

**RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE**  
**MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE**  
**UNIVERSITÉ IBN KHALDOUN DE TIARET**



**FACULTÉ DES SCIENCES APPLIQUÉES**  
**DÉPARTEMENT DE GÉNIE CIVIL**

**Mémoire de fin d'études en vue de l'obtention du diplôme de Master**

Spécialité : Génie Civil

Option : Structure

Présenté par :

BOUAKKAZ Marouane Abdelkader

BERRABEH Kadda

*Sujet du mémoire*

**ANALYSE DE LA FLEXION DES PLAQUES A GRADIENT  
FONCTIONNEL A L'AIDE D'UNE NOUVELLE THEORIE DE  
DEFORMATION EN CISAILLEMENT D'ORDRE SUPERIEUR A  
HUIT INCONNUES**

*Soutenu publiquement le 19/09/2020 devant le jury composé de :*

Mr.Khiloun Mokhtar	Président
Mr.Chikh Abdelbaki	Rapporteur
Mr.Belmahi Samir	Examineur
Melle Ouazir Khatima	Examinatrice

PROMOTION :2019/2020

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

# REMERCIEMENT

---

*Nous remercions tout d'abord le grand Dieu pour l'achèvement de ce mémoire.*

*Nous tenons à exprimer nos vifs remerciements à notre rapporteur  
Mr. Chikfi Abdelbaki pour nous avoir proposé ce sujet, leurs  
Précieux conseils tout au long de notre travail, leur aide et leur  
Confiance et bien sur leur disponibilité.*

*A tous les enseignants du département de Génie civil qui nous ont  
Fait bénéficier de leurs connaissances et leur compétence.*

*Aux membres du jury, pour avoir accepté de prendre part à ce jury ainsi  
Que pour l'intérêt qu'ils l'ont portés à ce travail.*

*A tous qui ont aidé a terminé ce modeste travail trouvent ici  
L'expression de nos remerciement les plus sincères.*

## Dédicace

---

*C'est avec un très grand honneur que je dédie ce modeste travail aux  
Personnes les plus chères au monde, mes chers parents pour leurs amour  
Et bonté et que sans eux je n'aurai jamais pu atteindre mon objectif, que*

*Dieu me les garde*

*À...*

*⊗ Mes parents*

*⊗ Mes sœurs*

*⊗ Mes frères*

*⊗ a tout Mes amis*

*⊗ tous ceux qui m'ont aidé de près ou de loin dans*

*L'accomplissement de ce travail.*

*Berrabeh Kadda*

## Dédicace

---

*Toutes les lettres ne sauraient trouver les mots qu'il faut...  
Tous les mots ne sauraient exprimer la gratitude, l'amour, le respect, la  
reconnaissance...aussi, c'est simplement que je dédie ce modeste travail...*

*À mes très chers parents*

*Aucune dédicace ne saurait être assez éloquente pour exprimer la  
profondeur des sentiments d'affection, d'estime et de respect que je vous  
porte, pour l'amour dont vous m'avez toujours comblé, l'éducation et le bien  
être que vous m'assurez, pour votre soutien, vos sacrifices et vos prières.*

*Aussi fière d'y appartenir, aussi déterminé à en être digne*

*À mes chers frères ET ma chère sœur*

*Je vous souhaite tout le succès et la prospérité dans votre vie*

*À tous les membres de la famille .*

*À tous mes chers amis chacun par son nom*

*Bouakkaz Maroune Abdelkader*

في هذا العمل، تم اقتراح نظرية جديدة للتشوه القصي ذات ثمانية مجاهيل للألواح المتدرجة وظيفيا (FG). النظرية مبنية على النظرية الكاملة لترتيب إجهاد القص أكبر من اثني عشر مجهولاً، في نفس الوقت تلبي فرًا من الضغوط العرضية على السطح العلوي والسفلي لألواح FG. معادلات الحركة مشتقة من مبدأ الإزاحة الافتراضية. يتم الحصول على حلول كل مغلقة للوحات مستطيلة FG المدعومة ببساطة تحت تحميل منتظم. تم التحقق من دقة النتائج العددية الحالية من خلال مقارنتها بالنظرية المعممة للتشوه القصي. ندر تأثير مؤثر قانون القوة للمواد المتدرجة وظيفيًا، ونسبة الجانب / السماكة ونسبة العرض إلى الارتفاع على السلوك الثابت لألواح FG.

**الكلمات المفتاحية:** تحليل الانحناء؛ المواد المتدرجة وظيفيا؛ نظرية تشوه القصي من الدرجة الأعلى؛ حل مغلق.



# Abstract

---

In this paper, a new eight-unknown higher order shear deformation theory is proposed for functionally graded (FG) material plates. The theory based on full twelve-unknown higher order shear deformation theory, simultaneously satisfy zeros transverse stresses at top and bottom surface of FG plates. Equations of motion are derived from principle of virtual displacement. Exact closed-form solutions are obtained for simply supported rectangular FG plates under uniform loading. The accuracy of present numerical results has been verified by comparing it with generalized shear deformation theory. The effect of power law index of functionally graded material, side-to-thickness ratio, and aspect ratio on static behavior of FG plates is investigated.

**Keywords:** bending analysis ; functionally graded materials : higher order shear deformation theory ; closed-form solution.

Dans cette mémoire, une nouvelle théorie de déformation par cisaillement d'ordre supérieur à huit inconnus est proposée pour les plaques de matériau à gradation fonctionnelle (FG). La théorie basée sur la théorie complète de la déformation par cisaillement d'ordre supérieur à douze inconnus, satisfait simultanément des contraintes transversales nulles sur la surface supérieure et inférieure des plaques FG. Les équations de mouvement sont dérivées du principe du déplacement virtuel. Des solutions exactes de forme fermée sont obtenues pour des plaques FG rectangulaires simplement supportées sous un chargement uniforme. La précision des résultats numériques actuels a été vérifiée en la comparant à la théorie généralisée de la déformation par cisaillement. On étudie l'effet de l'indice de loi de puissance du matériau fonctionnellement gradué, du rapport côté / épaisseur et du rapport d'aspect sur le comportement statique des plaques FG.

**Mots-clés** : analyse de flexion ; matériaux fonctionnellement graduée ; théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé ; solution de forme fermée.

# **Sommaire**

الملخص	I
RESUME	II
Abstract	III
Liste des figures	IV
Liste des tableaux	VI
Liste des notations	VIII

## **Introduction générale**

Introduction générale	1
-----------------------	---

## **Chapitre I :**

### **Généralités sur les matériaux à gradient de propriétés**

I.1	Introduction	4
I.2	Les matériaux à gradient de propriété FGM	6
I.2.1	Aperçu historique sur les matériaux à gradient de propriétés	6
I.2.2	La définition et le concept d'un matériau à gradient de propriété	6
I.3	L'intérêt d'utilisation d'un FGM	9
I.3.1	Différence entre FGM et les matériaux composites traditionnels	10
I.3.2	Procédés de fabrication FGM	11
I.4	Méthodes Les d'élaboration des FGM	12

I.4.1	Coulage en Bande (Tape Casting Ou Doctor-Blade)	13
I.4.2	Coulage Séquentiel en Barbotine (Slip Casting)	14
I.4.3	Dépôt par Électrophorèse	14
I.4.4	Compaction Sèche des Poudres	15
I.4.5	Projection plasma	15
I.4.6	C. V. D. et P. V. D	15
I.4.7	Frittage et Infiltration	15
I.4.8	Frittage Laser Différentiel	16
I.4.9	Implantation Ionique (Sputtering)	16
I.4.10	Dépôt par Centrifugation	17
I.5	Propriétés matérielles effectives d'un matériau FGM	17
I.6	Revue sur les différentes lois qui régissent la variation des propriétés matérielles	18
I.6.1	Propriétés matérielles de la plaque P-FGM	19
I.6.2	Propriétés matérielles de la plaque S-FGM	20
I.6.3	Les propriétés matérielles de la poutre E-FGM	21
I.7	Propriétés physiques et mécaniques des FGM	22
I.7.1	Propriétés des alliages d'aluminium	23
I.7.2	Résistance à la corrosion	24
I.7.3	Propriété physique de céramique	24
I.7.4	Propriété mécanique de céramique	24
I.7.5	Propriété de céramique	25
I.8	Domaine d'application des FGM	25

I.9	Conclusion	27
-----	------------	----

## **Chapitre II**

### **Les théories des plaques FGM**

II.1	Introduction	28
II.2	Modèles analytiques des plaques	29
II.2.1	La théorie classique des plaques minces de Love-Kirchhoff (CPT)	29
II.2.2	Théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT)	30
II.2.3	Théorie de déformation en cisaillement D'ordre élevé (HSDT)	31
II.3	Revue sur les différents modèles de la théorie d'ordre élevé	33
II.4	Les différents modèles des structures composites dans l'élasticité bidimensionnelles	35
II.4.1	Approche monocouche équivalente	35
II.4.2	Approche par couche	36
II.4.3	Approche développement asymptotique	37
II.5	Théorie de zig-zag	37
II.6	Conclusion	38

### **Chapitre III**

III.1	Introduction	39
III.2	Théorie des déformations de cisaillement non polynomiales à trois inconnues	39
III.3	Constitutive équations	41
III.4	Équations d'équilibre	42
III.5	Solution du navigateur	44
III.6	Conclusion	49

### **Chapitre VI**

VI.1	Introduction	50
VI.2	Résultats et discussion	50
VI.3	Exemple 1 - Vérification	51
VI.4	Exemple 2	55
VI.5	Exemple3	57
VI .6	Exemple 4	59
VI.7	Conclusion	61

### **Conclusion générale**

Conclusion générale	62
---------------------	----

### **Références**

***LISTE DES  
FIGURES***

## Listes des figures

---

Figure I.1	Un type d'un matériau FGM en céramique et métal	07
Figure I.2	La variation de la composition d'un FGM	08
Figure I.3	La distribution composante des matériaux	11
Figure I.4	Principe de la Méthode de Coulage en Bande	13
Figure I.5	Schématiquement la disposition du procédé utilisé par ces auteurs	16
Figure I.6	Schéma du procédé dépôt par centrifugation	17
Figure .I.7	Modèles analytiques pour une couche en FGM	18
Figure I.8	Les dimensions de la plaque FGM	19
Figure I.9	Variation de la fraction volumique dans une plaque P-FGM	20
Figure I.10	Variation de la fraction volumique dans une plaque S-FGM	21
Figure I.11	Variation du module de Young dans une plaque E-FGM	22
Figure .II.1	Illustration de la plaque de Love-Kirchhoff	29
Figure .II.2	Illustration de la plaque de Reissner-Mindlin (Reddy 1997)	30
Figure .II.3	Illustration de la plaque d'ordre élève	31
Figure .II.4	Champs de déplacements des modèles couches discrètes, approche cinématique	36
Figure .II.5	Champs de déplacements des modèles zig-zag, approche cinématique	37
Figure .II.6	Champ de déplacements du modèle zig-zag d'ordre élevé	38
Fig .III.1	Géométrie de la plaque FG avec un ensemble positif d'axes de référence	39
Fig.VI.1	Variation des contraintes adimensionnelles à travers l'épaisseur des plaques carrées sous des charges uniformes ( $a = b = 10h$ ).	54
Fig.VI.2	Variation de la flèche sans dimension $w$ , contraintes dans le plan, ( $\sigma_x, \sigma_{xy}$ ) contrainte transversale ( $\sigma_{xz}, \sigma_{yz}$ ) en fonction de l'indice de loi de puissance $p$ des plaques carrées sous des charges uniformes ( $a = b = 10h$ ).	56
Fig.VI.3	Variation de la flèche sans dimension $\bar{w}$ , contraintes dans le plan ( $\sigma_x, \sigma_{xy}$ ), contrainte transversale ( $\sigma_{xz}, \sigma_{yz}$ ) en fonction du rapport d'épaisseur latérale $a/h$ des plaques carrées sous des charges uniformes ( $a = b$ ).	58

Fig.VI.4      Variation de la déflexion sans dimension  $\bar{w}$ , contraintes dans le plan 60  
 $(\sigma_x, \sigma_{xy})$ , contrainte transversale  $(\sigma_{xz}, \sigma_{yz})$  en fonction de divers  
rapports d'aspect  $b / a$  des plaques rectangulaires sous des charges  
uniformes ( $a = 10h$ ).

***LISTE DES  
TABLEAUX***

## *LISTE DES tableaux*

---

Tableau I.1	Comparaison entre les propriétés de la céramique et du métal	08
Tableau I.2	Caractéristiques des matériaux composites FGM en comparaison avec les matériaux composites conventionnels	10
Tableau II.1	Différentes fonctions de cisaillement utilisées dans les théories des plaques isotropes et FGM	35
Tableau.VI.1	Propriétés des matériaux de la plaque FG.	50
Tableau.VI.2	Déformation et contraintes sans dimension des plaques carrées sous charges uniformes ( $a/h = 10$ ).	52
Tableau.VI.3	Flèche sans dimension et contraintes des plaques carrées sous charges bi-sinusoïdales	53
Tableau.VI.4	Déformation et contraintes sans dimension des plaques carrées sous charges uniformes ( $a/h = 10$ ) avec différentes valeurs d'indice de loi de puissance $p$ .	55
Tableau.VI.5	Déformation et contraintes sans dimension des plaques carrées sous des charges uniformes ( $a = b, p = 5$ ) avec différentes valeurs du côté à l'épaisseur $/h$ .	57
Tableau.VI.6	Déformation et contraintes sans dimension des plaques rectangulaires sous des charges uniformes ( $a/h = 10$ ) avec différentes valeurs de rapport d'aspect $b/a$	59

***INTRODUCTION***

***GENERALE***

# Introduction générale

---

## Introduction générale

Les matériaux à gradation fonctionnelle (MGF) sont de nouveaux types matériaux composites dont les propriétés mécaniques varient continuellement dans une certaine direction ; et ainsi éviter le délaminage dans les matériaux composites laminés. Les MGF typiques sont fabriquées à partir de deux matériaux isotropes tels que le métal et céramique. Le constituant céramique des MGF, a une haute résistance à la température en combinaison avec du métal, donne haute ténacité. En raison des avantages ci-dessus, les MGF sont largement utilisés dans des nombreux domaines tels que l'aérospatiale, le nucléaire, génie civil, automobile, biomécanique, optique... Avec le développement du processus de fabrication, l'achèvement modèle théorique approprié pour l'analyse structurale est un sujet intéressant pour les chercheurs. Des nombreux modèles informatiques pour les plaques et les coques à gradation fonctionnelle (FG) sont développés, et ils peuvent être classés en trois principales catégories selon le champ de déplacement : plaque classique théorie de la déformation de cisaillement du premier ordre et ordonner la théorie de la déformation par cisaillement. Un examen de divers méthodes d'étude des comportements statiques et dynamiques de la FG plaques et coquillages est présenté dans des travaux réalisés par Birman et Byrd (2007) [1], Jha et al. (2013)[2], Swaminathan et al. (2015) [3]. La théorie de la plaque classique (CPT) ignore le transversal effet de déformation de cisaillement et donne des résultats précis pour mince plaques. La solution analytique pour l'analyse de flexion de Kirchhoff les plaques sont données par Apuzzo et al. (2015) [4], Barretta et Luciano (2014) [5], Chi et Chung (2006) [6]. Basé sur technique de moyenne de la tolérance, Jedrysiak et Michalak (2011) [7] ont analysé les comportements dynamiques et de stabilité du FG mince plaques. Yang et Shen (2001) [8] ont étudié la réponse dynamique de plaques minces rectangulaires FG initialement sollicitées soumises à charges latérales impulsives partiellement réparties. Une plaque mince modèle comprenant les effets de surface qui peuvent être utilisés pour analyse statique et dynamique en fonction de la taille des plaques minces les structures de film ont été proposées par Lu et al. (2006)[9]. Arani et al. [10] ont analysé la vibration transversale non linéaire d'une plaque piézoélectrique intégrée renforcée avec une seule paroi nanotubes de carbone (SWCNT). Pour les plaques moyennement épaisses, cisaillement de premier ordre les théories de la déformation (FSDT) sont utilisées. Les FSDT tiennent compte de l'effet de déformation de cisaillement transverse, mais leurs précisions dépendent du facteur de correction de

## Introduction générale

---

cisaillement, qui est difficile à calculer. La solution de forme fermée pour une vibration libre des plaques Reissner-Midlin FG avec différentes combinaisons de conditions aux limites est présentée par Hosseini-Hashemi et Al. (2010, 2011)[11][12]. Nguyen et al. (2008)[13] a exécuté l'analyse numérique pour la flexion cylindrique de plaque sandwich avec une face fonctionnellement dégradée. Par la méthode des éléments finis, Alieldin et al. (2011)[14], Della Croce and Venini (2004)[15], Singha et al. (2011)[16] ont étudié le comportement de flexion de Plaques FG. Lee et al. (2010)[17] Il analyse la réaction au flambement des plaques FG sous compression de bord là où la condition du champ de température et présentée en utilisant la méthode Kp-Ritz sans éléments. Shaat et al. (2012, 2013)[19][18] ont développé une solution analytique et un modèle par éléments finis pour le continuum incorporant l'énergie de surface pour étudier le comportement des plaques Mindlin minces à fonctionnellement dégradé (FG). Pour systèmes microélectromécaniques (MEMS) et systèmes nanoélectromécaniques (NEMS), carbonnanotubes (CNT) sont largement utilisés. D'après FSDT, Kolahchi et al. (2015b)[20] ont effectué une analyse de flambement non local et non linéaire de microplaques polymériques intégrées en fonction de la température reposant sur une matrice élastique comme milieu élastomère orthotrope dépendant de la température. Kolahchi et al. (2016a)[21] a présenté le non linéaire dépendant de la température stabilité dynamique du CNT fonctionnellement classé renforcé visco-plaques reposant sur un milieu élastomère orthotrope et la réponse de stabilité dynamique d'un piézoélectrique intégré nanoplaque en fluorure de polyvinylidène pour éviter d'utiliser le facteur de correction de cisaillement d'ordre supérieur, des théories de déformation par cisaillement (HSDT) sont proposées. En utilisant la solutions de Navier et modèles d'éléments finis basés sur des tiers théorie de la déformation par cisaillement d'ordre, Reddy (2000)[22] a présenté formulation théorique pour l'analyse statique et dynamique des plaques FG rectangulaires. Baseri et al. (2016)[23] a présenté une solution analytique pour le flambage des stratifiés intégrés plaques reposant sur des fondations élastiques à l'aide du HSDT de Reddy. Lü et al. (2009)[24] ont développé une théorie généralisée et affinée pour les films ultra-fins à gradation fonctionnelle, y compris la surface effets. L'utilisation d'une théorie de déformation de cisaillement trigonométrique raffinée, Tounsi et al. (2013)[25] ont étudié le thermoélastique cintrage d'une plaque sandwich à fonctionnellement dégradé. Kolahchi et Al. (2015a)[26] ont étudié l'analyse de flexion de nano-plaques calibrées (FG) basées sur un nouveau cisaillement sinusoïdal théorie de la déformation. Yahia et al. (2015)[27] a étudié la vague propagation

## Introduction générale

---

dans des plaques fonctionnellement dégradée avec porosités utilisant diverses plaques de déformation de cisaillement d'ordre supérieur théories .Le champ de déplacement avec cinq inconnues explique le couplage thermo-mécanique, le temps la dépendance, et le non géométrique de type von Kármán linéarité. Gulshan Taj et al. (2013)[28] ont également utilisé Reddy théorie de la déformation de cisaillement du troisième ordre pour analyser le comportement statique des plaques FG en appliquant la méthode des éléments finis. L'utilisation de la théorie de la déformation de cisaillement d'ordre supérieur (11 inconnues) et modèles d'éléments finis, Talha et Singh (2010)[29] ont étudié la vibration libre et analyse statique des plaques FG. Un plus haut ordre de cisaillement et de déformation normale avec 12 inconnues est utilisé par Jha et al. pour déterminer le naturel fréquence des plaques FG (Jha et al. 2012)[30]. La technique de solution de Navier employant la double série de Fourier est utilisée pour donner la solution analytique. Swaminathan et Naveenkumar (2014)[31] à présenter des formulations analytiques et des solutions pour analyse de stabilité de plaques FG simplement supportées par divers théories de déformation de cisaillement avec douze inconnues du déplacement. **Décrire** l'emballage sur toute l'épaisseur de la plaque lors de la rotation due au cisaillement transversal, Touratier (1991)[32] ont proposé d'utiliser la fonction sinus. Plus tard, Zenkour (2005a, 2005b, 2006, 2009)[33][34][35][36] a utilisé la théorie de la déformation de cisaillement sinusoïdal de Touratier pour étudier le comportement mécanique des plaques FG. Les solutions analytiques pour des analyses de flexion, de flambage et la vibration libre sont présentées dans son travail. La plupart des HSDT mentionnés ci-dessus nécessitent des efforts de calcul supplémentaires en raison de les inconnus qui sont présentés (généralement neuf, onze ou treize inconnues selon la théorie particulière). Dans le travail suivant, un nouveau déplacement d'ordre supérieur champ basé sur douze inconnues de cisaillement d'ordre supérieur la théorie de la déformation est développée. Le nouveau formulaire est dicté par la satisfaction de la disparition de la contrainte de cisaillement transverse à la surface supérieure et inférieure de la plaque. Par cette approche le nombre d'inconnues de déplacement est réduit de douze à huit, économisant ainsi du temps de calcul et optimisant la capacité de stockage des ordinateurs. La précision de la théorie actuelle est vérifiée en comparant avec la précédente études.

# *Chapitre I*

*Sur Les Matériaux A  
Gradients De  
Propriétés*

### I.1. Introduction

Les matériaux à gradient fonctionnel (**F**unctionally **G**raded **M**aterials : FGM) ou les matériaux fonctionnellement gradués sont une nouvelle classe de matériaux composites dont, la microstructure et la composition varient graduellement et continûment avec la position de manière à optimiser les performances mécaniques et thermiques de la structure qu'ils constituent. Ils sont considérés comme des matériaux intelligents dont les fonctions désirées sont intégrées, dès la conception, au cœur même de la matière. À chaque interface, le matériau est choisi selon les applications spécifiques et les charges environnementales. Ces matériaux possèdent de multiples avantages qui peuvent les rendre attractifs du point de vue de leur potentiel d'application. Il peut s'agir de l'amélioration de la rigidité, de la tenue à la fatigue, de la résistance à la corrosion ou de la conductivité thermique en plus d'avoir une gradation des propriétés permettant ainsi d'augmenter ou de moduler des performances telles que la réduction des contraintes locales [37] ou encore l'amélioration du transfert de chaleur [38]. Ce nouveau concept marque le commencement d'une révolution dans les domaines de la science et de la mécanique des matériaux. L'intérêt particulier et grandissant envers les matériaux à gradient fonctionnel, pensés et conçus pour la première fois au Japon, est mis en évidence par les innombrables conférences et publications de qualité dédiées à l'analyse, la conception et la fabrication de ces matériaux.

Une question s'impose : comment ce concept a-t-il germé, et comment l'étude des FGM a-t-elle été lancée ? Aux environs de 1984-1985, dans une université Japonaise, deux chercheurs l'un dans le domaine de l'aéronautique et l'autre dans le domaine des sciences des matériaux rêvent de concevoir un engin spatial dont le revêtement pourrait résister à un environnement thermique très sévère. Il n'existe alors pas de matériau métallique ni de matériau composite capable de répondre à la fois aux exigences environnementales telles que décrites tout en gardant d'excellentes propriétés mécaniques. Ils échangent alors l'idée du concept FGM, autrement dit d'un matériau avec une gradation continue dans la direction de l'épaisseur, passant d'une face totalement métallique vers une face totalement céramique. En 1987, le programme national de recherche et de développement sur les FGM a vu le jour au Japon. Beaucoup de chercheurs des institutions publiques et de l'industrie ont uni leurs efforts pour créer un nouveau type de matériau, principalement pour permettre de construire l'enveloppe extérieure d'une navette intercontinentale commerciale. Le problème principal à résoudre était le flux de chaleur énorme frappant la majorité des surfaces qui sont exposées à

la friction par l'air lors de la période de rentrée de la navette dans l'atmosphère terrestre et en même temps, de protéger l'intérieur contre un surchauffement. Certes, un revêtement céramique aurait pu protéger le fuselage contre les températures qui se développent à la surface, mais on a dû craindre l'action des très grandes contraintes thermoélastiques aux interfaces entre fuselage métallique et sa protection céramique, se rendant compte des différences entre les modules de Young et les conductivités thermiques des deux matériaux. L'idée fut alors de produire une transition douce, donc graduelle entre métal pur et céramique pure appelée matériau à gradient fonctionnel (functionally graded material : FGM). En 1990 a eu lieu la première conférence internationale sur les FGM à Sendai-city au Japon. En 1992, les matériaux à gradient fonctionnel ont été sélectionnés parmi les dix premières technologies de pointe au Japon et actuellement dans le monde entier.

