

République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique



Université Ibn Khaldoun de Tiaret

Faculté des Sciences Appliquées

Département de Génie Mécanique



## MÉMOIRE DE FIN D'ETUDES

Pour l'obtention du Diplôme de Master

**Domaine :** Sciences et Technologie

**Filière :** Génie Mécanique

**Parcours :** Master

**Spécialité :** Construction Mécanique

**Thème**

**CONTRIBUTION A L'ETUDE DU  
COMPORTEMENT DYNAMIQUE D'UNE  
LIGNE D'ARBRE FLEXIBLE FISSUREE**

Préparé par :

**BEKHEIRA Ilyes**

Soutenu publiquement le : 26 / 10 / 2020, devant le jury composé de :

M. MADANI Ahmed	Maître Assistant "A"	(Univ. Ibn Khaldoun)	Président
M. AISSAT Sahraoui	Maître de Conférences "A"	(Univ. Ibn Khaldoun)	Examineur
M. MECHKOUR El hadi	Maître de Conférences "B"	(Univ. Ibn Khaldoun)	Examineur
M. BOUZIDANE Ahmed	Professeur	(Univ. Ibn Khaldoun)	Encadreur

Année universitaire : 2019 – 2020

*Dédicaces*

*Je dédie ce mémoire à :*

*Allah, le tout puissant,*

*A mes chers parents pour leurs encouragements, leurs sacrifices et leurs  
patiences tout au long de mes études*

*A mes frères et mes sœurs. A ma grand-mère*

*Aux familles Bekheira et Hachemin*

*A tous mes amis. A tous ceux que j'ai connus de près ou de loin*

*Ceux qui n'ont jamais cessé de formuler des prières à mon égard et m'ont  
soutenu et épaulé pour que je puisse atteindre mes objectifs. Tous ceux que  
j'aime et qui m'aiment.*

## *Remerciements*

*Je tiens tout d'abord à remercier en premier lieu Allah, le tout puissant de m'avoir guidé et donné autant de santé, courage, patience et volonté pour accomplir ce travail. Je tiens également à exprimer ma gratitude à mes très chers parents, mes frères et toute ma famille pour m'avoir soutenu, encouragé et aimé.*

*Mes premiers remerciements vont à mon encadreur Mr **BOUZIDANE** Ahmed Professeur à l'université de Tiaret, pour ses conseils et le partage de ses connaissances. J'ai également apprécié la grande liberté qui m'a accordé pour la gestion de mon mémoire.*

*Je remercie vivement Mr président M. **MADANI** Ahmed Maître Assistant et les membres de jury M. **AISSA** Sahraoui et M. **MECHKOUR** El Hadi Maître de Conférences à l'université de Tiaret d'avoir accepté d'évaluer et d'examiner ce mémoire.*

*Je remercie vivement Mr **BENADDA** Mohamed Docteur a l'université de Tiaret, Mm **BELGACEM** Souad Docteur a l'université de Tiaret, ainsi que Mm Nemchi Amina Docteur a l'université de Tiaret pour leur soutien inconditionnel et leur encouragement. Mes remerciements s'adressent également à tous les enseignants qui ont assuré notre formation au cours de ces années et aux personnels administratif du département De Sciences et Technologie et du département de Génie mécanique.*

*Mes profonds remerciements vont également à toutes les personnes qui m'ont aidée et soutenu de près ou de loin.*

## Sommaire

Dédicaces .....	
Remerciements .....	
Sommaire .....	
Nomenclature.....	
Liste des figures .....	
Liste des tableaux .....	
<b>Introduction générale.....</b>	<b>1</b>
<b>CHAPITRE I : Etude bibliographique .....</b>	<b>3</b>
<b>I.1) Introduction .....</b>	<b>4</b>
<b>I.2) Etat de l'art sur les rotors fissures .....</b>	<b>4</b>
I.2.1) Revue historique.....	4
<b>I.3) Paramètres influent sur le comportement dynamique des rotors.....</b>	<b>6</b>
<b>I.4) Notion sur les rotors industriels .....</b>	<b>6</b>
I.4.1) Type d'arbres.....	7
I.4.1.1) L'arbre rigide.....	7
I.4.1.2) L'arbre flexible.....	7
I.4.2) Type de paliers .....	7
I.4.2.1) Contact direct.....	8
I.4.2.2) Interposition des bagues .....	8
I.4.2.3) Montages des bagues .....	9
I.4.2.4) Interposition d'éléments roulants .....	9
A) Charges supportées par un roulement .....	10
B) Classement des roulements .....	10
I.4.3.1) Interposition d'un film d'huile .....	11
<b>A) Palier hydrodynamique .....</b>	<b>11</b>
A.1) Coussinets autolubrifiants .....	11
<b>B) Palier hydrostatique.....</b>	<b>11</b>
<b>I.5) Type de vibrations .....</b>	<b>12</b>
I.5.1) Vibration en flexion des arbres.....	12
I.5.2) Vibration en torsion des arbres.....	12
I.5.3) Vibration longitudinale des arbres.....	13
<b>I.6) Mécanique linéaire de la rupture .....</b>	<b>13</b>
I.6.1) Mode d'ouverture de la fissure.....	14
I.6.1.1) Mode I .....	14
I.6.1.2) Mode II.....	14
I.6.1.3) Mode II.....	14

<b>I.7) Méthodes numériques pour la modélisation des fissures</b> .....	<b>14</b>
<b>I.8) Causes des fissures dans les arbres des rotors</b> .....	<b>15</b>
<b>I.9) Types des fissures dans les arbres selon leurs orientations</b> .....	<b>15</b>
<b>I.9.1) Fissure transversale</b> .....	<b>15</b>
<b>I.9.2) Fissure longitudinale</b> .....	<b>16</b>
<b>I.9.3) Fissure inclinée</b> .....	<b>16</b>
<b>I.10) Flexibilité locale d'un rotor fissuré</b> .....	<b>16</b>
<b>I.11) Etude paramétrique d'un rotor fissuré tournant</b> .....	<b>17</b>
<b>I.12) Outils de simulation matlab/simulink</b> .....	<b>17</b>
<b>I.12.1) Matlab</b> .....	<b>17</b>
<b>I.12.1.1) Programme Matlab</b> .....	<b>17</b>
<b>I.12.2) Simulink</b> .....	<b>18</b>
<b>I.12.2.1) Modélisation Simulink</b> .....	<b>18</b>
<b>I.12.2.2) Simulink des profils</b> .....	<b>18</b>
<b>I.13) Conclusion</b> .....	<b>18</b>
<b>CHAPITRE II : Modélisation mathématique d'une ligne d'arbre fissurée</b> .....	<b>19</b>
<b>II.1) Introduction</b> .....	<b>20</b>
<b>II.2) Formulation de l'équation de mouvement</b> .....	<b>20</b>
□ Equation de Lagrange.....	20
<b>II.3) Modélisation par la méthode de rotor Jeffcott (modele Jeffcott)</b> .....	<b>21</b>
<b>II.3.1) Modele de Jeffcott rotor</b> .....	<b>21</b>
<b>II.3.2) Rotor fissuré</b> .....	<b>21</b>
<b>I.3.2.1) Rotor flexible avec un palier rigide</b> .....	<b>22</b>
□ Schéma de système équivalent (figure II.3) de rotor de Jeffcott (figure II.1) .....	23
<b>II.4) Modélisation par la méthode des éléments finis des élément du rotor</b> .....	<b>25</b>
<b>II.4.1) Disque</b> .....	<b>26</b>
<b>II.4.2) Débalancement (balourd)</b> .....	<b>27</b>
<b>II.4.3) Supports (Paliers)</b> .....	<b>28</b>
<b>II.4.4) Dérivation des matrices élémentaires</b> .....	<b>30</b>
<b>II.4.5) Développement de rigidité élémentaire du rotor d'un élément d'arbre fissuré</b> .....	<b>34</b>
<b>II.4.6) Fréquences propres du rotor</b> .....	<b>40</b>
<b>II.4.6) Conclusion</b> .....	<b>40</b>
<b>CHAPITRE III : Etude du Comportement Dynamique d'un Rotor Flexible Fissuré en Régime Transitoire</b> .....	<b>41</b>
<b>III.1) Introduction</b> .....	<b>42</b>
<b>III.1.1) Description du modèle de Jeffcott de l'arbre fissuré</b> .....	<b>42</b>
<b>III.1.1.1) Caractéristique de la géométrie</b> .....	<b>42</b>
<b>III.3) Organigramme de la résolution</b> .....	<b>43</b>
<b>III.4) Résultats et interprétation</b> .....	<b>44</b>
<b>III.4.1) L'effet de la fissure sur la fréquence, l'angle de déplacement et la force d'excitation</b> .....	<b>44</b>

<b>III.4.2) L'effet de la fissure sur la rigidité .....</b>	<b>46</b>
<b>III.4.3) L'effet de la fissure sur la réponse vibratoire.....</b>	<b>49</b>
<b>III.4.4) L'effet de la fissure sur l'amplitude .....</b>	<b>51</b>
<b>III.5) Conclusion.....</b>	<b>54</b>
<b>Conclusion générale .....</b>	<b>55</b>
<b>Bibliographie et webographie.....</b>	<b>56</b>
<b>Résumé .....</b>	<b>57</b>
<b>ملخص.....</b>	<b>57</b>
<b>Abstract.....</b>	<b>57</b>

## Nomenclature

$\rho$	Masse volumique de l'arbre [ $\text{kg} / \text{m}^3$ ]
A	Aire de la section droite de l'arbre [ $\text{m}^2$ ]
E	Le module de Young [MPa]
$K_s$	Rigidité de l'arbre
$K_B$	Rigidité de palier
$K_m$	Rigidité équivalent
$K_0$	Rigidité sans fissure de l'arbre
$K_{sx}$	Rigidité selon axe X de l'arbre
$K_{xy}$	Rigidité selon axe Y de l'arbre
$\Delta K_{sx}$	Différence rigidité selon axe X de l'arbre fissure et de l'arbre sans fissure
$\Delta K_{xy}$	Différence rigidité selon axe Y de l'arbre fissure et de l'arbre sans fissure
$\Omega t$	Angle de rotation
T	Energie cinétique [J]
U	Energie potentielle [J]
$F_i$	Forces extérieures [N]
$q_i$	Coordonnées généralisés
$R_0(X, Y, Z)$	Repère fixe (repère galiléen)
$R(x, y, z)$	Repère tournant lié au disque
$\theta_x, \theta_y, \theta_z$	Angle de rotation suivant les axes x, y, z
$\omega_x, \omega_y, \omega_z$	Les composants du vecteur de rotation instantanée suivant le repère tournant $Td$
$Td_{rot}$	Energie cinétique de rotation du disque [J]
$I_{dx}, I_{dy}, I_{dz}$	Les moments d'inertie du disque par rapport aux axes de repère tournant [ $\text{kg} \cdot \text{m}^2$ ]
[Id]	Tenseur d'inertie de disque [ $\text{kg} \cdot \text{m}^2$ ]
u, w	Déplacements du centre de l'arbre suivant les axes OX et OZ du repère fixe
$Td$	Energie cinétique de translation de disque [J]
md	Masse de disque [kg]
$\rho_d$	Masse volumique de disque [ $\text{kg} / \text{m}^3$ ]
S	Section droite de l'arbre [ $\text{m}^2$ ]
$\rho_a$	Masse volumique de l'arbre [ $\text{kg} / \text{m}^3$ ]
Le	Longueur d'un élément de l'arbre [m]
$T_a$	Energie cinétique de l'arbre [J]
$u^*, w^*$	Déplacements de l'arbre suivant les axes x et y [m]
z	Du repère tournant

$G_{yz}$ , $G_{yx}$	Modules de cisaillement transversal [MPa]
$U_a$	Energie de déformation de l'arbre [J]
$I_X, I_Z$ , $I_{XZ}$	Moments d'inertie de la section transversale de l'arbre par rapport au repère fixe
$I_x, I_z$ , $I_{xz}$	Moments d'inertie de la section transversale de l'arbre par rapport au repère tournant
$A_c$	La surface de la partie fissurée de la section transversale [ $m^2$ ]
$A_l$	La surface de la partie non-fissurée de la section transversale [ $m^2$ ]
$H$	Profondeur de la fissure [m]
$\mu$	Rapport de profondeur de la fissure ( $a/r$ )
$\delta W_p$	Travail virtuel des forces extérieures des paliers [J]
$F_u$ , $F_w$	Les forces généralisées des paliers. [N]
$m_b$	Masse de balourd [kg]
$\beta$	Angle de phase du balourd par rapport à l'axe Z
$T_b$	Energie cinétique du balourd [J]
$N'$ , $N''$	Première et deuxième dérivée de vecteur des fonctions de formes par rapport à $\xi$ .
$N$	Disque Fonction de formes du disque ( $\xi=1$ ou $\xi=-1$ )
$[M_e]$	Matrice masse élémentaire de l'arbre [kg]
$[G_e]$	Matrice gyroscopique élémentaire de l'arbre
$[K_e]$	Matrice de rigidité élémentaire de l'arbre [N/m]
$[M_d]$	Matrice masse élémentaire du disque [kg]
$[G_d]$	Matrice gyroscopique élémentaire du disque
$[M_g]$	Matrice masse globale du rotor [kg]
$[G_g]$	Matrice gyroscopique globale du rotor
$[K_g]$	Matrice de rigidité globale du rotor [N/m]
$[C_p]$ , $[K_p]$	Les matrices d'amortissement et de raideur des paliers. [N/m]
$a$	Profondeur de la fissure [m]
$r$	Rayon de l'arbre [m]

## Liste des figures

<b>Figure I.1</b> : arbre rigide .....	7
<b>Figure I.2</b> : arbre flexible .....	7
<b>Figure I.3</b> : Contact direct .....	8
<b>Figure I.4</b> : Interposition des bagues .....	8
<b>Figure I.5</b> : Montage des bagues .....	9
<b>Figure I.6</b> : Bague avec et sans collerette sec .....	9
<b>Figure I.7</b> : Bague avec et sans collerette lubrifiée .....	9
<b>Figure I.8</b> : Composition d'un roulement .....	10
<b>Figure I.9</b> : Eléments roulants .....	10
<b>Figure I.10</b> : Les charges supportées par un roulement .....	10
<b>Figure I.11</b> : Types de charges .....	11
<b>Figure I.12</b> : Principe de Fonctionnement d'un Coussinet autolubrifiant.....	11
<b>Figure I.13</b> : Principe du fonctionnement d'un palier hydrostatique .....	12
<b>Figure I.14</b> : Mouvement de l'arbre (Rotation + whirling).....	12
<b>Figure I.15</b> : Arbre en torsion .....	13
<b>Figure I.16</b> : Mode d'ouverture de la fissure .....	14
<b>Figure I.17</b> : Fissure transversale .....	15
<b>Figure I.18</b> : Fissure longitudinale .....	16
<b>Figure I.19</b> : Fissure inclinée .....	16
<b>Figure I.20</b> : Géométrie d'une fissure ouverte et localisation sur l'arbre .....	17
<b>Figure II.1</b> : Le rotor de Jeffcott avec fissure .....	21
<b>Figure II.2</b> : Position et géométrie de la fissure.....	22
<b>Figure II.4</b> : la rigidité d'un arbre fissure pour variation harmonieuse .....	22
<b>Figure II.5</b> : Schéma équivalent.....	23
<b>Figure II.6</b> : Schéma de système équivalent .....	24
<b>Figure II.7</b> : <b>Vitesse de rotation transitoire</b> .....	25
<b>Figure II.8</b> : Elément d'un rotor fissuré .....	26
<b>Figure II.9</b> : Modèle élément fini du disque .....	26
<b>Figure II.10</b> : Masse de débalancement .....	27
<b>Figure II.11</b> : Profil du balourd sur le rotor .....	28
<b>Figure II.12</b> : Rigidité des supports (schématisation des caractéristiques du Palier hydrostatique à quatre patins).....	29
<b>Figure II.13</b> : schéma d'un élément de poutre a 4 ddl par nœud.....	30
<b>Figure II.14</b> : Modèle de système de rotor avec un élément fissuré.....	35
<b>Figure III.1</b> : Modèle du rotor étudié fissuré avec la géométrie de la fissure.....	42
<b>Figure III.2</b> : Organigramme d'exécution du programme .....	43
<b>Figure III.3</b> : la rigidité et leur dépendance à la profondeur de la fissure .....	44
<b>Figure III.4</b> : Evolution de la fréquence en fonction de la vitesse de rotation .....	45
<b>Figure III.5</b> : Evolution de l'angle de déplacement en fonction de la vitesse de rotation .....	45
<b>Figure III.6</b> : Evolution de la force d'excitation en fonction de la vitesse de rotation.....	45
<b>Figure III.7</b> : Evolution de la rigidité en fonction de temps pour $a/r=0$ .....	46
<b>Figure III.8</b> : Evolution de la rigidité en fonction de temps pour $a/r=0.3$ .....	47
<b>Figure III.9</b> : Evolution de la rigidité en fonction de temps pour $a/r=0.5$ .....	47
<b>Figure III.10</b> : Evolution de la rigidité en fonction de temps en pour $a/r=0.7$ .....	47
<b>Figure III.11</b> : Variation de la réponse vibratoire en fonction de la vitesse de rotation pour $a/r=0$ .....	49
<b>Figure III.12</b> : Variation de la réponse vibratoire en fonction de la vitesse de rotation pour $a/r=0.3$ .....	50

<b>Figure III.13</b> : Variation de la réponse vibratoire en fonction de la vitesse de rotation pour $a/r=0.5$	50
<b>Figure III.14</b> : Variation de la réponse vibratoire en fonction de la vitesse de rotation pour $a/r=0.7$	51
<b>Figure III.15</b> : Variation de la réponse fréquentielle en fonction de la vitesse de rotation pour $a/r=0$	52
<b>Figure III.16</b> : Variation de la réponse fréquentielle en fonction de la vitesse de rotation pour $a/r=0.3$	53
<b>Figure III.17</b> : Variation de la réponse fréquentielle en fonction de la vitesse de rotation pour $a/r=0.5$	53
<b>Figure III.18</b> : Variation de la réponse fréquentielle en fonction de la vitesse de rotation pour $a/r=0.7$	54

## Liste des tableaux

<b>Table I.1</b> : Différents types de fissuration .....	13
<b>Table III.1</b> : Caractéristiques géométries .....	42
<b>Table III.2</b> : la rigidité et leur dépendance à la profondeur de la fissurée .....	44
<b>Table III.3</b> : la rigidité en fonction de $a/r$ selon axe X.....	48
<b>Table III.4</b> : la rigidité en fonction de $a/r$ selon axe Y.....	48
<b>Table III.5</b> : Comparaisons la rigidité en fonction de $a/r$ .....	48
<b>Table III.6</b> : Comparaisons La réponse fréquentielle (A) en fonction du rapport $a/r$ .....	54

## **Introduction Générale**

### **Introduction générale**

L'un des scénarios catastrophiques pour les machines tournantes est la cassure des lignes d'arbres, sous l'effet de la propagation des fissures non détectées. La propagation des fissures de ses derniers peut avoir des effets néfastes sur le comportement dynamique des machines tournantes et leur fiabilité.

En fait, l'initiation et la propagation d'une fissure dans les arbres tournants est un processus complexe résultant d'imperfections d'usinage, des entailles et des rainures, ou à cause des facteurs tels que le fretting et/ou les facteurs métallurgiques tels que des défauts de forgeage, ils peuvent être aussi causées par des augmentations de contraintes mécaniques. L'étude du comportement dynamique d'une ligne d'arbre fissurée fait l'objet de nombreux travaux de recherches. En effet, la connaissance du comportement vibratoire des arbres fissurés a permis de reconnaître l'effet de l'évolution, de la taille de fissure sur la rigidité et le comportement dynamique de l'arbre tournant, surtout lors de passage des vitesses critiques. La conception des machines tournantes nécessite une modélisation fiable suites aux effets néfastes de cassure de ligne d'arbre.

Dans ce contexte, nous avons mené ce modeste travail pour étudier l'effet de fissure de type transversale sur les rigidités équivalentes et le comportement dynamique d'une ligne d'arbre flexible fissurée supportée par deux paliers rigides en régime transitoire. Pour cela, un modèle mathématique simplifié de rotor appelé modèle de Jeffcott a été choisi. Il s'agit d'un arbre flexible fissuré entre deux paliers rigides, comportant un disque muni d'un balourd. Les résultats obtenus constituent une contribution intéressante aux concepteurs des machines tournantes.

La contribution à l'étude du comportement dynamique d'une ligne d'arbre flexible fissurée fera l'objectif de cette étude, dans cette intention, ce mémoire est composé de trois parties :

Le premier chapitre est consacré à l'étude bibliographique résumant les publications principales et les travaux les plus significatifs concernant la dynamique du rotor fissuré. Au surplus, le deuxième chapitre concerne plus spécialement deux modèles mathématiques, afin de décrire le comportement dynamique d'une ligne d'arbre flexible fissurée supportée par deux paliers rigides, comportant un disque soumis à une excitation de type de balourd en régime transitoire, un modèle simplifié de rotor appelé modèle de Jeffcott est un autre modèle méthode des éléments finies. Le troisième chapitre présente les résultats obtenus à partir de l'étude du comportement dynamique d'une ligne d'arbre flexible fissurée supportée par deux paliers rigides en régime transitoire, pour cela un programme écrit en langage Matlab/Simulink a été développé afin d'étudier l'effet de

## **Introduction Générale**

fissure sur le comportement vibratoire de l'arbre fissurée de type transitoire, cette étude est basée sur le modèle de Jeffcott présenté dans le chapitre précédent. Enfin, une conclusion générale, qui résume les résultats obtenus la rigidité diminue lorsque le rapport de la profondeur de fissure augmente.

# CHAPITRE I : Etude bibliographique

**I.1)Introduction**

Le premier chapitre englobe des généralités sur les rotors par une étude bibliographique, des travaux réalisés par divers chercheurs sur le comportement dynamique d'une ligne d'arbre flexible fissurée afin d'apprendre l'influence de la profondeur de la fissure sur l'arbre.

**I.2)Etat de l'art sur les rotors fissures**

Les rotors fissurés font l'objet d'études et de recherches. Il semble que le premier article sur les structures fissurées a été publié en 1957. Mais la recherche sur les « arbres fissurés en rotation a débuté en 1976 avec des grands chercheurs comme ‘Mayes, I.W., Davies, W.G.R ; Henry, T.A., Okah-Avae ; Friswell M., Penny J et Erwin Kramer’’. Des recherches importantes ont été réalisées au cours de ces années. La connaissance du comportement dynamique des arbres fissurés a permis de reconnaître la présence d'une fissure et d'arrêter le rotor à temps avant la défaillance catastrophique. Lorsqu'une fissure est détectée, le rotor fissuré est remplacé par un autre rotor, et le temps d'arrêt de la machine et de rechange de l'arbre est compris entre quelques jours à quelques semaines. Le temps d'arrêt de la machine conduit à des pertes économiques considérables.

