

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique



Université Ibn Khaldoun de Tiaret
Faculté des Sciences Appliquées
Département de Génie Mécanique



MÉMOIRE DE FIN D'ETUDES

Pour l'obtention du Diplôme de Master

Domaine : Sciences et Technologie

Filière : Génie Mécanique

Parcours : Master

Spécialité : Construction Mécanique

Thème

Etude du comportement mécanique des
poutres en matériaux composites

Préparé par :

BELKISERIA Abdallah

Soutenu publiquement le : 15 / 11 / 2020, devant le jury composé de :

| | | |
|----------------|--|-----------|
| M. HADJI L. | Maître de Conférences "B" (Univ. Ibn Khaldoun) | Président |
| M. MOULGADA A. | Maître de Conférences "A" (Univ. Ibn Khaldoun) | Examineur |
| M. ZAGANE M.S. | Maître de Conférences "B" (Univ. Ibn Khaldoun) | Examineur |
| M. MEKROUSSI S | Maître de Conférences "A" (Univ. Ibn Khaldoun) | Encadreur |

Année universitaire : 2019 - 2020

DEDICACES

À la mémoire de mon père,

À ma très chère mère,

À ma très chère femme

À mes frères et sœurs,

À mes amis.

Belkiseria Abdallah

REMERCIEMENTS

En premier lieu, je remercie « ALLAH » de m'avoir donné la force, le courage et la volonté pour achever ce travail.

Je voudrais remercier toutes les personnes ayant soutenu et encadré mon travail, En premier lieu, je remercie sincèrement et très chaleureusement, mon encadreur, Monsieur Mekroussi Said, Maître de conférences à l'Université Ibn Khaldoun-Tiaret, pour tout, que ce soit pour sa disponibilité, ses conseils et aide qui ont bien contribué à l'avancement de ce travail, ainsi que Monsieur SahliAhmed, Professeur à l'Université Ibn Khaldoun-Tiaret, pour sa contribution majeure à l'orientation des travaux de recherche et ses idées originales qui ont servi à enrichir le contenu de ce mémoire.

Je tiens à remercier Monsieur Safa Ali, Doctorant à l'Université Ibn Khaldoun-Tiaret, pour son aide précieux surtout dans le coté simulation par SolidWorks.

Je tiens aussi à remercier les membres de jury, Monsieur Hadji Lazrague Maître de conférences à l'Université Ibn Khaldoun-Tiaret, d'avoir accepté de présider ce jury, Monsieur Moulgada Abdelmadjid, Maître de conférences à l'Université Ibn Khaldoun-Tiaret, Monsieur Zagane Med Salah, Maître de conférences à l'Université Ibn Khaldoun-Tiaret, qui ont bien voulu rapporter mon travail et participer au jury.

NOMENCLATURE

$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 (\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z) = \text{Déformations normales}$

$\gamma_{12}, \gamma_{23}, \gamma_{13} (\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}) = \text{Déformations angulaires}$

$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z) = \text{Contraintes normales}$

$\tau_1, \tau_2, \tau_3 (\tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz}) = \text{Contraintes tangentielles}$

$\nu_{12} = \text{Coefficient de Poisson dans le plan 12}$

$\nu_{13} = \text{Coefficient de Poisson dans le plan 13}$

$\nu_{23} = \text{Coefficient de Poisson dans le plan 23}$

$\alpha_{x-y} = \text{Coefficient de dilatation thermique}$

$\Delta T = \text{Différence de température}$

$G_{12} = \text{Module de cisaillement}$

$E_1 = \text{Module de Young longitudinal}$

$E_2 = \text{Module de Young ltransversal}$

$S_{ij} (i, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6) = \text{Elements élastiques de la matrice de compliance}$

$Q_{ij} (i, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6) = \text{Eléments élastiques de la matrice de rigidité}$