La réussite dans le domaine des matériaux intelligents ne sera possible que par une forte synergie entre les différents secteurs industriels et scientifiques. Certes, le concept FGM a été proposé à l'origine pour répondre aux exigences du domaine de l'aéronautique et de l'aérospatial mais ces matériaux sont utilisés dans la fabrication des outils industriels qui exige une grande rigidité, une grande dureté et une résistance thermique importante. Ils ont également des applications en optoélectronique, particulièrement dans la fabrication des fibres optiques capables de transmettre l'information à de très grandes vitesses. Leur application dans les systèmes de conversion de l'énergie solaire en énergie électrique sera probablement effective dans un futur proche dans notre pays qui a un potentiel énorme dans ce domaine. Les FGM sont également les biomatériaux idéaux pour réparer ou combler les déficiences osseuses éventuelles de notre squelette. Cette technique est aussi applicable dans les centrales nucléaires où la température peut atteindre des valeurs considérables. Actuellement, des lanceurs en FGM sont testés et les résultats sont prometteurs. Outre les applications citées précédemment, les FGM trouvent aussi leurs applications dans les semi-conducteurs et en génie civil [39].

Les poutres et les plaques constituent des éléments de base dans les structures aérospatiales, marines et terrestres, c'est pourquoi un intérêt particulier leur est porté, et bien comprendre leur comportement sous diverses sollicitations est une étape cruciale dans l'analyse structurale. Étant donné que les matériaux à gradient fonctionnel ont été pensés et conçus pour résister à des conditions thermiques sévères, le travail de recherche proposé est justement consacré à l'étude de l'instabilité thermique des plaques FGM.

## **I.2.les matériaux à gradient de propriété FGM**

### **I.2.1 Aperçu historique sur les matériaux à gradient de propriétés**

L'amélioration des performances des pièces structurelles peut conduire à rechercher, au sein d'un même matériau, des propriétés différentes, souvent antagonistes, mais localement optimisées. Le développement des matériaux composites a permis d'associer des propriétés spécifiques à différents matériaux au sein d'une même pièce.

L'optimisation locale de ces propriétés, par association d'un matériau de haute dureté à la surface d'un matériau tenace par exemple, pose alors le problème de l'interface. Par exemple, une couche d'un matériau céramique peut coller à la surface d'une structure métallique pour former un revêtement barrière thermique dans les applications à haute température, la transition brusque dans les propriétés des matériaux à travers l'interface entre les matériaux discrets peuvent entraîner une grande contrainte inter laminaire ou une forte concentration de contraintes qui conduit à la déformation plastique ou de fissuration. Une façon pour surmonter ces effets nuisibles on doit employer un matériau à gradient de propriétés FGM. Ces dernières années, les matériaux à gradients de propriétés ont été développés pour leurs excellentes propriétés mécaniques. Ces matériaux ont de grande performances et capables de résister aux températures ultra hautes. Un groupe de scientifiques, à Sendai (Japon) a proposé pour la première fois le concept FGM en 1984, comme étant un nouveau matériau avec une barrière thermique ou des propriétés calorifuge (isolation thermique). Au début, les FGM ont été conçus en tant que tant que matériaux thermiques de barrières dans les applications aéronautiques et les réacteurs. C'est par la suite que les FGM ont été développé dans le domaine militaire, l'automobile, le biomédicale, l'industrie de semi-conducteur et toutes utilisations dans un environnement à hautes températures.

### **I.2.2. La définition et le concept d'un matériau à gradient de propriété**

Un matériau à gradient de propriété c'est un type de matériaux composés de deux ou plusieurs matériaux relatifs à des fractions volumiques et microstructure qui sont conçues pour savoir une continuité spatiale des variables. Un FGM est produit en changeant sans interruption les fractions de volume dans la direction d'épaisseur pour obtenir un profil bien déterminé.

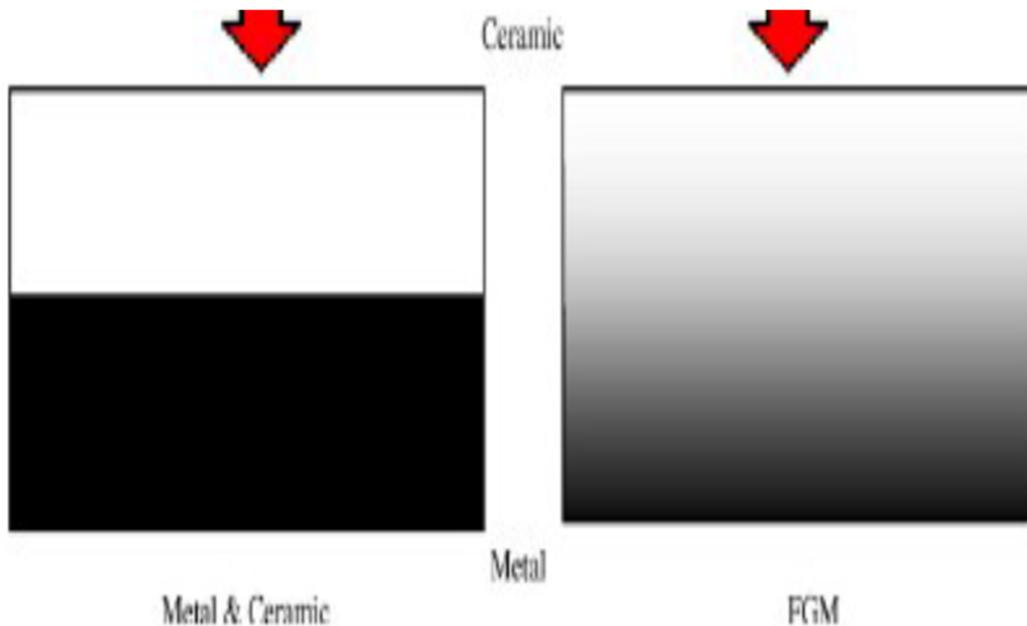
Ces matériaux FGM sont généralement faits à partir d'un mélange de métaux et de céramique (Figure. I.1) par un processus de métallurgie de poudre. Le côté métal riche est

typiquement placé dans les régions où les propriétés mécaniques, comme la dureté, le besoin d'être élevés.

En revanche, la céramique riche, ce qui a la conductivité faible et peut résister aux températures plus élevées, est placé dans les régions de grands gradients de la température.

Le concept de matériaux à gradient de propriété a été développé dans le laboratoire national d'aérospatial en 1984 par un groupe de scientifiques au Japon [40].

L'idée est de réaliser des matériaux utilisés comme barrière thermique dans les structures spatiales et les réacteurs à fusion.



**Figure I.1: un type d'un matériau FGM en céramique et métal**

Les matériaux à gradient de propriété sont donc des matériaux composites avec un caractère au microscope non homogène. Constitué de plusieurs couches contenant des composants différents tels que les céramiques et les métaux. Le changement continu dans la composition et donc dans la microstructure du matériau distingue les FGM (Figure I.2). Des matériaux composites conventionnels. Dans certains cas, on peut avoir un FGM constitué d'un même matériau mais microstructure différente.

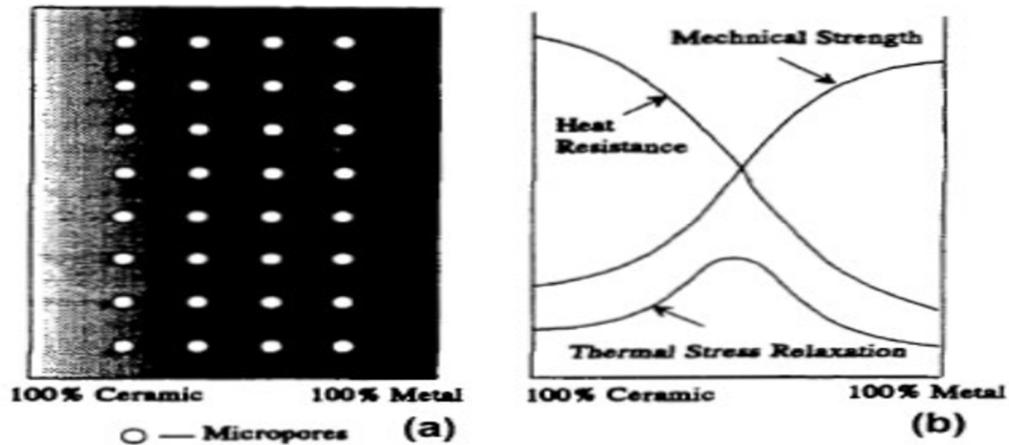


Figure I.2: la variation de la composition d'un FGM

Généralement, les FGM sont des matériaux constitués de plusieurs matériaux à des caractéristiques mécaniques contenant des composantes différentes tels que les céramiques et les métaux. Les vides sont également considérés comme une composante des matériaux FGM [41]. Ils sont donc des composites présentant des caractéristiques macroscopiquement non homogènes.

La plupart des FGM sont constitués des céramiques et des métaux dont les propriétés mécaniques sont comparées dans le tableau I.1.

Tableau I.1 : comparaison entre les propriétés de la céramique et du métal

La face à haute température	Céramique	-bonne résistance thermique. -bonne résistance à l'oxydation. -faible conductivité thermique.
Continuité du matériau d'un point à l'autre « couche intermédiaire »	Céramique-métal	-élimination des problèmes de l'interface ; -relaxer les contraintes thermiques.
La face à basse température	Métal	-bonne résistance mécanique. -conductivité thermique Élevée. -très bonne ténacité.

FGM peuvent être utilisés pour différentes applications, telles que couches en céramique barrières thermiques pour les moteurs, turbines à gaz, couches minces en optiques...etc.

D'autres applications potentielles de ce matériau sont diverses et nombreuses, elles ont été récemment, rapporté dans la littérature ouverte par exemple, des sondes des déclencheurs des armures métal \ céramique, des détecteurs photoélectriques et des implants dentaires un certain nombre de revues traitant les différents aspects de ce matériau ont été éditées pendant les deux dernières décennies. Il a été montré dans ces revues que la majorité des recherches récentes en FGM sont concentrés sur l'analyse mécanique de la rupture ainsi que sur les contraintes thermiques.

Dans l'avenir, les FGM avec des propriétés des formes complexes x, y compris les deux et gradients en trois dimensions, seront produits en utilisant la fabrication assistée par ordinateur.

Ce potentiel signifie que le concepteur n'est plus limité à une palette du matériel existant homogène. Bien que beaucoup de recherches aient été consacrées à l'analyse des FGM, les ingénieurs et autres professionnels engagés dans le processus de conception avec les FGM manquent de cadre unifié pour la prise de décisions concernant la façon de tirer le meilleur parti du choix possible en fonction de ce "menu" d'ingrédients produits et de matières disparates [42].

### **I.3. L'intérêt d'utilisation d'un FGM**

Il y a beaucoup d'intérêt pour la mise sur pied des structures ainsi les conditions fonctionnelles peuvent varier avec l'endroit. Dans la plupart des cas, ceci impliquera de varier les matériaux qui sont employés aux endroits spécifiques dans la structure ayant pour résultat les interfaces discrètes dans tout. À nombre de proposer des techniques manufacturières pour le traitement de FGM [42].

Récemment, les concepts de FGM sont devenus d'intérêts scientifiques pour améliorer l'exécution des systèmes géométriquement complexes des structures.

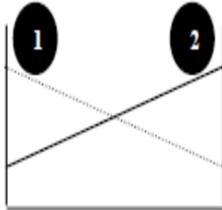
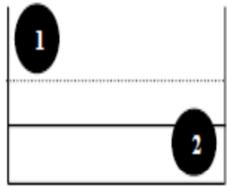
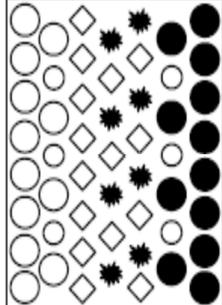
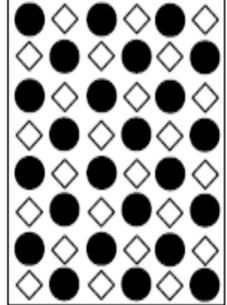
**I.3.1. Différence entre FGM et les matériaux composites traditionnels**

Un modèle simple illustrant les différences entre les matériaux à gradient de propriété (FGM) et les matériaux plus conventionnels est montré sur (Figure I.3) : (a) un matériau plan composé, (b) un matériau relié et (c) un matériau à gradient de propriété.

Le matériau plan composé à une caractéristique plane, et le matériau relié à une frontière sur l'interface de deux matériaux.

Les FGM ont d'excellentes caractéristiques qui diffèrent de ceux des matériaux plans composés et reliés. Par conséquent, les FGM attirent l'attention en matière de leur application dans les domaines industriels. Puisque les FGM ont une double propriété des deux matières premières qui sont mélangés ensemble, et la distribution composante est graduée sans interruption.

**Tableau I.2 :** Caractéristiques des matériaux composites FGM en comparaison avec les matériaux composites conventionnels

<p><b>Propriétés</b></p>	<p>1 Résistance mécanique</p> <p>2 Conductivité thermique</p>		
<p><b>Structure</b></p>	<p>Eléments constitutants:</p> <p>céramique ○</p> <p>métal ●</p> <p>microporosité ◊</p> <p>fibre *</p>		
<p><b>Matériaux</b></p>	<p>exemple</p>	<p>FGM</p>	<p>NON-FGM</p>

Par exemple, l'un des FGM qui se composent du métal et en céramique a la caractéristique de la conductivité thermique et de la force métallique dans le côté en métal et la résistivité aux hautes températures dans le côté en céramique [43].

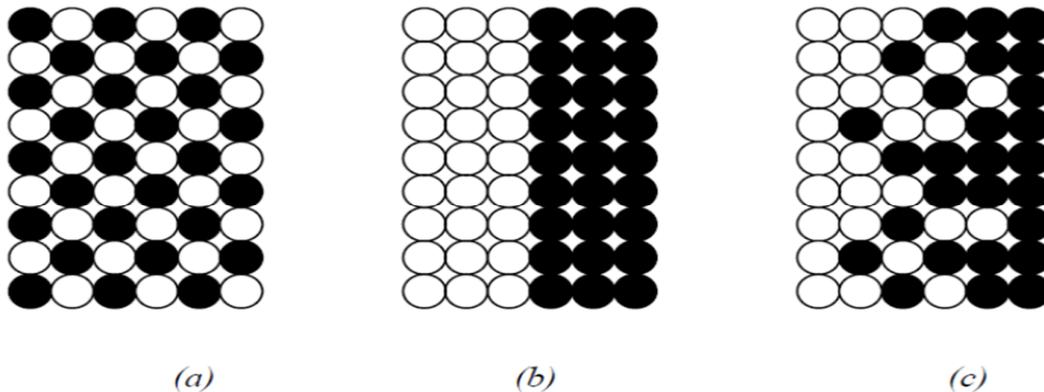


Figure I.3: La distribution composante des matériaux

Matériau plan composé (a), Matériau relié (b), Matériau à gradient de propriété (c).

### I.3.2. Procédés de fabrication FGM

L'utilité des composites à gradient de propriété avec une structure à gradient a été identifiée dans les articles théoriques.

Cependant, leurs travaux n'ont qu'un effet limité, probablement en raison d'un manque de méthodes de production appropriées pour FGM à ce moment-là. Cela a pris 15 ans supplémentaires jusqu'à ce que la recherche systématique sur des processus de fabrication pour les matériaux à gradient de propriétés ait été effectuée dans le cadre d'un programme de recherche national sur les FGM au Japon.

Depuis lors, une partie de la recherche sur FGM a été consacrée au traitement de ces matériaux et une grande variété de méthodes de production a été développée.

Le processus de fabrication d'un FGM peut habituellement être divisé en établissant la structure dans l'espace non homogène « gradation » et la transformation de cette structure en matériau en bloc « consolidation ». Des processus constitutifs sont basés sur un habillage par étapes de la structure graduée à partir des matériaux de précurseur ou des poudres. Les principaux procédés disponibles de nos jours pour la production des matériaux FGM :

- Coulage séquentiel en barbotine (Slip casting),
- Coulage en bande (Tape casting),

- Projection thermique (plasma),
- Dépôt chimique et physique en phase vapeur (CVD et PVD)
- Les frittages laser différentiel sont les plus importants. [44]

#### **I.4. Les méthodes d'élaboration des FGM**

Les procédés de fabrication d'un matériau à gradient évalué peuvent habituellement être divisés en construisant la structure dans un espace hétérogène (mélange graduel) et transformation de cette structure en un seul matériau (solidification). Les processus de mélange graduels peuvent être classés dans les constituants, l'homogénéisation et la ségrégation. Les procédés élémentaires sont basés sur la fabrication par étapes de structure en matériaux graduels précurseurs ou poudres.

Les avancées en technologie d'automatisation pendant les dernières décennies a rendu des processus élémentaires de progression technologiquement et économiquement durable. Dans la procédure d'homogénéisation qui traite une interface pointue entre deux matériaux est convertie dans un gradient par transport matériel.

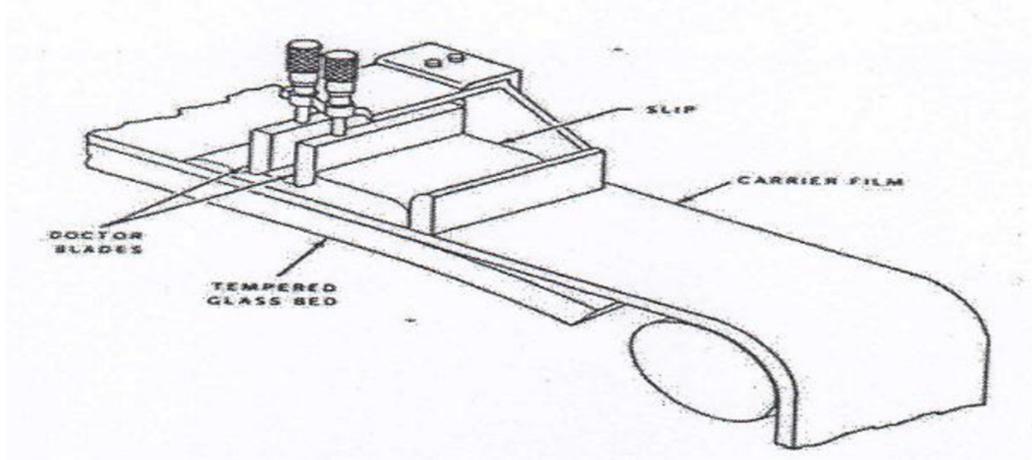
Les procédés d'homogénéisation et de ségrégation produisent un gradient continu, mais ont des limitations au sujet des types de gradients qui peuvent être produits. Habituellement le séchage et la solidification suivent les étapes du mélange graduel. Le besoin de ces processus de consolidation doit être adapté aux FGM. Une attention particulière doit être également prêter au rétrécissement inégal de FGM pendant la consolidation [45].

Dans ces dernières années, les travaux menés par les chercheurs ont permis de développer une méthode originale pour élaborer des composites à gradient continu de composition. Cette méthode est basée sur une technique de Co-Sédimentation de poudres en milieu proportionnel à la densité du matériau et au carré du diamètre de particule. En contrôlant et en adaptant les répartitions granulométriques de chaque poudre, il est possible d'obtenir différents gradients de concentration dans le dépôt formé à l'issue de sédimentation.

Il existe de nombreuses méthodes d'élaboration des matériaux à gradients évalués, les techniques les plus employées sont brièvement expliquées ci-dessous.

### I.4.1. Coulage en Bande (Tape Casting Ou Doctor-Blade)

Le coulage en bande consiste à couler une barbotine de poudres fines en suspension aqueuse ou non aqueuse (la plupart des travaux commerciaux utilisent le procédé non aqueux) sur un support plan en couches minces et régulières (figure 1.4). Les produits obtenus sont des feuillets avec des épaisseurs contrôlées (25 —1000 $\mu$ m). Après un raffermissement de la pâte, les feuillets sont démoulés et ensuite découpés.



**Figure I.4 Principe de la Méthode de Coulage en Bande**

Le solvant doit avoir un point d'ébullition très bas et une viscosité faible. Il doit être soluble avec le liant, le plastifiant et les autres ajouts, mais ne doit être ni soluble ni réactif avec la poudre céramique. Le liant donne une grande résistance mécanique au produit crut en permettant son maniement. Généralement un plastifiant est ajouté au liant pour baisser sa viscosité.

Le liant, le plastifiant et le dé flocculant doivent être totalement dégagés pendant le délainage.

Le procédé de coulage en bande est largement utilisé pour réaliser des matériaux composites laminaires suivant deux méthodes : soit par réalisation directe de bandes multicouches grâce à un système de lames multiples, c'est le cas des tris-couches élaborés par Mistler [46] ; soit par empilage de couches élaborées séparément, dont la cohésion est ensuite assurée par une étape de thermo compression [47].

### **I.4.2. Coulage Séquentiel en Barbotine (Slip Casting)**

Le coulage en barbotine (Slip Casting) consiste à couler une suspension dans un moule poreux qui va drainer le liquide grâce aux forces capillaires, laissant un tesson (couche de poudre compacte) sur la surface du moule. Après séchage, on obtient le corps en cru.

Donc le coulage se décompose en deux étapes essentielles :

- Formation du tesson ou "prise".
- Consolidation du tesson ou "raffermissement".

La filtration, c'est-à-dire la formation du tesson lors du coulage, peut être considérée comme un processus d'élimination d'une partie de l'eau de la barbotine ; cette eau migre à travers la couche de tesson déjà formée, sous l'effet :

- Du pouvoir de succion de la plate (coulage classique).
- Ou d'une pression appliquée sur la barbotine (coulage sous pression).

Dans le cas de la fabrication de multicouches, après la formation du premier tesson le dépôt de la deuxième couche s'effectue de manière telle que la barbotine ne pénètre pas dans le tesson formé. Ce procédé est successivement reproduit pour les autres couches.

### **I.4.3. Dépôt par Électrophorèse**

Un autre processus est ajouté aux différentes techniques de la fabrication des FGM, ce qu'on appelle le dépôt par électrophorèse (EPD) est un processus assez rapide à faible coût, capable de produire les matériaux à gradient de propriété changeant sans interruption avec la géométrie complexe. EPD se compose de deux processus, c'est-à-dire le mouvement des particules chargées en suspension dans un champ électrique entre deux électrodes (électrophorèses) et le dépôt de particules sur l'une des électrodes [48]. EPD permet la conception des matériaux à gradient de propriété en forme de plaque binaire en déposant +d'une suspension de poudre à laquelle une deuxième suspension est sans interruption ajoutée pendant le processus. Le dépôt est un contrat de poudre emballée étroite qui a besoin de l'agglomération pour réaliser les composants matériels entièrement denses.

**I.4.4. Compaction Sèche des Poudres**

Cette technique consiste à verser successivement dans un moule en acier les poudres, et à chaque fois qu'une poudre est versée une faible compression est exercée. Ensuite la compaction de l'ensemble des couches sera effectuée. Ce procédé est suivi généralement par une pression isostatique et un délainage. La densification sera enfin l'étape finale. Ce procédé peut être envisagé pour la fabrication de pièces de formes complexes. En effet il s'applique aussi avec la technique du pressage isostatique, et de façon industrielle.

**I.4.5. Projection plasma**

Un gaz soumis à une forte température (par exemple celle d'un arc électrique), se transforme en un état ionisé (plasma). Cette transformation est accompagnée d'un dégagement de chaleur important. Si une particule de céramique se trouve dans cet environnement, elle se fond totalement ou superficiellement, ce qui permet de la situer sur un substrat.

