

République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique



Université Ibn Khaldoun de Tiaret

Faculté des Sciences Appliquées

Département de Génie Mécanique



MÉMOIRE DE FIN D'ETUDES

Pour l'obtention du Diplôme de Master

Domaine : Sciences et Technologie

Filière : Electromécanique

Parcours : Master

Spécialité : Maintenance Industrielle

Thème

Analyse numérique par éléments finis étendus (X-FEM) de structures fissurées

Préparé par :

BENMERABET Saada

Soutenu publiquement le :09 / 11 / 2020, Devant le jury composé de :

M. Mechekour Elhadi	Maître de Conférences «A"(Univ. Ibn Khaldoun)	Président
M. Baltach Abdelghani	Maître de Conférences "A"(Univ. Ibn Khaldoun)	Examinateur
M. Makhfi souad	Maître de Conférences "A" (Univ. Ibn Khaldoun)	Examinateur
M. Zagane Mohammed	Maître de Conférences "A" (Univ. Ibn Khaldoun)	Encadreur

Année universitaire : 2019 - 2020

Résumé:

La modélisation des structures fissurées par les éléments finis standard est limitée en termes de propagation de fissure. Le but de cette étude est de déterminer numériquement le facteur de concentration de contraintes K_t dû à la présence d'un trou circulaire dans une plaque droite soumise à un chargement de traction. L'étude s'étend à l'effet de la contrainte appliquée, de la taille et de la forme du trou sur le facteur de concentration de contrainte. Ensuite, par la méthode des éléments finis étendus (X-FEM) nous avons déterminé automatiquement l'initiation et la propagation de la fissure. La modélisation sera réalisée à l'aide du code de calcul par éléments finis ABAQUS.

Mots clés: Méthode des éléments finis, Facteur de concentration des contraintes K_t , Fissuration, X-FEM, Contrainte

ملخص:

إن نمذجة الهياكل المشققة بواسطة طريقة العناصر المنتهية محدودة من حيث انتشار الشقوق. الهدف من هذه الدراسة هو التحديد العددي لعامل تركيز الإجهاد K_t بطريقة العناصر المنتهية. عامل تركيز الإجهاد ناتج عن وجود ثقب دائرية في صفيحة مستقيمة تخضع لقوة شد. تمت الدراسة إلى تأثير الإجهاد المطبق وحجم الثقب وشكله على عامل تركيز الإجهاد. ثم ، بعد ذلك ، من خلال طريقة العناصر المحدودة الممتدة (X-FEM) نحدد تلقائياً بدء وانتشار الكراك. يتم تنفيذ النمذجة باستخدام كود حساب العنصر المنتهية ABAQUS.

الكلمات المفتاحية: طريقة العناصر المنتهية ، عامل تركيز الإجهاد K_t ، التشقق ، X-FEM ، الإجهاد

Abstract:

Modeling of structures cracked by finite elements method is limited in terms of crack propagation. The aim of this study is to determine numerically the stress concentration factor K_t by the finite element method. The stress concentration factor is caused by the existence of circular holes in a straight plate subjected to a tensile load. The study extends to the effect of applied stress, hole size and shape on the stress concentration factor. Then, by the method finite elements extended (X-FEM), we automatically determine the initiation and the propagation of the crack. The modeling will be carried out using the ABAQUS finite element calculation code.

Keyword: Finite element method, Stress concentration factor K_t , Crack, X-FEM, Stress

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail A mes très chers parents

Affables, honorables, aimables : vous représentez pour moi le symbole de la bonté par excellence, la source de tendresse et l'exemple du dévouement qui n'a pas cessé de m'encourager et de prier pour moi ;

Votre prière et votre bénédiction m'ont été d'un grand secours pour mener à bien mes études ;

Vous avez tout fait pour que vos enfants suivent le bon chemin dans leurs vie et leurs études ;

Je vous dédie ce travail en témoignage de votre profond amour ;

Mais Aucune dédicace ne saurait être assez éloquente pour exprimer ce que vous méritez pour tous les sacrifices que vous n'avez cessé de me donner depuis ma naissance, durant mon enfance et même à l'âge adulte ;

Ce travail est le fruit de vos sacrifices ;

*Puisse ALLAH, le tout puissant, vous préserver et vous accorder santé,
Longue vie et bonheur.*

A mes chers frères et mes chères sœurs pour leurs encouragements et leur soutien le long de ma formation.

Ce travail est le fruit de mon promotrice monsieur ZAGANE Mohammed El Sallah, que je remercié particulièrement pour son soutien, présence et générosité.

A mes chers cousins et mes amies, pour leurs aides,

Conseils, soutien et encouragement à la réalisation de ce travail.

A tous les nombres de ma famille, petits et grands.

A tous ceux qui me connaissent.

SAAOA

REMERCIEMENTS

Je remercie ALLAH le tout puissant de m'avoir donné le Privilège et la chance d'étudier et de suivre le chemin du Savoir et de la connaissance.

J'adresse mes remerciements à mon encadreur *M. ZAGANE MOHAMMED EL SALLAH* maître de conférences classe "B" pour ses conseils et le partage de ses compétences scientifiques. J'ai également apprécié la grande liberté qu'il m'a accordée pour finaliser ce mémoire ainsi que sa passion pour la recherche et sa bonne humeur toujours présente.

On remercie tout autant Monsieur *MECHEKOUR ELHADI* maître de conférences classe "A" de l'université Ibn-Khaldoun de Tiaret pour avoir accepté de présider le jury de notre mémoire.

Mes remerciements vont également aux membres de jury à messieurs *Baltach Abdelghani* maître de conférences classe "A" et *MAKHFI SOUAD* maître de conférences classe "B" à l'université de Ibn Khaldoun Tiaret, qui m'ont fait l'honneur d'accepter d'être les examinateurs de cette contribution et de disposer de leurs temps pour pouvoir juger ce travail.

Enfin, je remercie chaleureusement Mes parents, mes frères, mes sœurs, et toute ma famille
Pour leur soutien et leurs encouragements

Et Je remercie tous les gens de mon passage, que j'ai connu ou rencontré dans ma vie sociale et universitaire.

SOMMAIRE

Dédicace	I
Remerciements	II
Résumé	III
Sommaire	IV
Liste des figures	VIII
Liste des tableaux	XI
Liste des symboles	XII
Introduction générale.....	1

Chapitre I : Approche à la mécanique de la rupture

I.1. Introduction	3
I.2. Généralité sur la mécanique de rupture	4
I.2.1 Effet d'entaille.....	5
I.3. La mécanique de rupture par fissuration	7
I.3.1. Modèles de la fissuration des structures	8
I.3.2. Les 3 modes d'ouverture d'une fissure.....	8
I.3.3. Le mécanisme de rupture	9
I.3.4. Les zones délimitent le voisinage d'un point de fissure	12
I.4. Les critères de propagation	13
I.4.1. Critère d'amorçage.....	14
I.4.2. Critère de bifurcation	14
I.4.3. Critère de stabilité	16
I.5. Les facteurs de la rupture	16
I.5.1. Facteur de concentration de contraintes	16
I.5.2. Facteur d'intensité de contrainte.....	18
I.5.2.1. Champs de contrainte et déplacements	19
I.5.2.2. La singularité	21
I.5.2.3. Critère de rupteur	22
I.5.3. Le taux de restitution d'énergie	22
I.5.4. L'intégrale de Rice	23
I.5.5. La relation entre J, G, K.....	24

I.6. Méthodes d'enrichissement traitant de la fissuration	25
I.7. concentration de contrainte	26
Introduction	26
Concentration de contrainte dans une plaque trouée en traction	27
I.7.2.1. Champ de contrainte dans une plaque trouée en traction simple	27
I.7.2.2. Champ de contraintes loin du trou	28
I.7.2.3. Concentration de contrainte au bord du trou	29
Concentration élastique linéaire de contrainte	30
I.7.3.1. Entaille circulaire dans une plaque infinie sous chargement de traction	30
I.7.3.2. Facteurs élastiques linéaires de concentration de contrainte K_t	31
I.7.3.3. Facteur de Concentration de contrainte	32
I.7.3.4. Facteur de concentration de contrainte pour une entaille elliptique	33
Méthodes utilisées pour connaître les facteurs de concentration de contrainte	34
I.7.4.1. Théorie de l'élasticité	34
I.7.4.2. Photoélasticité	35
I.7.4.3. Jauges électriques	36
I.7.4.4. Autre méthode expérimentale	36
I.7.4.5. Méthode Analogique	37
I.7.5. Moyens de diminuer les effets des concentrations des contraintes	37
Conclusion	25
Chapitre II : la méthode des éléments finis étendus (XFEM)	
II.1. Introduction	39
II.2. Méthodes classiques basées sur les éléments finis	40
II.2.1. Historique de méthodes des éléments finis (FEM)	40
II.2.2. Modélisation de la fissuration par la MEF	41
II.2.2.1. Méthodes de remaillage	41
II.2.2.2. Elimination d'éléments	40
II.2.2.3. Méthode des éléments cohésifs	42
II.3. Méthodes non basées sur les éléments finis	43
II.3.1. Méthode des éléments de frontières (BSF)	43
II.3.2. Méthode sans maillage	44
II.4. Méthodes basées sur la partition de l'unité	44

II.4.1.	La partition de l'unité (PUM)	44
II.4.2.	Méthodes des éléments finis étendue (XFEM)	45
II.4.3.	Autres méthodes utilisant la partition de l'unité	45
II.5.	Méthode des éléments finis	47
II.5.1.	Avantage de la méthode des éléments finis	47
II.5.2.	Procédures de base de la méthode des éléments finis	47
II.5.3.	Les différentes formulations de la méthode des éléments finis	49
II.5.4.	Formulation des éléments finis	50
II.5.5.	Procédure d'analyse par éléments finis	51
II.5.6.	Grandes lignes de la méthode des éléments finis	51
II.5.7.	La modélisation des structures fissurées	52
II.5.8.	Modélisation des fissures par la méthode des éléments finis	52
II.5.9.	Formulation de la méthode des éléments finis à la présence d'une fissure	53
II.5.10.	La défaillance de la méthode des éléments finis dans le calcul des matériaux fissurés	54
II.6.	La méthode des éléments finis étendue (X-FEM)	55
II.6.1.	Revue de la littérature	55
II.6.2.	formulation standard de la méthode des éléments finis étendus	57
II.6.3.	La modélisation d'une fissure selon la X-FEM	59
II.6.4.	Les difficultés techniques de mise en œuvre	61
II.6.5.	Description de la fissure	61
II.6.6.	Intégration numérique	61
II.6.7.	Amélioration de la méthode XFEM	62
II.6.7.1.	La méthode LEVEL-SET	62
II.6.7.2.	Le cas tridimensionnel	63
II.6.7.3.	La convergence de la méthode XFEM	63
II.6.7.4.	Les avantages de la méthode X-FEM	64
II.6.7.5.	La difficulté de la méthode X-FEM	65
	Conclusion	66

Chapitre III : Résultats Et Discussions

III.1.	Introduction	67
III.2.	Présentation du code de calcul Abaqus/CAE	67
	III.2.1 Code de calcul Abaqus/CAE	67
	III.2.2 Système d'unités dans le code de calcul Abaqus.....	67
III.3.	Modélisation tridimensionnelle	68
	III.3.1 Description géométrique et les conditions aux limites.....	68
	III.3.2 Paramètre analysés	70
	III.3.3 Les propriétés mécaniques	70
	III.3.4 Maillage	70
	III.3.5 Effet de la taille de l'élément utilisé (test de convergence)	71
	III.3.6 La méthode des éléments finis étendu (XFEM)	72
III.4.	Résultats et discussions	73
	III.4.1 Évolution des contraintes pour les différents cas étudiés	73
	III.4.1.1 Effet du chargement	73
	III.4.1.2 Effet du chargement sur le facteur K_t	77
	III.4.1.3 Effet de la taille du trou.....	77
	III.4.1.4 Effet de la taille du trou sur le facteur K_t	78
	III.4.1.5 Effet de la forme du trou	79
	III.4.1.6 La répartition des contraintes normales σ_{xx} et σ_{yy}	80
	III.4.1.7 Effet de la forme du trou sur le facteur K_t	81
III.5.	Résultat de la fracture par la X-FEM	82
	III.5.1 Effet de chargement	82
	III.5.2 Effet de la taille du trou	83
	III.5.3 Effet de la forme du trou	83
	Conclusion	85
	Conclusion Générale	86
	Références bibliographiques	87

Liste des figures et des tableaux

Liste des figures

Chapitre I

Figure I.1 : Fissure dans un milieu continu.....	4
Figure I.2 : Exemple de rupture fragile	5
Figure I.3 : Exemple de rupture ductile	5
Figure.I.4: Schéma de flux des forces : a) Plaque soumise à une force de tension. b) Plaque avec entaille.....	6
Figure .I.5: Géométrie définissant une entaille simple	6
Figure. I.6: Configurations des entailles de bords	7
Figure I.7 : Modes de rupture.....	9
Figure.I.8: Schématisation de la séquence de formation de fissures sous l'action d'un.....	10
Figure I.9 : Les différents types des fissures	11
Figure I.10 : Les zones de champs mécaniques	12
Figure I.11 : Plasticité en point de fissure.....	13
Figure I.12 : Fond de fissure	14
Figure.I.13:Différents paramètre géométrique définissant une entaille simple selon et.....	17
Figure. I.14: Définition de la contrainte globale, maximale et nominale	17
Figure. I.15: La variation de FIC	20
Figure.I.16: champ des contraintes au voisinage de la fissure.....	18
Figure.I.17 : la distribution normale et critique des contraintes à fond de fissure correspondant respectivement à K_I et K_{IC}	21
Figure I.18: Relation entre G et la complaisance de la structure	22
Figure I.19 : Contour d'intégration	22
Figure I.20:Détermination de J par la méthode de la complaisance	23
Figure I.21 : Plaque percée d'un trou circulaire de rayon a et soumise, loin du trou, à une sollicitation de traction simple d'intensité σ^∞	27
Figure I.22 : Représentation par lignes de niveaux du champ de contraintes autour d'un trou dans une plaque en traction selon la direction	29
Figure I.23: distribution des contraintes autour d'une entaille circulaire.....	30
Figure I.24 : Profils des contraintes radiales et ortho radiale normalisées par la contrainte appliquée en partant du pôle ($\theta = 0$) et de l'équateur ($\theta = \pi/2$) en fonction de la distance relative r/a par rapport au trou.	32

Liste des figures et des tableaux

Figure I.25: plaque contenant une entaille elliptique avec a et b les deux demi axes soumis à un chargement de traction	32
Figura I.26 : Distribution des contraintes à une discontinuité	34
Figure I.27:Montage de polariscope	34
Figure I.28 : Photoélasticité d'une plaque trouée en traction.	35
Figure I.29 : L'emplacement de jauges sur la plaque trouée	35
Figure I.30 : analogie entre un écoulement et la distribution des contraintes.....	36
Figure I.31 : effet d'un trou dans une plaque	37
Figure I.32: moyen de diminuer les concentrations des contraintes	38
Chapitre II	
Figure. II.1: Méthode du relâchement de nœuds	41
Figure.II.2: Méthode des éléments finis : Exemple de calcul d'une plaque fissurée fixe soumise à un chargement brutal de traction.....	48
Figure. II.3: Modèle de zone cohésive. (a) Maillage. (b) loi de comportement	43
Figure. II.4: Boite à fissure : les 8 éléments ont un sommet sur le fond de fissure.	52
Figure. II.5: Représentation des maillages avec et sans fissure. (a) Élément fini fissuré. (b) Élément fini sain.....	53
Figure II.6 : Définition de la géométrie de la fissure depuis le couple de fonction de niveau	58
Figure.II.7: Stratégie d'enrichissement pour une fissure quelconque placée sur un maillage.....	59
Figure. II.8: Fissure placée sur un maillage uniforme	60
Figure.II.9: Intégration numérique prenant en compte une fissure avec la X-FEM	61
Figure.II.10: La stratégie level-set	62
Figure.II.11: Représentation d'une fissure en 3D	63
Figure.II.12: Les nœuds « carrés » sont enrichis par les fonctions singulières.....	4
Figure.II.13-Représentation de la première fonction de fond de fissure	65
Figure.II.14 : Exemple de sous division des éléments	66

Liste des figures et des tableaux

Chapitre III

Figure.III.1 Interface ABAQUS 2017.....	67
Figure.III.2 Étapes à suivre pour la programmation	68
Figure III.3: Représentation schématique du modèle en 3D (a) : forme circulaire, (b) : forme elliptique, (c) : condition aux limites	69
Figure III.4 : courbes déterminer les propriétés mécaniques du matériau	70
Figure.III.5 Maillage pour le modèle étudié	71
Figure.III.6 Comparaison entre les valeurs de la contrainte d'ouverture σ_{yy} en fond d'entaille en fonction du nombre d'éléments générés pour le maillage	72
Figure III.7 : Distribution de la contrainte équivalente et normale pour un chargement mécanique P=20MPa.....	73
Figure III.8 Distribution de la contrainte équivalente et normale pour un chargement mécanique P=40MPa.....	74
Figure III.9: Distribution de la contrainte équivalente et normale pour un chargement mécanique P=60MPa.....	75
Figure III.10: Variation des contraintes équivalente de Von Mises et normales en fonction de la charge appliquée	76
Figure III.11: Variation du FCC en fonction du chargement appliqué.....	77
Figure III.12: Effet de la taille du trou sur le niveau et la distribution des contraintes équivalente σ_{VM} induites localement dans la plaque autour du trou	78
Figure III.13: Variation du FCC en fonction de la taille du trou	78
Figure III.14 : Effet de la forme du trou sur le niveau et la distribution des contraintes équivalentes SVM induites dans la plaque autour de ce défaut.....	79
Figure III.15: Variation des contraintes nominales pour différentes forme elliptique en fonction de largeur W.....	81
Figure III.16 : Variation du FCC en fonction de la forme du trou (rapport a /b)	82
Figure III.17: type de fracture prédite à partir de chargement 60MPa	82
Figure III.18: type de fracture prédite à partir de diamètre du trou 50mm	83
Figure III.19: type de fracture prédite à partir de différentes formes du trou	84

Liste Des Tableaux

Tableau .III.1 : Système d'unités pour le code de calcul Abaqus	68
Tableau .III.2 : les démentions de modèle étudié	69
Tableau .III.3 : les démentions de modèle étudié	70
Tableau.III.4 propriétés mécaniques de l'aluminium 2024-T3.....	70

Liste des symboles

Ω	Domaine
σ	Contrainte
ε	Déformation
P_0	Pression moyenne
q	Coefficients fonction de l'angle ψ
σ_{\max}	Contraint maximal en fond d'entaille
σ_g	Contraint global
σ_N	Contraint nominale
r, θ	Coordonnée polaires
r_p	Taille de la zone plastique
σ_E	La limite d'élasticité
γ	Coefficient de sécurité
K_C	Ténacité du matériau
G	L'énergie de Griffith
E	Module d'Young
G_c	Taux de restitution critique
a_c	La longueur critique
k	Facteur d'intensité de contraintes
K_{IC}	Facteur d'intensité critique
K_t	Facteur de concentration de contrainte
τ_{\max}	La contrainte de cisaillement maximal
τ_n	La contrainte de cisaillement nominal
σ_{ij}	Tenseur de contraint
f_{ij}	Fonction de θ l'angle du plan
λ, μ	Coefficients de lamé

Liste des symboles

γ	Coefficient de poisson
$\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}$	Composant du tenseur de contrainte
K_I	Facteur d'intensité de contrainte (FIC) de mode I
K_{II}	Facteur d'intensité de contrainte (FIC) de mode II
K_{III}	Facteur d'intensité de contrainte (FIC) de mode III
J	L'intégral de contour
We	La densité d'énergie de déformation élastique
Wp	L'énergie potentielle
X-FEM	Méthode des éléments finis étendus
MEF	Méthode des éléments finis
r	Distance du point fissure aux nœuds
N_j	Fonction de forme
F_j	Fonction d'enrichissement singulier
N_d	Ensemble des nœuds enrichis par la discontinuité
N_p	Ensemble des nœuds enrichis par la singularité
u_i	Degré de liberté (vectoriel) classique aux nœuds i
a_i, b_i	Constants présente le degré de liberté (vectoriel) aux nœuds
H	Fonction d'enrichissement discontinue
FCC	Facteur de concentration des contraintes
FIC	Facteur d'intensité des contraintes

Introduction

Générale

Introduction Générale

La mécanique de la rupture est une science assez récente qui a vu la majeure partie de ses développements théoriques au cours du XX^{ème} siècle. En parallèle, le phénomène de fatigue a intéressé la communauté scientifique une centaine d'années plus tôt, dès le début du XIX^{ème} siècle. La problématique de ces deux domaines de la mécanique est identique : il s'agit pour l'ingénieur de prévoir le comportement des structures jusqu'à leur ruine. Les avancées scientifiques dans la prévision du comportement des structures et le besoin de réduire les coûts rendent ces problématiques de plus en plus importantes dans le processus de conception au sein de l'industrie mécanique, par exemple en aéronautique.

La mécanique de la rupture est la science qui étudie le comportement des structures fissurées. Elle fournit les outils nécessaires pour l'analyse de l'intégrité de structures. Il s'agit d'un domaine scientifique relativement récent puisqu'il est apparu après la première guerre mondiale, notamment avec les études de Griffith en 1920 et d'Irwin en 1957.

L'importance croissante de la simulation numérique dans le processus de conception industriel a entraîné une augmentation importante du nombre de problèmes accessibles par les méthodes numériques modernes. Que ce soit en simulation du phénomène de rupture ou dans d'autres domaines de la mécanique, la méthode des Éléments Finis a été largement développée et utilisée. Elle est désormais capable d'aller bien au-delà des simulations statiques élastiques linéaires, et de traiter le cas des non linéarités matérielles ou comportementales ainsi que les problèmes de dynamique rapide. Un certain nombre de problèmes sont cependant plus difficilement accessibles à la méthode des éléments finis. La difficulté vient alors du fait que l'on doit représenter explicitement la discontinuité à l'aide du maillage et ce quel que soit sa nature (interface entre deux matériaux, changement de phase, fissure, interaction fluide-structure...).

Le but de toute recherche est toujours de comprendre l'initiation et la propagation des fissures, qui met fin à la durée de vie des structures. L'objectif de ce travail est d'étudier numériquement l'application de la méthode des éléments finis sur des plaques pour connaître et analyser les contraintes et les concentrations de contraintes courantes telles que les trous et les entailles. Afin de déterminer les facteurs de concentration de contraintes ainsi que les distributions de contraintes. Le comportement mécanique de la plaque avec des trous de formes diverses est étudié par des essais de traction, et nous utilisons dans nos recherches la technique de X-FEM pour visualiser directement la propagation de la fissure dans la structure.

En effet, ce mémoire contient quatre chapitres en plus d'une introduction, une conclusion et des

Introduction Générale

références bibliographiques.

La rédaction de ce document est organisée de la façon suivante :

Le premier chapitre est une recherche bibliographie sur la mécanique de la rupture d'un point de vue théorique, traitant essentiellement de la fissuration. Il y est rappelé les différentes propriétés caractérisant l'état mécanique au voisinage de la pointe de fissure où entaille.

Le deuxième chapitre présente une description sur le facteur de concentration de contrainte et les différentes techniques de mesure.

Dans le troisième chapitre est consacré sur la méthode des éléments finis étendus (X-FEM). C'est en effet, cette méthode moderne que nous avons choisi de développer dans le logiciel de calcul Abaqus, au vu des avantages qu'elle présente pour la simulation numérique de propagation arbitraire de fissure.

Tandis que le quatrième chapitre, nous allons fait la modélisation de la structure par simulation numérique basée sur la méthode des éléments finis. L'analyse permet de déterminer le champ des contraintes de Von Mises et les contraintes normales dans la plaque à partir du chargement de traction pour les différentes cas étudiés, ensuite l'analyse de la variation du facteur de concentration des contraintes au bord et loin dans les plaques ensuite prédire la propagation de la fissure par la méthode des éléments finis étendus (X-FEM).

Enfin, une conclusion générale sur les principaux aspects abordés dans cette étude et les résultats obtenus ainsi que des perspectives sur l'importance de l'analyse numérique éléments finis 3D sur le comportement mécanique des plaques troués sous chargement statique, et des discussions des résultats obtenus ont été présentées.

CHAPITRE I :
APPROCHE A LA
MECANIQUE DE LA
RUPTURE

I.1. Introduction

La mécanique de la rupture a été introduite par Griffith [1] vers 1920. L'objectif de la mécanique de la rupture est de caractériser le comportement à la fissuration des structures à l'aide de paramètres quantifiables au sens de l'ingénieur, notamment le champ de contraintes, la taille de la fissure et la résistance à la fissuration du matériau. Les premiers développements théoriques d'analyse des champs de déplacements, déformations et contraintes au voisinage d'une fissure ont été entrepris par Westergaard vers 1940. Une théorie de la rupture basée sur la stabilité de la fissure valable uniquement pour les matériaux fragiles, ne tenant pas compte de la dissipation de l'énergie due à la plastification. En 1948 Irwin proposa une modification de la théorie de Griffith en incluant justement dans le bilan énergétique, l'énergie due à la plastification, pour que l'approche de Griffith soit applicable aux matériaux ductiles.

En 1956, un groupe de chercheurs de la marine américaine, ont développé le concept du taux de restitution d'énergie à partir de la théorie de Griffith sous une forme facilement exploitable par les concepteurs de structures. En 1957, s'appuyant sur les travaux de Westergaard [2], Irwin [3] montra que les déplacements et les contraintes au voisinage de l'extrémité d'une fissure peuvent être décrits à l'aide d'un paramètre unique relié au taux de restitution d'énergie. Ce paramètre caractérise l'état de sollicitation dans la région dans laquelle la rupture se produit, il est appelé facteur d'intensité de contrainte (FIC).

La période s'étaler de 1960 à 1980 a vu une intensification des recherches sur la rupture avec deux écoles concurrentes. D'une part, les tenants de l'approche utilisant la mécanique linéaire de la rupture et d'autre part ceux qui s'intéressaient essentiellement à la plastification qui se développe à l'extrémité d'une fissure. Pour tenir compte de l'effet de cette plastification sur les champs de contraintes et de déplacements à l'extrémité d'une fissure, plusieurs auteurs comme Barenblatt [4] proposèrent ce qu'on appelle une correction de la zone plastique. La taille de la fissure est alors augmentée de cette zone plastique pour retrouver les champs de contraintes élastiques décrits par le FIC. Plus tard, Hutchinson en 1968, Rice et Rosengren (HRR) [5] développèrent un nouveau paramètre appelé intégrale J. Ce paramètre décrit parfaitement la répartition des contraintes dans les zones plastifiées (champ HRR).

I.2. la Mécanique de la rupture

Localement, la rupture est caractérisée par la séparation irréversible d'un milieu continu Ω en deux parties distinctes. On définit alors une fissure comme étant la surface géométrique S de séparation (Fig1.1). [6]

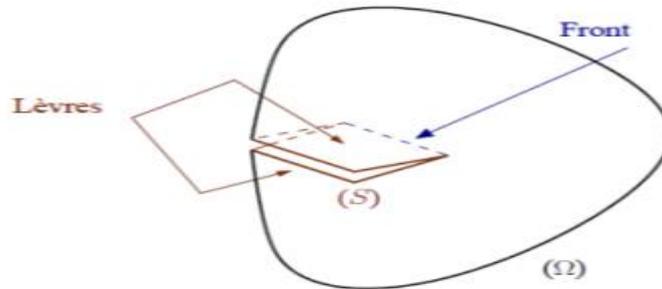


Figure I.1 : Fissure dans un milieu continu.

Dans un matériau homogène soumis à une contrainte uni-axiale, l'effort se transmet d'un atome à l'autre en suivant des lignes de force qui sont parallèles. Dans un matériau qui possède une fissure, les lignes de force doivent contourner cette fissure, ce qui conduit à une concentration de ces lignes au voisinage de la pointe de la fissure, d'où une concentration de la contrainte dans cette région, appelée tête ou pointe de fissure. On observe deux types de rupture principaux suivant les mécanismes mis en jeu : une rupture fragile contrôlée par une contrainte normale, et une rupture ductile, précédée de déformations plastiques et contrôlée par les contraintes de cisaillement.

Pour ces types de rupture, les déformations à rupture, l'énergie de rupture, les faciès de rupture sont différents. De même, les sollicitations extérieures imposées auront une influence sur le mode de rupture.

- **Rupture fragile**, c'est une rupture contrôlée par la contrainte normale ou contrainte de clivage ; elle se produit sans déformation plastique (mécanique linéaire de la rupture) : les ruptures sont transgranulaires (rupture dans un grain cohérent suivant des plans cristallographiques bien définis) ; on observe des ruptures brillantes avec des facettes.

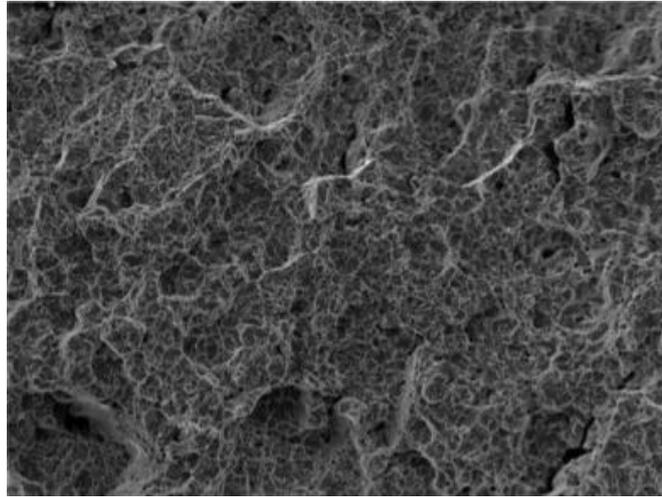


Figure I.2 : Exemple de rupture fragile [7]

- **Rupture ductile**, la rupture ductile est précédée d'une déformation plastique importante (mécanique non linéaire de la rupture). L'aspect est granuleux, on observe souvent des cupules liés à une décohésion autour des inclusions. Dans ce cas, suivant l'étendue de la zone plastique en pointe de fissure, on différencie le cas de la plasticité confinée, de celle de la plasticité étendue.

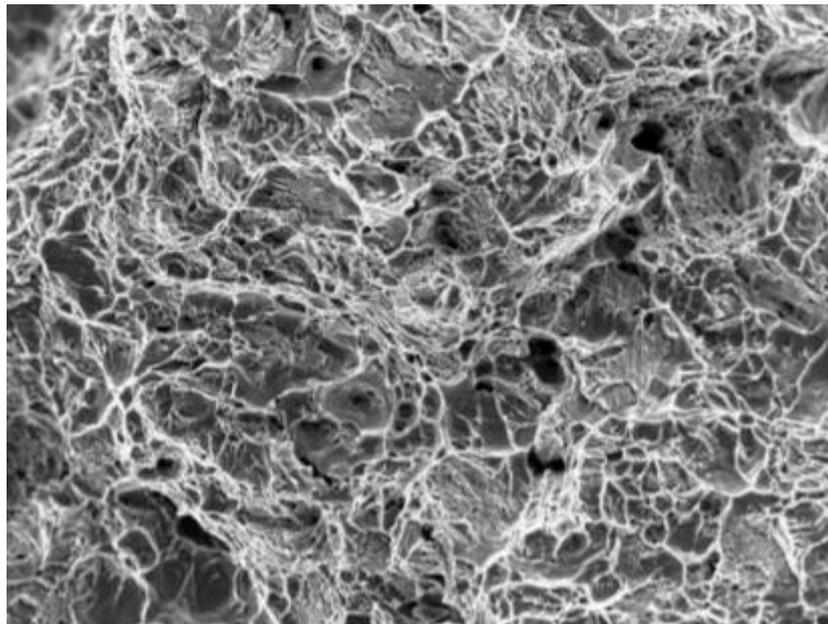


Figure I.3 : Exemple de rupture ductile [7]

I.2.1 .Effet d'entaille

D'une manière générale, on appelle une entaille une discontinuité imposée ou créée accidentellement. Elle peut être nécessaire pour des raisons de fabrication, par exemple dans un siège de palier à roulement, une rainure de clavette, un perçage pour loger des goupillés, ou un pas de vis pour une connexion. Des entailles peuvent également être provoquées en service, par exemples : les cavités dans la coulée, les

marques d'outils dans l'usinage ou les marques d'usure en service.

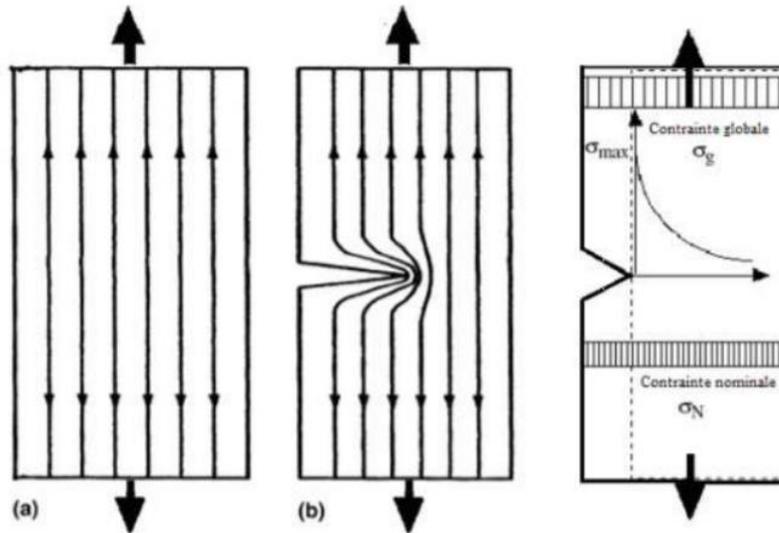


Figure.I.4: Schéma de flux des forces : a) Plaque soumise à une force de tension. b) Plaque avec entaille.

Les entailles entraînent des fortes concentrations de contraintes locales et peuvent donc induire une défaillance prématurée si elle n'est pas correctement prise en compte lors de la conception des composants mécaniques. Leurs effets résultent dans la modification du flux de force (Figure I.4) Près du fond d'une entaille, les lignes de force sont relativement proches et cela conduit à une concentration du champ de contraintes local avec un maximum en fond d'entaille [8].

La distribution des contraintes dans un composant, peut être visualisée en utilisant ce qu'on appelle les trajectoires des contraintes, par analogie avec l'écoulement d'un fluide ou un courant électrique parcourant un conducteur plat, percé d'un trou. Ces trajectoires sont toujours exécutées dans la direction de la contrainte principale maximale. Leur distance est inversement proportionnelle à la contrainte de telle sorte, que la densité de la trajectoire de contraintes est une mesure de la contrainte agissant localement [9]. Chaque changement brusque de section transversale dévie les trajectoires de contraintes qui se déplacent alors en se rapprochant. L'effet d'entaille dépend de trois facteurs essentiels, en plus des dimensions de l'entaille, de l'angle ' ψ ' et surtout son rayon ' ρ ' (Figure I.5).

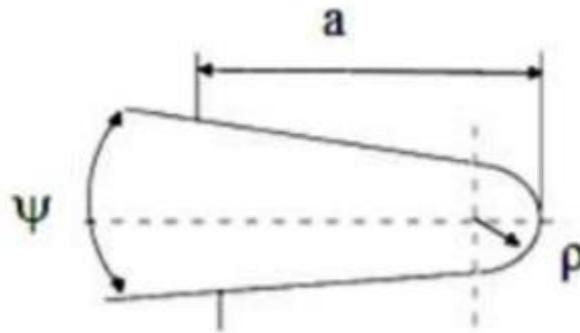


Figure I.5: Géométrie définissant une entaille simple.

