = V_f \left[ E_f^{(1)}w_f^{(2)} + E_f^{(2)}(1-w_f^{(1)}) \right] + E_m (1-V_f) \quad (2.29)$$

$$\nu_{12} = V_f \left[ \nu_f^{(1)}w_f^{(2)} + \nu_f^{(2)}(1-w_f^{(1)}) \right] + \nu_m (1-V_f) \quad (2.30)$$

$$G_f^{(1)} = \frac{E_f^{(1)}}{2(1+\nu_f^{(1)})} \quad G_f^{(2)} = \frac{E_f^{(2)}}{2(1+\nu_f^{(2)})} \quad G_m = \frac{E_m}{2(1+\nu_m)} \quad (2.31)$$

$$G_f = G_f^{(1)}w_f + G_f^{(2)}(1-w_f) \quad (2.32)$$

$$K_f = k_f + \frac{G_f}{3}, K_m = k_m + \frac{G_m}{3} \quad (2.33)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} G_{12} = G_{13} = G_m \frac{G_f(1+V_f) + G_m(1-V_f)}{G_f(1-V_f) + G_m(1+V_f)} \\ G_{23} = G_m \left( 1 + \frac{V_f}{G_f(1-V_f) + G_m(1+V_f)} \right) \end{array} \right. \quad (2.34)$$

$$K_L = K_m + \frac{V_f}{\frac{1}{k_f - k_m + \frac{1}{3}(G_f - G_m)} + \frac{1-V_f}{k_m + \frac{4}{3}G_m}} \quad (2.35)$$

$$E_2 = \frac{2}{\frac{1}{2K_L} + \frac{1}{2G_{23}} \frac{2(v_{12})^2}{E_1}} \quad (2.36)$$

$$k_f = \frac{E_f^{(1)} w_f}{3(1-2\nu_f^{(1)})} + \frac{E_f^{(2)} w_f}{3(1-2\nu_f^{(2)})}, k_m = \frac{E_m}{3(1-2\nu_m)} \quad (2.37)$$

**II.3.3 Propriétés matérielles du composite non hybride**

Les propriétés mécaniques de la matrice sont aussi dépendantes de la température et de l'humidité (équation 4.1), le module de Young du composite non hybride est donné comme suit :

$$E_1 = E_f V_f + E_m (1 - V_f) \tag{2.38}$$

$$V_f + V_m = 1 \tag{2.39}$$

D'où :

$$v_{12} = V_f v_f + v_m (1 - V_f) \tag{2.40}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} G_{12} = G_{13} = G_m \frac{G_f (1 + V_f) + G_m (1 - V_f)}{G_f (1 - V_f) + G_m (1 + V_f)} \\ G_{23} = G_m \left( 1 + \frac{V_f}{\frac{G_m}{G_f - G_m} + (1 - V_f) + \frac{k_m + \frac{7}{3} G_m}{2k_m + \frac{8}{3} G_m}} \right) \end{array} \right. \tag{2.41}$$

$$K_L = K_m + \frac{V_f}{\frac{1}{k_f - k_m + \frac{1}{3}(G_f - G_m)} + \frac{1 - V_f}{k_m + \frac{4}{3} G_m}} \tag{2.42}$$

$$E_2 = \frac{2}{\frac{1}{2K_L} + \frac{1}{2G_{23}} \frac{2(v_{12})^2}{E_1}}$$

(2.43)

### II.3.4 Formulation de la théorie raffinée pour les plaques stratifiées

le champ de déplacement de la plaque est donné par :

$$\begin{cases} u(x, y, z, t) = u_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_b}{\partial x} - f(z) \frac{\partial w_s}{\partial x} \\ v(x, y, z, t) = v_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_b}{\partial x} - f(z) \frac{\partial w_s}{\partial x} \\ w(x, y, z, t) = w_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_b}{\partial x} - f(z) \frac{\partial w_s}{\partial x} \end{cases} \quad (2.44)$$

Avec :

$$f(z) = \left( z - ze^{\frac{-2z^2}{h^2}} \right) \quad (2.45)$$

les fréquences propres sont obtenues en mettant le déterminant de l'équation (4.23) égal à zéro :

$$\left( \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} m_{11} & 0 & m_{13} & m_{14} \\ 0 & m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ m_{13} & m_{23} & m_{33} & m_{34} \\ m_{14} & m_{24} & m_{34} & m_{44} \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} U_{mn} \\ V_{mn} \\ W_{bmn} \\ W_{smn} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.46)$$

#### II.4 Déformations hygrothermiques

Les matériaux composites sont largement utilisés dans tous les domaines et sous différentes conditions. Ils sont soumis la plupart du temps à des variations de température et d'humidité ou les deux à la fois (hygrothermique). Les conditions hygrothermiques généralement dégradent les propriétés élastiques et la rigidité des structures, l'augmentation de la température et la dilatation thermique sous certaines conditions aux limites peuvent provoquer un flambement thermique car la structure ne peut se dilater librement. Les plaques en matériaux composites peuvent également être soumises à des charges hydro thermomécaniques, une combinaison de chargement mécanique et hygrothermique. L'humidité et la température peuvent aussi avoir un effet significatif sur le comportement en vibration libre des structures composites stratifiées. L'étude du chargement hygrothermique permet une meilleure compréhension et une meilleure caractérisation du comportement des plaques composites stratifiées lorsqu'elles sont soumises à des charges combinées. Ces dernières années, plusieurs chercheurs ont réalisé des travaux sur les effets hygrothermiques et hydro thermomécanique sur le comportement de plaques composites. Les premiers travaux sur le comportement au flambement thermique des plaques ont été réalisés par Gossard et al. [64] et Heldenfels et Roberts [65]. Ils ont étudié le comportement d'une plaque simplement appuyée soumise à une distribution de température. Whitney et al. [66] ont étudié l'effet de chargements thermiques et mécaniques ou une combinaison des deux sur le comportement en flexion et en vibration de plaques composites stratifiées en utilisant la méthode des éléments finis. Sai Ram et Sinha [67] ont étudié les effets hygrothermiques sur les propriétés de flexion des plaques composites stratifiées en utilisant la théorie de déformation du premier ordre qui tient compte du cisaillement transverse et en utilisant la méthode des éléments finis.

Si les matériaux composites fibreux sont traités à des températures élevées, des contraintes thermiques sont introduites lors du refroidissement à température ambiante, entraînant des contraintes résiduelles et des changements dimensionnels. La figure 2.5 illustre les changements dimensionnels d'un composite soumis à une augmentation de température de  $\Delta T$  à partir de la température de référence  $T$ . En outre, les matrices polymères sont généralement hygroscopiques et l'absorption d'humidité conduit à un gonflement du matériau. L'analyse des déformations dues à la dilatation de l'humidité dans les composites est mathématiquement équivalente à celle des déformations thermiques.

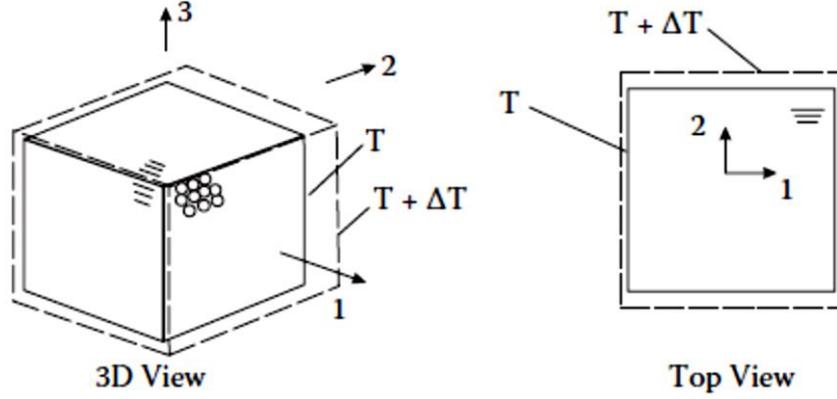


Figure 2.6 Déformation d'un pli sujet à une augmentation de température.

La relation constitutive, lorsqu'elle comprend des déformations mécaniques, thermiques et induites par l'humidité, prend la forme suivante (Hyer 2009):

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ S_{12} & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_1^T \\ \varepsilon_2^T \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_1^M \\ \varepsilon_2^M \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.47)$$

où les exposants T et M désignent respectivement les souches induites par la température et l'humidité. Notez que les déformations de cisaillement ne sont pas induites dans le système de matériaux principal par un changement de température ou de teneur en humidité (Figure 2.6). L'équation (2.47) est basée sur la superposition de déformations mécaniques, thermiques et induites par l'humidité. L'inversion de l'équation (2.47) donne

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & -\varepsilon_1^T & -\varepsilon_1^M \\ \varepsilon_2 & -\varepsilon_2^T & -\varepsilon_2^M \\ \gamma_{12} & & \end{bmatrix} \quad (2.48)$$

Par conséquent, les déformations génératrices de contraintes sont obtenues par soustraction des déformations thermiques et induites par l'humidité des déformations totales. Les déformations thermiques et induites par l'humidité sont souvent approximées comme des fonctions linéaires des changements de température et de concentration d'humidité,

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1^T \\ \varepsilon_2^T \end{bmatrix} = \Delta T \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1^M \\ \varepsilon_2^M \end{bmatrix} = \Delta M \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} \quad (2.49 - 2.50)$$

où  $\Delta T$  et  $\Delta M$  sont respectivement le changement de température et le changement de concentration d'humidité à partir de l'état de référence.

Les coefficients de dilatation thermique transformés  $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_{xy}$ , sont obtenus à partir de ceux du système principal en utilisant l'équation (2.42). Notez, cependant, que dans le système de coordonnées du matériau principal, il n'y a pas de déformation de cisaillement induite, c'est-à-dire  $\alpha_{16} = \beta_{16} = 0$

$$\alpha_x = m^2 \alpha_1 + n^2 \alpha_2$$

$$\alpha_y = n^2 \alpha_1 + m^2 \alpha_2$$

$$\alpha_{xy} = 2mn(\alpha_1 - \alpha_2)$$

(2.51 a, b, c)

Les coefficients de dilatation d'humidité  $\beta_x, \beta_y, \beta_{xy}$  sont obtenus en remplaçant  $\alpha$  par  $\beta$  dans les équations (2.51).

Les relations constitutives transformées pour une lame, lors de l'incorporation de déformations thermiques et induites par l'humidité, sont

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{s_{11}} & \overline{s_{12}} & \overline{s_{16}} \\ \overline{s_{12}} & \overline{s_{22}} & \overline{s_{26}} \\ \overline{s_{16}} & \overline{s_{26}} & \overline{s_{66}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_x^T \\ \varepsilon_y^T \\ \gamma_{xy}^T \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_x^M \\ \varepsilon_y^M \\ \gamma_{xy}^M \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{\sigma_{11}} & \overline{\sigma_{12}} & \overline{\sigma_{16}} \\ \overline{\sigma_{12}} & \overline{\sigma_{22}} & \overline{\sigma_{26}} \\ \overline{\sigma_{16}} & \overline{\sigma_{26}} & \overline{\sigma_{66}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x & -\varepsilon_x^T & -\varepsilon_x^M \\ \varepsilon_y & -\varepsilon_y^T & -\varepsilon_y^M \\ \gamma_{xy} & -\gamma_{xy}^T & -\gamma_{xy}^M \end{bmatrix} \quad (2.52 - 2.53)$$

### II.5 Méthode analytique de déformation du stratifié

Comme discuté précédemment, nous obtenons les matrices [A], [B] et [D] de la théorie de la stratification classique.

La relation entre la charge et la déformation du stratifié peut être écrite en termes de déformation et de courbure du plan médian comme

$$\begin{bmatrix} \bar{N} \\ \bar{M} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon^o \\ K \end{bmatrix} \quad (2.54)$$

$[\bar{N}] = [N] + [N]^T$ , où  $[\bar{N}]$  représente la force totale appliquée,  $[N]$  est la force mécanique et  $[N]^T$  est la force thermique appliquée.

De même,  $[\bar{M}] = [M] + [M]^T$ , où  $[\bar{M}]$  représente le moment total de flexion appliqués par unité de largeur,  $[M]$  est dû à la charge mécanique et  $[M]^T$  est dû à la charge thermique.

De l'équation (2.53)

$$\begin{bmatrix} \varepsilon^o \\ K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ b^T & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{N} \\ \bar{M} \end{bmatrix} \quad (2.55)$$

Comme aucune charge mécanique n'est appliquée et que seule une charge thermique est appliquée

$$[N]^M = [M]^M = 0 \quad (2.56)$$

Par conséquent, l'équation (2.25) devient

$$\begin{bmatrix} \varepsilon^o \\ K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ b^T & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N^T \\ M^T \end{bmatrix} \quad (2.57)$$

### II.5.1 Plaque A - Stratifié symétrique équilibré

Pour un stratifié symétrique équilibré uniquement sous la charge thermique,

$$[B] = 0 \quad [M]^T = 0 \quad [N_x]^T \neq 0 \quad [N_y]^T \neq 0 \quad [N_{xy}]^T \neq 0 \quad (2.58)$$

En remplaçant ces conditions dans (2.56), nous obtenons que les déformations du plan médian soient,

$$\begin{aligned} \varepsilon_x^o &= a_{11}N_x^T + a_{12}N_y^T = \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \varepsilon_y^o &= a_{12}N_x^T + a_{22}N_y^T = \frac{\partial v_0}{\partial y} \end{aligned} \quad (2.59)$$

$$\gamma_{xy}^o = 0$$

En intégrant les équations (2.57), (2.58) et (2.59) et en résolvant en utilisant les conditions aux limites, on obtient

$$U_0 = (a_{11}N_x^T + a_{12}N_y^T)x \quad (2.60)$$

$$V_0 = (a_{12}N_x^T + a_{22}N_y^T)y \quad (2.61)$$

Les équations (2.60) et (2.61) donnent les déformations X et Y pour un stratifié symétrique équilibré sous la charge thermique.