La projection plasma des particules des divers matériaux est devenue une méthode très utilisée pour fabriquer des FGM. L'équipement relativement simple, le rendement élevé du dépôt des particules sur des substrats à géométrie compliquée, les performances des surfaces en fonctionnement et la compatibilité des céramiques avec les métaux sont les avantages essentiels de cette technique.

**I.4.6 C. V. D. et P. V. D.**

Les dépôts chimiques ou physique en phase vapeur est des techniques dans lesquelles les atomes du matériau source sont déposés sur la surface du substrat.

Les techniques de C.V.D. et P. V. D. peuvent être utilisées pour la préparation de F.G.M sur des substrats de formes compliquées.

**I.4.7. Frittage et Infiltration**

Cette technique est constituée de deux étapes et convient à la fabrication d'un composite à gradient de fonction composé de deux matériaux dont les températures de fusion sont très différentes. La première étape est de fabriquer une matrice frittée du matériau à haute température de fusion avec un gradient de porosité. La seconde est de remplir ces porosités avec le deuxième matériau fondu par infiltration. Le résultat est excellent pour la diminution de la contrainte thermique.

Cette technique peut être généralement appliquée pour plusieurs combinaisons de matériaux qui sont chimiquement inertes et qui ont des points de fusion bien différents les uns par rapport aux autres.

#### I.4.8. Frittage Laser Différentiel

Le rayonnement thermique du laser permet le contrôle de la température et la focalisation du point à chauffer. La différence de l'intensité de l'irradiation sur différents points du matériau, provoque un frittage différentiel le long de la pièce, ce qui résulte en des microstructures différentes, dépendant de la position du point irradié ont utilisé cette technique pour élaborer un F.G.M de PSZ/Mo. La figure I.5 montre schématiquement la disposition du procédé utilisé par ces auteurs [49].

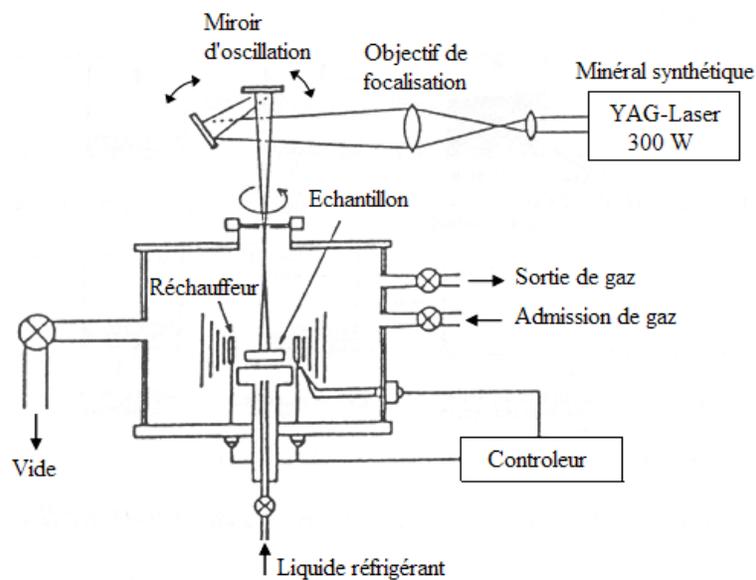


Figure I.5 schématiquement la disposition du procédé utilisé par ces auteurs

#### I.4.9. Implantation Ionique (Sputtering)

C'est une technique avancée pour la fabrication des F.G.M permettant de réaliser seulement des épaisseurs fines ( $<1\mu\text{m}$ ) sur différents substrats (plastiques, céramiques, et métaux). Le traitement s'effectue par les faisceaux énergétiques d'ions ou via des gaz réactifs.

Les couches fabriquées présenteront un gradient de composition qui peut être très finement contrôlé.

#### I.4.10. Dépôt par Centrifugation

La technique consiste à verser une suspension colloïdale relativement diluée dans des flacons cylindriques, le tout est soumis à une centrifugation. La sédimentation s'opère et le liquide surnageant est retiré. Ce procédé est répété pour obtenir des multicouches (figure I.6)

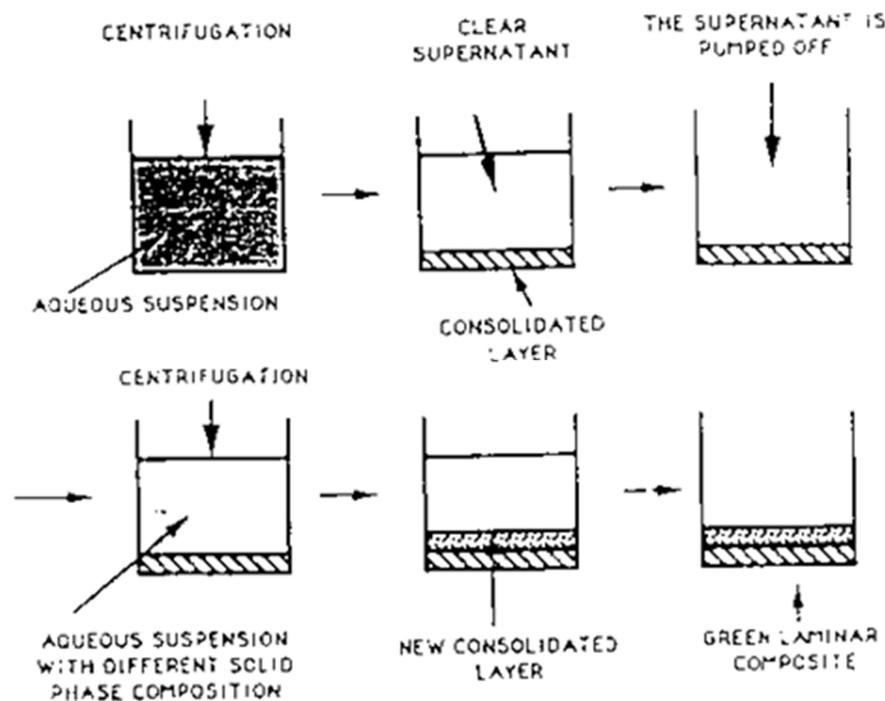


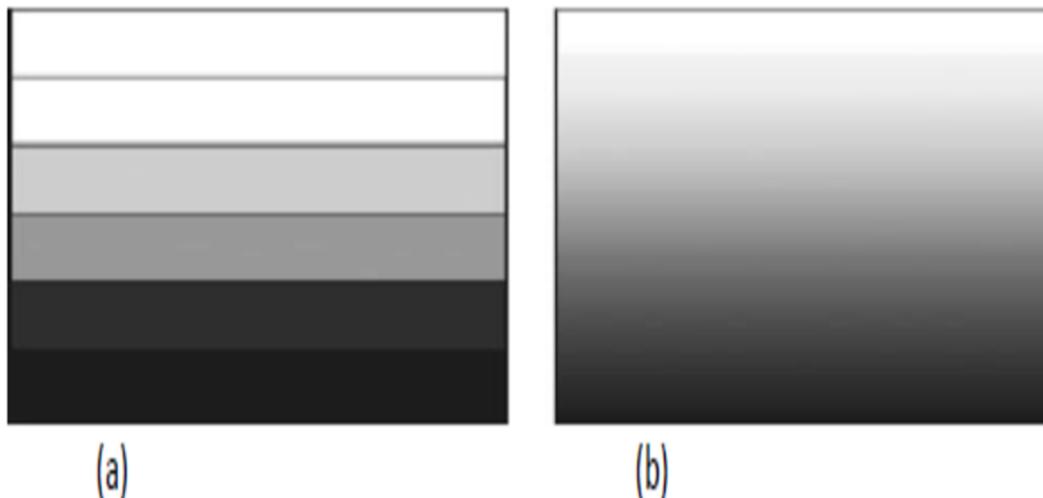
Figure I.6 schéma du procédé dépôt par centrifugation

#### I.5. Propriétés matérielles effectives d'un matériau FGM

Les matériaux à gradient de propriété sont généralement fabriqués par deux phases matérielles avec des propriétés différentes. Une description détaillée des microstructures graduées réelles n'est pas disponible, excepté peut-être pour l'information sur la distribution de fraction volumique. Puisque la fraction de volume de chaque phase varie graduellement dans la direction de la graduation, les propriétés effectives des FGM changent le long de cette direction.

Par conséquent, nous avons deux approches possibles pour modéliser un FGM.

- La première approche : une variation par tranche de fraction volumique de la céramique ou du métal est assumée, et le FGM est pris pour être posé avec la même fraction de volume dans chaque région, c.-à-d., couches quasi homogènes de céramique-métal.
- La deuxième approche : une variation continue de la fraction volumique de la céramique ou du métal est assumée (figure. I.4), et la fraction de volume en métal peut être représentée suivant une fonction dépendante de la coordonnée Z (épaisseur) [50].



**Figure. I.7 : Modèles analytiques pour une couche en FGM.**

### **I.6. Revue sur les différentes lois qui régissent la variation des propriétés matérielles**

Suivant l'épaisseur d'une plaque FGM. Considérant une plaque élastique rectangulaire (figure.I.7.). Les coordonnées  $x$  et  $y$  définissent le plan de la plaque, tandis que l'axe  $z$  lancé sur la surface moyenne de la plaque est dans la direction de l'épaisseur.

Les propriétés matérielles comme suite : le module d'Young, la densité et le coefficient de Poisson, sur les surfaces supérieures et inférieures sont différents mais sont déterminés selon les demandes d'exécution.

Cependant, le module d'Young, la densité et le coefficient de Poisson des plaques changent sans interruption seulement dans la direction d'épaisseur (l'axe  $z$ )

$$E = E(z), \rho = \rho(z), \nu = \nu(z)$$

Et ont indiqué que l'effet du coefficient de Poisson sur la déformation est beaucoup moins important que celui du module d'Young. Donc, on suppose que le coefficient de Poisson de la plaque F.G.M est constant dans tout point de la plaque,

D'ailleurs cette propriété est sensiblement la même pour les matériaux avec lesquels on va travailler. Alors le module d'Young et la densité changent dans la direction de l'épaisseur de la plaque FGM suivant une fonction de loi de puissance (P-FGM), une fonction exponentielle (E-FGM), ou une fonction sigmoïde (S-FGM). [51].

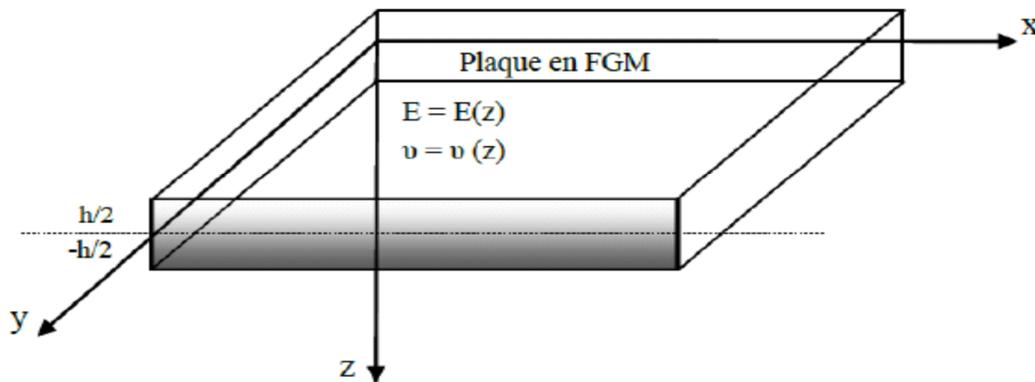


Figure I.8 Les dimensions de la plaque FGM.

### I.6.1. Propriétés matérielles de la plaque P-FGM

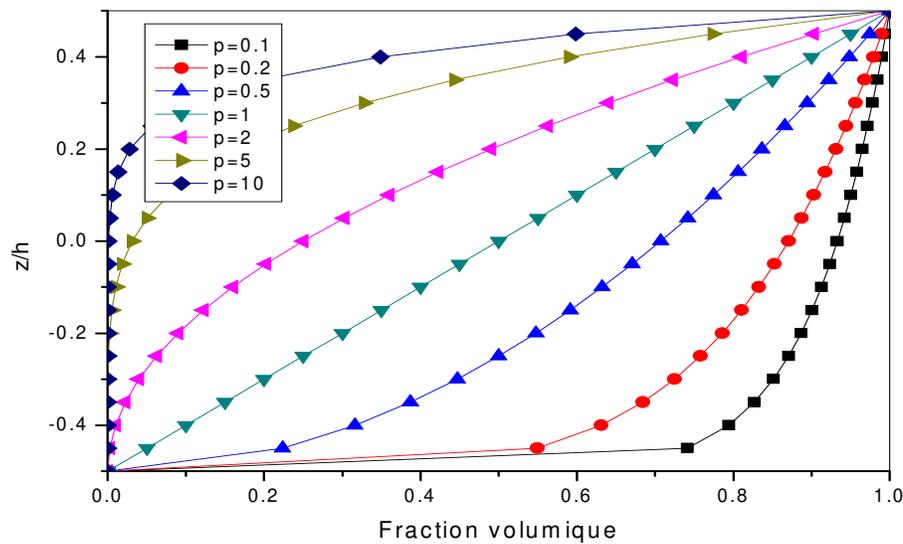
La fraction volumique de la classe P-FGM obéit à une fonction en loi de puissance.

$$V(z) = \left( \frac{z + h/2}{h} \right)^k \quad (\text{I.1})$$

Où  $k$  est un paramètre matériel et  $h$  est l'épaisseur de la plaque. Une fois la fraction volumique locale  $\nu(z)$  a été définie, les propriétés matérielles d'une plaque P-FGM peuvent être déterminées par la loi des mélanges [46] :

$$E(z) = E_m + (E_c - E_m)V(z) \quad (\text{I.2})$$

Où  $E_1$  et  $E_2$  sont respectivement les modules d'Young de la surface inférieure ( $z = -h/2$ ) et de la surface supérieure ( $z = h/2$ ) de la plaque FGM, la variation du module d'Young dans la direction d'épaisseur de la plaque P-FGM est représentée sur la (figure I.9), il apparaît clairement que la fraction volumique change rapidement près de surface inférieure pour  $k < 1$ , et augmenté rapidement près de la surface supérieure pour  $k > 1$ .



**Figure I.9: Variation de la fraction volumique dans une plaque P-FGM.**

### I.6.2. Propriétés matérielles de la plaque S-FGM

Dans le cas d'ajouter une plaque P-FGM d'une simple fonction de loi de puissance à une plaque composite multicouche, les concentrations des contraintes apparaissent sur l'interface où le matériau est continu mais change rapidement [53]. Par conséquent, Chung et chi [54] ont défini la fraction de volume de la plaque FGM en utilisant deux fonctions de loi de puissance pour assurer une bonne distribution des contraintes parmi toutes les interfaces.

Les deux fonctions de loi de puissance sont définies par :

$$V_1(z) = \frac{1}{2} \left( \frac{h/2+z}{h/2} \right)^k \text{ Pour } -h/2 \leq z \leq 0 \quad (\text{I.3.a})$$

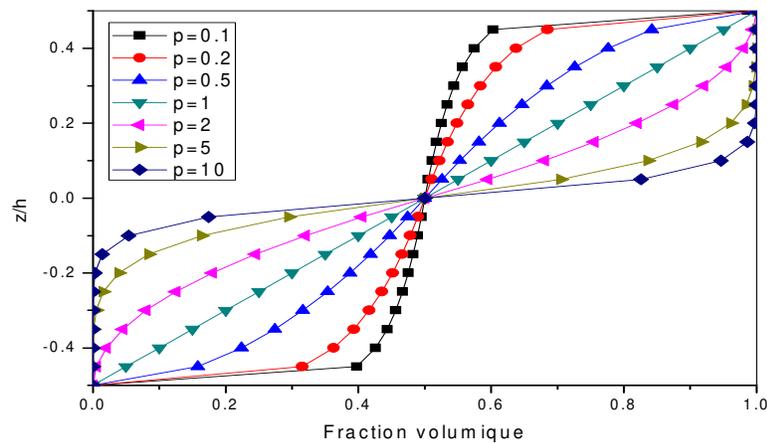
$$V_2(z) = 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{h/2-z}{h/2} \right)^k \text{ Pour } 0 \leq z \leq h/2 \quad (\text{I.3.b})$$

En utilisant la loi des mélanges, le module d'Young de la plaque S-FGM peut être calculé par :

$$E(z) = V_1(z)E_1 + [1-V_1(z)]E_2 \text{ Pour } -h/2 \leq z \leq 0 \quad (\text{I.4.a})$$

$$E(z) = V_2(z)E_1 + [1-V_2(z)]E_2 \text{ Pour } 0 \leq z \leq h/2 \quad (\text{I.4.b})$$

La (figure I.9) montre que la variation de la fraction volumique dans les équations (I.4.a) et (I.4.b) représente les distributions sigmoïdes, et cette plaque FGM est appelée (Plaque S-FGM).



**Figure I.10: Variation de la fraction volumique dans une plaque S-FGM.**

### I.6.3. Les propriétés matérielles de la poutre E-FGM

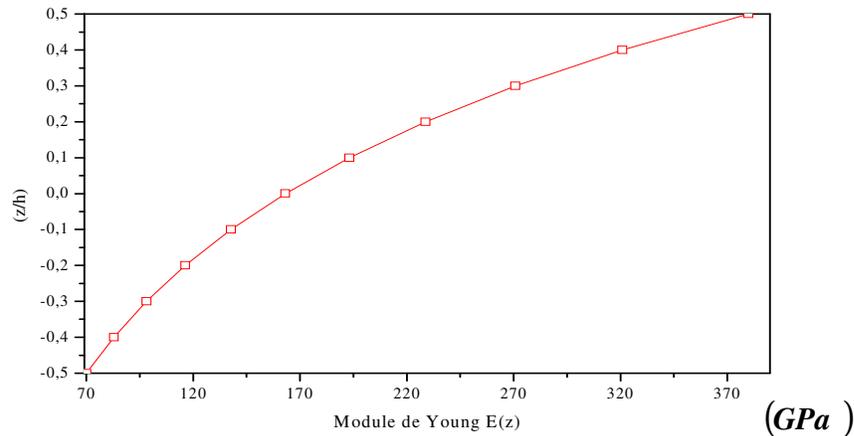
Pour décrire les propriétés matérielles des matériaux FGM, la plupart des chercheurs utilisent la fonction exponentielle qui s'écrit sous la forme, [55] :

$$E(z) = E_2 e^{B(z+h/2)} \quad (\text{I.5.a})$$

Avec

$$B = \frac{1}{h} \ln \left( \frac{E_1}{E_2} \right) \quad (\text{I.5.b})$$

La variation du module d'Young à travers l'épaisseur de la plaque E-FGM est représentée dans la (figure I.11).



**Figure I.11: Variation du module d'Young dans une plaque E-FGM**

### I.7. Propriétés physiques et mécaniques des FGM

Pour ce travail le matériau FGM choisi est (Aluminium- Alumine). L'aluminium est un métal blanc qui après polissage peut devenir réfléchissant.

Les propriétés physiques : l'aluminium à une température de fusion relativement basse d'environ 660°. Il en résulte une facilité de fusion qui présente un avantage certain pour les opérations de fonderie.

L'aluminium est très ductile, on peut aisément le mettre en forme.

La masse volumique de l'aluminium est de 2700 kg/m<sup>3</sup>. L'utilisation de l'aluminium s'impose donc dans les domaines aéronautiques et du transport. [42].

Les propriétés mécaniques des métaux présentent un grand intérêt dans la vie quotidienne, elles peuvent être classées en deux groupes [42] :

Celles qui se rapportent à la résistance mécanique du métal :

- Résistance à la traction.
- Résistance à la pénétration (dureté).

Celles qui concernent les modifications de forme que le métal peut subir sans se briser :

- La malléabilité (mise en feuilles).
- La ductilité (mise en fils).

### **I.7.1. Propriétés des alliages d'aluminium**

L'Aluminium a pour propriétés une :

- Température de travail élevée.
- Très bonne résistance à la corrosion.
- Légèreté.
- Très bonnes solidités, dureté et rigidité.
- Bon rapport force/poids.
- Bonnes propriétés de protection contre les interférences électromagnétiques.
- Bonne conductivité thermique.
- Conductivité électrique élevée
- Entièrement recyclable.
- Bonnes caractéristiques de finition.

**I.7.2. Résistance à la corrosion**

Grâce à la couche d'oxyde qui se forme en surface, les alliages d'aluminium résistent à la corrosion. On peut rendre cette couche protectrice d'oxyde plus épaisse par galvanisation.

L'aluminium et ses alliages peuvent être utilisés sans protection supplémentaire comme revêtement extérieur de bâtiments.

Par contre dans les milieux corrosifs, les alliages d'aluminium peuvent subir les effets de la corrosion.

Des piqûres, de la corrosion sous contrainte, de la fatigue corrosion, voire de la corrosion généralisée peuvent se développer.

Pour des conditions données, la sévérité de l'attaque dépend de l'alliage utilisé et de son état [56].

**I.7.3. Propriété physique de céramique**

La céramique résulte des terres et des roches broyées (matériaux géologiques) ou bien d'une argile qui sera modelée puis cuite sous haute température (transformation irréversible) ce qui fait perdre au matériau sa plasticité donc il ne peut plus se réhydrater [42].

La céramique a une facilité de fusion qui présente un avantage certain pour les opérations de fonderie.

La masse volumique de la céramique est de 3800 kg/m<sup>3</sup>.

L'utilisation de la céramique s'impose dans les domaines de l'habitat et du design, l'industrie céramique et métallurgique, aéronautique et spatial, médicale et dans les revêtements [56].

**I.7.4. Propriété mécanique de céramique**

Les propriétés mécaniques de la céramique dépendent des :

- Matière première employées.
- Méthodes de fabrication qui fixent les microstructures finales et déterminent la répartition des différentes phases en présence.

**I.7.5. Propriété de céramique**

Les propriétés de la céramique sont :

- Un module d'Young élevé.

Une dureté élevée (surfaces de frottement qui doivent

- Résister à l'usure, résistance mécanique élevée, bonne tenue à chaud, rigidité élevée).
- Une très bonne résistance à la compression non à la traction (Résistance à la compression = 200MPa) [42]

### **I.8. Domaine d'application des FGM**

On trouve une littérature très importante sur l'utilisation de ce matériau. Cependant, l'utilisation des structures en FGM dans les environnements avec de grands changements de température exige la connaissance des déformations, le matériau FGM peut être utilisé dans plusieurs domaines tels qu'en [42] [56].

- **Aéronautique**

- ✓ L'amélioration des engins spatiaux.
- ✓ Création de barrières thermiques.

- **Electronique et optique)**

- ✓ Fibres optiques avec une grande vitesse de transmission.
- ✓ Les circuits d'ordinateurs.
- ✓ Les téléphones cellulaires.

- **Biomatériaux**

- ✓ Dents.

- **Industrie**

- ✓ Les machines.
- ✓ Les outils.
- ✓ Soudure.
- ✓ Structure.

➤ **Génie civil :**

- ✓ ***Les joints dans la charpente métallique*** : Lors de l'assemblage des éléments, on est obligé de réaliser des soudures entre les éléments de nature différente (acier/aluminium). L'utilisation des joints en FGM est une solution optimale.
- ✓ ***Protection des structures métalliques soumises à un environnement thermique sévère*** : Les industriels utilisent souvent un revêtement en céramique, matériau résistant à la chaleur et faible conducteur thermique.
- ✓ ***Contrôle de la réponse sismique par FGM piézoélectrique*** : Afin de minimiser les déplacements et d'éviter les dégâts dû aux séismes.
- ✓ ***Centrales thermiques.***
- ✓ ***Dans les chaussées rigides*** : Les FGM sont utilisés dans les chaussées rigides en béton avec une gradation obtenue par la variation de la fraction volumique de fibres, cette technique est utilisée dans les autoroutes et les routes à très fort trafic où l'utilisation d'une chaussée souple en béton bitumineux est déconseillée à cause de la température élevée.
- ✓ ***Les grandes vitres des grattes de ciel*** : Les vitres sont en FGM pour contrôler la température dans les zones chaudes et éviter les vitrages multiples.
- ✓ ***Les tunnels*** : La paroi intérieure des tunnels doit être réalisée en matériau réfractaire et rigide et d'un matériau imperméable dans la surface en contact avec le sol et les roches.
- ✓ **Ponts à poutre en caisson, les cheminées, les fondations élastiques** (ces structures de plaques peuvent être trouvées dans différents d'applications industrielles telles que radiers), réservoirs de stockage, les piscines.