$[Q] = \text{La matrice de rigidité}$

$[\bar{Q}]_{x-y} = \text{Matrice de rigidité pour un pli angulaire}$

$[T_\sigma] = \text{Matrice de transformation pour contraintes}$

$[T_\varepsilon] = \text{Matrice de transformation pour déformations}$

$u_0, v_0, w_0 = \text{Déplacements du plan médian}$

$u, v, w = \text{Déplacements en tout point}$

$K_x, K_y, k_{xy} = \text{Courbures}$

$[M] = \text{Moments appliqués}$

$[N] = \text{Charges appliquées}$

$[\bar{M}] = \text{Matrice Moments}$

$[\bar{N}] = \text{Matrice forces}$

$h_k = \text{Hauteur au sommet du kième pli}$

$[A] = \text{Matrice de rigidité extensionnelle}$

$[B] = \text{Matrice de rigidité de couplage extension – flexion}$

$[D] = \text{Matrice de rigidité flexion}$

$[K] = \text{Matrice de rigidité globale}$

$w_c = \text{Flèche}$

$D_{11} = \text{Paramètre de rigidité}$

$E_x^k = \text{Module équivalent d'élasticité}$

$N_i =$ Fonctions de forme

$[M_e] =$ Matrice de masse élémentaire

$[K_e] =$ Matrice de rigidité élémentaire

$\{d\} =$ Vecteur d'accélération

$\{F\} =$ Vecteur de forces

$V^G(k) =$ Fraction de volume dans la couche k

$\Delta V =$ Increment de fraction volumique

$N =$ Nombre de couches

$\rho =$ Densité de masse

SOMMAIRE

| | |
|---|-----------|
| INTRODUCTION GENERALE | 2 |
| CHAPITRE IMATERIAUX COMPOSITES | 15 |
| I. 1 Matériaux composites | 15 |
| I-2 Poutres | 17 |
| I- 2.1 La flexion | 18 |
| I- 2.2 La flexion trois points | 18 |
| I-2.3 La flexion quatre points | 18 |
| I-3 Théorie classique de la stratification | 19 |
| I- 3.1 Revue de la théorie de la stratification classique | 19 |
| I-3.1.1 Équation constitutive du pli (couche) | 19 |
| I-3.1.2 Matrices de transformation des Contraintes - déformations | 21 |
| I-3.1.3 Équation constitutive du stratifié | 22 |
| I-3.1.4 Contrainte et déformation de la couche dans les coordonnées stratifiées | 24 |
| CHAPITRE IIMETHODE DES ELEMENTS FINIS | 28 |
| II – 1 Procédure générale la méthode des éléments finis | 28 |
| II – 2 Analyse par éléments finis des poutres stratifiées | 31 |
| II – 3 Types d'éléments de coque dans les codes d'éléments finis | 32 |
| II – 4 Entrée orthotrope équivalente pour l'analyse par élément fini du stratifié | 38 |
| II – 5 Stratifié unidirectionnel dans l'analyse par élément fini | 38 |
| II – 6 Stratifié symétrique dans l'analyse par élément fini | 38 |
| II – 7 Stratifié asymétrique dans l'analyse par éléments finis | 39 |
| II – 8 La séquence d'empilage du stratifié pour le stratifié multidirectionnel dans l'analyse par éléments finis | 39 |
| CHAPITRE III RESULTATS ET DISCUSSION | 40 |
| III.1 Introduction | 40 |
| III.1.2 Présentation Solidwork | 40 |
| III.1.3 Historique | 41 |
| III.1.4 Fonctionnement | 41 |
| III.1.5 Les pièces | 41 |
| III.1.6 Les assemblages | 41 |
| III.1.7 Les mises en plan | 41 |
| III.1.8 Les extensions des fichiers | 41 |

| | |
|---|-----------|
| III.1.9 Produits associés | 42 |
| III.2 Présentation Solidwork | 43 |
| III.2.1 poutre en aluminium renforcée | 43 |
| III.2.1.1-Présentation du problème à résoudre | 43 |
| III.2.1.2-Effet de l'orientation des fibres de la couche composite sur la flèche de poutre | 44 |
| III.2.1.3- Effet de l'orientation des fibres sur la flèche des poutres chargées en flexion trois points en Acier et Aluminium renforcées à différents types de matériaux | 46 |
| III.2.1.3.1-Renforcement par une seule | 46 |
| III.2.2. Conclusion | 54 |
| conclusion générale | 55 |
| ANNEXE A | 56 |
| ANNEXE B | 58 |
| References. | 60 |

LISTE DES FIGURES

| | |
|---|-----------|
| Figure (I-1). Un stratifié composé de lamelles de différentes orientations de fibre | 4 |
| Figure (I-2) : Flexion trois points..... | 7 |
| Figure (I-3) : Flexion quatre points..... | 7 |
| Figure (I-4). Systèmes de coordonnées de la couche et du stratifié..... | 9 |
| Figure (I-5). Section stratifiée sous déformation..... | 12 |
| Figure (I-6). Stratifié composite à n couches..... | 14 |
| Figure (I-7). Comparaison du champ de contraintes transversales entre une structure à une couche et une structure à trois couches..... | 16 |
| Fig. (I-8): (a) Micromécanique, (b) niveau de la lame et (c) approche au niveau du stratifié | |
| Figure (I-9). Élément iso paramétrique rectangulaire à neuf nœuds..... | 17 |
| Fig. (I-10). Construction stratifiée d'un élément de coque..... | |
| Figure (II-1). Poutre métallique renforcée par couche en matériau composite..... | 23 |
| Figure (II-2): Variation de la flèche en fonction de l'orientation des fibres a..... renfort composite verre-époxyde et carbone époxyde (poutre en Aluminium)..... | 27 |
| Figure (II-3). Variation de la flèche en fonction de l'orientation des fibres a..... renfort composite verre-époxyde et carbone époxyde (poutre en Acier)..... | 29 |

LISTE DES TABLEAUX

| | |
|--|----|
| <i>Tableau 1 : Les caractéristiques mécaniques de l'acier, l'aluminium et les fibres</i> | 24 |
| <i>Tableau 2 : Poutres en acier</i> | 30 |
| <i>Tableau 1 : Poutres en aluminium</i> | 32 |

Une poutre est un corps matériel qui possède une direction privilégiée. En effet, une poutre a la particularité d'avoir une dimension dont l'ordre de grandeur est supérieur aux deux autres.

Typiquement, les dimensions caractéristiques de la section sont *petites* par rapport à la longueur de la poutre.

Les poutres sont l'un des composants fondamentaux de la structure ou de la machine. Les poutres composites sont des structures légères qui peuvent être trouvées dans de nombreuses applications diverses, notamment l'aérospatiale, les sous-marins, les équipements médicaux, l'automobile et la construction. Les bâtiments, les structures à ossature d'acier et les ponts sont des exemples d'applications de poutres en génie civil. Dans ces applications, les poutres existent en tant qu'éléments structurels ou composants supportant toute la structure. De plus, l'ensemble de la structure peut être modélisé à un niveau préliminaire sous forme de poutre.

Les matériaux composites sont constitués de deux ou plusieurs matériaux qui, ensemble, produisent des propriétés souhaitables qui peuvent ne pas être obtenues avec l'un quelconque des constituants seuls. Les matériaux composites renforcés de fibres, par exemple, sont constitués de fibres à haute résistance et à module élevé dans un matériau de matrice. Les barres d'acier renforcées noyées dans le béton sont un exemple de composites renforcés de fibres. Dans ces composites, les fibres sont les principaux éléments porteurs de charge, et le matériau de la matrice maintient les fibres ensemble, agit comme un milieu de transfert de charge entre les fibres et protège les fibres d'être exposées à l'environnement (par exemple, l'humidité, l'humidité, etc.).

Les matériaux composites sont généralement formés en trois types différents : (1) les composites fibreux, qui sont constitués de fibres d'un matériau dans un matériau de matrice d'un autre; (2) des composites particulaires, qui sont composés de particules de taille macro d'un matériau dans une matrice d'un autre; et (3) des composites stratifiés, qui sont constitués de couches de matériaux différents, y compris des composites des deux premiers types. Les particules et la matrice des composites particulaires peuvent être métalliques ou non métalliques. Il existe donc quatre combinaisons possibles: métallique dans non métallique, non métallique dans métallique, non métallique dans non métallique et métallique dans métallique.