### II.5.2 Plaque B - Stratifié symétrique non équilibré

Pour un stratifié symétrique non équilibré uniquement sous la charge thermique,

$$[B] = 0 \quad [M]^T = 0 \quad [N_x]^T \neq 0 \quad [N_y]^T \neq 0 \quad [N_{xy}]^T \neq 0$$

En remplaçant ces conditions dans (2.56), nous obtenons que les déformations du plan médian soient,

$$\varepsilon^o_x = a_{11}N_x^T + a_{12}N_y^T + a_{16}N_{xy}^T \quad (2.62)$$

$$\varepsilon^o_y = a_{12}N_x^T + a_{22}N_y^T + a_{26}N_{xy}^T \quad (2.63)$$

$$\gamma^o_{xy} = a_{16}N_x^T + a_{26}N_y^T + a_{66}N_{xy}^T \quad (2.64)$$

En intégrant les équations (2.62), (2.63) et (2.64) et en résolvant en utilisant les conditions aux limites, nous obtenons

$$U_0 = \varepsilon^o_x x + 0.5\gamma^o_{xy} y \quad (2.65)$$

$$V_0 = \varepsilon^o_y y + 0.5\gamma^o_{xy} x \quad (2.66)$$

Les équations (2.65) et (2.66) donnent la déformation X et Y pour un stratifié symétrique non équilibré sous la charge thermique.

### II.5.3 Plaque C & D - Stratifiés asymétriques

Pour un stratifié non symétrique uniquement sous la charge thermique,

$$[M]^T \neq 0 \quad [N_x]^T \neq 0 \quad [N_y]^T \neq 0 \quad [N_{xy}]^T \neq 0$$

Par conséquent (2.27) devient

$$\begin{bmatrix} \varepsilon^o \\ K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a * N^T + b * M^T \\ b^T * N^T + d * M^T \end{bmatrix} \quad (2.67)$$

En intégrant les équations dans (2.57) et en résolvant en utilisant les conditions aux limites, on obtient

$$U_0 = \varepsilon^o_x x + 0.5\gamma^o_{xy} y \quad (2.68)$$

$$V_0 = \varepsilon^o_y y + 0.5\gamma^o_{xy} x \quad (2.69)$$

$$W_o = -(0.5_{K_x} x^2 + 0.5_{K_y} y^2 + 0.5_{K_{xy}} xy) \quad (2.70)$$

Les équations (2.68), (2.69) et (2.70) donnent les déformations X, Y et Z pour un stratifié non symétrique sous la charge thermique.

### II.6 Changement d'épaisseur du stratifié sous charge thermique

Pour une kième couche donnée du stratifié, la déformation dans le sens de l'épaisseur peut s'écrire

$$\varepsilon_{3,k} = S_{13,k} \sigma_{1,k} + S_{23,k} \sigma_{2,k} + \alpha_{3,k} \Delta T \quad (2.71)$$

Où  $S_{13}$ , et  $S_{23}$ , sont donnés dans l'équation (2.9).  $\sigma_1$ , and  $\sigma_2$ , peuvent être obtenus à partir de l'analyse dans le plan du stratifié sous  $N^T$  et / ou  $M^T$ .

Le changement d'épaisseur de la kième couche est

$$\Delta t_k = \varepsilon_{3,k} t_k \quad (2.72)$$

$t_k$  est l'épaisseur de la kième couche. La variation totale d'épaisseur  $\Delta t_{total}$  peut être

$$\Delta t_{totale} = \sum_{k=1}^n \Delta t_k \quad (2.73)$$

Et la déformation moyenne dans la direction de l'épaisseur peut être écrite comme

$$\varepsilon_3 = \frac{\Delta t_{totale}}{\sum_{k=1}^n t_k} \quad (2.74)$$

### II.7 Formulation Des Éléments Finis

Les déformations membranaires et la courbure de l'élément de coque dans le système cartésien local sont obtenues comme

$$\{\varepsilon\} = [H] \{q_0\} \quad (2.75)$$

$$\begin{aligned} \text{Où } \{\varepsilon\}^T &= \{\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \gamma_{xy}, K_{xx}, K_{yy}, K_{xy}\} \\ &= \{\varepsilon, K\} \end{aligned}$$

Et  $[H]$  = matrice de déformation

Pour la formulation de l'équation gouvernante, on utilise le principe de l'énergie potentielle minimale, qui s'exprime comme suit pour un cas général:

$$\pi = \sum^m \int \left[ \frac{1}{2} \varepsilon \sigma - \varepsilon \sigma_0 \right] dV \quad (2.76)$$

Où  $\varepsilon$  = déformations.  $\sigma$  = contraintes.  $\sigma_0$  = contraintes initiales,  $V$  = volume et  $m$  = nombre d'éléments. L'équation (2.77) peut être spécialisée pour un élément de coque stratifié comme suit:

$$\pi = \sum^m \int_A \left[ \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} \varepsilon \\ K \end{Bmatrix}^T \begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \varepsilon \\ K \end{Bmatrix}^T \begin{Bmatrix} N^T \\ M^T \end{Bmatrix} \right] dA \quad (2.77)$$

Où

$$\begin{bmatrix} N \\ M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N''_x \\ N''_y \\ N''_{xy} \\ M''_x \\ M''_y \\ M''_{xy} \end{bmatrix} = \text{contraintes et moments résultants}$$

$$\begin{bmatrix} N^T \\ M^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N^T_X \\ N^T_Y \\ N^T_{XY} \\ M^T_X \\ M^T_Y \\ M^T_{XY} \end{bmatrix} = \text{contraintes thermiques et moments résultants}$$

Et A = aire élémentaire.

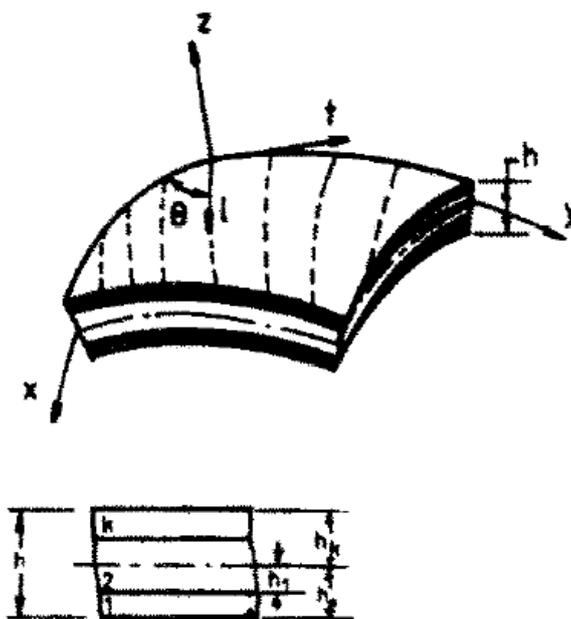


Figure II.7. Construction stratifiée d'un élément de coque.

La relation constitutive du stratifié est exprimée comme (Fig.II.7)

$$\begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{ij} & B_{ij} \\ B_{ij} & D_{ij} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon \\ K \end{Bmatrix} \quad (2.78)$$

Où

$$(A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}) = \sum_{k=1}^n \int_{h_{\alpha-1}}^{h_{\alpha}} [\bar{Q}_{ij}]^{(k)} (1, z, z^2) dz$$

dans laquelle  $[\bar{Q}_{ij}]^{(k)}$  est la matrice de propriétés généralement orthotrope de la kème couche.

$$\begin{pmatrix} N_{ij}^T \\ M_{ij}^T \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^n \int_{h_{\alpha-1}}^{h_{\alpha}} [\bar{Q}_{ij}]^{(k)} \times \{x\} T(1, z) dz \quad (2.79)$$

où T = élévation de température, qui sera une fonction de (x, y, z)

$$\{x\} = \begin{Bmatrix} x_{xx} \\ x_{yy} \\ x_{xy} \end{Bmatrix} = [R] \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

RI = matrice de transformation des coordonnées du matériau

l, t = directions matérielles principales.

En substituant les équations et en effectuant les variations par rapport aux degrés de liberté nodaux (qa) et égalant à zéro, on a

$$\sum^m \int \left[ [H]^T \begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix} [H] \{q_0\} - [H]^T \begin{Bmatrix} N^T \\ M^T \end{Bmatrix} \right] dA = 0 \quad (2.80)$$

L'équation (13) se réduit à

$$[k] \{q_0\} = \{f\} \quad (2.81)$$

Où

[k] = matrice de rigidité des éléments

{f} = vecteur de charge thermique cohérent

En utilisant la formulation ci-dessus, qui peut gérer les variations de température à la fois sur la surface et à travers l'épaisseur. De plus, il peut prendre en charge les variations des propriétés du matériau en fonction de la température.

$\Delta T$ (°C)	$\Delta$ (%)	$E_{11}$ (MPa)	$E_{22}$ (MPa)	$\nu_{12}$	$G_{12}$ (MPa)	$G_{23}$ (MPa)
0	0	154061	7454	0.312	3029	2659
25	25	153994	7218	0.312	2933	2574
50	50	153928	6981	0.312	2837	2489
75	75	153862	6744	0.312	2741	2405
100	100	153795	6508	0.312	2645	2320

-Tableau de variation de propriétés du composite ( fibre de carbone ) sous conditions hygrothermique

### II.8 Conclusion

Ce chapitre a été consacré à une revue assez large des matériaux composites, leurs différents constituants, leurs caractéristiques mécaniques, leurs procédés de fabrication, leurs domaines d'application et leurs avantages et inconvénients. Les composites offrent des solutions technologiques innovantes qui permettent d'améliorer la qualité des matériaux (légèreté, rigidité...etc.). Toutefois, le prix, la non-homogénéité de ces matériaux sont souvent un frein à leur utilisation dans différents secteurs industriels. Un rappel et une comparaison des théories des plaques a été donnée allant de la théorie classique, à la théorie du premier ordre et d'ordre élevé pour décrire la déformation des plaques. En général, il est rare de trouver une théorie qui soit applicable à tous les cas possibles (matériau composite anisotrope, isotrope, stratification, sandwich, plaque mince ou épaisse) et aux différents domaines (statique, dynamique et flambage), et qui soit simple et facile et ne coûte pas chère en temps de calcul. En effet, chacune d'elles présente des avantages et des inconvénients, avec des formalismes différents selon le domaine d'application. Les études examinées sur l'hybridation permettent de conclure que cette technique est propre à un certain nombre de composites, dépend du type de fibres, de leur fraction volumique, de la position des couches pour le cas des composites hybrides intercouches et des conditions aux limites. Une étude bibliographique sur l'effet hygrothermique a été réalisée pour voir l'influence de la température et de l'humidité sur le comportement des structures. En effet, la température et l'humidité ont un effet important sur les propriétés de ces matériaux.

**CHAPITRE III    PARTIE NUMERIQUE ET  
DISCUSSION**

### III.1 Introduction

Les matériaux composites sont soumis la plupart du temps à des variations de température et l'humidité ou les deux en même temps (chargement hygrothermique) dans certaines applications telles que l'aérospatiale, l'automobile, la construction navale et les structures en bâtiment.

Les conditions hygrothermiques généralement dégradent les propriétés élastiques et la rigidité des structures. En effet, nous étudions dans ce chapitre le comportement vibratoire de plaques composites soumises à une charge hygrothermique.

L'étude de l'effet hygrothermique nous permet une meilleure compréhension et une meilleure caractérisation du comportement réel des plaques composites stratifiées lorsqu'elles sont soumises à des charges combinées.

Dans cette partie on a effectué une étude sur la variation les fréquences de la fibre (fibre de carbone) en fonction de la température à l'aide de l'Ansys (APDL). En appliquant les conditions aux limites.

On a pris 3 cas différents le 1<sup>er</sup> avec une plaque carrée symétrique (4 couches) avec  $a = b = 1$  m et  $e = 0.01$  m, le 2<sup>ème</sup> cas une plaque carrée antisymétrique (5 couches) et le 3<sup>ème</sup> une plaque carrée antisymétrique de 7 couches.

Avec  $a = 1$  m,  $b = 1$  et l'épaisseur de chaque couche = 0.0025 m pour les trois cas.