➤ **Chimique**

- ✓ L'échangeur de chaleur.
- ✓ Tube de chaleur.
- ✓ Récipient de réaction.

➤ **L'énergie nucléaire**

- ✓ Composante des réacteurs nucléaires.
- ✓ Pastilles de combustible.

➤ **Conversion**

- ✓ Générateur thermoélectrique.
- ✓ Convertisseur thermoïonique.
- ✓ Pile à combustible.

➤ **Produits en générale**

- ✓ Matériaux de constructions.
- ✓ Cors de voiture.
- ✓ Verres de fenêtre.

➤ **Autres**

- ✓ Cartes mémoires.
- ✓ Batte de Baseball

## **I.9. Conclusion**

Nous avons vu dans ce chapitre une brève introduction aux matériaux à gradient de propriété FGM, d'où une vue sur l'historique de leur développement, leur propriété. Et puis en est passé à décrire les différentes lois qui régissent la variation des propriétés matérielles (module d'Young, la masse volumique, coefficient de poisson), ces lois peuvent être de puissance, exponentielles ou même sigmoïdes. À la fin nous avons terminé, par les propriétés physiques et mécaniques des matériaux FGM et leurs domaines d'application. Le chapitre suivant va porter sur les différentes théories des plaques applicables aux structures FGM.



***Chapitre II***  
***Les Théories Des***  
***Plaques FGM***

### II.1. Introduction

Nous présentons dans ce chapitre quelques modèles sur les théories des plaques développées dans la littérature pour améliorer l'évolution de la variation du champ des déplacements à travers l'épaisseur des plaques.

Afin de résoudre les problèmes des structures ayant comme éléments structuraux des poutres et des plaques FGM dans le domaine élastique, il est nécessaire de choisir la bonne théorie décrivant correctement le comportement statique et dynamique de la structure ainsi que la méthode de résolution à appliquer.

C'est en 1888 que Love utilisa les hypothèses de Gustav Kirchhoff, elles-mêmes inspiraient des hypothèses d'Euler-Bernoulli pour fonder une théorie des plaques minces (également appelée théorie classique ou théorie de Kirchhoff-Love). La théorie des plaques semi-épaisses (théorie des déformations du premier ordre) a été consolidée par Mindlin à partir des travaux de Timoshenko (1959) [57], Reissner (1945) [60].

Ensuite, des théories d'ordre supérieur sont venues améliorer les hypothèses des théories classiques et du premier ordre lorsque l'épaisseur de la plaque devient importante. Il existe aussi la théorie basée sur l'élasticité tridimensionnelle (théorie 3-D) qui ne fait aucune hypothèse restrictive sur les déplacements de la plaque.

Un matériau FGM est un type de matériaux composites classé par leur microstructure variable dans l'espace, conçu pour optimiser l'exécution des éléments de structures par la distribution de propriétés correspondantes. Les distributions de propriétés sont trouvées dans une variété de produits communs qui doivent avoir des fonctions multiples (c'est-à-dire multifonctionnelles) comme les liaisons entre les particules qui doivent être assez dures à l'intérieur pour résister à la rupture mais doivent également être assez dures sur l'extérieur pour empêcher l'usure. Une structure FGM peut être considérée comme un corps hétérogène. La caractéristique géométrique d'une plaque est une épaisseur faible par rapport aux autres dimensions.

L'intérêt d'une approche tridimensionnelle réside dans l'obtention de résultats exacts tridimensionnels, utiles notamment comme référence. L'adoption d'une approche tridimensionnelle ne présente toutefois d'utilité que dans la mesure où les équations différentielles finalement obtenues peuvent être résolues. L'approche tridimensionnelle (3D) est donc limitée à certains cas de géométrie, empilement et chargement simple. Là encore une approche (3D) peut fournir des informations dans certains cas (bord libre droit, plaque

simplement appuis...) mais il est préférable d'envisager des démarches bidimensionnelles (2D) de type plaque plus opératoires. Dans la suite ce sont ces approches 2D qui seront mentionnées.

## II.2. Modèles analytiques des plaques

### II.2.1 La théorie classique des plaques minces de Love-Kirchhoff (CPT)

On parle d'une plaque mince, lorsque la flèche générée par les déformations de cisaillement reste négligeable devant la flèche générée par la courbure de la plaque.

Dans le cas d'une plaque homogène isotrope, la part de cisaillement dans la flèche est directement reliée à l'élancement ( $L/h$ ).

La théorie classique des plaques minces (CPT) se base sur les hypothèses de Love-Kirchhoff, selon lesquelles une droite normale au plan moyen de la plaque reste perpendiculaire après déformation (figure II.1), ce qui revient à négliger les effets de déformation en cisaillement transverse. Ce modèle de plaque peut être référé à [57] et [58]

En se basant sur les hypothèses ci-dessus, le champ de déplacement est donné par :

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} \\ w(x, y, z) &= w_0(x, y) \end{aligned} \quad (\text{II.1})$$

Avec ( $u_0, v_0, w_0$ ) sont les composantes du champ de déplacement sur le plan moyen de la plaque ( $z = 0$ )

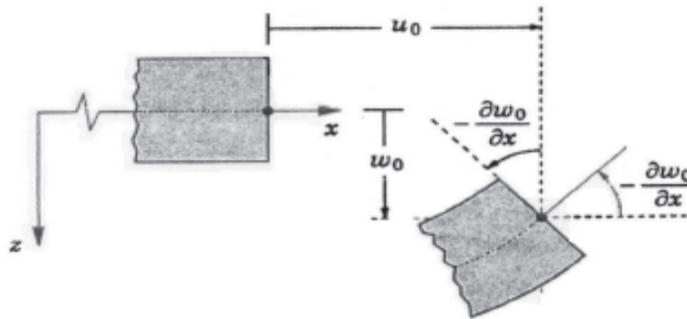


Figure II.1 : Illustration de la plaque de Love-Kirchhoff

Puisque ce modèle ne tient pas en compte l'effet de cisaillement transverse, il donne des résultats non précis pour les plaques épaisses.

### II.2.2. Théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT)

La théorie de déformation de cisaillement du premier ordre à prolonger la théorie classique des plaques en tenant compte de l'effet de cisaillement transverse. Dans ce cas les contraintes et les déformations sont constantes à travers l'épaisseur de la plaque, ce qui nécessite l'introduction d'un du facteur de correction de cisaillement. Les études sur la théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT) peuvent être trouvées dans les références [60] [61].

La théorie du premier ordre est basé sur le champ de déplacement suivant :

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) + z\phi_x(x, y), \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) + z\phi_y(x, y), \\ w(x, y, z) &= w_0(x, y), \end{aligned} \tag{II.2}$$

Avec :  $(u_0, v_0, w_0)$  et  $(\phi_x, \phi_y)$  sont les déplacements en membrane et les rotations autour des axes  $x$  et  $y$ , respectivement.

Le champ de déplacements définis dans l'expression ci-dessus permet de reprendre la théorie classique des plaques décrite dans la dernière section par le remplacement de

$$\phi_x = -\frac{\partial w_0}{\partial x}, \quad \phi_y = -\frac{\partial w_0}{\partial y}.$$

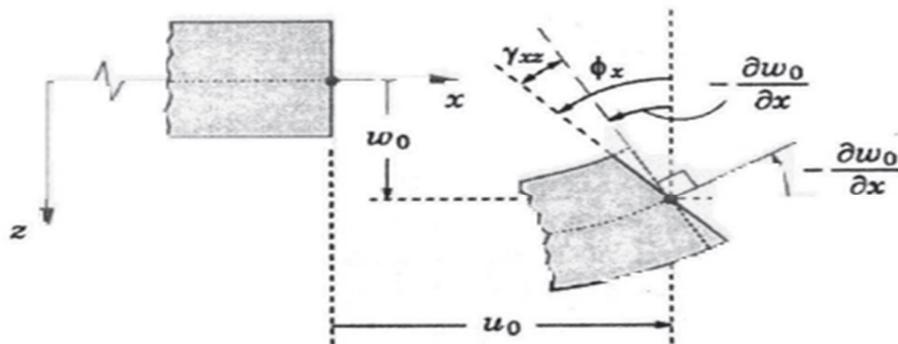


Figure II.2 : Illustration de la plaque de Reissner-Mindlin (Reddy 1997).

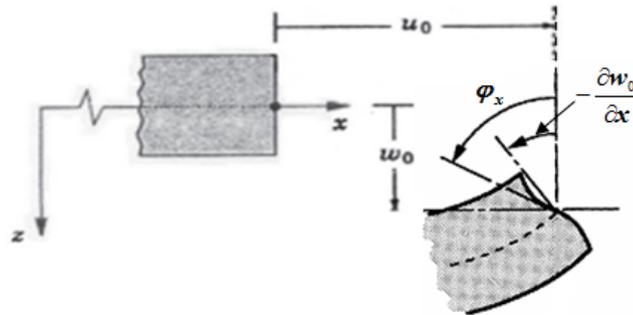
Pour éviter l'introduction d'un facteur de correction, des théories de déformation en cisaillement d'ordre élevé ont été développées.

### II.2.3. Théorie de déformation en cisaillement D'ordre élève (HSDT)

À la différence de la théorie classique des plaques (CPT) et la théorie du premier ordre (FSDT) avec les hypothèses de la distribution linéaire du déplacement à travers l'épaisseur, la théorie d'ordre élevé est basée sur une distribution non linéaire des champs à travers l'épaisseur. Par conséquent, on tient compte des effets de la déformation transversale de cisaillement et/ou de la déformation normale transversale.

Ces modèles n'exigent pas des facteurs de correction. Les références sûres de tels modèles peuvent être trouvées dans [62] ; [63] ; [64] ;[65] ;[66].

Nous avons introduit ici quatre modèles de plaque utilisés pour analyser le comportement des plaques matériaux à gradient de propriété.



**Figure II.3: illustration de la plaque d'ordre élève**

Le champ de déplacement est généralement écrit comme suit :

$$\begin{aligned}
 u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial x} + f(z) \phi_x(x, y) \\
 v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial y} + f(z) \phi_y(x, y) \\
 w(x, y, z) &= w_0(x, y)
 \end{aligned} \tag{II.3}$$

Avec :  $(u_0, v_0, w_0)$  et  $(\phi_x, \phi_y)$  sont les déplacements en membrane et les rotations autour des axes x et y, respectivement.  $(\phi_x = \frac{\partial w_0}{\partial x} + \phi_x, \phi_y = \frac{\partial w_0}{\partial y} + \phi_y)$ ,  $f(z)$  est une fonction de cisaillement transverse caractérise les théories correspondantes.

En effet, les déplacements de la théorie classique de plaque (CPT) sont obtenus par en prenant  $f(z)=0$ , alors que la théorie de premier ordre (FSDPT) peut être obtenue par  $f(z)=z$ .

Les déplacements de théorie de déformation de cisaillement de la troisième de Reddy (TSDT) [44,50] sont obtenus par :

$$f(z) = z \left( 1 - \frac{4}{3h^2} z^2 \right) \quad (\text{II.4})$$

Dans le modèle de Reddy, le champ de déplacement membranaire est cubique. Ce modèle donne une bonne approximation pour les contraintes de cisaillement transverse par rapport à la solution d'élasticité tridimensionnelle.

La distribution des contraintes de cisaillement transverse est parabolique dans l'épaisseur. Les conditions aux limites sur les surfaces libres sont satisfaites.

Touratier [32] propose le modèle sinus (SSDT) qui est différent des autres modèles d'ordre supérieur puisqu'il n'utilise pas de fonction polynomiale. Une fonction trigonométrique sinusoïdale est donc introduite pour modéliser la répartition des contraintes de cisaillement dans l'épaisseur. La fonction de cisaillement transverse s'écrit comme ci-dessous :

$$f(z) = \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \quad (\text{II.5})$$

Les contraintes de cisaillement transverses déterminées par les modèles (sinus) prennent une forme sinusoïdale dans l'épaisseur de la poutre. La précision de ce modèle par rapport à la solution exacte est meilleure que la théorie de Reddy.

La version exponentielle de la théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé (The exponential shear deformation plate theory ESDPT) développée par Karama et al. [81] est obtenue en prenant :

$$f(z) = ze^{-2(z/h)^2} \quad (\text{II.6})$$

La version hyperbolique de la théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé (The hyperbolic shear deformation plate theory HSDPT) développée par Ait Atmane et al [82]. Est obtenue en prenant :

$$f(z) = \frac{\cosh(\pi/2)}{[\cosh(\pi/2)-1]} z - \frac{(h/\pi)\sinh\left(\frac{\pi}{h}z\right)}{[\cosh(\pi/2)-1]} \text{ Et } \varphi_z = 0 \quad (\text{II.7})$$

### II.3 Revue sur les différents modèles de la théorie d'ordre élevé

Pour franchir les limites des théories du premier ordre, plusieurs auteurs ont proposé quelques contributions importantes pour le développement de modèles d'ordre élevé qui se sont distingués dans la littérature par l'expression de la fonction de cisaillement  $f(z)$ . Les modèles sont basés sur une distribution non linéaire des champs de déplacement à travers l'épaisseur, et qui permettent de représenter le gauchissement de la section transversale dans la configuration déformée (Figure II.3) [32] ; [66] ; [67]. Nous citons en particulier :

- **L'approche d'Ambartsumyan (1969) [68] avec :**

$$f(z) = \frac{z}{2} \left( \frac{h^2}{4} - \frac{z^2}{3} \right) \quad (\text{II.8})$$

- **L'approche de Reissner (1945) [67] avec :**

$$f(z) = \frac{5}{4} z \left( 1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right) \quad (\text{II.9})$$

- **L'approche de Levinson, Murthy (1981) et Reddy [69] [72] Avec :**

$$f(z) = z \left( 1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right) \quad (\text{II.10})$$

Dans le modèle de Reddy, le champ de déplacement membranaire est cubique et le déplacement normal  $w$ , est constant [72]. Ce modèle donne une bonne approximation pour les contraintes de cisaillement transverse par rapport à la solution élastique tridimensionnelle dans le cas homogène.

La distribution des contraintes de cisaillement transverse est parabolique à travers l'épaisseur (elle doit être parabolique par couches pour un multicouche). Les conditions aux limites sur les surfaces libres sont satisfaites. Les résultats du modèle de Reddy sont également très proches des deux modèles d'ordre élevé proposés par Kant (2002) [73].

Touratier propose le modèle (sinus) qui est différent des autres modèles d'ordre élevé puisqu'il n'utilise pas de fonction polynomiale. Une fonction trigonométrique sinusoïdale est

donc introduite pour modéliser la répartition des contraintes de cisaillement à travers l'épaisseur [68]. La fonction de cisaillement transverse s'écrit comme suite :

$$\begin{aligned}
 f(z) &= \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) = \frac{h}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)} \left(\frac{\pi z}{h}\right)^{2n+1} \\
 &= z \left( 1 - \frac{\pi^2}{3!} \frac{z^2}{h^2} + \frac{\pi^4}{5!} \frac{z^4}{h^4} - \frac{\pi^6}{7!} \frac{z^6}{h^6} + \dots \right)
 \end{aligned}
 \tag{II.11}$$

Les contraintes de cisaillement transverses déterminées par le modèle (sinus) prennent une forme cosinusoidale à travers l'épaisseur de la plaque. La précision de ce modèle par rapport à la solution exacte est meilleure que la théorie de Reddy (1984) [72]. En se basant sur les travaux de Touratier, un élément fini triangulaire à six nœuds, est construit pour les structures multicouches non linéaires géométriques par Polit (1997) et Dau (2006) [70] [71].

Récemment, Afaq et al. (2003) [72] proposent un modèle exponentiel avec une cinématique plus riche. La fonction de distribution de cisaillement transverse est de la forme Suivante :

$$f(z) = ze^{-2\left(\frac{z}{h}\right)^2}
 \tag{II.12}$$

Le choix de la fonction exponentielle permet un développement en puissance pair et impair du variable  $z$ , alors que la fonction (sinus) de Touratier (1991) [32] ne permet qu'un développement en puissance impair.

Malgré le fait que les modèles d'ordre élevé assurent une continuité de déplacement et de déformation à l'interface, les contraintes de cisaillement inter laminaire et les contraintes d'interface, restent discontinues. Ceci présente un inconvénient lors de l'analyse locale de l'interface des structures multicouches dont les propriétés des couches sont très différentes.

**Tableau II.1 :** Différentes fonctions de cisaillement utilisées dans les théories des plaques isotropes et FGM

Théorie	intitulé	Fonction de cisaillement $f(z)$	Distribution de $\gamma_{xz}$ et $\gamma_{yz}$ suivant $z$	Coefficient de correction de cisaillement	Domaine de validité
<b>CPT, Kirchhoff</b> (Kirchhoff, G.R. 1850 a) et (Kirchhoff, G.R. 1850 b)	Théorie classique des plaques	0	-----	-----	Plaques minces
<b>FSDT, Mindlin</b> (Mindlin. R.D 1951)	Théorie de déformation des plaques du 1 <sup>er</sup> ordre	$z$	Constante	Requis	Plaques minces et moyennement épaisses
<b>Ambartsumian</b> (Ambartsumian, S.A. 1958)	Théorie d'ordre supérieur	$\frac{z}{2} \left( \frac{h^2}{4} - \frac{z^2}{3} \right)$	Quadratique	Non Requis	Plaques minces et moyennement épaisses
<b>Reissner</b> (Reissner. E 1975)	Théorie d'ordre supérieur	$\frac{5}{4} z \left( 1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right)$	Parabolique	Non Requis	Plaques minces et épaisses
<b>TSDPT, Touratier</b> (Touratier. M 1991)	Théorie de déformation trigonométrique des plaques	$\frac{h}{\pi} \sin \left( \frac{\pi z}{h} \right)$	Parabolique	Non Requis	Plaques minces et épaisses
<b>ESDPT, Karama et al.</b> (Karama et al. 2003)	Théorie de déformation exponentielle des plaques	$z e^{-2(z/h)^2}$	Parabolique	Non Requis	Plaques minces et épaisses

## II.4. Les différents modèles des structures composites dans l'élasticité bidimensionnelles

### II.4.1. Approche monocouche équivalente

Dans l'approche monocouche équivalente, le nombre d'équations ne dépend pas du nombre de couche, la plaque multicouche est homogénéisée et est donc considérée comme une seule couche [73].

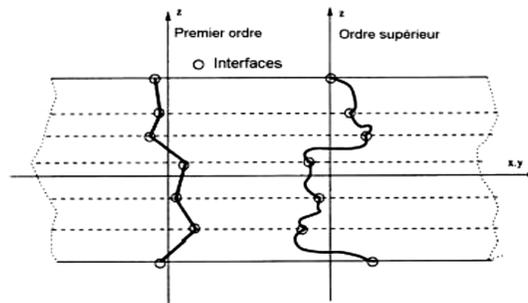
Depuis le premier travail de Sophie Germain en 1815 sur les plaques minces en passant par les modèles du premier ordre de Love-Kirchhoff et de Reissner-Mindlin, de nombreux auteurs ont développé des théories de plaques à partir de cinématiques ou champs de contraintes plus raffinées.

### II.4.2. Approche par couche

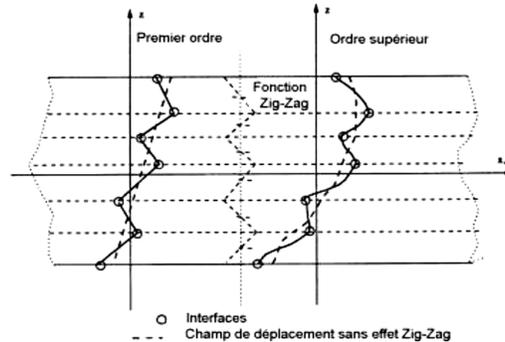
Ces approches sont destinées justement à mieux décrire les effets d'interface pour les matériaux composites conventionnels. La (Figure. II.3) et les équations (II.2) et (II.3) montrent aussi que cette approche est applicable pour les matériaux FGM. Ainsi différents modèles issus de l'approche par couches ont été proposés [74]. Le multicouche est subdivisé en sous-structures (correspondant en fait à chaque couche ou chaque ensemble de couches). On applique à chaque sous-structure une théorie du premier ordre ou un modèle d'ordre élevé, imposant un champ de déplacement vérifiant la continuité aux interfaces entre les différentes couches. Les modèles de ce type sont relativement coûteux (l'ordre des équations de comportement dépend du nombre de couche), mais ils permettent l'obtention de résultats plus précis, notamment en ce qui concerne le calcul des contraintes hors plan.

D'une manière générale, les modèles de l'approche par couches peuvent être classés en deux groupes :

- ✓ Les modèles couches discrètes ou chaque couche sont considérées comme une plaque en imposant les conditions de continuité en déplacements ou en contraintes aux interfaces.
- ✓ Les modèles zigzag ou la cinématique satisfait à priori les conditions de contact sont indépendantes du nombre de couches. (Figures. II.4 et II.5).



**Figure. II.5. Champs de déplacements des modèles couche discrètes, Approche cinématique.**



**Figure. II.5. Champs de déplacements des modèles zig-zag, Approche cinématique**

### II.4.3. Approche développement asymptotique :

Le développement asymptotique est appliqué à des structures a priori peu épaisses ou le rapport entre l'épaisseur et la plus grande dimension est petit. Il est donc naturel d'envisager un développement asymptotique suivant ce rapport. Ce développement intervient au niveau de l'intégration des équations de l'élasticité (équations constitutives, équations de mouvements).

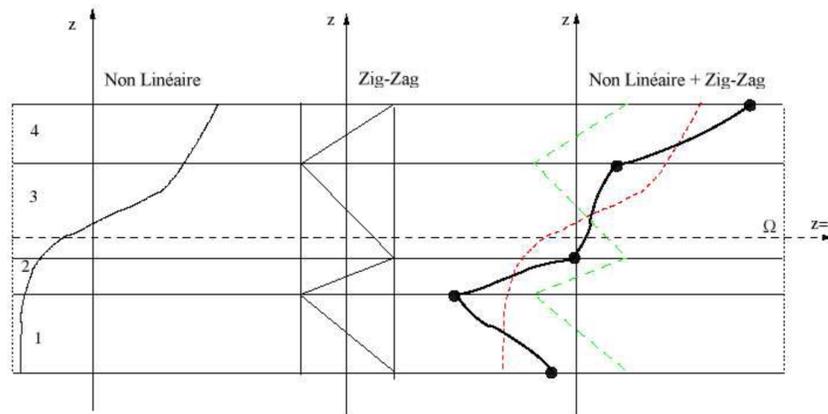
## II.5 Théorie de zig-zag

Pour mieux décrire la déformation en cisaillement des matériaux composites, certains auteurs ont associé la théorie d'ordre élevé à celle dite de zig-zag, cette dernière est destinée justement à mieux décrire les effets d'interface. Ainsi, différents modèles issus de l'approche par couches ont été proposés. Le multicouche est subdivisé en sous structures (correspondant en fait à chaque couche ou chaque ensemble de couches). On applique à chaque sous-structure une théorie du premier ordre ou un modèle d'ordre élevé. La cinématique des modèles zig-zags satisfait a priori les conditions de contact et elle est indépendante du nombre de couches. L'avantage principal du champ de déplacement des modèles zig-zag réside dans la bonne modélisation de la distorsion de la normale à la surface déformée, ainsi que dans la vérification des conditions de continuité, et ce sans augmenter pour autant le nombre et l'ordre des équations fondamentales de la théorie du premier ordre. Le recours à des coefficients de

correction pour cisaillement transverse est évité. En se basant sur le concept de Di Sciuva, plusieurs auteurs ont réalisé des améliorations significatives pour le modèle zig-zag.

L'amélioration principale est l'introduction d'une distribution non linéaire des déplacements. On superpose le champ zig-zag (linéaire par morceaux) à un champ de déplacement d'ordre élevé (souvent cubique) (Figure II.6).

Les conditions de compatibilité sont satisfaites sur les surfaces supérieures et inférieures des plaques pour réduire le nombre de paramètres.



**Figure II.6 : Champ de déplacements du modèle zig-zag d'ordre élevé**

## II.6 Conclusion

Dans ce chapitre on a décrit les différentes théories des plaques (la théorie classique CPT, la théorie de cisaillement de premier ordre FSDPT, la théorie d'ordre élevé HSDPT) à savoir l'approche monocouche équivalente, l'approche par couches et l'approche développement asymptotique.