À partir de cette recherche bibliographique sur les rotors fissurés, nous pouvons citer les remarques suivantes :

- Plusieurs techniques ont été utilisées pour l'étude des défauts naissant dans les rotors, l'analyse vibratoire reste la principale technique de maintenance prédictive utilisée.
- La fissure transversale est le type le plus étudié par les chercheurs, car le comportement dynamique de la machine est considérablement influencé par son apparition.
- La présence des fissures dans les rotors influent sur le comportement dynamique de ces derniers, la rigidité de l'arbre diminue à cause de la réduction de section transversale de la fissure ce qui influe sur les paramètres modaux du rotor (fréquences propres, amplitudes, orbites, modes propres). L'étude de ces derniers permet d'identifier la présence, localisation et la profondeur de la fissure.
- Les principales techniques utilisées pour formuler la variation de la rigidité de l'arbre, en utilisant Simulink, sont la méthode de flexibilité locale et la méthode de la rigidité variable dans le temps (time-varying stiffness). La méthode de la flexibilité locale est la technique la plus utilisée pour formuler la matrice de rigidité d'un élément fissuré du rotor.

**I.2.1)Revue historique**

Le domaine de la dynamique des rotors est devenu dans ses dernières années un élément indispensable et très important pour de nombreux chercheurs dans l'ingénierie, nous en citons quelques-uns :

Westmann et al **1967** [1] leurs études s'intéresse à la solution des problèmes de valeurs limites mixtes résultant du cisaillement longitudinal et de la torsion et de la flexion de Saint-Venant des poutres prismatiques fissurées. Les éléments considérés ont une section transversale rectangulaire avec des fissures à bords plans s'étendant sur la longueur de la poutre. Le problème est réduit à une paire d'équations à double série.

Mayes et al **1976** [2] ont analysé la présence de fissures transversales dans une colonne tournante. L'article aborde les deux questions distinctes concernant les changements dans les caractéristiques morphologiques et l'effet de la respiration des fissures sur la réponse dynamique pendant la procédure. De plus, l'évolution de l'orbite du rift a été étudiée à environ la moitié de la fréquence de la première résonance. La réponse vibratoire au vertige avec fissures respiratoires est évaluée en augmentant la dureté variable.

Les études de Dimarogonas et al **1983** [3] présentent une certaine réponse dynamique particulière due à la flexibilité locale de la section fissurée. Dans cette réponse, la plupart des caractéristiques de la réponse d'un arbre ayant des moments d'inertie différents peuvent être identifiées. De plus, le comportement non linéaire de la fissure de fermeture introduit les caractéristiques des systèmes non linéaires. Le système peut être considéré comme bi-linéaire et des méthodes analytiques peuvent être appliquées. Solution est développée pour le cas où la fonction de flexibilité locale est trouvée expérimentalement.

I.W. Mayes et al **1984** [4] ont étudié la méthode d'approximation successive qui permet à calculer la réponse vibratoire à une fissure d'un turbogénérateur. Il n'y a pas un grand changement de la méthode de calcul par rapport à d'autre méthode tandis que la précision est limitée par les problèmes normaux inhérents à toute modélisation de la dynamique des rotors qu'en raison de l'auto-poids. La différence est définie en poids.

Wauer J et al **1990** [4] ont fait l'étude d'une réalisation basée sur la recherche expérimentale détaillées (mais quasi-statiques). Ils ont formulé dans les coordonnées stationnaires et les appliquer dans une turbine pratique rotors.

Erwin Krämer (auth.) et al (1993) [5]présentent dans leurs articles une recherche expérimentale de l'effet de fissure sur l'arbre flexible, leurs études sont basées sur le modèle de Jeffcott.

Dong et al **2004** [6] ont décrit l'accouplement entre les vibrations longitudinales, latérales et de torsion pour un arbre fissuré en rotation. Ces mécanismes de couplage ont été étudié avec un modèle de fissure non linéaire dépendant de la réponse. La plupart des travaux antérieurs sur les vibrations couplées dues aux fissures ont été réalisés soit sur un arbre immobile, soit sur un arbre rotatif avec un modèle de fissures ouvertes. Les composantes de la demande montrent une augmentation ou diminué en taille de la fissure notable.

Mohammad et al **2010, 2011** [7] [8] étudient un système avec une fissure, leurs résultats montrent qu'il y a de grandes valeurs d'amplitudes de vibration dans la zone critiques pour une profondeur de la fissure et une vitesse de rotation légère qui mène à un déséquilibre dans le système. La modélisation est faite par éléments finis d'un rotor fissuré symétrique, les fortes amplitudes de vibration du tourbillon arrière apparaissent à des profondeurs de fissure plus précoces que celles du tourbillon avant pour les deux modèles de fissure. Les pics de résonance aux deuxième, troisième et quatrième vitesse sous-critiques apparaissent à mesure que la profondeur de la fissure augmente. Mohammad et al **2013** [9] font l'analyse des vibrations des systèmes rotatifs contenant des fissures. La modélisation est faite par éléments finis du rotor fissuré asymétrique, la matrice de flexibilité de l'élément fissuré est calculée avec des limites d'intégration modifiées, ce qui est plus précis que les méthodes conventionnelles. L'effet de cette modification sur les coefficients de la matrice de flexibilité est présenté pour un système à rotor simple contenant des fissures ouvertes. Pour modéliser le comportement de respiration des fissures, Les résultats ont montré que la détection de la fissure au démarrage est plus facile.

Z Y Lu et al **2016** [10] ont étudié la réponse vibratoire d'un rotor fissuré en condition statique et rotative à travers le diagramme de Campbell. Une fissure ouverte dans le rotor modifie sa rigidité. L'effet de ce phénomène est observé sur la fréquence naturelle du système fissuré qui augmente par rapport à celle du rotor non fissuré. Des travaux expérimentaux et de simulation sont effectués en condition statique pour étudier la fréquence naturelle du rotor.

### **I.3) Paramétrés influent sur le comportement dynamique des rotors**

- Propriétés mécaniques du matériau de l'arbre, telle que rotor fissure en fonctionnement [11]
- ❖ Propriétés géométriques et la répartition de la masse.
- ❖ Nombre, type et comportement des paliers.
- ❖ Précontraintes mécaniques et les charges statiques.
- ❖ Amortissement (interne ou externe)
- ❖ Imperfections locales, telles que les défauts, les fissures, les microfissures de fatigue, etc., qui affectent l'intégrité structurelle de l'arbre.

### **I.4) Notion sur les rotors industriels**

- arbres
- paliers
- disques
- balourds

**I.4.1) Type d'arbres**

En dynamique des rotors on distingue généralement deux types de rotors.

**I.4.1.1) L'arbre rigide**

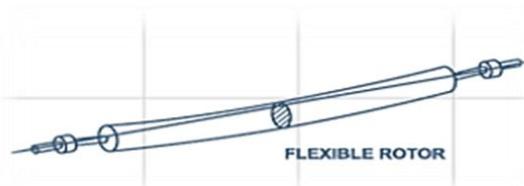
Un rotor est dit rigide si les éléments tournants ne déforment pas lorsqu'il tourne à des vitesses sensiblement inférieures à la vitesse critique qui provoque la flexion de l'arbre à cause de sa grande rigidité, la flèche de l'arbre est très faible (Figure I.1).



**Figure I.1 :** arbre rigide [11]

**I.4.1.2) L'arbre flexible**

Un rotor est dit flexible si la flèche (déformée) de l'arbre est importante. Généralement elle est due au changement de vitesse qui produit une force centrifuge qui provoque la flexion ou la torsion de l'arbre (Figure I.2) [12].



**Figure I.2 :** arbre flexible [1]

**I.4.2) Type de paliers**

Les paliers sont des éléments essentiels qui ont pour but le support, le guidage en rotation et ils reçoivent les efforts que subissent les éléments du rotor.

Suivant différents paramètres tel que la nature du frottement entre les surfaces actives, la direction des charges appliquées (radiale et/ou axiale), la lubrification et la composition d'un roulement on distingue divers types de paliers, généralement lisses ou à roulement [1].

Il existe quatre principaux types de réalisation pour le guidage en rotation :

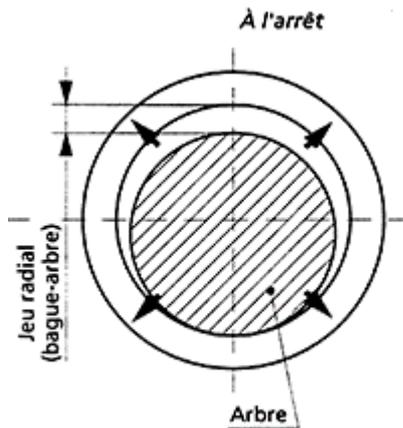
- 1) Par contact direct;
- 2) Par interposition des bagues;
- 3) Par interposition d'un film d'huile ;
- 4) Par interposition d'éléments roulant.

Le critère de choix d'une solution se fait en fonction des conditions de fonctionnement :

- Précision du guidage ;
- Vitesse de rotation ;
- Efforts admissibles.

### I.4.2.1) Contact direct

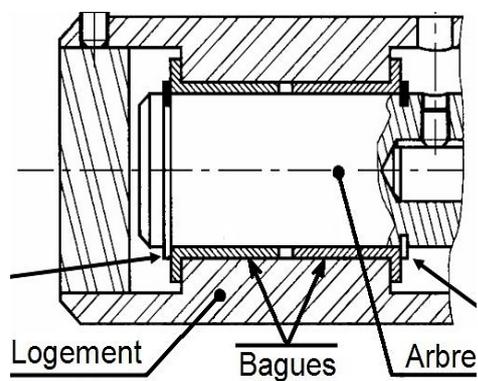
Le guidage en rotation des surfaces cylindriques (arbre/logement) est obtenu par contact direct (Figure I.3).



**Figure I.3 :** Contact direct [3]

### I.4.2.2) Interposition des bagues

Le guidage en rotation est assuré par des bagues de frottement (Figure I.4) sur lesquelles se reportent l'usure (Figure I.4).



**Figure I.4 :** Interposition des bagues [4]

## I.4.2.3) Montages des bagues

Le coussinet est monté serré dans l'alésage (logement) et glissant sur l'arbre (Figure I.5).

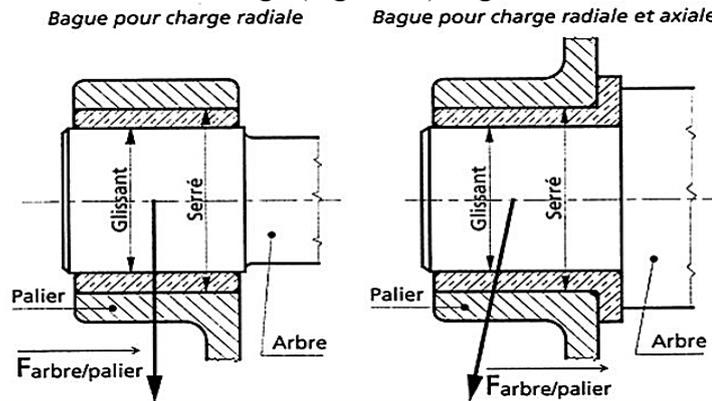


Figure I.5 : Montage des bagues [3]

Les bagues sont de formes tubulaires, avec ou sans collerette (Figure I.6-7) et construites à partir des matériaux présentant de bonnes qualités (Bronze, étain, etc.) utilisés à sec ou lubrifiés.



Figure I.6 : Bague avec et sans collerette sec [5]



Figure I.7 : Bague avec et sans collerette lubrifiée [6]

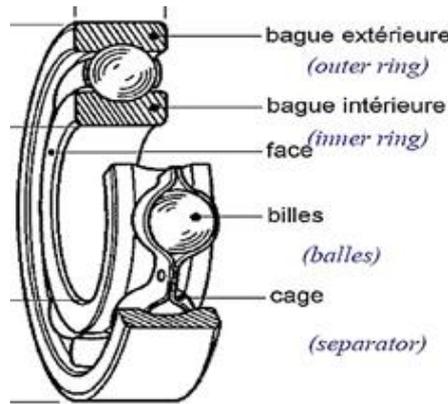
## I.4.2.4) Interposition d'éléments roulants

C'était au 15<sup>ème</sup> siècle que Léonardo de Vinci théorisa la géométrie des roulements (Figure I.8).

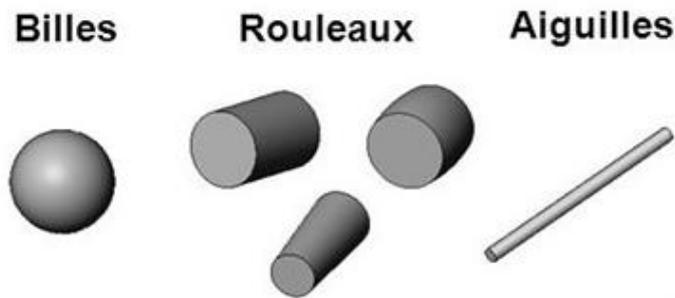
Les roulements sont généralement composés d'une bague intérieure et d'une bague extérieure, d'éléments roulants (billes ou rouleaux) et d'une cage.

- Bague extérieure : liée à l'alésage (logement du roulement) ;
- Bague intérieur : liée à l'arbre ;
- Cage : assure le maintien des éléments roulants ;

Eléments roulants : situés entre les deux bagues ; ils peuvent être des billes, rouleaux et aiguilles (Figure I.9).



**Figure I.8 :** Composition d'un roulement [7]

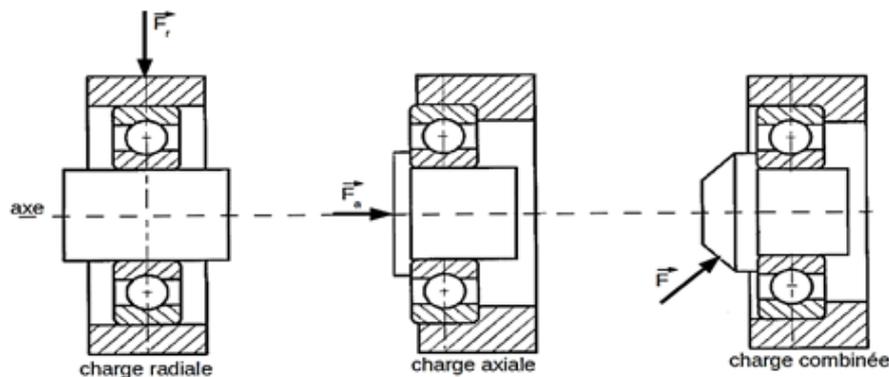


**Figure I.9 :** Eléments roulants [7]

Les paliers à roulement assurent un bon guidage en rotation du rotor en plus de leur fiabilité et sécurité. On distingue plusieurs types de roulement (à bille, à rouleau et à aiguille).

**A) Charges supportées par un roulement**

Les efforts supportés par un roulement peuvent être radiales, axiales ou combinées comme il est montré dans la (Figure I.10).



**Figure I.10 :** Les charges supportées par un roulement [8]

**B) Classement des roulements**

Les roulements sont classés en fonction des charges qu'ils peuvent supporter (Figure I.11).

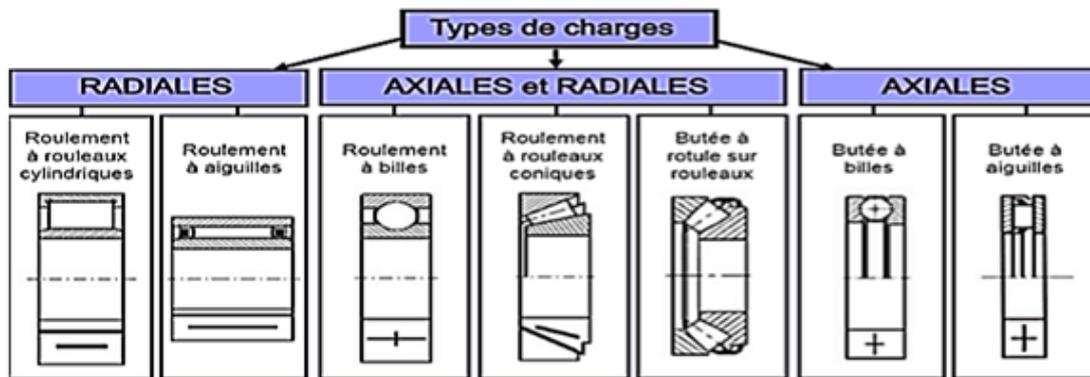


Figure I.11 : Types de charges [8]

#### I.4.3.1) Interposition d'un film d'huile

Deux types de guidages en rotation utilisent l'interposition d'un film d'huile entre arbre et alésage (Les paliers hydrodynamiques et les paliers hydrostatiques).

##### A) Palier hydrodynamique

Le film d'huile se crée lorsque la vitesse de rotation de l'arbre est suffisante.

##### A.1) Coussinets autolubrifiants

Les coussinets autolubrifiants sont obtenus à partir de métal fritté (compression de poudre à température élevée) Dans les paliers hydrodynamiques l'alésage ou le coussinet possède une rainure qui assure l'arrivée d'un lubrifiant sous pression. Avec incorporation de lubrifiant dans les porosités. Dans le cas d'huile, la structure comparable à une éponge restitue l'huile en fonctionnement et l'absorbe à l'arrêt (Figure I.12).

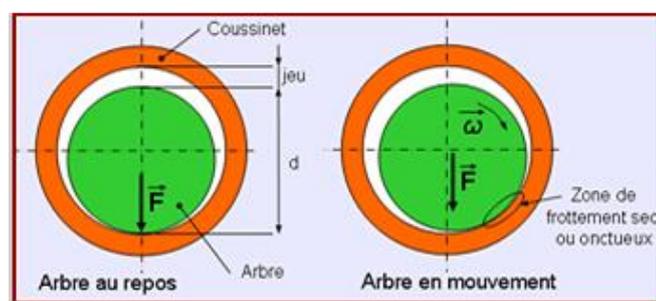
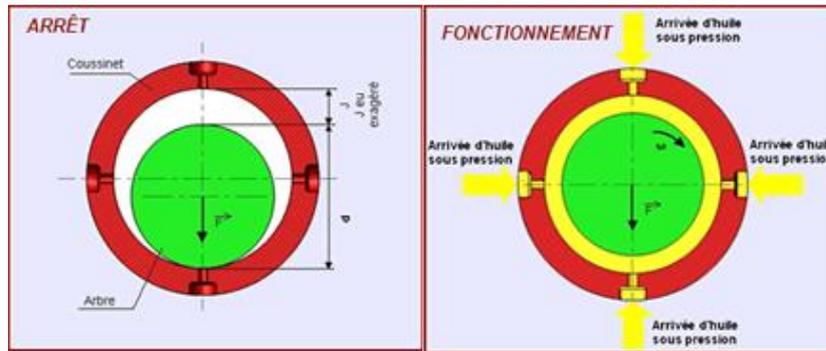


Figure I.12 : Principe de Fonctionnement d'un Coussinet autolubrifiant [9]

##### B) Palier hydrostatique

Le principe de fonctionnement est différent de celui des paliers hydrodynamiques, la pression est fournie par une pompe qui envoie le fluide sous pression dans quatre chambres. L'arbre est sustenté au centre grâce à la pression du fluide. La création du film d'huile est produite par la mise en pression autour de l'arbre (Figure I.13).



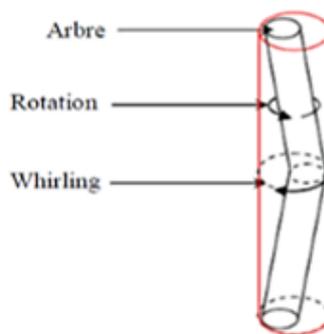
**Figure I.13** : Principe du fonctionnement d'un palier hydrostatique [9]

### I.5) Type de vibrations

Les types de vibrations rencontrés se divisent en quatre catégories :

#### I.5.1) Vibration en flexion des arbres

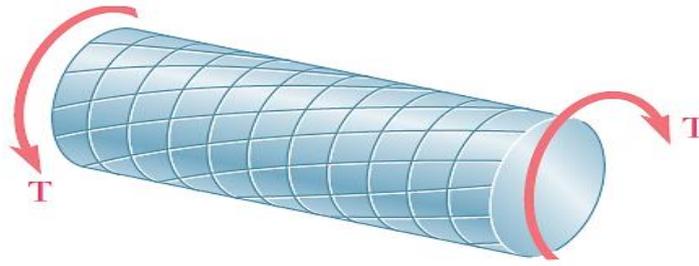
Quand un arbre tourne il peut avoir des oscillations transversales. Si l'arbre est déséquilibré la force centrifuge provoque la vibration et la flexion de ce dernier. Quand il tourne à des vitesses proches ou égales à la vitesse critique il aura des amplifications puis un phénomène de « tournoiement » dit whirling qui présente un danger majeur pour les machines tournantes. L'arbre tourbillonne (whirls) dans son plan de rotation (plan perpendiculaire à l'axe de rotation) en maintenant sa déviation qui varie le long de l'axe. La façon dont l'arbre tourbillonne dépend de la rigidité et/ou la flexibilité de l'arbre (Figure I.14).



**Figure I.14** : Mouvement de l'arbre (Rotation + whirling) [1]

#### I.5.2) Vibration en torsion des arbres

La déformation de torsion se produit lorsque les vibrations de chaque partie de l'arbre sont tordues le long de l'axe de rotation (Figure I.15). L'apparition du problème de vibration de torsion est relativement faible par rapport aux vibrations de flexion dans les machines tournantes. Le changement des forces électromagnétiques dans les moteurs ou bien le changement du couple moteur peut également induire des vibrations de torsion [13].



**Figure I.15** : Arbre en torsion [13]

### I.5.3) Vibration longitudinale des arbres

Ce type de vibration n'apparaît généralement pas à cause de la grande rigidité longitudinale de l'arbre.

### I.6) Mécanique linéaire de la rupture

La mécanique de la rupture est la science qui étudie le comportement des structures fissurées. Il s'agit d'un domaine scientifique relativement récent puisqu'il est apparu après la première guerre mondiale, notamment avec les études de Griffith en 1920 et d'Irwin et Rice (années 1950-1960). Cette théorie postule l'existence d'une énergie de cohésion, qui ne dépend que du matériau. Lorsqu'une fissure se propage, l'énergie libérée par la structure est appelée taux de restitution d'énergie. On considère qu'il y a rupture si le taux de restitution d'énergie est supérieur à l'énergie de cohésion.

En mécanique de la rupture, l'ensemble des matériaux est divisé en 2 catégories. Ceux dont la rupture est dite fragile, c'est-à-dire ceux où la rupture se produit pour une contrainte inférieure à celle de la limite d'élasticité [donc avant un certain nombre de phénomènes non-linéaire comme la plasticité ou les grandes déformations]. L'étude des matériaux fragiles s'appelle la mécanique linéaire de la rupture. Les matériaux dont la rupture n'est pas fragile sont dits ductiles (Tableau I.1).