Une lamelle ou un pli est une feuille typique de matériau composite. Il représente un élément fondamental. Une lamelle renforcée de fibres se compose de nombreuses fibres noyées dans un

matériau de matrice, qui peut être un métal comme l'aluminium, ou un non-métal comme un polymère thermo durci ou thermoplastique. Souvent, des agents de couplage (chimiques) et des charges sont ajoutés pour améliorer la liaison entre les fibres et le matériau de la matrice et augmenter la ténacité. Les fibres peuvent être continues ou discontinues, tissées, unidirectionnelles, bidirectionnelles ou distribuées de manière aléatoire. Les lamelles renforcées de fibres unidirectionnelles présentent la résistance et le module les plus élevés dans la direction des fibres, mais elles ont une résistance et un module très faibles dans la direction transversale aux fibres.

Une mauvaise liaison entre une fibre et une matrice se traduit par de mauvaises propriétés transversales et des défaillances sous la forme d'un arrachement de fibre, d'une rupture de fibre et d'un flambage de la fibre. Les composites discontinus renforcés de fibres ont une résistance et un module inférieurs à ceux des composites renforcés de fibres continues. Un stratifié est un ensemble de lamelles empilées pour obtenir la rigidité et l'épaisseur souhaitées.

Les propriétés globales d'une structure stratifiée dépendent de la conception de celle-ci. C'est-à-dire, elles dépendent de l'épaisseur, de l'orientation et du matériau de chaque pli ainsi que de la séquence d'empilement de ces plis. Ce profil est bien avantageux, car il donne la possibilité à l'ingénieur de concevoir des structures aux propriétés précises par rapport aux besoins. Cependant, ce caractère complexe n'est pas du tout évident, compte tenu des nombreux choix auxquels on est confronté et une analyse approfondie du comportement mécanique est d'une grande importance.

Les stratifiés sont des structures composites courantes, formées par l'empilement de plusieurs couches adhérant l'une à l'autre. Les couches étant anisotropes et possédant des orientations différentes, ces structures ont des comportements compliqués, que les modèles homogènes et isotropes ne permettent pas de simuler correctement. Cette ressource s'intéresse au cas particulier des poutres stratifiées, et montre comment la résistance des matériaux peut être adaptée pour prévoir leur comportement.

Un stratifié est une collection de lamelles empilées pour obtenir le rigidité et épaisseur. La séquence des diverses orientations d'une couche composite renforcée de fibres dans un stratifié est appelée schéma de stratification ou séquence d'empilement. Les couches sont généralement liées entre elles avec le même matériau de matrice que celui d'une lamelle. Un stratifié unidirectionnel (Toutes les lamelles ont la même orientation de fibre) sera très solide le long de

la direction des fibres et faible dans le sens transversal. Le stratifié sera également faible en cisaillement. Si un stratifié a des couches avec des fibres orientées à 30° ou 45° , il peut supporter des charges de cisaillement. Le schéma de stratification et les propriétés du matériau de chaque lamelle offrent une flexibilité supplémentaire aux concepteurs pour adapter la rigidité et la résistance du stratifié aux exigences structurelles. Les structures composites stratifiées présentent également des inconvénients. En raison de l'inadéquation des propriétés du matériau entre les couches, les contraintes de cisaillement produites entre les couches, en particulier au niveau des bords d'un stratifié, peuvent provoquer un délaminage. De plus, pendant la fabrication de stratifiés, des défauts de matériau tels que des vides inters laminaires, un délaminage, une orientation incorrecte, des fibres endommagées et une variation d'épaisseur peuvent être introduits. Il est impossible d'éliminer complètement les dérives de fabrication. Par conséquent, les procédures d'analyse et de conception doivent tenir compte des défauts.

Dans cette section, nous étudions le comportement mécanique d'une lame typique (poutre), qui est la pierre angulaire d'un stratifié composite.

Le contenu de cette étude est une identification paramétrique des structures mécaniques composites en flexion. Pour mener à terme cette étude, nous avons choisi deux types de poutres : épaisses multicouches, et renforcées.

Ce travail est organisé en trois chapitres, en commençant par l'état de l'art du premier chapitre jusqu'à la dernière conclusion du troisième,

le premier chapitre est considéré comme une introduction au sujet de ce travail, il rassemble brièvement tout ce qui touche à la flexion des poutres et matériaux composites.

Le chapitre deux présente la procédure générale de la méthode des éléments finis. Les éléments théoriques utilisés pour obtenir les équations d'un système, en outre, il améliore les expressions d'énergie sous forme généralisée de Timoshenko, également, il se concentre sur le développement des équations en utilisant la méthode des éléments finis afin de déterminer les matrices élémentaires de chaque élément du système de stratifié.

Le troisième chapitre se concentre sur la présentation du programme Solid Work en représentant les résultats de deux matériaux composites différents, après avoir assis toutes leurs propriétés.

Chapitre I MATERIAUX COMPOSITES

I. 1 Matériaux composites

Les lamelles renforcées de fibres unidirectionnelles peuvent être empilées de sorte que les fibres de chaque lamelle soient orientées dans la même direction ou dans des directions différentes (voir figure 1).