Nous concluons aussi que l'approche monocouche équivalente est mieux adaptée pour les matériaux FGM car il n'y a pas de changement brusque dans les caractéristiques mécaniques contrairement aux composites conventionnels où le délaminage est un problème à ne pas écarter.

Donc on a eu recours au modèle monocouche équivalent pour les plaques sandwich pour différentes théories d'ordre élevé où la prise en compte du cisaillement transversal est nécessaire pour une étude plus exacte.

# *Chapitre III*

## *Modèle*

### *mathématique & développements*

**III.1. Introduction :**

Dans ce chapitre la solution analytique obtenue a pour but d'analyse le comportement statique en 3D des plaque FG ont été obtenues par la solution de Navier.

Dans ce chapitre, une nouvelle théorie de déformation de cisaillement à huit inconnues est présentée pour prédire les réponses statiques des plaques FG.

La présente théorie tient compte du déplacement non linéaire à travers l'épaisseur de la plaque, respecte les conditions aux limites de la surface de la plaque, et de cette manière un facteur de correction de cisaillement n'est pas nécessaire.

Les propriétés de la plaque sont supposées varier en fonction d'une distribution de la loi de puissance de la fraction volumique des constituants.

L'utilisation du principe des déplacements virtuels pour décrire les équations de mouvement.

Les solutions obtenues par la présente théorie de déformation en cisaillement à huit variables sont présentées, pour avoir vérifié l'exactitude de la présente théorie.

**III.2. Théorie des déformations de cisaillement non polynomiales à trois inconnues :**

Le champ de déplacement d'ordre supérieur complet est donné sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) + z\theta_x(x, y) + z^2u_0^*(x, y) + z^3\theta_x^*(x, y); \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) + z\theta_y(x, y) + z^2v_0^*(x, y) + z^3\theta_y^*(x, y); \quad (1) \\ w(x, y, z) &= w_0(x, y) + z\theta_z(x, y) + z^2w_0^*(x, y) + z^3\theta_z^*(x, y). \end{aligned}$$

Où  $(u, v, w)$  désignent les déplacements d'un point le long des coordonnées  $(x, y, z)$  ;  $(u_0, v_0, w_0)$  sont les déplacements correspondants d'un point sur le plan médian ;  $\theta_x, \theta_y$  et  $\theta_z$  sont les rotations du segment de ligne normal au plan médian autour de l'axe  $y$ , de l'axe  $x$  et de l'axe  $z$ , respectivement. Les fonctions  $(u_0^*, v_0^*, w_0^*, \theta_x^*, \theta_y^*)$  et  $\theta_z^*$  sont les termes d'ordre supérieur dans l'expansion de la série Taylor définis dans le plan médian.

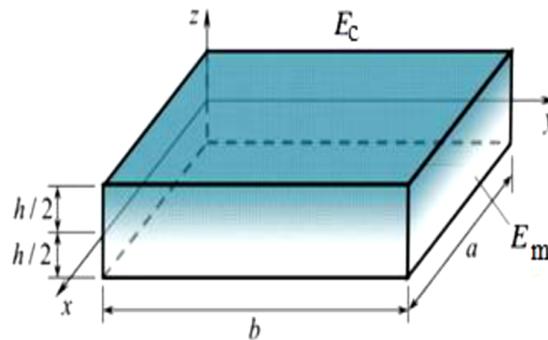


Fig. III.1 : Géométrie de la plaque FG avec un ensemble positif d'axes de référence.

Pour les plaques de flexion, les contraintes transversales de cisaillement ( $\sigma_{xz}$ ,  $\sigma_{yz}$ ) doivent être évanouies sur les surfaces supérieure et inférieure. Ces conditions conduisent à exiger que les déformations transversales correspondantes sur ces surfaces soient nulles.

$$\gamma_{xz} \left( x, y, \pm \frac{h}{2} \right) = \gamma_{yz} \left( x, y, \pm \frac{h}{2} \right) = 0$$

On obtient :

$$u_0^* = -\frac{1}{2}\theta_{z,x} - \frac{h^2}{8}\theta_{z,x}^*; \theta_x^* = -\frac{4}{3h^2}(\theta_x + w_{0,x}) - \frac{1}{3}w_{0,x}^*; \quad (2)$$

$$v_0^* = -\frac{1}{2}\theta_{z,y} - \frac{h^2}{8}\theta_{z,y}^*; \theta_y^* = -\frac{4}{3h^2}(\theta_y + w_{0,y}) - \frac{1}{3}w_{0,y}^*.$$

Le champ de déplacement (1) devient :

$$\begin{aligned} u &= \mu_0 + z\theta_x - \frac{z^2}{2}(\theta_{z,x} + c_1\theta_{z,x}^*) - \frac{z^3}{3}[c_2(\theta_x + w_{0,x}) + w_{0,x}^*]; \\ v &= v_0 + z\theta_y - \frac{z^2}{2}(\theta_{z,y} + c_1\theta_{z,y}^*) - \frac{z^3}{3}[c_2(\theta_y + w_{0,y}) + w_{0,y}^*]; \quad (3) \\ w &= w_0 + z\theta_z + z^2w_0^* + z^3\theta_z^*. \end{aligned}$$

$$\text{Avec : } c_1 = \frac{h^2}{4}; c_2 = \frac{4}{h^2}$$

Les relations composantes de déformation et déplacements de déformation peuvent être exprimées comme :

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \varepsilon_x^0 + z\kappa_x^0 + z^2\varepsilon_x^* + z^3\kappa_x^*; \\ \varepsilon_y &= \varepsilon_y^0 + z\kappa_y^0 + z^2\varepsilon_y^* + z^3\kappa_y^*; \\ \varepsilon_z &= \varepsilon_z^0 + z\kappa_z^0 + z^2\varepsilon_z^*; \\ \gamma_{xy} &= \varepsilon_{xy}^0 + z\kappa_{xy}^0 + z^2\varepsilon_{xy}^* + z^3\kappa_{xy}^*; \quad (4) \\ \gamma_{xz} &= \gamma_{xz}^0 + z\kappa_{xz}^0 + z^2\gamma_{xz}^* + z^3\kappa_{xz}^*; \\ \gamma_{yz} &= \gamma_{yz}^0 + z\kappa_{yz}^0 + z^2\gamma_{yz}^* + z^3\kappa_{yz}^*. \end{aligned}$$

Avec :

$$\begin{aligned}
\{\boldsymbol{\varepsilon}_x^0, \boldsymbol{\varepsilon}_y^0, \boldsymbol{\varepsilon}_z^0, \boldsymbol{\gamma}_{xy}^0\} &= \{u_{0,x}, v_{0,y}, \boldsymbol{\theta}_z, u_{0,y} + v_{0,x}\}; \\
\{\boldsymbol{\kappa}_x^0, \boldsymbol{\kappa}_y^0, \boldsymbol{\kappa}_z^0, \boldsymbol{\kappa}_{xy}^0\} &= \{\boldsymbol{\theta}_{x,x}, \boldsymbol{\theta}_{y,y}, 2w_0^*, \boldsymbol{\theta}_{x,y} + \boldsymbol{\theta}_{y,x}\}; \\
\{\boldsymbol{\varepsilon}_x^*, \boldsymbol{\varepsilon}_y^*, \boldsymbol{\varepsilon}_z^*, \boldsymbol{\gamma}_{xy}^*\} &= \left\{ -\frac{1}{2}(\boldsymbol{\theta}_{z,xx} + c_1 \boldsymbol{\theta}_{z,xx}^*), -\frac{1}{2}(\boldsymbol{\theta}_{z,yy} + c_1 \boldsymbol{\theta}_{z,yy}^*), 3\boldsymbol{\theta}_z^*, -(\boldsymbol{\theta}_{z,xy} + c_1 \boldsymbol{\theta}_{z,xy}^*) \right\}; \quad (5) \\
\{\boldsymbol{\gamma}_{xz}^0, \boldsymbol{\gamma}_{yz}^0\} &= \{w_{0,x} + \boldsymbol{\theta}_x, w_{0,y} + \boldsymbol{\theta}_y\}; \\
\{\boldsymbol{\kappa}_{xz}^0, \boldsymbol{\kappa}_{yz}^0\} &= \{-c_1 \boldsymbol{\theta}_{z,x}^*, -c_1 \boldsymbol{\theta}_{z,y}^*\}; \quad \{\boldsymbol{\gamma}_{xz}^*, \boldsymbol{\gamma}_{yz}^*\} = \{-c_2(w_{0,x} + \boldsymbol{\theta}_x), -c_2(w_{0,y} + \boldsymbol{\theta}_y)\}; \\
\{\boldsymbol{\kappa}_{xz}^*, \boldsymbol{\kappa}_{yz}^*\} &= \{\boldsymbol{\theta}_{z,x}^*, \boldsymbol{\theta}_{z,y}^*\}.
\end{aligned}$$

Dans les formules ci-dessus, une virgule suivie de  $x$  ou  $y$  indique la différenciation par rapport aux coordonnées  $x$  ou  $y$  respectivement.

### III.3. Constitutives équations :

Considérons une plaque FG rectangulaire à élasticité linéaire simplement supportée d'épaisseur uniforme  $h$  comme le montre la figure.III.1. Le coefficient de Poisson  $\nu$  est supposé constant sur toute l'épaisseur de la plaque. Le module d'Young de la plaque FG est supposé suivre la distribution de la loi de puissance dans la direction de l'épaisseur, et exprimé en :

$$E(z) = E_m + (E_c - E_m) \left( \frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^p \quad (6)$$

Ici l'indice  $c$  se réfère au matériau céramique et l'indice  $m$  se réfère au matériau métallique de la plaque FG. Il ressort clairement de l'expression que la surface supérieure ( $z = h/2$ ) de la plaque FG est riche en céramique et le fond ( $z = -h/2$ ) est riche en métaux en constituants.

La relation contrainte-déformation pour la plaque FG peut s'écrire :

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{23} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{31} & Q_{32} & Q_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_x \\ \boldsymbol{\varepsilon}_y \\ \boldsymbol{\varepsilon}_z \\ \boldsymbol{\gamma}_{xy} \\ \boldsymbol{\gamma}_{xz} \\ \boldsymbol{\gamma}_{yz} \end{pmatrix} \quad (7)$$

Dans laquelle  $(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \sigma_{xz}, \sigma_{yz}, \sigma_{xy})$  sont les contraintes, et  $(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \varepsilon_{xz}, \varepsilon_{yz}, \varepsilon_{xy})$  sont les déformations par rapport aux axes  $(x, y, z)$ . Les éléments de la matrice de rigidité  $Q_{ij}$  sont définis comme suit :

$$Q_{11} = Q_{22} = Q_{33} = \frac{(1-\nu)E}{(1+\nu)(1-2\nu)};$$

$$Q_{12} = Q_{23} = Q_{13} = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} = Q_{21} = Q_{32} = Q_{31}; \quad (8)$$

$$Q_{44} = Q_{55} = Q_{66} = \frac{E}{2(1+\nu)}.$$

### III.4. Équations d'équilibre

Le principe du déplacement virtuel appliqué à la plaque peut s'écrire sous forme analytique comme :

$$0 = \iint_{A-h/2}^{h/2} (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \sigma_z \delta \varepsilon_z + \sigma_{xy} \delta \gamma_{xy} + \sigma_{xz} \delta \gamma_{xz} + \sigma_{yz} \delta \gamma_{yz}) dAdz$$

$$-\int_A q_z^+ \delta w^+ dA = \int_A \left\{ \begin{array}{l} N_x \delta u_{0,x} + M_x \delta \theta_{x,x} - \frac{N_x^*}{2} (\delta \theta_{z,xx} + c_1 \delta \theta_{z,xx}^*) \\ -\frac{M_x^*}{3} (c_2 (\delta \theta_{x,x} + \delta w_{0,xx}) + \delta w_{0,xx}^*) + N_y \delta v_{0,y} + M_y \delta \theta_{y,y} - \frac{N_y^*}{2} (\delta \theta_{z,yy} + c_1 \delta \theta_{z,yy}^*) - \\ -\frac{M_y^*}{3} (c_2 (\delta \theta_{y,y} + \delta w_{0,yy}) + \delta w_{0,yy}^*) + N_z \delta \theta_z + 2M_z \delta w_0^* + 3N_z^* \delta \theta_z^* + N_{xy} (\delta u_{0,y} + \delta v_{0,x}) + \\ M_{xy} (\delta \theta_{x,y} + \delta \theta_{x,y}) - N_{xy}^* (\delta \theta_{z,xy} + c_1 \delta \theta_{z,xy}^*) \\ -\frac{M_{xy}^*}{3} (c_2 (\delta \theta_{x,y} + \delta \theta_{y,x} + 2\delta w_{0,xy}) + 2\delta w_{0,xy}^*) + \\ Q_x (\delta \theta_x + \delta w_{0,x}) - S_x c_1 \delta \theta_{z,x}^* - Q_x^* c_2 (\delta \theta_x + \delta w_{0,x}) + S_x^* S \theta_{z,x}^* + \\ Q_y (\delta \theta_y + \delta w_{0,y}) - S_y c_1 \theta_{z,y}^* - Q_y^* c_2 (\delta \theta_y + \delta w_{0,y}) + \\ S_y^* S \theta_{z,y}^* + q_z^+ \left( \delta w_0 + \frac{h}{2} \delta \theta_z + \frac{h^2}{4} \delta w_0^* + \frac{h^3}{8} \delta \theta_z^* \right) \end{array} \right\} dA \quad (9)$$

Où le symbole  $\delta$  désigne l'opérateur variationnel,  $q_z^+$  la charge transversale appliquée à la surface supérieure de la plaque.

$$\begin{aligned}
 & \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_z \\ N_{xy} \end{Bmatrix} \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} dz; \quad \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} z dz; \quad \begin{Bmatrix} N_x^* \\ N_y^* \\ N_z^* \\ N_{xy}^* \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} z^2 dz; \\
 & \begin{Bmatrix} M_x^* \\ M_y^* \\ M_{xy}^* \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} z^3 dz; \quad \begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{Bmatrix} dz; \quad \begin{Bmatrix} S_x \\ S_y \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{Bmatrix} z dz; \quad (10) \\
 & \begin{Bmatrix} Q_x^* \\ Q_y^* \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{Bmatrix} z^2 dz; \quad \begin{Bmatrix} S_x^* \\ S_y^* \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{Bmatrix} z^3 dz.
 \end{aligned}$$

Et de Eqs. (4), (7) et (10) on obtient :

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_z \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_z \\ M_{xy} \\ N_x^* \\ N_y^* \\ N_z^* \\ N_{xy}^* \\ M_x^* \\ M_y^* \\ M_{xy}^* \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & 0 & B_{11} & B_{12} & B_{13} & 0 & C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & D_{11} & D_{12} & 0 \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & 0 & B_{21} & B_{22} & B_{23} & 0 & C_{21} & C_{22} & C_{23} & 0 & D_{21} & D_{22} & 0 \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & 0 & B_{31} & B_{32} & B_{33} & 0 & C_{31} & C_{32} & C_{33} & 0 & D_{31} & D_{32} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{44} & 0 & 0 & 0 & B_{44} & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 & D_{44} \\ B_{11} & B_{12} & B_{13} & 0 & C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & D_{11} & D_{12} & D_{13} & 0 & E_{11} & E_{12} & 0 \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} & 0 & C_{21} & C_{22} & C_{23} & 0 & D_{21} & D_{22} & D_{23} & 0 & E_{21} & E_{22} & 0 \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} & 0 & C_{31} & C_{32} & C_{33} & 0 & D_{31} & D_{32} & D_{33} & 0 & E_{31} & E_{32} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B_{44} & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 & 0 & D_{44} & 0 & 0 & E_{44} \\ C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & D_{11} & D_{12} & D_{13} & 0 & E_{11} & E_{12} & E_{13} & 0 & F_{11} & F_{12} & 0 \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & 0 & D_{21} & D_{22} & D_{23} & 0 & E_{21} & E_{22} & E_{23} & 0 & F_{21} & F_{22} & 0 \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & 0 & D_{31} & D_{32} & D_{33} & 0 & E_{31} & E_{32} & E_{33} & 0 & F_{31} & F_{32} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 & 0 & D_{44} & 0 & 0 & 0 & E_{44} & 0 & 0 & F_{44} \\ D_{11} & D_{12} & D_{13} & 0 & E_{11} & E_{12} & E_{13} & 0 & F_{11} & F_{12} & F_{13} & 0 & G_{11} & G_{12} & 0 \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} & 0 & E_{21} & E_{22} & E_{23} & 0 & F_{21} & F_{22} & F_{23} & 0 & G_{21} & G_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{44} & 0 & 0 & 0 & E_{44} & 0 & 0 & 0 & F_{44} & 0 & 0 & G_{44} \end{bmatrix}; \quad (11)$$

$$\begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \\ S_x \\ S_y \\ Q_x^* \\ Q_y^* \\ S_x^* \\ S_y^* \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{55} & 0 & B_{55} & 0 & C_{55} & 0 & D_{55} & 0 \\ 0 & A_{66} & 0 & B_{66} & 0 & C_{66} & 0 & D_{66} \\ B_{55} & 0 & C_{55} & 0 & D_{55} & 0 & E_{55} & 0 \\ 0 & B_{66} & 0 & C_{66} & 0 & D_{66} & 0 & E_{66} \\ C_{55} & 0 & D_{55} & 0 & E_{55} & 0 & F_{55} & 0 \\ 0 & C_{66} & 0 & D_{66} & 0 & E_{66} & 0 & F_{66} \\ D_{55} & 0 & E_{55} & 0 & F_{55} & 0 & G_{55} & 0 \\ 0 & D_{66} & 0 & E_{66} & 0 & F_{66} & 0 & G_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{xz}^0 \\ \gamma_{yz}^0 \\ \kappa_{xz}^0 \\ \kappa_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^* \\ \gamma_{yz}^* \\ \kappa_{xz}^* \\ \kappa_{yz}^* \end{Bmatrix}. \quad (11)$$

Où  $A_{ij}, B_{ij}, C_{ij}, D_{ij}, E_{ij}, F_{ij}, G_{ij}$  sont les coefficients de rigidité de la plaque, définis par :

$$(A_{ij}, B_{ij}, C_{ij}, D_{ij}, E_{ij}, F_{ij}, G_{ij}) = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{ij}(1, z, z^2, z^3, z^4, z^5, z^6) dz \quad (i, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$$

Intégrer l'expression dans l'équation (9) par parties et fixer les coefficients de  $(\delta u_0, \delta v_0, \delta w_0, \delta \theta_x, \delta \theta_y, \delta \theta_z, \delta w_0^*, \delta \theta_z^*)$  à zéro séparément, on obtient les équations d'équilibre suivantes :

$$\delta u_0 : N_{x,x} + N_{xy,y} = 0$$

$$\delta v_0 : N_{y,y} + N_{xy,y} = 0$$

$$\delta w_0 : \frac{c_2}{3} (M_{x,xx}^* + 2M_{xy,xy}^* + M_{y,yy}^*) - c_2 (Q_{x,x}^* + Q_{y,y}^*) + (Q_{x,x} + Q_{y,y}) + q_z^+ = 0$$

$$\delta \theta_x : \frac{c_2}{3} (M_{x,x}^* + M_{xy,y}^*) - (M_{x,x} + M_{xy,y}) - c_2 Q_x^* + Q_x = 0$$

$$\delta \theta_y : \frac{c_2}{3} (M_{xy,y}^* + M_{y,y}^*) - (M_{xy,x} + M_{y,y}) - c_2 Q_y^* + Q_y = 0 \quad (12)$$

$$\delta \theta_z : \frac{1}{2} (N_{x,xx}^* + 2N_{xy,xy}^* + N_{y,yy}^*) - N_z + \frac{h}{2} q_z^+ = 0$$

$$\delta w_0^* : \frac{1}{3} (M_{x,xx}^* + 2M_{xy,xy}^* + M_{y,yy}^*) - 2M_z + \frac{h^2}{4} q_z^+ = 0$$

$$\delta \theta_z^* : \frac{c_1}{2} (N_{x,xx}^* + 2N_{xy,xy}^* + N_{y,yy}^*) - 3N_z^* + (S_{x,x}^* + S_{y,y}^*) - c_1 (M_{xz,x} + M_{yz,y}) = 0$$

$$\begin{aligned} eq8 := & \frac{1}{2} CI \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} NI_x(x, y, z) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} NI_y(x, y, z) + 2 \left( \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} NI_{xy}(x, y, z) \right) \right) \\ & - CI \left( \frac{\partial}{\partial x} M_{xz}(x, y, z) + \frac{\partial}{\partial y} M_{yz}(x, y, z) \right) + \frac{\partial}{\partial x} MI_{xz}(x, y, z) + \frac{\partial}{\partial y} MI_{yz}(x, y, z) \\ & - 3 NI_z(x, y, z) + \frac{1}{8} h^3 q(x, y) \end{aligned}$$

### III.5. Solution de Navier

Considérons une plaque FG rectangulaire simplement supportée soumise à une charge répartie transversalement. Les conditions aux limites associées simplement prises en charge sont les suivantes :

Au bord  $x = 0$  et  $x = a$  :

$$v_0 = 0 ; w_0 = 0 ; \theta_y = 0 ; \theta_z = 0 ; \quad (13a)$$

$$w_0^* = 0 ; \theta_z^* = 0 ; M_x = 0 ; M_x^* = 0.$$

Au bord  $y = 0$  et  $y = b$  :

$$u_0 = 0 ; w_0 = 0 ; \theta_x = 0 ; \theta_z = 0 ; \quad (13)b$$

$$w_0^* = 0 ; \theta_z^* = 0 ; M_y = 0 ; M_y^* = 0.$$

En suivant la procédure de résolution de Navier, les variables de déplacement satisfaisant la condition aux limites simplement prise en charge sont écrites sous la forme (14).

$$\begin{aligned} u_0 &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} u_{0mn} \cos \alpha x \sin \beta y \\ v_0 &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} v_{0mn} \sin \alpha x \cos \beta y \\ w_0 &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{0mn} \sin \alpha x \sin \beta y \\ \theta_x &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \theta_{xmn} \cos \alpha x \sin \beta y \quad (14) \\ \theta_y &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \theta_{ymn} \sin \alpha x \cos \beta y \\ \theta_z &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \theta_{zmn} \sin \alpha x \sin \beta y \\ w_0^* &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{0mn}^* \sin \alpha x \sin \beta y \\ \theta_z^* &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \theta_{zmn}^* \sin \alpha x \sin \beta y \end{aligned}$$

Avec :

$$\alpha = \frac{m\pi}{a}; \beta = \frac{n\pi}{b}$$

La charge transversale appliquée  $q_z^*(x, y)$  est également étendue en double série de Fourier de sinus :

$$q_z^+(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} q_{mn} \sin \alpha x \sin \beta y \quad (15a)$$

Les coefficients  $q_{mn}$  sont donnés ci-dessous pour toute charge typique :

$$q_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b q_z^+(x, y) \sin \alpha x \sin \beta y dx dy \quad (15b)$$

Pour une charge uniformément répartie :  $q_{mn} = \frac{16q_0}{\pi^2 mn}$ ;

Pour une charge répartie sinusoïdale :  $q_{mn} = q_0$

Substitution des égaliseurs. (14) et (15) dans Eq. (8) et en collectant les coefficients, on obtient un système d'équations ( $8 \times 8$ ) :

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} & S_{16} & S_{17} & S_{18} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} & S_{26} & S_{27} & S_{28} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} & S_{35} & S_{36} & S_{37} & S_{38} \\ S_{41} & S_{42} & S_{43} & S_{44} & S_{45} & S_{46} & S_{47} & S_{48} \\ S_{51} & S_{52} & S_{53} & S_{54} & S_{55} & S_{56} & S_{57} & S_{58} \\ S_{61} & S_{62} & S_{63} & S_{64} & S_{65} & S_{66} & S_{67} & S_{68} \\ S_{71} & S_{72} & S_{73} & S_{74} & S_{75} & S_{76} & S_{77} & S_{78} \\ S_{81} & S_{82} & S_{83} & S_{84} & S_{85} & S_{86} & S_{87} & S_{88} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{0mn} \\ v_{0mn} \\ w_{0mn} \\ \theta_{xmn} \\ \theta_{ymn} \\ \theta_{zmn} \\ w_{0mn}^* \\ \theta_{zmn}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ q_{mn} \\ 0 \\ 0 \\ hq_{mn}/2 \\ h^2 q_{mn}/4 \\ h^3 q_{mn}/8 \end{bmatrix} \quad (16)$$

Les solutions analytiques peuvent être obtenues à partir de l'équation. (16).