<b>Loi de Comportement</b>	<b>Brutale</b>	<b>Progressive</b>
<b>Elastique</b>	<b>Rupture fragile</b>	<b>Rupture par fatigue à grand nombre de cycle</b>
<b>Elasto-plastique</b>	<b>Rupture ductile</b>	<b>Rupture par fatigue oligo-cyclique</b>

**Table I.1** : Différents types de fissuration [13]

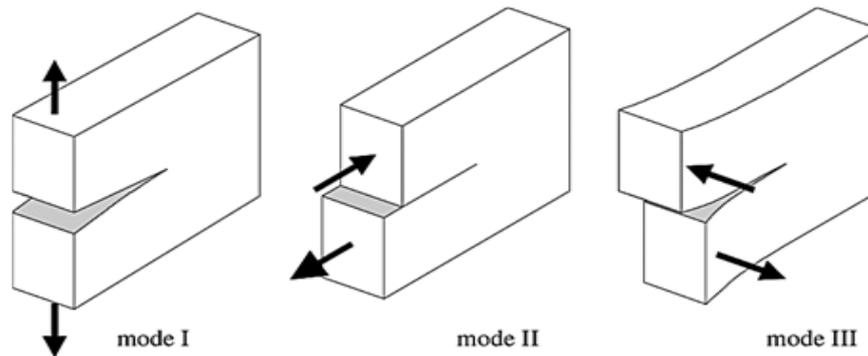
Il peut sembler paradoxal de modéliser le comportement relatif à la fissuration par un modèle linéaire. En effet, la présence de fissure implique celle d'une singularité, aussi la contrainte tend vers l'infini près du fond de fissure. Or le modèle linéaire est obtenu en faisant l'hypothèse des petits déplacements et des petites déformations, ce qui montre une contradiction évidente.

Cependant, cette théorie donne des résultats intéressants, réalistes et parfois suffisants selon le type d'application visée.

La mécanique de la rupture trouve notamment ses applications dans les domaines aéronautiques, de construction navale, de génie civil, et dans les activités nucléaires.

### **I.6.1) Mode d'ouverture de la fissure**

IL existe trois modes d'ouverture de la fissure qui dépendent de la direction des efforts appliqués au niveau de la fissure. Ces modes respectivement mode I, mode II et mode III (figure I.16).



**Figure I.16 : Mode d'ouverture de la fissure [14]**

#### **I.6.1.1) Mode I**

Le mode I qui est aussi appelé mode d'ouverture est caractérisé par le déplacement des deux surfaces de la fissure de part et d'autre du plan.

#### **I.6.1.2) Mode II**

Ce mode est appelé mode de glissement ; il est caractérisé par le glissement des deux surfaces de la fissure l'une par rapport à l'autre, dans le plan suivant à la direction inverse.

#### **I.6.1.3) Mode III**

Ce mode est appelé mode de déchirement, il est caractérisé par le glissement des deux surfaces de la fissure, l'une par rapport à l'autre, dans le plan suivant la direction inverse des fissures dans les arbres des rotors.

### **I.7) Méthodes numériques pour la modélisation des fissures**

A côté des expériences de ruptures, qui permettent de connaître la résistance des matériaux, la simulation numérique apparaît comme un outil de tout premier choix, et de modifier les paramètres physiques, dans les seules limites du logiciel. Ainsi la simulation numérique permet de réduire le nombre nécessaire.

### I.8) Causes des fissures dans les arbres des rotors

L'initiation et la propagation d'une fissure dans les arbres est un processus complexe résultant d'imperfections d'usinage, les entailles et les rainures, ou à cause des facteurs tels que le fretting et/ou les facteurs métallurgiques tels que des défauts de forgeage, les fissures peuvent être aussi causées par des augmentations de contraintes mécaniques.

Les arbres en rotation sont soumis à différents types de sollicitations mécaniques, telles que la flexion, la torsion, la traction, le cisaillement et les charges statiques et dynamiques.

Lorsque la fissure atteint une certaine profondeur, l'arbre ne peut plus supporter les charges statiques et dynamiques, et par conséquent, l'arbre subit souvent une fracture soudaine.

Dans certaines conditions, la propagation de la fissure peut être accélérée à cause :

- Des défauts de fonctionnement
- Des contraintes thermiques.
- Des conditions environnementales telles que la présence d'un milieu corrosif.
- De la présence de contraintes résiduelles ou de non homogénéité dans le matériau du rotor
- Des conditions métallurgiques

### I.9) Types des fissures dans les arbres selon leurs orientations

A la base de la géométrie des fissures dans les arbres des rotors, les fissures sont classées en trois groupes comme suit :

#### I.9.1) Fissure transversale

La fissure transversale reste le type de fissure le plus important car la machine est considérablement influencée par son apparition. La fissure transversale se développe si l'arbre est uniquement soumis à des contraintes de flexion. Ce type des fissures est perpendiculaire à l'axe de l'arbre (Figure I.17), elle réduit la section transversale de l'arbre et entraînent des dommages importants aux rotors. Ce type de fissure est le défaut le plus grave et le plus courant. Ainsi, il a été largement étudié par les chercheurs anciens et actuels [11].

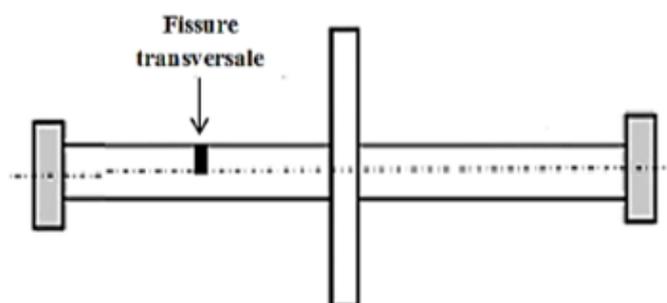


Figure I.17 : Fissure transversale [11]

### I.9.2) Fissure longitudinale

Ce type de fissure est parallèle à l'axe de l'arbre, il est relativement rare et moins grave (Figure I.17).

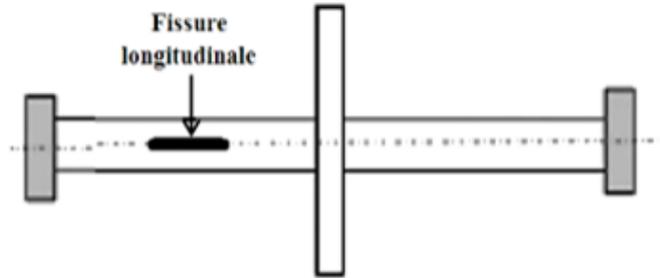


Figure I.18 : Fissure longitudinale [11]

### I.9.3) Fissure inclinée

Les fissures inclinées sont identiques aux « fissures hélicoïdales ». Ce type de fissure fait un angle avec l'axe de l'arbre (Figure I.19), mais pourrait apparaître dans les arbres des machines industrielles et influencent principalement le comportement en torsion du rotor de manière assez similaire à l'effet des fissures transversales sur le comportement en flexion.

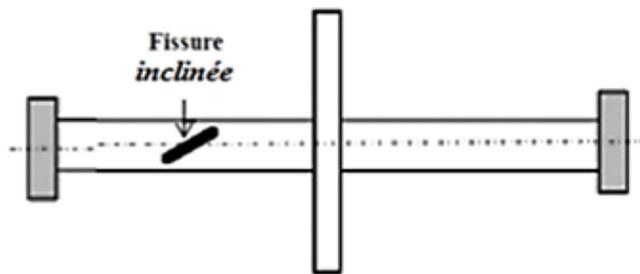
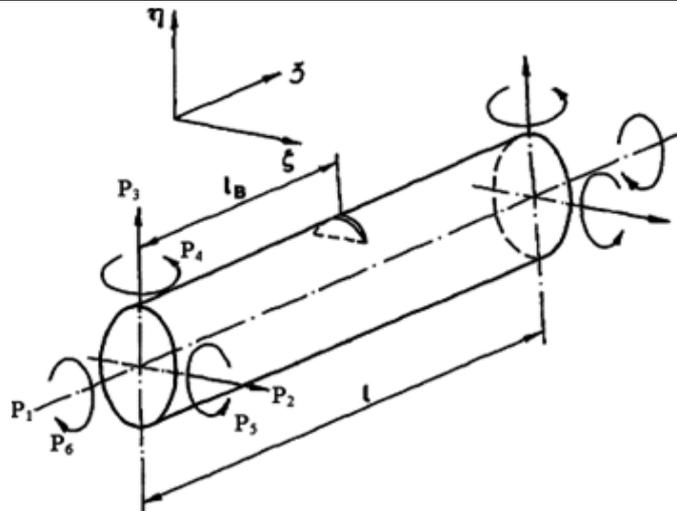


Figure I.19 : Fissure inclinée [11]

### I.10) Flexibilité locale d'un rotor fissuré

La présence de fissures dans une structure affecte les paramètres dynamiques, la rigidité de la structure au niveau de la fissure. Cette réduction de rigidité est exprimée par une flexibilité locale qui s'ajoute à la flexibilité de la structure. La flexibilité locale présentée par une matrice ; matrice de flexibilité locale dont la dimension dépend du nombre de degré de liberté considéré. Les coefficients de la matrice sont fonction de la profondeur et de la position de la fissure ainsi que des propriétés mécaniques et géométriques de la structure (Figure I.20).



**Figure I.20 :** Géométrie d'une fissure ouverte et localisation sur l'arbre [14]

### **I.11) Etude paramétrique d'un rotor fissuré tournant**

Un modèle mathématique a été développé pour étudier la dynamique des rotors fissurés. Ce modèle a été traduit numériquement par des programmes informatiques dans le but de déterminer les paramètres dynamiques (fréquences naturelles, déformées modales et fonctionnement).

### **I.12) Outils de simulation matlab/simulink**

#### **I.12.1) Matlab**

Un système interactif et convivial de calcul numérique et de visualisation graphique, destiné aux ingénieurs et scientifiques. Il possède un langage de programmation à la fois puissant et simple d'utilisation. Il permet d'exprimer les problèmes et solutions d'une façon aisée, contrairement à d'autres langages de programmation. Il intègre des fonctions d'analyse numérique, de calcul matriciel, de traitement de signal, de visualisation graphique 2D et 3D, etc. Il peut être utilisé de façon interactive ou en mode programmation. En mode interactif, l'utilisateur a la possibilité de réaliser rapidement des calculs sophistiqués et d'en présenter les résultats sous forme numérique ou graphique. En mode programmation, il est possible d'écrire des scripts (programmes) comme avec d'autres langages.

#### **I.12.1.1) Programme Matlab**

Grace aux deux programmes MATLAB, le calcul d'équation de mouvement et de formulation des Matrices, qu'on a établis, l'obtention des équations de mouvement et leur formulation en système matriciel sera de manière paramétrée en changeant les paramètres comme voulu de manière rapide avec un calcul sans faute et une efficacité nous permettant d'avoir les résultats de plusieurs cas pour mieux accomplir notre étude.

$$[M]\ddot{x} + [C]\dot{x} + [K]x = \{F\}$$

[M] : Matrice d'inertie.

[K] : Matrice de rigidité du rotor

[C] : Matrice d'amortissement du rotor

{F} : vecteur les forces d'excitation du rotor

### **I.12.2)Simulink**

SIMULINK est un programme pour la simulation des systèmes dynamiques linéaires et non linéaires ; une extension de MATLAB, dans laquelle la définition des modèles se fait par schémas blocs (diagramme structurel). Le diagramme structurel permet la représentation graphique d'un système d'équations linéaires et non linéaires. Il met en évidence la structure du système et permet de visualiser les interactions entre les différentes grandeurs internes et externes. On distingue alors particulièrement bien les contre-réactions, les couplages réciproques, les non-linéarités, etc. SIMULINK possède une interface graphique pour visualiser les résultats sous forme de graphiques ou de valeurs numériques en cours de simulation.

#### **I.12.2.1)Modélisation Simulink**

Après obtention des résultats mathématiques des matrices décrivant le comportement vibratoire des déplacements de chaque cas, on les modélise avec SIMULINK pour avoir une simulation de ce comportement suivant les sollicitations induites par le profil de problème de la fissure dans un rotor.

#### **I.12.2.2)Simulink des profils**

Le SIMULINK programmé Profil rotor fissuré aide à entrer chaque profil de rotor fissuré dépend de l'entaille de la fissure (chaque cas). Ce SIMULINK utilise les données du programme « Paramètres » qui englobe les données des bosses et la vitesse de la rotation du rotor. A chaque changement de données il faut relancer les étapes.

### **I.13)Conclusion**

Dans Ce chapitre, la première partie détaille une synthèse bibliographique abordés par plusieurs chercheurs qui travaillent sur le comportement dynamique d'un rotor fissuré. Ensuite, la deuxième partie est constituée des divers types de vibrations ainsi que les types de fissure en arrivant au mode d'ouverture de ses derniers. Pour en finir une description sur les outils de simulation Matlab/Simulink.

# **CHAPITRE II : Modélisation mathématique d'une ligne d'arbre fissurée**

## II.1) Introduction

Ce chapitre est consacré à présenter deux modèles mathématiques pour décrire le comportement dynamique d'une ligne d'arbre flexible fissurée supportée par deux paliers rigides, comportant un disque soumis à une excitation de type de balourd en régime transitoire, en dépendant un modèle simplifié de rotor appelé modèle de Jeffcott et un modèle numérique en étudié la méthode des éléments finis.

## II.2) Formulation de l'équation de mouvement

Pour la formulation des équations de mouvements qui étudient le comportement dynamique d'un système, trois méthodes peuvent être retenues : la première méthode est basée sur le principe fondamental de la dynamique (la deuxième loi de NEWTON). Cette dernière est simple pour les systèmes à faible degrés de liberté. La nécessité de tenir compte du système de forces, de contraintes et des diagrammes des corps libre dans cette méthode a entraîné des difficultés algébriques pour les systèmes à degrés de liberté plus élevés (MDF). La méthode énergétique ou bien appelée la méthode de Lagrange a surmonté les difficultés, cependant, le principe de l'énergie en termes de coordonnées physiques ne fournit qu'une équation qui limite son utilisation pour les systèmes à un seul degré de liberté (SDF). La méthode des travaux virtuels a dépassé les limitations des deux méthodes précédentes et s'est prouvée être un outil efficace pour les systèmes à plusieurs degrés de liberté, pourtant il ne s'agit pas d'une procédure entièrement scalaire dans la mesure où des considérations vectorielles des forces sont nécessaires pour déterminer le travail Virtuel.

- **Equation de Lagrange**

L'équation de Lagrange est formée par des quantités scalaires de l'énergie cinétique, de l'énergie potentielle et du travail. Ces quantités sont exprimées en termes physiques qui sont les coordonnées généralisées :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} = Q_i \quad (\text{II.1})$$

Le côté gauche de l'équation (II.1) représente une déclaration du principe de conservation de l'énergie, ce qui veut dire ;

$$d(T+U) = 0 \quad (\text{II.2})$$

Admettant que pour les systèmes conservatifs, tous les forces externes et internes ont un potentiel. La somme des énergies cinétique et potentielle est égale à une constante, ce qui implique que la dérivée totale de E doit être nulle.

$$T+U = E \text{ Constant}$$

$$dE = d(T + U) = dT + dU = 0 \tag{II.3}$$

Le membre droit de l'équation Q(i) relié avec le terme du travail effectué par les forces non-potentiellles.

**II.3)Modélisation par la méthode de rotor Jeffcott (modele Jeffcott)**

Depuis 1976 environ, des recherches sur la dynamique des rotors présentant des fissures transversales ont fait l'objet de discussions dans la littérature [16] qui varient en fonction du type de modèle de rotor et du type de fissure. Les éléments suivants sont essentiellement une répétition des résultats de Schmied [17] et représentent les l'état des connaissances sur le sujet.

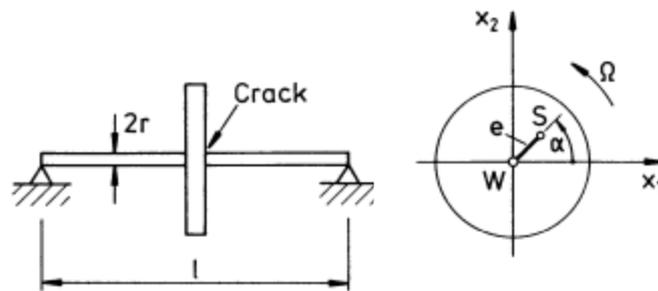
**II.3.1)Modele de Jeffcott rotor**

Le rotor Jeffcott de la Figure II.1 présente une fissure à la position du disque. Avec fissure son équation de mouvement serait

$$\begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{xs} & 0 \\ 0 & C_{ys} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{xs} & 0 \\ 0 & K_{ys} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} me(\dot{\theta}^2 \cos \theta + \ddot{\theta} \sin \theta) \\ me(\dot{\theta}^2 \sin \theta - \ddot{\theta} \cos \theta) \end{Bmatrix} \tag{II.4}$$

**II.3.2)Rotor fissuré**

En raison de la fissure, la rigidité de l'arbre est réduite et dépend également du temps lorsque l'arbre tourne.



**Figure II.1** : Le rotor de Jeffcott avec fissure [15]

$$K = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} \quad \text{Avec :} \quad K = K(t) \tag{II.5}$$

Pour déterminer K(t), il faut considérer l'arbre illustré à la Figure II.2. La fissure prend la Forme d'un segment de cercle, est infiniment mince et de profondeur a. Sous l'effet d'une charge de compression, l'arbre se comporte comme s'il n'avait pas de fissure

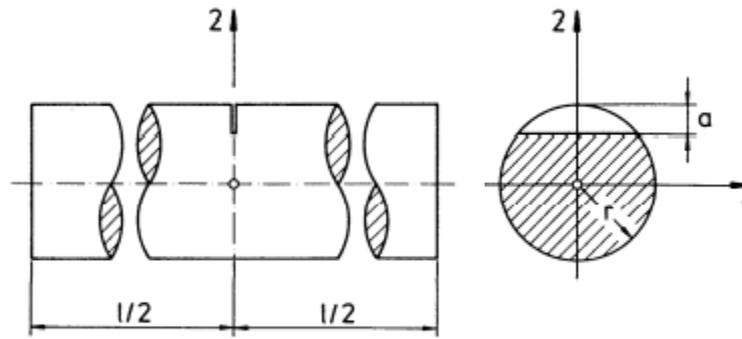


Figure II.2 : Position et géométrie de la fissure [15]

I.3.2.1) Rotor flexible avec un palier rigide

C'est ce que l'on appelle une fissure fermée. Lorsque la fissure est ouverte, elle est traitée comme dans la Figure II.2, avec La zone ombragée n'est opérationnelle. En général, pendant le fonctionnement de l'arbre en permanence change entre ces deux extrêmes et on dit que la fissure respire. Lorsque la fissure est ouverte, la rigidité en flexion est réduite. Laissez le maximum la rigidité doit être  $k_x$  et le minimum  $k_y$  - Ces rigidités dépendront de la profondeur de la fissure, comme le montre les Figure II.4. Les deux diminuent progressivement avec la profondeur. Pour une profondeur de  $< 0,1 r$ , l'influence est très faible, de sorte que les caractéristiques des vibrations ne sont guère influencées. Pour une fissure respiratoire, les raideurs changent entre  $k_0$  et  $k_x$  et entre  $k_0$  et  $k_y$  - L'action respiratoire dépend des forces statiques et dynamiques, et l'équation du mouvement est non linéaire. La linéarité est maintenue, cependant, si l'on suppose une variation cyclique de la respiration.

Ou les données du rapport  $(a/r)$  on  $\frac{a}{r} = 0$  ;  $\frac{a}{r} = 0.5$  et  $\frac{a}{r} = 0.7$  avec  $k_0 = 48 \frac{EI}{l^3}$  (II.6)

$k_0$  : la rigidité de l'arbre sans fissure

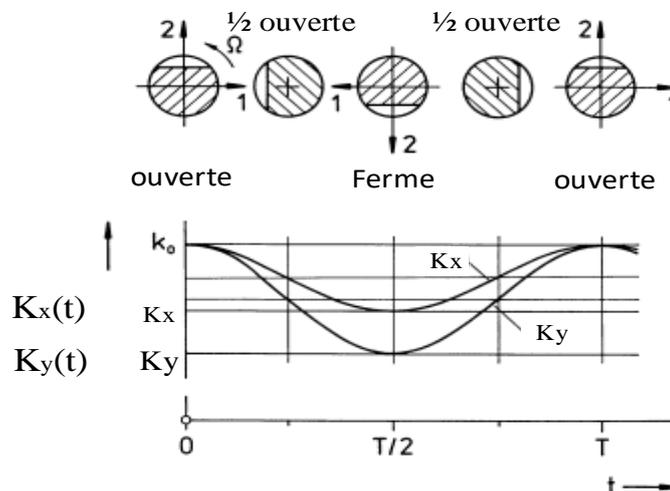


Figure II.3 : la rigidité d'un arbre fissure pour variation harmonieuse [15]

L'hypothèse est une respiration harmonique comme le montre la (figure II.6) ayant une période

$$T = \frac{2\pi}{\theta} \text{ les rigidités deviennent alors}$$

➤ **Schéma de système équivalent** (figure II.3) de rotor de Jeffcott (figure II.1)

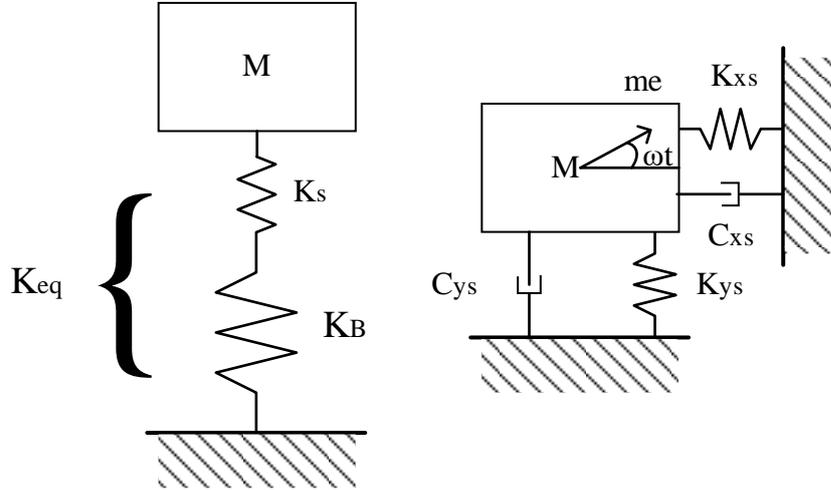


Figure II.4 : Schéma équivalent

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{k_{eq}} = \frac{1}{k_s} + \frac{1}{k_B} \\ \frac{1}{k_{eq}} = \frac{k_B + k_s}{k_s k_B} \\ k_B \gg \gg k_s \\ k_{eq} \simeq \frac{k_s k_B}{k_B} \\ k_{eq} \simeq \frac{k_s k_B}{k_B} \simeq k_s \end{array} \right. \quad (II.7)$$