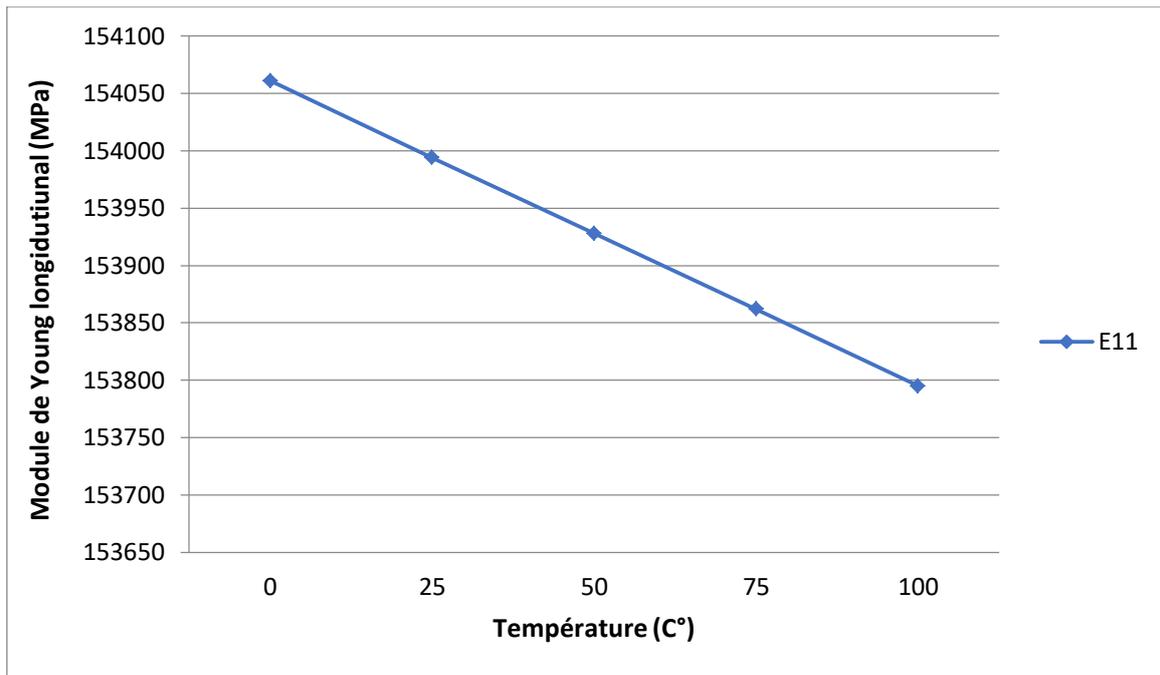


Figure 3.1. La variation de module de Young longitudinale en fonction de la température

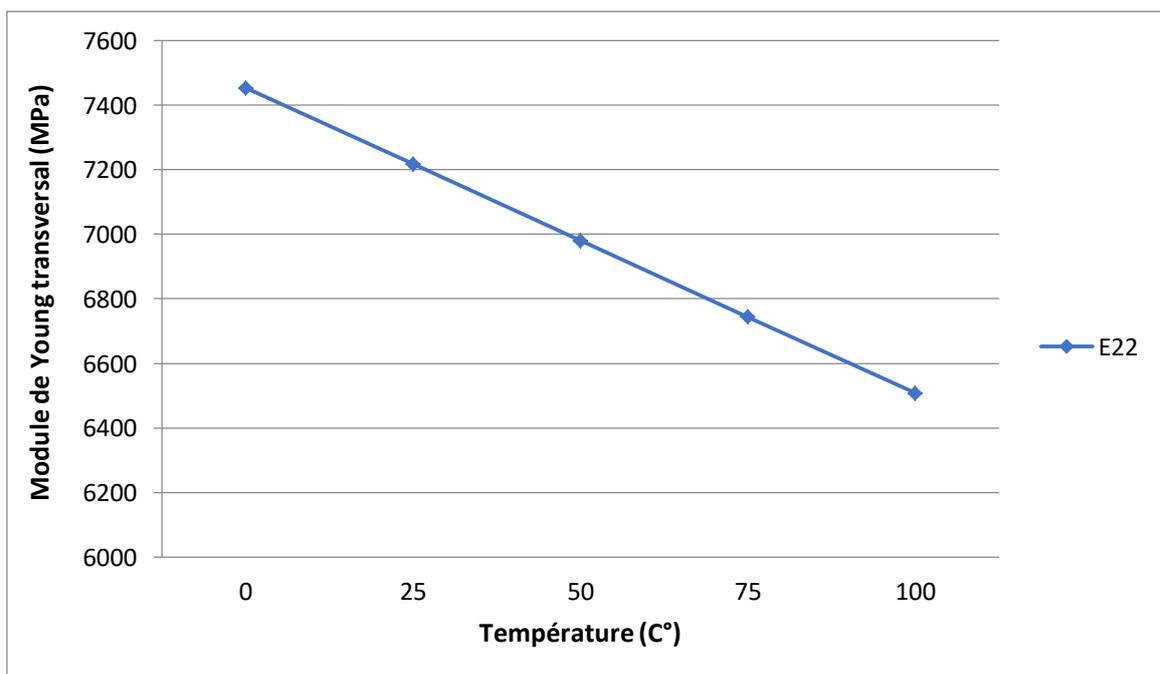


Figure III.2. La variation de module de Young transversal en fonction de la température

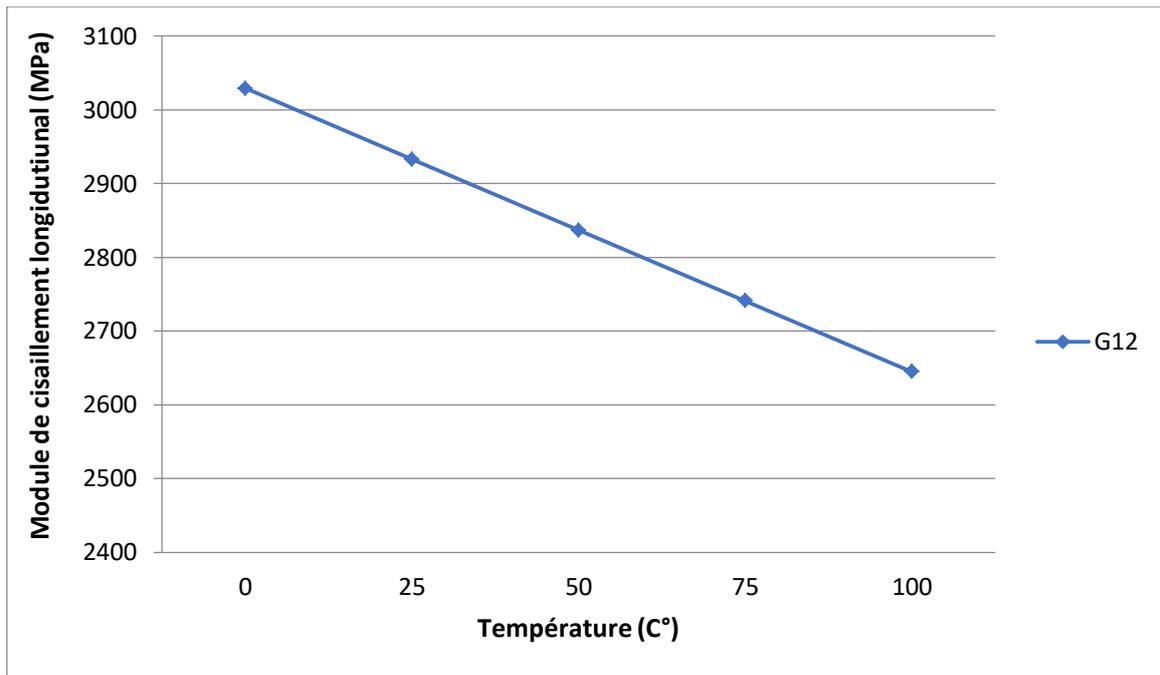


Figure III.3.La variation de module de cisaillement longitudinal en fonction de la température

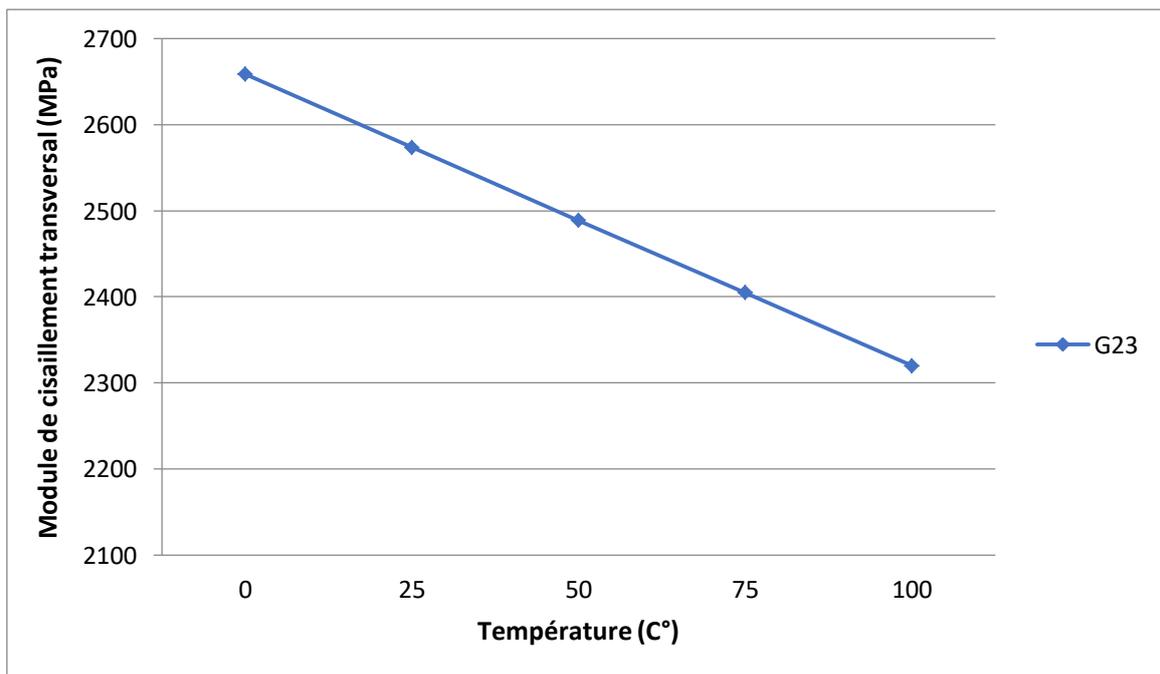


Figure III.4.La variation de module de cisaillement transversal en fonction de la température

III.2 1<sup>er</sup> Cas : (4 couches)