Ces deux facteurs conduisent à la classification suivante :

Fissure :	$\rho = 0$ et $\psi = 0$
Entaille en V :	$\rho = 0$ et $\psi \neq 0$
Entaille en U :	$\rho \neq 0$ et $\psi = 0$
Entaille simple :	$\rho \neq 0$ et $\psi \neq 0$

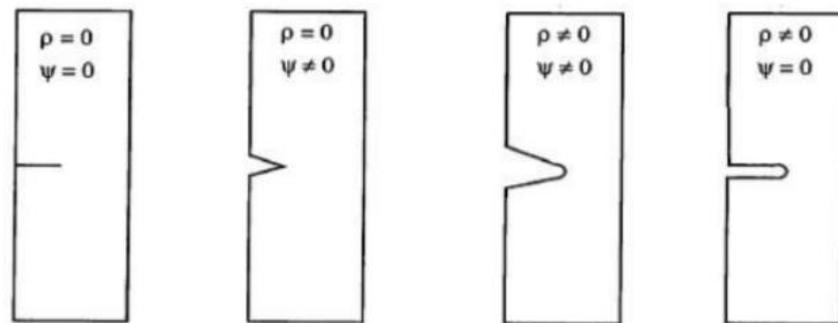


Figure I.6: Configurations des entailles de bords.

I.3. La mécanique de rupture par fissuration

Hormis les processus chimiques de ruine des matériaux et structures, il existe plusieurs processus essentiellement mécaniques de rupture :

- Le flambage,
- La rupture ductile par surcharge,
- La rupture fragile sous des contraintes généralisées inférieures à la limite élastique,
- La rupture par fatigue à grand nombre de cycles,
- La rupture par fluage à haute température...

La rupture par fissuration est la création de la surface de discontinuité [10]. L'échelle dimensionnelle de cette discontinuité surfacique dépend, en fait, directement du moyen de mesure utilisé, et bien entendu, de la nature de l'approche recherché. La mécanique des solides aborde les problèmes de calcul de structure où l'on parle d'un élément de volume dont

les dimensions de 1 mm, et de structure pour 10 mm à 10³ mm. Dans ce domaine, on traite de problème de la *‘rupture par fissuration’*

La fissuration prend en compte l’existence de défauts comme des inclusions ou des vides dans le matériau ou encore des zones d’endommagement à partir desquels des fissures vont s’initier puis se propager pour parvenir à une taille provoquant la ruine de la structure. En général.

I.3.1. Modèles de la fissuration des structures :

Il y a principalement deux modèles pour décrire la fissuration des structures, la mécanique d’Endommagement et mécanique de la rupture. Lorsqu’une pièce est soumise à des efforts d’origines variées, il existe des limites, en contraintes ou en déformations, qu’elle ne doit pas dépasser, sous peine d’endommager le matériau et provoquer sa rupture. Suivant que l’on s’intéresse à la dégradation du matériau d’un point de vue micromécanique ou macromécanique, deux approches peuvent être utilisées :

❖ **La mécanique d’Endommagement** propose de décrire continûment la dégradation progressive du matériau due à l’apparition, à la croissance, puis à la coalescence de microfissures ou de microcavités présentes dans le matériau. Lorsque les microfissures, les microcavités créées par croissance ou par coalescence des défauts sont de taille assez grande, cette façon d’aborder le problème n’est plus valable, et il faut alors utiliser la mécanique de la rupture.

❖ **La mécanique de la rupture** pour objet l’étude du comportement mécanique d’un matériau en présence de fissures macroscopiques. Cela revient notamment à déterminer le champ des contraintes et des déformations au voisinage de la pointe d’une fissure. L’étude de ces champs mécaniques permettant ensuite de juger de la stabilité ou non d’une fissure. Il est également possible, comme nous le verrons par la suite, d’aborder la mécanique de la rupture à travers une étude énergétique du solide fissuré.

I.3.2. Les trois modes d’ouverture d’une fissure :

D’un point de vu macroscopique, on distingue deux modes principaux de rupture:

La rupture plate correspond à une surface de rupture globalement perpendiculaire à la direction de la contrainte principale maximale, et **la rupture inclinée** qui est inclinée dans le sens transversal par rapport à la direction de propagation s’accompagne souvent de grandes déformations.

La fissuration se manifeste par la séparation irréversible d’un milieu continu en deux parties, appelées lèvres de la fissure, ce qui introduit une discontinuité au sens des déplacements. Les mouvements possibles des lèvres de chaque fissure sont des combinaisons de trois modes indépendants :

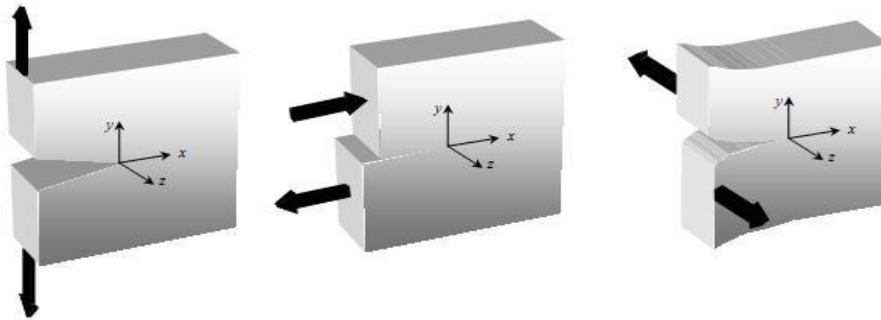


Figure I.7 : Modes de rupture

- **Mode I** : mode d'ouverture de la fissure, où les déplacements aux lèvres de la fissure sont perpendiculaires à la direction de propagation.
- **Mode II** : mode de cisaillement dans le plan, où les déplacements aux lèvres de la fissure sont parallèles à la direction de propagation.
- **Mode III** : mode de cisaillement hors du plan (anti-plan), où les déplacements aux lèvres de la fissure sont parallèles fond de la fissure.

Le mode I est le plus dangereux pour l'extension d'une fissure ; cependant une fois amorcée et pour des sollicitations mixtes ou des géométries complexes. La fissure a tendance à bifurquer, et reste donc rarement rectiligne (2D) ou plane (3D).

I.3.3. types de fissuration

Le mécanisme de rupture par fissuration peut intervenir selon deux types de fissuration :

- ❖ **La fissuration brutale** : pour les solides, ou pour les matériaux à très haute résistance, les contraintes de travail sont très élevées, une énergie potentielle considérable est ainsi créée ; La présence de petites fissures peut alors conduire à une rupture brutale qui souvent ne s'accompagne pas de déformations plastiques macroscopiques par suite de la très faible ductilité.
- ❖ **La fissuration successive** : il s'agit ici, d'une succession de mécanismes (fragile ductile) qui, sous contraintes répétées, entraîne la fissuration successive, appelée la rupture par fatigue. Les facteurs qui influencent le comportement à la rupture par fissuration des matériaux sont de deux natures : métallurgique et mécanique. Les facteurs mécaniques concernent l'état de déplacements, déformations et contraintes, ainsi que les conditions d'environnement tel que la température ou le taux d'humidité relative [11].
- ❖ **Fissure médiane** : elle s'étend en profondeur pendant le chargement sous l'action d'un champ élastique ;
- ❖ **Fissure radiale** : elle s'étend en surface à partir des angles de l'indenteur et se

développe sous l'action des contraintes résiduelles ;

- ❖ **Fissure latérale** : elle provient également de l'action des contraintes résiduelles. Ces fissures se développent presque parallèlement à la surface et sont responsables de l'écaillage de l'échantillon.

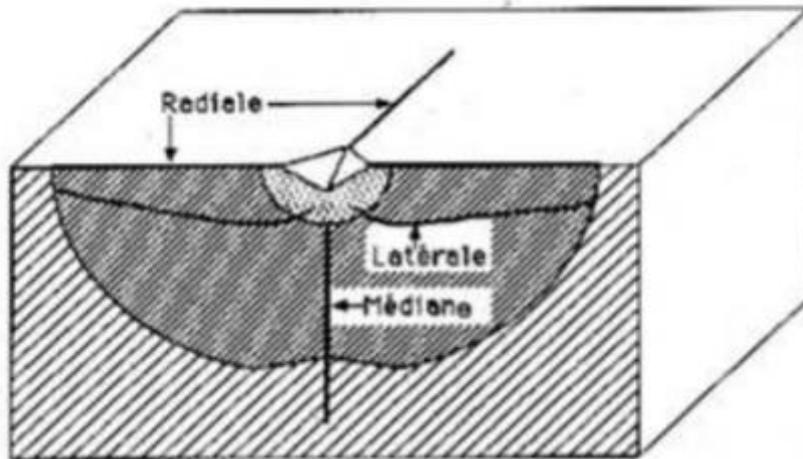


Figure I.8 : Les différents types des fissures [16].

I.3.4. Formation des fissures

Lorsqu'un indenteur Vickers est appliqué à la surface d'un matériau céramique avec une charge suffisamment élevée (selon le matériau), il se crée des fissures. Des observations au cours de l'indentation de matériau transparent ont montré que la configuration finale de ces fissures est achevée lorsque l'indenteur est déchargé. Cela montre que la force motrice de fissuration lors de l'indentation est due aux contraintes résiduelles créées par la zone de déformation plastique formée autour de l'empreinte d'indentation. L'initiation et le développement des fissures sur du verre sont décrits par B.Lawn et M.Swan [12] à travers les séquences suivantes (figure I.8).

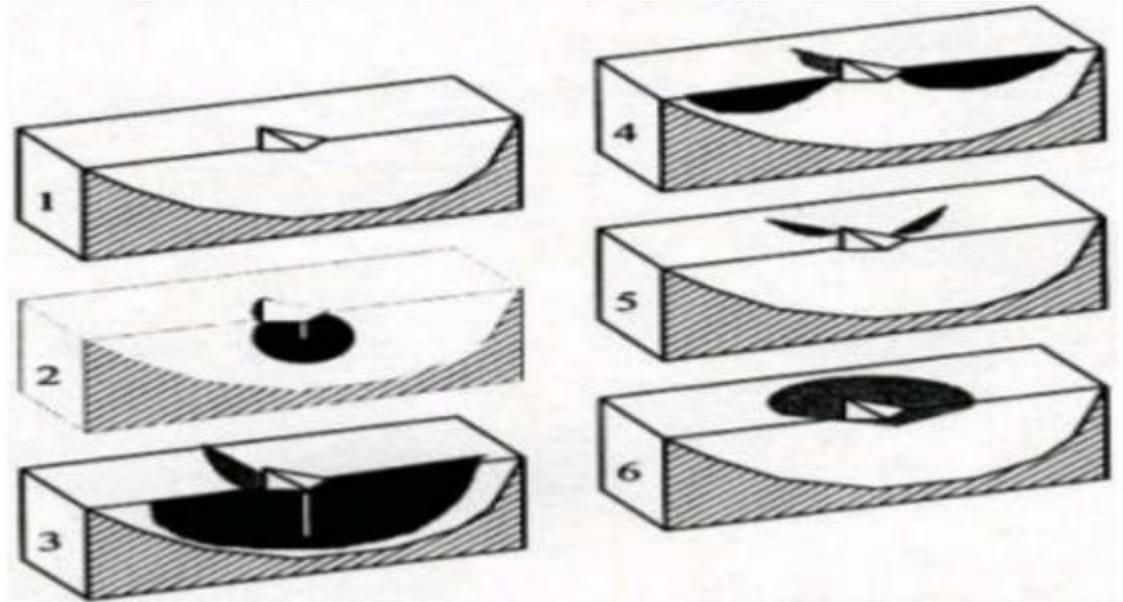


Figure.I.9: Schématisation de la séquence de formation de fissures sous l'action d'un indenteur Vickers. (1) empreinte du diamant Vickers; (2) fissure médiane; (3) fissure half-penny; (4) fissure radiale primaire, (5) fissure radiale secondaire; (6) fissure latérale (b).

1. En début du chargement, l'indenteur produit autour du point de contact une zone de déformation qui augmente avec la charge. C'est l'empreinte du diamant Vickers. La pression moyenne P_0 sur l'élément de surface reste constante.
2. Au cours du chargement, une fissure dite fissure médiane se produit sous la zone de déformation et croît jusqu'à former un cercle à mesure que la charge augmente mais n'apparaît pas à la surface de l'éprouvette [12]. Elle s'initie aux défauts se trouvant à la
3. limite de la zone de déformation et se développe sous l'effet du champ de contraintes résultant du chargement élastique de l'indenteur sur la surface de l'éprouvette.
4. Lors du déchargement, la fissure médiane grandit, s'étale vers l'extérieur et apparaît en surface. Elle prend ainsi un autre profil et peut devenir soit une fissure dite du type half-penny au déchargement complet, soit :
5. Une fissure du type radial dite fissure radiale (ou fissure du type Palmqvist). Elle prend naissance aux défauts qui se trouvent près de la surface à la limite de la zone de déformation. Elle évolue de part et d'autre de celle-ci jusqu'à apparaître en surface, sous l'action des contraintes résiduelles, au déchargement complet. Si la fissure radiale se trouve dans le plan des diagonales de l'empreinte du diamant, elle est dite fissure radiale primaire sinon c'est une fissure radiale secondaire. Les fissures radiales forment en principe un couple de fissures perpendiculaires.
6. Aux charges d'indentation élevées, une fissure latérale se forme au déchargement,

sous la zone de déformation et se développe presque parallèlement à la surface [12]. Elle est responsable du phénomène d'écaillage. D'une façon générale l'amorçage des fissures a lieu aux endroits de fortes concentrations de contraintes, c'est-à-dire aux arêtes du diamant vickers et semble avoir deux aspects: les conditions de propagation d'un défaut préexistant pendant le chargement [13], d'une part, et l'existence d'un seuil de charge pour l'apparition d'un type de fissures [14-15], d'autre part. Lorsqu'un indenteur Vickers est appliqué à la surface d'un matériau céramique avec une charge suffisamment élevée (selon le matériau), il se crée un système de trois types de fissures (figure I.9)

I.3.5. Zone délimitant le voisinage d'une pointe de fissure

D'un point de vue mécanique on distingue schématiquement, dans un milieu fissuré trois zones successives

- 1. La zone d'élaboration** : elle se trouve à la pointe de fissure et dans le sillage laissé par la fissure au cours de sa propagation. L'étude de cette zone est très complexe à cause des contraintes importantes qui ont fortement endommagé le matériau. Elle est discontinue au sens de la mécanique des solides. La théorie classique de la mécanique de la rupture réduit cette zone à un point pour les problèmes plans et à une courbe pour les problèmes tridimensionnels.
- 2. La zone singulière** : dans laquelle les champs de déplacements, déformations et contraintes sont continus et possèdent une formulation indépendante de la géométrie lointaine de la structure. On démontre que dans cette zone, les composantes du champ de contraintes sont infinies au voisinage du front de fissure ($r \rightarrow 0$).

Plus exactement, la singularité est en $(1/\sqrt{r})$ en milieu élastique linéaire. Le matériau ayant une limite élastique, il existe un rayon r_p autour de la pointe de fissure qui détermine la forme de la zone plastique. En fonction de la valeur de r_p , on dira que la rupture est fragile pour r_p petit et qu'elle est ductile pour r_p grand. Cette distinction sur la base du paramètre r_p est très importante car elle conditionne la validité de la théorie utilisée :

- ✓ La Mécanique Linéaire de la Rupture pour les ruptures fragiles
 - ✓ La Mécanique Non Linéaire de la Rupture dans le cas de zone plastique non négligeable (rupture ductile).
- 3. La zone des champs lointains** : extérieure aux deux précédentes, elle raccorde la

zone singulière aux conditions aux limites de chargement et déplacement.

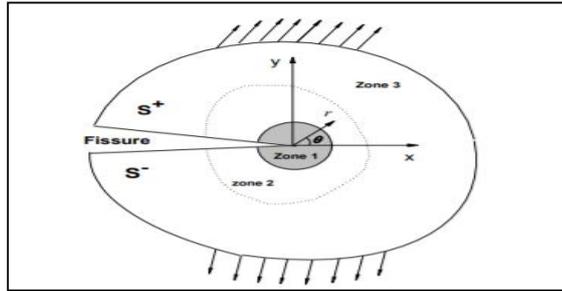


Figure I.10 : les zones de champs mécaniques

C'est la singularité d'ordre $-1/2$ dans la zone singulière qui caractérise la solution obtenue en élasticité pure. Cette solution n'est malheureusement pas physiquement réaliste. En fait, les contraintes en pointe de fissure sont « écrêtées » par la plasticité (Figure I.11) [17].

De plus, la signification énergétique de la rupture proposée par Griffith devient plus ambiguë, dans la mesure où elle consiste à représenter la propagation de fissure comme un déchargement. Or, en plasticité, une partie de l'énergie est dissipée (phénomène irréversible) et on ne peut donc pas toujours évaluer la fraction d'énergie « disponible » pour la propagation.

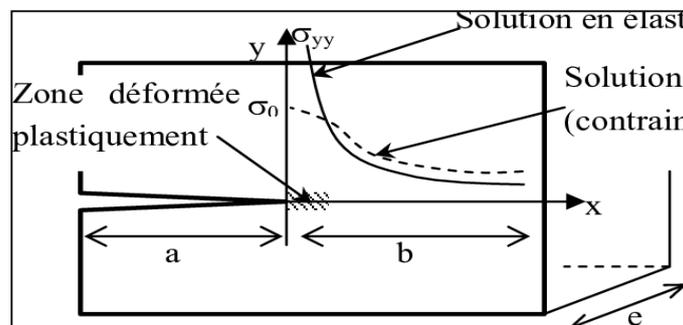


Figure I.11 : plasticité en point de fissure

I.4. Les Critères de rupture et de propagation

Les premiers travaux réalisés en mécanique de la rupture visaient à établir, de façon précise, les champs mécaniques au voisinage d'une fissure statique. La difficulté d'une telle étude réside dans la prise en compte de la singularité introduite par la pointe d'une fissure. Le calcul précis de paramètres mécaniques tels que les facteurs d'intensité des contraintes, ou le taux de restitution d'énergie réside en grande partie dans la bonne prise en compte de cette singularité.

Ces paramètres mécaniques ainsi calculés, il est possible de prévoir la propagation ou

non de la fissure. Suivant le type de matériau étudié, Et le chargement appliqué, la propagation pourra être qualifiée de stable (la fissure a besoin de plus d'énergie pour reprendre sa progression) ou d'instable (la fissure poursuit sa progression jusqu'à la ruine de la structure, sans nécessiter d'énergie supplémentaire).

La *propagation quasi-statique* de fissure étudiée a l'aide de critères d'amorçage, de bifurcation, et de stabilité.

I.4.1. Critères d'amorçage

Ces critères permettent de déterminer à quel moment et à quel endroit la fissure va s'amorcer. Ils sont généralement basés sur une comparaison des paramètres de fissuration (K , G , J , ...) à des valeurs critiques de ces paramètres.

Pour une approche locale, et en mode I pur, il y aura amorçage lorsque le paramètre K_I « le facteur d'intensité de contrainte » atteint une valeur critique K_{IC} appelée ténacité du matériau.

De même, au niveau énergétique, Griffith [Griffith 1920] a proposé une valeur limite du taux de restitution d'énergie, appelée résistance à la fissuration et notée G_C . Il y aura alors propagation lorsque G atteint la valeur critique G_C qui représente l'énergie nécessaire à la création de nouvelles surfaces libres en fond de fissure. Remarquons que pour un matériau élastique fragile, G_C ne dépend que de l'énergie superficielle intrinsèque 2γ du matériau :

$$G_C = 2\gamma \quad (I.1)$$

De même que pour G ou K , il existe une caractéristique intrinsèque du matériau δ_C , qui représente l'ouverture de fissure critique (CTOD) que peut subir le matériau avant qu'il n'y ait propagation.

De son côté, Sih [Sih 1074] a introduit un critère basé sur la densité d'énergie de déformation N minimale. Après avoir déterminé l'angle Θ_0 de bifurcation, il suppose que la propagation a lieu dans cette direction lorsque N_{\min} atteint une valeur critique N_C caractéristique du matériau. N_C peut être reliée à K_{IC} en se plaçant en mode d'ouverture pur et en identifiant $N=N_C$ à $K_I=K_{IC}$.

I.4.2. Critère de bifurcation

Lorsque le chargement ou la géométrie d'une structure n'est pas symétrique par rapport à l'axe de la fissure, la rupture se présente en mode mixte, et la fissure ne se propage pas de façon rectiligne. Il est alors nécessaire d'utiliser des critères de bifurcation, afin de déterminer la nouvelle direction de propagation.

a) Critère de la contrainte normale maximale

Proposé par Erdogan et Sih [Erdogan et Sih. 1963], ce critère est basé sur les hypothèses suivantes :

- ✓ la fissure se propage dans la direction pour laquelle la contrainte de traction circonférentielle $\sigma_{\theta\theta}$ est maximale.
- ✓ L'accroissement de fissure se produit lorsque

$$\sqrt{2\pi r} \delta\theta = K_{IC} \quad (I.2)$$

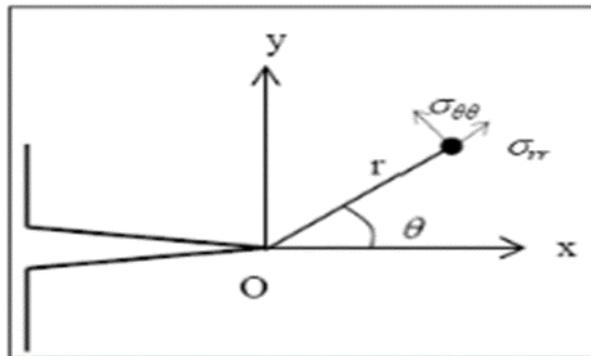


Figure I.12 : fond de fissure

Finalement, l'angle de bifurcation de la fissure est solution du système :

$$K_I \sin(\theta) + K_{II} (3\cos(\theta) - 1) = 0 \text{ sous les conditions } \begin{cases} K_{II} \sin(\theta/2) < 0 \\ \theta \in]-\pi; \pi[\\ K_I > 0 \end{cases} \quad (1.3)$$

Ce critère permet également de montrer qu'il existe un angle limite, correspondant au cas du mode de cisaillement pur, au-delà duquel la fissure ne peut se propager : $\theta_0 = \pm 70.54^\circ$. Cette technique a été étendue aux matériaux anisotropes par Saouma et Al [Saouma et Al. 1987].

Sa facilité de mise en œuvre, entièrement basé sur la notion de facteurs d'intensité de contraintes, le rend très utilisé. Il peut cependant paraître discutable dans la mesure où le champ de contraintes locales en fond de fissure est seulement un champ approché. De plus, l'existence d'une zone non élastique en fond de fissure modifie également la répartition de contrainte. C'est pourquoi les critères énergétiques, faisant intervenir des grandeurs globales au niveau de la structure, peuvent paraître plus appropriés.

b) Critère de la densité d'énergie de déformation minimale

Dans ce critère énergétique, considère que l'énergie de déformation s'oppose à la croissance de la fissuration. Celle-ci cherchera donc à se propager dans la direction où la densité d'énergie de déformation N est minimale.

L'angle de déviation θ_0 est alors défini par : $\left(\frac{\partial N}{\partial \theta}\right)_{\theta_0=0}$ sous la condition

$$\left(\frac{\partial^2 N}{\partial \theta^2}\right)_{\theta_0} \geq 0$$

c) Critère du taux de restitution d'énergie maximal :

Parmi tous les accroissements virtuels et cinématiquement admissibles, l'accroissement réel est celui qui maximise le taux de restitution d'énergie, en calculant le taux de restitution d'énergie pour différentes directions de propagation éventuelles de fissure, on détermine celle pour laquelle G est maximal.

I.4.3. Critère de stabilité

Il existe deux types de propagation :

- ✚ **La propagation stable :** après son amorçage, la fissure s'arrête, nécessitant plus d'énergie pour reprendre sa propagation. Ce mode de propagation n'est a priori pas dangereux ;
- ✚ **La propagation instable :** après son amorçage, la fissure poursuit sa progression en l'absence de toute modification des paramètres de la sollicitation. Cette instabilité conduit alors à la ruine de la structure. L'analyse de la stabilité de propagation est fondée sur le bilan énergétique : $I = W_{ext} + W_e + W_d$ (I.4)

Où:

- **I :** est l'énergie interne du système
- **W_{ext} :** représente le travail des forces extérieures
- **W_e :** est l'énergie de déformation
- **W_d :** est l'énergie dissipée lors d'une extension de fissure)

Alors, pour une fissure de longueur « a » donnée, et un incrément de propagation

« da », la propagation sera :

$$\begin{cases} \text{Stable si } \frac{d^2 I}{da^2}(a) < 0 \\ \text{Instable si } \frac{d^2 I}{da^2} > 0 \end{cases} \quad (I.5)$$

Pour étudier la stabilité d'une propagation de fissures, plusieurs méthodes ont été proposées. Parmi ces méthodes, la notion de courbe de résistance revient souvent.

I.5. Les facteurs de la rupture

I.5.1. Facteur de concentration de contraintes

Les paramètres de rupture sont très sensibles à la présence de concentration de contraintes d'hétérogénéités, issues des formes de pièces ou de contraintes dues à la façon dont elles sont assemblées. Ces zones de concentrations sont des sites préférentiels d'amorçage. Pour étudier ce phénomène, des entailles artificielles sont créées sous différentes formes et tailles. L'angle d'entaille φ et le rayon ρ en fond d'entaille sont donnés en figure I.13.

Le facteur de concentration de contrainte (K_t) relie la contrainte nominale de chargement à la contrainte maximale que va subir l'extrémité à l'entaille. Ce facteur dépend uniquement des dimensions géométriques relatives de l'entaille (plus le rapport a/ρ augmente et plus K_t augmente) et son expression analytique diffère selon le chargement [18].

Peterson [19] définit le facteur de concentration des contraintes K_t de deux manières : la première étant le rapport de la contrainte maximale σ_{max} (ou du cisaillement maximal τ_{max}) en fond d'entaille à la contrainte nominale σ_n (ou de cisaillement nominal τ_n) dans la section correspondante de la pièce entaillée. Dans le cas d'une plaque semi-infinie comportant des entailles en U et semi elliptiques (figure I.13), Baratta et Neal [19] ont procédé aux calculs des facteurs de concentration de contraintes K_t pour différents rapports a/ρ . Ces auteurs regroupent les valeurs des rapports du facteur de concentration de contraintes correspond à l'entaille en U et celui de l'entaille semi elliptique obtenus par Bowie [20]. Pour le calcul, ces auteurs divisent la contrainte circonférentielle par la contrainte globale appliquée. Pour une plaque comportant un trou elliptique, Inglis [21] utilise la formule du facteur de concentration de contraintes suivante :

$$K_t = 1 + \sqrt{a/\rho} \quad (I.6)$$

Avec a profondeur de l'entaille et ρ rayon d'entaille. Cet auteur obtient des facteurs de concentration de contraintes identiques à ceux de Baretta [19] et Bowie [20]. Dans le cas d'une plaque de largeur finie et une entaille de bord en U, Isida [22] a proposé un facteur de correction permettant le passage du cas d'une plaque infinie à celui d'une plaque de largeur finie. La forme générale du facteur de concentration de contraintes peut s'écrire selon [23] sous la forme :

$$K_t = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_g} \quad (I.7)$$

Où, K_t , σ_{max} et σ_g sont respectivement le facteur de concentration de contraintes, la contrainte élastique maximale au fond d'entaille et la contrainte globale à laquelle la structure est soumise.

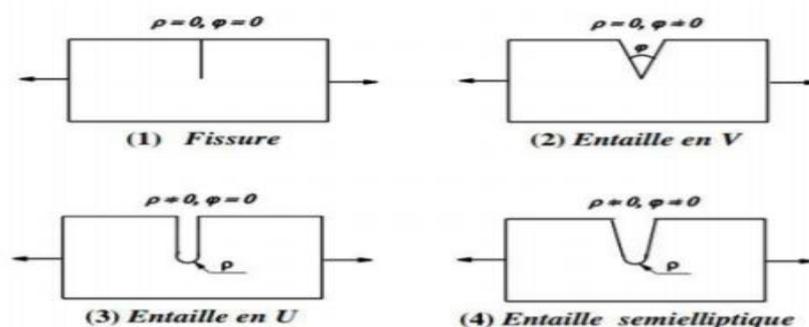


Figure.I.13: Différents paramètres géométriques définissant une entaille simple selon [19] et [21].

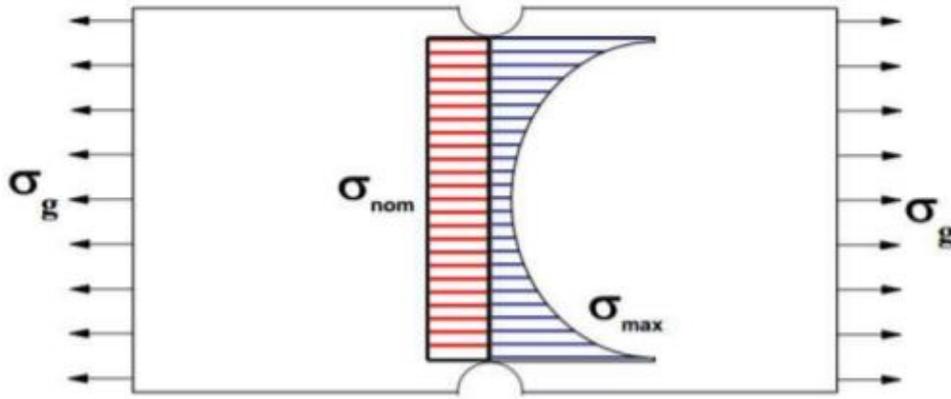


Figure. I.14: Définition de la contrainte globale, maximale et nominale [24].

Pour [20] le facteur de concentration de contrainte élastique est relié à la contrainte nominale σ_{nom} selon la relation suivante :

$$K_t = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_{nom}} \quad (I.8)$$

La définition de la contrainte maximale, de la contrainte globale et de la contrainte nominale est donnée en figure I.14

Les contraintes maximales σ_{max} et τ_{max} sont déterminées numériquement par éléments finis ou expérimentalement par la méthode de la photoélasticimétrie. Les contraintes nominales σ_{nom} et τ_{nom} sont données par les équations de la résistance des matériaux. Ces contraintes sont déterminées mathématiquement au moyen des équations établies à la suite des travaux de Neuber [25] (formule de Peterson). Smith, (1978) [26] indique que la propagation de la fissure sera gérée uniquement par la contrainte nominale.

I.5.2. Facteur d'intensité des contraintes

Les facteurs d'intensité de contraintes correspondent à des cinématiques particulières du mouvement des fissures, dans le cadre de la mécanique linéaire de la rupture, les contraintes et les déformations au voisinage d'une fissure admettent un développement asymptotique dont le terme singulier s'écrit :

$$\begin{cases} \sigma_{ij} = K_\alpha \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}^\alpha(\theta) \\ \varepsilon_{ij} = \frac{K_\alpha 1}{\sqrt{2\pi r}} g_{ij}^\alpha(\theta) \end{cases} \quad \alpha = 1,2,3 \quad (I.9)$$

K_α est le facteur d'intensité des contraintes (FIC) en mode α , avec $\alpha=I, II$ ou III . Les fonctions f et g donnent la répartition angulaire. Ainsi que dans plusieurs ouvrages de mécanique de la rupture [François et Al.1993], [Miannay 1995]. Lorsque l'on se trouve en mode I pur, l'état local de contraintes et de déformations peut être caractérisé à l'aide du seul paramètre K_I : $\sigma_{ij} = K_I \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}^1(\theta) + T\sigma_{xi}\sigma_{xj} + O(\sqrt{r})$ (I.10)

Les FIC caractérisent la force de la singularité du champ des contraintes à l'extrémité de la fissure. Ils sont proportionnels aux discontinuités des déplacements des lèvres de la fissure, et ne dépendent que de la répartition des efforts extérieurs et de la géométrie de la fissure.

K_I K_{II} K_{III} sont des constantes indépendantes de r et θ . Elles sont appelées facteurs d'intensité des contraintes. Ils caractérisent la distribution des contraintes au voisinage du fond de fissure. Chaque facteur caractérise un mode de sollicitation. Les facteurs d'intensité des contraintes sont fonction de la longueur de la fissure, de la géométrie de la pièce et de son chargement ; ils s'expriment en $MPa\sqrt{m}$.

Les coefficients K_I dépendent à la fois de la structure, par sa géométrie et son chargement, et de la fissure par sa taille, sa forme et sa position. Ils sont caractéristiques de la singularité de contrainte en pointe de fissure et de la discontinuité de déplacement le long des lèvres de la fissure.

K est le facteur d'intensité de contrainte. Il dépend de la longueur de la fissure, de la géométrie et des forces appliquées, r est la distance radiale de la fissure, et f_{ij} est une fonction de θ , l'angle du plan de la fissure : $K_I = \sigma_{app}\sqrt{\pi a}$ (I.11)

Avec :

- σ_{app} = la contrainte appliquée
- $2a$: la longueur de la fissure

Les FIC caractérisent la force de la singularité du champ des contraintes à l'extrémité de la fissure. Ils sont proportionnels aux discontinuités des déplacements des lèvres de la fissure, et ne dépendent que de la répartition des efforts extérieurs et de la géométrie de la fissure. La Figure I.15 représente la variation de la contrainte devant la pointe de la fissure, la solution de Westergaard et al. [28] implique que les contraintes approchent l'infini si r tend vers zéro (la singularité), le facteur d'intensité de contrainte est donc un constant qui permet de mesurer la singularité des contraintes à r et θ donnés.

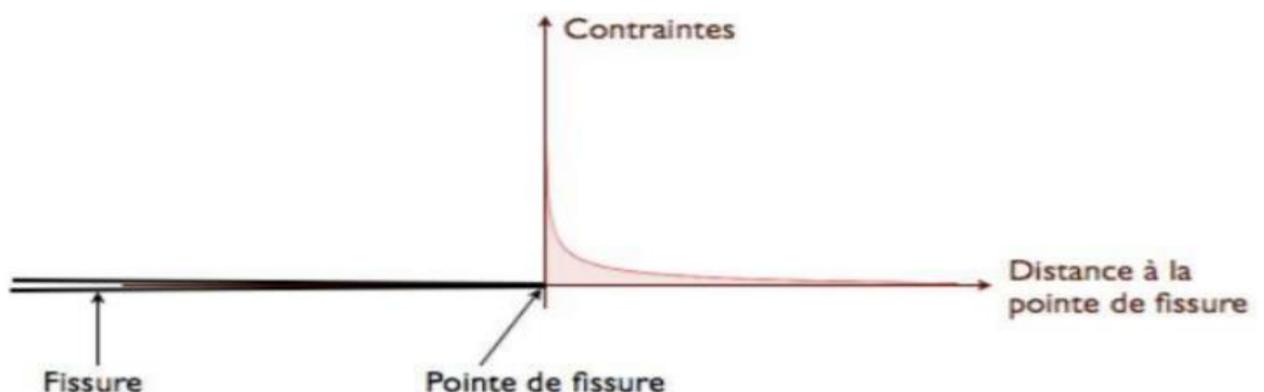


Figure. I.15: La variation de FIC.

I.5.2.1. Champs de contrainte et déplacement an fond de fissure

On donne les résultats correspondant successivement aux modes I, II, III Où r et θ sont les coordonnées polaires d'un point P par rapport au front de fissure (Figure I.20). Ainsi la singularité du champ de contraintes est connue dès que l'on connaît l'expression des F.I.C. [27]

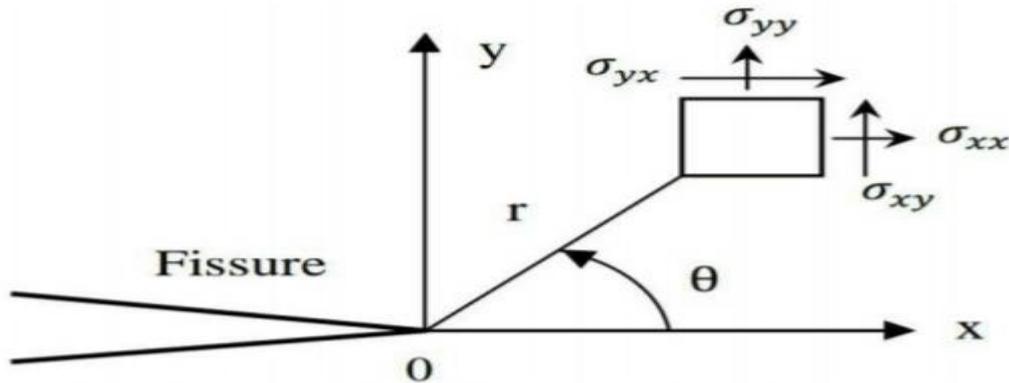


Figure.I.16: champ des contraintes au voisinage de la fissure.