Pour toute valeur fixe de  $m$  et  $n$ . Les éléments  $S_{ij}$  de la matrice [s] sont donnés comme suit :

$$S_{11} = A_{11} \alpha^2 + A_{11} \beta^2; \quad S_{12} = S_{21} = (A_{12} + A_{44}) \alpha \beta$$

$$S_{13} = S_{31} = -\frac{D_{11}c_2}{3} \alpha^3 - \left( \frac{D_{12}c_2}{3} + \frac{2D_{44}c_2}{3} \right) \alpha \beta^2$$

$$S_{14} = S_{41} = \left( B_{11} \frac{D_{11}c_2}{3} \right) \alpha^2 + \left( B_{44} - \frac{D_{44}c_2}{3} \right) \beta^2$$

$$S_{15} = S_{51} = \left( B_{12} + B_{44} - \frac{D_{12}c_2}{3} - \frac{D_{44}c_2}{3} \right) \alpha \beta$$

$$S_{16} = S_{61} = -\frac{C_{11}}{2} \alpha^3 - A_{13} \alpha - \left( \frac{C_{12}}{2} + C_{44} \right) \alpha \beta^2$$

$$S_{17} = S_{71} = -\frac{D_{11}}{3} \alpha^3 - 2B_{13} \alpha - \left( \frac{D_{12}}{3} + \frac{2D_{44}}{3} \right) \alpha \beta^2$$

$$S_{18} = S_{81} = -\frac{C_{11}c_1}{2}\alpha^3 - 3C_{13}\alpha - \left(\frac{C_{12}c_1}{2} + C_{44}c_1\right)\alpha\beta^2 ; S_{22} = A_{44}\alpha^2 + A_{22}\beta^2$$

$$S_{23} = S_{32} = -\left(\frac{D_{21}c_2}{3} + \frac{2D_{44}c_2}{3}\right)\alpha^2\beta - \frac{D_{22}c_2}{3}\beta^3$$

$$S_{24} = S_{42} = \left(B_{21} + B_{44} - \frac{D_{21}c_2}{3} - \frac{D_{44}c_2}{3}\right)\alpha\beta$$

$$S_{25} = S_{52} = \left(B_{44} - \frac{D_{44}c_2}{3}\right)\alpha^2 + \left(B_{22} - \frac{D_{22}c_2}{3}\right)\beta^2$$

$$S_{26} = S_{62} = \left(\frac{C_{21}}{2} + C_{44}\right)\alpha^2\beta - A_{23}\beta - \frac{C_{22}}{2}\beta^3$$

$$S_{27} = S_{72} = \left(\frac{D_{21}}{3} + \frac{2D_{44}}{3}\right)\alpha^2\beta - 2B_{23}\beta - \frac{D_{22}}{3}\beta^3$$

$$S_{28} = S_{82} = -\left(\frac{C_{21}c_1}{2} + C_{44}c_1\right)\alpha^2\beta - 3C_{23}\beta - \frac{C_{22}c_1}{2}\beta^3$$

$$S_{33} = \frac{G_{11}c_2^2}{9}\alpha^4 + (A_{55} + E_{55}c_2^2 - 2C_{55}c_2)\alpha^2 + \alpha^2\beta^2 \frac{(G_{12} + G_{21} + 4G_{44})c_2^2}{9} \\ + (A_{66} + E_{66}c_2^2 - 2C_{66}c_2)\beta^2 + \frac{G_{22}c_2^2}{9}\beta^4$$

$$S_{34} = S_{43} = \left(\frac{G_{11}c_2^2}{9} - \frac{E_{11}c_2}{3}\right)\alpha^3 + (A_{55} - 2C_{55}c_2 + E_{55}c_2^2)\alpha \\ - \left(\frac{E_{21}c_2}{3} + \frac{2E_{44}c_2}{3} - \frac{G_{21}c_2^2}{9} - \frac{2G_{44}c_2^2}{9}\right)\alpha\beta^2$$

$$S_{35} = S_{53} = -\left(\frac{E_{12}c_2}{3} + \frac{2E_{44}c_2}{3} - \frac{G_{12}c_2^2}{3} - \frac{2G_{44}c_2^2}{9}\right)\alpha^2\beta + (A_{66} - 2C_{66}c_2 + E_{66}c_2^2)\beta + \left(\frac{G_{22}c_2^2}{9} - \frac{E_{22}c_2}{3}\right)\beta^3$$

$$S_{36} = S_{63} = \frac{F_{11}c_2}{6}\alpha^4 + \frac{D_{13}c_2}{3}\alpha^2 + \left(\frac{F_{12}c_2}{6} + \frac{F_{21}c_2}{6} + \frac{2F_{44}c_2}{3}\right)\alpha^2\beta^2 + \frac{D_{23}c_2}{3}\beta^2 + \frac{F_{22}c_2}{6}\beta^4$$

$$S_{37} = S_{73} = \frac{G_{11}c_2}{9}\alpha^4 + \frac{2E_{13}c_2}{3}\alpha^2 + \left(\frac{G_{12}c_2}{9} + \frac{G_{21}c_2}{9} + \frac{4G_{44}c_2}{9}\right)\alpha^2\beta^2 + \frac{2E_{23}c_2}{3}\beta^2 + \frac{G_{22}c_2}{3}\beta^2 \\ + \frac{G_{22}c_2}{9}\beta^4$$

$$S_{38} = S_{83} = \frac{F_{11}c_1c_2}{6}\alpha^4 + (D_{55} - B_{55}c_1 + F_{13}c_2 - F_{55}c_2 + D_{55}c_1c_2)\alpha^2 + \frac{F_{22}c_1c_2}{6}\beta^4 \\ + \left(\frac{F_{12}c_1c_2}{6} + \frac{F_{21}c_1c_2}{6} + \frac{2F_{44}c_1c_2}{3}\right)\alpha^2\beta^2 + (D_{66} - B_{66}c_1 + F_{23}c_2 - F_{66}c_2 + D_{66}c_1c_2)\beta^2$$

$$\begin{aligned}
S_{44} &= \left( \frac{G_{11}c_2^2}{9} - \frac{2E_{11}c_2}{3} + C_{11} \right) \alpha^2 + \left( \frac{G_{44}c_2^2}{9} - \frac{2E_{44}c_2}{3} + C_{44} \right) \beta^2 + E^{55}c_2^2 - 2C_{55}c_2 + A_{55} \\
S_{45} = S_{54} &= \left( C_{12} + C_{44} + \frac{G_{12}c_2^2}{9} + \frac{G_{44}c_2^2}{9} - \frac{2E_{12}c_2}{3} - \frac{2E_{44}c_2}{3} \right) \alpha\beta \\
S_{46} = S_{64} &= - \left( \frac{D_{11}}{2} - \frac{F_{11}c_2}{6} \right) \alpha^3 + \left( \frac{D_{13}c_2}{3} - B_{13} \right) \alpha - \left( \frac{D_{12}}{2} + D_{44} - \frac{F_{12}c_2}{6} - \frac{F_{44}c_2}{3} \right) \alpha\beta^2 \\
S_{47} = S_{74} &= - \left( \frac{E_{11}}{3} - \frac{G_{11}c_2}{9} \right) \alpha^3 + \left( \frac{2E_{13}c_2}{3} - 2C_{13} \right) \alpha - \left( \frac{E_{12}}{3} + \frac{2E_{44}}{3} - \frac{G_{12}c_2}{9} - \frac{2G_{44}c_2}{9} \right) \alpha\beta^2 \\
S_{48} = S_{84} &= - \left( \frac{D_{11}c_1}{2} - \frac{F_{11}c_1c_2}{6} \right) \alpha^3 + (D_{55} - 3D_{13} - B_{55}c_1 + F_{13}c_2 - F_{55}c_2 + D_{55}c_1c_2) \alpha \\
&\quad - \left( \frac{D_{12}c_1}{2} + D_{44}c_1 - \frac{F_{12}c_1c_2}{6} - \frac{F_{44}c_1c_2}{3} \right) \alpha\beta^2 \\
S_{55} &= \left( \frac{G_{44}c_2^2}{9} - \frac{2E_{44}c_2}{3} + C_{44} \right) \alpha^2 + \left( \frac{G_{22}c_2^2}{9} - \frac{2E_{22}c_2}{3} + C_{22} \right) \beta^2 + E_{66}c_2^2 - 2C_{66}c_2 + A_{66} \\
S_{56} = S_{65} &= - \left( \frac{D_{21}}{2} + D_{44} - \frac{F_{21}c_2}{6} - \frac{F_{44}c_2}{3} \right) \alpha^2\beta + \left( \frac{D_{23}c_2}{3} - B_{32} \right) \beta - \left( \frac{D_{22}}{2} - \frac{F_{22}c_2}{6} \right) \beta^3 \\
S_{57} = S_{75} &= - \left( \frac{E_{21}}{3} + \frac{2E_{44}}{3} - \frac{G_{21}c_2}{9} - \frac{2G_{44}c_2}{9} \right) \alpha^2\beta + \left( \frac{2E_{23}c_2}{3} - 2C_{23} \right) \beta - \left( \frac{E_{22}}{3} - \frac{G_{22}c_2}{9} \right) \beta^3 \\
S_{58} = S_{85} &= - \left( \frac{D_{21}c_1}{2} + D_{44}c_1 - \frac{F_{21}c_1c_2}{6} - \frac{F_{44}c_1c_2}{3} \right) \alpha^2\beta - \left( \frac{D_{22}c_1}{2} - \frac{F_{22}c_1c_2}{6} \right) \beta^3 \\
&\quad + (D_{66} - 3D_{23} - B_{66}c_1 + F_{23}c_2 - F_{66}c_2 + D_{66}c_1c_2) \beta \\
S_{66} &= \frac{E_{11}}{4} \alpha^4 + \left( \frac{C_{13}}{2} + \frac{C_{31}}{2} \right) \alpha^2 + \left( \frac{E_{12}}{4} + \frac{E_{21}}{4} + E_{44} \right) \alpha^2\beta^2 + \left( \frac{C_{23}}{2} + \frac{C_{32}}{2} \right) \beta^2 + \frac{E_{22}}{4} \beta^4 + A_{33} \\
S_{67} = S_{76} &= \frac{F_{11}}{6} \alpha^4 + \left( D_{13} + \frac{D_{31}}{3} \right) \alpha^2 + \left( \frac{F_{12}}{6} + \frac{F_{21}}{6} + \frac{2F_{44}}{3} \right) \alpha^2\beta^2 + \left( D_{23} + \frac{D_{32}}{3} \right) \beta^2 + \frac{F_{22}}{6} \beta^4 + 2B_{33} \\
S_{68} = S_{86} &= \frac{E_{11}c_1}{4} \alpha^4 + \left( \frac{3E_{13}}{2} + \frac{C_{31}c_1}{2} \right) \alpha^2 + \left( \frac{E_{12}c_1}{4} + \frac{E_{21}c_1}{4} + E_{44}c_1 \right) \alpha^2\beta^2 + \left( \frac{3E_{23}}{2} + \frac{C_{32}c_1}{2} \right) \beta^2 \\
&\quad + \frac{E_{22}c_1}{4} \beta^4 + 3C_{33} \\
S_{77} &= \frac{G_{11}}{9} \alpha^4 + \left( \frac{2E_{13}}{3} + \frac{2E_{31}}{3} \right) \alpha^2 + \left( \frac{G_{12}}{9} + \frac{G_{21}}{9} + \frac{4G_{44}}{9} \right) \alpha^2\beta^2 + \left( \frac{2E_{23}}{3} + \frac{2E_{32}}{3} \right) \beta^2 + \frac{G_{22}}{9} \beta^4 + 4C_{33} \\
S_{78} = S_{87} &= \frac{F_{11}c_1}{6} \alpha^4 (F_{31} + D_{31}c_1) \alpha^2 + \left( \frac{F_{12}c_1}{6} + \frac{F_{21}c_1}{6} + \frac{2F_{44}c_1}{3} \right) \alpha^2\beta^2 + (F_{32} + D_{32}c_1) \beta^2 + \frac{F_{22}c_1}{6} \beta^4 \\
&\quad + 6D_{33}
\end{aligned}$$

$$S_{88} = \frac{E_{11}c_1^2}{4}\alpha^4 + \left( G_{55} + C_{55}c_1^2 + \frac{3E_{13}c_1}{2} + \frac{3E_{31}c_1}{2} - 2E_{55}c_1 \right)\alpha^2 + \left( \frac{E_{12}c_1^2}{4} + \frac{E_{21}c_1^2}{4} + E_{44}c_1^2 \right)\alpha^2\beta^2$$

$$+ \left( G_{66} + C_{66}c_1^2 + \frac{3E_{23}c_1}{2} + \frac{3E_{32}c_1}{2} - 2E_{66}c_1 \right)\beta^2 + \frac{E_{22}c_1^2}{4}\beta^4 + 9E_{33}$$

### **III.6. Conclusion :**

Dans ce chapitre, L'analyse du comportement statique des plaques FG simplement appuyées en matériau fonctionnellement graduées (FGM) sont examinées par une nouvelle théorie des plaques de déformation en cisaillement à huit variables. Les solutions analytiques pour les plaques FG sont obtenues à l'aide de la solution Navier.

Les résultats obtenus pour une plaque avec la présente théorie sont précis parce que cette dernière prend en considération l'effet de cisaillement transverse et en même temps l'effet de l'étirement de la section ( $\varepsilon_z \neq 0, \sigma_z \neq 0$ ). Une validation des résultats par la présente théorie d'ordre élevée à huit inconnues ainsi qu'une étude paramétrique seront fait dans le chapitre suivant.

# ***CHAPITRE IV***

***Résultats &***

***Discussions***

**VI.1 : Introduction :**

Dans ce chapitre la solution analytique obtenue dans le chapitre précédent pour l'analyse du comportement statique des plaque FG ont été obtenues par la solution de Navier. Les résultats numériques obtenus par la présente théorie de déformation en cisaillement à huit inconnues sont présentés, et comparés à ceux disponibles dans la littérature pour voir vérifier l'exactitude de la présente théorie.

**VI.2 : Résultats et discussion :**

Un code Maple est construit sur la base de la formulation théorique actuelle pour l'analyse de flexion des plaques FG simplement supportées. Les propriétés des matériaux des plaques FG sont présentées dans le tableau.VI.1. Les contraintes de déflexion, dans le plan et transversales sont présentées sous la forme sans dimension suivante pour plus de commodité.

Tableau.VI.1 Propriétés des matériaux de la plaque FG.

Propriétés	Métal	Céramique
	Aluminium (Al)	Alumine (Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub> )
$E$ (GPa)	70	380
$\nu$	0.3	0.3

Les paramètres adimensionnels suivants sont utilisés dans l'étude actuelle :

$$\begin{aligned} \bar{w} &= \frac{10E_c h^3}{q_0 a^4} w\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, 0\right); & \bar{\sigma}_x(x) &= \frac{h}{q_0 a} \sigma_x\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, z\right) \\ \bar{\sigma}_y(z) &= \frac{h}{q_0 a} \sigma_y\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, z\right); & \bar{\sigma}_{xy}(z) &= \frac{h}{q_0 a} \sigma_{xy}(0, 0, z) \\ \bar{\sigma}_{xz}(z) &= \frac{h}{q_0 a} \sigma_{xz}\left(0, \frac{b}{2}, z\right); & \bar{\sigma}_{yz}(z) &= \frac{h}{q_0 a} \sigma_{yz}\left(\frac{a}{2}, 0, z\right) \end{aligned}$$

Afin de valider la précision, l'exemple 1 donne les résultats numériques en utilisant le présent "HSDT" à huit inconnus.

Les résultats obtenus sont comparés à d'autres théories de déformation par cisaillement disponibles dans la littérature.

Dans les exemples suivants, les différents résultats numériques sont présentés pour étudier les effets de l'indice de loi de puissance, du rapport d'aspect, du rapport d'aspect (côté / épaisseur) sur le comportement en flexion des plaques FG.

Ces résultats numériques renforcent également l'efficacité du "HSDT" actuel à huit inconnus en comparaison avec d'autres théories de déformations de cisaillement.

Les modèles de déformation par cisaillement suivants les théories sont utilisées dans cette section :

$$\begin{aligned}
 & u = u_0 + z\theta_x + z^2 u_0^* + z^3 \theta_x^* \\
 \text{HSDT-12 : } & v = v_0 + z\theta_y + z^2 v_0^* + z^3 \theta_y^* \\
 & w = w_0 + z\theta_z + z^2 w_0^* + z^3 \theta_z^* \\
 & u = u_0 + z\theta_x + z^2 u_0^* + z^3 \theta_x^* \\
 \text{HSDT-9: } & v = v_0 + z\theta_y + z^2 v_0^* + z^3 \theta_y^* \\
 & u = u_0 + z\theta_x - z^3 \frac{4}{3h^2} (\theta_x + \partial w_0 / \partial_x) \\
 \text{HSDT-5: } & v = v_0 + z\theta_y - z^3 \frac{4}{3h^2} (\theta_y + \partial w_0 / \partial_y) \\
 & w = w_0 \\
 & u = u_0 + z\theta_x + z^3 \theta_x^* \\
 \text{Quasi-3D HSDT: } & v = v_0 + z\theta_y + z^3 \theta_y^* \\
 & w = w_0 + z\theta_z + z^2 w_0^*
 \end{aligned}$$

### VI.3. Exemple 1 - Vérification :

Une plaque FG carrée simplement épaisse ( $a/h = 10$ ) simplement supportée sous une charge transversale uniformément répartie est considérée. Le tableau.VI.2 présente la flèche et les contraintes sans dimension pour différentes valeurs de l'indice de loi de puissance  $p$ . Les résultats numériques utilisant le HSDT à huit inconnus actuels sont comparés à ceux utilisant la théorie de déformation de cisaillement généralisée de Zenkour à cinq inconnues (Zenkour 2006) [35] et la théorie de déformation de cisaillement simple du premier ordre à quatre inconnues de Thai (Thai et Choi 2013) [75]. On peut voir qu'un bon accord est obtenu pour toutes les valeurs de l'indice de loi de puissance  $p$ . Il existe une différence plus importante pour les contraintes ( $\bar{\sigma}_{xz}, \bar{\sigma}_{yz}$ ) en raison de la négligence de  $\varepsilon_z$  dans les œuvres de Zenkour et Thai.

**Tableau.VI.2** Déformation et contraintes sans dimension des plaques carrées sous charges uniformes ( $a/h = 10$ ).

$P$	Method	$\bar{w}$	$\bar{\sigma}_x(h/2)$	$\bar{\sigma}_y(h/3)$	$\bar{\sigma}_{xy}(-h/3)$	$\bar{\sigma}_{xz}(0)$	$\bar{\sigma}_{yz}(h/6)$
0	Zenkour (2006)	0.4665	2.8932	1.9103	1.2850	0.4429	0.5114
	Thai et al (2013)	0.4666	2.8732	1.9155	1.2990	0.4004	0.4004
	Présente	0.4640	2.9050	1.9229	1.2855	0.4881	0.4351
1	Zenkour (2006)	0.9287	4.4745	2.1692	1.1143	0.5446	0.5114
	Thai et al (2013)	0.9288	4.4407	2.1767	1.1218	0.4923	0.4004
	Présente	0.9266	4.4851	2.1819	1.1113	0.4871	0.5349
2	Zenkour (2006)	1.1940	5.2296	2.0338	0.9907	0.5734	0.4700
	Thai et al (2013)	1.1909	5.1853	2.0441	0.9998	0.4799	0.3407
	Présente	1.1925	5.2394	2.0466	0.9909	0.4457	0.5610
3	Zenkour (2006)	1.3200	5.6108	1.8593	1.0047	0.5629	0.4367
	Thai et al (2013)	1.3123	5.5576	1.8719	1.0160	0.4393	0.2952
	Présente	1.3187	5.6173	1.8724	1.0074	0.4123	0.5201
4	Zenkour (2006)	1.3890	5.8915	1.7191	1.0298	0.5346	0.4204
	Thai et al (2013)	1.3770	5.8316	1.7338	1.0427	0.3981	0.2711
	Présente	1.3874	5.8940	1.7331	1.0341	0.3959	0.5201
5	Zenkour (2006)	1.4356	6.1504	1.6104	1.0451	0.5031	0.4177
	Thai et al (2013)	1.4205	6.0857	1.6252	1.0591	0.3647	0.2622
	Présente	1.4338	6.1493	1.6240	1.0504	0.3930	0.4893
6	Zenkour (2006)	1.4727	6.4043	1.5214	1.0536	0.4755	0.4227
	Thai et al (2013)	1.4555	6.3364	1.5364	1.0683	0.3406	0.2622
	Présente	1.4706	6.4005	1.5350	1.0594	0.3979	0.4629
7	Zenkour (2006)	1.5049	6.6547	1.4467	1.0589	0.4543	0.4310
	Thai et al (2013)	1.4867	6.5847	1.4615	1.0740	0.3245	0.2666
	Présente	1.5026	6.6489	1.4599	1.0649	0.4062	0.4429
8	Zenkour (2006)	1.5343	6.8999	1.3829	1.0628	0.4392	0.4399
	Thai et al (2013)	1.5158	6.8287	1.3973	1.0782	0.3147	0.2730
	Présente	1.5317	6.8929	1.3958	1.0689	0.4152	0.4289
9	Zenkour (2006)	1.5617	7.1383	1.3283	1.0662	0.4291	0.4481
	Thai et al (2013)	1.5433	7.0663	1.3422	1.0819	0.3095	0.2799
	Présente	1.5590	7.1306	1.3408	1.0723	0.4236	0.4197
10	Zenkour (2006)	1.5876	7.3689	1.2820	1.0694	0.4227	0.4552
	Thai et al (2013)	1.5697	7.2963	1.2953	1.0853	0.3074	0.2867
	Présente	1.5847	7.3608	1.2940	1.0755	0.4310	0.4141

La déviation centrale sans dimension et la contrainte normale  $\bar{\sigma}_x(h/3)$  de la théorie actuelle de déformation de cisaillement d'ordre supérieur sont donnés dans le tableau.VI.3.