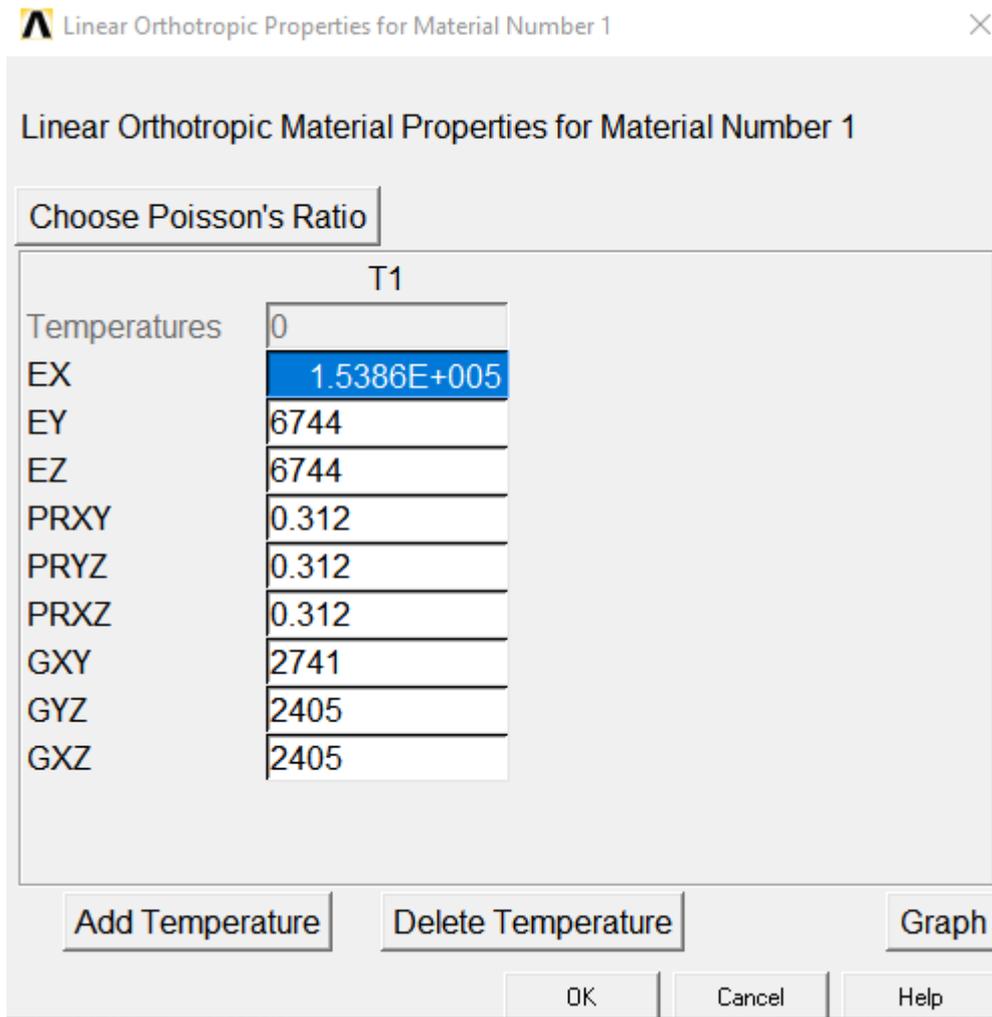


Figure III.5. Les propriétés de matériaux à introduire

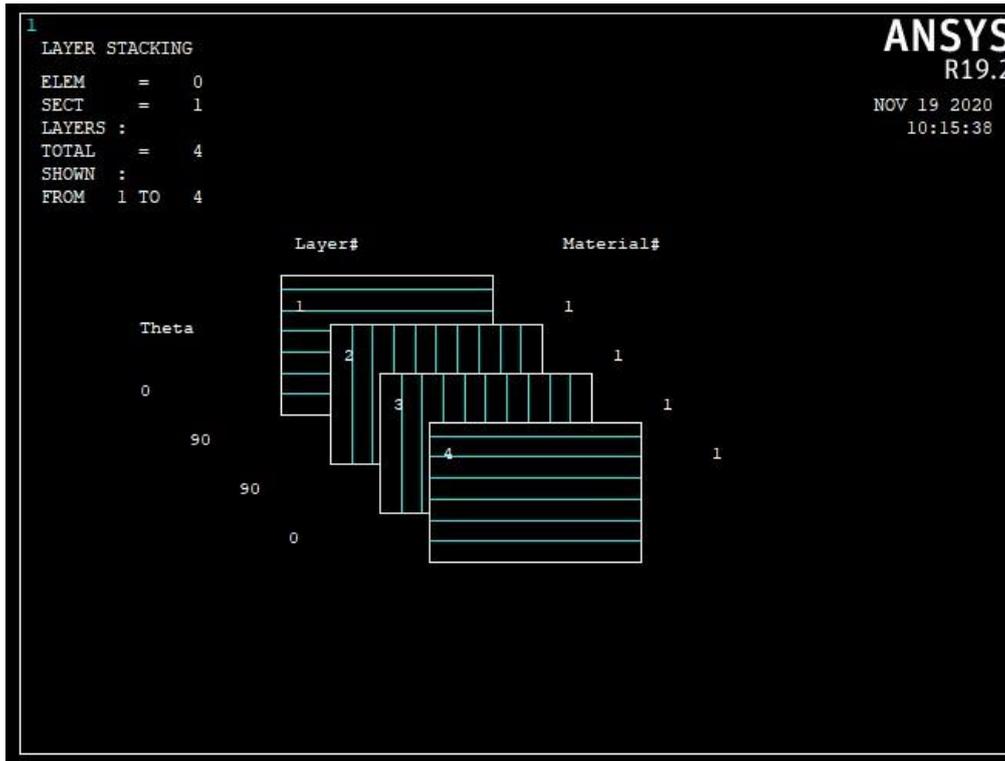


Figure III.6. Les fibres et leurs orientations

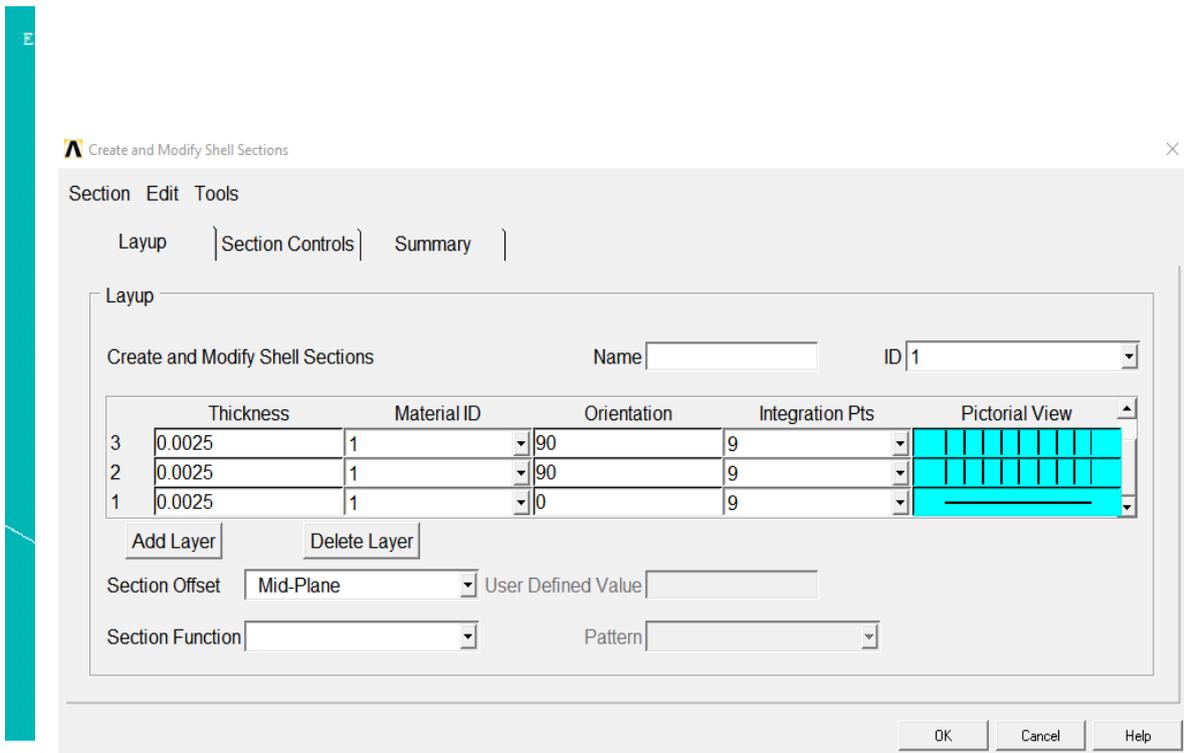


Figure III.7. Les couches des stratifiées

## III.2.1 Les résultats obtenus

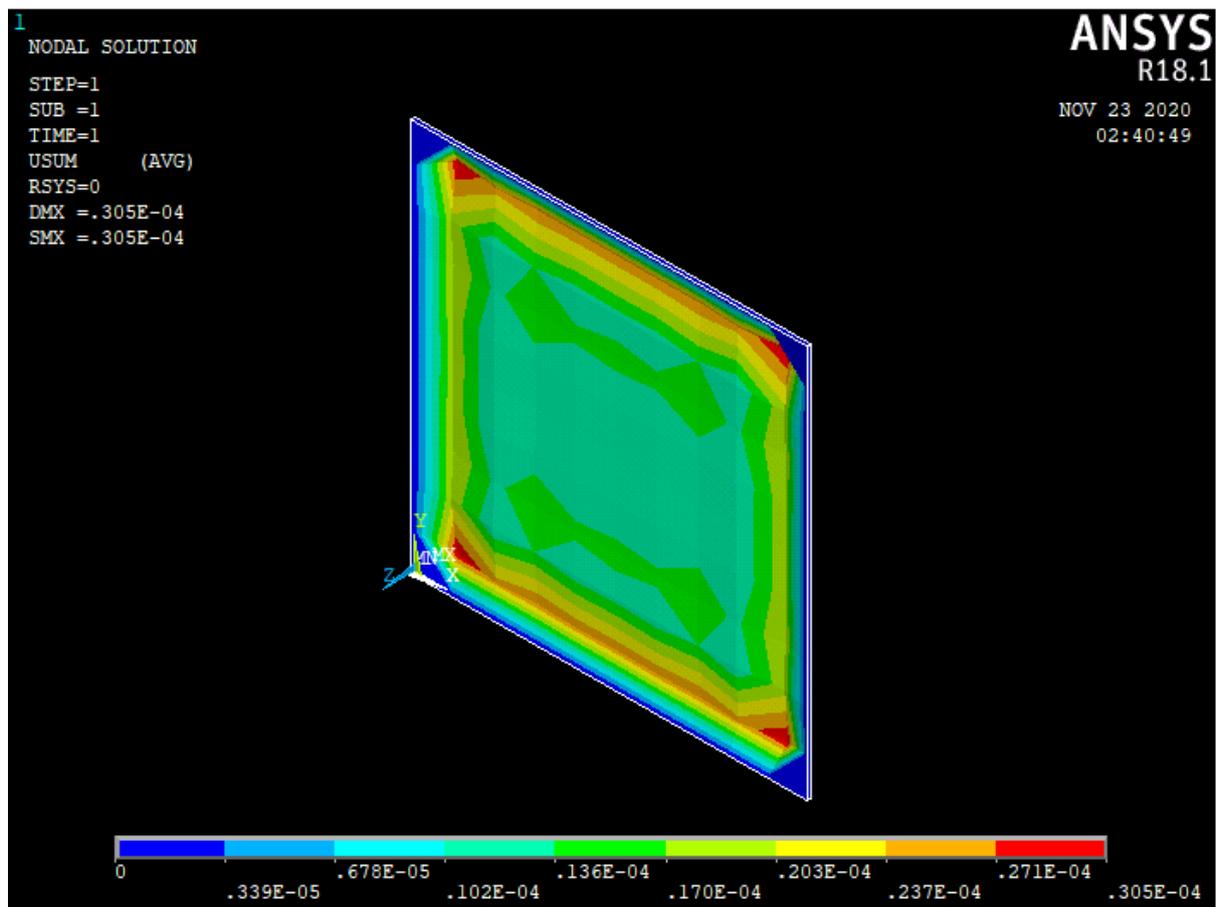


Figure III.8 Le déplacement de la plaque pour T= 0 C

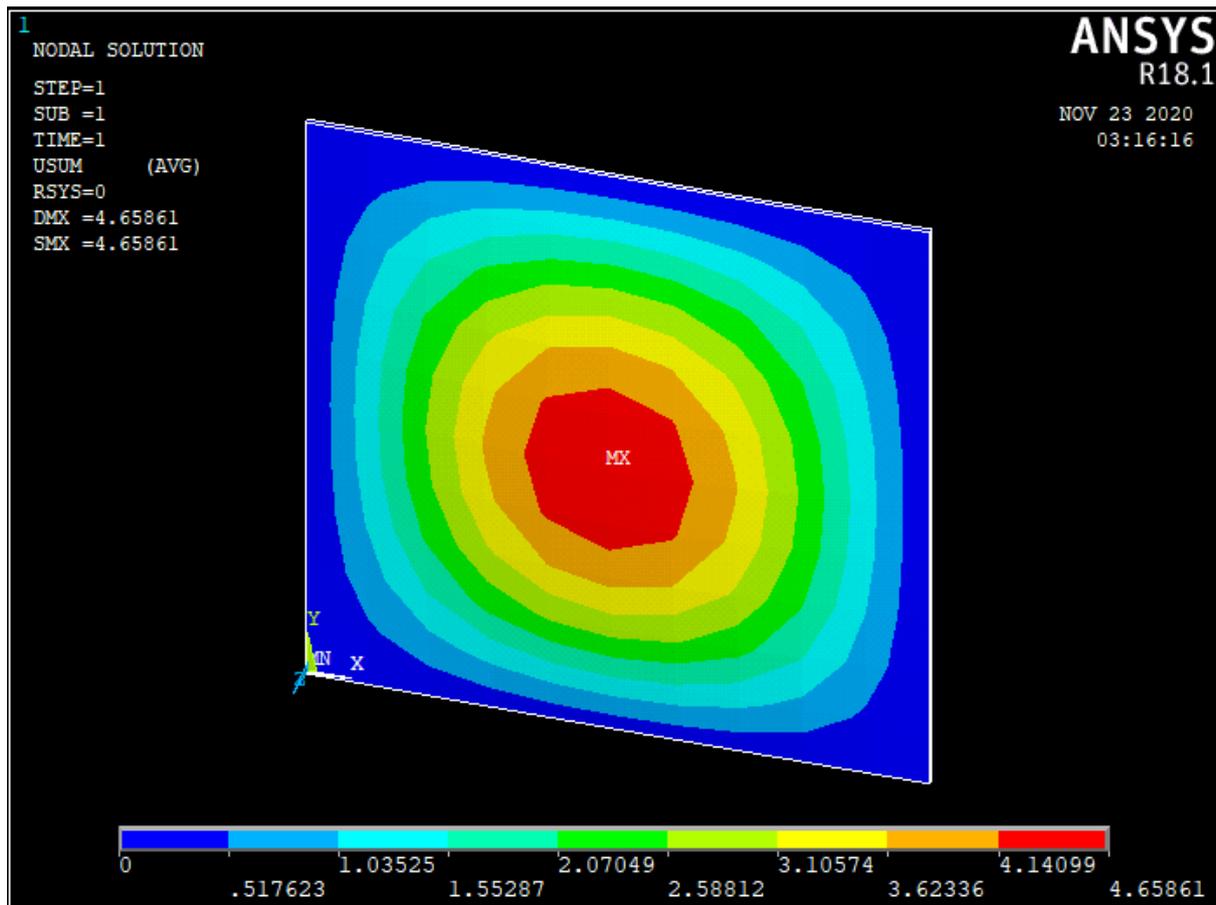


Figure III.9 le déplacement de la plaque pour T=25 C