Mode I

Contraintes :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yy} \end{Bmatrix} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \begin{Bmatrix} 1 - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ 1 + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right) \end{Bmatrix} \quad (I.12)$$

$$\begin{cases} \sigma_{zz} = \nu (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) & \text{en déformation plane} \\ \sigma_{zz} = 0, & \text{en contrainte plane} \end{cases}$$

Déplacements :

$$\begin{Bmatrix} U_x \\ U_y \end{Bmatrix} = \frac{K_I}{2\pi r} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \begin{Bmatrix} 1 - \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) [x - 1 + 2 \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)] \\ \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) [x + 1 - 2 \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)] \end{Bmatrix} \quad (I.13)$$

Avec :

u : le module de cisaillement

$$\begin{cases} \nu = 3 - 4\nu & \text{en déformation plane} \\ \nu = 3 - \nu/1 + \nu & \text{en contrainte plane} \end{cases}$$

Mode II

Contraintes :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yy} \end{Bmatrix} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \begin{Bmatrix} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) [2 + \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)] \\ \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) [1 - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)] \\ \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) \end{Bmatrix} \quad (I.14)$$

Déplacements :

$$\begin{Bmatrix} U_x \\ U_y \end{Bmatrix} = \frac{K_{II}}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \begin{Bmatrix} 1 - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) [x - 1 + 2 \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)] \\ \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) [x - 1 - 2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)] \end{Bmatrix} \quad (I.15)$$

Mode III

Contraintes :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xy} \\ \sigma_{yy} \end{Bmatrix} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \begin{Bmatrix} -\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{Bmatrix} \quad (I.16)$$

Déplacements :

$$\{U_z\} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\mu}} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad (I.17)$$

I.5.2.2. La singularité

Les calculs précédents montrent que les champs de contraintes et de déformations présentent une évolution $1/\sqrt{r}$, qui lorsque r tend vers zéro, le terme singulier domine les autres termes (qui ne deviennent pas infinis au fond de fissure). Il s'en suit que c'est le seul et unique caractère de ce qui se passe au front de fissure pour un corps élastique linéaire.

I.5.2.3. Critère de rupture :

Nous nous placerons dans la mode I de sollicitation, la rupture se produit lorsque le facteur K_I atteint une valeur critique K_{IC} cette valeur caractérise la résistance d'un matériau à la propagation brutale d'une fissure en mode I et en déformations planes. K_{IC} est indépendant de la géométrie de l'entaille et de l'éprouvette. On a donc ce critère de rupture :

$K_I < K_{IC}$: Pas de rupture.

$K_I = K_{IC}$: Rupture brutale.

Ce critère de rupture correspond à une distribution critique des contraintes au fond de fissure. C'est ce que montre la figure (I.17) :

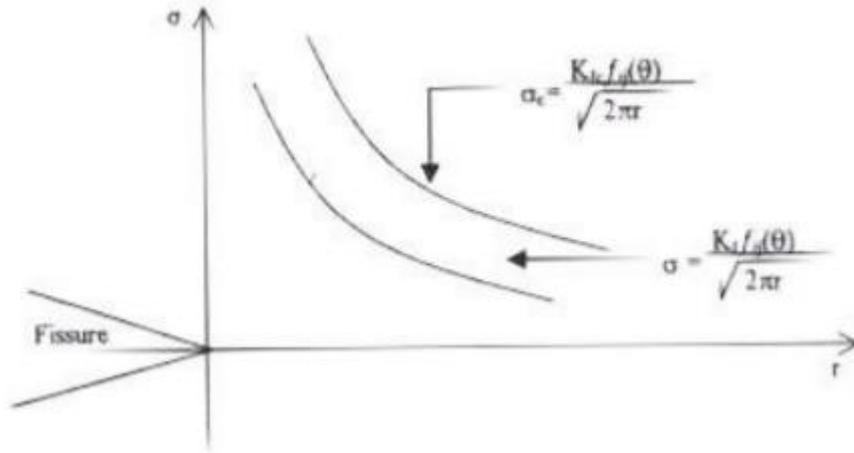


Figure.I.17 : la distribution normale et critique des contraintes à fond de fissure correspondant respectivement à K_I et K_{II} .

I.5.3. le taux de restitution d'énergie

Le taux de restitution d'énergie représente l'énergie nécessaire pour faire progresser la fissure d'une longueur unité. Elle correspond à la décroissance de l'énergie potentielle totale W_p pour passer d'une configuration initiale avec une longueur de fissure « a », à une autre où la fissure s'est propagée d'une longueur da :

$$\begin{cases} G = -\frac{\partial W_p}{\partial A} \\ W_p = W_e + W_{ext} \end{cases} \text{ Avec } \begin{cases} W_e = \int_{\Omega} \sigma : \varepsilon \\ W_{ext} = \int_{\Omega} f \mu \end{cases} \quad (I.18)$$

Où W_e représente l'énergie de déformation élastique, W_{ext} l'énergie potentielle des forces extérieures f , et ∂A l'incrément de surface correspondant à l'extension de la fissure.

En utilisant le champ des contraintes dans la zone singulière et la loi de comportement élastique linéaire. Il est possible de relier le taux de restitution d'énergie aux facteurs d'intensité de contrainte par :

$$G = \frac{(K_I^2 + K_{II}^2)}{E'} + \frac{K_{III}^2}{2\mu} \quad (I.19) \quad \begin{cases} E' = E & \text{en contraintes planes} \\ E' = \frac{E}{1-\nu^2} & \text{en déformation planes} \\ \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} & \text{est le module de cisaillement} \end{cases}$$

Où E est le module d'Young et ν le coefficient de poisson. Pour un matériau orthotrope, ces relations s'écrivent :

$$G_I = K_I^2 \left(\frac{\alpha_{11}\alpha_{12}}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \left[\left(\frac{\alpha_{22}}{\alpha_{11}} \right)^{1/2} + \frac{2\alpha_{12} + \alpha_{66}}{2\alpha_{11}} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (I.20)$$

$$G_{II} = K_{II}^2 \left(\frac{\alpha_{11}}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \left[\left(\frac{\alpha_{22}}{\alpha_{11}} \right)^{1/2} + \frac{2\alpha_{12} + \alpha_{66}}{2\alpha_{11}} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (I.21)$$

De ces relations, nous voyons que la connaissance du taux de restitution d'énergie $G_{I, II}$ et des coefficients élastiques α_{ij} , permet d'accéder aux facteurs d'intensité de contraintes K_I et K_{II} .

Sur la courbe Force/Déplacement, OA correspond à une fissure de longueur a , et OB à une fissure de longueur $a+\delta a$. G représente l'aire située dans le triangle OAB pour un essai effectué à charge imposée ou dans le triangle OAC pour un pilotage en déplacement imposé.

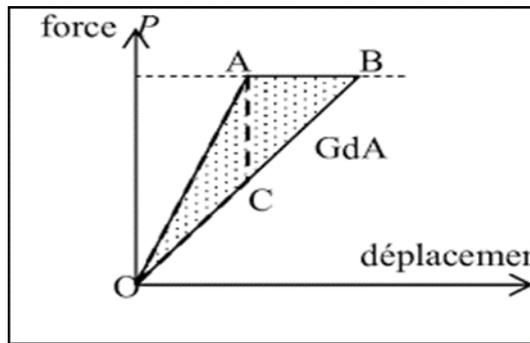


Figure I.18: Relation entre G et la complaisance de la structure

I.5.4. Intégrale de Rice

On considère un milieu bidimensionnel fissuré, dont la fissure sera supposée rectiligne.

Le contour c'est un contour ouvert, orienté dont les extrémités se trouve sur les faces supérieure et inférieure de la fissure :

$$J = \int_C \left(W_e(\epsilon)\eta_I - \sigma_{ij}\eta_j \frac{\partial \mu_i}{\partial x} \right) ds \quad (I.22)$$

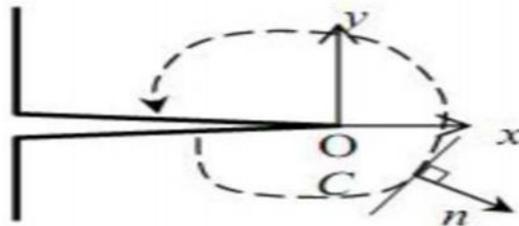


Figure I.19 : Contour d'intégration

Où : W_e : est la densité d'énergie de déformation élastique telle que : $\sigma_{ij} = \partial W_e / \partial \epsilon_{ij}$ (I.23),

μ : est le vecteur déplacement en un point du contour C avec la normale n tournée vers l'extérieur et σ représente le champ de contraintes.

* L'intégrale J est indépendante du contour (à condition qu'il n'y ait pas de forces de surface sur les lèvres de la fissure, que l'on soit en conditions isothermes, et en quasi-statique) ;

* L'intégrale J représente le taux de décroissance de l'énergie potentielle :

$$J = (\partial W_p / \partial A) = G \quad (I.24)$$

* L'intégrale J permet, dans certaines conditions, de décrire le champ des contraintes et des déformations à la pointe de la fissure.

Dans les cas où la plasticité est importante, on effectue une analogie avec un matériau élastique non linéaire. Cette hypothèse est valable à condition qu'il n'y ait pas de brusques variations dans la direction du chargement appliqué, et donc, pas de déchargement. En effet, le déchargement en élasticité non linéaire, et permet ainsi d'intégrer le champ des contraintes et des déplacements à la fissure. Ayant ainsi fait l'analogie entre l'élastoplasticité et l'élasticité non linéaire, l'intégrale J peut être obtenue, comme précédemment, par la méthode de la complaisance :

$$J = - \int_0^W \left(\frac{\partial P}{\partial a} \right)_W dW = \int_0^P \left(\frac{\partial W}{\partial a} \right)_P dP \quad (I.25)$$

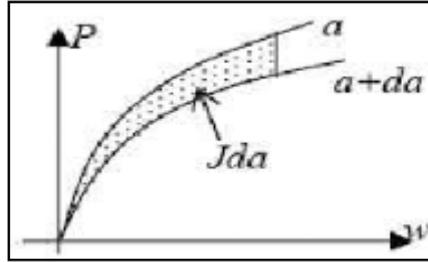


Figure I.20: Détermination de J par la méthode de la complaisance

I.5.5. La relation entre J, G, K en élasticité :

On a :

$$\left. \begin{aligned} -\frac{dP}{da} &= J_I = \frac{1-\nu^2}{E} K_I^2 \\ -\frac{dP}{da} &= J_{II} = \frac{1-\nu^2}{E} K_{II}^2 \end{aligned} \right\} \quad (I.26) \quad \text{En déformation}$$

$$\left. \begin{aligned} J_I &= \frac{K_I^2}{E} = G_I \\ J_{II} &= \frac{K_{II}^2}{E} = G_{II} \end{aligned} \right\} \quad (I.27) \quad \text{En contrainte plane}$$

Lorsque les deux modes se superposent, on aura :

$$J_I = \frac{1-\nu^2}{E} (K_I^2 + K_{II}^2) \quad (I.28)$$

I.6. Méthodes d'enrichissement traitant de la fissuration

Le traitement de la fissuration a fait l'objet de plusieurs travaux spécifiques permettant de répondre aux deux difficultés posées par la propagation de fissure. La première, d'ordre technique, concerne les difficultés dues aux processus de maillage et de remaillage au cours de la propagation. Cette difficulté est induite par l'utilisation de la méthode des éléments finis qui reste aujourd'hui la méthode de simulation la plus répandue dans le milieu industriel. Elle provient du fait qu'une fissure ne peut se propager que le long des bords des éléments. En d'autres termes, le maillage doit être conforme à la géométrie de la fissure. La deuxième difficulté concerne la description correcte des champs singuliers en pointe de fissure. Cette singularité est en effet difficile à représenter avec des éléments finis classiques. Néanmoins,

les lois de propagation de fissure s'alimentent de données locales en pointe de fissure telles que les contraintes et les déformations pour prédire la direction de propagation. Dans cette partie, conscient de l'intérêt très marqué des industriels pour la méthode des éléments finis, nous présenterons essentiellement des approches qui en sont issues. Mais d'autres approches permettent de répondre à la question telle que la méthode des équations intégrales appliquée à la fissuration par (K, Hocine) en 1998 [29]. Trois approches de philosophie différente sont présentées dans cette partie. La première approche est celle de Tong et Pian en 1973. Afin de mieux décrire la solution en pointe de fissure, ils proposent un élément fini hybride spécifique pour les problèmes plans de mécanique élastique linéaire de la rupture. Les deux autres approches sont basées sur un enrichissement de la cinématique du milieu continu qui permet d'introduire une discontinuité dans le champ de déplacement. Ainsi, la méthode de la partition de l'unité (PUM) introduite par Melenk et Babuska [30] propose une façon d'augmenter l'espace d'approximations de la solution et a donné lieu à la méthode des éléments finis étendus (X-FEM) Belytschko et Black 1999 [31], Moes et al. 1999 [32] et à celle des éléments finis généralisés (G-FEM) Strouboulis et al. 2000 - 2001. Enfin, l'approche des fortes discontinuités (SDA) Oliver et al [33] prend en compte un saut de déplacement au sein de chaque élément suivant le concept d'Enhanced Assumed Strain [34].

I.7. La concentration des contraintes

I.7.1. Introduction

Beaucoup de composants d'ingénierie contiennent des discontinuités géométriques, telles que des épaulements, rainures de clavette, trous d'huile et cannelures, généralement nommées des entailles. Quand un composant entaillé est chargé, des concentrations locales de contraintes et déformations sont produites dans une petite région autour de l'entaille, même pour des contraintes nominales élastiques relativement faibles.

L'entaille, au sens strict du terme, n'est pas la seule particularité morphologique susceptible de créer une concentration de contraintes. Les épaulements, les trous et, en règle générale, toutes les discontinuités de forme provoquent le même phénomène. Afin de bien illustrer ce problème, considérons une plaque en présence d'un trou central sous traction. En effet, sans la présence d'un trou, la trajectoire de ces lignes sera modifiée. On constate que ces lignes sont perturbées autour du trou ainsi que leur densité. C'est juste une illustration schématique qualitative pour bien montrer que l'origine de la concentration de contraintes est une perturbation de forme d'une pièce mécanique [35].

I.7.2. Concentration de contrainte dans une plaque trouée en traction

Ce problème a pour objectif de montrer que la présence de trous, et plus généralement d'entailles et autres congés de raccordement conduit à un affaiblissement de la structure en raison de sur contraintes locales, appelées concentrations de contrainte. Il est donc bon d'éviter, autant que possible, le perçage ou l'usinage de défauts ou de parties fonctionnelles de ce type. Lorsque la présence de concentrateurs de contraintes est inévitable, il est nécessaire de connaître le facteur de concentration de contrainte associée à chaque géométrie, notion introduite dans ce problème, afin de dimensionner les structures. Le cas de la traction d'une plaque percée d'un trou circulaire est analysé dans le détail avant d'évoquer d'autres concentrateurs tels que les trous elliptiques. L'étude est menée dans le contexte des petites perturbations pour un milieu isotrope, dans son état naturel, au comportement élastique linéarisé. On commence par la description de l'outil de résolution privilégié pour les problèmes traités, à savoir les fonctions de contraintes ou fonctions d'Airy, qui sera appliqué dans les sections suivantes.

I.7.2.1. Champ de contraintes dans une plaque trouée en traction simple

Une plaque d'épaisseur ($e=2\text{mm}$) percée d'un trou cylindrique à section circulaire de rayon (a) est soumise à ses extrémités à un état de traction simple. La géométrie et les données de ce problème sont illustrées par le schéma de la figure II.1. L'axe du trou est e_3 et la direction de traction est e_1 . La longueur et la largeur de la plaque sont supposées suffisamment grandes par rapport à (a) pour que l'état de

contrainte loin du trou ne soit pas affecté par la présence du trou et puisse donc être assimilé à l'état homogène suivant :

$$\sigma^\infty = \sigma^\infty e_1 \otimes e_1 \quad (II.1)$$

Où $\sigma^\infty > 0$ est la contrainte imposée, donnée du problème. Dans tout le problème, le bord du trou ainsi que les surfaces $z = \pm h$ (telle que $z = T/2$) sont libres d'effort.

Un système de coordonnées cylindriques (O, r, θ) est adopté, O étant le centre du trou, l'angle θ étant mesuré par rapport à e_1 . Compte tenu des caractéristiques du chargement, le traitement du problème est justiciable d'une résolution en contraintes planes, fût-elle approchée. Le champ de contraintes est donc recherché sous la forme.

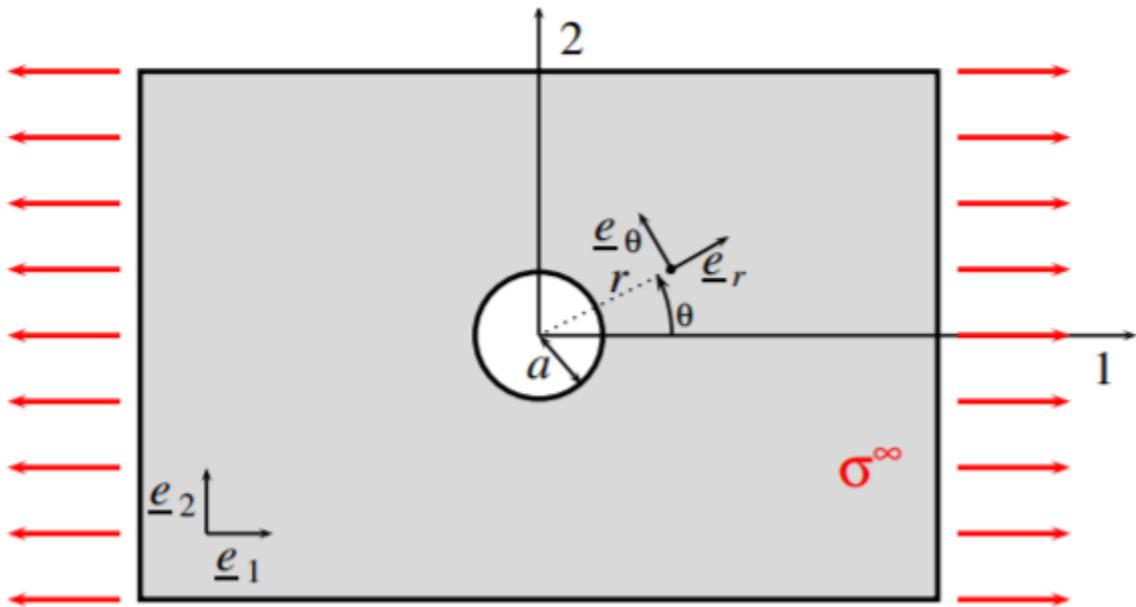


Figure I.21 : *Plaque percée d'un trou circulaire de rayon a et soumise, loin du trou, à une sollicitation de traction simple d'intensité σ^∞*

I.7.2.2. Champ de contraintes loin du trou

Donner les composantes du tenseur des contraintes loin du trou dans le système de coordonnées cylindriques. Donner une fonction de contraintes $X(r, \theta)$ correspondant à un champ de traction simple en intégrant les relations.

$$\sigma_{rr} = \frac{1}{r} \frac{\partial X}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 X}{\partial \theta^2} \quad (II.2) \quad \text{Et} \quad \sigma_{r\theta} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial X}{\partial \theta} \right) \quad (II.2)$$

On substitue

$$\underline{e}_1 = \cos \theta \underline{e}_r - \sin \theta \underline{e}_\theta \quad (II.3)$$

Autrement dit,

$$\begin{cases} \sigma_{rr}^{\infty} = \frac{\sigma^{\infty}}{2} (1 + \cos 2\theta) \\ \sigma_{\theta\theta}^{\infty} = \frac{\sigma^{\infty}}{2} (1 - \cos 2\theta) \\ \sigma_{r\theta}^{\infty} = -\frac{\sigma^{\infty}}{2} \sin 2\theta \end{cases} \quad (II.4)$$

Pour trouver une fonction de contrainte conduisant au champ de traction simple, on a intégré

l'équation $\sigma_{\theta\theta} = \frac{\partial^2 \chi}{\partial r^2}$

On trouve $\chi = \frac{\sigma^{\infty}}{2} (1 - \cos 2\theta) \frac{r^2}{2} + g(\theta)r + h(\theta) \quad (II.5)$

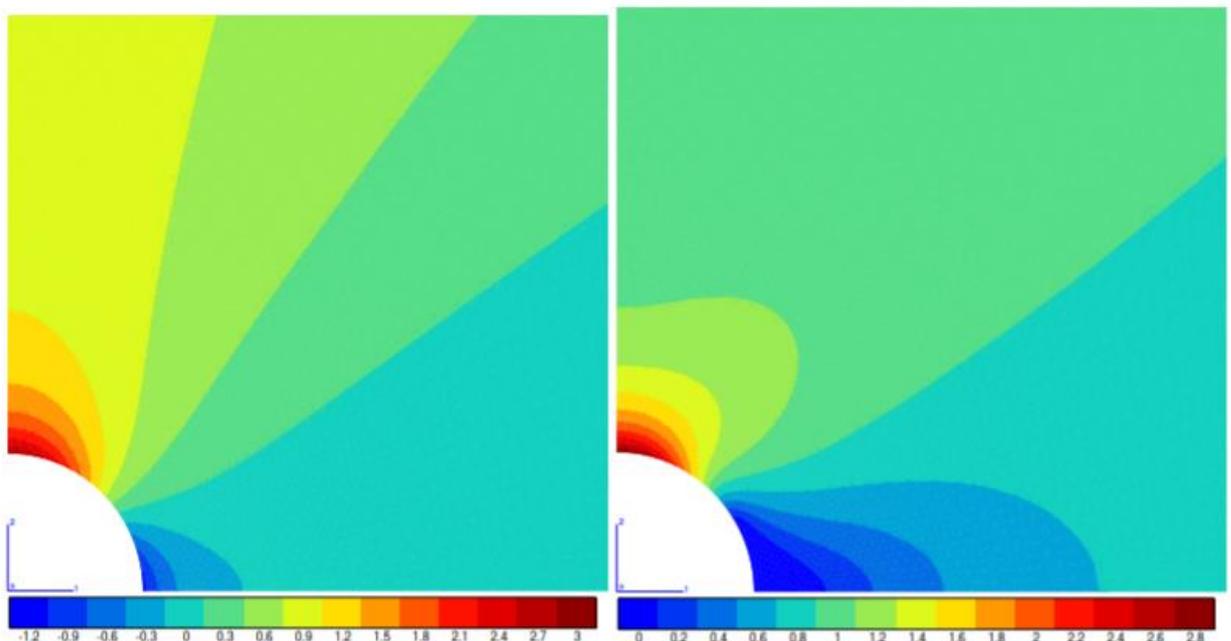
En calculant $\sigma_{r\theta}$ grâce à l'équation, on trouve que $h = \text{Constante}$. En calculant σ_{rr} , on trouve que $g = g_1 \cos \theta + g_2 \sin \theta$. On vérifie que la contribution aux contraintes des termes en h, g_1, g_2 est nulle de sorte qu'on ne perd pas en généralité en prenant $h = g_1 = g_2 = 0$. Finalement, une fonction de contraintes associée à l'état de traction simple est

$$\chi = \frac{\sigma^{\infty}}{2} (1 - \cos 2\theta) \frac{r^2}{2} \quad (II.6)$$

I.7.2.3. Concentration de contrainte au bord du trou

Le champ de contraintes trouvé précédemment indique que les contraintes ne sont pas homogènes dans une plaque trouée sollicitée en traction à ses extrémités. La décroissance rapide du champ de contraintes assure que ces hétérogénéités se développent seulement au voisinage du trou et que le champ suffisamment loin du trou peut être considéré comme homogène.

Le champ de contraintes σ est représenté sur la figure II.2(a), ce qui permet de voir que cette composante est plus forte au bord du trou que partout ailleurs dans la plaque. Les cartes des contraintes principales des figures II.2(b) et (c) montrent que celles-ci sont maximales au bord du trou. Il existe donc des sur contraintes en bord de trou, appelées concentrations de contraintes. Elles jouent un rôle essentiel dans l'amorçage de la rupture dont l'étude fait l'objet de cette partie.



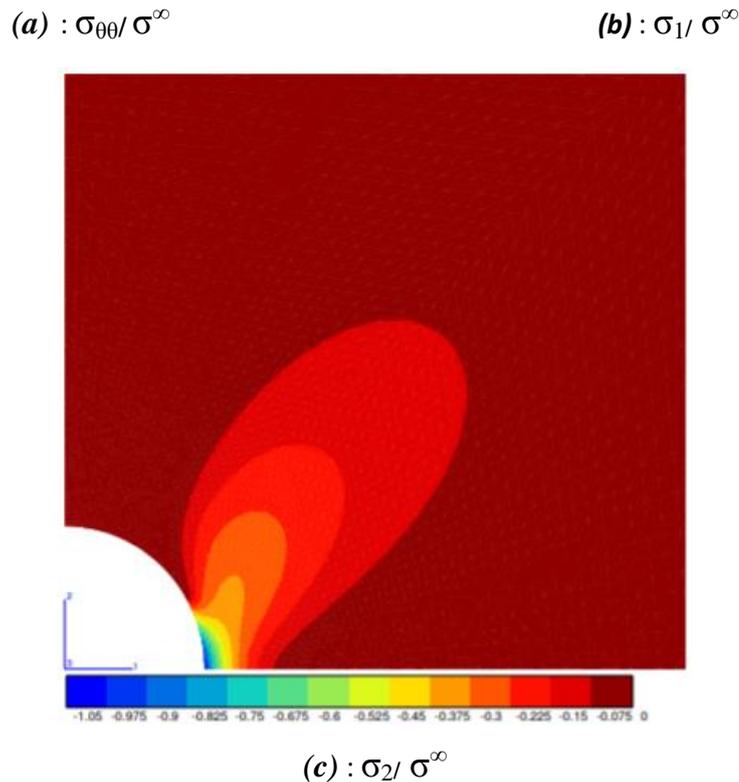


Figure 1.22 : Représentation par lignes de niveaux du champ de contraintes autour d'un trou dans une plaque en traction selon la direction 1. Les grandeurs représentées sont : (a) la composante $\sigma_{\theta\theta}$, (b) la plus grande contrainte principale en chaque point, (c) la plus petite contrainte principale en chaque point.

Toutes les contraintes sont normalisées par la valeur de la contrainte axiale loin du trou. Pour des raisons de symétrie, un quart seulement de la plaque trouée est représenté [36].

1.7.3. Concentration élastique linéaire de contrainte

1.7.3.1. Entaille circulaire dans une plaque infinie sous chargement de traction

Les distributions des contraintes autour d'un trou central peuvent être estimées pour le cas simple d'une plaque infiniment large soumis au chargement de tension. Les distributions globales de contrainte dans la plaque sont:

$$\sigma_{rr} = \frac{\sigma}{2} \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) + \frac{\sigma}{2} \left(1 + 3 \frac{a^4}{r^4} - 4 \frac{a^2}{r^2} \right) \cos 2\theta$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{\sigma}{2} \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right) - \frac{\sigma}{2} \left(1 + 3 \frac{a^4}{r^4} \right) \cos 2\theta \text{ (II.7)}$$

$$\sigma_{r\theta} = -\frac{\sigma}{2} \left(1 - 3 \frac{a^4}{r^4} + 2 \frac{a^2}{r^2} \right) \sin 2\theta$$

Ou : σ est la charge appliquée.

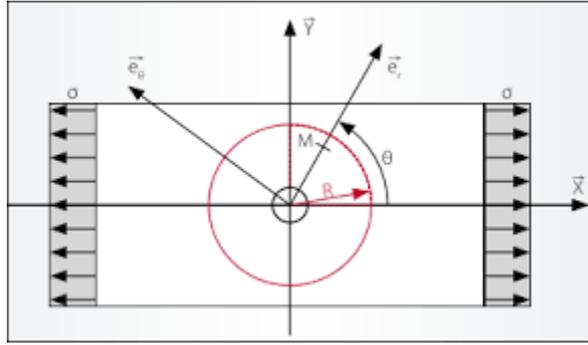


Figure I.23: distribution des contraintes autour d'une entaille circulaire

La surface de l'entaille est définie par la position $r = a$.

Nous avons appris que l'état de contrainte dans la plaque est approximativement en contrainte plane (l'épaisseur de la plaque $e = a$) donc : $\sigma_{zz} = \sigma_{zx} = \sigma_{z\theta} = 0$.

Pour $r = a$, la distribution des contraintes autour du trou est donnée par :

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}(r = a, \theta) &= 0 \\ \sigma_{\theta\theta}(r = a, \theta) &= \sigma(1 - 2 \cos(2\theta)) \quad (II.8) \\ \sigma_{r\theta}(r = a, \theta) &= 0 \end{aligned}$$

I.7.3.2. Facteurs élastiques linéaires de concentration de contrainte K_t

Les valeurs du facteur de concentration de contrainte ont été obtenues pour différentes géométries et sont généralement regroupées dans des tables « mechanical engineering handbook », deux types de facteurs de concentration de contraintes sont généralement trouvés dans la littérature [37]. Le premier est le facteur de concentration de contraintes basé sur la contrainte élevée K_{tg} . Il est donné par :

$$K_{tg} = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma} \quad (II.9)$$

Où σ_{\max} est la contrainte maximale sur le fond d'entaille et σ la contrainte appliquée. De même, on peut aussi définir le facteur de concentration de contrainte basé sur la contrainte nominal, K_{tn} . Il est donné par la formule suivante :

$$K_{tn} = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{\text{nom}}} \quad (II.10)$$

Où σ_{nom} est la contrainte nominale (moyenne) agissant sur la section nette A_{net} le long de ligament.

Pour une charge appliquée P , on a :

$$P = \sigma \cdot A = \sigma_{\text{nom}} \cdot A_{\text{net}} \quad (II.11)$$

Donc

$$\sigma_{\text{nom}} = \sigma \cdot \frac{A}{A_{\text{net}}} \quad (II.12)$$

Pour une plaque de largeur $2W$ avec un trou circulaire de rayon $a = r$, σ_{nom} est donnée par :

$$\sigma_{nom} = \frac{\sigma}{1-\frac{r}{w}}(II.13)$$

Les deux facteurs de concentration de contrainte sont reliés par l'équation suivante :

$$K_{tn} = K_{tg} \cdot \left(1 - \frac{r}{w}\right)(II.14)$$

Ces définitions reposent sur une constatation fondamentale. Pour un type de chargement donné, le rapport entre la contrainte réelle (dans le cas où elle est inférieure à la limite d'élasticité) et la contrainte nominale en un point ne dépend pas de la valeur de la charge appliquée. Le choix du coefficient qui représentera les concentrations de contraintes est donc tout naturel.

L'indice « t » est employé pour indiquer que ces coefficients sont théoriques et que leur calcul repose sur les hypothèses de la théorie de l'élasticité.

I.7.3.3. Facteur de Concentration de contrainte

Donner la valeur de la contrainte ortho radiale $\sigma_{\theta\theta}$ au bord du trou en fonction de l'angle θ .

Indiquer à quel endroit cette contrainte est maximale et quelle valeur elle y prend. Calculer le facteur de concentration de contrainte défini par

$$K_t = \frac{\sigma_{\theta\theta}^{\max}}{\sigma^{\infty}}(II.15)$$

La contrainte ortho radiale vaut

$$\sigma_{\theta\theta}(r = a) = \sigma^{\infty}(1 - 2 \cos(2\theta))(II.16)$$

Au bord du trou, on distingue deux situations :

Traction simple : la contrainte $\sigma_{\theta\theta}$ est maximale en $\theta = \pm\pi/2$ et vaut trois fois la contrainte appliquée. Le facteur de concentration de contrainte vaut donc :

$$K_t^{traction} = 3$$

La contrainte $\sigma_{\theta\theta}$ est minimale en $\theta = 0$ et $\theta = \pi$ ou elle vaut $-\sigma^{\infty}$.

Le facteur de concentration de 3 en traction montre l'affaiblissement qu'apporte la présence d'un trou dans une plaque. Il peut conduire à une rupture précoce de la plaque étudiée.

Les facteurs de concentration de contrainte se lisent aussi sur les courbes de la Figure II.4.

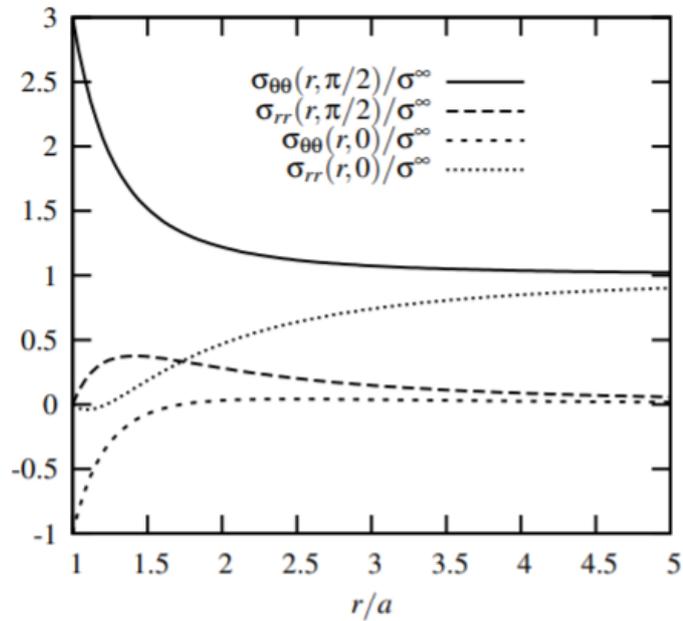


Figure I.24 : Profils des contraintes radiales et ortho radiale normalisées par la contrainte appliquée en partant du pôle ($\theta = 0$) et de l'équateur ($\theta = \pi/2$) en fonction de la distance relative r/a par rapport au trou.[36]

I.7.3.4. Facteur de concentration de contrainte pour une entaille elliptique

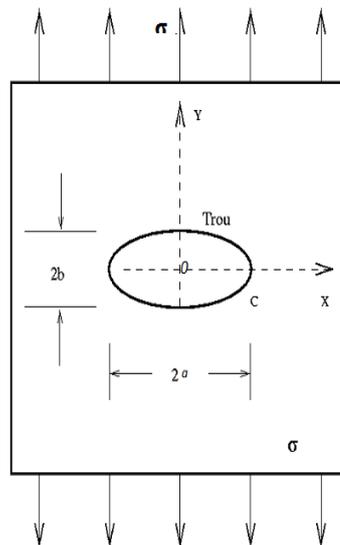


Figure I.25: plaque contenant une entaille elliptique avec a et b les deux demi axes soumis à un chargement de traction

On considère que le matériau est élastique linéaire et obéit à la loi de Hooke contenant un défaut de forme elliptique de longueur $2a$ et de rayon a fond d'entaille ρ (figure.II.5) la frontière du trou elliptique est décrit par la forme :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ (II.17)}$$

Le rayon de courbure au point C est :

$$\rho = \frac{b^2}{a}$$

Là où la plus grande concentration de contrainte se produit. La contrainte locale à l'extrémité.

C'est d'après les calculs :

$$\sigma_{\gamma\gamma}(a, 0) = \sigma \left(1 + \frac{2a}{b}\right) = \sigma \left(1 + 2 \sqrt{\frac{a}{\rho}}\right) \quad (II.18)$$

Pour un trou circulaire ($a=b$), alors $\sigma_{\gamma\gamma}(a, 0)/\sigma \approx 3$

L'expression mathématique du facteur de concentration de contrainte pour une entaille elliptique a été donnée par Peterson [38] à la suite des travaux de Neuber [39], pour des formes de pièces simple, pour le cas en traction. Il a proposé :

$$K_{tn} = 1 + \frac{2a}{b} = 1 + 2 \sqrt{\frac{a}{\rho}} \quad (II.19)$$

a et b étant les demi-longueur de l'entaille et ρ le rayon de courbure de l'entaille.