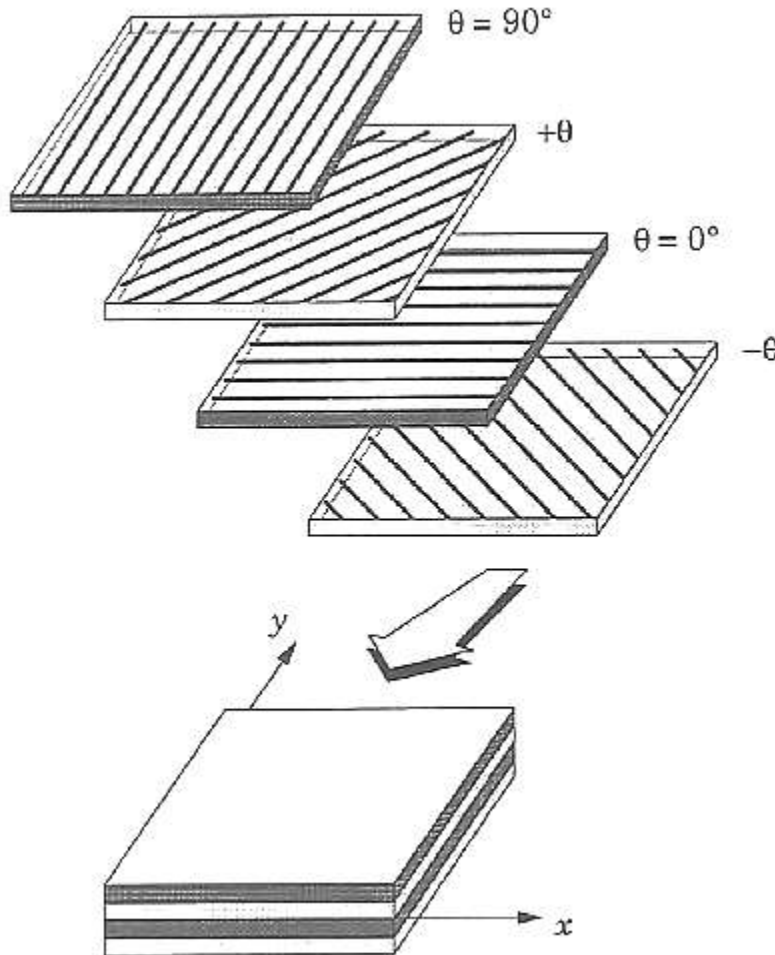


Figure (I. 1) :Un stratifié composé de lamelles de différentes orientations de fibre.

Dans la plupart des sandwichs structurels, la différence de module de Young dans les faces et le noyau est si grande qu'un moment de flexion est combattu par les forces dans le plan des faces. La rigidité en flexion des faces elles-mêmes ou du noyau contribue très peu à la rigidité globale en flexion, seulement quelques pour cent dans la plupart des sandwichs pratiques avec des faces minces et un matériau de noyau faible et léger.

Chapitre I MATERIAUX COMPOSITES

La technique des armatures collées en matériaux composites acquiert une importance croissante dans le domaine du renforcement des structures. Triantafillou et Plevris, [1], ont démontré que le renforcement des facettes de poutres en béton armé par des fibres de verre ou d'aramides, améliore leur résistance au cisaillement et leur ductilité. Et récemment Guido Camata et al, [2] ont montré expérimentalement et analytiquement l'efficacité de la surface de contact du renfort composite sur la ductilité.

Les chercheurs ont rapporté divers degrés de succès dans le renforcement des poutres en béton armé avec des plaques de plastique renforcé de fibres (PRF) liées à la face de traction [3-5].

Les structures d'ingénierie utilisent de plus en plus des composants composites, dans lesquels les attributs qui conviennent le mieux à un matériau particulier sont utilisés de manière optimale, efficace et économique. L'élément composite le plus connu, et celui qui est considéré tacitement dans cet mémoire, est la poutre composite [6,7] où le béton est utilisé dans la partie compressive de l'élément et l'acier dans la partie tendue de l'élément. Cependant, l'étude fondamentale et probablement la plus citée des travaux sur la connexion de cisaillement est celle de Newmark et al. [8],

Alors que le comportement des matériaux isotropes peut être décrit avec deux constantes élastiques (généralement le module de Young et le coefficient de Poisson) et une valeur de résistance, un pli composite qui est transversalement isotrope est caractérisé par quatre constantes élastiques (rigidité) et cinq paramètres de résistance en analyse bidimensionnelle. Les propriétés du matériau sont définies le long de la fibre (direction x) et perpendiculairement à la fibre (direction y). Pour chaque nappe unidirectionnelle dans ses propres axes, les quatre constantes, élastiques orthotropes sont le module de traction longitudinal, E_x ; le module de traction transversale, E_y ; le coefficient de Poisson majeur, ν_x ; et le module de cisaillement, G_s . Un seul coefficient de Poisson est nécessaire puisque $\nu_y = \nu_x (E_y/E_x)$. Les cinq paramètres de résistance pour chaque pli unidirectionnel sont la résistance à la traction longitudinale, X ; la résistance à la compression longitudinale, X' ; la résistance à la traction transversale, Y ; la résistance à la compression transversale, Y' ; et la résistance au cisaillement, S .

Le graphène, y compris la feuille de graphène monocouche (SLGS) et la feuille de graphène multicouche (MLGS, parfois appelée « plaquette de graphène »), est fabriqué à partir d'atomes de carbone étroitement emballés dans une structure cristalline hexagonale. Connu pour ses remarquables propriétés électroniques, optiques, thermiques et mécaniques, le graphène est

Chapitre I MATERIAUX COMPOSITES

largement utilisé comme renfort dans les matrices polymères et métalliques ces dernières années. Rafiee et coll. [9] ont démontré qu'avec une fraction de poids inférieure d'un ordre de grandeur, le graphène obtient une amélioration similaire aux nanotubes de carbone (NTC) en termes de propriétés mécaniques, telles que la ténacité à la rupture, l'énergie de rupture, la résistance à la traction ultime, le module de Young et le taux de propagation des fissures de fatigue.

Dans cette étude, la théorie linéaire-élastique classique des poutres en composite étendue pour inclure les conditions de renforcement et la stratification afin qu'elle puisse être appliquée aux poutres en composite de différents composants pour matrice. Il est montré que la réponse des poutres composites est régie par seulement quelques paramètres composites développés dans ce travail, quelle que soit la grande quantité de variables impliquées.

Le déroulement de ce travail se décompose en trois parties principales. Après une brève introduction, le premier chapitre présente une synthèse bibliographique concernant le comportement mécanique des poutres en matériaux composite. Dans le second chapitre, nous présentons les poutres de l'étude, leurs flexions ainsi que leurs comportements. Le troisième chapitre est consacré à l'étude du comportement en flexion trois et quatre points des structures sandwichs multicouches. Une conclusion permettra de proposer une synthèse des principaux résultats obtenus et d'envisager les perspectives découlant de cette étude.

I-2 Poutres

Les théories les plus classiques et les plus anciennes pour des milieux poutres sont :

- la théorie d'Euler-Bernoulli et
- la théorie de Timoshenko.

La théorie d'Euler-Bernoulli, appelée résistance des matériaux, néglige le cisaillement.

Elle utilise un champ de déplacement qui rigidifie la section. Elle introduit de plus la liaison interne qui contraint la section droite à rester orthogonale à la ligne moyenne après déformation.

La théorie de Timoshenko [10-12], dite avec cisaillement, utilise un champ de déplacement plus général qui rigidifie la section droite.

Chapitre I MATERIAUX COMPOSITES

I- 2.1 La flexion

La flexion d'un matériau se définit par la déformation d'une poutre sous l'action de force transversale.