**Tableau.VI.3** Flèche sans dimension et contraintes des plaques carrées sous charges bi-sinusoidales

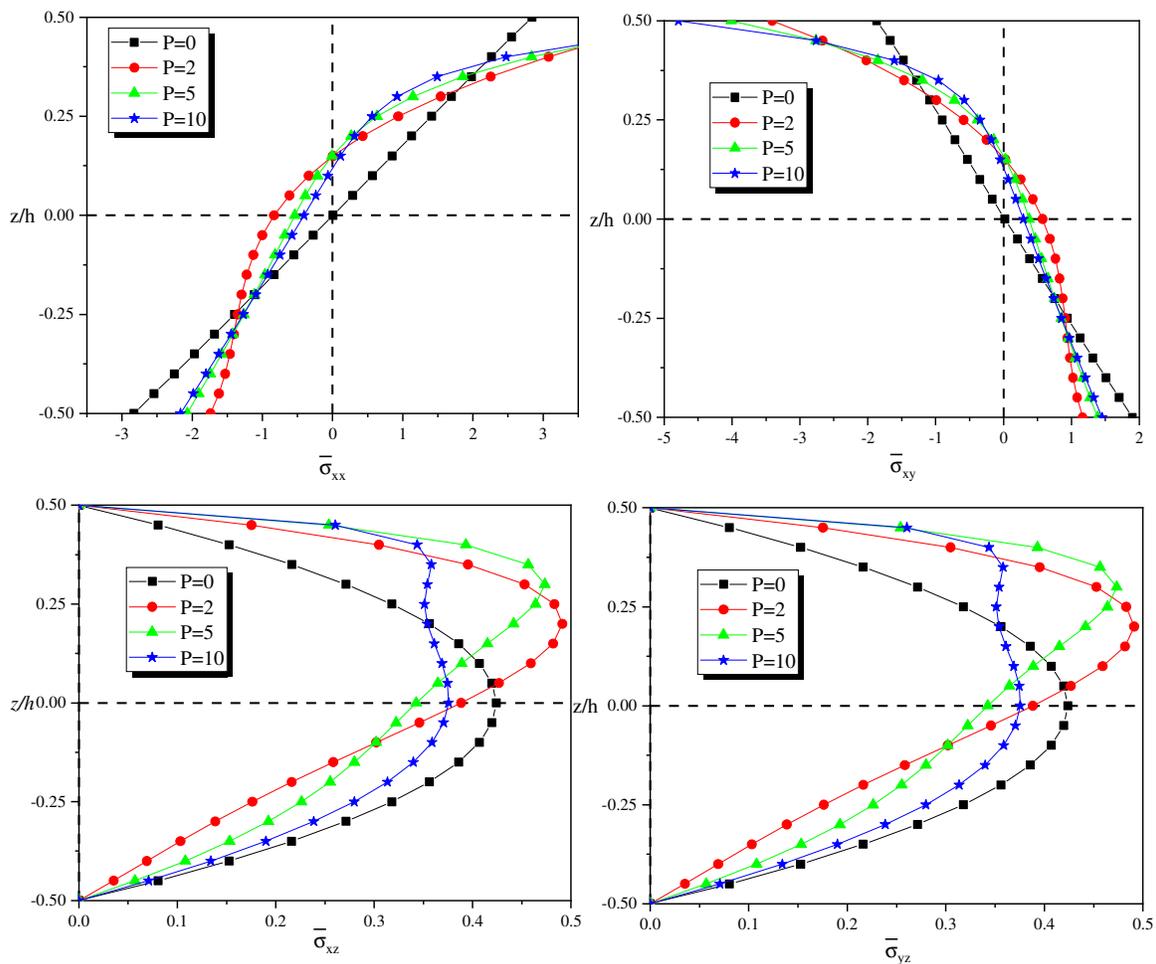
$P$	$a/h$	$\bar{\sigma}_x(h/3)$			$\bar{w}$		
		4	10	100	4	10	100
0	Neves et al. (2013)	0.5278	1.3176	13.1610	0.3665	0.2942	0.2803
	Présente	0.5475	1.3252	13.1726	0.3665	0.2943	0.2804
0.5	Neves et al. (2013)	0.5860	1.4680	14.6730	0.5493	0.4548	0.4365
	Présente	0.6028	1.4713	14.6458	0.5534	0.4520	0.4325
1	Neves et al. (2013)	0.5911	1.4917	14.9450	0.7020	0.5868	0.5647
	Carera et al. (2008)	0.6221	1.5064	14.9690	0.7171	0.5875	0.5625
	Carera et al. (2011)	0.6221	1.5064	14.9690	0.7171	0.5875	0.5625
	Neves et al. (2012)	0.5925	1.4945	14.9690	0.6997	0.5845	0.5624
	Présente	0.6114	1.5021	14.9688	0.7020	0.5875	0.5625
	Neves et al. (2013)	0.4330	1.1588	11.7370	1.1108	0.8700	0.8240
4	Carera et al. (2008)	0.4877	1.1971	11.9230	1.1585	0.8821	0.8286
	Carera et al. (2011)	0.4877	1.1971	11.9230	1.1585	0.8821	0.8286
	Neves et al. (2012)	0.4404	1.1783	11.9320	1.1178	0.8750	0.8286
	Présente	0.4724	1.1909	11.9221	1.1517	0.8808	0.8287
	Neves et al. (2013)	0.3097	0.8462	8.6010	1.3334	0.9888	0.9227
10	Carera et al. (2008)	0.3695	0.8965	8.9077	1.3745	1.0072	0.9361
	Carera et al. (2011)	0.1478	0.8965	8.9077	1.3745	1.0072	0.9361
	Neves et al. (2012)	0.3227	1.1783	11.9320	1.3490	0.8750	0.8286
	Présente	0.3493	0.8885	8.9070	1.3748	1.0069	0.9362

Les résultats sont ceux d'une plaque FG carrée simplement supportée avec une charge mécanique transversale bi-sinusoidale appliquée à la surface de la plaque supérieure.

Trois rapports d'aspect (côté / épaisseur) ( $a/h = 4, 10$  et  $100$ ) et cinq indices de loi de puissance ( $p = 0, 0,5, 1, 4$  et  $10$ ) sont considérés. Les résultats, qui représentent  $\varepsilon_z$ , sont comparés à ceux de Neves et al. (2013) [76] utilisant une théorie de déformation par cisaillement d'ordre supérieur quasi-3D faite par des techniques sans maillage, celles de Neves et al. (2012) [78] utilisant une théorie de déformation par cisaillement sinusoidal quasi-3D, et celles de Carrera et al. (2008, 2011) [79] [80].

D'après le tableau.VI.3, on pourrait conclure que le HSDT actuel présente des résultats très proches de la théorie de la déformation par cisaillement d'ordre supérieur quasi-3D.

**La figure.VI.1 :** représente les distributions à travers l'épaisseur des contraintes dans le plan sans dimension et des contraintes de cisaillement transversales aux positions spécifiées de la plaque FG carrée sous une charge uniforme avec un indice de loi de puissance  $p$  variable.



**Fig.VI.1** Variation des contraintes adimensionnelles à travers l'épaisseur des plaques carrées sous des charges uniformes ( $a = b = 10h$ ).

Notez que les HSDT actuels à huit inconnus prennent en compte l'effet d'étirement de l'épaisseur ( $\epsilon_z \neq 0$ ), mais les autres néglige l'effet d'étirement de l'épaisseur. Le HSDT actuel présente une meilleure représentation des contraintes transversales de cisaillement ( $\sigma_{xz}$ ,  $\sigma_{yz}$ ), elles sont

nulles en haut et en bas des plaques FG ; tandis que selon les d'autres théories, la disparition des contraintes transversales sur les surfaces supérieure et inférieure n'est pas satisfaite.

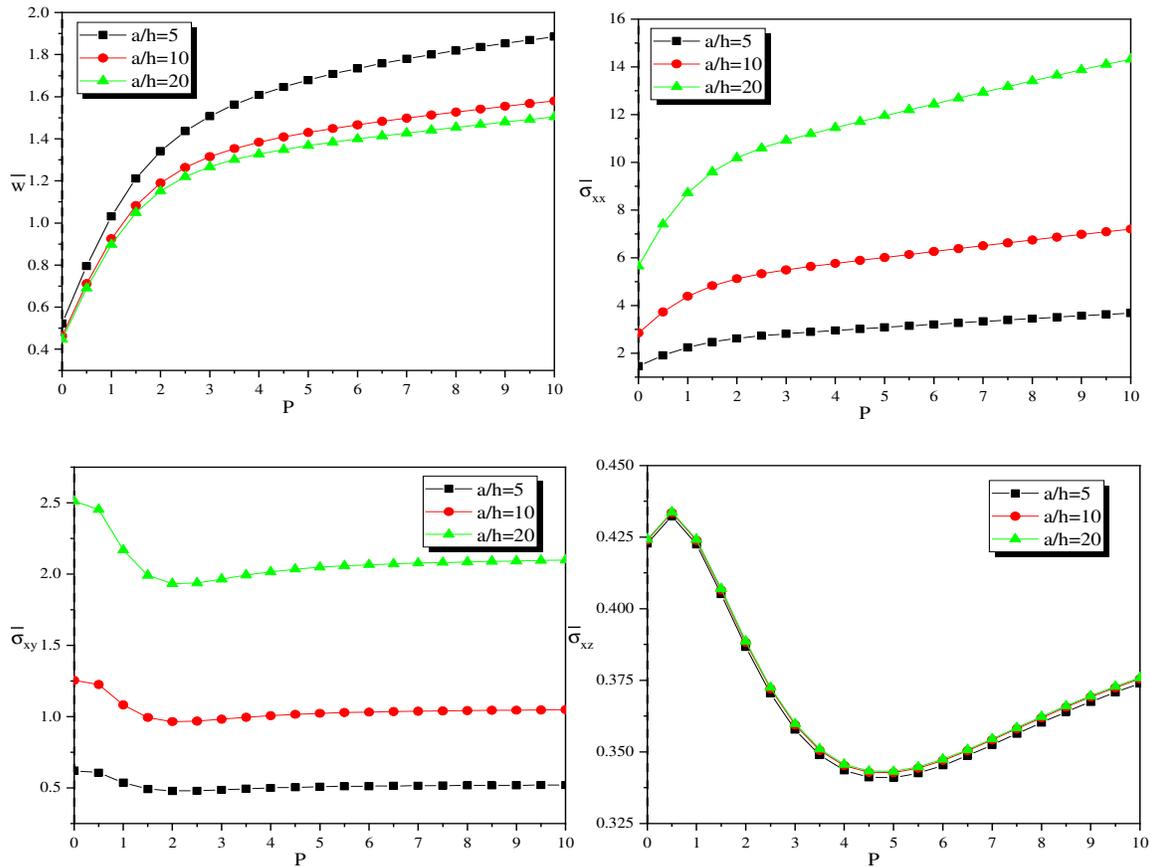
**VI.4. Exemple 2 :** On considère une plaque FG carrée à support simple d'épaisseur moyenne ( $a = b = 10h$ ) sous une charge uniforme.

Le tableau.VI.4 contient la déviation sans dimension et les contraintes pour différentes valeurs de l'indice de loi de puissance  $p$ .

**Tableau.VI.4** Déformation et contraintes sans dimension des plaques carrées sous charges uniformes ( $a/h = 10$ ) avec différentes valeurs d'indice de loi de puissance  $p$ .

$P$	Method	$\bar{w}$	$\bar{\sigma}_x(h/2)$	$\bar{\sigma}_y(h/3)$	$\bar{\sigma}_{xy}(-h/3)$	$\bar{\sigma}_{xz}(0)$	$\bar{\sigma}_{yz}(h/6)$
0	FSDT	0.4666	2.8726	1.9150	1.2975	0.3927	0.3927
	HSDT-5	0.4666	2.8901	1.9105	1.2861	0.4890	0.4347
	HSDT-9	0.4666	2.8905	1.9104	1.2870	0.4877	0.4342
	HSDT-12	0.4640	2.9064	1.9226	1.2892	0.4864	0.4364
	Présente	0.4640	2.9050	1.9229	1.2855	0.4881	0.4351
1	FSDT	0.9288	4.4397	2.1762	1.1205	0.3927	0.4829
	HSDT-5	0.9288	4.4694	2.1696	1.1144	0.4890	0.5345
	HSDT-9	0.9289	4.4730	2.1700	1.1135	0.4876	0.5222
	HSDT-12	0.9268	4.4881	2.1821	1.1122	0.4855	0.5236
	Présente	0.9266	4.4851	2.1819	1.1113	0.4871	0.5349
3	FSDT	1.3123	5.5564	1.8715	1.0148	0.2896	0.4310
	HSDT-5	1.3197	5.6030	1.8605	1.0057	0.4144	0.5482
	HSDT-9	1.3209	5.6183	1.8596	1.0032	0.4254	0.5336
	HSDT-12	1.3199	5.6301	1.8715	1.0059	0.4231	0.5346
	Présente	1.3187	5.6173	1.8724	1.0074	0.4123	0.5487
5	FSDT	1.4205	6.0843	1.6249	1.0579	0.2572	0.3577
	HSDT-5	1.4349	6.1411	1.6120	1.0466	0.3950	0.4883
	HSDT-9	1.4360	6.1573	1.6099	1.0447	0.4080	0.4861
	HSDT-12	1.4349	6.1649	1.6215	1.0494	0.4059	0.4871
	Présente	1.4338	6.1493	1.6240	1.0504	0.3930	0.4893
10	FSDT	1.5696	7.2947	1.2950	1.0840	0.2812	0.3015
	HSDT-5	1.5872	7.3588	1.2834	1.0711	0.4326	0.4123
	HSDT-9	1.5875	7.3644	1.2822	1.0711	0.4415	0.4199
	HSDT-12	1.5850	7.3694	1.2921	1.0767	0.4397	0.4213
	Présente	1.5847	7.3608	1.2940	1.0755	0.4310	0.4141

La figure.VI.2 : montre la variation de la déflexion sans dimension  $\bar{w}$ , des contraintes dans le plan ( $\sigma_x, \sigma_{xy}$ ) et des contraintes transversales  $\bar{\sigma}_{xz}$  en fonction de l'indice de loi de puissance  $p$  des plaques carrées sous des charges uniformes. On observe que la flèche sans dimension  $\bar{w}$  et la contrainte normale  $\sigma_x$  augmentent à mesure que l'indice de loi de puissance augmente.



**Fig.VI.2** Variation de la flèche sans dimension  $w$ , contraintes dans le plan, ( $\sigma_x, \sigma_{xy}$ ) contrainte transversale ( $\sigma_{xz}, \sigma_{yz}$ ) en fonction de l'indice de loi de puissance  $p$  des plaques carrées sous des charges uniformes ( $a = b = 10h$ ).

La contrainte dans le plan  $\bar{\sigma}_x$  augmente avec l'augmentation de l'indice de loi de puissance. La contrainte transversale  $\bar{\sigma}_{xy}$  change légèrement dans la plage de  $p$  de 0 à 1, diminue dans la plage de  $p$  de 1 à 2, puis augmente lentement avec l'augmentation de l'indice de loi de puissance. La contrainte transversale  $\bar{\sigma}_{yz}$  diminue dans la plage de  $p$  de 0 à 5, puis augmente avec l'augmentation de l'indice de loi de puissance.

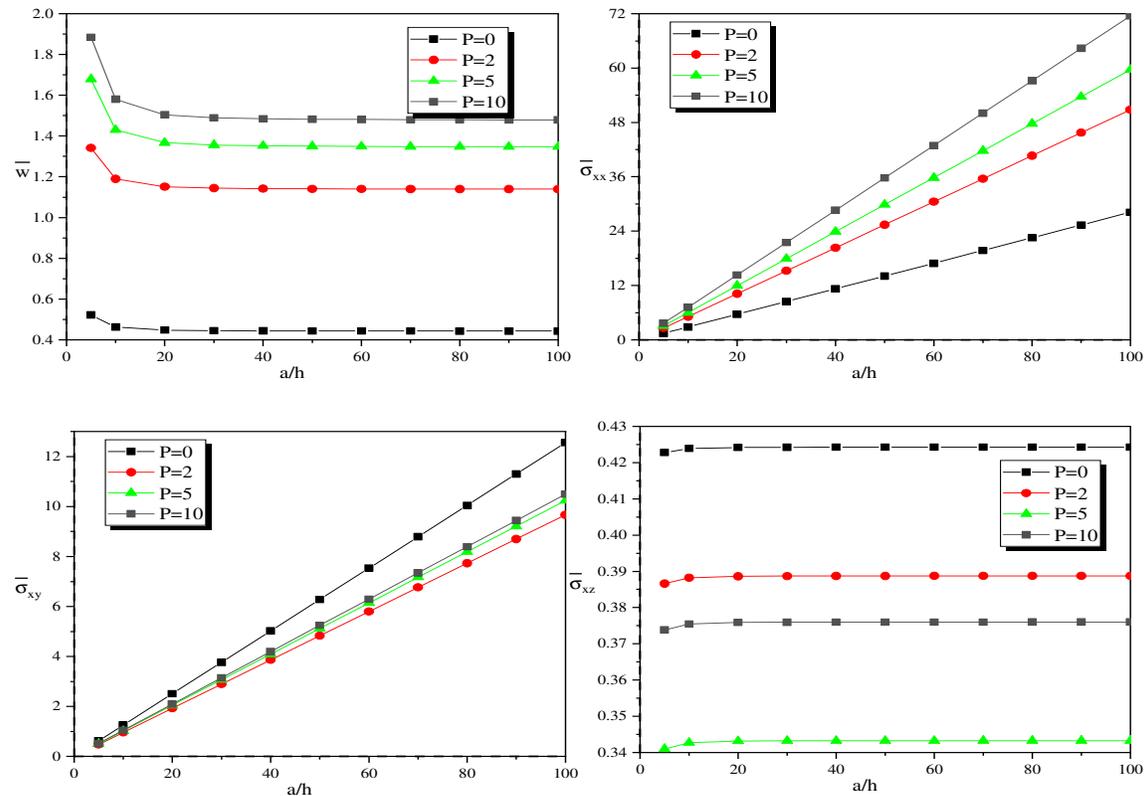
Les résultats actuels du HSDT à huit inconnues montrent un bon accord avec les solutions de d'autres chercheurs.

**VI.5 Exemple3.** Une plaque FG carrée simplement supportée sous une charge uniforme est considérée. Le tableau.VI.5 montre une déflexion sans dimension et des contraintes dont le rapport côté / épaisseur varie de 5 à 100 ( $p = 5$ ).

**Tableau.VI.5** Déformation et contraintes sans dimension des plaques carrées sous des charges uniformes ( $a = b, p = 5$ ) avec différentes valeurs du côté à l'épaisseur  $/h$ .

P	Method	$\bar{w}$	$\bar{\sigma}_x(h/2)$	$\bar{\sigma}_y(h/3)$	$\bar{\sigma}_{xy}(-h/3)$	$\bar{\sigma}_{xz}(0)$	$\bar{\sigma}_{yz}(h/6)$
5	FSDT	1.6358	3.0422	0.8124	0.5289	0.2572	0.3577
	HSDT-5	1.6929	3.1578	0.7863	0.5079	0.3895	0.4815
	HSDT-9	1.6969	3.1909	0.7820	0.5066	0.4003	0.4793
	HSDT-12	1.6911	3.2097	0.8052	0.5090	0.3914	0.4796
	Présente	1.6871	3.1804	0.8103	0.5070	0.3813	0.4810
10	FSDT	1.4205	6.0843	1.6249	1.0579	0.2572	0.3577
	HSDT-5	1.4349	6.1411	1.6120	1.0466	0.3950	0.4883
	HSDT-9	1.4360	6.1573	1.6099	1.0447	0.4080	0.4861
	HSDT-12	1.4349	6.1649	1.6215	1.0494	0.4059	0.4871
	Présente	1.4338	6.1493	1.6240	1.0504	0.3930	0.4893
20	FSDT	1.3666	12.1686	3.2497	2.1157	0.2572	0.3577
	HSDT-5	1.3703	12.1968	3.2434	2.1099	0.3966	0.4903
	HSDT-9	1.3705	12.2044	3.2424	2.1085	0.4109	0.4885
	HSDT-12	1.3703	12.2087	3.2480	2.1127	0.4106	0.4888
	Présente	1.3700	12.2018	3.2490	2.1141	0.3963	0.4908
50	FSDT	1.3516	30.4216	8.1243	5.2893	0.2572	0.3577
	HSDT-5	1.3521	30.4328	8.1217	5.2869	0.3971	0.4909
	HSDT-9	1.3522	30.4358	8.1214	5.2863	0.4118	0.4893
	HSDT-12	1.3521	30.4379	8.1235	5.2883	0.4118	0.4893
	Présente	1.3521	30.4353	8.1239	5.2890	0.3971	0.4910
100	FSDT	1.3494	60.8432	16.2486	10.5785	0.2572	0.3577
	HSDT-5	1.3496	60.8488	16.2473	10.5774	0.3972	0.4910
	HSDT-9	1.3496	60.8503	16.2471	10.5770	0.4120	0.4894
	HSDT-12	1.3496	60.8514	16.2482	10.5781	0.4120	0.4894
	Présente	1.3495	60.8501	16.2484	10.5784	0.3972	0.4910

La figure.VI.3 : présente la variation de la déflexion sans dimension  $\bar{w}$ , contraintes dans le plan  $(\bar{\sigma}_x, \bar{\sigma}_{xy})$ , contrainte transversale  $\bar{\sigma}_{yz}$  par rapport au rapport  $a/h$ . On peut voir que le nouveau HSDT proposé donne des résultats de flexions très satisfaisantes par rapport de littératures ainsi que les contraintes pour toutes les valeurs du rapport d'aspect. La flèche adimensionnelle augmente lorsque le rapport d'aspect diminue.



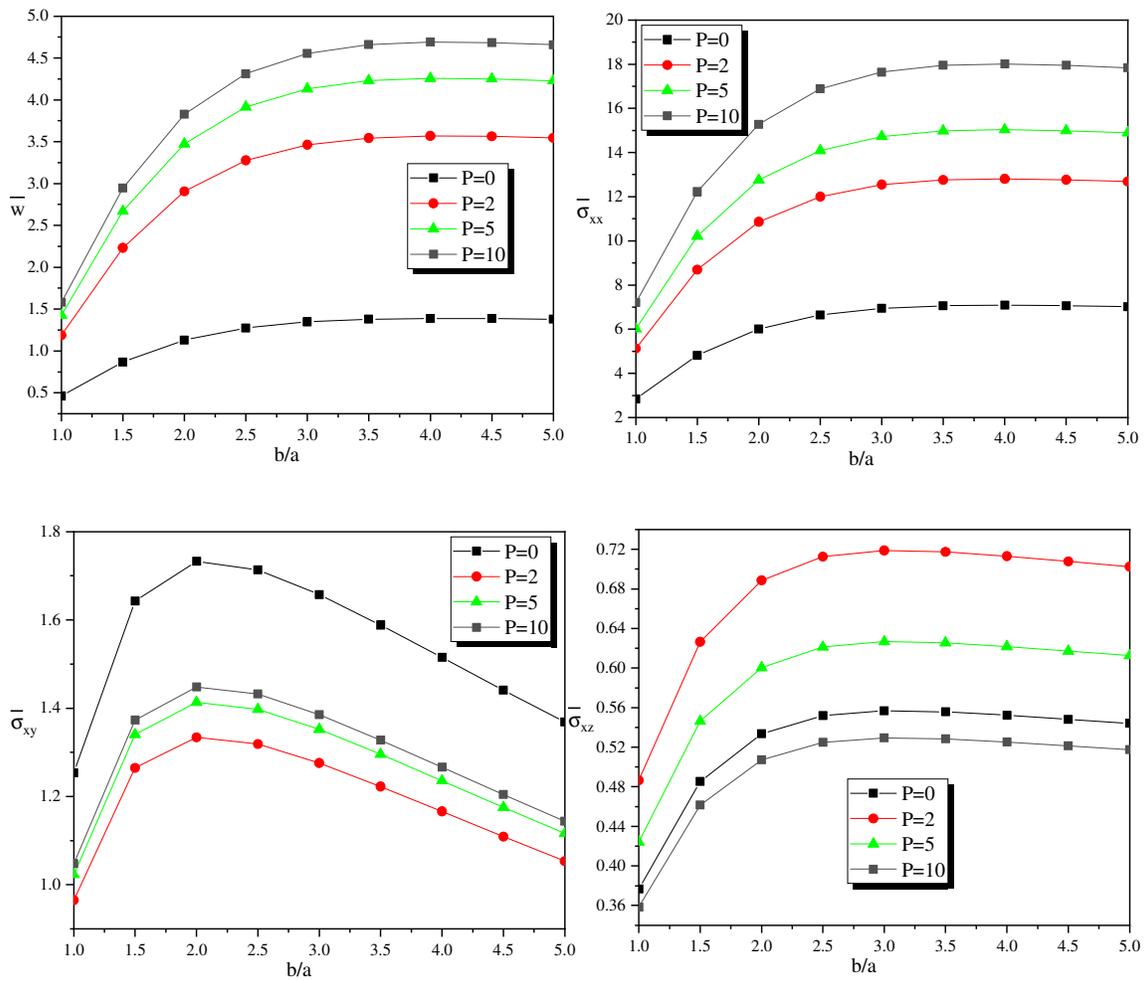
**Fig.VI.3** Variation de la flèche sans dimension  $\bar{w}$ , contraintes dans le plan  $(\sigma_x, \sigma_{xy})$ , contrainte transversale  $(\sigma_{xz}, \sigma_{yz})$  en fonction du rapport d'épaisseur latérale  $a/h$  des plaques carrées sous des charges uniformes ( $a = b$ ).

Les résultats présentés sur le tableau.VI.5 et le graphique de la figure.VI.3 montrent également que pour les plaques épaisses ( $a/h = 5$ ) le HSDT proposé donne des résultats plus précis. La prise en compte d'une déformation normale non nulle  $\varepsilon_z$  produit de plus grandes différences dans les contraintes de cisaillement transversales. L'effet des contraintes de cisaillement transversales nulles aux surfaces supérieure et inférieure est évident par des résultats proches entre HSDT proposés pour  $(\bar{\sigma}_{xz}, \bar{\sigma}_{yz})$ .