Dans le cas d'un trou, on a $a=b$, d'où $K_{tn}=3$. K_{tn} est défini comme le rapport de la contrainte maximale réelle dans la zone de discontinuité (entaille, trou, par exemple) à la contrainte dans la section nette :

$$K_{tn} = \sigma_{max}/\sigma_{nom} \quad (II.20)$$

σ_{max} est calculable par les méthodes numériques comme la méthode des éléments finis ou par méthodes analytiques pour les géométries simples. Elle est également mesurable par les techniques d'analyses de contraintes expérimentales comme la photoélasticimétrie, l'extensomètre ou encore les méthodes technique.

En résumé, la contrainte σ_{max} est déterminée par un calcul analytique dans les configurations géométriques connues, dans les autres cas (entaille aigue), on a recours à un calcul par la méthode des éléments finis.

I.7.4. Méthode utilisées pour mesurer le facteur de concentration de contrainte

I.7.4.1. Théorie de l'élasticité

Dans certains cas simples, il est possible de résoudre mathématiquement les équations de l'élasticité et d'obtenir les facteurs théoriques de concentration des contraintes. Cas type : le calcul du facteur de concentration, résultant de l'introduction d'un petit trou elliptique, dans une grande plaque soumise à des contraintes unie-axiale avec une contrainte nominale σ_0 , on trouve

$$K_t = 1 + 2 \frac{a}{b} \quad (II.21)$$

Ou a et b sont les demi-longueurs des axes de l'ellipse. Cependant, dès que la géométrie ou l'état de contrainte devient un peu compliqué, il est quasi impossible de calculer théoriquement les

facteurs de concentration. On utilise alors une des méthodes expérimentales décrites brièvement ci-après.

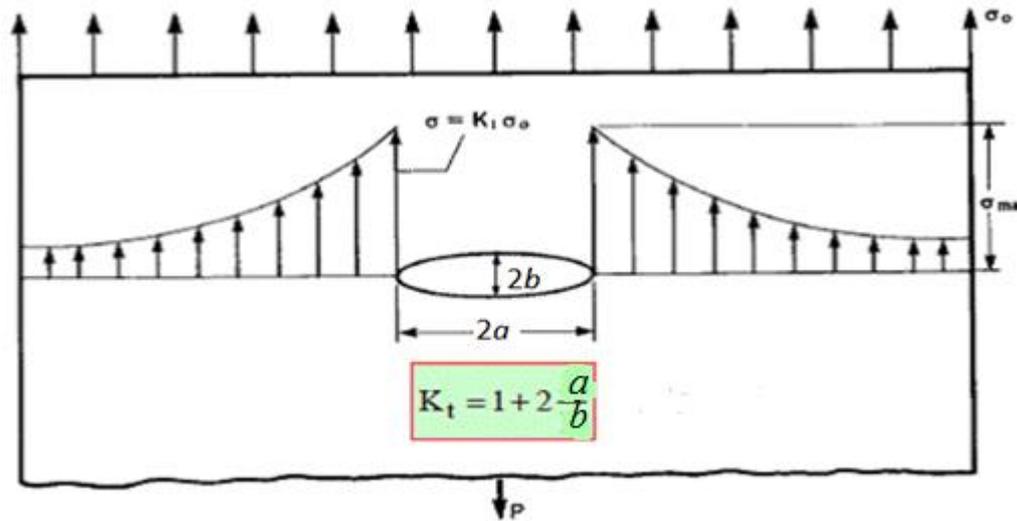


Figura I.26 : Distribution des contraintes à une discontinuité. [38]

I.7.4.2. Photoélasticité

La photoélasticité est la méthode expérimentale la plus pratique et la plus universelle pour étudier les concentrations des contraintes. Elle utilise un polariscopes qui permet de visualiser sous la forme de franges de polarisation. Les contraintes induites dans un modèle translucide. Elle permet de visualiser la répartition des contraintes dans la pièce et de déceler ainsi les régions où les contraintes sont très élevées (concentration de contrainte) ou faibles.

Le phénomène utilisé en photoélasticité est celui de la biréfringence (double réfraction) que développent certains matériaux transparents en présence d'un état de contrainte. Il existe alors une relation entre les axes principaux de contraintes et les axes optiques principaux.

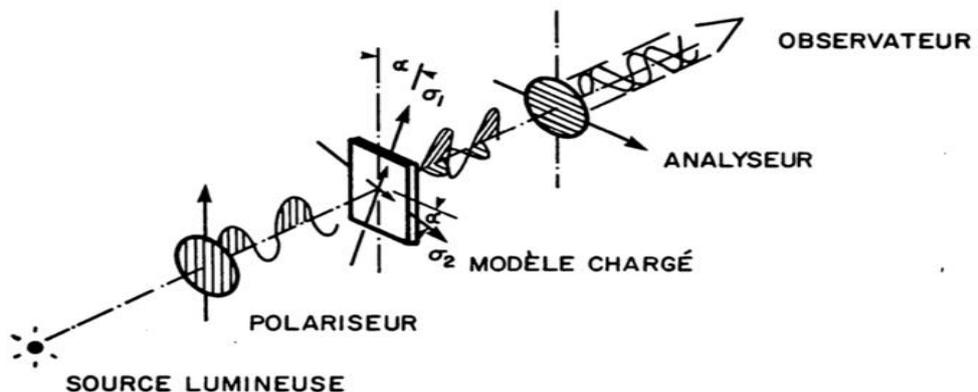


Figure I.27: Montage de polariscopes.

La figure IV.8 montre des résultats expérimentaux par la technique de photoélasticité, afin de appliqué un essai de traction sur une plaque trouée. [39]

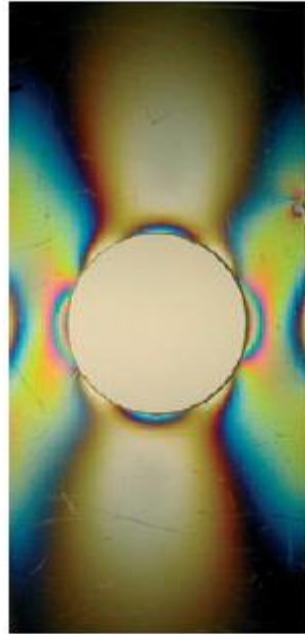


Figure I.28 : Photoélasticité d'une plaque trouée en traction. [39]

I.7.4.3. Jauges électriques de contrainte

Une jauge de contrainte est un capteur dont la résistance varie selon la force appliquée. Elle convertit la force, la pression, la tension, le poids, etc. en une variation de la résistance électrique qui peut ensuite être mesurée.

Lorsque des forces extérieures sont appliquées à une plaque, il en résulte une contrainte et une déformation. La contrainte est définie par les forces de résistance internes, et la tension est définie par le déplacement et la déformation qui en découlent. La jauge de contrainte constitue l'un des outils les plus importants des techniques de mesure électriques appliquées à la mesure de facteur de concentration de contrainte.

On peut coller une très petite jauge électrique sur le point présumé de concentration maximale (par exemple : le bord d'un trou, le fond d'un congé ou d'un filetage). Cette méthode courante ne permet d'obtenir que les contraintes induites en surfaces. Mais ce sont généralement les plus grandes. La photo de la figure IV.9 indique la position et la direction des trois jauges a, b et c.

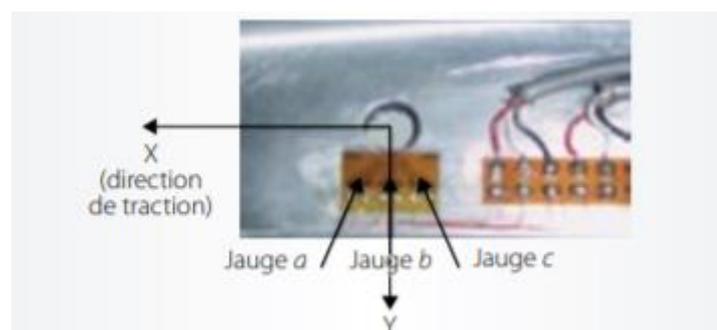


Figure I.29 : L'emplacement de jauges sur la plaque trouée. [40]

I.7.4.4. Autre méthode expérimentale

De nombreuses autres méthodes sont utilisées pour connaître les concentrations de contrainte. Le procédé de « vernis craquelant » consiste à déposer sur la région étudiée une couche de laque fragile. Lorsque celle-ci est sèche. On applique les charges progressivement et on surveille l'apparition de la première craquelure. Les première fissures apparaitront la ou des déformations sont les plus grandes et elles seront perpendiculaires a leur direction.

Il existe aussi plusieurs procédés ou une grille est tracée ou collée sur la surface de la pièce. Les déformations de cette grille permettent de déduire les contraintes au voisinage d'une discontinuité (méthode de la grille incluse ou des franges de moiré).

I.7.4.5.Méthode analogique

Les méthodes analogiques consistent à reproduire des phénomènes physiques obéissant aux mêmes lois que les contraintes. On peut montrer en effet que les contraintes normales. Dans une pièce bidimensionnelle par exemple satisfont aux mêmes équations que les vitesses d'un fluide s'écoulant dans un canal plan de même forme que la pièce sollicitée. Ces méthode sont commodes pour deux raisons surtout : elles peuvent être appliquées de manière approximative et elles permettent de concevoir des moyens pour diminuer l'effet des changements brusques de section. Considérons la pièce de la figure II.11. Imaginons que les forces. Dans la pièce, sont représentées par une série de lignes semblables à celles qui forment les lignes de courant de l'écoulement d'un liquide, dans une conduite ayant la même forme que la pièce.

Plus la contrainte des lignes est grande plus les contraintes sont grandes (les contrainte se comparent à la vitesse du fluide dans le problème analogique d'écoulement)

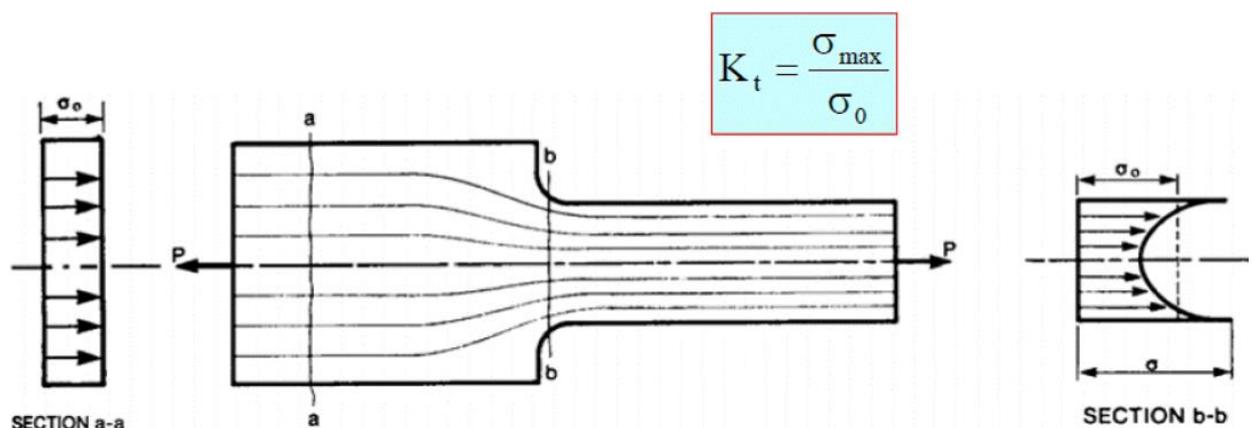


Figure II.30 : analogie entre un écoulement et la distribution des contraintes.

I.7.5. Moyens de diminuer les effets des concentrations des contraintes

La méthode des lignes de forces permet d'envisager des modifications géométriques à apporter aux pièces de machines de façon à diminuer les concentrations de contrainte. Il s'agit, en fait, d'empêcher la concentration des lignes de force au chargement de section. Le principe directeur est le suivant : le chargement de section droit se faire le moins brusquement possible. Il faut donc employer les plus grandes rayons de raccordement possibles.

En partant du même principe, on peut imaginer ce qui suit : dans une plaque en traction, un trou elliptique est moins dommageable si son grand axe est dans la direction des contraintes, et ce pour une même section nette ou t est l'épaisseur de la plaque, donc, en enlevant plus de matériau, on diminue l'effet du chargement de section.

Lorsqu'on ne peut éviter d'avoir un petit rayon de raccordement. D'avoir un trou dans un arbre ou une plaque. Et que ces chargements de section présentent des dangers pour la pièce, on peut, en enlevant du matériau, réduire effet dommageable Figure II.12 (a) et (b).

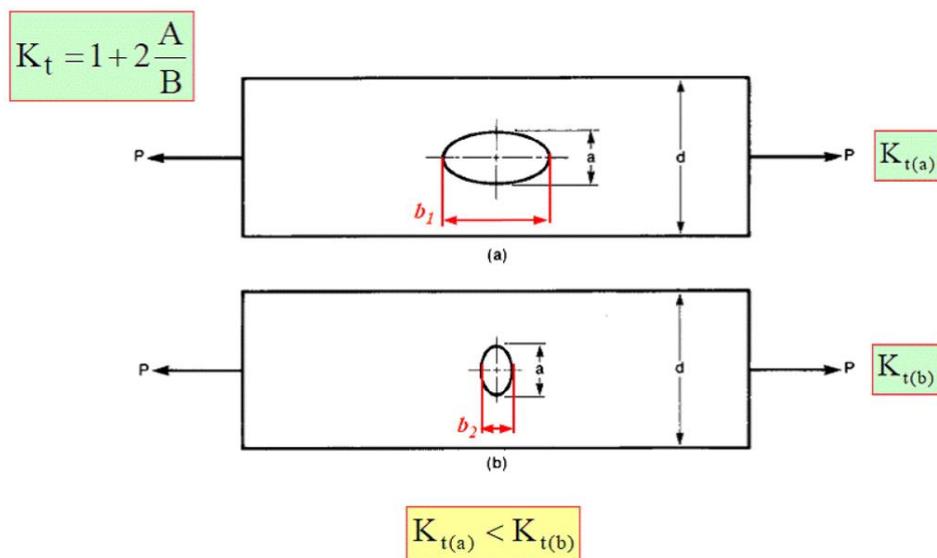


Figure II.31 : Effet d'un trou dans une plaque.

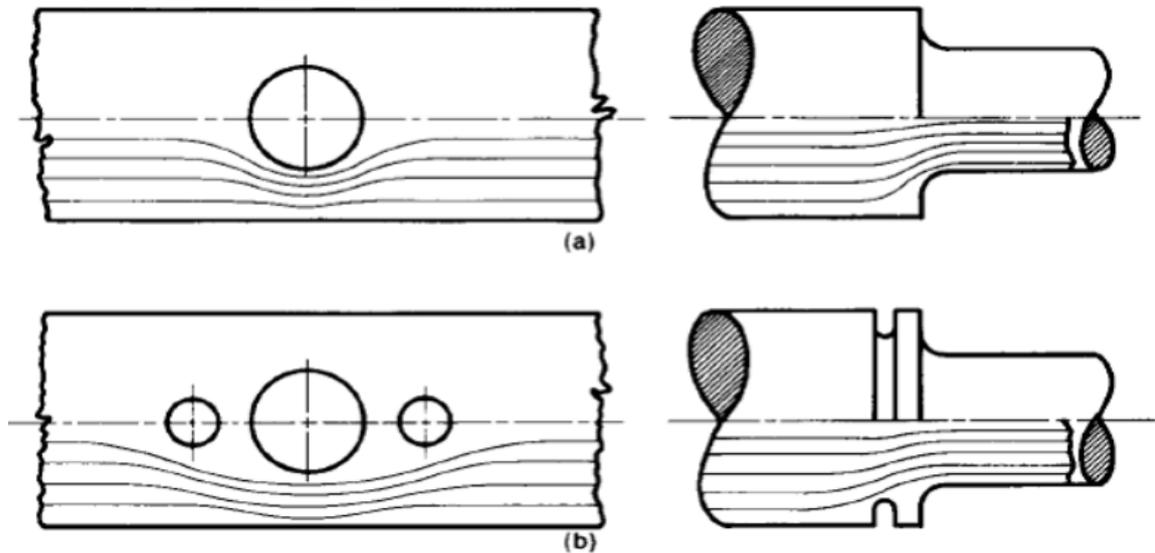


Figure II.32: moyen de diminuer les concentrations des contraintes.

Conclusion :

Le but de la mécanique de rupture est de formuler des critères, c'est-à-dire de définir les conditions pour les quelle un défaut identifié (ou non) peut se propager sous une sollicitation donné.

On cherche alors des relations quantitatives entre la taille des défauts, les contraintes appliquées et un paramètre caractéristique du matériau, dit de ténacité K_{IC} .

Dans ce chapitre, nous avons essayé de donner une idée générale sur la mécanique de rupture, les différents paramètres de la rupture, le facteur d'intensité des contraintes, le taux de restitution d'énergie et l'intégral de Rice.

CHAPITRE II: LA
METHODE DES
ELEMENTS FINIS
ETENDUS (X-FEM)

Chapitre II: La méthode des éléments finis étendus(X-FEM)

II.1. Introduction

La MEF est apparu en premier et elle se base sur l'interpolation d'un champ de déplacement ou de force pour transformer un milieu discret par sous domaine ou élément fini. La partition du domaine en sous domaine de plus en plus serré permettait d'arriver à une solution acceptable. Elle a été utilisée en premier pour analyser la fissuration avec quelques difficultés. La deuxième méthode appelée éléments finis étendus (X-FEM) basée comme son nom l'indique essentielle sur une modification de la MEF consistant à utiliser un enrichissement de la cinématique du milieu continu (des fonctions de formes). Elle permet de combler l'insuffisance de la MEF à analyser la propagation de la fissuration. Mais d'abord on prendre une idée générale sur la modélisation numérique de la fissuration. La simulation numérique en mécanique de la rupture est essentiellement basée sur l'utilisation de la méthode des éléments finis. Classiquement, pour un problème de propagation de fissure, un premier calcul est réalisé sur un maillage initial, puis un nouveau maillage est déterminé en prenant en compte l'avancée de la fissure suivant la loi de propagation choisie. Un nouveau calcul s'en découle, et le procédé est itéré pour chaque pas de propagation.

Un inconvénient majeur et immédiat est la nécessité de remailler à la chaque pas de propagation [41]. Le processus de remaillage peut être facilement automatisé en 2D, et dans certains cas en 3D, mais un remaillage 3D de qualité s'avère couteux en temps et en argent. En effet avec un meilleur automatique, un raffinement local approprié au niveau de la zone de fissuration entraîne souvent un nombre excessif d'éléments partout sur le reste de la structure. Un processus de raffinement est généralement utile, solution performante mais nécessitant une intervention humaine couteuse ; et ce d'autant plus que la forme géométrique de la fissure est complexe (fissures hélicoïdales par exemple). Le problème de la réalisation du maillage devient quasi-inconcevable lorsque plusieurs fissures 3D coexistent au sein d'un même maillage. En plus de ces difficultés pratiques, la projection de grandeurs (contraintes, variables internes) d'un maillage à l'autre pose des problèmes théoriques fondamentaux (vérification des équations de conservation de l'énergie, de la quantité de mouvement, de la masse). Parallèlement aux difficultés liées à la propagation, les méthodes avec maillage s'avèrent peu efficaces pour des études paramétriques ou l'on s'intéresse à l'influence de la position et de la forme de la fissure. [42]

La fissuration est simulée par une méthode numérique à l'aide d'analyses successives. Une première analyse résout les équations aux dérivées partielles qui modélisent le comportement du solide fissuré en tenant compte des charges appliquées et des déplacements imposés pour obtenir une estimation des déplacements, déformations et contraintes en tout point de ce

Chapitre II: La méthode des éléments finis étendus(X-FEM)

solide. L'intensité et la variation de ces champs à proximité du front de fissure sont ramenées à quelques grandeurs caractéristiques qui sont introduites dans le modèle de fissuration choisi pour obtenir la direction et la longueur de propagation de la fissure. En mécanique linéaire de la rupture par exemple, ces grandeurs caractéristiques sont les trois facteurs d'intensité de contrainte. En ajoutant l'incrément de fissure prédit par le modèle au front de fissure, nous obtenons une nouvelle fissure, qui est la nouvelle frontière interne pour l'analyse suivante qui donnera les nouveaux champs de déplacement, déformation et contrainte et ainsi de suite.

II.2. Méthodes « classiques basées sur les éléments finis (FEM)

II.2.1. Historique de méthodes des éléments finis (FEM)

Méthode d'approximations :

- Fonctions de basse sur tous les domaines : Ritz 1908, Galerkin 1915.
- Fonctions de bases locales : Courant 1943

Méthode de calcul :

- Approches énergétiques : Navier 1819, Maxwell-Castigliano 1870
- Développement systématique des approches énergétiques : Levy

Développement des approches matricielles Méthode des éléments finis :

- Unification des deux méthodes : Argyris 1955
- Développement systématique, vulgarisation et utilisation industrielle : Zienkiewics 1960.

Depuis son introduction dans les années cinquante, la méthode numérique basée sur les éléments finis a largement été utilisée dans la résolution des problèmes de mécanique de la rupture. On citera par exemple les travaux de Newman & Strathmeier utilisant des éléments de bouts de fissures axisymétriques, les travaux de Yoshimura et al utilisant la méthode du relâchement des nœuds.

Cette méthode, illustrée par la figure (II.1), consiste à bloquer les nœuds du ligament d'une fissure tant qu'ils ne sont pas rompus. Lorsqu'un critère de rupture est satisfait, on en déduit la nouvelle position de la fissure, et on relâche les nœuds correspondants.

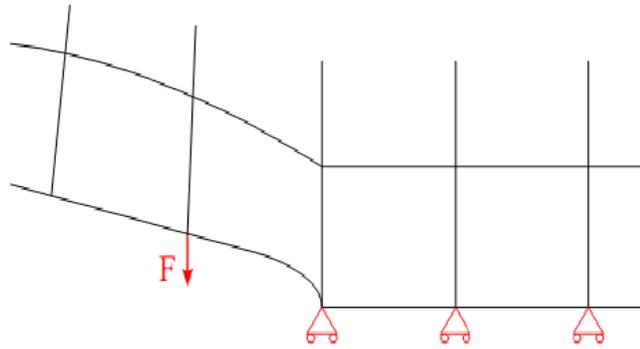


Figure. II.1: Méthode du relâchement de nœuds.

Il existe plusieurs manières de relâcher les nœuds :

- Le relâchement instantané est le schéma le plus simple.
- Le schéma qui consiste à imposer la force de décroître linéairement dans le pas de temps est sans doute le plus répandu.

Enfin, il existe d'autres variantes du schéma précédent. Par exemple, Malluck et al propose un schéma où on impose à la force de décroître de manière à maintenir le facteur d'intensité des contraintes K constant durant le pas de temps.

Cette méthode nécessite la connaissance préalable du trajet de fissure et impose à la pointe de fissure de se situer sur un nœud. Elle permet de simuler des ruptures en 2D, mais est beaucoup plus difficile à mettre en œuvre en 3D lorsque le front de fissure n'est pas rectiligne.

II.2.2. Modélisation de la fissuration par la MEF

La modélisation des discontinuités représente toujours un défi d'un point de vue numérique. Si on veut modéliser les fissures par la méthode des éléments finis classique (MEF), le maillage EF doit se conformer avec la géométrie de la fissure, de plus, afin de déterminer le vrai champ de contrainte et de déformation autour de la pointe de la fissure, on a besoin de raffiner le maillage dans cette zone. De nombreuses méthodes ont été proposées et développées pour surmonter cette difficulté :

II.2.2.1. Méthodes de remaillage

Pour avoir une bonne idée des champs à proximité du front de fissure, il faut conserver un maillage suffisamment fin lors de la propagation. C'est pourquoi, partant de cette idée, il semble nécessaire de remailler la fissure lors de sa propagation. Les algorithmes de remaillage sont souvent complexes et délicats à mettre en œuvre. On peut extraire deux principales sources d'erreur.

Chapitre II: La méthode des éléments finis étendus(X-FEM)

D'abord, après une opération de remaillage, il est nécessaire de projeter les champs de la solution du pas précédent sur le nouveau maillage. Comme les solutions discrétisées sur différents maillages ne sont pas les mêmes, une simple projection ne conduit pas à des champs en équilibre. Une étape supplémentaire de rééquilibrage est donc souvent introduite en prenant garde à conserver fermée la surface de fissure fraîchement introduite par le remaillage. Malheureusement, cette étape de rééquilibrage ne garantit pas la conservation de l'énergie mécanique du système pendant la projection.

Ensuite, tout comme pour la méthode de relâchement de nœud, il est nécessaire de libérer la nouvelle surface de fissure.

Finalement, ces opérations de projection et de relâchement modifient l'énergie du système discret de manière purement numérique.

L'utilisation d'éléments finis espace-temps peut aussi être considérée comme une variante des méthodes de remaillage puisque la discrétisation de la géométrie varie au cours du temps. Le principe de ces éléments est de considérer le temps de la même manière que les variables d'espace, et de remplacer les traditionnels schémas temporels basé sur les différences finies par des approximations de type éléments finis, ou même par des formulations de type Galerkin discontinu. L'avantage principal de ce type de formulation réside dans la capacité à raffiner le maillage où et quand on juge nécessaire de faire grâce à un indicateur de la solution. Comme cela est illustré par la Figure II.2), le front d'une onde élastique et la pointe de fissure requièrent une finesse de maillage localement plus élevée que dans le reste de la structure.

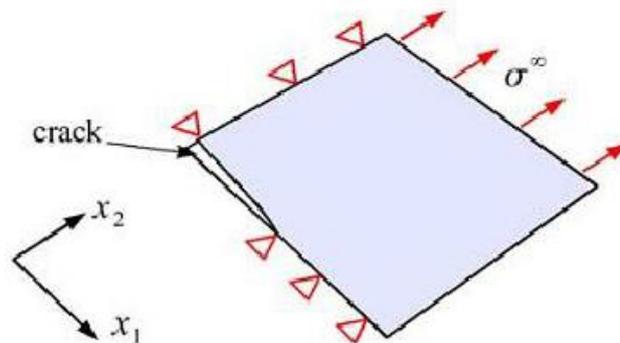


Figure.II.2: Méthode des éléments finis : Exemple de calcul d'une plaque fissurée fixe soumise à un chargement brutal de traction

Chapitre II: La méthode des éléments finis étendus(X-FEM)

II.2.2.2. Elimination d'éléments (« Élément délétion méthode »)

Cette méthode consiste à attribuer une proche de zéro au module d'Young des éléments satisfaisant un critère de rupture donné. Suivant les logiciels la masse correspondante est elle-aussi éliminée ou pas. Cette méthode simple à mettre en œuvre et très utilisée dans le milieu industriel est également très grossière. L'énergie consommée par l'avancée de la fissure dépend de la taille de maille. En effet, lors de la propagation, on annule l'énergie d'un élément ; donc si on augmente le volume des éléments, on dissipe plus d'énergie. Afin d'atténuer cette dépendance à la taille de maille, les autres ont utilisé une loi de comportement élastique en dommageable modifiée en faisant dépendre la déformation à la rupture du taux de restitution d'énergie, de la taille et du volume de l'élément. La comparaison effectuée par ces auteurs sur plusieurs cas test entre la présente méthode « élément délétion méthode », la méthode des éléments cohésifs « interélément méthode », et la méthode des éléments finis étendus (X-FEM) est présentée en détail après dans ce chapitre.

II.2.2.3. Méthode des éléments cohésifs

Les modèles d'interface en dommageable (dits de zone cohésive) sont basés sur le modèle de Dugdale-Barenblatt. Ce dernier suppose l'existence d'une zone de transition d'une longueur caractéristique en pointe de fissure à l'intérieur de laquelle la séparation des surfaces est progressive (Fig. III.3). La loi de comportement à l'intérieur de cette zone d'épaisseur nulle définit le modèle de la zone cohésive, et consiste en générale en une relation liant les contraintes d'ouverture avec elle-même. L'aire sous la courbe représente le travail dissipé par l'ouverture des lèvres identifié comme le taux de restitution d'énergie.

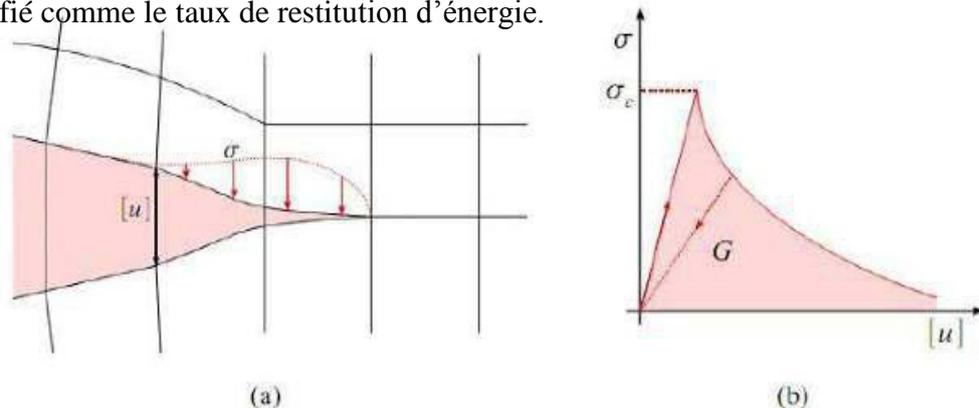


Figure. II.3: Modèle de zone cohésive. (a) Maillage. (b) loi de comportement

Intellectuellement très intéressante, cette méthode possède néanmoins quelques inconvénients. D'abord, elle introduit un élément d'épaisseur nul, mais de rigidité fini, qui modifie la rigidité globale de la structure, ce qui, en dynamique, perturbe le trajet des ondes mécaniques. De plus, il faut connaître le trajet de la fissure a priori. L'argument le plus souvent reproché à ce

Chapitre II: La méthode des éléments finis étendus(X-FEM)

modèle est le fait qu'il introduit une dépendance au maillage. Ceci a été démontré par Xu et Neeleman [43] en introduisant des éléments cohésifs entre tous les éléments, et plus récemment par Zhou et Molinari. La direction de propagation montre alors une forte dépendance à la construction du maillage en termes d'orientation et de taille des éléments.

Une première évolution de cette méthode est celle que proposent Camacho, Pandolfi et Ortiz et Zhou et Molinari. Les auteurs n'introduisent de zones cohésives qu'aux bords des éléments qui vérifient un critère de rupture ou qui sont situés dans le prolongement immédiat de la fissure préexistante.

II.3. Méthodes non basée sue les éléments finis

II.3.1. Méthode des éléments de frontières (BSF)

Appliquée aux problèmes de mécanique de la rupture depuis une vingtaine d'années, elle présente pour principale caractéristique de ne demander qu'une discrétisation de la frontière du domaine et non de l'intérieur. Le travail de remaillage entre chaque étape est donc minime puisqu'il suffit d'ajouter un ou quelques éléments sur les incréments de fissure.

Dans cette méthode, les équations aux dérivées partielles sont transformées en des équations intégrale sur la frontière par le biais d'une certaine solution fondamentale de ces équations aux dérivées partielles, dite solution de Green. Cette méthode n'est applicable que si une telle solution existe, ce qui n'est pas le cas des problèmes élastoplastique. Pour ces problèmes, un maillage de la zone plastifiée est nécessaire, ce qui fait perdre une grande partie des avantages de la méthode. Les articles sur ce sujet sont nombreux, comme par exemple Portela, Aliabadi et Rooke (1991) et Yan et Nguyen Dang (1995) pour la fissuration à deux dimensions et Mi et Aliabadi (1993) à trois dimensions. [44]

II.3.2. Méthodes sans maillage

Parmi les méthodes sans maillage, la méthode SPH (Smoothed Particule Hydrodynamics) et la méthode "Element Free Galerkin méthode" sont certainement les plus utilisées. Ces méthodes sans maillage ne raisonnent plus sur un découpage de la géométrie en éléments, mais sur une représentation du volume par une densité de nœuds. Ces derniers sont munis de fonctions poids non nulles sur une zone d'influence qui peut contenir d'autres nœuds

Chapitre II: La méthode des éléments finis étendus(X-FEM)

II.4. Méthodes basées sur la partition de l'unité

II.4.1. La partition de l'unité (PUM)

Nous venons de voir que l'ordre de convergence des solutions éléments finis était réduit lorsque la solution du problème est non régulière. La diminution de la taille des éléments (raffinement h) ou l'augmentation de l'ordre des polynômes de la base éléments finis (raffinement p) ne sont d'aucun secours. L'idée de la méthode de partition de l'unité est d'introduire dans la base éléments finis des fonctions d'interpolation adaptées à la nature du problème telles que des polynômes harmoniques pour les problèmes de Laplacien, des solutions trigonométriques en acoustique ou des solutions asymptotiques en pointe de fissure en mécanique de la rupture. Celles-ci doivent permettre une amélioration de la solution. Ce type d'approche peut être obtenu en utilisant la propriété de partition de l'unité des fonctions de forme éléments finis. Les premiers travaux sur cette approche ont été proposés par Babuska et Melenk (1997, 1996). [45]

Nous présentons maintenant les fondements de cette méthode. Pour simplifier les notations de ce paragraphe, la fonction $u(x)$ à approcher n'est pas vectorielle, mais scalaire.

Soit un domaine Ω discrétisé par un ensemble de \mathcal{N} nœuds associés à N fonctions de forme notées N_i . La méthode des éléments finis utilise ces fonctions de formes pour approximer le champ de déplacement à l'aide des déplacements nodaux U_i :

$$u(x) = \sum_{i \in \mathcal{N}} N_i(x) U_i \quad (\text{II.1})$$

$u(x)$: définit une approximation éléments finis standard du champ de déplacement. Il a été démontré que si les N_i constituent une partition de l'unité du domaine Ω , c'est-à-dire que :

$$\sum_i N_i(x) = 1 \quad \forall x \in \Omega \quad (\text{II.2})$$

Sous cette condition alors on peut enrichir la base de fonctions de forme en utilisant une fonction d'enrichissement φ telle que :

$$u(x) = \sum_{i \in \mathcal{N}} N_i(x) U_i + \sum_{j \in \mathcal{N}^e} N_j(x) U_j^e \varphi(x) \quad (\text{II.3})$$

Où \mathcal{N}^e est un sous-ensemble de \mathcal{N} où l'on place un degré de liberté enrichi U_j^e . De plus, le domaine d'influence de fonction s'enrichissement φ est 'ensemble des éléments connectés aux nœuds appartenant à \mathcal{N}^e ; ces nœuds sont dits « enrichis ». cela revient à enrichir le déplacement standard par le champ de déplacement $u(x)$. Avec cette manière d'écrire, si l'on choisit les grandeurs U_i (les degrés de liberté « standards ») égales à 0 et U_j^e (les degrés de liberté enrichis)

Chapitre II: La méthode des éléments finis étendus(X-FEM)

égales à 1, le champ de déplacement discrétisé correspond au champ de déplacement $\varphi(x)$ souhaité :

$$u(x) = \sum_{i \in \mathcal{N}} N_i(x) \varphi(x) = \varphi(x) \quad (\text{II.4})$$

Si l'on veut décrire une fissure, le champ de déplacement est discontinu ; alors la fonction d'enrichissement doit être discontinue également. Cette propriété s'exploite avec la méthode des éléments finis étendus.

II.4.2. Méthodes des éléments finis étendue (XFEM)

Plus récemment, des formulations de la FEM mieux adaptées aux problèmes de la mécanique de la rupture ont été développées. La méthode des éléments finis étendus plus connu sous le sigle X-FEM (eXtended Finite Élément Méthode) et parfois appelée méthode des éléments finis généralisée, elle est appliquée aux problèmes de mécanique de la rupture depuis 1999. Elle se base sur la méthode des éléments finis avec un maillage normal en remplaçant les éléments qui sont coupés par une fissure par des éléments spéciaux possédant quelques degrés de liberté supplémentaires qui permettent de représenter un champ de déplacement discontinu de part et d'autre de celle-ci. La propagation est simulée en remplaçant les éléments nouvellement traversés par une fissure par un élément spécial.

II.4.3. Autres méthodes utilisant la partition de l'unité

Le concept de partition de l'unité permet l'introduction d'une fonction arbitrairement discontinue dans le champ de déplacement. Il ouvre ainsi la porte à une nouvelle approche de la modélisation des phénomènes de rupture. Dans ce cadre, on distingue classiquement :

- La modélisation du volume ('the continuum'),
- La modélisation de la zone de rupture ('the discontinuous part').