La rigidité de l'arbre l'équation (II.8) selon deux axes x et y (figure II.3-4)

$$\left\{ \begin{array}{l} k_{xs} = k_{mx} + \Delta k_{xs} \sin(\theta + \frac{\pi}{2}) \\ k_{ys} = k_{my} + \Delta k_{ys} \sin(\theta + \frac{\pi}{2}) \end{array} \right. \quad (II.8)$$

Avec :  $\frac{k_{xs}}{k_0} = k_{xB}$  et  $\frac{k_{ys}}{k_0} = k_{yB}$

$$\left\{ \begin{array}{l} k_{mx} = \frac{1}{2}(k_0 + k_{xs}) \\ k_{my} = \frac{1}{2}(k_0 + k_{ys}) \end{array} \right. \quad (II.9)$$

$$\begin{cases} k_{mx} = \frac{1}{2}(k_0 + k_0 k_{xB}) \\ k_{my} = \frac{1}{2}(k_0 + k_0 k_{yB}) \end{cases} \quad (II.10)$$

$$\begin{cases} k_{mx} = \frac{1}{2}k_0(1 + k_{xB}) \\ k_{my} = \frac{1}{2}k_0(1 + k_{yB}) \end{cases} \quad (II.11)$$

$$\begin{cases} \Delta k_{xs} = \frac{1}{2}k_0(1 - k_{xB}) \\ \Delta k_{ys} = \frac{1}{2}k_0(1 - k_{yB}) \end{cases} \quad (II.12)$$

une telle variation cyclique se produit dans les rigidités d'un arbre horizontal, tournant lentement, en raison de son propre poids. il est démontré que cette représentation donne des résultats utiles pour les rotors lourds même à la résonance, lorsqu'ils sont chargés par une force constante dans la direction et avec le temps. Les rigidités  $k_x(t)$  et  $k_y(t)$  sont valable pour les coordonnées fixées dans le rotor et désignées comme  $x$  et  $y$ . Dans l'ordre pour écrire l'équation du mouvement (II.13-114), cependant, on a besoin de ces rigidités par rapport à coordonnées fixes de l'espace  $X$  et  $Y$ . Ceux-ci peuvent être trouvés en écrivant (Figure II.5).

$$\sum F_{eq} = M \ddot{y} \Leftrightarrow M \ddot{y} = F(t) - C_{ys} \dot{y} - K_{ys} y \Rightarrow M \ddot{y} + C_{ys} \dot{y} + K_{ys} y = F_y(t) \quad (II.13)$$

$$\sum F_{eq} = M \ddot{X} \Leftrightarrow M \ddot{X} = F(t) - C_{xs} \dot{X} - K_{xs} X \Rightarrow M \ddot{X} + C_{xs} \dot{X} + K_{xs} X = F_x(t) \quad (II.14)$$

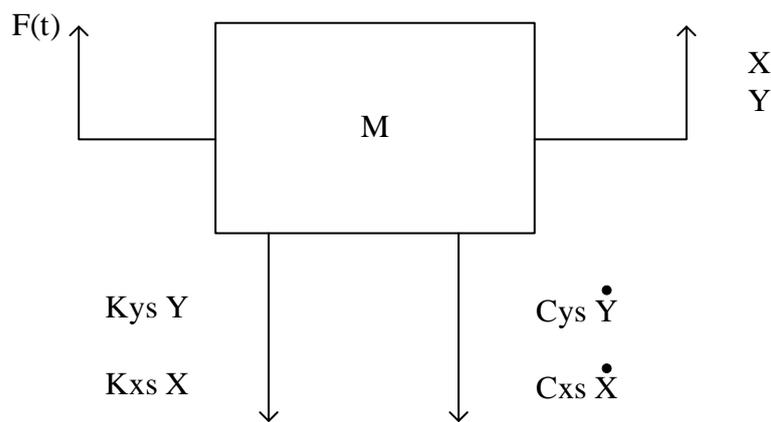


Figure II.5 : Schéma de système équivalent

- L'équation des mouvements d'une linge d'arbre fissurée

$$\begin{cases} M\ddot{x} + C_{xs}\dot{x} + K_{xs}x = me(\dot{\theta}^2 \cos \theta + \ddot{\theta} \sin \theta) \\ M\ddot{y} + C_{ys}\dot{y} + K_{ys}y = me(\dot{\theta}^2 \sin \theta - \ddot{\theta} \cos \theta) \end{cases} \quad (II.15)$$

- Solution de système de l'équations :

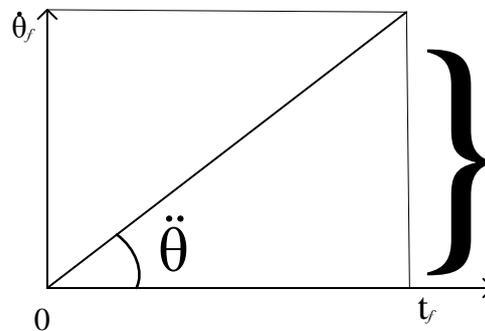
L'équation (II.13) et (II.14) ont obtenu

$$\begin{cases} \ddot{x} = \frac{1}{M} [F_x(t) - C_{xs}\dot{x} - K_{xs}x] \\ \ddot{y} = \frac{1}{M} [F_y(t) - C_{ys}\dot{y} - K_{ys}y] \end{cases} \quad (\text{II.16})$$

**Régime transitoire**

C'est-à-dire débute le démarrage du rotor donc augmentation de la vitesse en fonction de temps (Figure II.6)

$$\begin{cases} \dot{\theta} = \ddot{\theta}t + \dot{\theta}_0 \Leftrightarrow \frac{d\theta}{dt} = \ddot{\theta}t + \dot{\theta}_0 \\ d\theta = (\ddot{\theta}t + \dot{\theta}_0)dt \Rightarrow \int d\theta = \int (\ddot{\theta}t + \dot{\theta}_0)dt \\ \theta = \frac{1}{2}\ddot{\theta}t^2 + \dot{\theta}_0t + \theta_0 \\ \text{des données initial} \rightarrow \text{si} \begin{cases} \theta_0 = 0 \\ \dot{\theta}_0 = 0 \end{cases} \\ \theta = \frac{1}{2}\ddot{\theta}t^2 \end{cases} \quad (\text{II.17})$$



**Figure II.6 :** Vitesse de rotation transitoire

$$\ddot{\theta} = \frac{\dot{\theta}_f - \dot{\theta}_0}{t_f - 0} \Leftrightarrow \ddot{\theta} = \frac{\dot{\theta}_f}{t_f} \quad (\text{II.18})$$

**II.4)Modélisation par la méthode des éléments finis des élément du rotor**

Pour une meilleure modélisation, il faut d'abord définir les différents éléments des rotors (Figure II.7) et connaître les caractéristiques et les hypothèses prises en compte. Chaque élément d'un rotor a une modélisation spécifique.

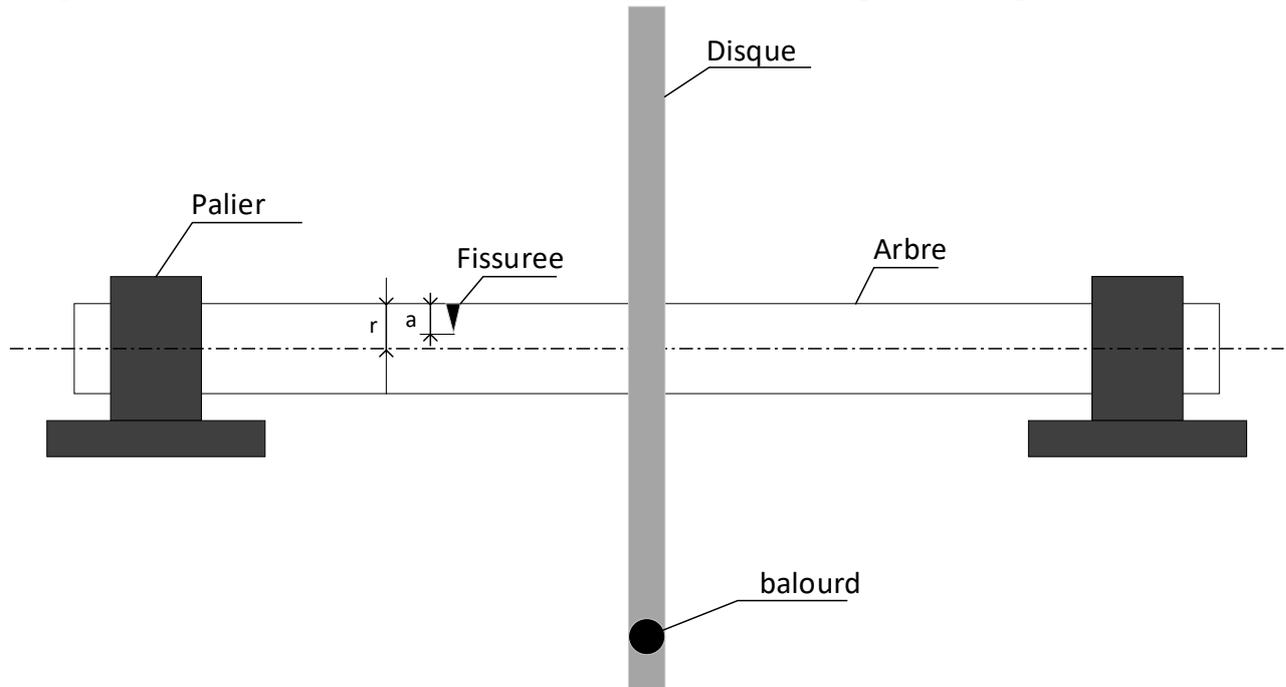


Figure II.7 : Elément d'un rotor fissuré

#### II.4.1) Disque

Le disque est considéré comme étant un corps rigide donc il est caractérisé uniquement par son énergie cinétique. Il est modélisé par un nœud qui possède quatre degrés de liberté (ddl) deux déplacements de translation ( $u$ ,  $w$ ) suivant les axes  $X$  et  $Z$  respectivement et deux rotations  $\theta$  et  $\psi$  autour de ces derniers (figure II.8).

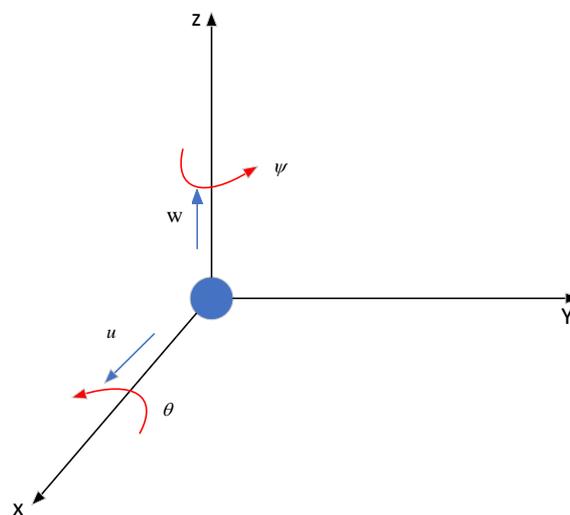


Figure II.8 : Modèle élément fini du disque

Le champ de déplacements nodaux est représenté par le vecteur comme suit :

$$q = [v, w, \theta, \varphi]^T \quad (\text{II.19})$$

- L'énergie cinétique du disque est exprimée par la relation suivants (II.20) :

$$T_d = \frac{1}{2} \left\{ m d (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) + I_{xxd} (\Omega - \theta \sin \varphi)^2 + I'_{yyd} \dot{\theta}^2 \cos^2 \varphi + I'_{zzd} \dot{\varphi}^2 - 2I'_{yzd} \dot{\varphi} \dot{\theta} \cos \varphi \right\} \Big|_{x=xd} \quad (\text{II.20})$$

$I'_{xxd}$ ,  $I'_{yyd}$ ,  $I'_{zzd}$  et  $I'_{yzd}$  sont les moments d'inertie du disque donnés par des relations analogues (II.1), la position sur le rotor (figure II.8).

- L'expression de l'énergie cinétique du disque

$$T_d = \frac{1}{2} m_d (\dot{v}^2 + \dot{w}^2) + \frac{1}{2} \rho I_{1d} (\dot{\varphi}_d^2 + \dot{\theta}_d^2) - \rho I_{od} \Omega \theta_d \varphi_d + \frac{1}{2} \rho I_{od} \ell_e \Omega^2 \quad (\text{II.21})$$

L'application de la méthode énergétique de Lagrange à l'équation (II.21) nous donne une expression (II.22) qui peut être écrite sous la forme matricielle.

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T_d}{\partial \dot{q}_d} \right) - \frac{\partial T_d}{\partial q_d} = [M_d] \{\ddot{q}_d\} + [G_D] \{q_d\} \quad (\text{II.22})$$

Tel que :

$$[M_d] = \begin{bmatrix} m_d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{1d} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{1d} \end{bmatrix} \quad \text{Et} \quad [G_D] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I_{od} \Omega \\ 0 & 0 & I_{od} \Omega & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{II.23})$$

#### II.4.2) Débalancement (balourd)

Le débalancement est une masse  $mb$  excentrée a une distance « d » du centre de gravité d'un rotor comme il est illustré dans la (figure II.9).

Le débalancement est défini par une masse  $m_u$ , située sur le disque à une distance,  $d_u$ , à partir du centre géométrique du rotor (figure II.10), on prend les hypothèse que la masse  $m_u$  demeure toujours dans le plan perpendiculaire à l'axe du rotor ,et coordonnées .

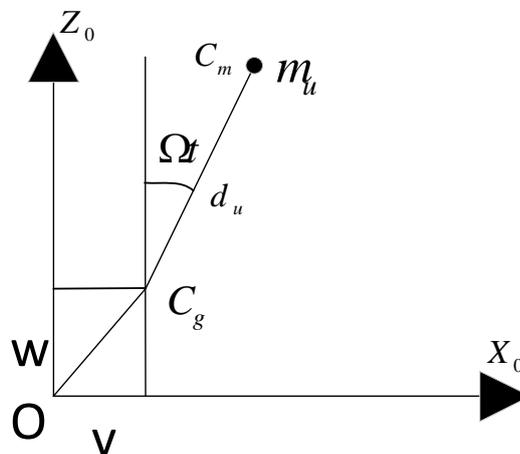
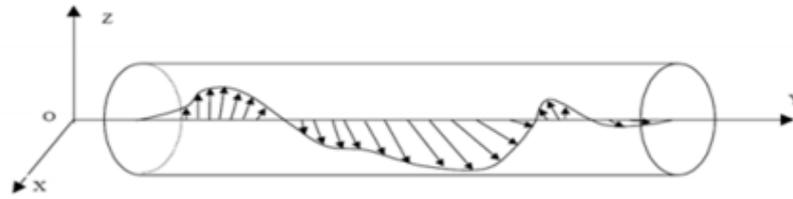


Figure II.9 : Masse de débalancement

Le balourd initial est généralement réparti de manière continue et quelconque sur le rotor comme le montre la figure II.10.



**Figure II.10** : Profil du balourd sur le rotor [12]

Dans le repère fixe, le vecteur joignant le centre de masse  $C_m$  au centre géométrique du rotor  $C_g$  a pour expression :

$$C_g C_m = (v + d_u \sin \Omega t) x_0 + (w + d_u \cos \Omega t) z_0 + \text{constant } y_0 \quad (\text{II.24})$$

- L'énergie cinétique de la masse s'exprime donc par :

$$T_u = \frac{1}{2} m_u \{ \dot{v}^2 + \dot{w}^2 + \Omega^2 d_u^2 + 2\Omega d_u (\dot{v} \cos \Omega t - \dot{w} \sin \Omega t) \} \quad (\text{II.25})$$

La masse  $m_u$  est négligeable devant la masse du disque et la masse de l'arbre

- L'expression générale de l'énergie cinétique du au balourd est donnée par :

$$T_u = \frac{1}{2} m_u \{ \Omega^2 d_u^2 + 2\Omega d_u (\dot{v} \cos \Omega t - \dot{w} \sin \Omega t) \} \quad (\text{II.26})$$

L'application de la méthode énergétique de Lagrange à l'équation (II.26) nous donne une expression (II.27) qui peut être écrite sous la forme matricielle.

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T_u}{\partial \dot{q}_u} \right) - \frac{\partial T_u}{\partial q_u} = \{ F_u \} \quad (\text{II.27})$$

Avec :

$$\{ F_u \} = \begin{Bmatrix} -m_u d_u \Omega^2 \sin \Omega t \\ -m_u d_u \Omega^2 \cos \Omega t \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{II.28})$$

### II.4.3) Supports (Paliers)

Les paliers sont aussi appelés support, d'appuis du rotor. Ils sont constitués d'un système dissipatif modélisé par la raideur  $K$  et l'amortissement  $C$  comme le montre la (figure II.11) Ils exercent des forces agissant sur l'arbre dans les deux directions  $X$  et  $Z$ .

- L'énergie potentielle du support S devient :

$$U_s = \frac{1}{2}k_s v_s^2 + \frac{1}{2}k_s w_s^2 \tag{II.29}$$

- L'expression générale de l'énergie potentielle du au support est donnée par :

$$F_u = -k_{xx}v - c_{xx}\dot{v} \tag{II.30}$$

$$F_w = -k_{zz}w - c_{zz}\dot{w} \tag{II.31}$$

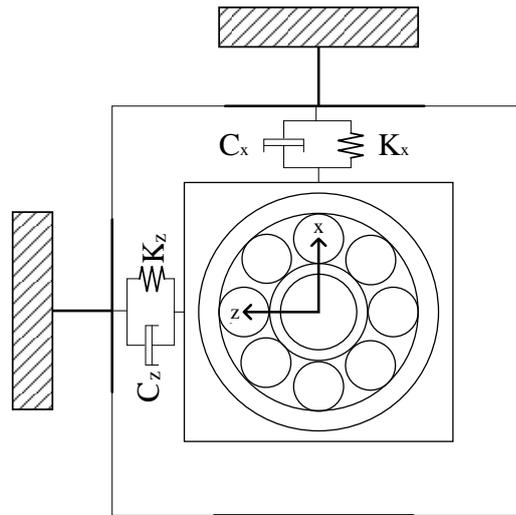


Figure II.11 : Rigidité des supports (schématisation des caractéristiques du Palier hydrostatique à quatre patins)

- L'expression de l'énergie de déformation du support S est donnée par la relation (II.32) et (II.33)

$$[K_s] = \begin{pmatrix} k_s & 0 \\ 0 & k_s \end{pmatrix} \tag{II.32}$$

$$[C_s] = \begin{pmatrix} c_s & 0 \\ 0 & c_s \end{pmatrix} \tag{II.33}$$

- Les éléments de cette matrice sont arrangés suivant de déplacement généralisé  $q_s$  suivant :

$$q_s = \begin{Bmatrix} v_s \\ w_s \end{Bmatrix} \tag{II.34}$$

Elles peuvent être écrites sous la forme matricielle ci-dessous :

$$\begin{Bmatrix} F_u \\ F_\varphi \\ F_w \\ F_\theta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{xx} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{zz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ \varphi \\ w \\ \theta \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} c_{xx} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_{zz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{\varphi} \\ \dot{w} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} \quad (\text{II.35})$$

D'où

$$\begin{Bmatrix} F_u \\ F_w \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{xx} & 0 \\ 0 & k_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} c_{xx} & 0 \\ 0 & c_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{w} \end{bmatrix} \quad (\text{II.36})$$

$$[k] = \begin{bmatrix} k_{xx} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{zz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{II.37})$$

$$[C] = \begin{bmatrix} c_{xx} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_{zz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{II.38})$$

#### II.4.4) Dérivation des matrices élémentaires

L'arbre est considéré comme une poutre de section constante et circulaire, le modèle élément fini est une barre. La barre est définie par ses deux extrémités qui constituent chacune un nœud.