L'essai de flexion d'une poutre est un essai mécanique utilisé pour tester la résistance en flexion. On utilise la flexion dite « trois points » ou dite « quatre points ».

I- 2.2 La flexion trois points

La flexion trois points est un essai mécanique classique. Il représente le cas d'une poutre posée sur deux appuis simples et soumise à une charge concentrée, appliquée au milieu de la poutre avec elle aussi un contact simple.

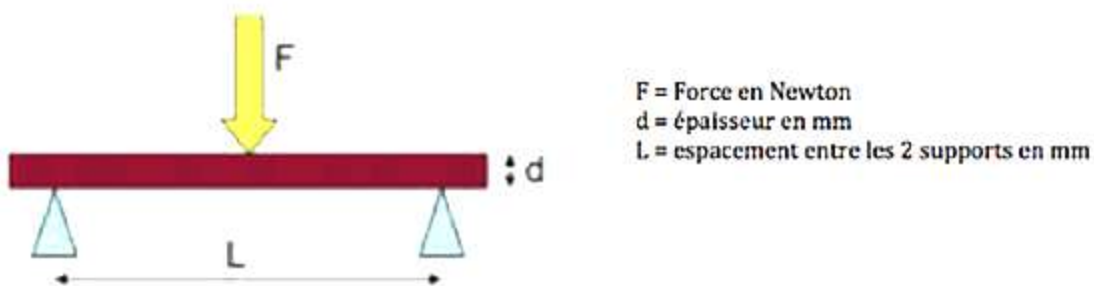


Figure (I . 2) : Flexion trois points.

I-2.3 La flexion quatre points

Le test de flexion quatre points, similaire à l'essai de flexion trois points mais avec l'avantage de ne pas positionner l'appui au niveau de la zone de rupture. Ceci est en effet une limitation du système à trois points où l'appui central peut endommager l'éprouvette et fausser ainsi les résultats en entraînant une rupture précoce de celle-ci.

Chapitre I MATERIAUX COMPOSITES

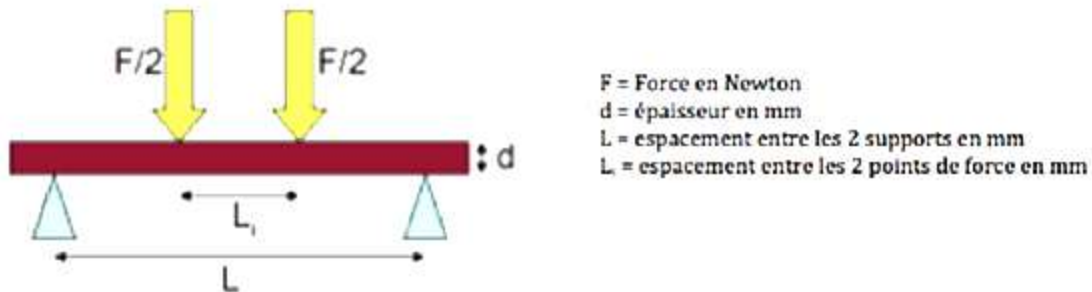


Figure (I) . 3 : Flexion quatre points.

I-3 Théorie classique de la stratification

La théorie classique de la stratification consiste en un ensemble d'hypothèses de contraintes et de déformations de type mécanique des matériaux qui sont décrites dans cette section. En utilisant cette théorie, nous pouvons systématiquement passer directement du bloc de construction de base, la lame, au résultat final, un stratifié structural. L'ensemble du processus consiste à trouver des hypothèses simplificatrices efficaces et raisonnablement précises qui nous permettent de réduire notre attention d'un problème d'élasticité tridimensionnel complexe à un problème de mécanique bidimensionnelle résoluble des corps déformables.

En fait, en raison des hypothèses de contrainte et de déformation qui sont une partie inséparable de la théorie classique de la stratification, un nom plus correct serait la théorie classique de la stratification mince, ou même la théorie classique des plaques stratifiées. Nous utiliserons le terme commun de théorie de la stratification classique, mais reconnaissons qu'il s'agit d'une simplification excessive commode de la nomenclature rigoureuse. Dans la littérature sur les matériaux composites, la théorie classique de la stratification est souvent abrégée en CLT.

I- 3.1 Revue de la théorie de la stratification classique [13-15]

I-3.1.1 Équation constitutive du pli (couche)

L'analyse composite a deux systèmes de coordonnées – x - y - z représente le système de coordonnées global, et les coordonnées 1-2-3 illustrent le système de coordonnées local. La

Chapitre I MATERIAUX COMPOSITES

direction de la fibre, la direction transversale de la fibre et la direction perpendiculaire au pli dans le plan sont indiquées par les 1, 2 et 3 dans les coordonnées locales (Fig. 4).

Pour une couche, la relation contrainte / déformation est donnée par

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{12} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{13} \\ \tau_{23} \\ \tau_{12} \end{pmatrix} \quad \text{I. 1)}$$

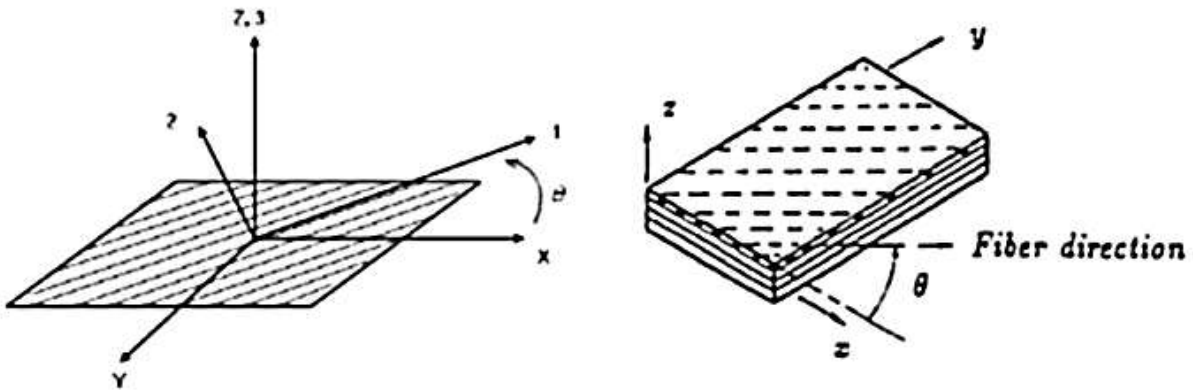


Figure (I): . 4Systèmes de coordonnées de la couche et du stratifié.