**VI .6. Exemple 4 :** On considère une plaque FG carrée simplement supportée sous une charge uniforme ( $a/h = 10, p = 5$ ). La déviation sans dimension et les contraintes avec différents rapports d'aspect sont données dans le tableau.VI.6. La variation de la flèche sans dimension et les contraintes avec le rapport d'aspect est représentée sur la figure.VI.4. Comme le montrent les résultats, les calculs basés sur HSDT actuel à huit inconnus sont encore une fois en bon accord avec ceux prévus par d'autres HSDT. La flèche et les contraintes ( $\bar{\sigma}_{xx}, \bar{\sigma}_{xz}$ ) augmentent à mesure que le rapport  $b/a$  augmente. Par contre la contrainte ( $\bar{\sigma}_{xy}$ ) augment puis diminue à mesure que le rapport  $b/a$  augmente.

**Tableau.VI.6** Déformation et contraintes sans dimension des plaques rectangulaires sous des charges uniformes ( $a/h = 10$ ) avec différentes valeurs de rapport d'aspect  $b/a$

P	Method	$\bar{w}$	$\bar{\sigma}_x(h/2)$	$\bar{\sigma}_y(h/3)$	$\bar{\sigma}_{xy}(-h/3)$	$\bar{\sigma}_{xz}(0)$	$\bar{\sigma}_{yz}(h/6)$
5	FSDT	1.4205	6.0843	1.6249	1.0579	0.2572	0.3577
	HSDT-5	1.4349	6.1411	1.6120	1.0466	0.3950	0.4883
	HSDT-9	1.4360	6.1573	1.6099	1.0447	0.4080	0.4861
	HSDT-12	1.4349	6.1649	1.6215	1.0494	0.4059	0.4871
	Présente	1.4338	6.1493	1.6240	1.0504	0.3930	0.4893
10	FSDT	3.4736	12.9202	1.5719	1.5049	0.3570	0.3818
	HSDT-5	3.4960	13.0021	1.5649	1.4943	0.5490	0.5227
	HSDT-9	3.4976	13.0245	1.5637	1.4921	0.5678	0.5205
	HSDT-12	3.4960	13.0121	1.5843	1.4982	0.5657	0.5211
	Présente	3.4943	12.9902	1.5857	1.5002	0.5471	0.5236
20	FSDT	4.1807	15.1016	1.3763	1.5378	0.3784	0.3724
	HSDT-5	4.2048	15.1891	1.3705	1.5282	0.5821	0.5102
	HSDT-9	4.2066	15.2129	1.3696	1.5260	0.6021	0.5082
	HSDT-12	4.2048	15.1963	1.3921	1.5323	0.6000	0.5085
	Présente	4.2030	15.1731	1.3933	1.5344	0.5801	0.5108
50	FSDT	4.3768	15.6838	1.2994	1.5338	0.3825	0.3614
	HSDT-5	4.4012	15.7725	1.2939	1.5249	0.5885	0.4954
	HSDT-9	4.4031	15.7966	1.2930	1.5228	0.6087	0.4935
	HSDT-12	4.4013	15.7791	1.3159	1.5290	0.6066	0.4937
	Présente	4.3995	15.7557	1.3171	1.5311	0.5864	0.4959
100	FSDT	4.4274	15.8291	1.2743	1.5257	0.3830	0.3504
	HSDT-5	4.4519	15.9180	1.2688	1.5174	0.5893	0.4804
	HSDT-9	4.4537	15.9421	1.2680	1.5154	0.6096	0.4786
	HSDT-12	4.4520	15.9246	1.2910	1.5215	0.6075	0.4788
	Présente	4.4501	15.9011	1.2921	1.5234	0.5873	0.4808



**Fig.VI.4** Variation de la déflexion sans dimension  $\bar{w}$ , contraintes dans le plan ( $\sigma_x, \sigma_{xy}$ ), contrainte transversale ( $\sigma_{xz}, \sigma_{yz}$ ) en fonction de divers rapports d'aspect  $b/a$  des plaques rectangulaires sous des charges uniformes ( $a = 10h$ ).

**VI.7. Conclusion :**

Une nouvelle théorie de déformation de cisaillement huit inconnues pour l'analyse du comportement statique des plaques FG est étudiée. Cette nouvelle théorie de déformation de cisaillement à huit inconnues a été proposée pour prédire la flèche, les contraintes normale et les contraintes de cisaillement.

Les études de vérification démontrent que la théorie développée est non seulement précise mais aussi puissante dans la prédiction des réponses statique des plaques FG.

La précision la présente étude est vérifiée en le comparant notre solution aux solutions existantes. Un excellent accord a été observé dans tous les cas, par conséquent, on peut dire que la présente théorie proposée est précise et puissante dans la résolution du comportement statique des plaques FG.

***CONCLUSION***

***GENERALE***

### Conclusion générale

Le nouveau HSDT à huit inconnus est proposé basé sur un HSDT complet à douze inconnus et satisfait les contraintes transversales nulle à la surface supérieure et inférieure des plaques FG. Le comportement statique des plaques FG simplement supportées est étudié, la flèche et les contraintes sous un chargement uniformément répartie sont analysées. La précision des solutions numériques a été établie par rapport aux résultats connus dans les littératures disponibles. Le HSDT actuel donne des résultats plus précis pour les plaques FG épaisses que les autres HSDT en tenant compte des contraintes d'étirement normales et des contraintes de cisaillement transversales nulles sur les surfaces supérieure et inférieure des plaques FG. De plus, la formulation présentée pour les plaques FG implique un calcul plus petit par rapport à la théorie complète de la déformation par cisaillement d'ordre supérieur à douze inconnus.

Les résultats numériques pour un chargement uniforme doivent servir de référence pour tout autre modèle analytique des plaques FG.

***REFERANCE***

***BIBLIOGRPHIE***

### Références

- [1] Birman et Byrd (2007), Birman, V. and Byrd, L.W. (2007), “Modeling and analysis of functionally graded materials and structures”, *Appl. Mech. Rev.*, **60**(5), 195-216
- [2] Jha et al. (2013), Jha, D.K., Kant, T. and Singh, R.K. (2013), “A critical review of recent research on functionally graded plates”, *Compos. Struct.*, **96**, 833-849.
- [3] Swaminathan et al. (2015) Swaminathan, K., Naveenkumar, D.T., Zenkour, A.M. and Carrera, E. (2015), “Stress, vibration and buckling analyses of FGM plates-A state-of-the-art review”, *Compos. Struct.*, **120**, 10-31
- [4] Apuzzo et al. (2015), Apuzzo, A., Barretta, R. and Luciano, R. (2015), “Some analytical solutions of functionally graded Kirchhoff plates”, *Compos. Part B: Eng.*, **68**, 266-269.
- [5] Barretta et Luciano (2014), Barretta, R. and Luciano, R. (2014), “Exact solutions of isotropic viscoelastic functionally graded Kirchhoff plates”, *Compos. Struct.*, **118**, 448-454
- [6] Chi et Chung (2006), Chi, S.H. and Chung, Y.L. (2006), “Mechanical behavior of functionally graded material plates under transverse load – Part I: Analysis”, *Int. J. Solid. Struct.*, **43**(13), 3657-3674
- [7] Jedrysiak et Michalak (2011), Jedrysiak, J. and Michalak, B. (2011), “On the modeling of stability problems for thin plates with functionally graded structure”, *Thin Wall. Struct.*, **49**(5), 627-635
- [8] Yang et Shen (2001), Yang, J. and Shen, H.S. (2001), “Dynamic response of initially stressed functionally graded rectangular thin plates”, *Compos. Struct.*, **54**(4), 497-508
- [9] Lu et al. (2006), Lu, P., He, L., Lee, H. and Lu, C. (2006), “Thin plate theory including surface effects”, *Int. J. Solid. Struct.*, **43**(16), 4631- 4647.
- [10] Arani, A.G., Kolahchi, R. and Esmailpour, M. (2016), “Nonlinear vibration analysis of piezoelectric plates reinforced with carbon nanotubes using DQM”, *Smart Struct. Syst.*, **18**(4), 787-800.
- [11] Hosseini-Hashemi et Al. (2010, 2011). Hosseini-Hashemi, S., Taher, H.R.D., Akhavan, H. and Omidi, M. (2010), “Free vibration of functionally graded rectangular plates using first-order shear deformation plate theory”, *Appl. Math. Model.*, **34**(5), 1276-1291.
- [12] Hosseini-Hashemi, S., Fadaee, M. and Atashipour, S.R. (2011), “A new exact analytical approach for free vibration of Reissner Mindlin functionally graded rectangular plates”, *Int. J. Mech. Sci.*, **53**(1), 11-22
- [13] Nguyen et al. (2008), Nguyen, T.K., Sab, K. and Bonnet, G. (2008), “First-order shear deformation plate models for functionally graded materials”, *Compos. Struct.*, **83**(1), 25-36.

## Références Bibliographiques

---

- [14] Alieldin et al. (2011), Alieldin, S.S., Alshorbagy, A.E. and Shaat, M. (2011), “A firstorder shear deformation finite element model for elastostatic analysis of laminated composite plates and the equivalent functionally graded plates”, *Ain Shams Eng. J.*, **2**(1), 53-62
- [15] Della Croce and Venini (2004), Della Croce, L. and Venini, P. (2004), “Finite elements for functionally graded Reissner-Mindlin plates”, *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, **193**(9), 705-725,
- [16] Singha et al. (2011), Singha, M.K., Prakash, T. and Ganapathi, M. (2011), “Finite element analysis of functionally graded plates under transverse load”, *Finite Elem. Anal. Des.*, **47**(4), 453-460
- [17] Lee et al. (2010), Lee, Y.Y., Zhao, X. and Reddy, J.N. (2010), “Postbuckling analysis of functionally graded plates subject to compressive and thermal loads”, *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, **199**(25), 1645-1653
- [18] Shaat, M., Mahmoud, F.F., Alieldin, S.S. and Alshorbagy, A.E. (2013), “Finite element analysis of functionally graded nanoscale films”, *Finite Elem. Anal. Des.*, **74**, 41-52.
- [19] Shaat, M., Mahmoud, F.F., Alshorbagy, A.E., Alieldin, S.S. and Meletis, E.I. (2012), “Size-dependent analysis of functionally graded ultra-thin films”, *Struct. Eng. Mech.*, **44**(4), 431-448
- [20] Kolahchi et al. (2015b) , Kolahchi, R., Bidgoli, M.R., Beygipoor, G. and Fakhar, M.H. (2015b), “A nonlocal nonlinear analysis for buckling in embedded FG-SWCNT-reinforced microplates subjected to magnetic field”, *J. Mech. Sci. Technol.*, **29**(9), 3669-3677.
- [21] Kolahchi, R., Safari, M. and Esmailpour, M. (2016a), “Dynamic stability analysis of temperature-dependent functionally graded CNT-reinforced visco-plates resting on orthotropic elastomeric medium”, *Compos. Struct.*, **150**, 255-265
- [22] Reddy (2000), Reddy, J.N. (2000), “Analysis of functionally graded plates”, *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, **47**(1-3), 663-684. Baseri et al. (2016)[20]
- [23] Baseri, V., Jafari, G.S. and Kolahchi, R. (2016), “Analytical solution for buckling of embedded laminated plates based on higher order shear deformation plate theory”, *Steel Compos. Struct.*, **21**(4), 883-919
- [24] Lü et al. (2009) ,Lü, C.F., Lim, C.W. and Chen, W. (2009), “Size-dependent elastic behavior of FGM ultra-thin films based on generalized refined theory”, *Int. J. Solid. Struct.*, **46**(5), 1176-1185
- [25] Tounsi et al. (2013), Tounsi, A., Houari, M.S.A. and Benyoucef, S. (2013), “A refined trigonometric shear deformation theory for thermoelastic bending of functionally graded sandwich plate”, *Aerosp. Sci. Technol.*, **24**(1), 209-220.

## Références Bibliographiques

---

- [26] Kolahchi et Al. (2015a), Kolahchi, R., Bidgoli, A.M.M. and Heydari, M.M. (2015a), “Sizedependent bending analysis of FGM nano-sinusoidal plates resting on orthotropic elastic medium”, *Struct. Eng. Mech.*, **55**(5), 1001-1014
- [27] Yahia et al. (2015), Yahia, S.A., Atmane, H.A., Houari, M.S.A. and Tounsi, A. (2015), “Wave propagation in functionally graded plates with porosities using various higher-order shear deformation plate theories”.
- [28] Gulshan Taj et al. (2013), Taj, M.G., Chakrabarti, A. and Sheikh, A.H. (2013), “Analysis of functionally graded plates using higher order shear deformation theory”, *Appl. Math. Model.*, **37**(18), 8484-8494.
- [29] Talha et Singh (2010), Talha, M. and Singh, B.N. (2010), “Static response and free vibration analysis of FGM plates using higher order shear deformation theory”, *Appl. Math. Model.*, **34**(12), 3991-4011
- [30] Jha et al. 2012, Jha, D.K., Kant, T. and Singh, R.K. (2012), “Higher order shear and normal deformation theory for natural frequency of functionally graded rectangular plates”, *Nucl. Eng. Des.*, **250**, 8-13
- [31] Swaminathan et Naveenkumar (2014), Swaminathan, K., Naveenkumar, D.T., Zenkour, A.M. and Carrera, E. (2015), “Stress, vibration and buckling analyses of FGM plates-A state-of-the-art review”, *Compos. Struct.*, **120**, 10-31
- [32] Touratier (1991), Touratier, M. (1991), “An efficient standard plate theory”, *Int. J. Eng. Sci.*, **29**(8), 901-916
- [33] Zenkour, A.M. (2005a), “A comprehensive analysis of functionally graded sandwich plates: Part 1- Deflection and stresses”, *Int. J. Solid. Struct.*, **42**(18), 5224-5242.
- [34] Zenkour, A.M. (2005b), “A comprehensive analysis of functionally graded sandwich plates: Part 2- Buckling and free vibration”, *Int. J. Solid. Struct.*, **42**(18), 5243-5258.
- [35] Zenkour, A.M. (2006), “Generalized shear deformation theory for bending analysis of functionally graded plates”, *Appl. Math. Model.*, **30**(1), 67-84.
- [36] Zenkour, A.M. (2009), “The refined sinusoidal theory for FGM plates on elastic foundations”, *Int. J. Mech. Sci.*, **5**(11), 869-880
- [37] Miyamoto et al. (1999), Suresh et Mortensen 1998 Miyamoto Y., Kaysser W.A., Rabin B.H., Kawasaki A., Ford R.G., *Functionally graded materials: design, processing and applications*, Materials Technology Series, Vol. 5-1999.
- [38] Öchsner et al. 2008 M.J.S. (2008), "Cellular and Porous Materials", WILEY-VCH, 398-417.

## Références Bibliographiques

---

- [39] Baron et Naili (2008), Propagation d'ondes élastiques au sein d'un guide d'ondes élastiques anisotrope à gradient unidirectionnel sous chargement fluide, *Compte Rendue Mécanique*; 336 (9) : 722–730, 2008.
- [40] M. Niino et ses collègues à Sendai
- [41] Kokini (1990) : K. Kokini, Y. Takeuchi, Multilayer «Ceramic thermal barrier coatings under transient thermal loads, In Proceeding of the First International Symposium on Functionally Gradient Materials-FGM'90-Sendai-Japan» ; 31-36, 1990.
- [42] Nora. Kassimi (2011), “ Etude des contraintes d'interface d'une poutre FGM renforcées par une plaque en matériaux composites”, mémoire de master de l'université Djilali Liabes de Sidi Bel Abbès, 2011.
- [43] AMANETTE AMINA (2011), « analyse et modélisation du comportement des poutres en gradient à propriété », mémoire de master d'université DILALI LIABES DE SIDI BEL ABBES 2011.
- [44] ELOMARI KAWTHER (2011), « analyse de la vibration libre des poutres en E-FGM à section transversale variable », mémoire de master d'université DJILLALI LIABES DE SIDI BEL ABBES 2011.
- [45] Kieback (2003) Kieback B., Neubrand A., Riedel H., Processing techniques for functionally graded materials, *Materials Science and Engineering*, A362 (2003) 81-105.
- [Liew] K.M. Liew, J. Yang, S. Kitipornchai, Post-pliage de plaques de FGM piézoélectriques soumises à une charge thermo-électromécanique, *Int. J. Solids Struct.* 40 (15) (2003) 3869
- [46] Mistler (1973) MISTLER, R.E., «High Strength Alumina Substrates Produced by a Multiple-Layer Casting Technique», *Am. Ceram. Soc. Bull.*, 1973, Vol. 52, N°. 11, p. 850-54.
- [47] Boch (1986,1987) : BOCH, P., CHARTIER, T.& HUTTEPAIN, «M.Tape Casting of Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>/ZrO<sub>2</sub> Laminated Composites», *J. Am. Ceram. Soc.*, 1986, Vol. 69, N°. 8, p. C- 191 - C-192. BOCH, P. «Tape Casting of Layered Composites, in *Processing of Advanced Ceramics*». Edited by J. S. Moya and S. de Aza. Sociedad Espanola de Ceramica y Vidrio, Madrid, Spain, 1987, p. 103-112.
- [48] Aldo (2002) Aldo R. Boccaccini, O. Vander Biest, Jan B. Talbot, Electrophoretic Deposition, Fundamentals and Applications: Proceedings of the International Symposium, Electrochemical Society, Electrodeposition Division, United Engineering Foundation (U.S.), 2002.
- [49] Yuki et al (1991), Yuki M., Murayama T., Irisawa T., «Temperature gradient sintering of PSZ/Mo Functionally Gradient Material by laser beam heating», in proceeding of the first

## Références Bibliographiques

---

- international symposium on functionally gradient materials FGM, Sendai- Japan, 1991, 203208.
- [50] Aymen Marouane (2010), “Comportement sous choc des composites sandwichés et influence des paramètres des matériaux et du test ”, Diplôme de maîtrise en ingénierie appliquée.
- [51] HASSEN. Ait Atman (2011) Vibration des structures composites en tenant compte de l’effet du cisaillement”, Thèse de Doctorat de l’université Djilali Liabes de Sidi Bel Abbès.
- [52] M. Bodaghi (2010), A.R. Saidi. Levy-type solution for buckling analysis of thick functionally graded rectangular plates based on the higher-order shear deformation plate theory, Applied Mathematical Modelling, Vol. 34, Issue 11, pp.3659-3673, November 2010. 2013.
- [53] Ghannad S.A.M.(2012), vesy H.R. O, Nassirnia M., “Buckling analysis of functionally graded plates under thermal loadings using the finite strip method”, Computers & Structures, Vol. 108–109, pp.93-99, October 2012.
- [54] Huu-Tai Thai (2010), and Dong-Ho C hoi, “An efficient and simple refined theory for buckling analysis of functionally graded plates”, Appl. Math. Modelling, Vol. 36, pp.1008-1022.
- [55] Huu Tai Thai.(2011), and Thuc., P. Vo, “A new sinusoidal shear deformation theory for bending, buckling, and vibration of functionally graded plates”, Applied mathematical modeling, Vol. 37, pp. 3269-3281.
- [56] Lazreg. Hadji (2012). A new refined shear deformation beam theory for static and free vibration of functionally graded beams, The Arabian Journal for Science and Engineering, (3-8.11).
- [57] Timoshenko. S.P, S.Woinowsky-Krieger, (1959). —Theory of Plates and Shells. McGraw-Hill, New York.
- [58] Reddy. J.N, (1997). —Mechanics of Laminated Composite Plates: Theory and Analysis, CRC Press, Boca Raton.
- [59] Reddy. J.N, (1999). —Theory and Analysis of Elastic plates, Taylor & Francis, Philadelphia.
- [60] Reissner.E, (1945). —The effect of transverse shears deformation on the bending of elastic plates. J. Appl. Mech., vol. 12, pages 69/77.
- [61] Mindlin. R.D, (1951). —Influence of rotary inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates. Journal of Applied Mechanics, vol. 18, pages 31-38.
- [62] Hildebrand. F.B, E. Reissner, G.G. Thomas, (1949). —Notes on the foundations of theory of small displacements of orthotropic shells. NACA T. N. N°:1833.

## Références Bibliographiques

---

- [63] Naghdi. P. M, (1957). —On the theory of thin elastic shells. *Quarterly Appl. Math*, 14: 369-380.
- [64] Reissner. E, (1975). —On transverse bending of plates, including the effects of transverse shear deformation, *Int. J. Solids Structures*; 25 (5):495-502.
- [65] Kant.T, K. Swaminathan, (2002). —Analytical solutions for the static analysis of laminated composite and sandwich plates based on a high order refined theory. *Composite Structures* 56 (4): 329-344.
- [66] Whitney. J.M, (1973). —Shear correction factors for orthotropic laminates under static loads. *J. Applied Mechanics*, Vol.40, pages 302-304.
- [67] Nelson. R.B & D.R.Lorch, (1974). —A refined theory for laminated orthotropic plates. *ASME Journal of Applied Mechanics*, Vol.41, pages 177-183.
- [68] Ambartsumian. S.A, (1969). —Theory of anisotropic plate. Technomic Publishing Co.
- [69] Levinson, M. (1980), "An accurate simple theory of the statics and dynamics of elastic plates", *Mechanics Research Communications*, 343–350.
- [70] Polit. O and M. Touratier, (1997). —A new laminated triangular finite element assuring interface continuity for displacements and stresses. *Composite Structures*, 38(1-4):37-44.
- [71] Dau. F, O. Polit, and M. Touratier, (2006). —C1 plate and shell finite elements for geometrically non linear analysis of multilayered structures. *Computers and Structures*, 84:1264-1274.
- [72] Afaq. K.S, (2003). « Développement d'un nouveau modèle pour les structures composites multicouches et sandwichs avec prise en compte du cisaillement transverse et des effets de bord. PhD thesis, Université Toulouse III - Paul Sabatier.
- [73] Abdelkader Fekrar (2010), "Conception des plaques FGM ayant un comportement similaire aux plaques homogènes", Mémoire de magister de l'université Djilali Liabes de Sidi Bel Abbès.
- [74] Chabot, A (1997), "Analyse des efforts à l'interface entre les couches des matériaux composites à l'aide de modèles multi-particulaires de matériaux multicouches, PhD thésis, ENPC
- [75] Thai (Thai et Choi 2013) Thai, H.T. and Choi, D.H. (2013), "A simple first-order shear deformation theory for the bending and free vibration analysis of functionally graded plates", *Compos. Struct.*, **101**, 332-340.
- [76] Neves et al. (2013) Neves, A.M.A., Ferreira, A.J.M., Carrera, E., Cinefra, M., Roque, C.M.C., Jorge, R.M.N. and Soares, C.M.M. (2013), "Static, free vibration and buckling

## Références Bibliographiques

---

- analysis of isotropic and sandwich functionally graded plates using a quasi-3D higher-order shear deformation theory and a meshless technique”, *Compos. Part B*, **44**(1), 657-674.
- [78] Neves et al. (2012) Neves, A.M.A., Ferreira, A.J.M., Carrera, E., Roque, C.M.C, Cinefra, M., Jorge, R.M.N. and Soares, C.M.M. (2012), “A quasi-3d sinusoidal shear deformation theory for the static and free vibration analysis of functionally graded plates”, *Compos. Part B: Eng.*, **43**, 711-725.
- [79] Carrera, E., Brischetto, S. and Robaldo, A. (2008), “Variable kinematic model for the analysis of functionally graded material plates”, *AIAA J.*, **46**(1), 194-203.
- [80] Carrera, E., Brischetto, S., Cinefra, M. and Soave, M. (2011), “Effects of thickness stretching in functionally graded plates and shells”, *Compos. Part B: Eng.*, **42**(2), 123-133.
- [81] Karama. M, K.S. Afaq., S. Mistou, (2003). —Mechanical behaviour of laminated composite beam by the new multi-layered laminated composite structures model with transverse shear stress continuity”, *Int. J. Solids Structures*; 40 (6): 1525-1546.
- [82] Ait Atmane. H, A. Tounsi., I. Mechab., E.A Adda Bedia, (2010). —Free vibration analysis of functionally graded plates resting on Winkler-Pasternak elastic foundations using a new shear deformation theory”. *Int. J. Mech. Mater. Design*; 6 (2): 113-121.