Ainsi, les modèles classiques de mécanique des milieux continus (élastique, plastique, viscoplastique, en dommageable,...) s'appliquent directement au volume, tandis que le traitement de la fissure est réalisé avec la méthode de partition de l'unité en :

- Ajoutant simplement des fonctions 'saut' lorsqu'un critère de rupture est vérifié.
- Introduisant un segment cohésif qui coupe de manière arbitraire un élément qu'un critère désigne comme rompu.

II.5. Méthode des éléments finis

La méthode des éléments finis est une méthode numérique de résolution approchée des équations différentielles décrivant les phénomènes physiques de l'ingénierie. Elle connaît, depuis 1970 environ [45], une extension fantastique, qui va de pair avec le développement et l'accroissement de puissance des ordinateurs. Elle est devenue un outil de travail, calcul et conception quotidien, voir familier, de l'ingénieur, dans des domaines aussi variés que l'analyse des structures, le transfert de chaleur, la mécanique des fluides, l'électromagnétisme, les écoulements souterrains, la combustion ou encore la diffusion des polluants.

II.5.1. Avantage de la méthode des éléments finis

- ✓ On peut représenter un grand nombre de formes de structures à l'aide du modèle analytique général commun.
- ✓ La faculté de définir des maillages très irréguliers et depuis l'origine est l'un des grands avantages de la méthode des éléments finis.
- ✓ On peut accepter des lois complexes de propriétés intrinsèques des matériaux si on compare aux possibilités des méthodes classiques de résolution, et offrent plus vastes perspectives en analyse non linéaire.

II.5.2. Procédures de base de la méthode des éléments finis

Les différentes étapes pour l'application de la méthode des éléments finis seront décrites d'une manière générale.

❖ Choix du type d'élément et discrétisation

La première étape consiste à choisir le type d'élément le plus adapté au problème donné, ensuite on discrétise le milieu continu en un certain nombre d'éléments. En générale, les points suivants sont à prendre en considération dans la sélection du type d'élément.

❖ Type d'élément

La sélection de l'élément sera fonction du type de problème à résoudre, généralement :

Ils sont groupés en quatre classes :

1. Les contraintes planes; les déformations planes; axisymétriques (problème à deux dimensions).
2. La flexion des plaques.
3. Les coques.
4. L'analyse des solides tridimensionnels.

On distingue plusieurs classes d'éléments finis suivant leur géométrie :

- Les éléments unidimensionnels (1D) : sont utilisés de façon individuelle ou associée des plaques pour modéliser les raideurs. Exemple : barre, poutre rectiligne ou courbe.

Chapitre II: La méthode des éléments finis étendus(X-FEM)

- Les éléments bidimensionnels (2D) : Elasticité plane (déformation ou contrainte plane). Exemple : plaque en flexion, coques courbes, de forme triangulaire ou quadrangulaire.
- Les éléments tridimensionnels (3D) : élément de volume, ou coques épaisses.
- Les éléments axisymétriques : qui constituent une classe bien particulière.

Dans chaque groupe des différents niveaux de précision peuvent être atteints. Ceci dépend du nombre de degrés de liberté associés avec le type d'élément. Les points nodaux se trouvent généralement sur les frontières des éléments bien que des nœuds internes peuvent aussi être inclus dans certains éléments pour augmenter leur efficacité. Généralement, avec l'augmentation de l'ordre de l'élément, celui-ci devient plus précis et plus coûteux. Cependant certaines conditions doivent être satisfaites dans la sélection du type d'élément pour assurer une bonne convergence (Convergence vers la solution exacte). Ces conditions sont :

- ✓ le champ des déplacements à l'intérieur de l'élément doit être continu.
- ✓ Le modèle du déplacement doit inclure un état de déformation constante (L'élément doit être capable de reproduire un champ de déformation constant, si les déplacements nodaux le requièrent).
- ✓ L'élément doit être capable de reproduire un mouvement de corps rigide : par exemple quand les degrés de liberté nodaux correspondent à un mouvement de corps rigide, l'élément doit avoir une déformation égale à zéro et des forces nodales nulles. Ceci est un cas particulier du critère de la déformation constante.
- ✓ L'élément doit être compatible, il ne doit pas y avoir de vide entre deux éléments. L'élément qui ne remplit pas cette condition est dit incompatible ou non conforme. Cependant un élément incompatible peut être valide et sa convergence maintenue si les incompatibilités disparaissent en augmentant le maillage et si l'élément se rapproche d'un état de déformation constante.
- ✓ L'élément n'a pas une direction privilégiée, c'est-à-dire que l'élément doit être géométriquement invariant et donner les mêmes résultats pour n'importe quelle orientation de l'élément.

❖ Taille de l'élément

En général plus le maillage est fin plus les résultats obtenus sont meilleurs, mais en même temps un grand effort de programmation est requis. Le nombre d'éléments utilisés sera la fonction du type de la structure à analyser, mais généralement plus d'éléments sont requis dans les régions où les contraintes varient rapidement que dans les régions où elles varient graduellement. Cependant

Chapitre II: La méthode des éléments finis étendus(X-FEM)

pour les éléments complexes les maillages grossiers donneront des résultats aussi bons que ceux des maillages fins ayant des éléments simples.

II.5.3. Les différentes formulations de la méthode des éléments finis

En général, le principe de toute méthode de discrétisation consiste à remplacer un milieu continu (structure) comportant une infinité de modes de déformations ou de tensions par un milieu idéalisé ne possédant qu'un nombre fini de tels modes. On va alors définir une approximation de la solution (déplacement et/ou contraintes) non pas pour l'ensemble de la rupture, mais pour chacun de ses éléments en les réduisant à un petit nombre de mode décrits par des fonctions simple. Ils sont choisis parmi les plus fondamentaux pour la description du comportement de l'élément dans la structure.

La structure entière est donc idéalisée par un nombre fini de modes qui transmet entre chaque élément de manière bien précise. Les inconnues du problème sont alors les paramètres qui représentent l'intensité de chaque mode.

Il existe plusieurs manières d'approcher un système réel, cette approche consiste à formuler un champ qui porte sur tout le système ou une partie de celui-ci, les différentes formulations existantes sont les suivantes.

a) Formulation en déplacement

C'est une formulation selon laquelle l'approximation est faite sur le champ de déplacements de façon que l'intégrabilité du champ de déformations soit assurée à l'intérieur de l'élément. L'élément est dit "cinématiquement admissible".

Cette condition est automatiquement réalisée lorsque le champ de la déformation est déduit à un champ de déplacement continu et éventuellement différentiable.

Si la continuité du champ de déplacement est vérifiée aux surfaces de séparation des éléments, le modèle est dit Co-déformable ou compatible.

Il existe un autre groupe d'éléments ou l'on satisfait plus que les conditions de compatibilité, ce modèle est alors dit sur-conforme ou sur-compatible.

En général, dans ce modèle, on assure au moins la continuité au nœud du tenseur complet des déformations, y compris le changement des courbures.

b) Formulation équilibre

C'est une formulation dans laquelle l'approximation se fait sur le champ de tension de façon que les équations d'équilibres soient satisfaites à l'intérieur de chaque élément.

c) Formulation hybride

Dans cette formulation, le plus souvent on définit la solution en termes d'approximation, d'une part du champ de contraintes interne en équilibre, d'autre part de déplacements sur la frontière de l'élément.

d) Formulation mixte

Dans celle-ci, on définit la solution en terme d'approximation de deux ou plusieurs champs indépendants; généralement, le champ des déplacements et celui des contraintes, étendues à tout l'élément; en général cette formulation conserve les paramètres inconnus de tous les champs comme DDL; sa mise au point peut être longue et couteuse; elle peut toutefois être d'excellente qualité.

e) Formulation en déformation

C'est une formulation dans laquelle l'approximation se fait sur le champ de déformation de façon telle que les équations de compatibilité et d'équilibre soient satisfaites à l'intérieur de l'élément. Le champ de déplacement est déduit du champ de déformations qui est continu et différentiable. Ce modèle est sur compatible.

II.5.4. Formulation des éléments finis

La méthode des éléments finis représente l'extension de la méthode de rigidité pour les portiques à l'étude bidimensionnelle et tridimensionnelle des structures continues (exemple : plaque, coque...etc.).

Dans la méthode des éléments finis, la structure continue est remplacée par une structure idéalisée équivalente composée d'un ensemble d'élément appelé « élément fini », qui est censé relier les uns aux autres en un nombre fini de points appelés nœuds.

On définit de manière unique le champ des déplacements à l'intérieur de chaque « élément fini » qui est une approximation du problème. Cette approximation de la fonction choisi par un élément appelé une « interpolation » qui est exprimée en fonction des déplacements aux nœuds.

Il est possible, par l'utilisation des théorèmes de l'énergie, de déterminer la matrice de rigidité qui relie les forces nodales avec les déplacements nodaux d'un « élément fini ». La matrice de rigidité de l'assemblage des éléments est obtenue de la même manière que le cas des portiques (Méthode des rigidités).

Si les conditions d'équilibre sont appliquées, chaque nœud de la structure modélisée, on obtient un système d'équilibres simultanées résoudre.

Chapitre II: La méthode des éléments finis étendus(X-FEM)

II.5.5. Procédure d'analyse par éléments finis

La procédure comporte les étapes suivantes :

- L'idéalisation et la discrétisation de la structure en éléments finis par un maillage constitue de lignes ou de surfaces imaginaires. Les éléments sont supposés reliés en un nombre fini de points nodaux situés sur leurs frontières.
- Les déplacements de ces points nodaux seront les inconnues de base du problème. Il est apparent que la méthode des éléments finis est applicable pour les structures des matériaux de propriétés hétérogènes ou de formes géométriques compliqués (bords courbes, trous,...).
- On choisit une fonction de déplacement permettant de définir de manière unique le champ des déplacements de ces nœuds. On se basant sur cette fonction de déplacement, nous déduisons- la matrice de rigidité de l'élément qui lie les forces nodales avec les déplacements nodaux et la matrice masse en utilisant le principe des travaux virtuels ou le principe de l'énergie potentielle totale minimale.
- L'analyse de la structure idéalisée de l'assemblage des éléments. Cette analyse procède de la manière classique qui a été décrite par la méthode des rigidités.

En fin la solution de ces équations nous permet d'évaluer les déplacements et les efforts internes dans la structure (contrainte, déformation).

II.5.6. Grandes étapes de la méthode des éléments finis

Les différentes étapes de la résolution d'un problème par la méthode des éléments finis sont :

1. Maillage : découpage du domaine en éléments géométriques.
2. Choix de la formulation : Choix des fonctions de base.
3. Calcul des matrices de raideur : calcul des matrices élémentaires puis assemblage de la matrice globale.
4. Calcul du vecteur des forces généralisées : idem.
5. Prise en compte de CL sur les inconnues.
6. Résolution du champ en tout point.
7. Détermination du champ en tout point.
8. Calcul des dérivées sur les éléments.
9. Détermination des réactions des réactions aux limites.

Chapitre II: La méthode des éléments finis étendus(X-FEM)

II.5.7. La modélisation des structures fissurées

La méthode des éléments finis a été utilisée sous de nombreuses formes en mécanique de la rupture. Un des problèmes dans la modélisation des structures fissurées est la description géométrique de la fissure ; Dans le cadre de la méthode des éléments finis, elle est décrite explicitement et fait partie intégrante des frontières du maillage.

Suivant le type de fissure que l'on cherche à étudier, diverses solutions sont envisageables.

II.5.8. Modélisation des fissures par la méthode des éléments finis

Avec cette méthode, le maillage doit tenir compte de fissure : celle-ci doit être positionnée sur des interfaces entre les mailles, et le fond de fissure sur un nœud du maillage. Au voisinage du fond de fissure, la mécanique de la rupture prédit que le champ de contrainte tend vers l'infini. Cette description est peut-être discutable physiquement, mais mathématiquement cela implique que le déplacement devient singulier près du fond de fissure.

Le taux de convergence d'une méthode numérique dépend principalement du degré des fonctions de forme utilisées et de la régularité de la solution exacte. Signalons que la présence de cette singularité empêche généralement que le taux de convergence optimal de l'élément fini soit atteint. Par exemple, en élasticité bidimensionnelle, avec des éléments finis, une solution suffisamment régulière permet d'obtenir une erreur en norme de l'énergie homogène à $O(h)$ (ou h désigne le pas de maillage). La présence d'une fissure fait descendre ce taux à $O(\sqrt{h})$. [47].

Afin de représenter cette singularité le plus précisément possible, il faut raffiner le maillage autour du fond de fissure, ou utiliser un élément spécifique. Pour la deuxième alternative, l'élément de Barsoum est considéré comme une bonne méthode [48]. Il s'agit de construire une "boite à fissure", constituée d'un carré contenant 8 éléments triangulaires ayant chacun une pointe sur le fond de fissure sur ces triangle.

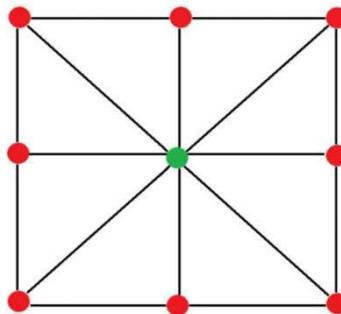


Figure. II.4: Boite à fissure : les 8 éléments ont un sommet sur le fond de fissure.

Dans un deuxième temps, le déplacement du domaine est calculé, et le taux de restitution d'énergie est déduit, en général au moyen d'un post-traitement. Si celui-ci dépasse l'énergie de cohésion, et que la fissure doit être propagée, alors cette opération est simulée de manière itérative.

Chapitre II: La méthode des éléments finis étendus(X-FEM)

Une loi de propagation indique de quelle longueur on prolonge la fissure (il peut aussi être question d'un changement de direction). Il faut ensuite recalculer le taux de restitution d'énergie. Ce qui nécessite de remailler le domaine, et de mettre à jour le raffinement près du fond de fissure ou les éléments spécifiques de fond de fissure. Cette opération de remaillage est coûteuse, et pas toujours facile à maîtriser. Ensuite, il faut recalculer le déplacement, puis le taux de restitution d'énergie. Tant qu'il est supérieur à l'énergie de cohésion on répète cette procédure.

II.5.9. Formulation de la méthode des éléments finis à la présence d'une fissure (cas de dédoublements)

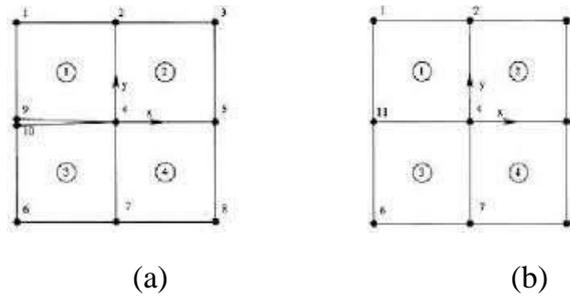


Figure. II.5: Représentation des maillages avec et sans fissure. (a) Élément fini fissuré.
(b) Élément fini sain.

L'approximation élément fini associée au maillage est :

$$U = \sum_{i=1}^{10} N_i U_i \quad (\text{II.5})$$

Où les U_i sont les déplacements aux nœuds; i et les N_i sont les fonctions de forme associées aux mêmes nœuds. On peut définir deux variables a et b par :

$$a = \frac{u_9 + u_{10}}{2} \quad (\text{II.6})$$

$$b = \frac{u_9 - u_{10}}{2} \quad (\text{II.7})$$

Qui représentent en fait la valeur moyenne et l'écart par rapport à cette valeur moyenne des déplacements u_9 de part et d'autre de la discontinuité. En faisant de même pour deux autres variables c et d relatives aux déplacements verticaux, nous pouvons exprimer u_9, u_{10} en fonction de a, b, c et d tel que :

$$u_9 = a + b \quad (\text{II.8})$$

$$u_{10} = a - b \quad (\text{II.9})$$

$$v_9 = c + d \quad (\text{II.10})$$

$$v_{10} = c - d \quad (\text{II.11})$$

Ensuite en remplaçant u_9, u_{10} et v_9, v_{10} en termes de a, b, c, d dans l'approximation

Chapitre II: La méthode des éléments finis étendus(X-FEM)

éléments finis, on obtient :

$$u = \sum_{i=1}^8 u_i N_i + N_9(a + b) + N_{10}(a - b) \quad (\text{II.12})$$

$$v = \sum_{i=1}^8 v_i N_i + N_9(c + d) + N_{10}(c - d) \quad (\text{II.13})$$

Si on introduit une fonction de Heaviside telle que :

$$H(x, y) = \begin{cases} +1 & \text{pour } y > 0 \\ -1 & \text{pour } y < 0 \end{cases} \quad (\text{II.14})$$

On peut alors écrire :

$$u = \sum_{i=1}^8 u_i N_i + N_9(a + Hb) + N_{10}(a - Hb) \quad (\text{II.15})$$

$$v = \sum_{i=1}^8 v_i N_i + N_9(c + Hd) + N_{10}(c - Hd) \quad (\text{II.16})$$

Puisque la fonction de Heaviside sera positive pour les fonctions de forme situées dans les quadrants des y positifs, ce qui est le cas de la fonction de forme N_9 . Ensuite, en regroupant les termes a , c , Hb et Hd on a :

$$u = \sum_{i=1}^8 u_i N_i + a(N_9 + N_{10}) + Hb(N_9 + N_{10}) \quad (\text{II.17})$$

$$v = \sum_{i=1}^8 v_i N_i + c(N_9 + N_{10}) + Hd(N_9 + N_{10}) \quad (\text{II.18})$$

Si l'on regarde maintenant de plus près l'allure des fonctions de forme aux nœuds 9 et 10, ainsi qu'aux nœuds 11 dans le cas du modèle sans fissure, on remarque une chose intéressante : la fonction de forme N_{11} peut être remplacée par la somme des fonctions de forme N_9 et N_{10} du modèle "sain". On a alors comme expression pour les déplacements :

$$u = \sum_{i=1}^8 u_i N_i + \mu_{11} N_{11} + Hb N_{11} \quad (\text{II.19})$$

$$v = \sum_{i=1}^8 v_i N_i + \nu_{11} N_{11} + Hd N_{11} \quad (\text{II.20})$$

Ou encore sous forme compacte :

$$u = \sum_{i \in I} u_i N_i(x) + \sum_{i \in L} H(x) a_i N_i(x) \quad (\text{II.21})$$

Où : I est l'ensemble des nœuds du domaine, et L l'ensemble des nœuds à enrichir le long de la discontinuité. Cette forme est très proche de celle que l'on aurait prise pour étudier le modèle "sain". La seule différence est l'ajout d'un degré de liberté en plus par dimension. C'est d'ailleurs ce degré de liberté qui par la suite permettra de prendre en compte la discontinuité dans le champ de déplacement.

II.5.10. La défaillance de la méthode des éléments finis dans le calcul des matériaux fissurés

D'autre part, pour le calcul numérique [49] de propagation de fissures, la méthode des éléments finis standard souffre de plusieurs défauts :

Chapitre II: La méthode des éléments finis étendus(X-FEM)

Le problème de mise en œuvre, le calcul par éléments finis d'un domaine fissuré nécessite un maillage conforme : la fissure doit être localisée sur les interfaces des éléments, et le fond de fissure doit coïncider avec un nœud du maillage. De plus, au niveau pratique, il faut raffiner près du fond de fissure afin de représenter correctement la singularité (à cause du taux de convergence en \sqrt{h}).

La simulation d'une propagation de fissure étant itérative, après une modification de la fissure il est nécessaire de remailler le domaine, ce qui est une opération coûteuse en temps de calcul et peut poser des problèmes de précision numérique. -problème de précision : en raison de la singularité en fond de fissure, le taux de convergence n'est pas optimal.

Contraintes au

Niveau du maillage : celui-ci doit être conforme à la fissure, qui doit ainsi coïncider avec les interfaces entre les maillages. Le fond de fissure doit être sur le nœud du maillage.

Au niveau pratique, ces inconvénients conduisent les utilisateurs de la MEF à devoir définir des maillages très raffinés près du fond de fissure, afin de représenter la singularité le plus fidèlement possible. En cas de prolongement de la fissure, il faut alors mettre à jour le maillage, ce qui est une procédure lourde. La méthode des éléments finis n'est donc pas bien adaptée à la modélisation de la propagation de fissure, puisque sa mise en œuvre nécessite des opérations de remaillage et de raffinement de maillage assez lourds, qui peuvent être difficiles à maîtriser (le maillage automatique de domaines bidimensionnel complexes n'est pas évident).

II.6. La méthode des éléments finis étendue (X-FEM)

II.6.1. Revue de la littérature

Belyschko et Black [50] ont introduit une nouvelle méthode pour modéliser les fissures et leur propagation par des éléments finis avec un minimum de remaillage. Par cette méthode une fissure arbitraire alignée avec le maillage peut être représentée par l'intermédiaire des fonctions d'enrichissement. L'idée essentielle de cette méthode est d'ajouter des fonctions d'enrichissement de pointe (crack-tip) dans l'approximation, qui contient un champ de déplacement discontinu. La même technique a été développée par Fleming et al [51]. Pour introduire l'enrichissement dans la méthode «Galerkin élément-free » [52]. La méthode exploite la partition de l'unité des éléments finis qui a été développée par Malenk et Babuska [53], à savoir que la somme des fonctions doit être l'unité.[54]

La méthode a ensuite été améliorée par Moës et al [55]. Et Dolbow [56] et appelée la méthode des éléments finis étendus (X-FEM : eXtended Finite Element Method). La nouvelle méthodologie a

Chapitre II: La méthode des éléments finis étendus(X-FEM)

permis à la fissure entière d'être représentée de manière indépendante du maillage et construit le rapprochement enrichi de l'interaction de la géométrie de la fissure avec le maillage. Donc L'idée principale de la méthode des éléments finis étendus consiste à enrichir la base de la méthode classique des éléments finis par : des fonctions singulières sur la pointe de fissure afin de représenter l'aspect asymptotique du champ des contraintes en bout de fissure. Cela permet une représentation fidèle des phénomènes physiques ayant lieu en fond de fissure, et des fonctions discontinues localisées le long de la fissure pour prendre en compte la discontinuité du champ de déplacement autour de la fissure (Elle prend en compte la géométrie de la fissure).

Une méthode des fonctions de niveau (Level-set) progressivement évoluée a été utilisée pour localiser l'interface de la fissure, y compris la localisation des fronts des fissures. Stolarska et al [57] introduit le couplage entre la méthode level-set et la XFEM pour modéliser la propagation des fissures, la même idée de Belytschko et al [58]. En outre, Sukumar et al [59]. Décrit la modélisation des trous et des inclusions par la méthode des éléments finis étendus. Moes et al [60]. Et Gravoul et al [61]. Ont discuté le modèle mécanique et la mise à jour de la méthode level-set pour la propagation des fissures en 3D, qui est basé sur l'équation d'Hamilton-Jacobi (l'idée d'Osher et Sethian [62]).

En ce qui concerne des chargements de fatigue Sukumar et al [63]. Ont développé une technique numérique pour la simulation de la propagation des fissures par fatigue en trois dimensions qui couple la méthode des éléments finis étendus avec la méthode de marche rapide (FMM). Chopp et Sukumaront [64] étendu la méthode à de multiples fissures coplanaires, ou toute la géométrie de la fissure a été représentée par une seule fonction de distance signée (Level-set) et la fusion des fissures distinctes pourraient être traitée par la FMM, sans nécessité d'une détection de collision ou des procédures de reconstruction de maillage.

Le problème des fissures cohésives a été étudié par Moes et Belyschko et al [65], Zi et Belytschko [66], et la simulation de la propagation des multi-fissures était l'objectif de plusieurs autres étendues. Budyn et al [67]. Ont présenté une combinaison entre la XFEM et LSM pour modéliser des milieux de comportement linéaire élastique homogènes ou hétérogènes. Zi et al [68] ont discuté la jonction entre deux fissures et présenté un modèle XFEM numérique pour l'analyse de la propagation et la coalescence des fissures dans les Matériaux quasi-fragiles contenant des multi-fissures, Béchet et al [69]. Ont proposé un enrichissement géométrique au lieu de l'enrichissement topologique habituel dans lequel un domaine donné serait enrichi, même si les éléments ne touchent pas le front de la fissure.

Chapitre II: La méthode des éléments finis étendus(X-FEM)

La précision, la convergence et la stabilité ont été également la cible de Laborde et al [70] et Chahine et al [71]. , qui ont étudié la convergence de la XFEM pour une variété des domaines fissurés. Peters et Hack [72] ont discuté les façons de liberté. Ventura [73] a montré comment la standard quadrature de Gauss peut être précisément utilisée dans les éléments contenant des discontinuités.

II.6.2. formulation standard de la méthode des éléments finis étendus

La méthode des éléments finis étendue, désignée par le sigle X-FEM développée par Moës et al. [74], permet de s'affranchir des contraintes liées à la méthode des éléments finis concernant la modélisation des fissures. En effet, dans cette méthode, la fissure est représentée indépendamment du maillage, par une représentation explicite.

Le domaine est donc maillé sans tenir compte de la fissure, qui est indépendante du maillage. On définit d'abord une méthode d'éléments finis classique sur le maillage. Sur les éléments touchés par la fissure, la base élément fini reçoit des libertés spécifiques pour représenter les effets de la fissure :

- ✚ Le long de la fissure, pour représenter la séparation du matériau, on multiplie les fonctions de forme classiques par une fonction de Heaviside.
- ✚ Sur l'élément contenant le fond de fissure, les fonctions de forme classique sont multipliées par les singularités du modèle.

Signalons qu'un élément indispensable de la méthode X-FEM est une connaissance précise et à priori des singularités du modèle résolu.

L'introduction de la singularité exacte permet d'éviter de raffiner près du fond de fissure. De plus, en cas de propagation, il n'est pas nécessaire de remailler le domaine, car le maillage n'est pas modifié : seuls les degrés de liberté spécifiques qui représentent la fissure et ses effets doivent être mis à jour.

Basée sur le concept de partition de l'unité au paragraphe précédent, la méthode des éléments finis étendus est une idée originale de Moës et Black Blytschko T [31]. Les champs asymptotiques solutions du problème d'une fissure dans un milieu élastique sont connue (II.21), et être exprimés comme une combinaison linéaire de base \mathbf{F}_j donnée par l'équation (II.22).

$$\begin{cases} U_1(x) = \frac{1}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left[K_I \cos \frac{\theta}{2} (K - \cos \theta) + K_{II} \sin \frac{\theta}{2} (K - 2 + \cos \theta) \right] \\ U_2(x) = \frac{1}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left[K_I \sin \frac{\theta}{2} (K - \cos \theta) + K_{II} \cos \frac{\theta}{2} (K - 2 + \cos \theta) \right] \\ U_3(x) = \frac{1}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} K_{III} \sin \frac{\theta}{2} \end{cases} \quad (\text{II.22})$$

La constante de Kosove est donnée par : $K = \begin{cases} 3 - 4\nu & \text{en déformation plan} \\ \frac{3-\nu}{1+\nu} & \text{en contrainte plan} \end{cases}$

$$U_i(x) = \sum_j F_j(x)u_{ij} \text{ ou } F_j(x) = \sqrt{r} \begin{cases} \sin(\frac{\theta}{2}) \\ \sin(\frac{\theta}{2})\sin(\theta) \\ \cos(\frac{\theta}{2}) \\ \cos(\frac{\theta}{2})\sin(\theta) \end{cases} \quad (\text{II.23})$$

Grace à la méthode de partition de l'unité, ces enrichissements sont ajoutés au champ de déplacement. Ensuite, Moes et al, éliminent complètement les opérations de remaillage en ajoutant une fonction discontinue dans la base d'enrichissement. Ainsi, le remaillage ne représente plus une contrainte lors de la modélisation par éléments finis de propagation de fissure.

$$H(x) = \begin{cases} +1 & \text{si } \phi > 0 \\ -2 & \text{si } \phi < 0 \end{cases} \quad (\text{II.24})$$

Ou ϕ représente la seconde coordonnée du repère local attaché à la pointe de fissure. On utilisant un couple de fonctions de niveau (ϕ, Ψ) qui définissent implicitement la position du plan et du front de fissure comme cela est illustré par la Figure. III.6. Gravouil et al généralisent l'utilisation des fonctions de niveau au cas tridimensionnel et donnent un schéma numérique pour actualiser les fonctions de niveau basé sur la résolution d'équations de type Hamilton-Jacobi (cf. « LEVEL Set méthode » de Sethian).

L'enrichissement du champ de déplacement est réalisé de manière locale selon la position de l'élément par rapport au plan et au front de fissure, c'est-à-dire selon les valeurs des fonctions de niveau.

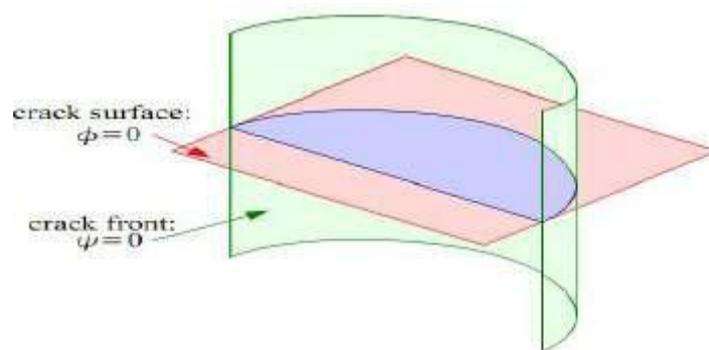


Figure II.6 : Définition de la géométrie de la fissure depuis le couple de fonction de niveau.

Chapitre II: La méthode des éléments finis étendus(X-FEM)

La stratégie d'enrichissement peut être résumée par l'équation (II.25) et la Figure II.7.

$$U(x) \approx \sum_i N_i(x) \cdot \left(u_i + H(x_i) \cdot a_i + \left(\sum_{K=1, \dots, 4} F_K(x_i) \cdot b_{iK} \right) \right) \quad (\text{II.25})$$

Soit : $U(x) \approx \sum_i N_i(x) \cdot q_i$ ou $N_i = \{N_i, N_i H, N_i F_K\}$

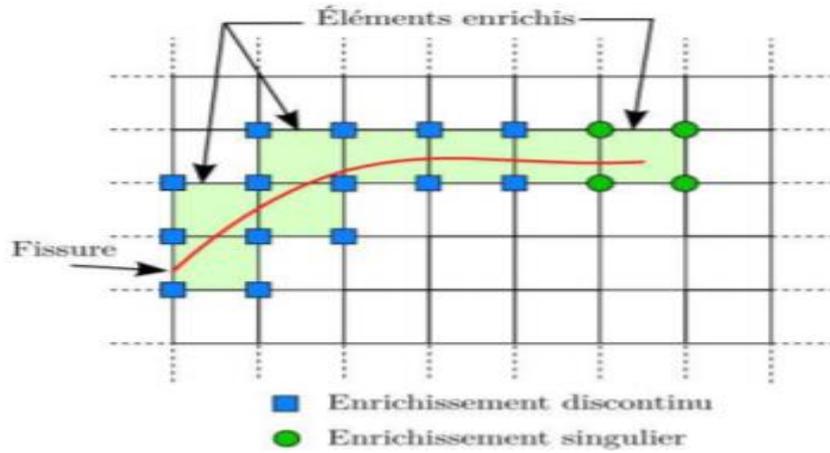


Figure.II.7: Stratégie d'enrichissement pour une fissure quelconque placée sur un maillage.

On remarque sur la Figure. II.7 que les nœuds de l'élément contenant la pointe de fissure ne sont pas enrichis par la fonction discontinue H. Cela n'empêche pas l'ouverture de cet élément puisque la fonction F_j présente une discontinuité entre $-\pi$ et π .

On propose d'utiliser la méthode X-FEM comme technique d'enrichissement locale pour décrire la fissure à une échelle fine. La méthode permet de décrire correctement la solution singulière en pointe de fissure. L'introduction d'une fonction d'enrichissement discontinue autorise au maillage de ne plus être conforme à la géométrie de la fissure.

II.6.3. La modélisation d'une fissure selon la X-FEM (Approximation de déplacement)

Pour représenter une fissure, deux types de fonction d'enrichissement sont utilisés pour modéliser d'une part la discontinuité du déplacement le long de la fissure et d'autre part, la solution en pointe de fissure. Le champ de déplacement U est alors cherché sous la forme :

$$U(x) = \underbrace{\sum_{i \in N} N_i(x) u_i}_{\substack{\text{Approximation} \\ \text{classique élément} \\ \text{finis}}} + \underbrace{\sum_{i \in N_d} N_i(x) H(x) a_i}_{\substack{\text{Enrichissements} \\ \text{discontinus}}} + \underbrace{\sum_{i \in N_p} N_i(x) \left(\sum_{i=1}^4 F_i(x) b \right)}_{\substack{\text{Enrichissements} \\ \text{singulier}}} \quad (\text{II.26})$$

Chapitre II: La méthode des éléments finis étendus(X-FEM)

Où :

- N : est l'ensemble des nœuds du maillage ;
- u_i : est le degré de liberté classique au nœud i ;
- $N_i(x)$: sont les fonctions de forme éléments finis classique associée au nœud i ;
- $N_d \in N$: est l'ensemble des nœuds enrichis par la discontinuité et les coefficients a_i sont les degrés de liberté correspondants. Un nœud appartient à N_d si son support est coupé par la fissure mais ne contient aucune de ses pointes. Ces nœuds sont entourés d'un carré sur la figure II.8.
- $N_p \in N$: est l'ensemble des nœuds à enrichir pour modéliser le fond de fissure et les coefficients b_i sont les degrés de liberté correspondants. Un nœud appartient à N_p si son support contient la pointe de fissure. Ces nœuds sont entourés d'un triangle sur la figure III.8. Les fonctions F_j permettent de représenter les solutions asymptotiques en pointe de fissure. Elles valent en élasticité.

$$\{F_j(x)\} = \left\{ \sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2}, \sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2}, \sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2} \cos \theta, \sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2} \sin \theta \right\} \quad (\text{II.27})$$

Où (r, θ) sont les coordonnées polaires dans les axes locaux en fond d'une fissure. On remarquera que, parmi ces fonctions F_j , seule la fonction $\sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2}$ est discontinue.

En accord avec Moes et al. (1999), on a :

$$H(x) = \begin{cases} +1 & \text{si } x \text{ est dessus de la fissure} \\ -1 & \text{si } x \text{ est dessous de la fissure} \end{cases}$$

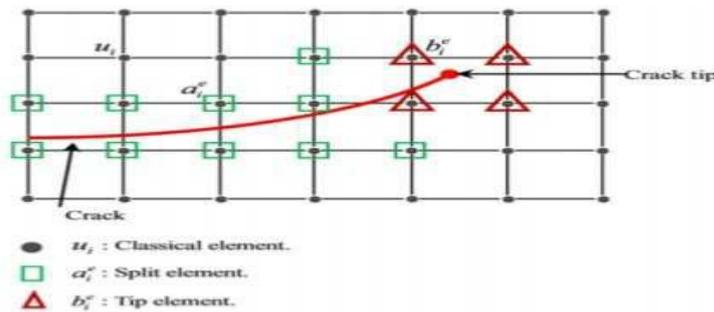


Figure. II.8: Fissure placée sur un maillage uniforme.

Les nœuds entourés d'un carré enrichis par la discontinuité et les nœuds entourés d'un triangle sont enrichis par les bases de fonctions asymptotiques en pointe de fissure. On remarquera que cet enrichissement opéré suivant la méthode de la partition de l'unité est très local et ne

Chapitre II: La méthode des éléments finis étendus(X-FEM)

concerne qu'un petit nombre de nœuds et un petit nombre de patches. Aussi si l'on souhaite que l'enrichissement soit efficace, la taille de cette zone enrichie doit être pertinente.

II.6.4. Les difficultés techniques de mise en œuvre

Les méthodes d'enrichissement basées sur la PUM donnent lieu à plusieurs difficultés en ce qui concerne leur implémentation. La grande flexibilité offerte par la X-FEM (le maillage n'a pas besoin de respecter la position de la fissure a un prix qui se paie dans sa mise en œuvre.