Comme la couche est mince dans les composites, la condition de contrainte plane est donnée comme :

$$\sigma_3 = 0 \quad \tau_{23} = 0 \quad \tau_{13} = 0 \quad \text{(I. 2)}$$

Par conséquent, la relation entre contrainte et déformation pour une couche peut être simplifiée comme :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix}_{1-2} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ S_{12} & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} \quad \text{(I. 3)}$$

Et

$$\varepsilon_3 = S_{13}\sigma_1 + S_{23}\sigma_2 \neq 0 \quad \text{(I. 4)}$$

Chapitre I MATERIAUX COMPOSITES

Les éléments de la matrice de compliance [S] sont les fonctions de constante élastique de la couche composite et sont donnés comme :

$$\begin{aligned}
 S_{11} &= \frac{1}{E_1} \\
 S_{22} &= \frac{1}{E_2} \\
 S_{33} &= \frac{1}{E_3} \\
 S_{12} &= -\frac{\nu_{12}}{E_1} \\
 S_{13} &= -\frac{\nu_{13}}{E_1} \\
 S_{23} &= -\frac{\nu_{23}}{E_2} \\
 S_{66} &= \frac{1}{G_{12}}
 \end{aligned} \tag{I. 5}$$

La matrice de compliance réduite pour une couche mince peut être inversée pour former la matrice de rigidité réduite de l'équation 2.3 :

$$[\sigma]_{1-2} = \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} \tag{I. 6}$$

Les éléments de la matrice de rigidité [Q] sont exprimés comme :

$$\begin{aligned}
 Q_{11} &= \frac{E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}} \\
 Q_{22} &= \frac{E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}} \\
 Q_{12} &= \frac{\nu_{21}E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}} = \frac{\nu_{12}E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}} \\
 Q_{66} &= G_{12}
 \end{aligned} \tag{I. 7}$$

Dans l'équation I.7, E1 et E2 représentent le module de Young de la couche, G12 représente le module de cisaillement et ν_{12} représente le rapport de Poisson de la couche.

Chapitre I MATERIAUX COMPOSITES

I-3.1.2 Matrices de transformation des Contraintes - déformations

En général, le système de coordonnées global x-y de la couche ne coïncide pas avec le système de coordonnées local 1-2. Par conséquent, les matrices de transformation sont utilisées pour transformer la matrice de rigidité et les déformations ou contraintes du système de coordonnées local au système global pour un pli d'angle.

La matrice de rigidité pour un pli angulaire par rapport au système global peut être obtenue en faisant tourner la matrice de rigidité de θ ° pli comme suit

$$[\bar{Q}]_{x-y} = [T_{\sigma}(-\theta)][Q]_{1-2}[T(\theta)] \quad (I.8)$$

Où $[T_{\sigma}]$ et $[T_{\varepsilon}]$ sont les matrices de transformation pour la contrainte et la déformation, données par

$$[T_{\sigma}] = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & 2mn \\ n^2 & m^2 & -2mn \\ -mn & mn & m^2 - n^2 \end{bmatrix} \quad [T_{\varepsilon}] = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & 2mn \\ n^2 & m^2 & -mn \\ -2mn & 2mn & m^2 - n^2 \end{bmatrix} \quad (I.9)$$

Où $m = \cos\theta$ et $n = \sin\theta$

I-3.1.3 Équation constitutive du stratifié

La «théorie de la stratification», également appelée «théorie de la plaque stratifiée classique» ou «théorie de la stratification classique», abrégée par CLPT (“Classical Laminated Plate Theory”) ou CLT (“Classical Lamination Theory”), est la procédure de base pour obtenir les matrices de rigidité des stratifiés, des déformations du plan médian et courbures pour le stratifié, contraintes et déformations dans le plan pour chaque couche.

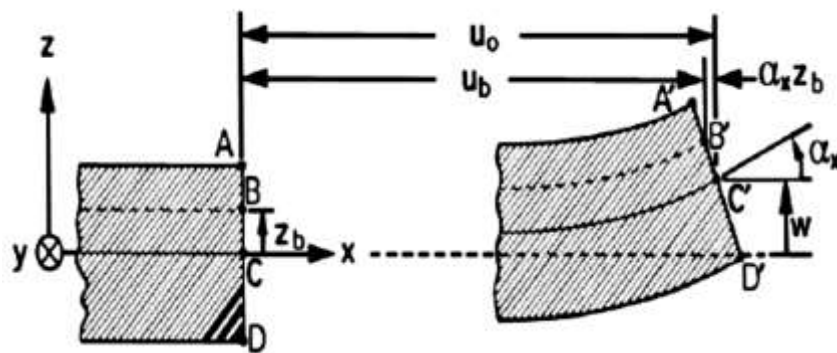
Les hypothèses de base de la théorie de la stratification classique sont

1. Le stratifié est obtenu en collant plusieurs couches d'orientations de fibres différentes
2. La couche individuelle du stratifié a son propre système de coordonnées principal

Chapitre I MATERIAUX COMPOSITES

3. Un système de coordonnées de référence est introduit commun à toutes les couches qui est placé au milieu du plan du stratifié.
4. Le stratifié est mince et large, c'est-à-dire que la condition de contrainte du plan est appliquée
5. Un lien parfait existe entre les différentes couches
6. Le plan en coupe du stratifié reste plan après déformation
7. Chaque couche et tout le stratifié se comportent de façon linéaire élastique

La couche est supposée se plier sans glisser sur l'autre, et la section transversale de la couche reste non enveloppée. Par conséquent, le déplacement du plan médian est supposé être



$$\begin{aligned}
 u_0 &= u_0(x, y) \\
 v_0 &= v_0(x, y) \\
 w_0 &= w_0(x, y)
 \end{aligned}
 \tag{I.10}$$

Figure (I.5) Section stratifiée sous déformation.

Le déplacement en tout point du stratifié est donné par Fig(I.5)

$$\begin{aligned}
 u &= u_0 - z \frac{\partial w}{\partial x} \\
 v &= v_0 - z \frac{\partial w}{\partial x} \\
 w &= w_0
 \end{aligned}
 \tag{I.11}$$

Où u_0 , v_0 et w_0 se réfèrent aux déplacements dans les directions x, y et z mais sont uniquement fonction de x et y. Ces déplacements sont dans le plan de référence ou médian.