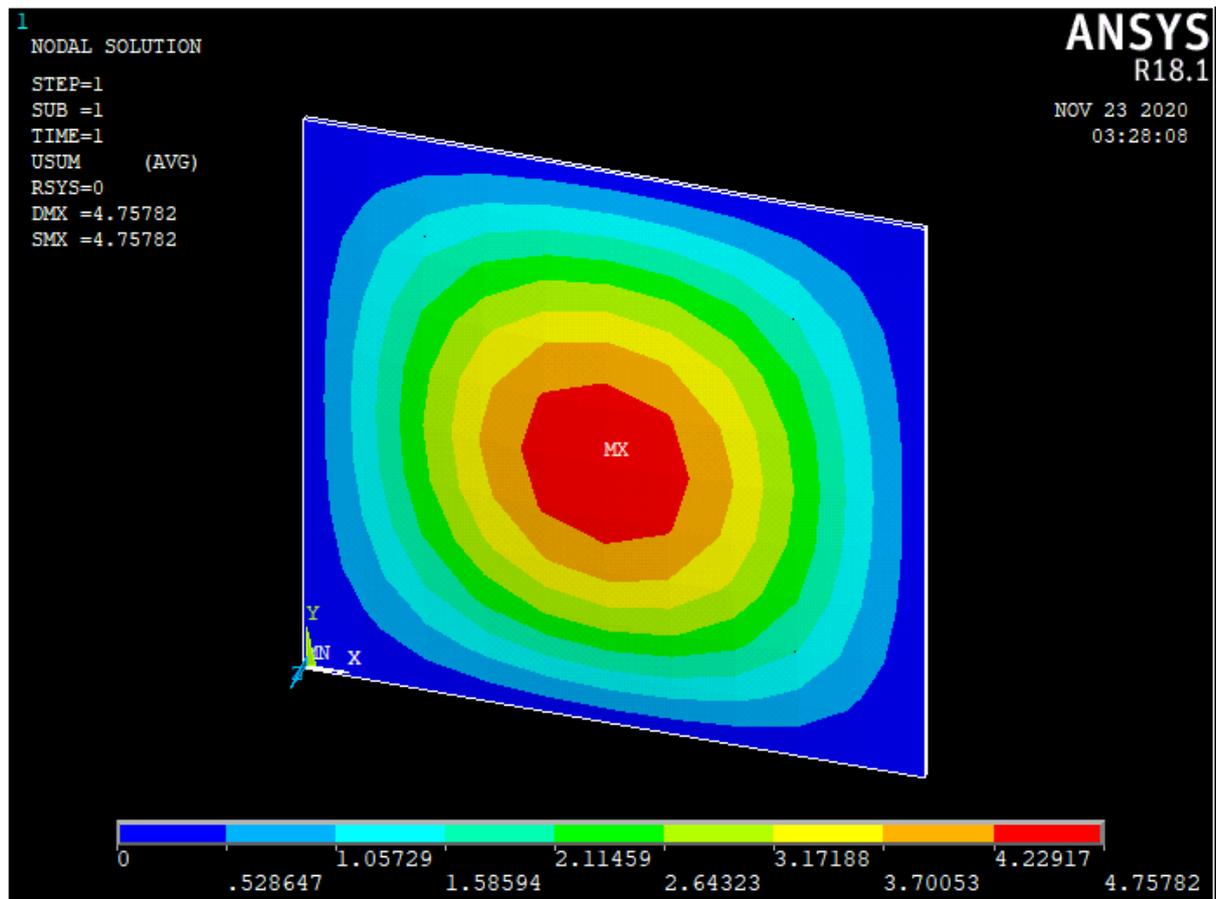


Figure III.10 la déformation estimée pour T=50 C

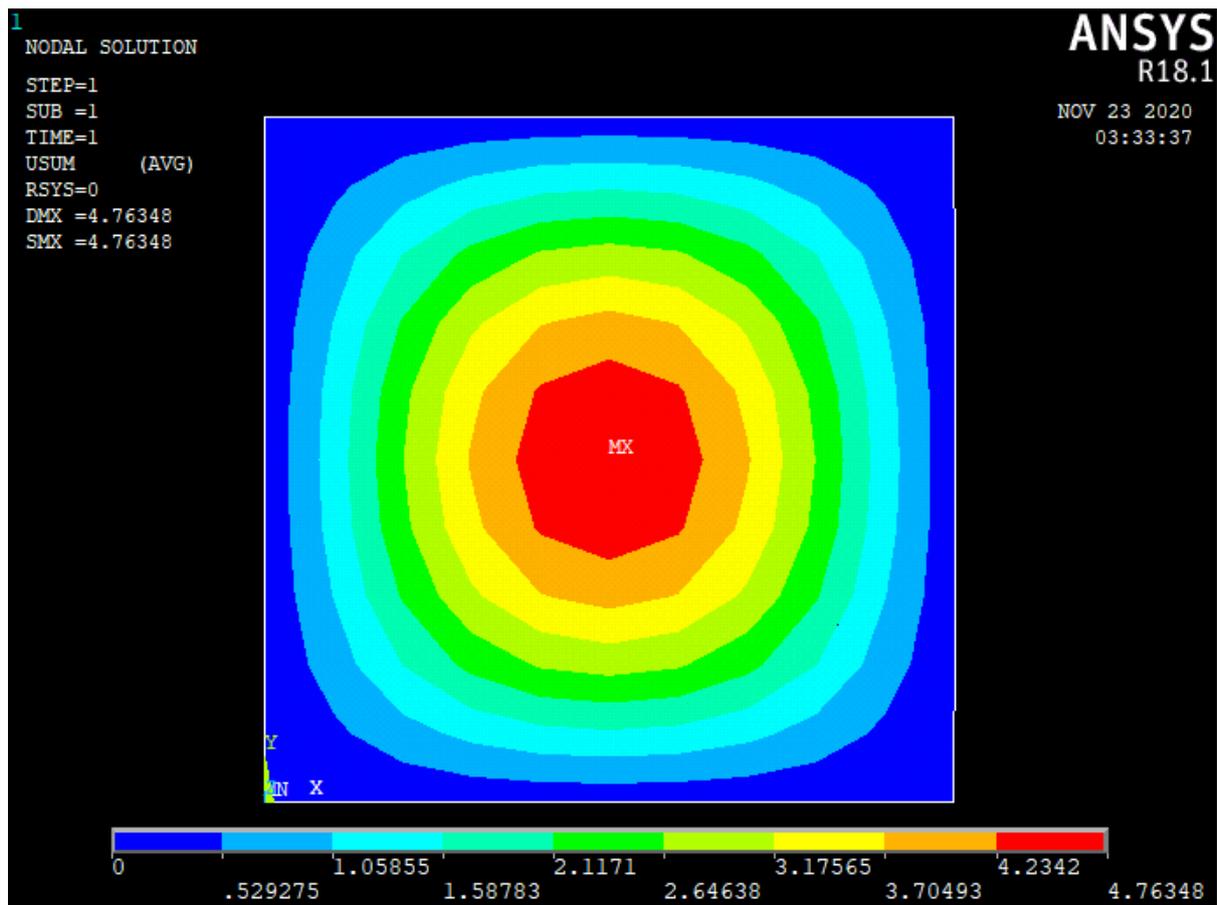


Figure III.11 la déformation de la plaque pour T=75 C

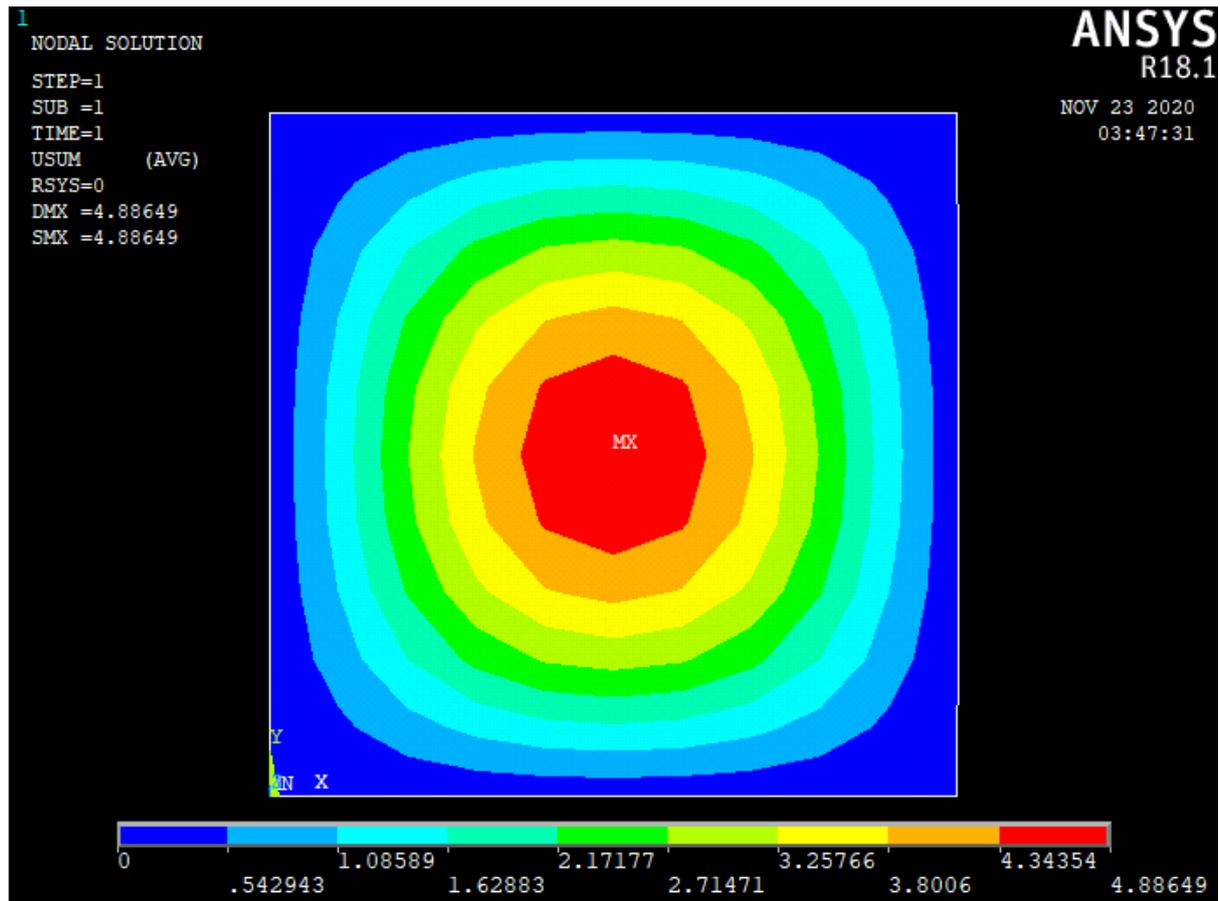


Figure III.12 La déformation de la plaque pour T=100 C

On voit que l'échelle de déformation dans cette expérience qui varie entre  $0,305 \times 10^{-4}$  jusqu'à 4,88649 mm , pour les 5 différentes température qu'on a introduit .