II.6.5. Description de la fissure

Dans une approche éléments finis classique, la position des fissures est décrite par un ensemble de faces d'éléments. Dans l'approche X-FEM, elle est indépendante de topologie du maillage et doit donc être fournie à part. En 2D, une fissure peut être représentée par une succession de segments de droite. Il faut noter que la seule opération où la représentation de la fissure intervient dans la X-FEM est l'évaluation des fonctions d'enrichissement $\{F_j(\mathbf{x})\}$ et $H(\mathbf{x})$. En un point d'intégration, il faut savoir si l'on se trouve d'un côté ou de l'autre de la fissure et connaître les coordonnées polaires (r, θ) de ce point dans les axes locaux en pointe de fissure. Ces évaluations peuvent se révéler ardues à implémenter et lentes si la géométrie de la fissure est complexe.

II.6.6. Intégration numérique

Sur les éléments finis coupés par une fissure, des fonctions discontinues doivent être intégrées. Afin de permettre l'intégration de part et d'autre de la fissure, on peut proposer un découpage de ces éléments en sous-éléments (triangles en 2D et tétraèdres en 3D). La figure III.9 montre un exemple d'une telle décomposition en 2D. Sur les sous triangles, en 2D, 3 points de Gauss sont utilisés. Insistons sur le fait que ces sous-éléments créés n'apportent aucun nouveau degré de liberté. Leur seule raison d'être est l'intégration.

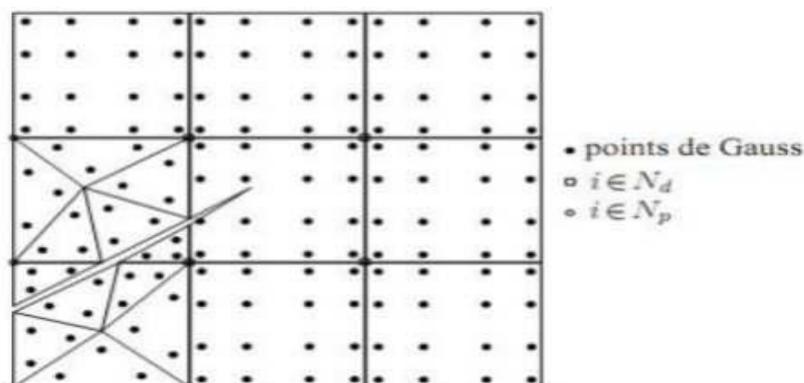


Figure.II.9: Intégration numérique prenant en compte une fissure avec la X-FEM.

Chapitre II: La méthode des éléments finis étendus(X-FEM)

Les éléments coupés par la fissure sont décomposés en sous-triangles sur lesquels une intégration à 3 points de Gauss est utilisée. Pour les éléments quadrangulaires qui ne sont pas coupés par la fissure mais dont au moins un des degrés de liberté est enrichi par les fonctions asymptotiques ($i \in N_p$) une intégration à 16 points est effectuée. Sur les éléments qui ne sont pas coupés par la fissure mais dont au moins un des degrés de liberté est enrichi par les fonctions asymptotiques F_j en fond de fissure présentant la singularité en \sqrt{r} , un nombre élevé de points de Gauss est utilisé : 12 pour les triangles, 16 pour les quadrilatères. Enfin, sur les éléments non coupés par la fissure et pour lesquels tous les degrés de liberté sont classiques, le nombre de points de Gauss utilisé est standard : pour des éléments du premier degré, on prend 1 point pour les triangles, 4 pour les quadrilatères.

II.6.7. Amélioration de la méthode XFEM

II.6.7.1. La méthode LEVEL-SET

Comme montré dans (Figure. II.10) l'idée d'Osher et Sethian [75] est de définir une fonction $\phi(x, t)$ régulière telle que, le sous espace $\phi(x,t)=0$ représente l'interface de coupure (fissure). Cette méthode s'applique aisément aux problèmes de fissuration en 2D. Par exemple pour la figure III.10 on définit le plan de coupure Φ à l'aide d'une fonction de niveau (level-set) $l_{sn}(x)$ qui représente la distance normale a la surface on a $\Phi = \{x \in \mathbb{R}^3 / l_{sn}(x)=0\}$. Mais il faut une indication de l'endroit où s'arrête la fissure dans son plan et l'idée ce cas c'est l'utilisation d'une level-set $l_{st}(x)$ qui représente la distance au front de fissure (tangentiellement à la surface) et les deux level-sets forment une base orthonormée en pointe de fissure. Le lieu de la fissure est défini ainsi : $\Phi = \{x \in \mathbb{R}^3 / l_{sn}(x) = 0, l_{st}(x) = 0\}$. Et finalement on peut définir une base polaire :

$$\begin{cases} r = \sqrt{l_{sn}(x)^2 + l_{st}(x)^2} \\ \theta = \arctan \frac{l_{sn}(x)}{l_{st}(x)} \end{cases} \quad (II.28)$$

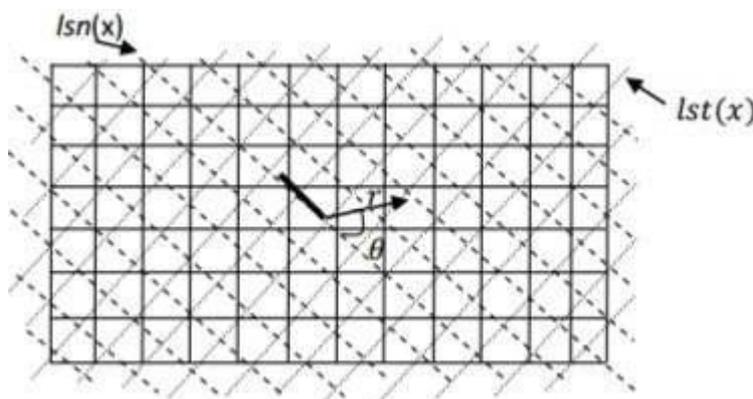


Figure.II.10: La stratégie level-set.

Chapitre II: La méthode des éléments finis étendus(X-FEM)

II.6.7.2. Le cas tridimensionnel (3D)

Le cas de trois dimensions est traité par Sukumar et al. De même manière que le cas en deux dimensions sauf que maintenant le front de la fissure n'est plus composé d'un ensemble de points, mais un ensemble de courbes, et l'approximation de déplacement d'écrite comme suit :

$$u = \sum_i N_i(x) U_i + \sum_{i \in N_d} N_i(x) H(x) a_i + \sum_{i \in N_p} N(x) \left(\sum_{f=1, \dots, 4} F_i^f(r, \theta) \cdot r_i^f \right) \quad (\text{II.29})$$

Les nœuds N sont les nœuds tels que leur support croise avec la fissure, mais pas son front. Notez que le support d'un nœud est maintenant un volume.

Les fonctions d'enrichissement de front $F_i^f(r, \theta)$ sont toujours données par l'équation (II.27) ou le couple (r, θ) est défini comme les coordonnées polaires dans le plan (x_1-x_2) , (voir Fig.II.11). Le plan contient x^* et l'axe x_2 est aligné avec le normale n à la fissure au x^* .

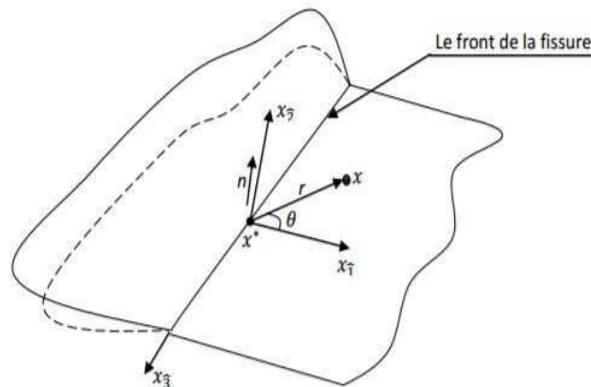


Figure. II.11: Représentation d'une fissure en 3D.

II.6.7.3. La convergence de la méthode XFEM

Le problème de la convergence est toujours discuté par les auteurs, dans la plupart des documents susmentionnés seuls les approximations par des éléments finis linéaire ont été utilisées dans les approximations de la XFEM et l'interpolation level-set. Well et al. [76] ont utilisés le concept XFEM en visco-plasticité des matériaux avec triangles de 6 nœuds. Mais seulement considérés comme des fissures qui se sont terminées sur un bord d'élément. Il est bien connu que les éléments d'ordre supérieur offrant une précision importante pour les problèmes suffisamment raffinés. Par exemples les éléments finis quadratiques sont les éléments de choix pour la plupart des problèmes élastique statique et quas-statique cela du à leur taux élevé de convergence et leur capacité à modéliser les frontalières courbées. Par ailleurs, les fonctions level-set interpolées par des fonctions de forme quadratique sont capables de décrire des fissures incurvées, et la description des level-set par des éléments finis linéaires est limitée à des fissures linéaires. Stazi

Chapitre II: La méthode des éléments finis étendus(X-FEM)

et al. [77] étudient la convergence de l'erreur en énergie pour une plaque infinie avec une fissure droite, en mode I, pour des formulations linéaires et quadratiques. Ils remarquent que l'approximation quadratique améliore l'erreur, mais pas le taux de convergence. Béchet et al [78] confirment cette observation et montrent qu'une zone d'enrichissement fixe (Fig.III.13) permet de retrouver un taux de convergence presque optimal. Parallèlement, Laborde et al. [79] approfondissent la question et testent les taux de convergence pour les formulations polynomiales d'ordre supérieur. Dans le cadre de la fissuration par zones cohésives, l'enrichissement par les fonctions singulières n'a plus lieu d'être, et Zi et al. Proposent de s'affranchir des éléments de transition. Au lieu d'utiliser des fonctions singulières, ils utilisent une fonction signe qui permet de représenter le front de fissure (similaire à un enrichissement Heaviside vis-à-vis de la level set tangente) au sein des éléments contenant le fond de fissure.

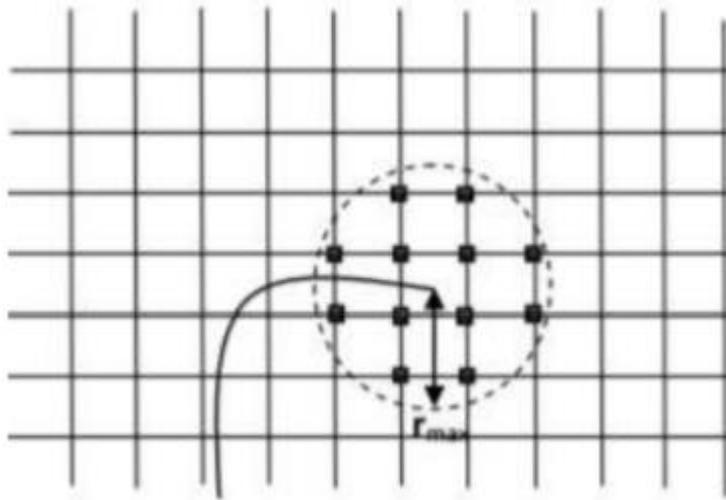


Figure.II.12: Les nœuds « carrés » sont enrichis par les fonctions singulières (enrichissement géométrique).

II.6.7.4. Les avantages de la méthode X-FEM

La force de la méthode XFEM est liée à sa capacité de prise en compte d'une discontinuité q qui, contrairement à l'exemple ci-dessus, n'est pas alignée sur le maillage. Dans ce cas, la mise en œuvre devient plus complexe puisque, par exemple, la discontinuité introduite par la fonction de Heaviside ne se place plus la frontière entre deux éléments mais bien à l'intérieur des éléments. De plus, cette approximation n'est en mesure de prendre en compte que les fissures traversant les éléments de part en part. Dès lors, afin de modéliser avec le plus de réalisme possible une discontinuité complètement située à l'intérieur du domaine à étudier, il est nécessaire d'introduire des fonctions qui prennent en compte le caractère singulier de champ de déplacement en son extrémité. En se basant sur l'allure du déplacement théorique à proximité du fond de fissure,

Chapitre II: La méthode des éléments finis étendus(X-FEM)

d'autres fonctions de forme ont été dérivées. Celles-ci s'expriment en terme de coordonnées locales et seule la première de ces quatre fonctions est vraiment nécessaire à la modélisation de la discontinuité, les autres ayant été ajoutées pour augmenter la précision. Ces fonctions de forme supplémentaire ne sont en pratique ajoutées qu'aux quelques éléments entourant le fond de fissure et s'appliquent elles aussi sur des degrés de liberté supplémentaire b_j . Celles-ci sont de la forme suivante :

$$F_i(r, \theta) = \left[\sqrt{r} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right), \sqrt{r} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right), \sqrt{r} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin \theta, \sqrt{r} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin \theta \right] \quad (\text{III.30})$$

Comme on peut le voir (Figure.III.13), la fonction est discontinue le long de la fissure (pour $\theta=0$).

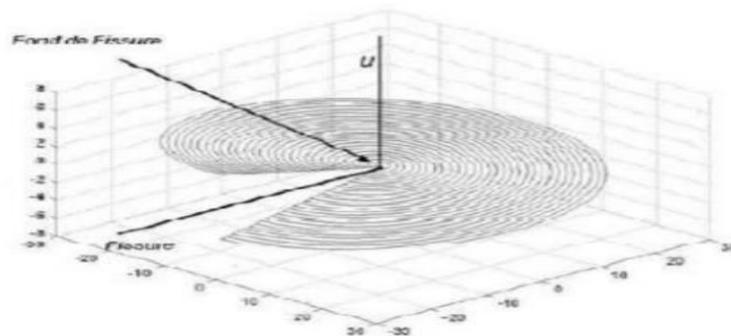


Figure.II.13- Représentation de la première fonction de fond de fissure.

II.6.7.5. La difficulté de la méthode X-FEM

La difficulté majeure dans le cas des éléments X-FEM consiste à pouvoir effectuer l'intégration numérique correctement de part et d'autre de la fissure. En effet, la matrice contenant les fonctions de forme n'est plus identique des deux côtés de cette discontinuité compte tenu de la présence d'un terme H dans les équations d'équilibre. Afin d'éviter l'introduction d'erreur voire même de dépendance dans les matrices éléments finis, chaque élément fini est divisé en sous-domaines qui nous coupent pas la discontinuité (souvent en triangles). C'est sur ceux-ci qu'est effectuée l'intégration. Il faut préciser que cette division n'est effectuée que pour l'intégration numérique, c'est-à-dire qu'elle n'introduit pas de degrés de liberté supplémentaire. Cette division peut-être illustrée par les deux figures suivantes

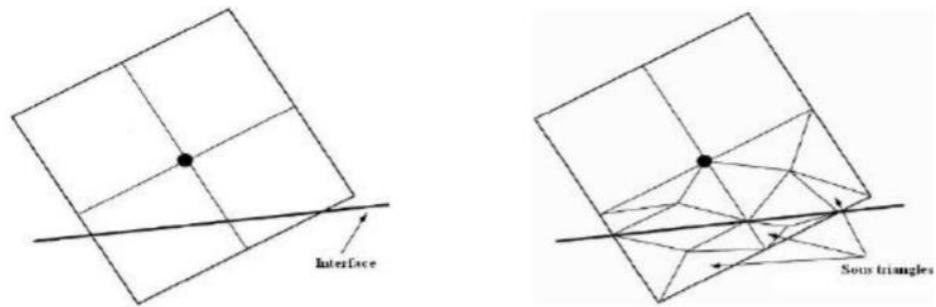


Figure.II.14 : Exemple de sous division des éléments.

En regardant la méthode d'intégration utilisée, on remarque que la méthode des éléments XFEM présente un avantage supplémentaire par rapport aux méthodes permettant d'inclure des interfaces matériau-vide.

Conclusion :

Ces quarante dernières années ont connu un développement considérable en matière de calcul de structures. Ce développement est fortement motivé par les progrès effectués dans le domaine de l'informatique appliquée. Ainsi la méthode des éléments finis est la plus communément mise en œuvre pour l'analyse des structures dans de nombreux secteurs de l'industrie. Avec la naissance de la méthode des éléments finis étendu X-FEM (année 2000) dont le principe consiste à enrichir la base de la méthode classique des éléments finis par : des fonctions singulières sur la pointe de fissure afin de représenter l'aspect asymptotique du champ des contraintes en bout de fissure cela a permis de représenter entièrement la fissure de manière indépendante du maillage et de construire le rapprochement enrichi de l'interaction de la géométrie de la fissure avec le maillage

Les deux méthodes présentées pour l'analyse de la propagation des fissures, la méthode XFEM semble être de loin la plus performante. Dans le cadre de ce travail qui est et reste une formation à la recherche. Donc nous nous sommes concentré dans ce travail sur l'utilisation de l'approche X-FEM en utilisant des codes de calcul très performant afin d'analyse sur des exemples tests les possibilités de cette approche. Ces exemples tests vont des plus simples (académiques) au plus compliqués et finir par à un test issues de cas réels de structure ayant subies de dégradations de fissuration et permettant de suivre la propagation de la fissuration.

CHAPITRE III

L'ETUDE DE CAS

III.1. Introduction

L'avenir dépend des outils numériques et de la réalité virtuelle; la simulation et l'analyse numérique se sont développées ces dernières années dans la recherche industrielle privée ou publique (constructeur automobile, aéronautique, spatial...) améliorant ainsi la productivité des industriels et la vie de tous les consommateurs.

Dans ce chapitre, nous avons simulé le comportement mécanique des structures fissurées, afin d'étudier l'influence de la plaque en aluminium sous différentes formes et tailles du trou ont été considérées. La prédiction et la localisation de la croissance des fissures sont simulées numériquement par la méthode des éléments finis étendus (X-FEM).

La technique XFEM est utilisée pour étudier le mécanisme d'endommagement lors des essais de traction de plusieurs plaques présentant différentes formes de défauts.

Le code de calcul utilisé est le code ABAQUS en raison de sa grande performance dans ce domaine et de son interface graphique simplifiant cette modélisation.

III.2. Présentation du code de calcul Abaqus/CAE

III.2.1 Code de calcul Abaqus/CAE

Abaqus/CAE est un code de calcul qui résout les problèmes de divers champs par la technique des éléments finis (M.E.F). Dans ce cadre il présente un système complet intégrant non seulement les fonctions de calculs proprement dites mais également les fonctions de construction du modèle (préprocesseur) et les fonctions de traitement des résultats (post-traitement). La figure III.1. Représente l'interface de l'ABAQUS utilisée.

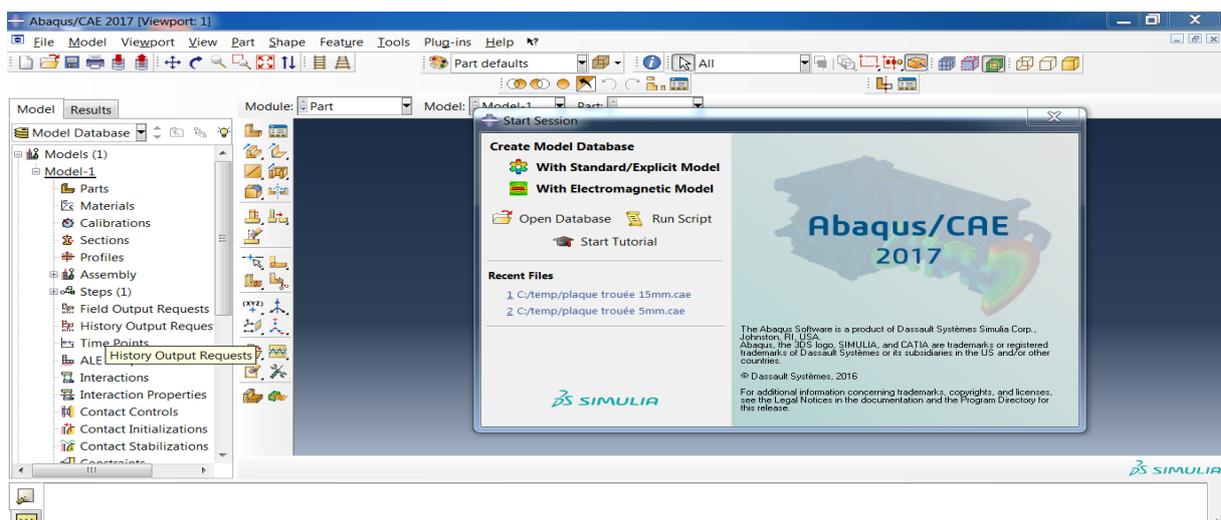


Figure. III.1 Interface ABAQUS 2017

Abaqus/CAE est un programme qui traite des problèmes d'élasticité linéaire dans les domaines statiques et dynamiques, des problèmes non linéaire, des problèmes thermiques etc...

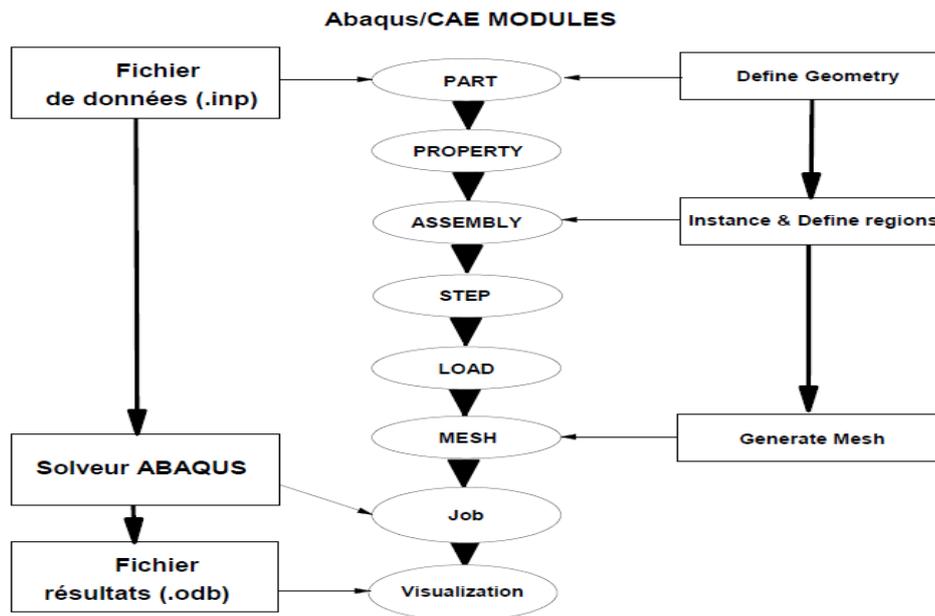


Figure. III.2 Étapes à suivre pour la programmation [76].

La résolution complète d'un calcul numérique s'effectue après un passage successif dans les modules suivants : Part, Property, Assembly, Step, Interaction, Load, Mesh, Job (pour lancer le calcul) [76]. Dans le code de calcul Abaqus le fichier de données décrit les géométries, les matériaux, les conditions aux limites avec une extension (.inp) et le fichier de résultats décrivent les contours et les courbes résultats avec l'extension (.odb).

III.2.2 Système d'unités dans le code de calcul Abaqus

Comme dans beaucoup de logiciels, il n'y a pas de système d'unités fixé. C'est à l'utilisateur de définir son propre système (tableau III.1).

Tableau. III.1 : Système d'unités pour le code de calcul Abaqus [76].

Masse	Longueur	Temps	Force	pression	Energie
M	L	T	MLT^{-2}	$ML^{-1}T^{-2}$	ML^2T^{-2}
Kg	M	S	N	Pa	J
g	Mm	ms	N	MPa	mJ
Tonne	Mm	S	N	MPa	mJ

III.3. Modélisation tridimensionnelle:

III.3.1 Description géométrique et les conditions aux limites

On s'intéresse à l'étude des contraintes dans une plaque rectangulaire trouée soumise à un effort de traction (voir Figure III.3). Un modèle géométrique tridimensionnel a été développé pour analyser la distribution des contraintes induites dans une plaque trouée. Le trou de forme cylindrique est situé dans la plaque simulée par un modèle en 3D dont la taille est: la longueur, la largeur et l'épaisseur du modèle

ils sont mentionnés dans le tableau III.2. La structure est soumise à un chargement mécanique uni axial P suivant l'axe Y .

Tableau III.2 : Les démentions de modèle étudié.

modèle	H	W	e
Démentions (mm)	200	100	2

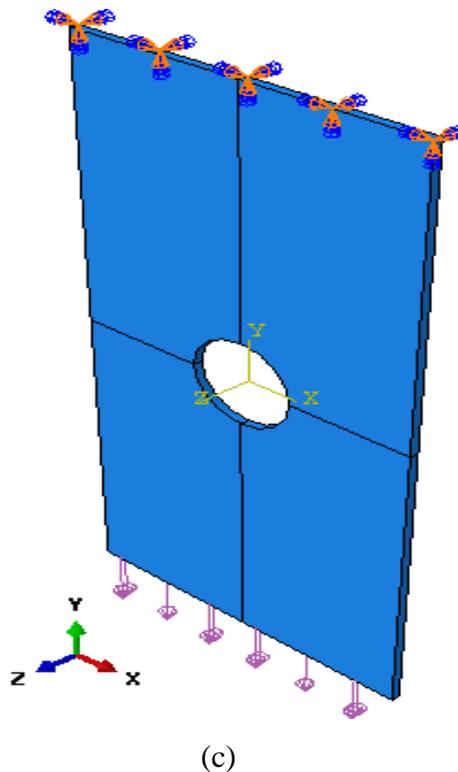
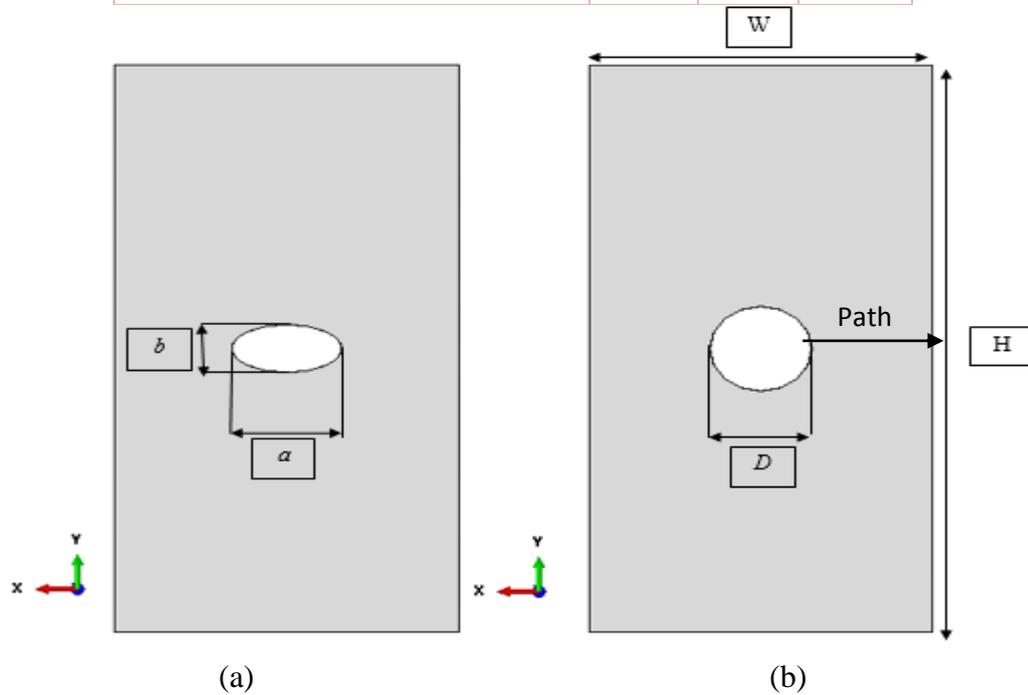


Figure III.3: Représentation schématique du modèle en 3D(a) forme elliptique, (b) forme circulaire (c) condition aux limites.

III.3.2 Paramètres d'analyse :

Toutes les formes des défauts et leurs dimensions sont représentées dans le tableau suivant :

Tableau III.3 Dimensions des différents défauts

	Forme circulaire de diamètre D (mm)	Forme elliptique a/b
Eprouvette N° 1	10	30/5
Eprouvette N° 2	20	30/10
Eprouvette N° 3	30	30/20
Eprouvette N° 4	50	30/30

III.3.3 Les propriétés mécaniques

La plaque utilisée dans cette étude est en aluminium 2024T3, un matériau fréquemment utilisé dans les structures de l'aéronautique. Les essais de traction effectués sur la plaque d'aluminium 2024-T3 ont permis d'avoir des courbes caractéristiques indiquées dans la figure III.4

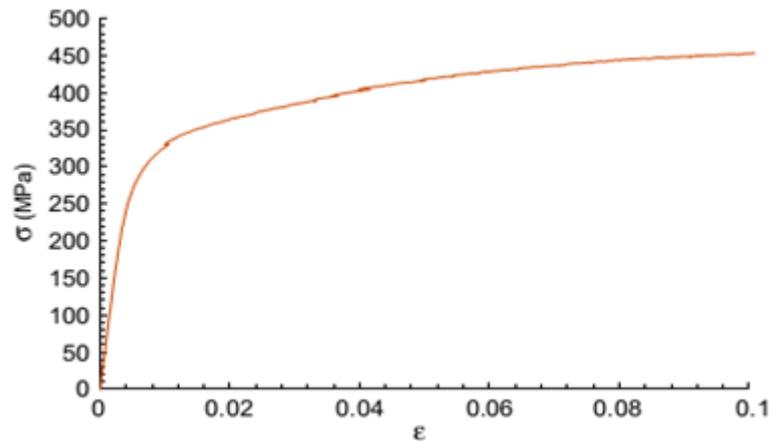


Figure III.4 : courbes déterminer les propriétés mécaniques du matériau

A partir de la courbe, on peut déterminer les propriétés mécaniques du matériau indiquée dans le tableau III.4. **Tableau. III.4** propriétés mécaniques de l'aluminium 2024-T3.

Matériaux	E (MPa)	σ_e (MPa)	σ_{max} (MPa)	ν
Aluminium 2024T3	69000	350	430	0.3

III.3.4 Maillage

Le logiciel ABAQUS dispose d'une puissante maillée automatique, qui peut analyser et générer pour une meilleure approximation des résultats. Pour le comportement étudié, nous avons utilisé des éléments hexaédriques, type C3D8 conforme aux surfaces paramétriques définies (figure III.5).

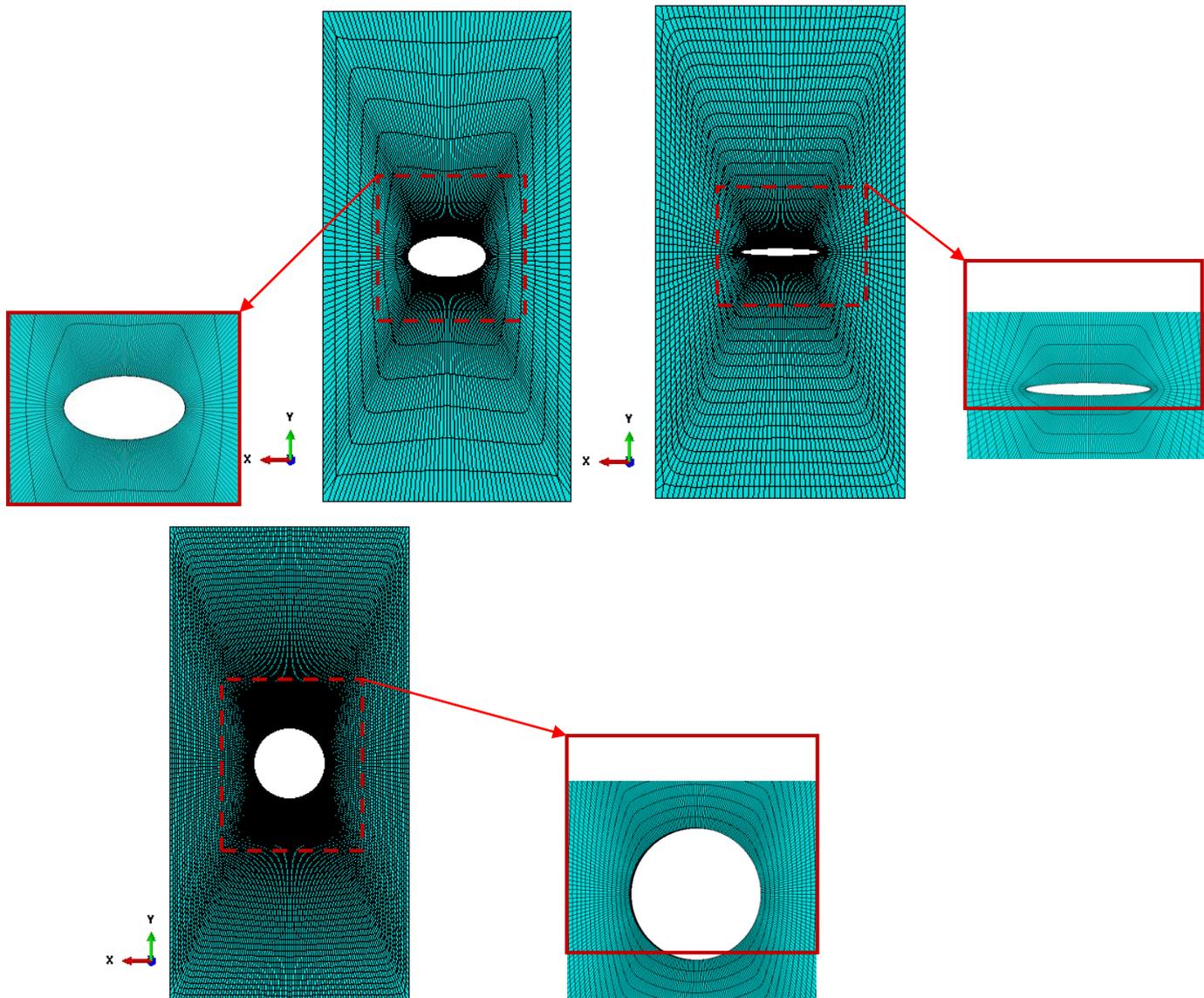


Figure. III.5 Maillage pour les différents modèles étudiés.

Le maillage de la plaque représenté sur la figure III.5. Un raffinement du maillage est indispensable à proximité du défaut, ce qui permettra d'obtenir une bonne convergence et une meilleure précision des résultats. Évaluer la distribution des déformations dans notre modèle et d'identifier la région à risque de fracture.

III.3.5 Effet de la taille de l'élément utilisé (test de convergence)

L'autre étude du maillage est par rapport aux tailles des éléments utilisés pour générer le maillage. La réalisation est effectuée en trois dimensions avec des éléments hexaédriques linéaires à 8 nœuds. Nous représentons sur la figure III.6, la contrainte d'ouverture σ_{yy} en fonction des différents nombres d'éléments générés N , $2N$, $4N$, $8N$, $16N$, $32N$ et $128N$ avec $N=6000$ éléments. (La figure III.6).

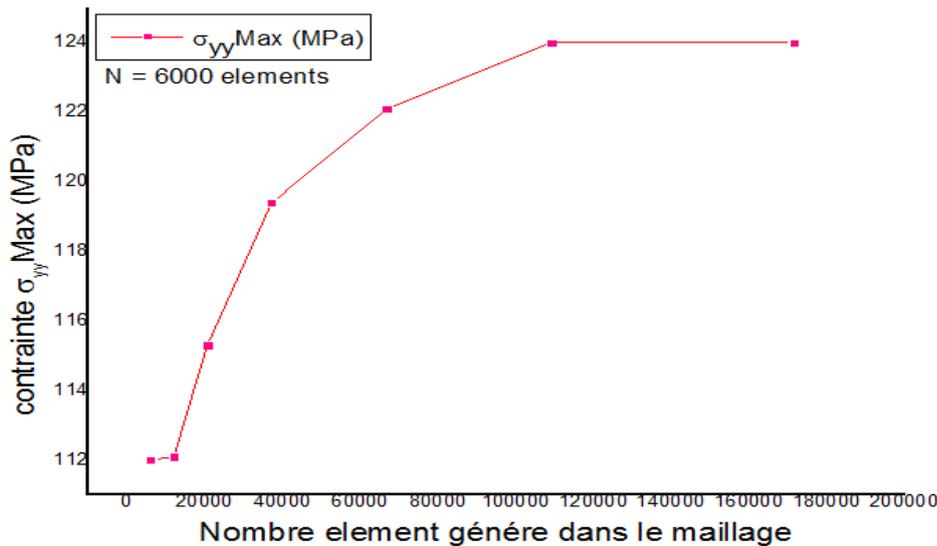


Figure. III.6 Comparaison entre les valeurs de la contrainte d'ouverture $\sigma_{yy} Max$ en fonction du nombre d'éléments générés pour le maillage.