Chapitre I MATERIAUX COMPOSITES

D'après l'équation I.11, la relation déformation-déplacement en tout point peut être donnée comme :

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v_0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial x} - 2z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y}\end{aligned}\tag{I.12}$$

Pour simplifier, nous réécrivons l'équation 3.12 sous la forme matricielle

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} K_x \\ K_y \\ K_{xy} \end{bmatrix}$$

Où,

$$\begin{aligned}\varepsilon_x^0 &= \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \varepsilon_y^0 &= \frac{\partial v_0}{\partial x} \\ \gamma_{xy}^0 &= \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \\ K_x &= -z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ K_y &= -z \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ K_{xy} &= -2z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y}\end{aligned}\tag{I.13}$$

Où I.13 représente les déformations et les courbures du plan médian.

I-3.1.4 Contrainte et déformation de la couche dans les coordonnées stratifiées

Les déformations dans la kième couche sont données par

Chapitre I MATERIAUX COMPOSITES

$$\begin{aligned} [\varepsilon_{x-y}]_k &= [\varepsilon^0] + Z_k [K] \\ \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} + Z_k \begin{bmatrix} K_x \\ K_y \\ K_{xy} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (I.14)$$

Les contraintes des kèmes couches dans le stratifié sont données par $[\sigma_{x-y}]_{kth} =$

$$\begin{aligned} [\sigma_{x-y}]_{kth} &= [\bar{Q}_{x-y}]_{kth} [\varepsilon_{x-y}]_{kth} \\ [\sigma_{x-y}]_{kth} &= [\bar{Q}_{x-y}]_{kth} ([\varepsilon^0]_{x-y} + Z_{kth} [K_{x-y}]) \end{aligned} \quad (I.15)$$

résultantes de la force et du moment du stratifié

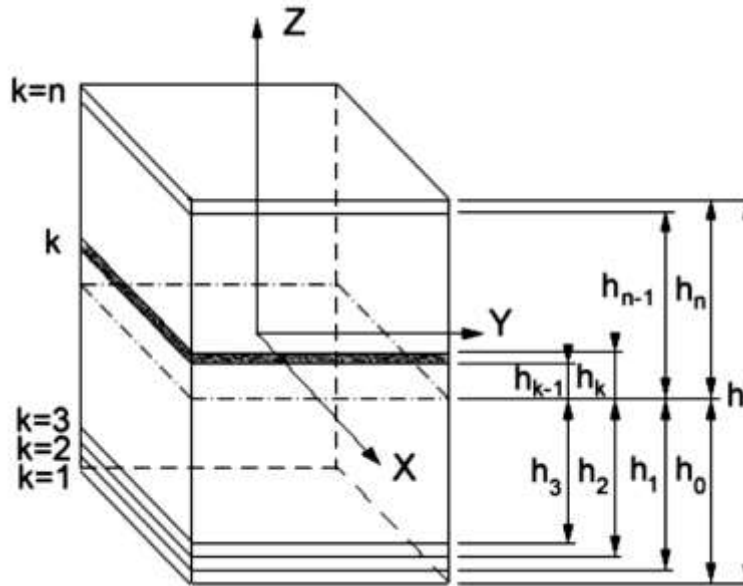


Figure (I.6) Stratifié composite à n couches.

La relation générale pour la Force / Moments et la Contrainte du stratifié est donnée par

$$\begin{bmatrix} \bar{N} \\ \bar{M} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix} [\varepsilon^0] \quad (I.16)$$

Où $[\varepsilon^0]$ et $[K]$ représentent respectivement les courbures de déformation et de plan médian, données par l'équation I.13

où $[\bar{N}]$ et $[\bar{M}]$ sont les matrices de Force et Moment, sont données par

Chapitre I MATERIAUX COMPOSITES

$$\begin{bmatrix} \bar{N} \\ \bar{M} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N \\ M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N^T \\ M^T \end{bmatrix} \quad (\text{I.17})$$

Où [N] et [M] représentent respectivement la charge appliquée et le moment appliqué dus aux forces mécaniques. Ils sont donnés par l'équation

$$\begin{aligned} [N] &= \sum_{k=1}^n \int_{-1}^1 [\sigma]_k \cdot dz \\ [M] &= \sum_{k=1}^n \int_{-1}^1 [\sigma]_k \cdot z \cdot dz \end{aligned} \quad (\text{I.18})$$

La force et le moment induits par les charges thermiques sont donnés par $[N^T]$ et $[M^T]$ comme

$$\begin{aligned} [N^T] &= \left\{ \sum_{k=1}^n [\bar{Q}]_k \cdot [\alpha_{x-y}]_k \cdot (h_k - h_{k-1}) \right\} \cdot \Delta T \\ [M^T] &= \frac{1}{2} \left\{ \sum_{k=1}^n [\bar{Q}]_k \cdot [\alpha_{x-y}]_k \cdot (h_k^2 - h_{k-1}^2) \right\} \cdot \Delta T \end{aligned} \quad (\text{I.19})$$

Dans l'équation 3.19, $[\alpha_{x-y}]$ représente le coefficient de dilatation thermique (CDT), du kième pli transformant des couches locales au système de coordonnées global. ΔT est la différence entre la température appliquée et la température ambiante. h^k représente la distance jusqu'au sommet du kième pli, comme illustré à la figure 6.

Les matrices [A], [B] et [D] données dans l'équation 3.16 représentent respectivement la matrice de rigidité extensionnelle dans le plan, la matrice de rigidité de couplage extension-flexion et la matrice de rigidité flexion. Celles-ci sont évaluées par unité de largeur du stratifié et sont données par

$$\begin{aligned} [A] &= \sum_{k=1}^n [\bar{Q}]_k \cdot (h_k - h_{k-1}) \\ [B] &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n [\bar{Q}]_k \cdot (h_k^2 - h_{k-1}^2) \\ [D] &= \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n [\bar{Q}]_k \cdot (h_k^3 - h_{k-1}^3) \end{aligned} \quad (\text{I.20})$$

Où $[\bar{Q}]$ est obtenu à partir de la matrice transformée de rigidité réduite de l'équation 3.8.