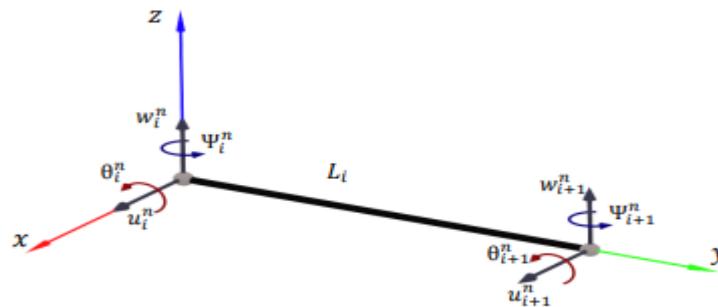


Figure II.12 : schéma d'un élément de poutre a 4 ddl par nœud [14]

Le déplacement  $v(x,t)$  du rotor suivant l'axe  $ox$  peut s'exprimer en fonction du vecteur nodal par la relation suivant :

$$u(y,t) = [N(y)]^t \{\hat{u}\} \quad (\text{II.39})$$

De même, son déplacement  $w(z,t)$  suivant  $oz$  exprimé par :

$$w(y,t) = [N(y)]^t \{\hat{w}\} \quad (\text{II.40})$$

$[N(y)]$  Est une matrice de  $4 \times 1$ , dont les éléments sont les fonctions d'interpolations ; elle est

donnée par :

$$[N(y)] = \begin{bmatrix} 1 - 3\frac{y^2}{\ell_e^2} + 2\frac{y^3}{\ell_e^3} \\ x - 2\frac{y^2}{\ell_e} + \frac{y^3}{\ell_e^2} \\ 3\frac{y^2}{\ell_e^2} - 2\frac{y^3}{\ell_e^3} \\ -\frac{y^2}{\ell_e} + \frac{y^3}{\ell_e^2} \end{bmatrix} \quad (\text{II.41})$$

$\{\hat{u}\}$  Et  $\{\hat{w}\}$  les vecteurs nodaux suivant les directions ox et oz respectivement soit :

$$\hat{u} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \quad \text{Et} \quad \hat{w} = \begin{Bmatrix} w_1 \\ \psi_1 \\ w_2 \\ \psi_2 \end{Bmatrix} \quad (\text{II.42})$$

**Avec**

$$\theta(y,t) = \frac{\partial u(y,t)}{\partial y} \quad (\text{II.43})$$

$$\psi(y,t) = \frac{\partial w(y,t)}{\partial y} \quad (\text{II.44})$$

Le déplacement en un point de l'arbre est donné par :

$$\begin{Bmatrix} u(y) \\ w(y) \end{Bmatrix} = N(y) \begin{Bmatrix} q_u \\ q_w \end{Bmatrix} \quad (\text{II.45})$$

- L'expression de l'énergie cinétique d'un élément arbre de masse volumique, de longueur et de section est exprimée comme suit

$$T_a = \frac{\rho s L}{2} \int_0^L [\delta \dot{u}' N_1' N_1 \delta \dot{u} + \delta \dot{w}' N_2' N_2 \delta \dot{w}] dy + \frac{\rho I}{2} \int_0^L \left[ \delta \dot{u}' \frac{dN_1'}{dy} \frac{dN_1}{dy} \delta \dot{u} + \delta \dot{w}' \frac{dN_2'}{dy} \frac{dN_2}{dy} \delta \dot{w} \right] dy + \rho I L \dot{\varphi}^2 - 2\rho I \dot{\varphi} \int_0^L \delta \dot{u}' \frac{dN_1'}{dy} \frac{dN_2}{dy} \delta w dy \quad (\text{II.46})$$

$$\text{Avec : } [N_1(y)] = \begin{bmatrix} 1 - \frac{3y^2}{L^2} + \frac{2y^3}{L^3} & -y + \frac{2y^2}{L} - \frac{y^3}{L^2} & \frac{3y^2}{L^2} - \frac{2y^3}{L^3} & \frac{y^2}{L} - \frac{y^3}{L^2} \end{bmatrix} \quad (\text{II.47})$$

Le calcul de  $N_2(y)$  est analogue :

$$w_i^e(y,t) = N_2(y) w_i^n(t); \quad w_i^n = [w_i \quad \psi_i \quad w_{i+1} \quad \psi_{i+1}]^T \quad (\text{II.48})$$

$$[N_2(y)] = \left[ 1 - \frac{3y^2}{L^2} + \frac{2y^3}{L^3} \quad y - \frac{2y^2}{L} + \frac{y^3}{L^2} \quad \frac{3y^2}{L^2} - \frac{2y^3}{L^3} \quad -\frac{y^2}{L} + \frac{y^3}{L^2} \right] \quad (\text{II.49})$$

• Energie cinétique du rotor

L'énergie cinétique du rotor dans le repère fixe est donnée la relation suivante :

$$T_{R_0} = \frac{1}{2} m V_{C_m}^2 + \frac{1}{2} \overline{\Omega}_3^0 [I]_{R_3} \overline{\Omega}_3^0 \quad (\text{II.50})$$

Où :  $V_{C_m}^2$  : la vitesse du centre de masse du rotor [m/s]

m : la masse du rotor [kg]

$\overline{\Omega}_3^0$  : la vitesse de la rotation du repère  $R_3$  par rapport au repère fixe  $R_0$  [rad/s]

$[I]_{R_3}$  : la matrice d'inertie du rotor [ $kg.m^2$ ]

La matrice d'inertie :

$$[I]_{R_3} = \begin{pmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & I_{yz} \\ 0 & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix} \quad (\text{II.51})$$

En utilisant les relation (II.50) et (II.51) l'énergie cinétique du rotor

$$T_{R_0} = \frac{1}{2} \rho A \int_0^\ell (\dot{v}^2 + \dot{w}^2) dx + \frac{1}{2} \rho \int_0^\ell I_{xx} \left\{ (\Omega - \dot{\theta} \sin \varphi)^2 + I'_{yy} \dot{\theta}^2 \cos^2 \varphi + I'_{zz} \dot{\varphi}^2 - 2I'_{yz} \dot{\varphi} \dot{\theta} \cos \varphi \right\} dx \quad (\text{II.52})$$

On a  $\rho$  est la masse volumique du rotor, A sa section,  $\ell$  sa longueur et  $\Omega$  sa vitesse de rotation

$$\begin{cases} I'_{yy} = I_{yy} \cos^2 \Omega t + I_{zz} \sin^2 \Omega t + I_{yz} \sin 2\Omega t \\ I'_{yz} = \frac{1}{2} \left\{ (I_{yy} - I_{zz}) \sin 2\Omega t + I_{yz} \cos 2\Omega t \right\} \\ I'_{zz} = I_{yy} \cos^2 \Omega t + I_{zz} \sin^2 \Omega t - I_{yz} \sin 2\Omega t \end{cases} \quad (\text{II.53})$$

• Energie de déformation de l'arbre :

L'expression de l'énergie de déformation du rotor par relation suivant :

$$U_{R_0} = \frac{1}{2} \int_0^\ell \left\{ EI'_{zz} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right)^2 + EI'_{yy} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 - 2EI'_{yz} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right\} dx \quad (\text{II.54})$$

E est le module d'élasticité longitudinale du rotor ( $N/m^2$ )

Est il y a l'hypothèse de petites déformations, avec

$$\cos \theta \simeq \cos \varphi \simeq 1 ; \sin \theta \simeq \frac{\partial w}{\partial x} ; \sin \varphi \simeq \frac{\partial v}{\partial x} \quad (\text{II.55})$$

**• Matrice de masse et matrice gyroscopique d'un élément d'un arbre**

Les expressions de la matrice de masse et de la matrice gyroscopique sont dérivées à partir de l'énergie cinétique de l'élément

$$T_e = \frac{1}{2} \rho A \int_0^{\ell_e} (\dot{v}^2 + \dot{w}^2) dx + \frac{1}{2} \rho I_{xx} \int_0^{\ell_e} (\Omega - \dot{\theta} \sin \varphi)^2 dx + \frac{1}{2} \rho \int_0^{\ell_e} (I'_{yy} \dot{\theta}^2 \cos \varphi + I'_{zz} \dot{\varphi}^2 - 2I'_{yz} \dot{\varphi} \dot{\theta} \cos \varphi) dx \quad (\text{II.56})$$

L'élément considéré étant de section circulaire et possédant un axe de symétrie suivant

$$I_{yy} = I_{zz} ; I_{yz} = 0$$

On obtient l'expression simplifiée de l'énergie cinétique après les expressions des moments d'inertie du rotor et les hypothèses de petites déformations :

$$T_e = \frac{1}{2} \rho A \int_0^{\ell_e} (\dot{v}^2 + \dot{w}^2) dx + \frac{1}{2} \rho I_1 \int_0^{\ell_e} (\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2) dx - \frac{1}{2} \rho I_0 \Omega \int_0^{\ell_e} \dot{\theta} \varphi dx + \frac{1}{2} \rho I_0 \ell_e \Omega^2 \quad (\text{II.57})$$

Les matrices élémentaires on doit exprimer l'énergie cinétique en fonction des variables nodales de l'élément.

$$\dot{v} = \frac{\partial v}{\partial t} ; \dot{\varphi} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} ; \varphi' = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad (\text{II. 58})$$

Avec

$$\dot{v} = \frac{\partial}{\partial t} \{ [N(x)] \{ \hat{v} \} \} \quad (\text{II. 59})$$

$$\dot{\varphi} = \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} [N(x)] \{ \hat{v} \} \right\} \quad (\text{II.60})$$

On obtient les expressions de  $\dot{w}$  et  $\dot{\theta}$  soit :

$$\dot{w} = [N(x)] \{ \hat{w} \} \quad (\text{II. 61})$$

$$\dot{\theta} = [N(x)] \{ \hat{w} \} \quad (\text{II. 62})$$

En exprimant l'énergie-cinétique sous forme

$$T_e = \frac{1}{2} \rho A \int_0^{\ell_e} (\dot{v}^t \dot{v} + \dot{w}^t \dot{w}) dx + \frac{1}{2} \rho I_1 \int_0^{\ell_e} (\dot{\varphi}^t \dot{\varphi} + \dot{\theta}^t \dot{\theta}) dx - \rho I_0 \Omega \int_0^{\ell_e} \dot{\theta}^t \varphi dx + \frac{1}{2} \rho I_0 \ell_e \Omega^2 \quad (\text{II. 63})$$

Les équations de Lagrange appliquées :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T_e}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial T_e}{\partial q} = [M_e] \{ \ddot{q} \} + [G_e] \{ \dot{q} \} \quad (\text{II. 64})$$

$[M_e]$  : matrice de masse élémentaire (Symétrique)

$[G_e]$  : matrices gyroscopique l'élémentaire (non Symétrique)

$\{q\}$  : le vecteur des coordonnées généralisées

**• Matrice de rigidité d'un élément d'arbre**

L'expression de la matrice de rigidité élémentaire du rotor dérivée à partir de l'expression de l'énergie de déformation de l'élément

$$U_e = \frac{1}{2} EI_1 \int_0^{\ell_e} \left\{ \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 \right\} dx \tag{II.65}$$

Où :

$$U_e = \frac{1}{2} EI_1 \int_0^{\ell_e} \left( \left\{ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right\}^t \left\{ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right\} + \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right\}^t \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right\} \right) dx \tag{II.66}$$

En remplacement v et w par leurs expressions données par la relation (II.29) et (II.30) on obtient :

$$U_e = \frac{1}{2} \{\hat{v}\}^t [K_v] \{\hat{v}\} + \frac{1}{2} \{\hat{w}\}^t [K_w] \{\hat{w}\} \tag{II.67}$$

Avec :

$$[K_v] = [K_w] = EI_1 \int_0^{\ell_e} [N''(x)]^t [N''(x)] dx \tag{II.68}$$

$$\text{Ou } N''(x) = \frac{\partial^2 N(x)}{\partial x^2} \tag{II.69}$$

$[K_v]$  Et  $[K_w]$  sont les matrices de rigidité élémentaires du rotor pour les vibrations

Donc l'équation de Lagrange à l'énergie de déformation

$$\frac{\partial U_e}{\partial q} = [K_e] \{q\} \tag{II.70}$$

Avec

$$[K_e] = \begin{pmatrix} [K_v] & \vdots & 0 \\ \dots & \vdots & \dots \\ 0 & \vdots & [K_w] \end{pmatrix} \tag{II.71}$$

$[K_e]$  : est la matrice de rigidité élémentaire du rotor

**II.4.5) Développement de rigidité élémentaire du rotor d'un élément d'arbre fissuré**

Modélisation de la partie fissurée du rotor ; qui développer la matrice de rigidité d'élément fissure pour les vibrations

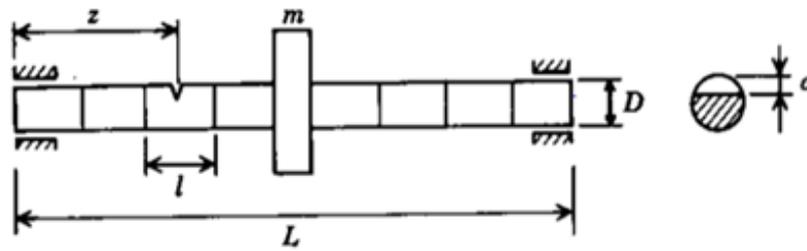


Figure II.13 : Modèle de système de rotor avec un élément fissuré [14]

La rigidité locale est déterminée à partir de l'énergie de déformation totale de l'élément. Cette énergie comprend deux termes ; l'énergie de déformation de l'élément sans fissure et l'énergie de déformation introduite par la fissure est exprimée le terme (II.72).

$$[C_T] = [C^c] + [C^0] \tag{II.72}$$

$[C^0]$  : est la matrice de flexibilité sans fissure

Les coefficients de la matrice de flexibilité locale sont déterminés à part :

$$[C^0] = \begin{bmatrix} l^3/3EI & 0 & 0 & l^2/2EI \\ 0 & l^3/3EI & -l^2/2EI & 0 \\ 0 & -l^2/2EI & l/EI & 0 \\ l^2/2EI & 0 & 0 & l/EI \end{bmatrix} \tag{II.73}$$

Les coefficients de la matrice de flexibilité locale sont déterminés à partir de la fonction de la densité de l'énergie de déformation (II.75).

$$C_{ij}^c = \frac{\partial^2}{\partial P_i \partial P_j} \int_0^a J(a) da \tag{II.74}$$

1) L'énergie de déformation :

$$J(a) = \int_{-b}^b \frac{1}{E'} K_M^2(\xi) d\xi \tag{II.75}$$

Avec :

- $2b$  : la largeur de la fissure
- $K_M$  : facteur d'intensité de contrainte
- $E'$  : module d'élasticité longitudinale du rotor

Ou la fonction de densité de l'énergie de déformation donnée par :

$$J(a) = \frac{1}{E'} \int_{-b}^b \{ K_I^2 + K_{II}^2 + (1+\nu) K_{III}^2 \} d\xi \tag{II.76}$$

Avec :

$$K_I = \left( P_5 + P_2 \frac{\ell_e}{2} \right) \sqrt{\pi a} \frac{\sqrt{r^2 - \xi^2}}{\pi r^4} f_2(a/h) + \left( P_4 + P_3 \frac{\ell_e}{2} \right) \frac{\xi \sqrt{\pi a}}{\pi r^4} f_1(a/h) \quad (\text{II.77})$$

$$K_{II} = \frac{6(1+\nu)}{7+\nu} \frac{P_2}{\pi r^2} \sqrt{\pi a} f_{II}(a/h) \quad (\text{II.78})$$

$$K_{III} = \frac{6(1+\nu)}{7+\nu} \frac{P_3}{\pi r^2} \sqrt{\pi a} f_{III}(a/h) \quad (\text{II.79})$$

Avec :

$f_1, f_2, f_{II}, f_{III}$  Sont facteurs géométriques de la fissure ils dépendents de la géométrie de la section du rotor,  $P_2, P_3$  les efforts sur les directions oy et ox ,  $P_4, P_5$  les moments fléchissants.

2) L'expression finale des coefficients  $C_{ij}^c$  soit :

$$C_{ij}^c = \frac{\partial^2}{\partial P_i \partial P_j} \int_{-b}^b \int_0^a \frac{1}{E'} K_{MT}(a, \xi) da d\xi \quad (\text{II.80})$$

Avec :

$$K_{MT} = K_I^2 + K_{II}^2 + (1+\nu) K_{III}^2 \quad (\text{II.81})$$

La matrice de flexibilité locale déterminer par la relation (II.82) et (II.83) donc :

$$\begin{aligned} C_1^* &= \frac{64(1-\nu^2)}{\pi E r^3} \int_0^{\bar{a}} \int_0^{\bar{a}} \bar{a} (1-\bar{\xi}^2) f_2^2(\bar{a}/\bar{h}) d\bar{a} d\bar{\xi} \\ C_2^* &= \frac{32(1-\nu^2)}{\pi E r^3} \int_0^{\bar{a}} \int_0^{\bar{a}} \bar{a} \bar{\xi}^2 f_1^2(\bar{a}/\bar{h}) d\bar{a} d\bar{\xi} \\ C_{12}^* &= \frac{64(1-\nu^2)}{\pi E r^3} \int_0^{\bar{a}} \int_0^{\bar{a}} \bar{a} \bar{\xi} \sqrt{1-\bar{\xi}^2} f_1(\bar{a}/\bar{h}) f_2(\bar{a}/\bar{h}) d\bar{a} d\bar{\xi} \\ C_1^{**} &= \frac{144(1+\nu)^2 (1+\nu^2)}{(7+\nu)^2 \pi E r} \int_0^{\bar{a}} \int_0^{\bar{a}} \bar{a} f_{II}^2(\bar{a}/\bar{h}) d\bar{a} d\bar{\xi} \\ C_2^{**} &= \frac{144(1+\nu)^2 (1+\nu^2)}{(7+\nu)^2 \pi E r} \int_0^{\bar{a}} \int_0^{\bar{a}} \bar{a} f_{III}^2(\bar{a}/\bar{h}) d\bar{a} d\bar{\xi} \end{aligned} \quad (\text{II.82})$$

$$\bar{\xi} = \xi/r \quad \bar{a} = a/r \quad \bar{h} = h/r \quad \bar{b} = b/r$$

$$[C^c] = \begin{bmatrix} C_1^{**} + C_1^* \left(\frac{\ell_e}{2}\right)^2 & C_1^* \frac{\ell_e}{2} & C_{12}^* \left(\frac{\ell_e}{2}\right)^2 & C_{12}^* \frac{\ell_e}{2} \\ & C_1^* & C_{12}^* \left(\frac{\ell_e}{2}\right) & C_{12}^* \\ & & C_2^{**} + C_2^* \left(\frac{\ell_e}{2}\right)^2 & C_2^* \left(\frac{\ell_e}{2}\right) \\ & sym & & C_2^* \end{bmatrix} \quad (\text{II.83})$$

$[C^c]$  : est la matrice de flexibilité avec fissure (II.88) :

$$[C^c] = \frac{1}{F_0} \begin{bmatrix} \bar{c}_{11}R & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{c}_{22}R & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{c}_{33}/R & \bar{c}_{34}/R \\ 0 & 0 & \bar{c}_{43}/R & \bar{c}_{44}/R \end{bmatrix} \quad (\text{II.84})$$

Avec

$$F_0 = \pi ER^2 / (1 - \nu^2) ; \quad R = D / 2 \quad (\text{II.85})$$

La matrices de rigidité totale de l'élément est déterminée en inversant

$$[K_T] = [C_T]^{-1} \quad (\text{II.86})$$

- la condition d'équilibre:

$$(q_1, q_2, \dots, q_8)^T = [T](q_5, \dots, q_8)^T \quad (\text{II.87})$$

- la matrice de transformation:

$$[T] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & l & -1 & 0 \\ -l & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{II.88})$$

Où :

$$[K_T] = [T][C_T]^{-1}[T]^T \quad (\text{II.89})$$

- La matrice rigidité d'un élément d'arbre fissuré :

$$[K_e^c] = [T]^t [K_T] [T] \quad (\text{II.90})$$

$$[K_e^c] = [T]^t [C_T]^{-1} [T] \quad (\text{II.91})$$

- Dont représentent respectivement les matrices classiques de masse en translation  $[M_1]$  et  $[M_2]$  et en rotation  $[M_3]$  et  $[M_4]$  tandis que  $[M_5]$  représente l'effet gyroscopique.

$$[M_1] = \rho s L \int_0^L N_1^t N_1 dy = \frac{\rho s L}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22L & 54 & -13L \\ 22L & 4L^2 & 13L & -3L^2 \\ 54 & 13L & 156 & -22L \\ 13L & -3L^2 & -22L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (\text{II.92})$$

$$[M_2] = \rho s L \int_0^L N_2^t N_2 dy = \frac{\rho s L}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22L & 54 & -13L \\ 22L & 4L^2 & 13L & -3L^2 \\ 54 & 13L & 156 & -22L \\ 13L & -3L^2 & -22L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (\text{II.93})$$

$$[M_3] = \rho I \int_0^L \frac{dN_1^t}{dy} \frac{dN_1}{dy} dy = \frac{\rho I}{30L} \begin{bmatrix} 36 & 3L & -36 & 3L \\ 3L & 4L^2 & -3L & -L^2 \\ -36 & 3L & 36 & -3L \\ 3L & -L^2 & -3L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (\text{II.94})$$

$$[M_4] = \rho I \int_0^L \frac{dN_2^t}{dy} \frac{dN_2}{dy} dy = \frac{\rho I}{15L} \begin{bmatrix} 36 & 3L & -36 & 3L \\ 3L & 4L^2 & -3L & -L^2 \\ -36 & 3L & 36 & -3L \\ 3L & -L^2 & -3L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (\text{II.95})$$

$$[M_5] = -2\rho I \dot{\phi} \int_0^L \frac{dN_1^t}{dy} \frac{dN_2}{dy} dy = \frac{\rho I \dot{\phi}}{15L} \begin{bmatrix} 36 & 3L & 36 & 3L \\ -3L & 4L^2 & 3L & -L^2 \\ 36 & -3L & -36 & -3L \\ -3L & -L^2 & -3L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (\text{II.96})$$

Avec : I le moment quadratique de l'élément,  $I_i = \frac{\pi \phi_i^4}{64}$

- 3) Les matrices élémentaires  $\{[M_t^e]; [M_r^e]; [G^e]\}$  sont d'ordre  $8 \times 8$ , elles sont déduites respectivement de  $\{[M_1]; [M_2]\}$ ,  $\{[M_3]; [M_4]\}$  et  $[M_5]$ .

$$[M_t^e] = \frac{\rho s L}{420} \begin{bmatrix} 156 & 0 & 0 & -22L & 54 & 0 & 0 & 13L \\ 0 & 156 & 22L & 0 & 0 & 54 & -13L & 0 \\ 0 & 22L & 4L^2 & 0 & 0 & 13L & -3L^2 & 0 \\ -22L & 0 & 0 & 4L^2 & -13L & 0 & 0 & -3L^2 \\ 54 & 0 & 0 & -13L & 156 & 0 & 0 & 22L \\ 0 & 54 & 13L & 0 & 0 & 156 & -22L & 0 \\ 0 & -13L & -3L^2 & 0 & 0 & -22L & 4L^2 & 0 \\ 13L & 0 & 0 & -3L^2 & 22L & 0 & 0 & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (\text{II.97})$$

$$[M_r^e] = \frac{\rho s L}{420} \begin{bmatrix} 36 & 0 & 0 & -3L & -36 & 0 & 0 & -3L \\ 0 & 36 & 3L & 0 & 0 & -36 & 3L & 0 \\ 0 & 3L & 4L^2 & 0 & 0 & -3L & -L^2 & 0 \\ -3L & 0 & 0 & 4L^2 & 3L & 0 & 0 & -L^2 \\ -36 & 0 & 0 & 3L & 36 & 0 & 0 & 3L \\ 0 & -36 & -3L & 0 & 0 & 36 & -3L & 0 \\ 0 & 3L & -L^2 & 0 & 0 & -3L & 4L^2 & 0 \\ -3L & 0 & 0 & -L^2 & 3L & 0 & 0 & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (\text{II.98})$$

$$[G^e] = \frac{\rho I \dot{\phi}}{15L} \begin{bmatrix} 0 & -36 & -3L & 0 & 0 & 36 & -3L & 0 \\ 36 & 0 & 0 & -3L & -36 & 0 & 0 & -3L \\ 3L & 0 & 0 & -4L^2 & -3L & 0 & 0 & L^2 \\ 0 & 3L & 4L^2 & 0 & 0 & -3L & -L^2 & 0 \\ 0 & 36 & 3L & 0 & 0 & -36 & 3L & 0 \\ -36 & 0 & 0 & 3L & 36 & 0 & 0 & 3L \\ 3L & 0 & 0 & L^2 & -3L & 0 & 0 & -4L^2 \\ 0 & 3L & -L^2 & 0 & 0 & 4L^2 & 4L^2 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{II.99})$$

• Dont  $\{k_1; k_2\}$  représentent les matrices classiques de rigidité

$$[k_1] = EI \int_0^L \frac{d^2 N_1'}{dy^2} \frac{d^2 N_1}{dy^2} dy = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ 12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (\text{II.100})$$

$$[k_2] = EI \int_0^L \frac{d^2 N_2'}{dy^2} \frac{d^2 N_2}{dy^2} dy = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ 12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (\text{II.101})$$

La matrice élémentaire de raideur est alors :

$$[K] = \frac{EI}{(1+a)L^3} \begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 & -6L & -12 & 0 & 0 & -6L \\ 0 & 12 & 6L & 0 & 0 & -12 & -6L & 0 \\ 0 & 6L & (4+a)L^2 & 0 & 0 & -6L & (2-a)L^2 & 0 \\ -6L & 0 & 0 & (4+a)L^2 & 6L & 0 & 0 & (2-a)L^2 \\ -12 & 0 & 0 & 6L & 12 & 0 & 0 & 6L \\ 0 & -12 & -6L & 0 & 0 & 12 & -6L & 0 \\ 0 & 6L & (2-a)L^2 & 0 & 0 & -6L & (4+a)L^2 & 0 \\ -6L & 0 & 0 & (2-a)L^2 & 6L & 0 & 0 & (4+a)L^2 \end{bmatrix} \quad (\text{II.102})$$

Tel que :

$$a = \frac{12EI}{GSL^2} \quad (\text{II.103})$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (\text{II.104})$$

G : le module de cisaillement ;

$\nu$  (Nu) : coefficient de poisson ;

S : Section réduite.