III.3 Le 2ème cas (5 couches)



Figure III.13 Les 5 couches et leurs orientation

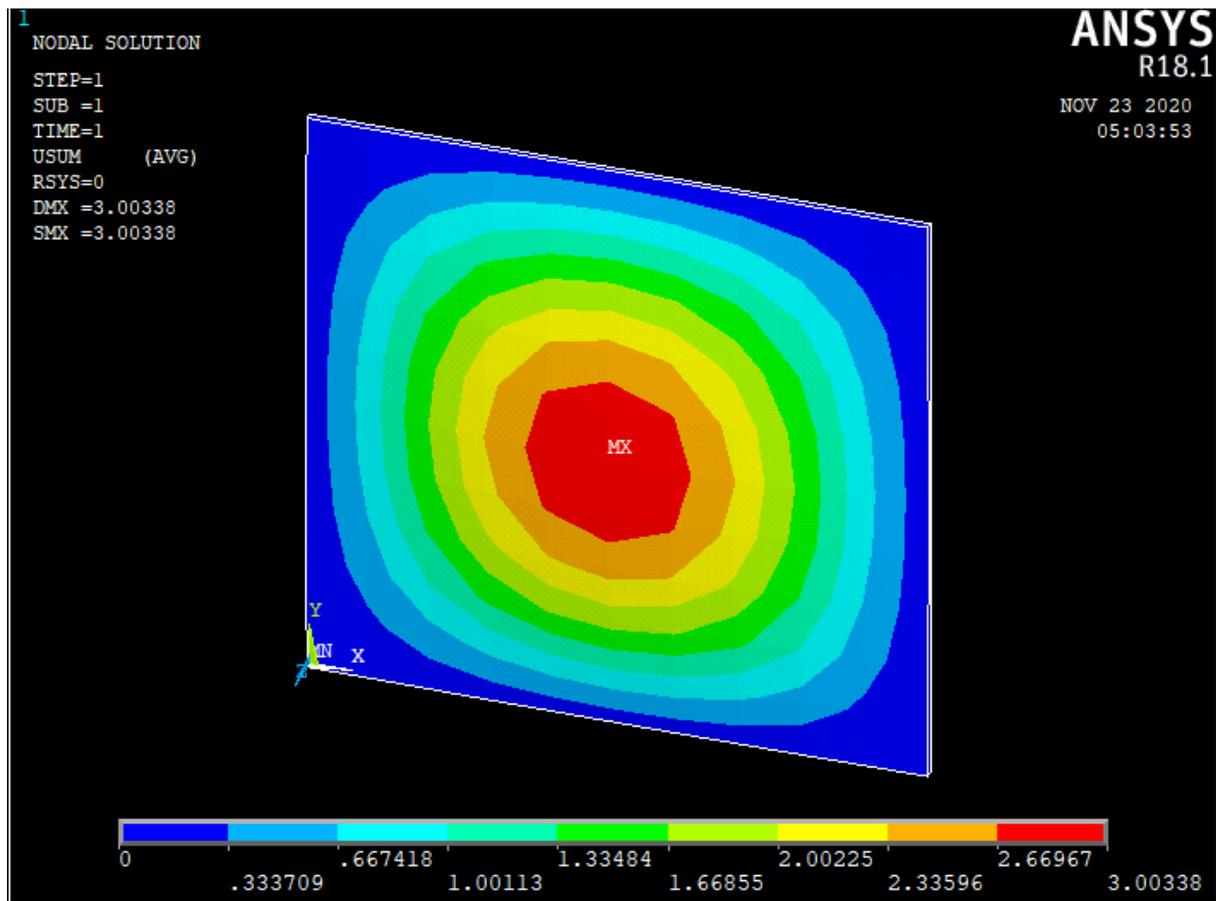


Figure III.14 Le déplacement de la plaque pour T=0 C

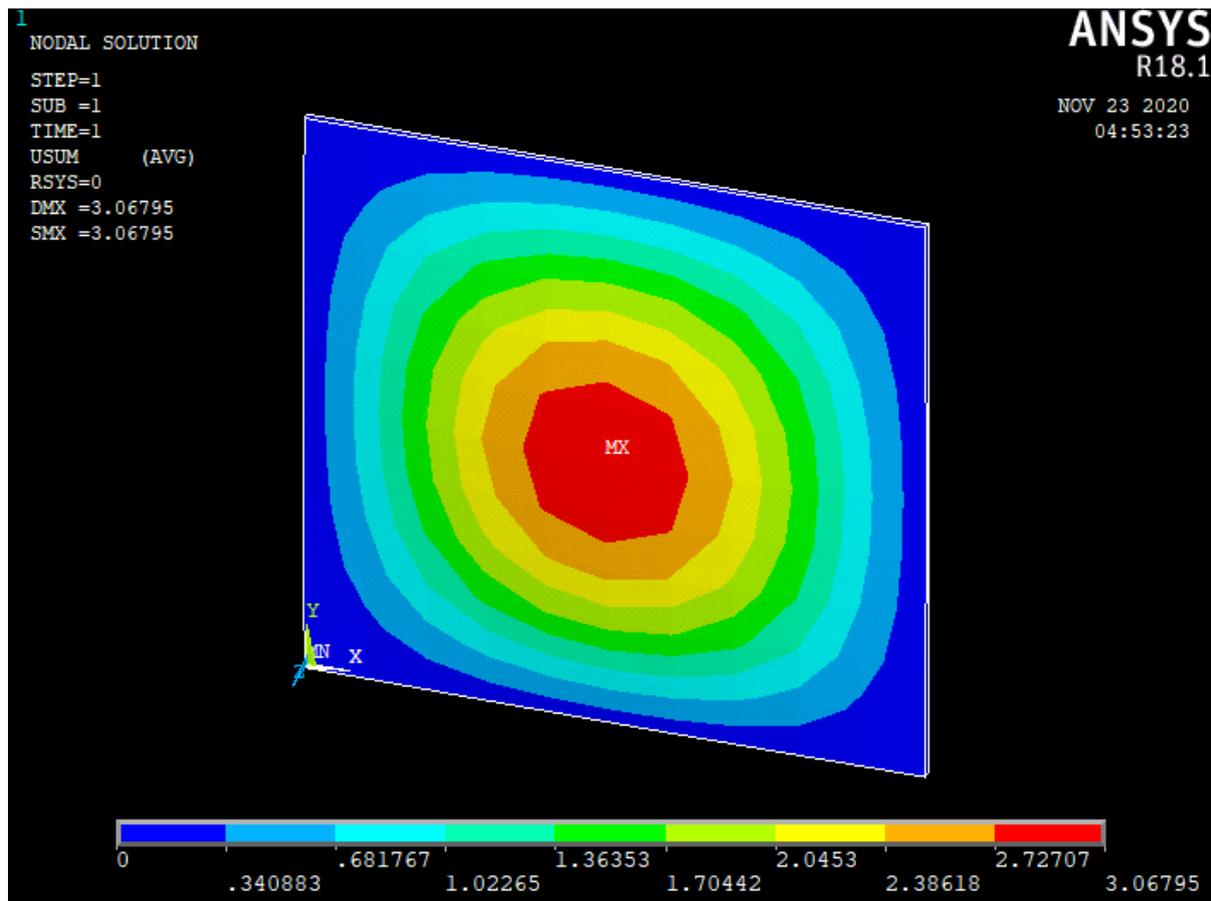
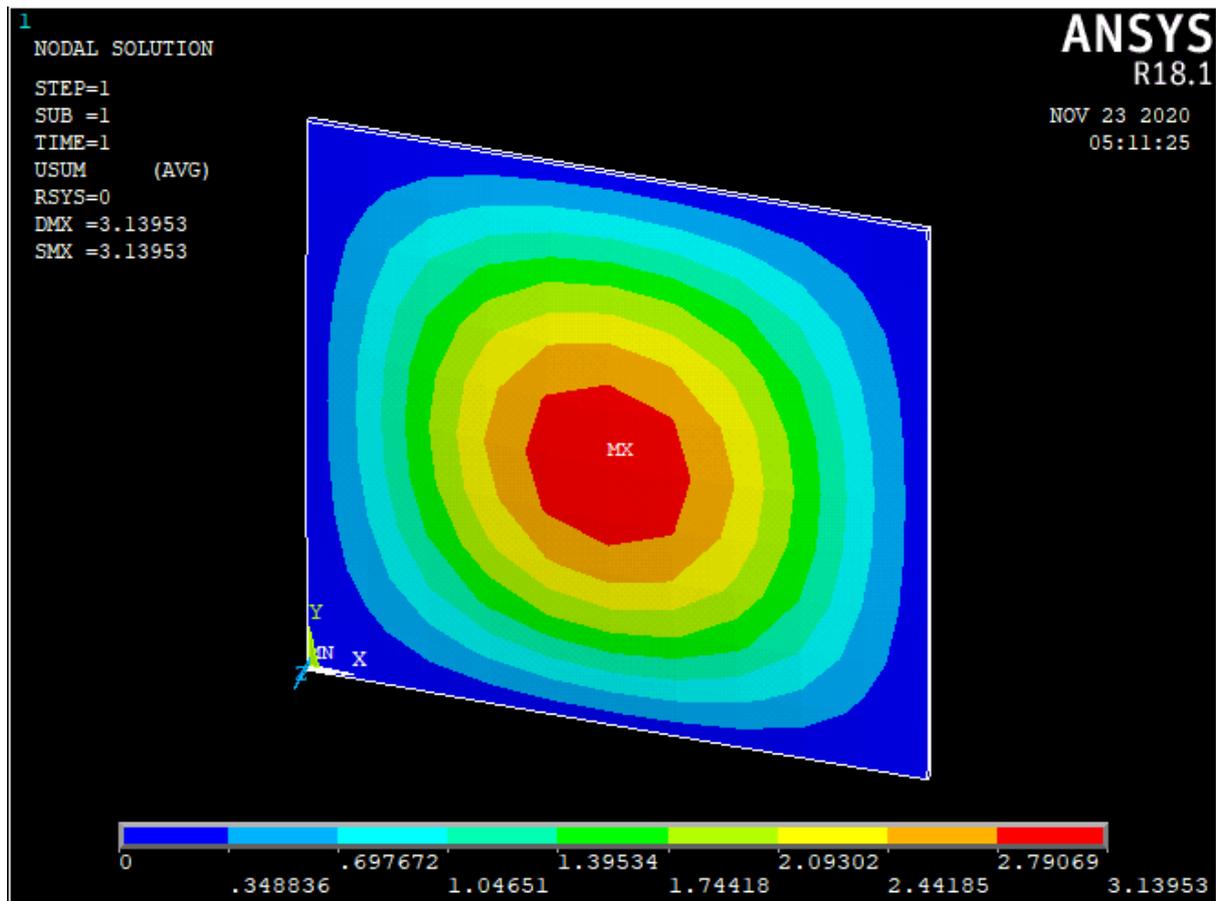
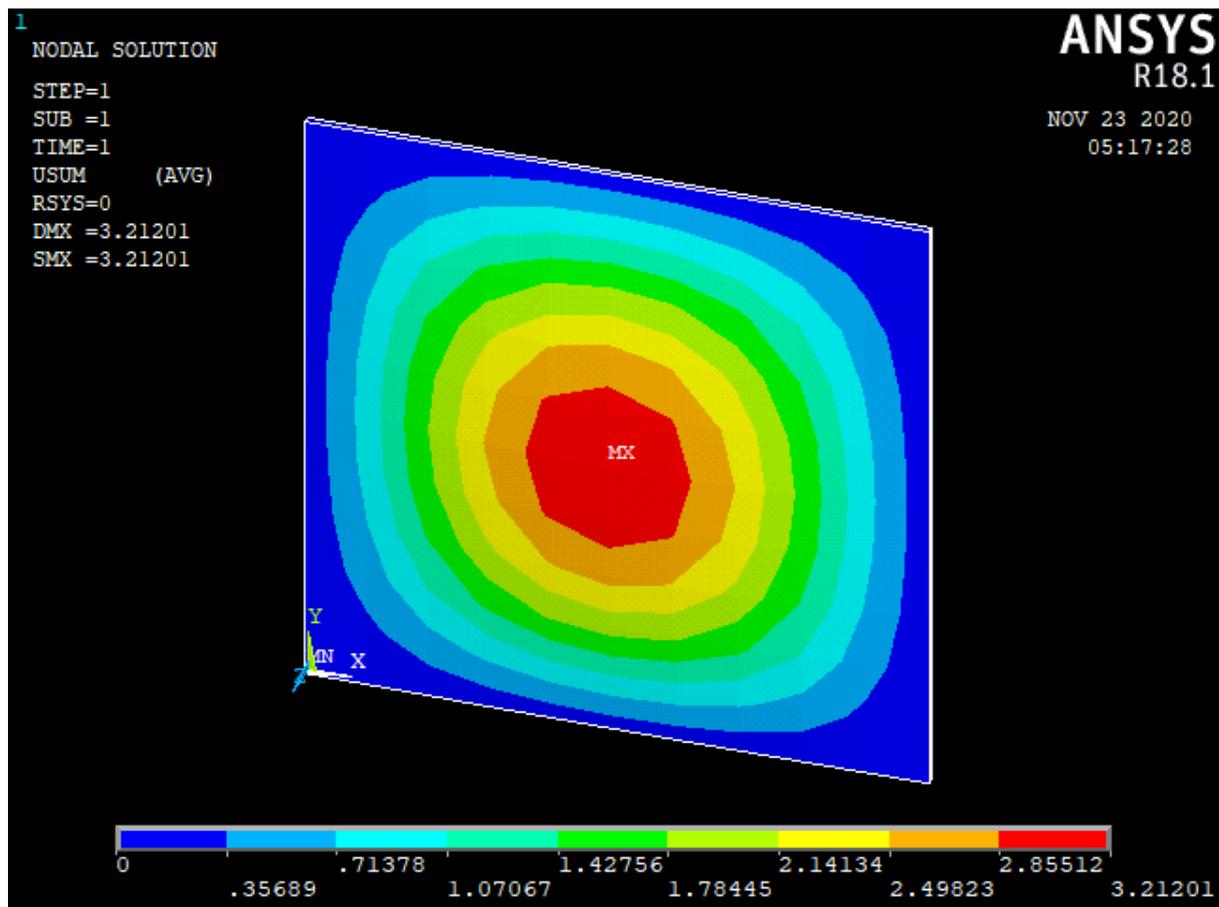