On remarque en figure III.6, l'importance du raffinement du maillage sur la qualité des résultats numériques obtenus. Le raffinement du maillage et l'augmentation des éléments générés dans la simulation numérique convergent vers une stabilité des résultats du calcul.

III.3.6 La méthode des éléments finis étendu (XFEM)

La méthode des éléments finis étendus (XFEM) est apparue comme une puissante procédure numérique pour l'analyse des problèmes de rupture. Il a été largement reconnu que la méthode facilite la modélisation de la croissance de la fracture sous les hypothèses de la mécanique de rupture élastique linéaire (LEFM).

La rupture a été modélisée avec la XFEM qui se base sur des critères de la contrainte principale maximale pour déterminer l'emplacement de l'initiation de la fissure et sa propagation. Ce critère peut être représenté comme suit :

$$f = \left\langle \frac{\sigma_{max}}{\sigma_{max}^0} \right\rangle$$

Ici, σ_{mas}^0 représente la contrainte principale autorisée maximale. Le symbole $\langle \rangle$ représente le support de Macaulay avec l'interprétation habituelle (c'est-à-dire, $\langle \sigma_{mas} \rangle = 0$ si $\langle \sigma_{mas} \rangle < 0$ et $\langle \sigma_{mas} \rangle = \sigma_{max}$ si $\langle \sigma_{mas} \rangle \geq 0$).

La contrainte de compression n'initie pas l'endommagement, Lorsque $f \geq 0$ le critère d'amorçage est satisfait [75].

III.4. Résultats et discussions

III.4.1 Évolution des contraintes pour les différents cas étudiés

Les figures ci-dessous illustrent les résultats obtenus à partir de cette analyse. Cette dernière représente la répartition de la contrainte équivalente de Von mises et de la contrainte normale xx et yy dans une plaque troué d'un diamètre de 30 mm pour les différents chargements appliqués (20, 40 et 60MPa).

III.4.1.1 Effet du chargement sur les contraintes

➤ Pour une charge de 20MPa :

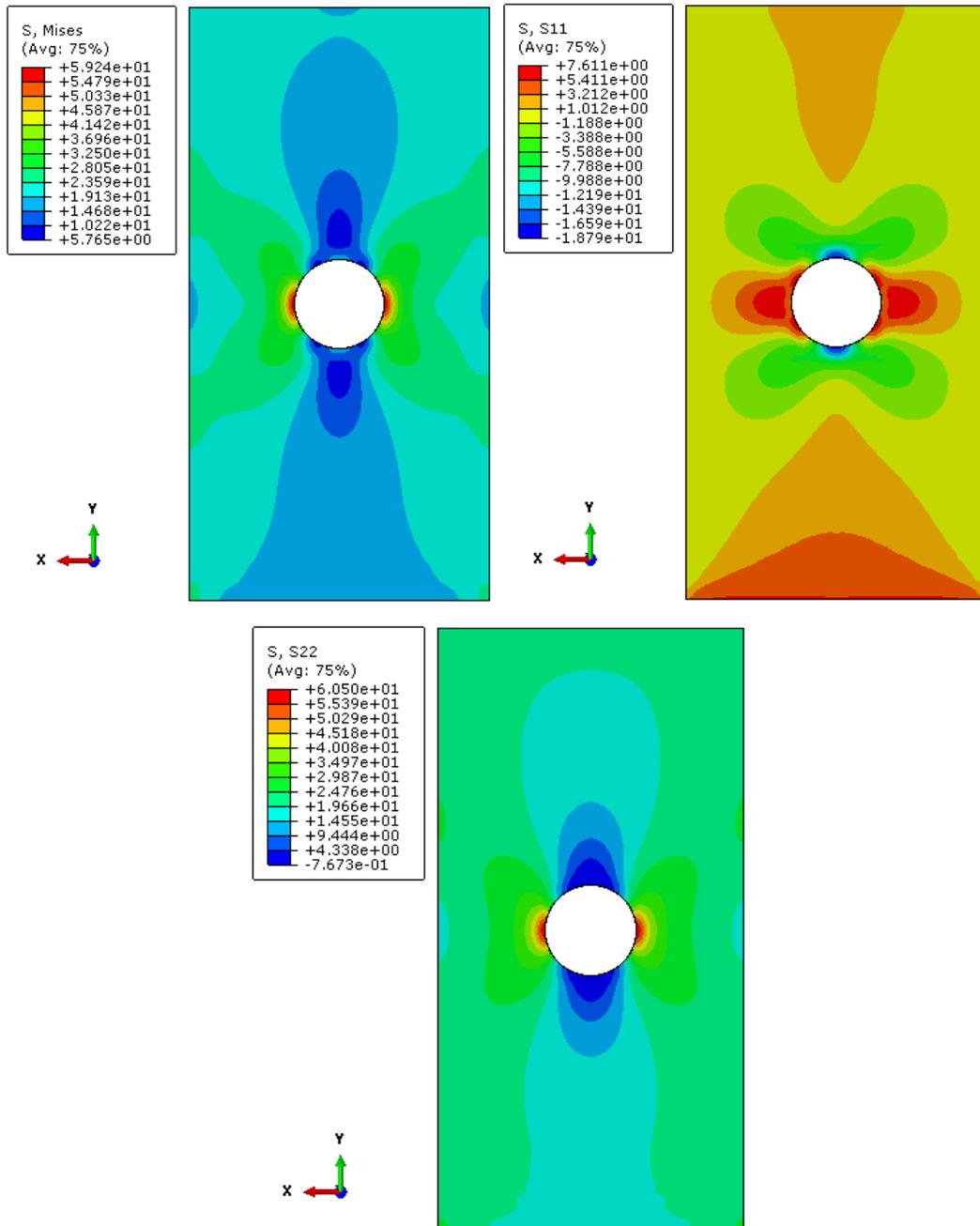


Figure III.7 : Distribution de la contrainte équivalente et normale pour un chargement mécanique : $P=20MPa$.

➤ Pour une charge de 40 MPa :

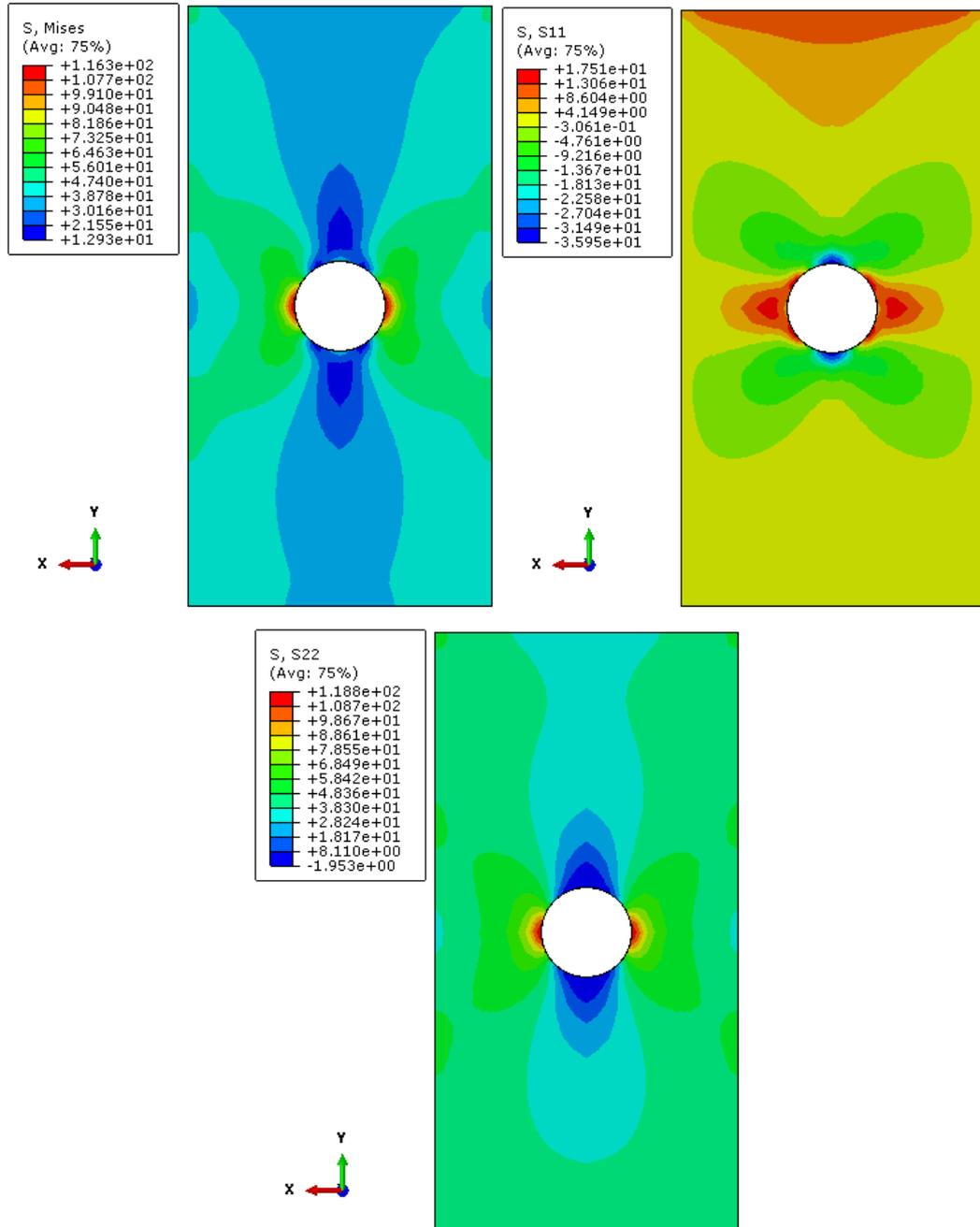


Figure III.8 : Distribution de la contrainte équivalente et normale pour un chargement mécanique : $P=40\text{MPa}$.

➤ Pour une charge de 60 MPa :

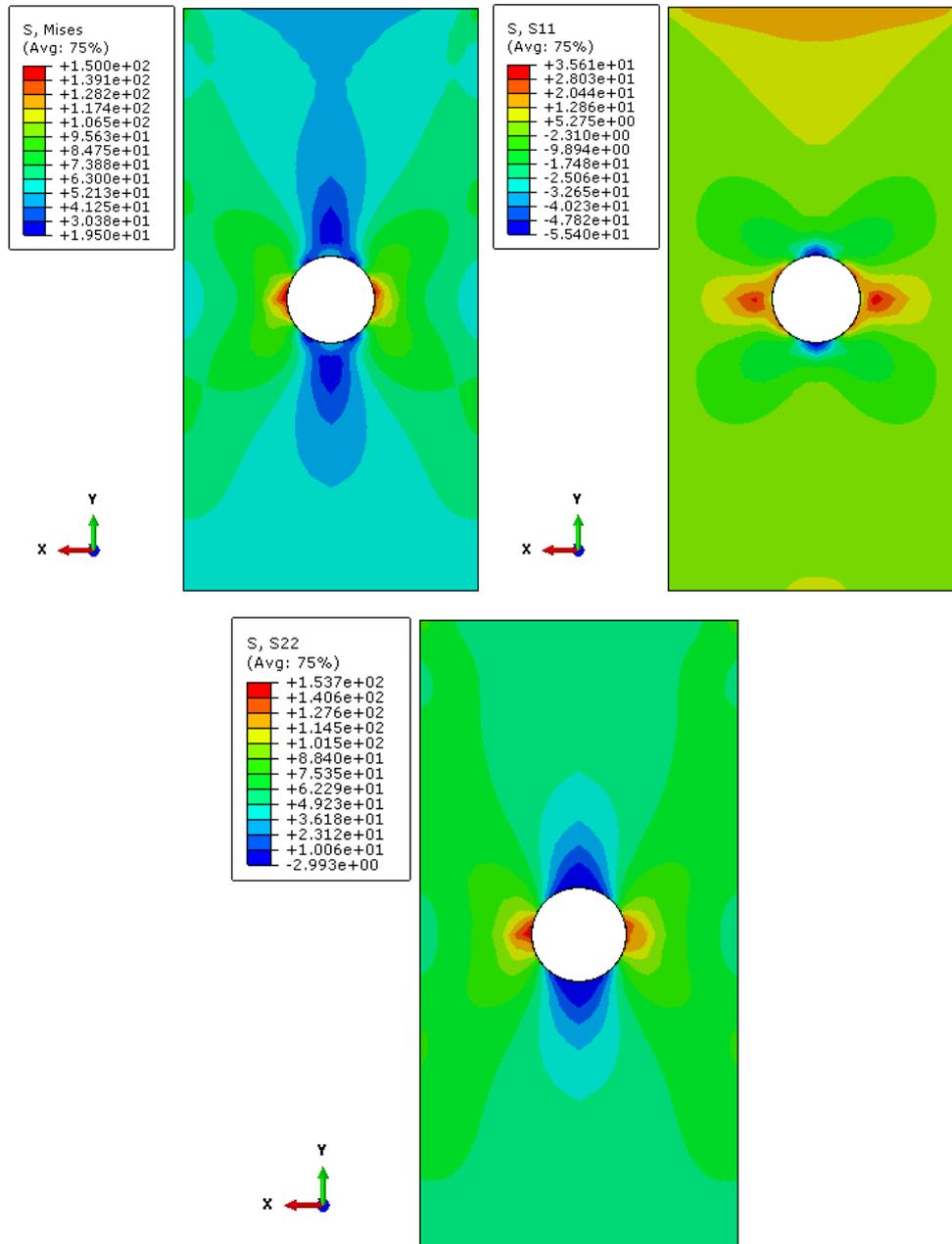


Figure III.9: Distribution de la contrainte équivalente et normale pour un chargement mécanique : $P=60MPa$.

L'analyse de la figure III.10 montre que la contrainte normale σ_{xx} (S_{11}) met la plaque en tension, et son amplitude augmente fortement près de l'interface avec le trou. Au fur et à mesure que la charge mécanique augmente, cette amplitude devient de plus en plus importante.

La distribution de la contrainte normale σ_{yy} (S_{22}) est complètement différente de la distribution de la composante σ_{xx} (voir Figure III.10). Son intensité maximale est atteinte près de l'interface avec le trou.

La répartition de ces contraintes équivalentes Von Mises σ_{VM} dans la plaque est la même que la répartition de la composante de contrainte σ_{yy} . En fait, ils sont concentrés sur la plaque à proximité de l'interface plaque trouée. Leur amplitude diminue brusquement dans la plaque et tend vers des valeurs nulles.

L'influence chargement mécanique sur l'amplitude et la distribution de la contrainte équivalente de Von Mises et la contrainte normale induite dans la plaque le long de la direction définie par le «Path» (voir figure 3b) est illustrée à la figure III.10.

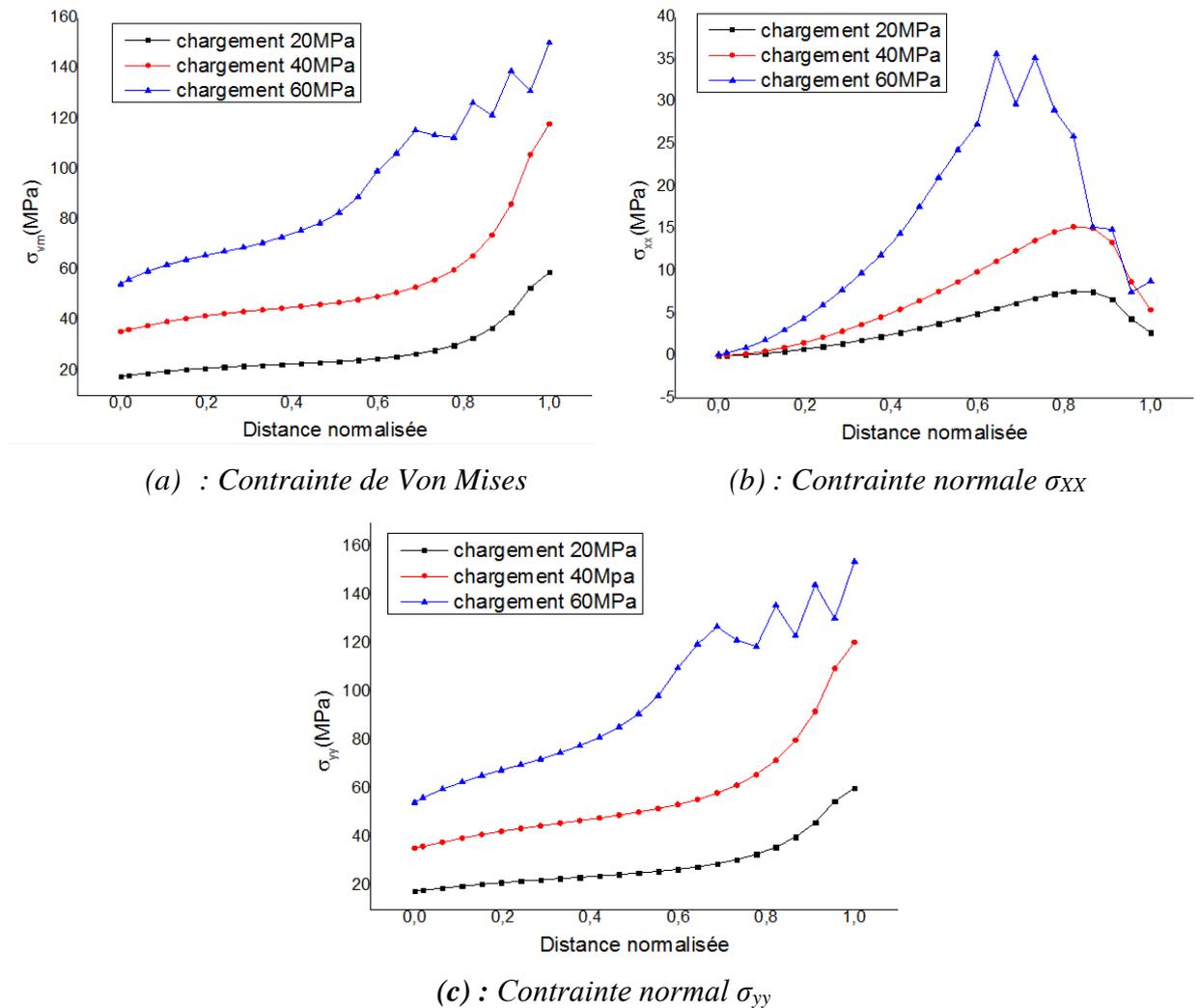


Figure III.10: Variation des contraintes équivalente de Von Mises et normales en fonction de la charge appliquée, (a) : Contrainte De Von Miss, (b) : Contrainte normal σ_{xx} , (c) : Contrainte normal σ_{yy} .

Pour mieux éclairci l'effet de la charge sur le changement de la contrainte de Von Mises avec la contrainte normale de xx et yy, nous devons tracer les trois graphes ci-dessus. Nous avons clairement remarqué que l'augmentation de la charge produira une plus grande contrainte, et le niveau de la plaque atteint son maximum près au bord du trou.

III.4.1.2 Effet du chargement sur le facteur de concentration des contraintes K_t

Dans la figure III.11, nous avons tracé la variation du facteur de concentration de contraintes K_t suivant en fonction de la taille du trou. Nous avons remarqué que le facteur de concentration de contrainte augmente rapidement lorsque le chargement augmente.

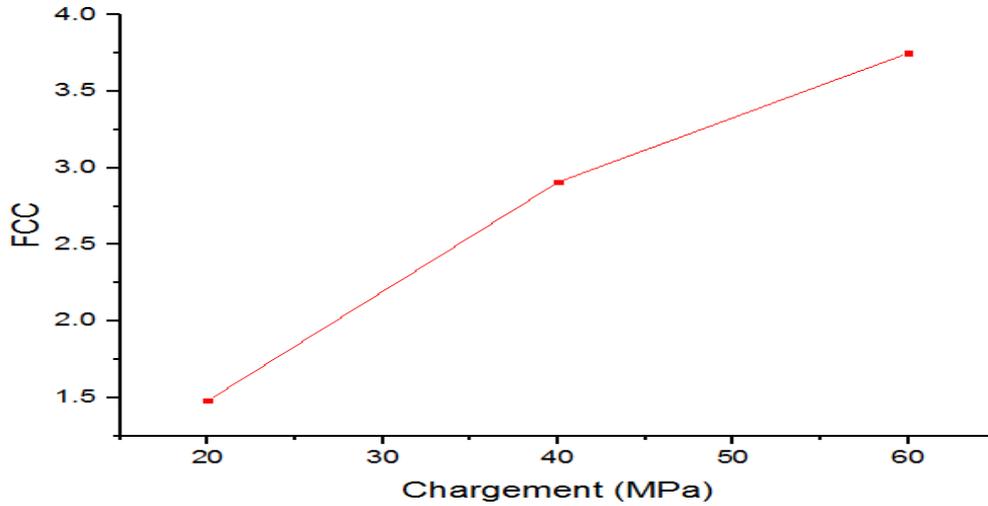
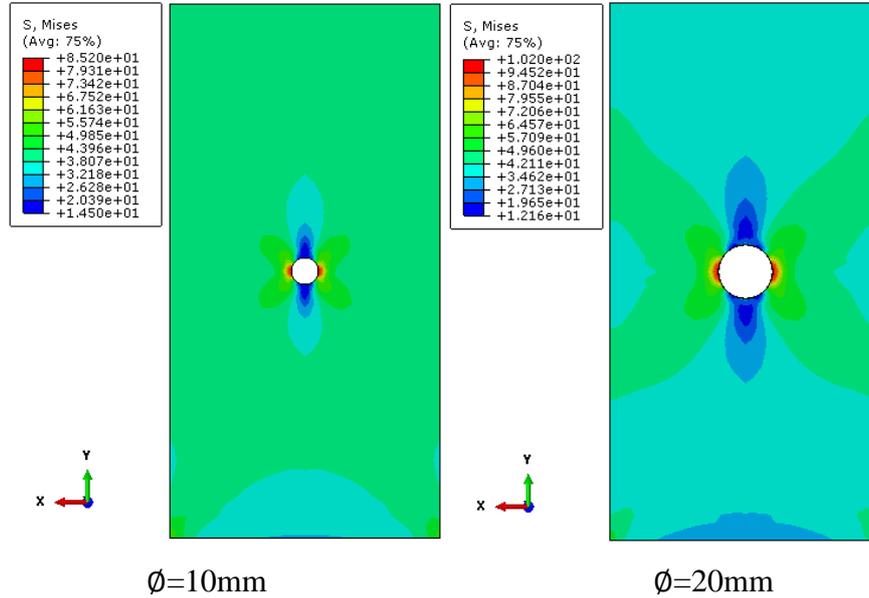


Figure III.11: Variation du FCC en fonction du chargement appliqué.

III.4.1.3 Effet de la taille du trou

La figure III.12 montre la répartition des contraintes équivalentes générées localement dans la plaque autour du trou pour différentes tailles (diamètres 10, 20, 30 et 50 mm) du trou.



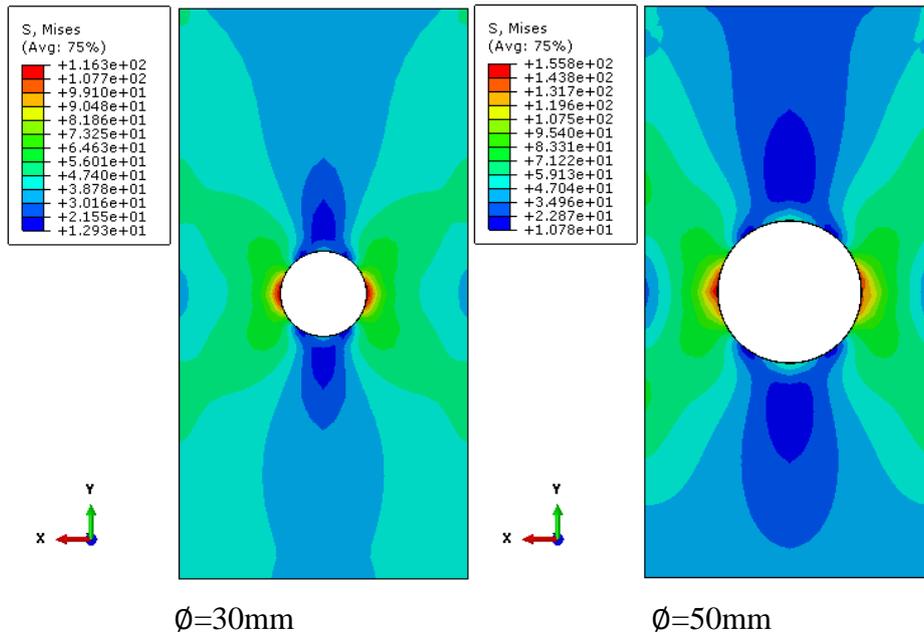


Figure III.12: Effet de la taille du trou sur le niveau et la distribution des contraintes équivalente σ_{VM} induites localement dans la plaque autour du trou.

Les figures III.12 montre la distribution de la contrainte équivalente de Von Mises sur la surface de la plaque pour les différentes tailles. On remarque que les contraintes sont concentrées au bord du trou, cette concentration diminue au fur et à mesure qu'on s'éloigne de celui-ci. La concentration de contrainte augmente avec l'accroissement du diamètre du trou. Les valeurs de la contrainte sont très élevés de l'ordre 155 MPa dans le cas diamètre 50 mm et les contraintes se diminuent jusqu'au 85 MPa avec le diamètre 10 mm.

III.4.1.4 Effet de la taille du trou sur le facteur de concentration des contraintes K_t

Dans la figure III.13, nous avons tracé la variation du facteur de concentration de contraintes K_t suivant en fonction de la taille du trou. Nous avons remarqué que le facteur de concentration de contrainte augmente rapidement lorsque la taille du trou augmente.

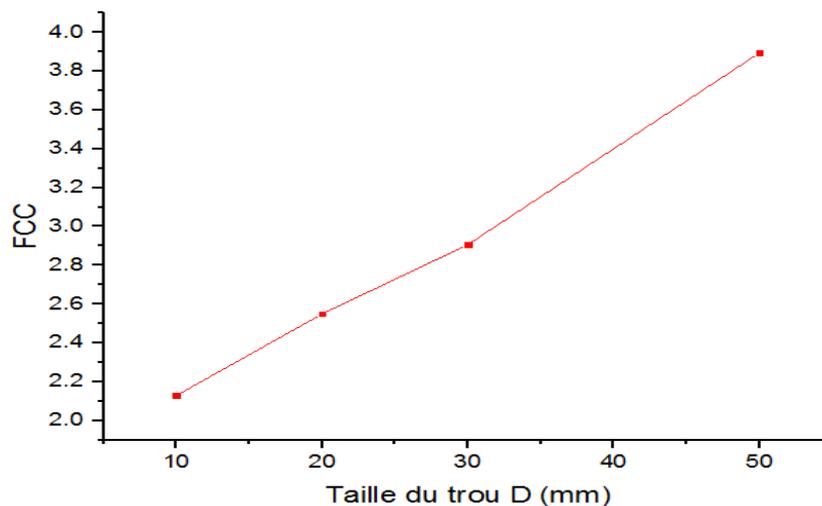


Figure III.13: Variation du FCC en fonction de la taille du trou.

Les résultats obtenus sont représentés sur la figure III.13. Le facteur de concentration de contrainte augmente lentement puis rapidement avec l'augmentation de la taille du trou. Les trous de tailles importantes conduisent à de forts facteurs d'intensité de contraintes.

Ce comportement montre clairement que la présence de trous sur la plaque est un lieu de concentration des contraintes, ce qui peut conduire à la génération et à la propagation de fissures.

III.4.1.5 Effet de la forme du trou

L'étude précédente supposait que le trou avait une forme cylindrique. Dans cette partie du travail, l'effet des formes géométriques est caractérisé par le rapport de la taille a/b

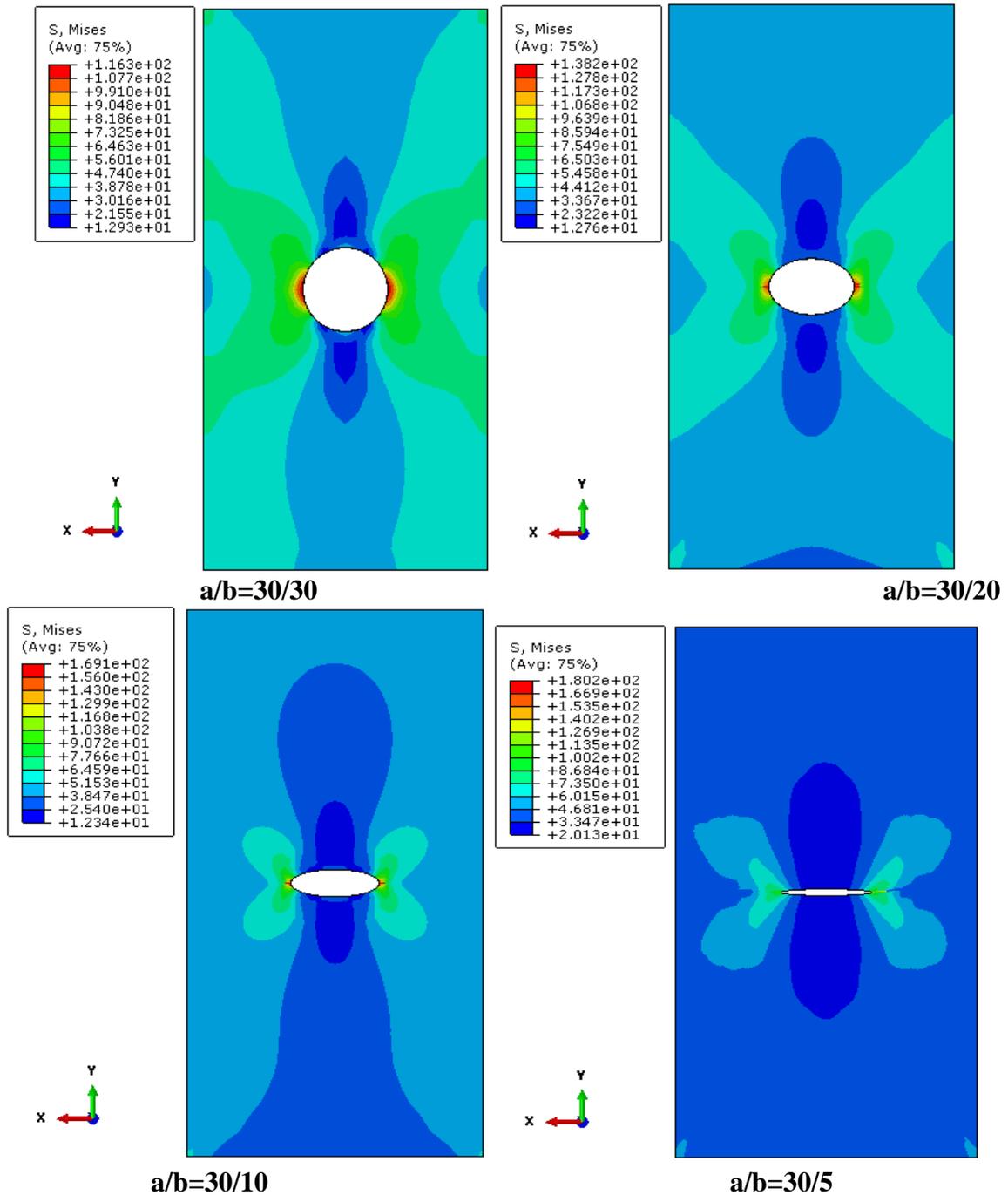
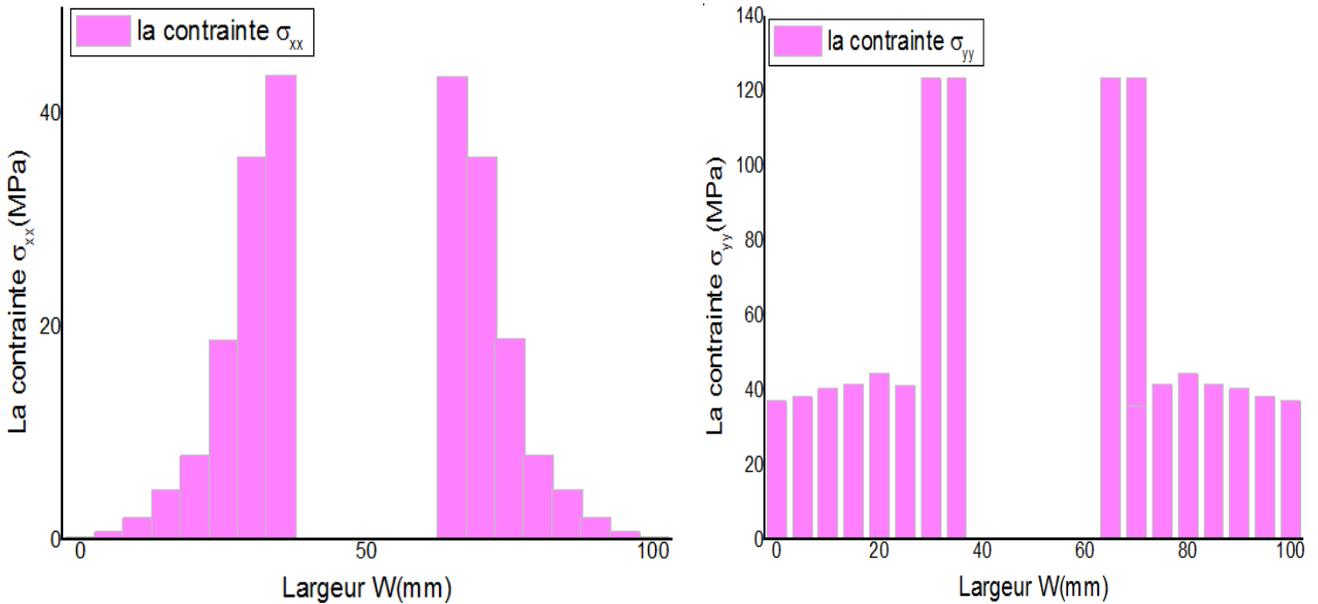


Figure III.14 : Effet de la forme du trou sur le niveau et la distribution des contraintes équivalentes σ_M induites dans la plaque autour de ce défaut.