[K] : La matrice rigidité l'élémentaire d'arbre fissuré

#### II.4.6) Fréquences propres du rotor

Les fréquences propres du rotor en fonction de la vitesse de rotation sont données par :

$$m\ddot{q}_1 - a\Omega\dot{q}_2 + k_1q_1 = 0 \quad (\text{II.105})$$

$$\omega_x = \sqrt{\frac{K_{mx}}{M}} \quad (\text{II.106})$$

$$m\ddot{q}_2 - a\Omega\dot{q}_1 + k_2q_2 = 0 \quad (\text{II.107})$$

$$\omega_y = \sqrt{\frac{K_{my}}{M}} \quad (\text{II.108})$$

#### II.4.6) Conclusion

Ce chapitre a pour but d'analyser les deux modèles mathématiques pour décrire le comportement dynamique d'une ligne d'arbre flexible fissurée supportée par deux paliers rigides, comportant un disque soumis à une excitation de type de balourd en régime transitoire pour enfin en choisir le modèle de Jeffcott suite aux résultats expérimentaux de leurs réalisation.

# CHAPITRE III : Etude du Comportement Dynamique d'un Rotor Flexible Fissuré en Régime Transitoire

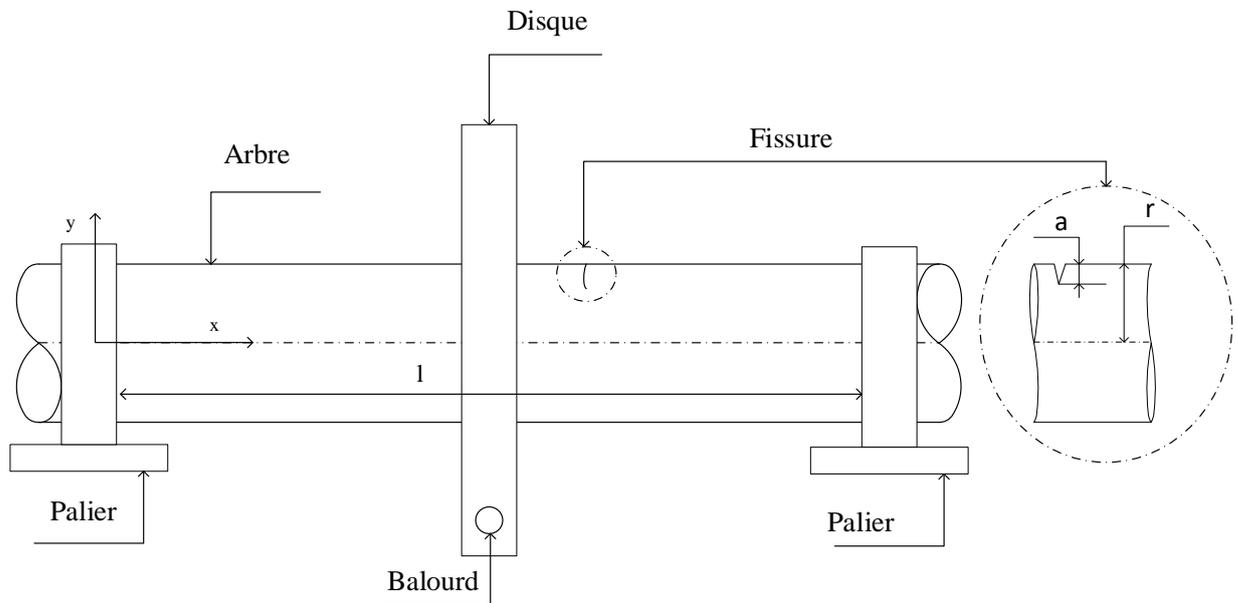
### **III.1) Introduction**

Le présent chapitre dispose une étude sur le comportement dynamique d'une ligne d'arbre flexible fissurée, supportée par deux paliers rigides en régime transitoire.

Pour cela un programme écrit en langage MTLAB/SIMULINK a été développé dans l'intérêt d'étudier l'effet de fissure sur le comportement vibratoire de l'arbre fissuré en régime transitoire. L'étude effectuée dans ce chapitre est basée sur le modèle de Jeffcott présenté au chapitre II.

#### **III.1.1) Description du modèle de Jeffcott de l'arbre fissuré**

Le premier modèle étudié est un système (arbre + disque) (figure III.1), qui présente un rotor supporté par deux paliers identiques en extrémités et un disque qui se situe au centre. Notre système est supposé être flexible soumis à une force d'excitation de type balourd en tenant en compte : la localisation de la fissure et de la rigidité de chaque cas étudié selon l'article [16] .



**Figure III.1 :** Modèle du rotor étudié fissuré avec la géométrie de la fissure

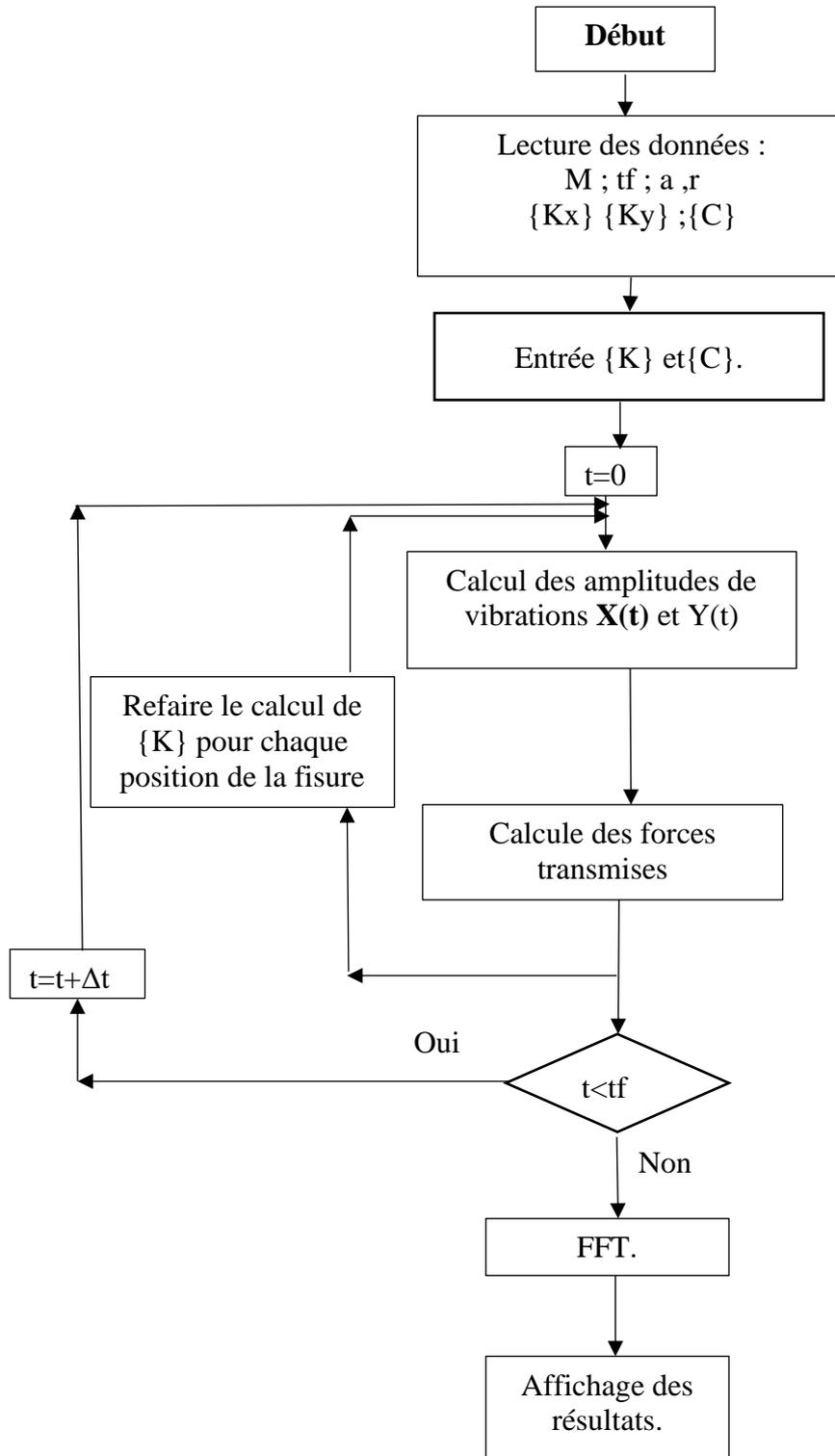
##### **III.1.1.1) Caractéristique de la géométrie**

	Unité
La masse (arbre + disque)	32 (kg)
Rayon (r)	40 (mm)
La masse volumique $\rho$	7800 (kg / m <sup>3</sup> )
Langueur (l)	800 (mm)

**Table III.1 :** Caractéristiques géométriques

**III.3) Organigramme de la résolution**

L'organigramme de calcul schématisé dans la figure III.2 représente les différentes étapes de programmation, ces étapes sont les suivantes :

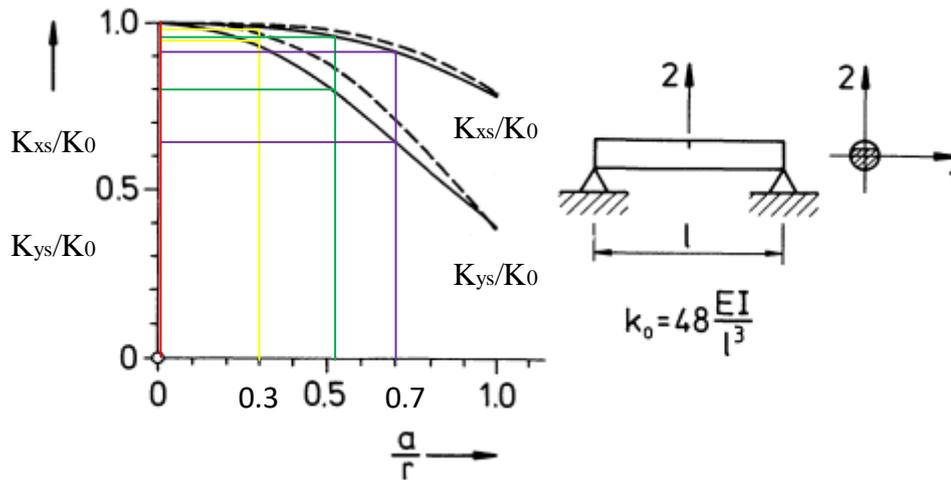


**Figure III.2 :** Organigramme d'exécution du programme

**Chapitre III Etude du Comportement Dynamique d'un rotor Flexible en Régime Transitoire**  
**III.4) Résultats et interprétation**

Les résultats, auxquels on a abordé, du programme développé, dans cette partie étudie l'influence de la profondeur de la fissurée sur la rigidité suivant l'axe X et Y la figure III.3

Le tableau ci-dessus décrit que la rigidité suivant X, pour différents rapports de profondeur n'a pas une grande différence, tandis que la profondeur a une influence sur le changement de la rigidité suivant Y table III.2.



**Figure III. 3:** la rigidité et leur dépendance à la profondeur de la fissurée [15]

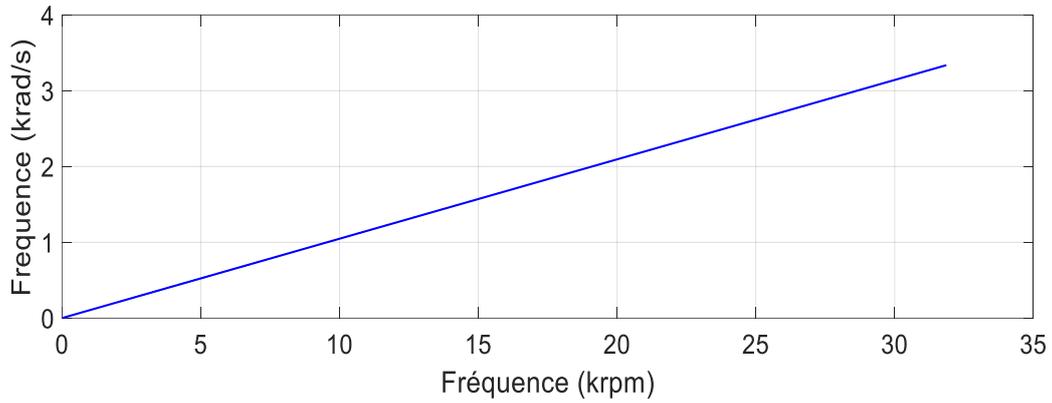
a/r	0	0.3	0.5	0.7
KxB	1	0.99	0.98	0.92
KyB	1	0.89	0.8	0.65

**Table III.2 :** la rigidité et leur dépendance à la profondeur de la fissurée

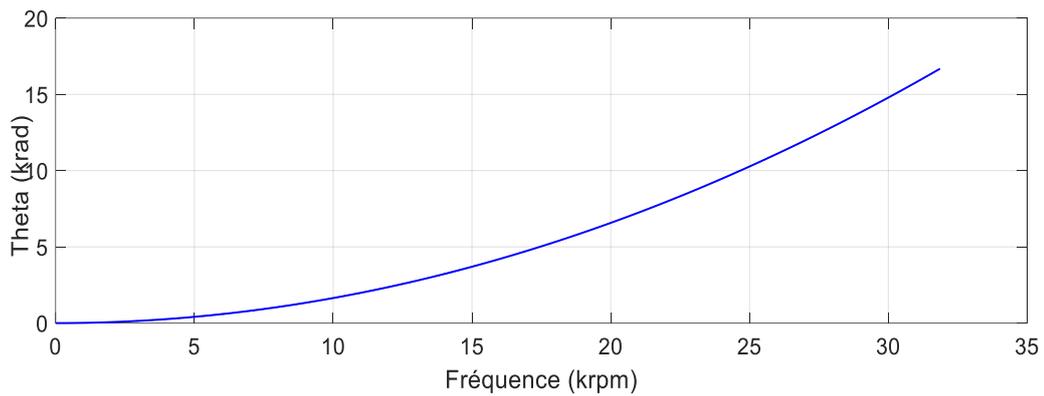
**III.4.1) L'effet de la fissure sur la fréquence, l'angle de déplacement et la force d'excitation**

Les figures III.4, III.5 et III.6 représente l'évolution de la fréquence, de l'angle de déplacement et de la force d'excitation en fonction de la vitesse de rotation pour différentes profondeurs de fissure.

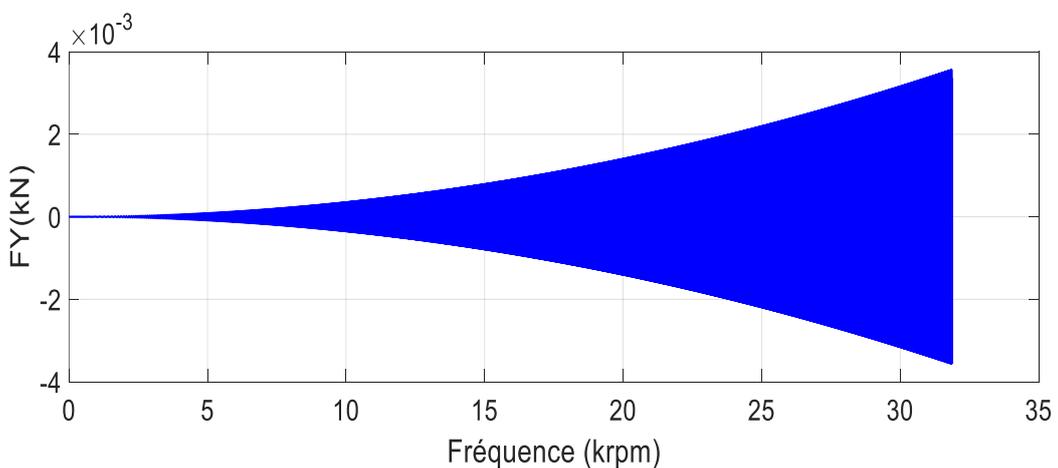
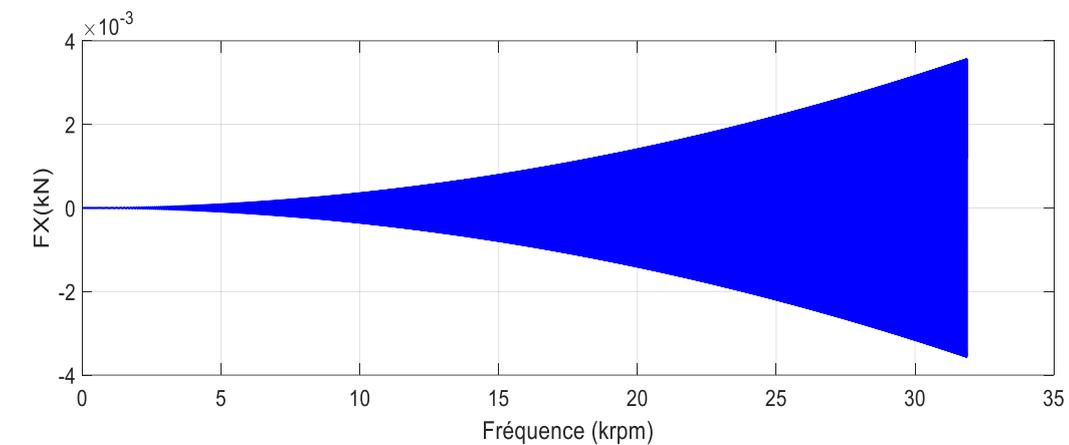
Ces figures montrent que l'augmentation de la vitesse de rotation augmente la fréquence d'excitation, l'angle de déplacement et la force d'excitation due à l'augmentation de vibration et qu'il n'y a pas d'effet de la profondeur de la fissure sur ses derniers car ils ne sont pas affectés par le rapport de fissure.



**Figure III.4 :** Evolution de la fréquence en fonction de la vitesse de rotation



**Figure III.5 :** Evolution de l'angle de déplacement en fonction de la vitesse de rotation



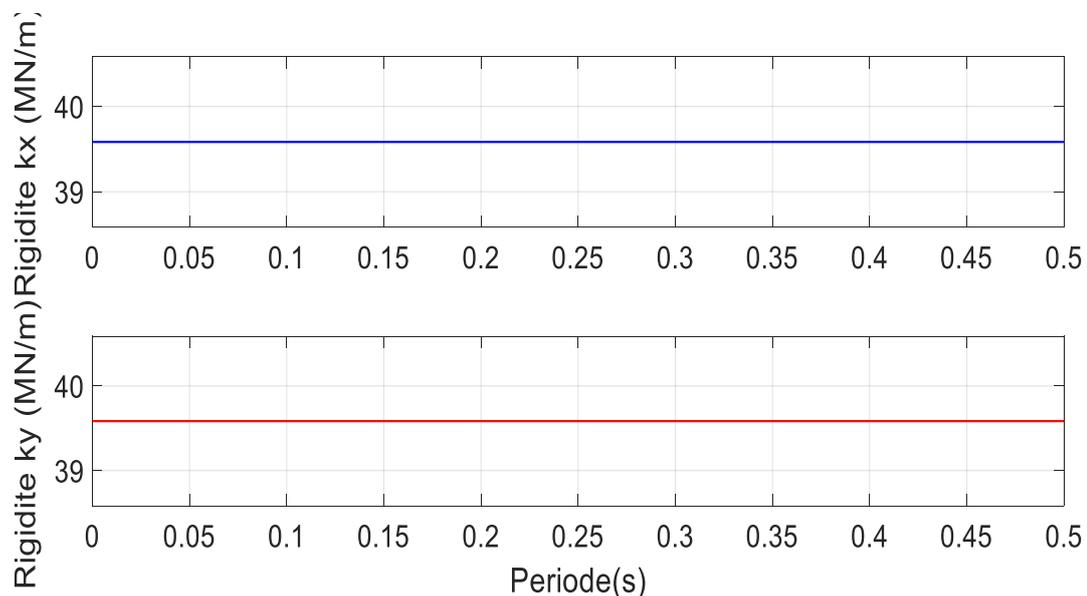
**Figure III.6 :** Evolution de la force d'excitation en fonction de la vitesse de rotation

## Chapitre III Etude du Comportement Dynamique d'un rotor Flexible en Régime Transitoire

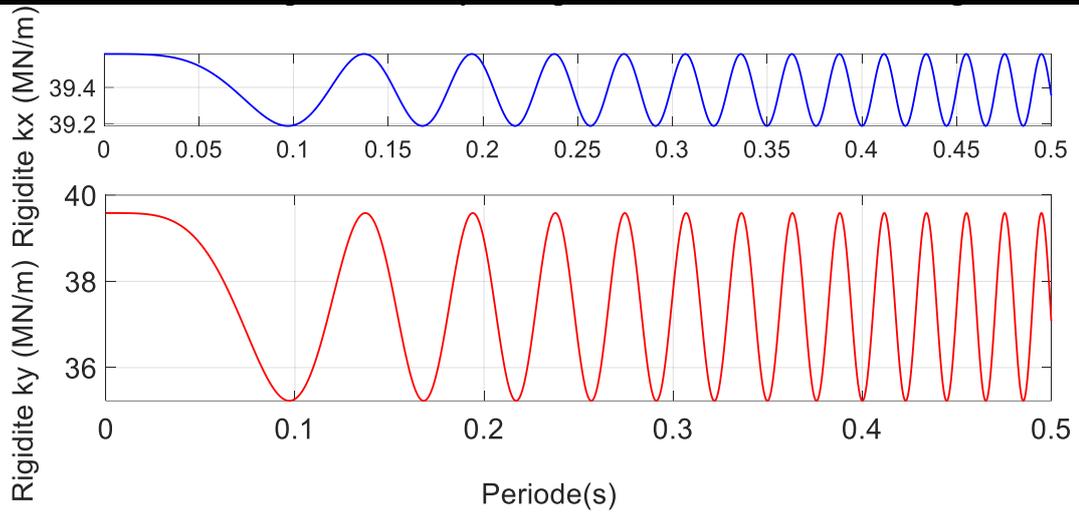
### III.4.2) L'effet de la fissure sur la rigidité

Les figures III.7, III.8, III.9 et III.10 illustrent l'effet du rapport de fissure sur la rigidité suivant l'axe x et y en fonction de temps