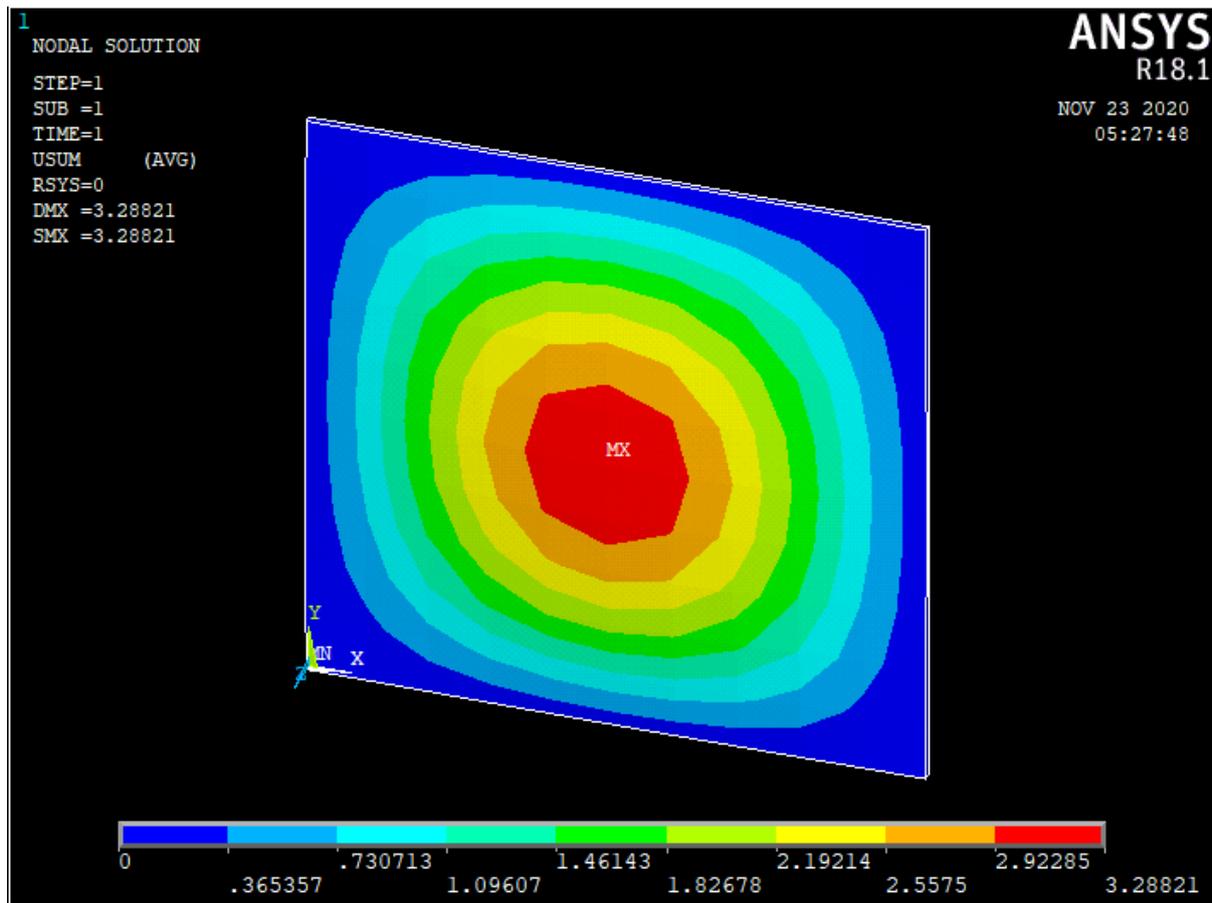
Figure III.15 La déformation de la plaque pour T=25 C



III.16 La déformation de la plaque pour T=50 C



III.17 La déformation de la plaque pour T =75 C



III.18 La déformation de la plaque pour T=100 C

On voit que l'échelle de déformation dans cette expérience qui varie entre 3.00838mm jusqu'à 3.28821 mm , pour les 5 différentes température qu'on a introduit .

Dans ce cas là on voit approximativement le rôle de nombre des couches de stratifiée

Si on compare ces résultats avec les résultats pour 4 couches on trouve que le champ de variation de la déformation se diminue par rapport au champ de variation pour 4 couches . sachant que toutes les couches sont de même épaisseur .

III.4 3<sup>ème</sup> Cas (7 couches)