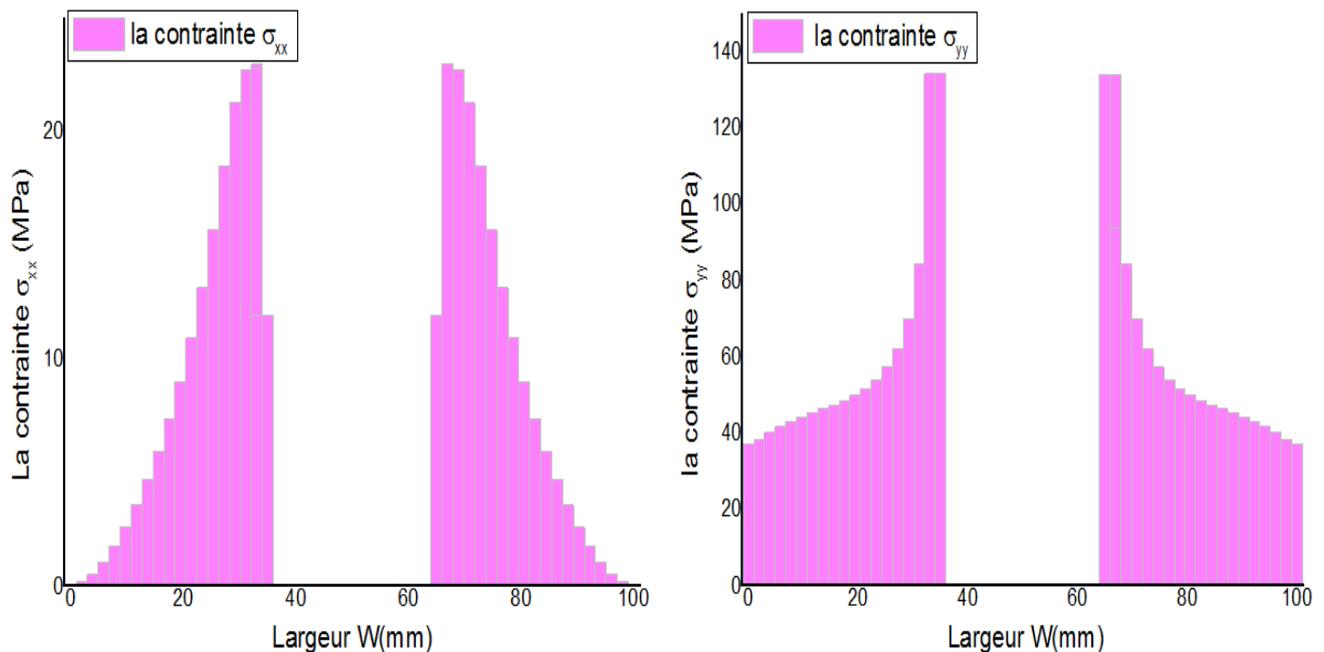
La figure III.14 présente le niveau et la répartition des contraintes équivalentes en fonction de la configuration géométrique du trou. Dans ce cas, la taille du trou varie uniquement selon la direction y. La figure montre que l'intensité et la distribution des contraintes équivalentes σ_{VM} induites localement dans la plaque autour du trou sont étroitement liées à la forme géométrique du trou. La forme sphérique concentre moins de contraintes que les formes elliptiques.

III.4.1.6 La répartition des contraintes normales σ_{xx} et σ_{yy}

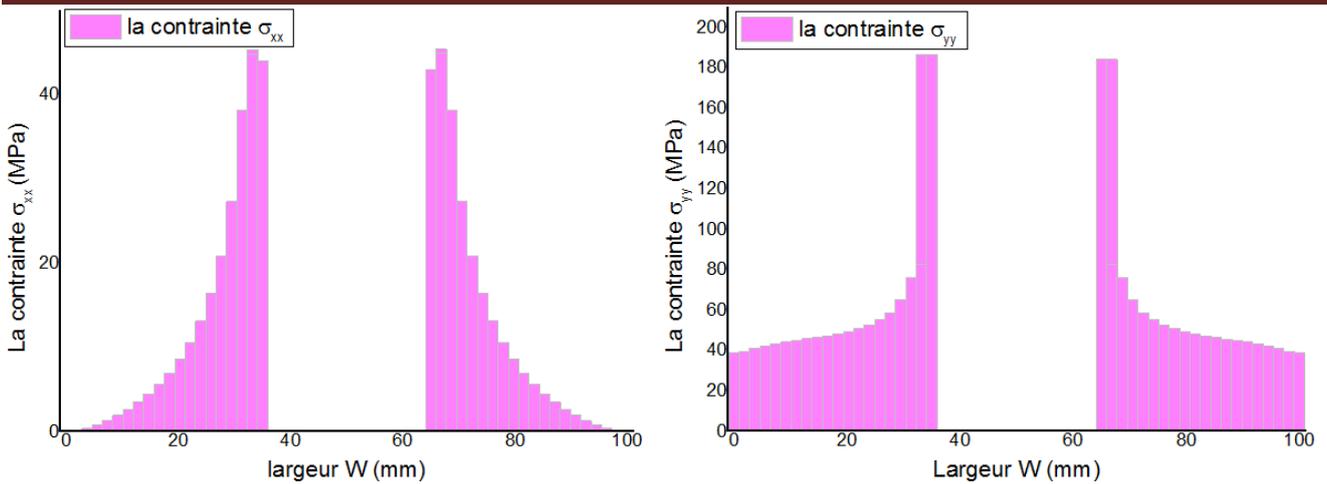
Dans cette figure, nous montrons la distribution des contraintes normales σ_{xx} et σ_{yy} pour différentes ellipses (selon le rapport a/b) en fonction de la largeur W de la plaque.



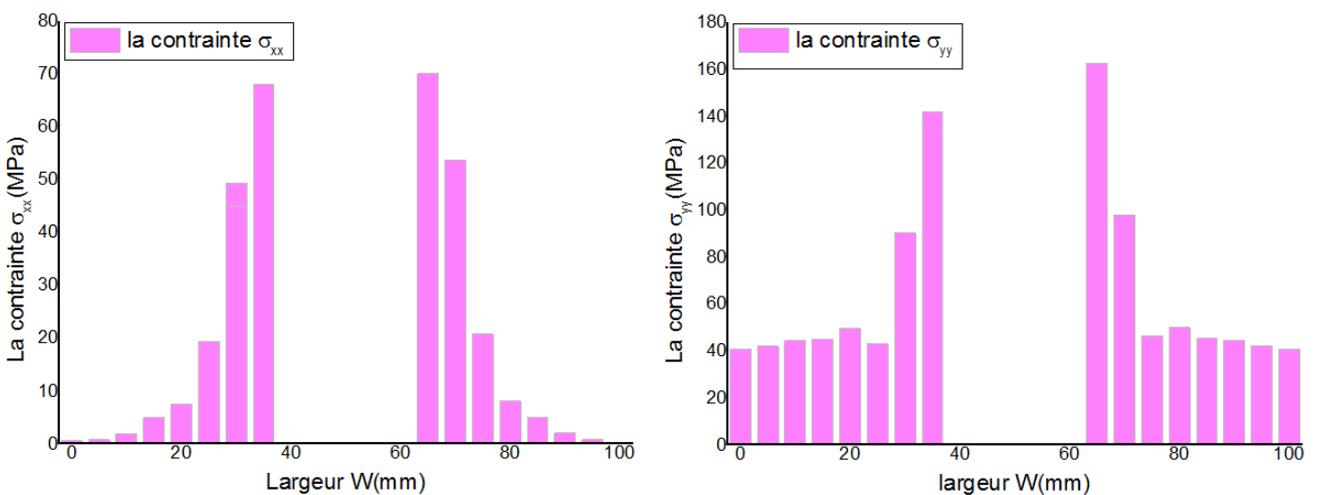
(a) : Pour le rapport $a/b = 30/30$;



(b) : le rapport $a/b = 30/20$



(c) : le rapport $a/b = 30/10$



(d) : le rapport $a/b = 30/5$

Figure III.15 : Variation des contraintes nominales pour différentes forme elliptique en fonction de largeur W ; (a) pour le rapport $a/b = 30/30$, (b) pour le rapport $a/b = 30/20$, (c) : pour le rapport $a/b = 30/10$, (d) : pour le rapport $a/b = 30/5$,

L'analyse de la figure III.15 montre que la contrainte normale σ_{xx} met la plaque en tension dont l'amplitude croit fortement près de l'interface avec le trou. Cette amplitude est d'autant plus importante que le rapport a/b est cru.

La répartition de la contrainte normale σ_{yy} est complètement différente de celle de la composante σ_{xx} (voir Figure III.15). Son intensité maximale est atteinte près de l'interface avec le trou (voir Figure. III.15). Les contraintes induites dans la plaque à l'interface du trou sont plus importantes que celle résultant de la première direction-X.

En effet, elles sont intensivement localisées dans la plaque à proximité de l'interface plaque-trou. Leurs amplitudes diminuent brusquement dans la plaque et tendent vers des valeurs nulles.

III.4.1.7 Effet de la forme du trou sur le facteur de concentration des contraintes K_t

La figure III.16 est représenté l'effet de la forme géométrique du trou sur le facteur de concentration de contraintes. Elle montre que le facteur de concentration contraintes n'est d'autant plus élevé que le rapport des deux diamètres a/b plus remarqué. Autrement dit, une tendance de la forme sphérique vers une forme elliptique du trou conduit à une augmentation du facteur de concentration de contraintes. Ce comportement est dû à la taille constante du trou dans la direction x .

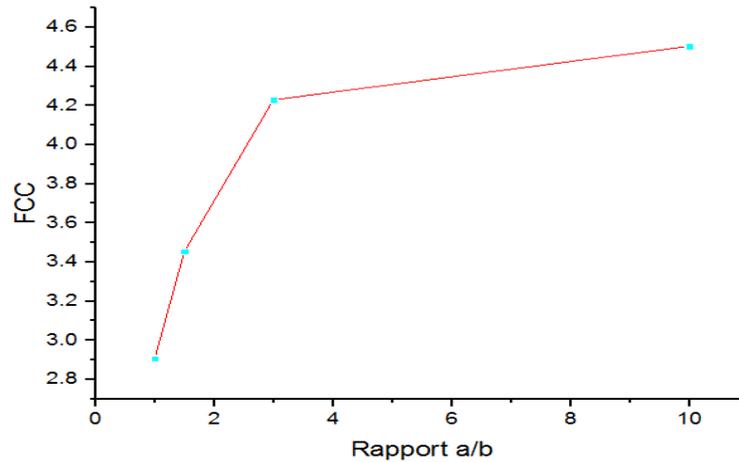


Figure III.16 : Variation du FCC en fonction de la forme du trou (rapport a/b).

III.5. Résultat de la fracture par la X-FEM

Les résultats de la simulation montrent qu'en utilisant X-FEM, on détecte l'initiation de la fissure et suit sa propagation dans la plaque qui subit des efforts représentant la force max que subit ce dernier lors d'un chargement de traction, en fonction des conditions aux limites, de la géométrie et les propriétés de notre modèle. Sur la base de ces trois situations différentes, nos résultats sont illustrés aux figures III.17, 18 et 19.

III.5.1. Effet du chargement

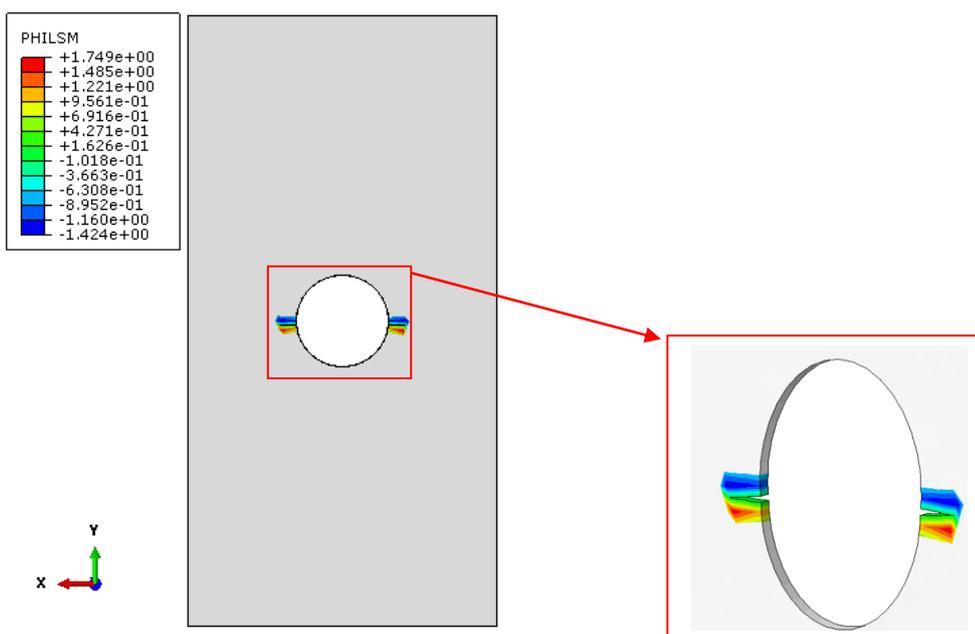


Figure. III.17: Type de fracture prédite à partir de chargement 60MPa.

III.5.2. Effet de la taille du trou

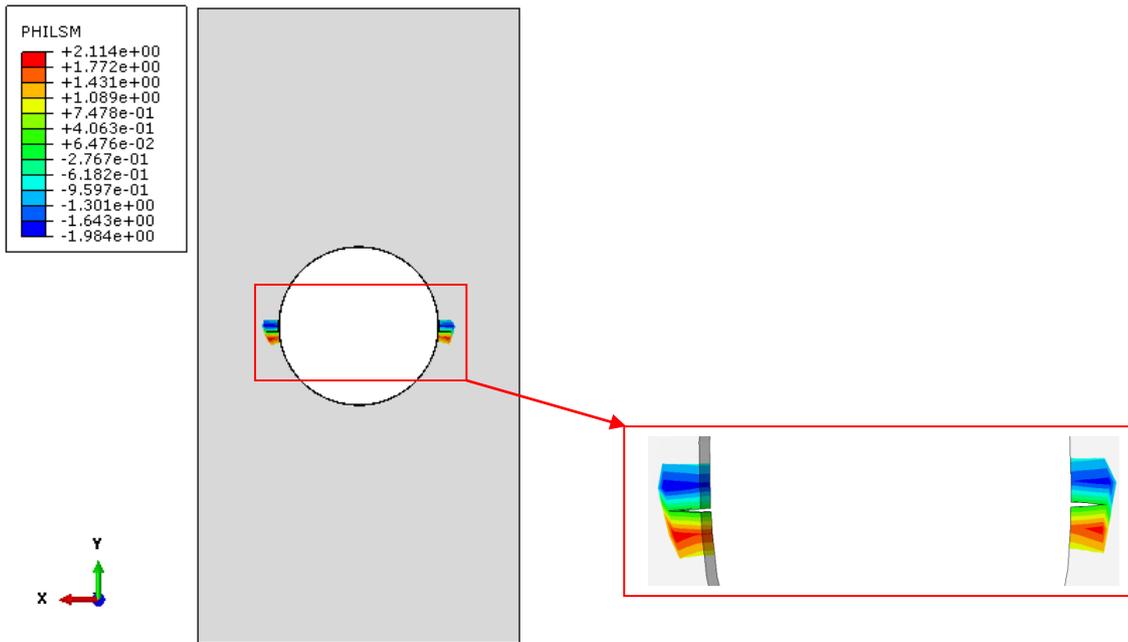
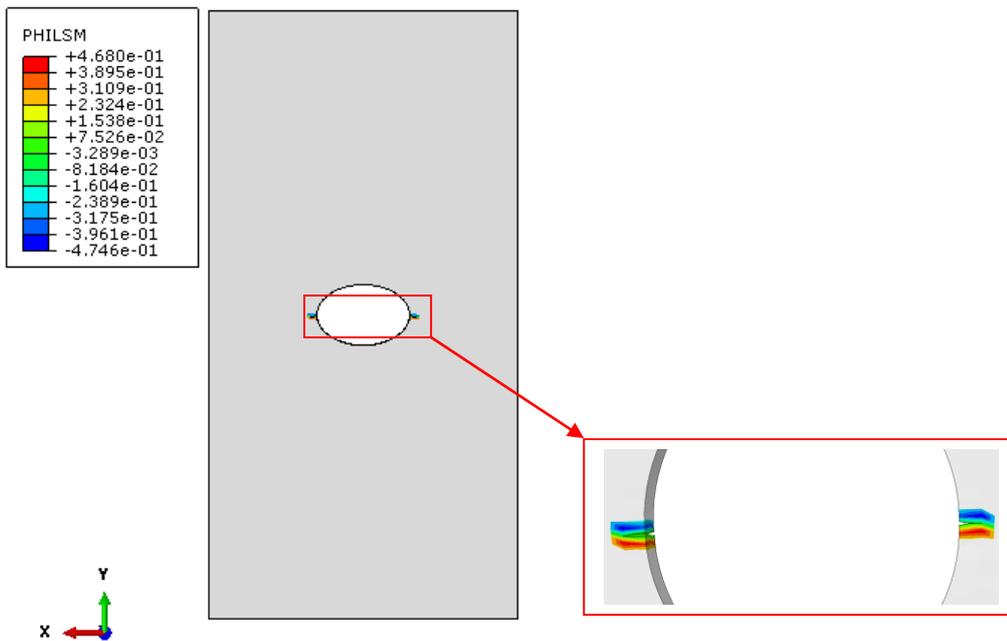
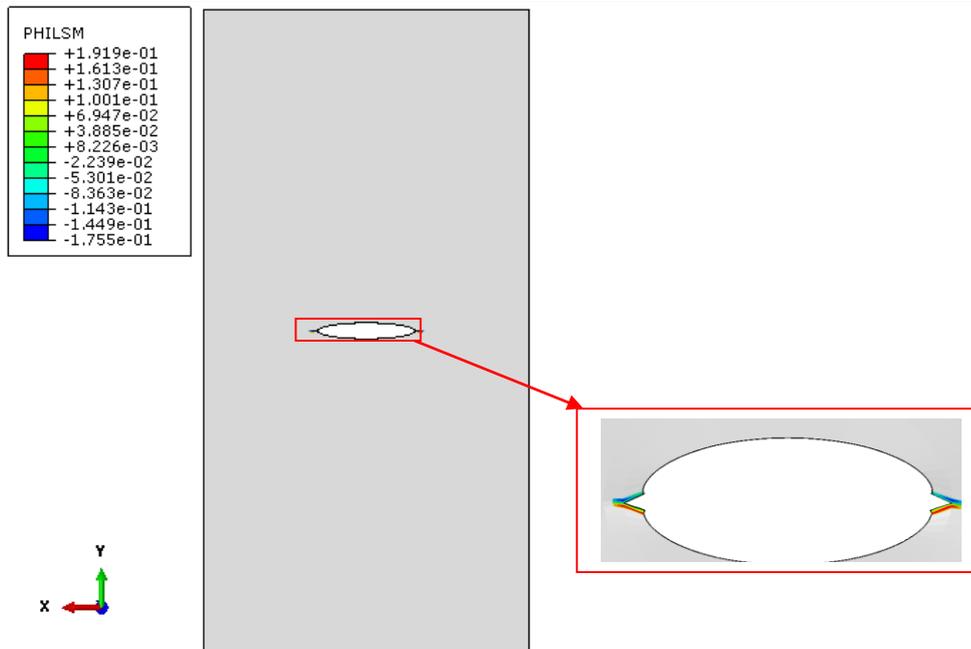


Figure. III.18: Type de fracture prédite à partir de diamètre du trou 50mm.

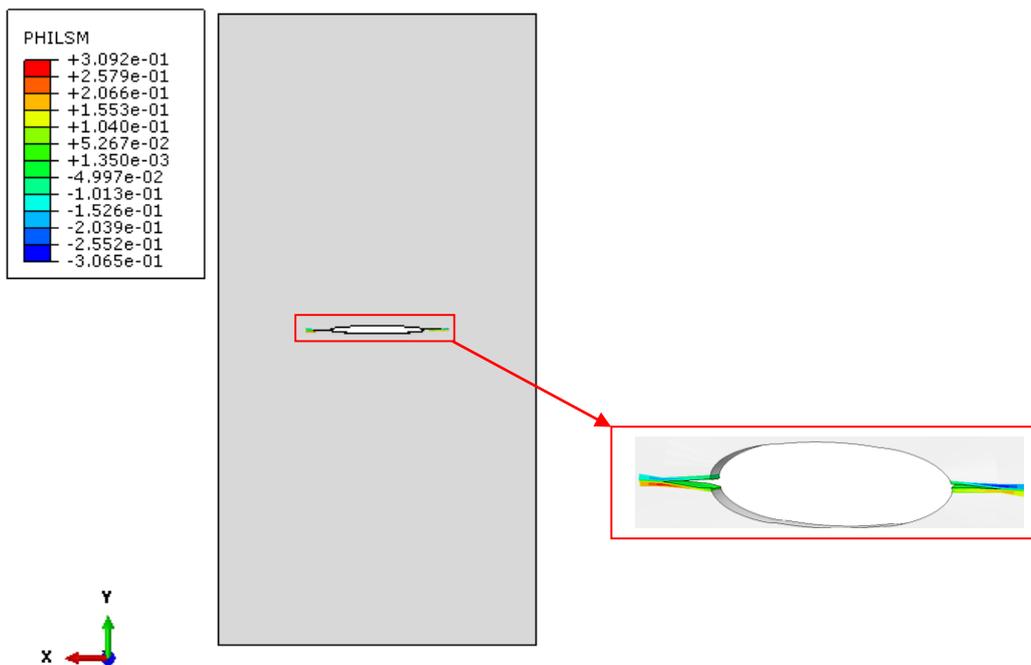
III.5.3. Effet de la forme du trou



(a): Forme elliptique de rapport $a/b = 30/20$



(b): *Forme elliptique de rapport a/b = 30/10*



(c): *Forme elliptique de rapport a/b = 30/5*

Figure. III.19: *Type de fracture prédite à partir de différentes formes du trou.*

Les résultats de la simulation montrent qu'en utilisant X-FEM, nous avons détecté l'apparition de fissures et suivi la propagation des fissures dans trois conditions différentes (l'effet de la charge, l'effet de la taille et la forme du trou) le degré de fracture est compris entre 0,2 et 1 ms.

Sur toutes les figures III.14, 15 et 16, pour les trois cas étudiés, les zones endommagées de la plaque à proximité des trous sont visibles. En haut de cette zone, on peut remarquer une concentration de contraintes.

Dans le premier cas illustré à la figure III-14, en ce qui concerne l'effet de charge, nous avons constaté que lorsque la charge dépasse 60 MPa, il y a le début de la fracture, et la zone qui occupe toujours le bord du trou est utilisée comme zone de départ; elle se propage en suivant un axe perpendiculaire à la charge appliquée.

Pour l'effet de la taille du trou, nous avons constaté que lorsque le diamètre du plus grand trou est de 50 mm et que la charge est de 40 MPa, nous constatons que le début de la fissure prend toujours la zone près du trou comme zone de départ.

Dans le dernier cas la fracture est représenté sur la figure III-16 ont fonction des trois formes elliptiques déférentes, on remarque l'initiation de la fissure dans bord du trou; elle se propage en suivant un axe perpendiculaire à la charge appliqué dans toutes les formes elliptiques.

Conclusion

Dans ce travail, la méthode X-FEM a été utilisée pour étudier les effets d'un trou induits dans une plaque mince soumise à un effort de traction. Les paramètres géométriques tels que la taille et la forme du trou et la force appliquée sont les variables de cette étude. Les principaux résultats de ces simulations sont résumés comme suit:

- ✓ Les contraintes sont situées au voisinage de l'interface entre la plaque et le trou. Loin de l'interface, la plaque est totalement libre de ces contraintes.
- ✓ Sur la base de l'hypothèse d'un trou sphérique, la répartition des contraintes révèle une concentration autour du trou, principalement dans la direction y (σ_{yy}). Cette contrainte atteint un niveau élevé à un point situé sur le bord du trou .
- ✓ Le facteur de concentration de contrainte est sensible à la taille du trou. Il a été observé que K_t devient de plus en plus intense proportionnellement au diamètre du trou.
- ✓ La contrainte normale selon la direction y prend un niveau élevé. Lorsque le trou devient aigu, cette concentration augmente rapidement et devient de plus en plus faible. Ainsi, les trous sphériques sont moins dangereux par rapport à ceux aigus.
- ✓ La méthode des éléments finis étandues X-FEM donne une fissuration dans les cas ce qui entraînera un risque réel de rupture de structure.
- ✓ X-FEM permet la prédiction de l'apparition et la propagation des fissures, sans connaissances préalables de la trajectoire de la fissure.

REFERENCES ET BIBLIOGRAPHIES:

- [1] Griffith A.A. The Phenomena of Rupture and Flow in Solids. Philosophical Transactions of the Royal Society of London 1920, Vol. A-221:163-19
- [2] Westergaard, H. M. Bearing Pressures and Cracks. Journal of Applied Mechanics 1939.Vol. 6:49-53.
- [3] Irwin, GR. Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate. *Journal of Applied Mechanics* 1957. 24: 361-364.
- [4] Jones R. Chiu WK., Composite repairs to crack in metallic components. *Comp. Struct.* ; 1999. 62:431-43.
- [5] Rice, JR. Plane strain deformation near a crack tip in a power law hardening material. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 1968. vol.16: 1-12.
- [6] Naman Recho. « Rupture par fissuration des structures ». Edition Hermès, 1995 Paris.
- [7] Hadj Meliani M, Azari Z, Pluvinage G, Matvienko YuG. The effective T-stress estimation and crack paths emanating from U-notches. *Eng Fracture Mech* 2010;77(11):1682–92.
- [8] Pluvinage G. Fracture and Fatigue Emanating from Stress Concentrators. Université de Metz, ©KLUWER , Academic Publishers, 2003.
- [9] Roesler J., Harders H. Baeker M. Mechanical Behaviour of Engineering Materials Metals, Ceramics, Polymers, and Composites, German Edition Published by the Teubner Verlag Wiesbaden, ©Springer- Verlag, 2006.
- [10] Recho, Naman. Rupture par fissuration des structures. Paris :Hermès, 1995. P. 349. 2-86601-488-X/.1158-3509.
- [11] Shixiang Ma. Propagation de fissure en mode mixte dans un milieu élasto-plastique avec prise en compte des contraintes résiduelles. *Mechanics*. Université Blaise Pascal – Clermont- Ferrand II, 2005. French.
- [12] LAWN, BOR, and SWAIN, M. V: “Micro fracture Beneath Point Indentation in Brittle Solid”. *J. Mater. Sci*, 1975, Vol. 10, n: 1, P 113-122.
- [13] LAWN, B.R., EVANS, E.G. A model of crack indentation Elastic-Plastic Indentation Solids. *J. Mater., Sci.*, 1977, Vol. 12, p. 2195-2199.
- [14] LANKFORD, and J., D.L. The Crack indentation in ceramic material subject to elastic-plastic indentation. *J. Mater. , Sci*, 1979, Vol. 14, p. 1662-1668.
- [15] LANKFORD, J, Threshold Microfracture during Elastic/Plastic Indentation of Ceramics: *J.Mater. Sci.*, 1981, Vol. 16, p. 1177-1182.
- [16] LIANG, K: « Contribution à l'étude des mécanismes de fissuration des matériaux céramiques de type oxyde » thèse. *Sci: Institut National des sciences appliquées de Lyon* 1990, p206.
- [17] François.D: “Influence of hydrides on the strengths of Zircaloy-4 plate”, *Proc. of 8th Int.Conf. On Fracture*, Kiev, Ukraine, 1993, pp. 693-700.
- [18] J.P. Faurie, P. Monnier, A. Niku-Lari, – Guide de dessinateur, les concentrateurs de contraintes. Publications CETIM, 2000.

REFERENCES ET BIBLIOGRAPHIES:

- [19] R.E. Peterson—Stress concentration factor, John Wiley and Sons, 1974 New-York.
- [20] F.I. Baratta, D.M. Neal – Stress concentration factors in U shaped and semi- elliptical edge notches, *Journal of Strain Analysis*, 1970, Vol.5, N°2, pp 121-27.
- [21] O. L. Bowie – Analysis of edge notches in a semi-infinite region, Army Materials and Mechanics Research Center AMRA, June 1966, TR 66-07.
- [22] C.E. Inglis. – Stress in a plate due to the presence of cracks and sharp corners, *Trans. Instn Nav. Archit*, 1913, Vol.55, pp 219
- [23] M. Isida., On the tension of the strip with semicircular notches, *Trans. Japan Soc. Mech. Engrs*, 1953. Vol. 19, N°83, pp5,
- [24] Peterson R.E. Stress concentration factors, USA, John Willey Sons, 1974, P317.
- [25] H. Neuber, N.E. Frost, K. Marsh enad L.P. Pook – Effect of stress concentration and cracks on fatigue strength. *Metal Fatigue*, Ed Oxford U, 1974, London W.I, pp 130-200
- [26] R.A. Smith, K.J Miller, – Prediction of fatigue regimes in notched components. *Int. J. Mech. Sci.* 1978, Vol. 20, PP 201-206.
- [27] Jia li, Naman Recho, « Méthodes asymptotique en mécanique de la rupture ». Edition Hermès Lavoisier, 1996, paris.
- [28] Irwin G.R. “Analysis of the Stresses and Strains near the End of Crack Traversing a Plate”. *ASME J. Appl. Mech.*, 1957, 24, pp. 361-364.
- [29] K, Hocine. Approche déterministe et probabiliste de la prévision de la durée de vie de structure aéronautique à l’aide de la méthode des équations intégrales duales. *Thèse de doctorat, UTC*, 1998.
- [30] Babuska I, Melenk J. The partition of unity method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 1997. Vol. 40:727–758.
- [31] Belytschko T, Black T. Elastic crack growth in finite element with minimal remeshing. *International Journal of Numerical Methods in Engineering* 1999. 45(5):601-620.
- [32] Moes N, Dolbow J, Belytschko T. A finite element method for crack growth without remeshing. *Int J Numer Methods Eng* 1999. 46:131-150.
- [33] J. Oliver. On the discrete constitutive models induced by strong discontinuity kinematics and continuum constitutive equations. *International Journal of Solids*, 2000. 37 : 7207–7229.
- [34] J. Simo et M. Rifai. A class of mixed assumed strain methods and the methods of incompatible modes. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 1990. 29: 1595–1638.
- [35] J. Lu et H.P. Lirurade « technique de l’ingénieur, concentration de contrainte, traité Génie mécanique » BM5 040 ; 1-24
- [36] Samuel Forest, Michel amestoy Sabine Cantourent, Grilles Damamme, Serge Kruch,

REFERENCES ET BIBLIOGRAPHIES:

- vincent Maurel, David Ryckelynek « Mécanique des milieux continus » année 2008-2009
- [37] « isotropic Linear Elastic stress concentration », Massachusetts Institute of Technology Department of Mechanical Engineering Cambridge, Ma 02139, mechanics and materials II spring 2004, laboratory module No.1.
- [38] B.Lawn and Shaw “Fracture of Brittle solids”, chapitre 2 “cracks and fundamentals of Fracture” 1992. Fente.
- [39] CHEVALIER, L., EDDHAHAK, A., & MAALEJ, Y. Concentration de contraintes: différentes techniques de mesure. seconde partie), *Revue Technologie*, 2004, (134).
- [40] CHEVALIER, L, EDDHAHAK, A, & MAALEJ, Y.(Concentration de contraintes: différentes techniques de mesure. *Première partie*), *Revue Technologie*, 2004, (133).
- [41] J. Simo et M. Rifai. A class of mixed assumed strain methods and the methods of incompatible modes.
International Journal for Numerical Methods in Engineering 1990. 29 : 1595–1638.
- [42] David Lebaillif, Naman Recho, « Prevision de la rupture en milieu élastique par remaillage », 9^{ème} Colloque National Journal AIP PRIMECA, La Plage -5-8 avril 2005.
- [43] SAIB Meriem. Étude et numérique d’une structure fissurée sous contrainte de fatigue.2011. université M’Hamed BOUGARA-Boumerdas.
- [44] Needleman, Xu. Numerical simulation of fast crack growth in brittle solids.
Journal of the Mechanics and Physics of Solids 1994. Vol. 42: 1397–1434.
- [45] Aliabadi, M. H. The Boundary Element method. New York: *Applications in Solids and Structures* 2002, Vol. 2.
- [46] I. Babuska and J.M. Melenk. « The partition of unity method ». *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1997 40:727–758.
- [47] <http://thesis.univ-beskra.dz/id/eprint/2294>.
- [48] RAHMANI MOHAMED Yacine, Analyse Numérique de la propagation de fissure par la méthode des éléments finis étendus (X-FEM).2016. Université d’Annaba.
- [49] Barsoum, RS. On the use of isoperimetric nit elements in linear fracture mechanics. *Int J Numer Meth Engng* 1976. 10:25–37.
- [50] LASRY. Jérémie. Calculs de plaques fissurées en Aexion avec la méthode des éléments finis étendus (X-FEM), Toulouse, 2006.
- [51] Belytschko T; Black T « Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing “. *Int Numer Meth. Eng*; 199945(5): 601-20.
- [52] Fleming M, Chu YA, Moran B, Belytschko T.”Enriched-free Galerkin methods for crack tip fields”. *Int J Numer Meth Eng*; 1999, 40(8): 1483 -504.
- [53] T .Belytschko, Y.Y. Lu. GU. « Element-free Galerkin methods », *Inter .J. Numer. Meth .Engrg.* 1994. 37-229-256.
- [54] Malenk JM, Babuska I.” The partition of unity finite element method: basic theory

REFERENCES ET BIBLIOGRAPHIES:

and application “Comput Meth Appl Mech Eng, 1999139:289-314.

[55] RAHMANI Abdallah Yacine. Contribution à la modélisation de la fissuration dans les structures en béton par la méthode X-FEM. Université ABOU BAKR BELKAID. Tlemcen.

[56] Moes N, Dolbow J, Belytschko T, “A finite element method for crack growth without remeshing “. Int Numer Meth Eng; 1999, 46/131-50.

[57] Dolbow J. “An extended finite element method with discontinuous enrichment for applied mechanics”. Phd thesis, Northwestern University 1999.

[58] Storska M, Chopp DI, Moes N, Belytschko T.” Modling crack growth by level sets in the extended finite element method “. Int J Numer Meth Eng; 2001.51:943-60.

[59] Belytschko T, Daniel W.J.T and Venture, G. “A monolithic smoothing-gap algorithm for contact impact based on the signed distance function”. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2002, 55,101-125.

[60] Sukumar N, Chopp DI, Moes N, Belytschko T “Modling holes and inclusion by level sets in the extended finite element method“Comput Meth Appl Mesh ENG”;2001,190: 6183-2000.

[61] Moes N, Gravouil A, Belytschko T “Non planer 3D crack growth by the extended finite element and level sets part I: mechanical model “Int Numer Mech Eng; 2002,53/ 2549-68.

[62] Gravouil A, Moes N, Belytschko T; “Non planer 3D crack growth by the extended finite element and level sets part II: mechanical model “Int Numer Meth Eng; 2002, 53:2569-86.

[63] Osher S, Sethian J. “Fronts propagation with curative dependent speed; algorithms based on Hamilton- Jacobi formulations “J Comput phy; 1988. 79 (1):12-49.

[64] Sukumar N, Chopp DI, Manor B. “Extended finite element method and fast marching method for three-dimensional fatigue crack propagation”. Eng Fract Mech; 2003. 70:29-48.

[65] Chopp DI, Sukumar N.” Fatigue crack propagation of multiple coplanar cracks with the coupled extended finite element fast marching method “. Int J Eng Sci; 2003 41:854-69.

[66] Moes N, Belytschko T.” Extended finite element method for cohesive crack growth” .Eng Fract Mech; 2002, 69/813-33.

[67] Zi G, Belytschko T,”New crack tip elements for X-FEM and application to cohesive cracks”. Int J Numer Mech Eng; 2003, 57: 2221-40.

[68] Bodyn E, Zi G, Moes N, Belytschko T.”A method for multiple crack growth in brittle materials without remeshing “. Int J Numer Mech Eng; 2004, 61:1741-70.

[69] Zi G, Song J H, Budyn E, Lee S H and Belytschko T, “A method for growing multiple cracks without remeshing and its application to fatigue crack growth”. Modling and simulations for Materiel Science and engineering; 2004, 12.901- 915.

[70] Béchet E, Minnebo H, Moes N, Burgerdt B.” Improved implementation and robustness study of the X FEM. fortress analysis around cracks”. Int J Numer meth Eng;

REFERENCES ET BIBLIOGRAPHIES:

2005, 64:1033-56.

[71] Labored P, Pommier J, Renand Y, Salaun M , “high order extended finite element method for cracked domains “ . Int J Numer Meth Eng; 2005, 64:354-81.

[72] Chahine E, Laborde l, Renard y. a quassi-optimal convergence result for fracture mechanics with XFEM CR Acad Sci Paris, 2005, Ser I .342/527-32.

[73] Peters M and Hack K. “Numerical aspects of the extended finite element method”. Proceeding of applied Mathematics, 2005, 5,355-356.

[74] Ventura G. On elimination of quadrature subells for discontinuous functions in the extended finite element method”. Int J Numer Meth Eng; 2006; 66:761-95.

[75] Moes N, Belytschko T.” Extended finite element for cohesive crack growth” Eng .Frat Mech; 2002; 69:831-33.

[76] Osher S, Sethian J. “Fronts propagating with curative dependent speed, algorithms based on Hamilton-Jacobi formulations”. J comput phys; 1988. 71(1):12-49.