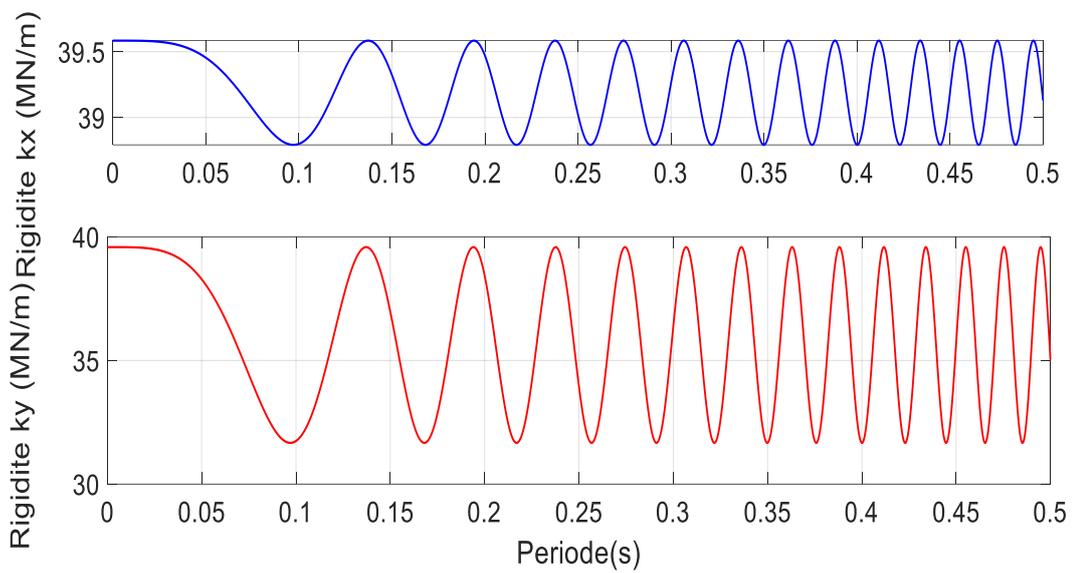
- La figure III.7 montre que la rigidité selon l'axe X et Y ne varie pas tout au long de la période due au rapport de fissure qui est nulle  $a/r$  (sans fissure)
- Le tableau III.3 décrit les valeurs de la rigidité selon l'axe X et Y.
- Les figures III.8, III.9 et III.10, montrent que l'augmentation du rapport de fissure de 0.3 à 0.7 diminue la rigidité suivant l'axe X et Y due à la diminution du rapport d'excentricité qui augmente l'amplitude vibratoire.
- Les tableaux III.4 et III.5 montrent les valeurs de la rigidité suivant l'axe x et y pour différents rapports de fissure. Ce dernier indique que la diminution des valeurs de rigidité suivant l'axe y sont très importante devant les valeurs de la rigidité suivant l'axe des x lorsque la force excite selon axe x la force d'excitation de balourd et les force excite selon axe y la force d'excitation et le poids.
- Les figures III.10 représentent l'effet du rapport de fissure sur la rigidité suivant l'axe x et y en fonction de  $a/r$



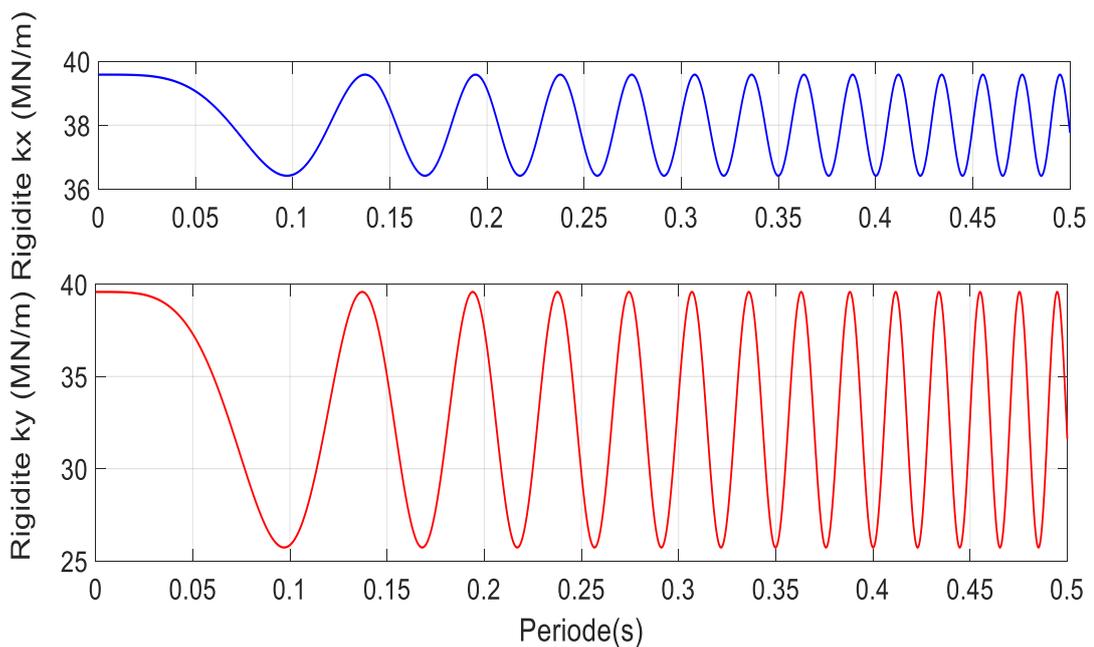
**Figure III.7 :** Evolution de la rigidité en fonction de temps pour  $a/r=0$



**Figure III.8 :** Evolution de la rigidité en fonction de temps pour  $a/r=0.3$



**Figure III.9 :** Evolution de la rigidité en fonction de temps pour  $a/r=0.5$



**Figure III.10 :** Evolution de la rigidité en fonction de temps en pour  $a/r=0.7$

### Chapitre III Etude du Comportement Dynamique d'un rotor Flexible en Régime Transitoire

			Sans fissure	Avec fissure			
Rapport		a/r	a/r=0	a/r=0.3	a/r=0.5	a/r=0.7	
L'arbre	La rigidité Kx (MN/m)	Selon axe X	Mode Ouverture moyen Gauche	39.58	39.41	39.21	38.01
	La rigidité Kx (MN/m)		Mode Ouverture moyen droite	39.58	39.41	39.21	38.01
	La rigidité Kx (MN/m)		Mode ferme dessus	39.58	39.58	39.58	39.58
	La rigidité Kx (MN/m)		Mode ouverture dessous	39.85	39.19	38.79	36.42

**Table III.3 :** la rigidité en fonction de a/r selon axe X

			Sans fissure	Avec fissure			
Rapport		a/r	a/r=0	a/r=0.3	a/r=0.5	a/r=0.7	
L'arbre	La rigidité Ky (MN/m)	Selon axe Y	Mode Ouverture moyen Gauche	39.58	37.44	35.65	32.66
	La rigidité Ky (MN/m)		Mode Ouverture moyen droite	39.58	37.44	35.65	32.66
	La rigidité Ky (MN/m)		Mode ferme dessus	39.58	39.58	39.58	39.58
	La rigidité Ky (MN/m)		Mode ouverture dessous	39.85	35.24	31.71	25.74

**Table III.4 :** la rigidité en fonction de a/r selon axe Y

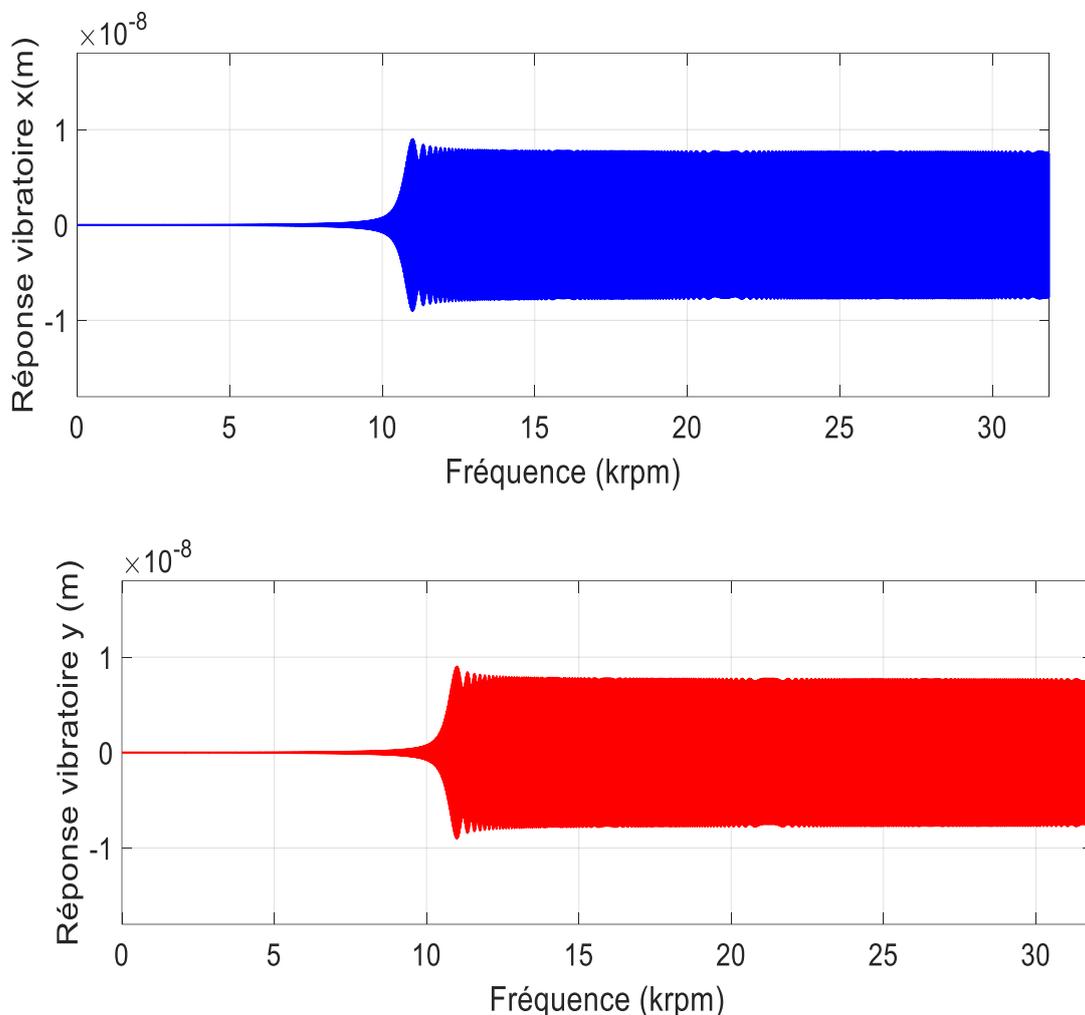
			Sans fissure	Avec fissure			
Rapport		a/r	a/r=0	a/r=0.3	a/r=0.5	a/r=0.7	
L'arbre	La rigidité Kx (MN/m)	Selon X	Mode Ouverture moyen Gauche	39.58	39.4	39.21	38.01
	La rigidité Kx (MN/m)		Mode Ouverture moyen droite	39.58	39.4	39.21	38.01
	La rigidité Ky (MN/m)	Selon Y	Mode ferme dessus	39.58	39.58	39.58	39.58
	La rigidité Ky (MN/m)		Mode ouverture dessous	39.85	35.23	31.68	25.73

**Table III.5 :** Comparaisons la rigidité en fonction de a/r

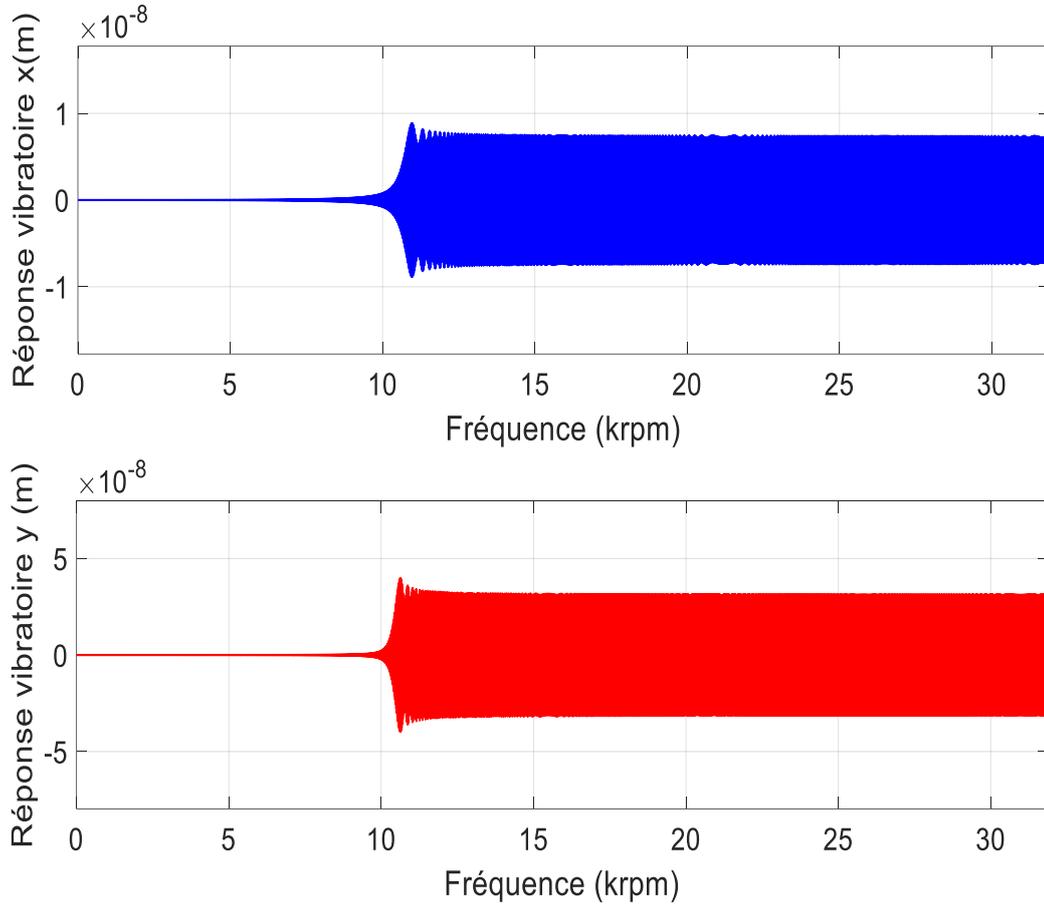
**Chapitre III Etude du Comportement Dynamique d'un rotor Flexible en Régime Transitoire**  
**III.4.3) L'effet de la fissure sur la réponse vibratoire**

Les figures III.11, III.12, III.13 et III.14 représentent l'influence du rapport de fissure sur la réponse vibratoire suivant x et y en fonction de la vitesse de rotation

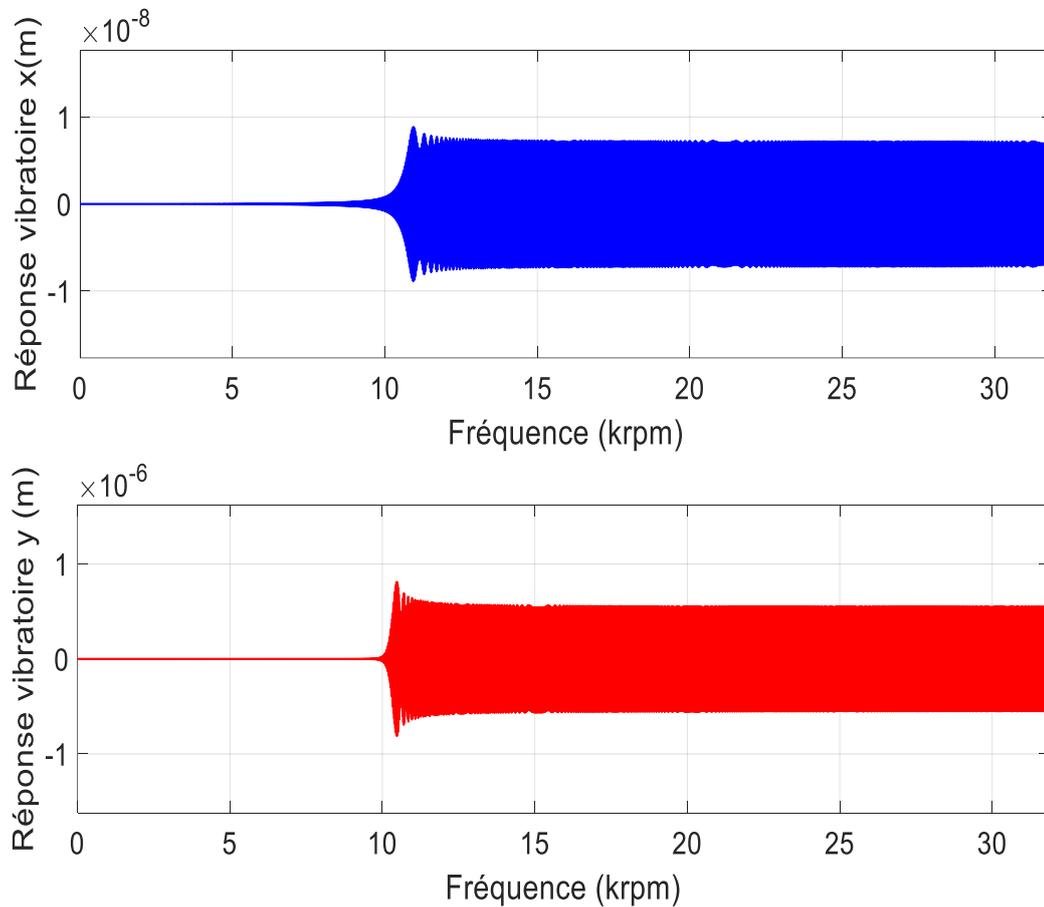
- Les figures III.11 montrent que la réponse vibratoire selon axe X et axe Y reste constante lorsque le rapport de fissure est nul  $a/r$ .
- Les figures III.12, III.13 et III.14, décrivent que la réponse vibratoire x et y selon axe X et selon axe Y augmente par l'augmentation de la profondeur de la fissure due à diminution la rigidité.
- Les figures III.12, III.13 et III.14, montrent que la réponse vibratoire suivant l'axe y est très importante par rapport à la réponse vibratoire suivant l'axe x lorsque la force excite selon axe x la force d'excitation de balourd et les force excite selon axe y la force d'excitation et le poids.



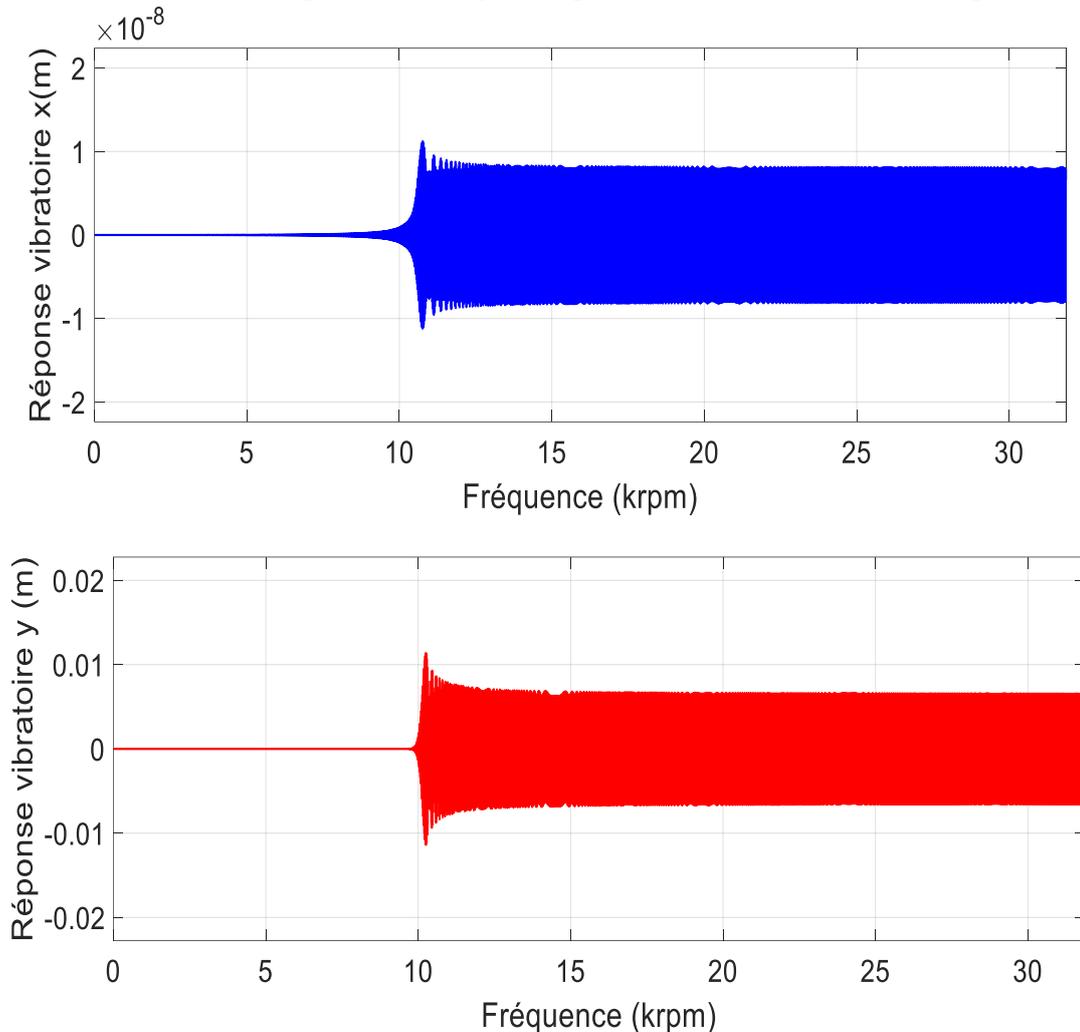
**Figure III.11** : Variation de la réponse vibratoire en fonction de la vitesse de rotation pour  $a/r=0$