Figure III.19 Les fibres et leurs orientations

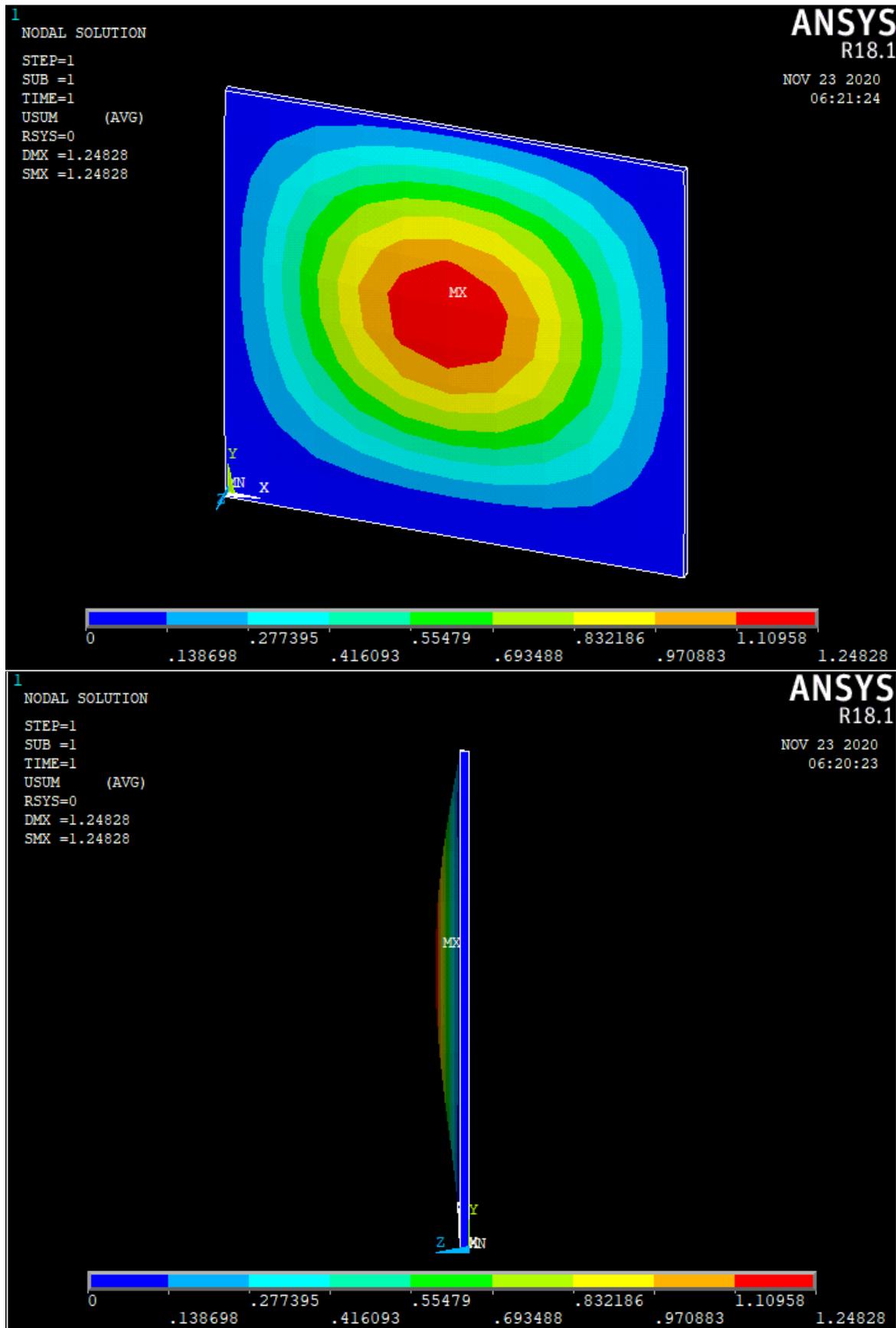


Figure III.20 La déformation de la plaque pour T=0 C

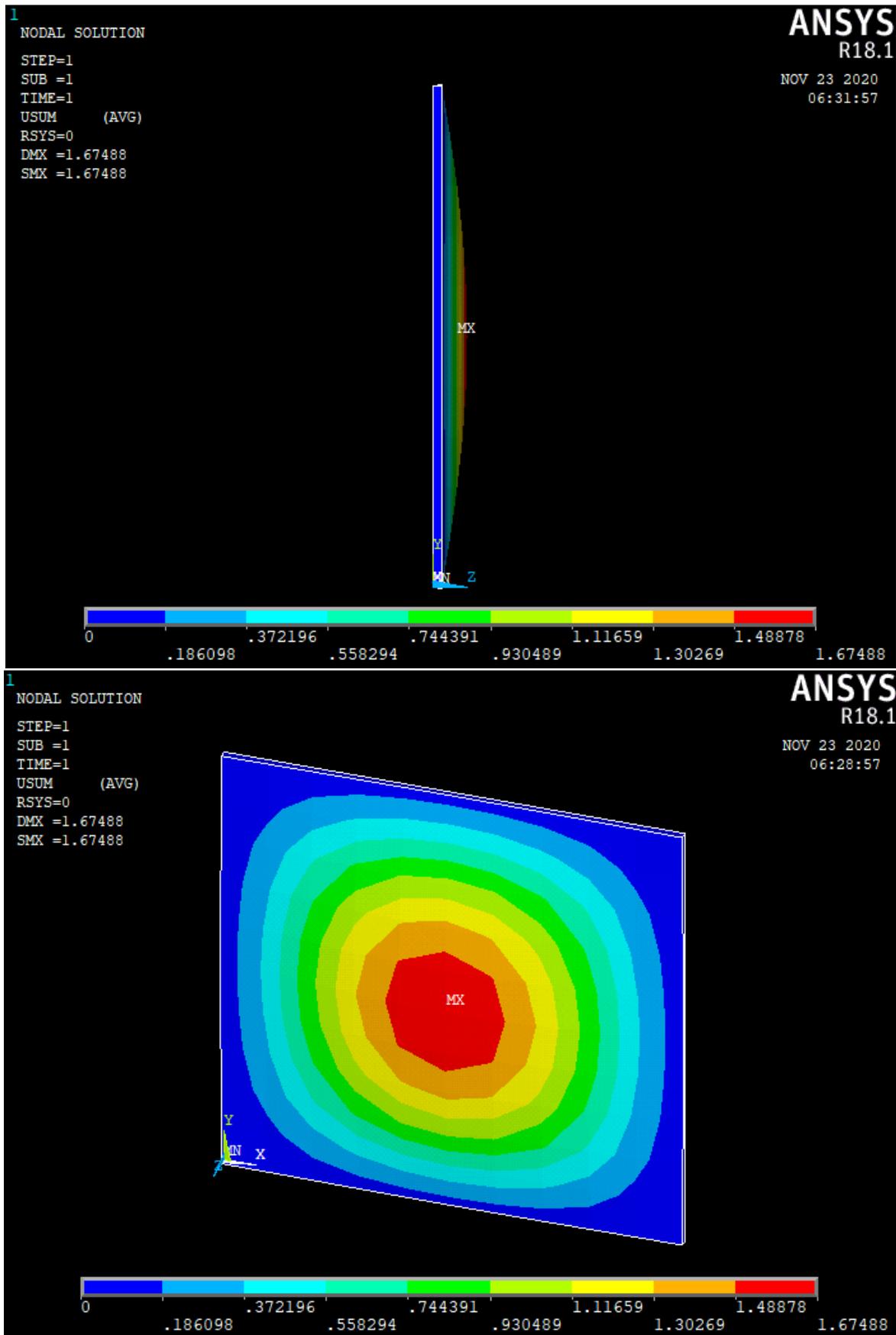


Figure III.21 La déformation de la plaque pour T=50 C

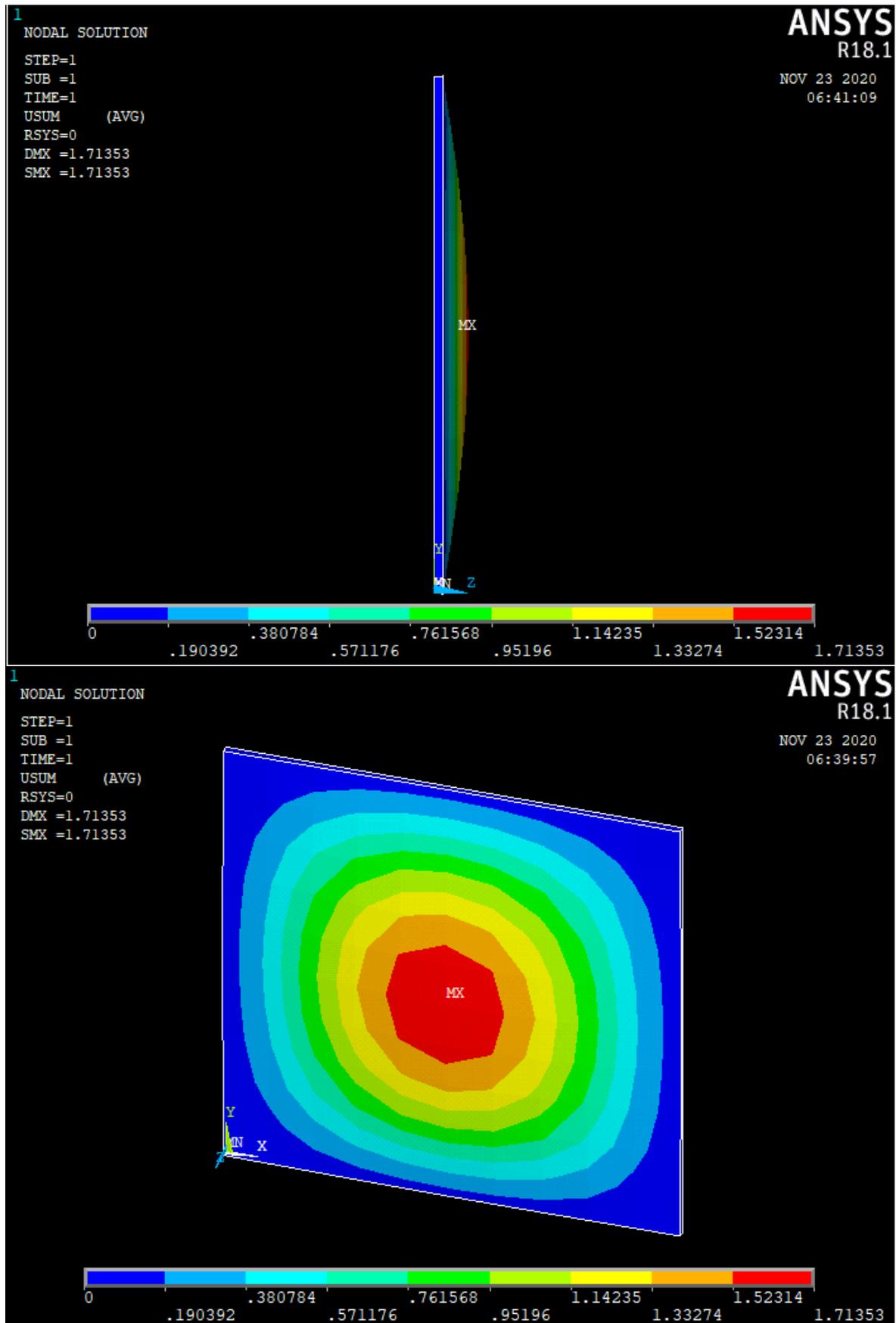


Figure III.22 La déformation de la plaque Pour T= 100 C

La déformation de la plaque pour 7 couches varie entre 1.24mm pour 0 C et 1.71mm pour 100 C.

Les résultats présentés dans cette partie peuvent nous mènent plusieurs indications et plusieurs remarques ...

Comme on voit à chaque cas expérimental, la déformation et le déplacement de notre plaque se diminuent à chaque fois on ajoute des couches stratifiées ... Comment ça ? c'est simple les stratifiées se renforcent avec les couches ( 5 couches plus résistante que 4 couches ... et ainsi de suite ) on peut introduire d'autres facteurs comme l'orientation des fibres , mais ça influence pas autant comme les nombre des couches et l'épaisseur de la fibre surtout .

### **III.5 Conclusion**

L'objectif principal de ce chapitre était l'évaluation de l'approche analytique à prédire les fréquences propres de plaques composites sous conditions hygrothermiques. Nous avons étudié une plaque composite à fibre de carbone, les propriétés élastiques du composite ont été calculées en utilisant la loi des mélanges. Les fréquences naturelles sont obtenues par la méthode des éléments finis en utilisant Ansys. Les propriétés matérielles de la plaque composite sont considérées comme dépendantes de la température et de l'humidité. Les résultats obtenus ont montré que les conditions hygrothermiques peuvent affecter le comportement des plaques composites mais moins que les autres paramètres.

## CONCLUSION GENERALE

L'analyse des effets thermiques des plaques en composite est effectuée en utilisant la théorie des plaques. Les propriétés du matériau variaient continuellement dans le sens de l'épaisseur selon une simple distribution de loi de puissance en termes de fraction volumique d'une céramique et d'un métal. Ensuite, l'analyse des effets thermiques des plaques en composite sous ces types de charges thermiques est présentée. Des solutions de forme fermée pour les différences critiques de température des plaques sont présentées.

Sur la base des résultats rapportés ici pour divers paramètres des plaques stratifiées composites, les conclusions suivantes peuvent être tirées.

- (1) La condition de bord encasté donne lieu à une température critique beaucoup plus élevée que pour la condition simplement supportée.
- (2) Plus le rapport orthotrope est élevé, plus la température critique est basse dans le cas des conditions S1 et C1, alors que le comportement inverse est observé dans la condition S2.
- (3) La température critique augmente avec le rapport hauteur / largeur, à une vitesse plus rapide dans le cas de l'état serré et à une vitesse plus lente dans le cas de supports simples.
- (4) Pour les stratifiés à angle angulaire symétriques et antisymétriques avec les deux paires de bords sous la condition encastée, la température critique minimale est obtenue à une orientation de fibre de 45 ° quel que soit le nombre de couches. Ceci est vrai pour un nombre minimum de couches (c'est-à-dire  $n = 2$  et  $3$ ) dans la condition avec toutes les bords simplement supportées. La température critique est à un maximum à une orientation de fibre de 45 degré pour un plus grand nombre de couches dans le stratifié (c'est-à-dire  $n = 4,5, \dots$ ) dans le cas de supports simples.
- (5) Pour une température critique plus élevée, les fibres doivent être orientées perpendiculairement aux bords encastés.

En conclusion, pour produire des matériaux composites à long terme, il est nécessaire de prendre en compte certains des facteurs environnementaux qui affectent les performances structurelles de ces matériaux. À ce titre, une analyse appropriée doit être effectuée, en empruntant aux théories existantes, pour garantir un examen précis de ces variables environnementales. La technologie actuelle s'est également avérée utile pour concevoir des matériaux composites plus efficaces, mesurer des facteurs environnementaux fiables et anticiper leurs effets.

**REFERENCES**

- [1] Carter, G.H., Kibler, G.K. (1977) “Entropy Model for Glass Transition in Wet Resins and Composites,” *Journal of Composite Materials*, Vol.32, PP. 265-273.
- [2] Koizumi M. FGM activities in Japan. *Composites Part B: Engineering*. 1997;28:1-4.
- [3] Fuchiyama T, Noda N. Analysis of thermal stress in a plate of functionally gradient material. *JSAE review*. 1995;16:263-8.
- [4] Reddy J, Chin C. Thermomechanical analysis of functionally graded cylinders and plates. *Journal of thermal Stresses*. 1998;21:593-626.
- [5] Jordan PF. The physical nature of panel flutter. *Aero Digest* 1956:34–8.
- [6] Dowell EH. *Aeroelasticity of plates and shells*. 1st edition. Leyden (The Netherlands): Noordhoff International; 1975.
- [7] Librescu L. *Elastostatics and kinetics of anisotropic and heterogeneous shell-type structures*. 1st edition. Leyden (The Netherlands): Noordhoff International; 1975.
- [8] Fung YC. A summary of the theories and experiments on panel flutter. *AGARD Manual on Aeroelasticity, Part III, Chapter 7*. 1961.
- [9] Johns DJ. Survey of panel flutter. *AGARD Advisory Report 1*. 1965.  
Thermal effect on flutter of panels 401
- [10] Johns DJ. A panel flutter review. *AGARD Manual on Aeroelasticity, Part III, Chapter 7*. 1961.
- [11] Dowell EH. Panel flutter: a review of the aeroelastic stability of plates and shells. *AIAA J* 1970;8(3):385–99.
- [12] Bismark-Nasr MN. Finite element analysis of aeroelasticity of plates and shells. *Appl Mech Rev* 1992;45(12):461–82.
- [13] Bismark-Nasr MN. Finite element method applied to the flutter of two parallel elastically coupled flat plates. *Int J Numer Methods Eng* 1977;11(7):1188–93.
- [14] Bismark-Nasr MN. On the sixteen degree of freedom rectangular plate element. *Int J Comput Struct* 1991;40(4):1059–60.
- [15] Bismark-Nasr MN. *Structural dynamics in aeronautical engineering*. 1st edition. AIAA Education Series; 1999.
- [16] Olson MD. Finite elements applied to panel flutter. *AIAA J* 1967;5(12):2267–70.
- [17] Benhenni Mohamed . thèse de doctorat ( these.fr )
- [18] Sander B, Bon C, Geradin M. Finite element analysis of supersonic panel flutter. *Int J*

Numer Methods Eng 1973;7(3):379–94.

[19] Chowdary TVR, Parthan S, Sinha PK. Finite element flutter analysis of laminated composite panels. *Comput Struct* 1994;53(2):245–51.

[20] Chowdary TVR, Sinha PK, Parthan S. Finite element flutter analysis of composite skew panels. *Comput Struct* 1994;58(3):613–20.

[21] Ganapathi M, Touratier M. Supersonic flutter analysis of thermally stressed laminated composite flat panels. *Compos Struct* 1996;4(2):241–8.

[22] Oh IK, Kim DH. Vibration characteristics and supersonic flutter of cylindrical composite panels with large thermoelastic deflections. *Compos Struct* 2009;90(2):208–16.

[23] Singha MK, Ganapathi M. A parametric study on supersonic flutter behavior of laminated composite skew flat panels. *Compos Struct* 2005;69(1):55–63.

[24] Shiau LC, Lu LT. Nonlinear flutter of composite laminated plates. *Math Comput Model* 1990;14:983–8.

[25] Chandiramani NK, Plaut RH, Librescu LI. Non-linear flutter of a buckled sheardeformable composite panel in a high-supersonic flow. *Int J Non-Linear Mech* 1995;30(2):149–67.

[26] Berthelot j.m., « Matériaux composites comportement mécanique et analyse des structures », 4ème édition, Lavoisier, 2005.

[27] Daniel gay., « Matériaux composites », 4ème édition, Hermes France, 1997.

[28] Carter, G.H., Kibler, G.K. (1977) “Entropy Model for Glass Transition in Wet Resins

*and Composites*,” *Journal of Composite Materials*, Vol.32, PP. 265-273.

[29] Carrera, E. (2002). Theories and finite elements for multilayered, anisotropic, composite plates and shells. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 9(2), 87-140.

[30] Hahn, h. t. et Pagano, n. j. Curing stresses in composite laminates. *Journal of Composite Materials*, 1975, vol. 9, no 1, p. 91-106.

[31] Timoshenko, Stephen P. et Woinowsky-krieger, Sergius. *Theory of plates and shells*. McGraw-hill, 1959.

[32] Chen, L. W. & Chen, L. Y., Thermal buckling of laminated composite plates. *J. Thermal Stresses*, 10 (1987) 345-56.

## RESUME

Le présent mémoire étudie l'analyse de stabilité thermique de plaques en matériau composite soumises à deux types de charges thermiques, à savoir; élévation de température uniforme et élévation de température linéaire à travers l'épaisseur, en utilisant une formulation par élément finis. L'influence de divers facteurs tels que l'indice de gradient, les charges de température, l'épaisseur et les rapports d'aspect sont soigneusement étudiés.

L'analyse des effets thermiques des plaques en composite est effectuée en utilisant la théorie des plaques. Les propriétés du matériau variaient continuellement dans le sens de l'épaisseur selon une simple distribution de loi de puissance en termes de fraction volumique d'une céramique et d'un métal. Ensuite, l'analyse des effets thermiques des plaques en composite sous ces types de charges thermiques est présentée. Des solutions de forme fermée pour les différences critiques de température des plaques sont présentées.

## ABSTRACT

This submission examines the thermal stability analysis of composite plates subjected to two types of thermal loads, namely: uniform temperature rise and linear temperature rise through thickness, using a finite element formulation. The influence of various factors such as gradient index, temperature loads; thickness and aspect ratios are carefully studied.

The analysis of the thermal effects of composite plates is carried out using plate theory.

The properties of the material varied continuously in the direction of thickness according to a simple power law distribution in terms of the density fraction of a ceramic and a metal. Next, the analysis of the thermal effects of composite plates under these types of thermal load is presented. Closed-form solutions for critical plate temperature differences are presented.

## ملخص

تدرس هذه الأطروحة تحليل الثبات الحراري لألواح المواد المركبة المعرضة لنوعين من الأحمال الحرارية ، وهما ؛ ارتفاع درجة الحرارة المنتظم وارتفاع درجة الحرارة الخطي عبر السماكة ، باستخدام صيغة عنصر محدود. تمت دراسة تأثير العوامل المختلفة مثل مؤشر التدرج وأحمال درجة الحرارة والسماكة ونسب العرض بعناية. يتم إجراء تحليل التأثيرات الحرارية للألواح المركبة باستخدام نظرية الألواح. تختلف خصائص المادة باستمرار في اتجاه السماكة وفقاً لتوزيع بسيط لقانون القوة من حيث جزء الحجم من السيراميك والمعدن. بعد ذلك ، يتم عرض تحليل التأثيرات الحرارية للألواح المركبة تحت هذه الأنواع من الأحمال الحرارية. يتم تقديم حلول الشكل المغلق للاختلافات الحرجة في درجة حرارة اللوحة.