**Figure III.12 :** Variation de la réponse vibratoire en fonction de la vitesse de rotation pour  $a/r=0.3$



**Figure III.13 :** Variation de la réponse vibratoire en fonction de la vitesse de rotation pour  $a/r=0.5$



**Figure III.14 :** Variation de la réponse vibratoire en fonction de la vitesse de rotation pour  $a/r=0.7$

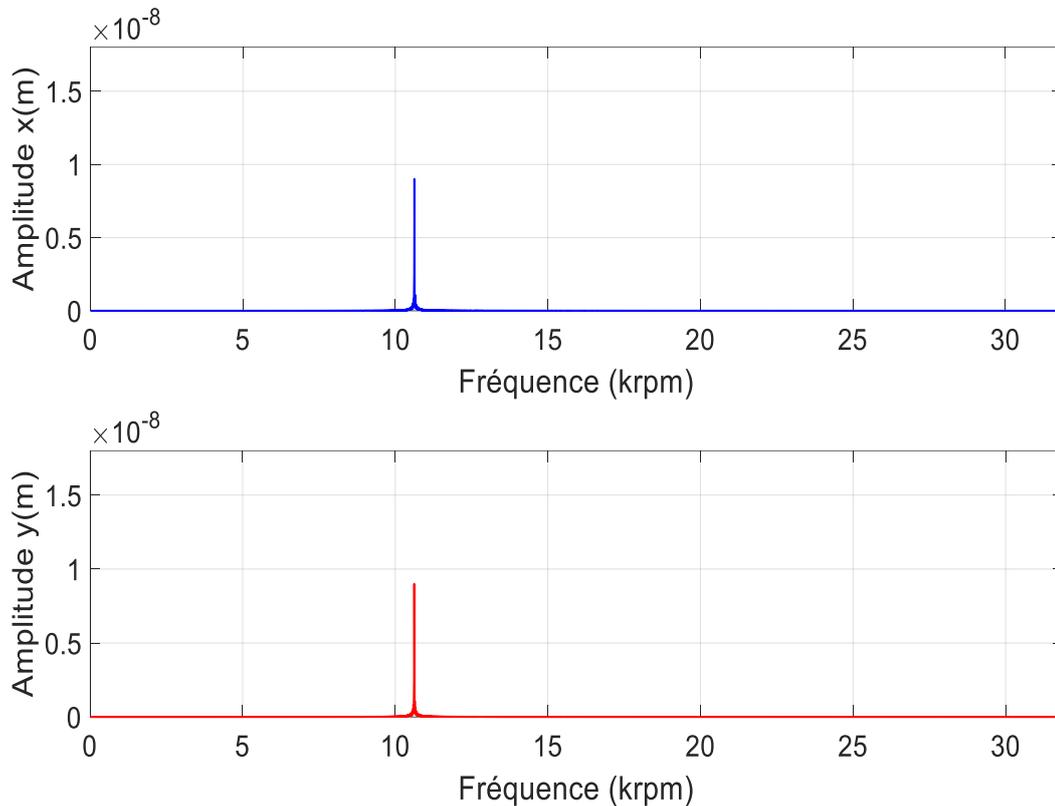
### III.4.4) L'effet de la fissure sur l'amplitude

Les figures III.15, III.16, III.18 et III.19 présentent la réponse fréquentielle (Amplitude)  $x$  et  $y$  en fonction de la vitesse de rotation pour différentes profondeurs de fissure :

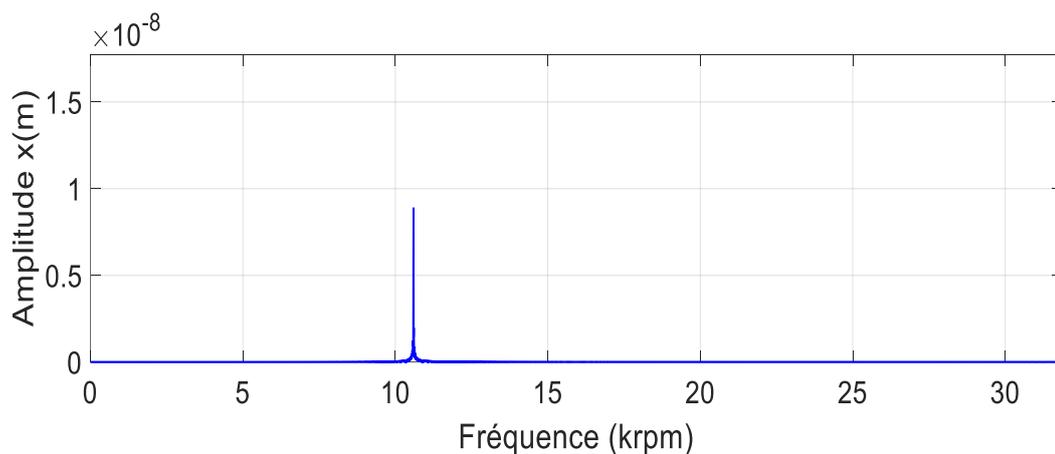
- D'après La figure III.15 on observe que L'Amplitude  $x$  et  $y$  selon les axes  $X$  et  $Y$  reste respectivement constante lorsque le rapport est nul  $a/r$  c'est-à-dire arbre sans fissure.
- Les figures III.15, III.16 et III.17 déterminent que l'Amplitude  $x$  et  $y$  selon les axes  $X$  et  $Y$  respectivement augment par l'augmentation de rapport de fissure de 0.3 à 0.7.
- Le tableau III.6 illustre que l'amplitude selon axe  $X$  est très importante par rapport à l'amplitude selon axe  $Y$ . lorsque la force excite selon axe  $x$  la force d'excitation de balourd et les force excite selon axe  $y$  la force d'excitation et le poids.
- Ceci est expliqué par l'augmentation de taux d'amortissement suite à la diminution de la rigidité. Il faut noter que malgré le comportement non linéaire de la rigidité, la théorie linéaire reste valable parce que la moyenne de la différence de rigidité reste faible même pour  $a/r=0.7$  (0.2%).

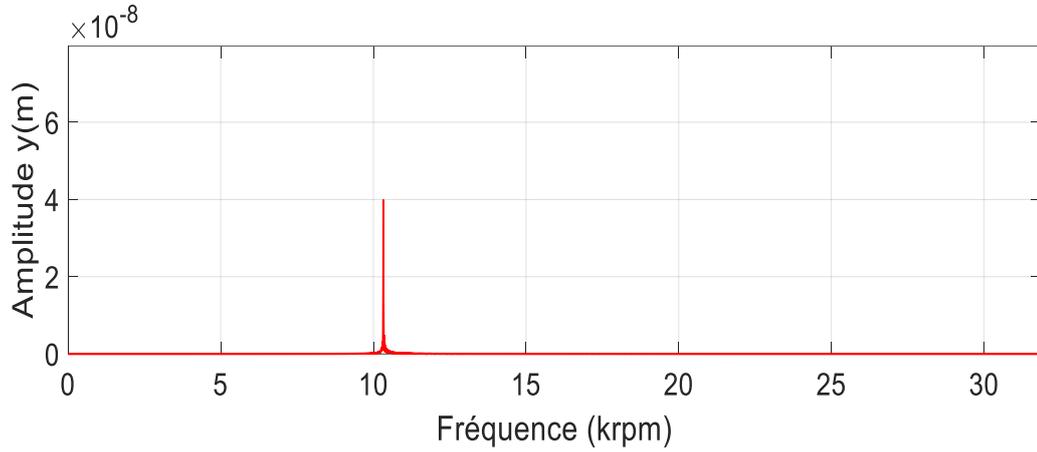
### Chapitre III Etude du Comportement Dynamique d'un rotor Flexible en Régime Transitoire

- Selon l'axe Y, l'amplitude de vibration à la fréquence naturelle (la résonance) augmente dangereusement et exponentiellement lorsque le rapport de la profondeur de fissure s'approche à 75 % de rayon de l'arbre. Celle-ci est due au comportement non linéaire de la rigidité. Il est à noter que la théorie linéaire n'est plus valable lorsque le rapport de fissure est supérieur à 0.3, car, l'amplitude de vibration à la résonance augmente avec diminution la rigidité.

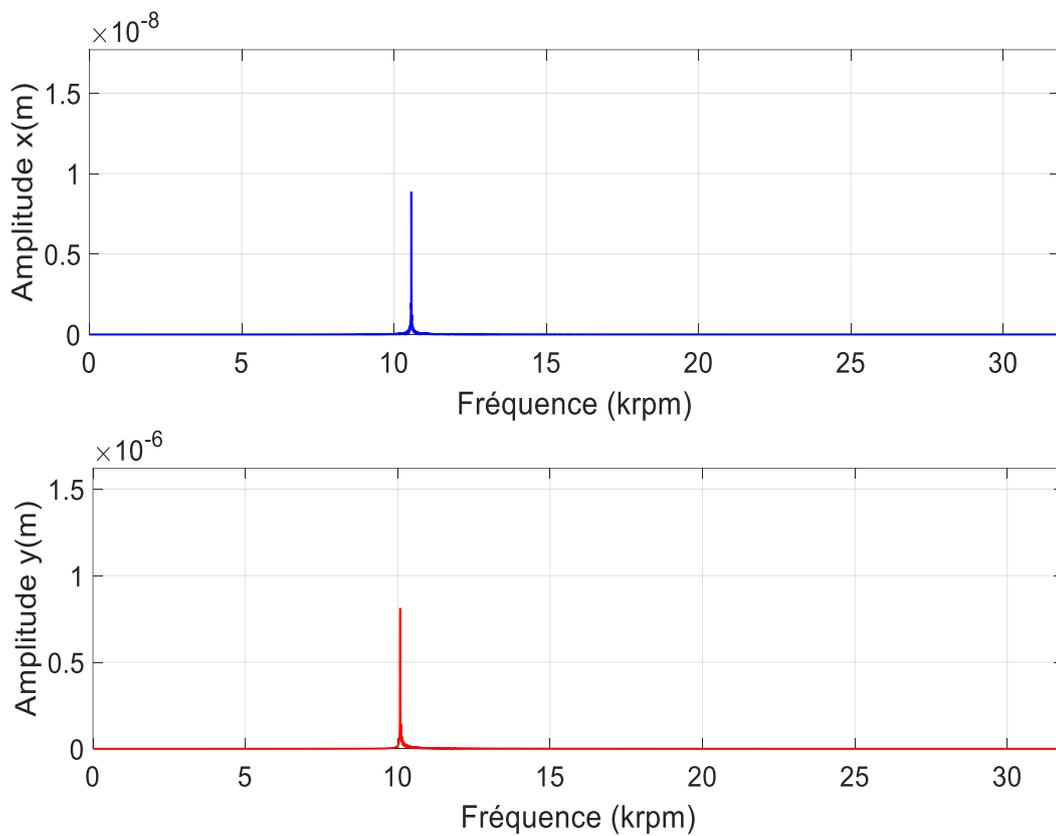


**Figure III.15 :** Variation de la réponse fréquentielle en fonction de la vitesse de rotation pour  $a/r=0$



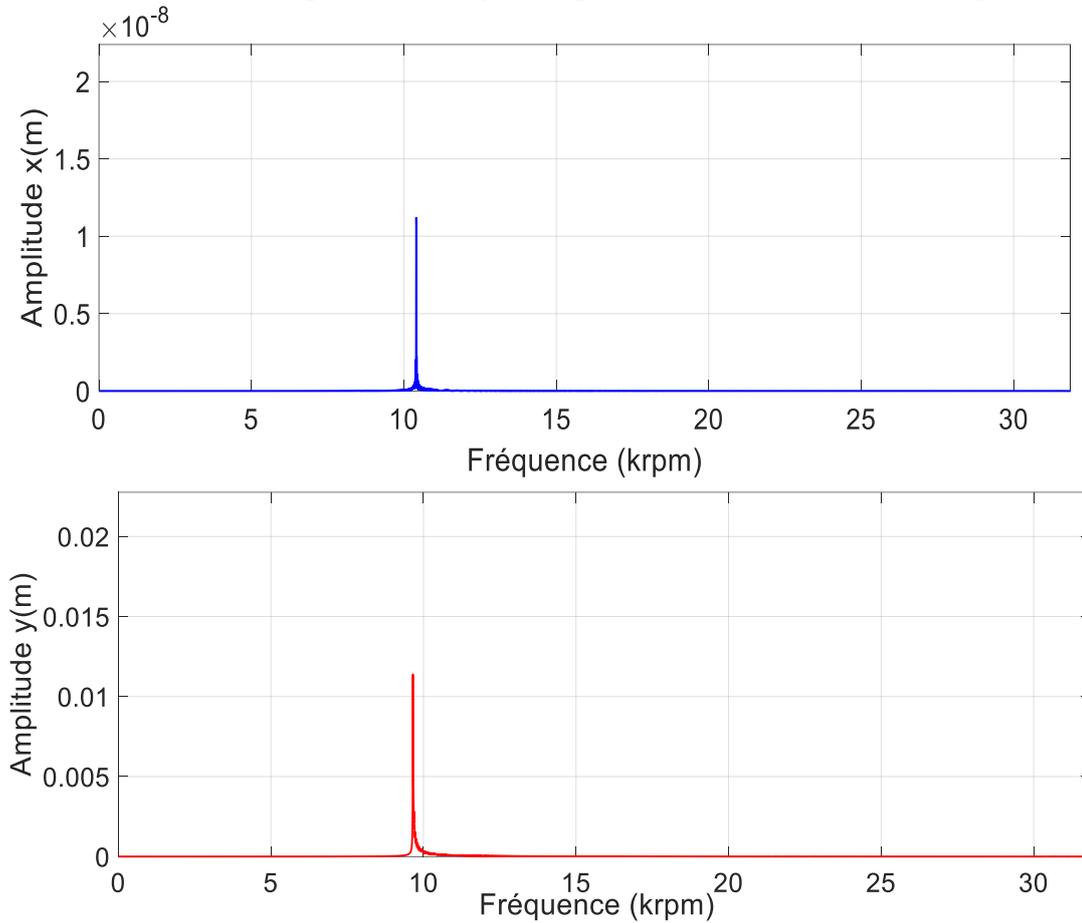


**Figure III.16 :** Variation de la réponse fréquentielle en fonction de la vitesse de rotation pour  $a/r=0.3$



**Figure III.17 :** Variation de la réponse fréquentielle en fonction de la vitesse de rotation pour  $a/r=0.5$

### Chapitre III Étude du Comportement Dynamique d'un rotor Flexible en Régime Transitoire



**Figure III.18 :** Variation de la réponse fréquentielle en fonction de la vitesse de rotation pour  $a/r=0.7$

		Sans fissure	Avec fissure		
		$a/r=0$	$a/r=0.3$	$a/r=0.5$	$a/r=0.7$
Rapport de fissure sure rayon					
L'arbre	Amplitude(m) selon X	$9.007 \times 10^{-9}$	$8.876 \times 10^{-9}$	$8.848 \times 10^{-9}$	$11.19 \times 10^{-9}$
	Amplitude(m) selon Y	$9.007 \times 10^{-9}$	$39.86 \times 10^{-9}$	$810.4 \times 10^{-9}$	$1.138 \times 10^{-2}$

**Table III.6 :** Comparaisons La réponse fréquentielle (A) en fonction du rapport  $a/r$

#### III.5) Conclusion

Dans Ce chapitre, étude du comportement dynamique d'une ligne d'arbre flexible fissurée, supportée par deux paliers rigides en régime transitoire, Les résultats de la simulation numérique obtenus donc la rigidité du rotor, on constate que la rigidité diminue lorsque la taille de la fissure augment et la réponse vibratoire et réponse fréquentielle (Amplitude) du rotor, on constate que lui augment lorsque la taille de la fissure augment.

## Conclusion générale

Ce mémoire établit l'étude du comportement vibratoire d'un rotor flexible fissuré supporté par des paliers rigides, sollicité par une force de type balourd. Un modèle numérique a été développé en basant sur la méthode de Jeffcott pour analyser l'influence de la profondeur de fissure sur les réponses vibratoires en régime transitoire.

Les résultats de la simulation numérique obtenus peuvent être résumés comme suit :

- Selon l'axe X, l'amplitude de la vibration à la fréquence naturelle diminue lorsque le rapport de la profondeur de fissure augmente. Ceci est expliqué par l'augmentation de taux d'amortissement suite à la diminution de la rigidité. Il faut noter que malgré le comportement non linéaire de la rigidité, la théorie linéaire reste valable parce que la moyenne de la différence de rigidité reste faible même pour  $a/r=0.7$  (0.2%).
- Selon l'axe Y, l'amplitude de vibration à la fréquence naturelle (la résonance) augmente dangereusement et exponentiellement lorsque le rapport de la profondeur de fissure s'approche à 75 % de rayon de l'arbre. Celle-ci est due au comportement non linéaire de la rigidité. Il est à noter que la théorie linéaire n'est plus valable lorsque le rapport de fissure est supérieur à 0.3, car, l'amplitude de vibration à la résonance augmente avec diminution la rigidité.
- La localisation de fissurée sur l'arbre dans un des cotés et/ou les frontières des appuis (les paliers) et le disque donc les fréquences diminuent lorsque la fissure déplace vers milieu un peu.
- L'entaille de la fissure ou les paramètres de fissure doit toujours être ne dépasse pas le diamètre de l'arbre pour éviter la rupture brutale.
- Types des fissures dans les arbres selon leurs orientations il y a cela a un grand effet sur la l'arbre et augmentation les fréquences.
- La programmation Matlab aide grandement à avoir des calculs rapides avec une efficacité infaillible pour un effort moindre. Avec Simulink a été développé pour résoudre le problème, une étude comparative montre que les résultats trouvés sont identiques à ceux de la littérature.
- Le SIMULINK aide à avoir des simulations de la dynamique vibratoire d'une manière présentable et bien organisé

## Bibliographie et webographie

- [1] R. A. e. Y. W. H. WESTMANN, «Stress analysis of cracked rectangular beams,» *J.App Mech*, 1967.
- [2] I. W. & D. W. G. R. Mayes, «The vibrational behaviour of a rotating shaft system containing a transverse crack,» *Vibrations in rotating machinery*, 1976.
- [3] A. D. & P. C. A. Dimarogonas, « Vibration of cracked shafts in bending. Journal of sound and vibration,» 1983.
- [4] I. W. & D. W. G. R. Mayes, « Analysis of the response of a multi-rotor-bearing system containing a transverse crack in a rotor,» 1984.
- [5] J. R. Wauer, « On the dynamics of cracked rotors: a literature survey.,» 1990.
- [6] G. M. C. J. & Z. J. Dong, « Parameter identification of a rotor with an open crack,» *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 2004.
- [7] M. A. B. E. A. & S. C. R. Al-Shudeifat, « General harmonic balance solution of a cracked rotor-bearing-disk system for harmonic and sub-harmonic analysis: analytical and experimental approach,» . *International journal of engineering science*, 2010.
- [8] M. A. & B. E. A. Al-Shudeifat, « New breathing functions for the transverse breathing crack of the cracked rotor system: approach for critical and subcritical harmonic analysis,» *Journal of Sound and Vibration*, 2011.
- [9] M. A. Al-Shudeifat, «On the finite element modeling of the asymmetric cracked rotor,» *Journal of sound and vibration*, 2013.
- [10] Z. H. L. C. Y. & S. Lu, «Nonlinear response analysis for a dual-rotor system with a breathing transverse crack in the hollow shaft,» 2016.
- [11] A. Doct.GM. FellahFELLAH, « Influence des fissures sur le comportement vibratoire des rotors,» *PhD Thesis.*, 2019.
- [12] B. Abdelilah, «COMPORTEMENT VIBRATOIRE D'UN ROTOR FLEXIBLE,» *UNIVERSITÉ IBN-KHALDOUN DE TIARET, master*, 2018/2019.
- [13] R. GHARBI, « ANALYSE DES PHENOMENES VIBRATOIRES EN DYNAMIQUE DES ROTORS MODELISATION ET EXPERIMENTATION,» *Université de BATNA ,Faculté de technologie, Département de mécanique.*, 2014.
- [14] L. HAMIDI, «Développement d'une stratégie pour la détection et le suivi de fissures dans les rotors tournants,» *thèse de doctorat sherbrooke 'Québec),CANADA*, 1994.
- [15] P. D. rer et n. E. Krii.me, «Dynamics of Rotors,» *Springer Berlin Heidelberg (1993)*, (1993).

## Résumé

L'un des scénarios catastrophiques pour les machines tournantes est la cassure des lignes d'arbres, sous l'effet de la propagation des fissures non détectées. La dynamique du rotor s'intéresse à l'étude du comportement vibratoire des machines tournantes afin. Dans ce mémoire on a traité un cas de rotor fissuré par la méthode Jeffcott et la méthode des éléments finis où on s'intéresse à l'étude du comportement vibratoire d'un rotor flexible qui contient un disque au centre supporté par des paliers rigides en régime transitoire. Notre système est soumis à une force excitatrice de type balourd. La vibration du rotor est contrôlée par des paliers. Pour les structures complexes Etudier l'effet de fissure de type transversale sur les rigidités équivalentes et le comportement dynamique d'une ligne d'arbre flexible fissurée supportée par deux paliers rigides en régime transitoire. Pour cela, un modèle mathématique simplifié de rotor appelé modèle de Jeffcott a été choisi. Tous dépendent la profondeur de la fissure du l'arbre sur la réponse vibratoire et la rigidité. Notre objectif est d'étudier l'effet de l'influence de la profondeur de fissure sur les rigidités équivalent. La présence de la fissure influe directement sur la rigidité du rotor, on constate que la rigidité diminue lorsque la taille de la fissure augmente, Les résultats obtenus constituent une contribution intéressante aux concepteurs des machines tournantes

**Mots clés :** Dynamique, comportement vibratoire, vibration, arbre flexible, palier, disque, balourd, structure, fissure, arbre.

## Abstract

one of the catastrophic scenarios for rotating machines is the breakage of the shaft lines due to the propagation of undetected cracks. Rotor dynamics is interested in the study of the vibratory behavior of rotating machines in order to. In this paper we have treated a case of a cracked rotor using the Jeffcott method and the finite element method where we are interested in the study of the vibratory behavior of a flexible rotor which contains a disk at the center supported by rigid bearings in transient regime. Our system is subjected to an unbalanced excitation force. The vibration of the rotor is controlled by bearings. For complex structures Study the effect of transverse cracking on the equivalent stiffnesses and the dynamic behavior of a cracked flexible shaft line supported by two rigid bearings in transient regime. For this, a simplified mathematical model of the rotor called Jeffcott model was chosen. All depend on the depth of the shaft crack on the vibratory response and stiffness. Our objective is to study the effect of the influence of the crack depth on Our objective is to study the effect of the influence of crack depth on equivalent stiffnesses. The presence of the crack has a direct influence on the rotor stiffness, we find that the stiffness decreases as the size of the crack increases. The results obtained are an interesting contribution to the designers of rotating machines.

**Keywords:** Dynamics, vibration behavior, vibration, flexible shaft, bearing, disc, unbalance, structure, crack, shaft.

## ملخص

أحد السيناريوهات الكارثية للماكينات الدوارة هو كسر خطوط الأشجار، بسبب انتشار التشققات غير المكتشفة. تهتم ديناميكيات الدوار بدراسة السلوك الاهتزازي للماكينات الدوارة كذلك. في هذه الورقة تم التعامل مع حالة الدوار المكسور من قبل طريقة جيفكوت وطريقة العنصر المحدود عندما يتعلق الأمر بدراسة السلوك الاهتزازي للدوار المرن الذي يحتوي على قرص في المركز تدعّمه المحامل الصلبة في الوضع المؤقت. يخضع نظامنا لقوة من نوع عدم التوازن. يتم التحكم في اهتزاز الدوار بواسطة المحامل. بالنسبة للهياكل المعقدة افحص تأثير التشقق العرضي على الصلابة المكافئة والسلوك الديناميكي لخط العمود المرن المشقوق المدعوم بمحملين صلبين في الوضع المؤقت. ولهذا، تم اختيار نموذج دوار رياضي مبسط يسمى نموذج جيفكوت. وتعتمد جميعها على عمق صدع العمود على استجابة الاهتزاز و الصلابة. ويؤثر وجود الشق بشكل مباشر على صلابة الدوار، حيث يتبين أن الصلابة تقل كلما زاد حجم الشق.

**الكلمات المفتاحية:** الديناميكيات، سلوك الاهتزاز، الاهتزاز، العمود المرن، المحمل، القرص، عدم التوازن، الهيكل، الشق، العمود