De l'équation I.16,

$$\begin{bmatrix} \varepsilon^o \\ K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ b' & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N \\ M \end{bmatrix} \quad (\text{I.21})$$

Chapitre I MATERIAUX COMPOSITES

Où
$$\begin{bmatrix} a & b \\ b^T & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix}^{-1} \quad (1.22)$$

L'équation 3.21 donne la déformation et la courbure au milieu du plan du stratifié.

Les propriétés mécaniques transversales discontinues provoquent des déplacements de champs u dans le sens de l'épaisseur qui peuvent présenter un changement rapide de leurs pentes en correspondance avec chaque interface de couche (voir figure I.7). C'est ce qu'on appelle la forme Zig-Zag, ZZ, des champs de déplacement dans le sens de l'épaisseur.

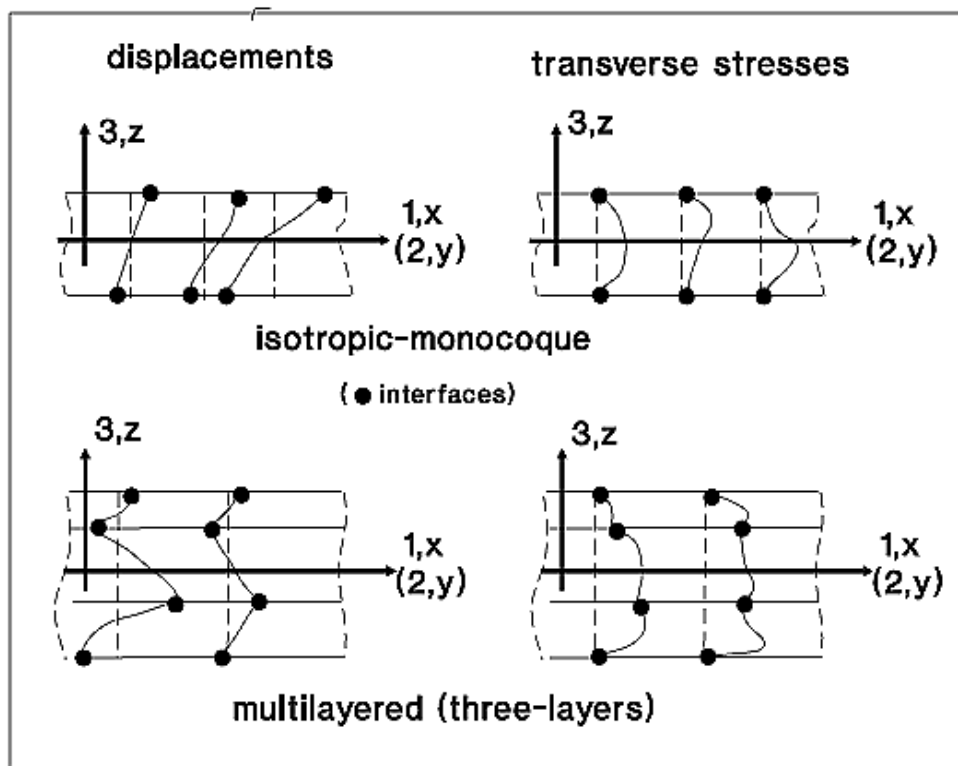


Figure (I.7) Comparaison du champ de contraintes transversales entre une structure à une couche et une structure à trois couches [16].

II – 1 Procédure générale la méthode des éléments finis

La dérivation des équations, de l'assemblage et de la solution des éléments pour tout type d'éléments est similaire à celle de l'élément de barre unidimensionnel, à l'exception du fait que le principe du travail virtuel (PTV) est utilisé à la place de l'équation dominante. Le PTV fournit une forme faible similaire. L'œuvre virtuelle interne est

$$\delta W_I = \int_V (\sigma_{xx} \delta \varepsilon_{xx} + \sigma_{yy} \delta \varepsilon_{yy} + \sigma_{zz} \delta \varepsilon_{zz} + \sigma_{yz} \delta \varepsilon_{yz} + \sigma_{xz} \delta \varepsilon_{xz} + \sigma_{xy} \delta \varepsilon_{xy}) dV = \int_V \underline{\sigma}^T \underline{\delta \varepsilon} dV \quad (\text{II.1})$$

Où

$$\begin{aligned} \underline{\sigma}^T &= [\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \sigma_{yz}, \sigma_{xz}, \sigma_{xy}] \\ \underline{\delta \varepsilon} &= [\delta \varepsilon_{xx}, \delta \varepsilon_{yy}, \delta \varepsilon_{zz}, \delta \varepsilon_{yz}, \delta \varepsilon_{xz}, \delta \varepsilon_{xy}] \end{aligned} \quad (\text{II.2})$$

Ensuite, le travail externe est

$$\delta W_E = \int_V \underline{f}^T \underline{\delta u} dV + \int_S \underline{t}^T \underline{\delta u} dS \quad (\text{II.3})$$

Où les forces volumiques par unité de volume et les forces de surface par unité de surface sont

$$\underline{f}^T = [f_x, f_y, f_z]; \quad \underline{t}^T = [t_x, t_y, t_z] \quad (\text{II.4})$$

Ici, le soulignement () désigne un tableau unidimensionnel, pas nécessairement un vecteur. Par exemple, \underline{u} est un vecteur mais $\underline{\sigma}$ sont les six composantes de la contrainte disposées dans un tableau à six éléments. Les déformations virtuelles sont des déformations qui seraient produites par des déplacements virtuels $\underline{\delta u}(x)$. Par conséquent, les déformations virtuelles sont calculées à partir des déplacements virtuels en utilisant les équations déformation-déplacement. En notation matricielle

$$\underline{\varepsilon} = \underline{\partial u}; \quad \underline{\delta \varepsilon} = \underline{\partial \delta u} \quad (\text{II.5})$$

Où

$$\underline{\underline{\partial}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}$$

Ensuite, le PTV est écrit en notation matricielle comme

$$\int_V \underline{\underline{\sigma}}^T \underline{\underline{\partial}} \underline{\underline{\delta u}} dV = \int_V \underline{\underline{f}}^T \underline{\underline{\delta u}} dV + \int_S \underline{\underline{t}}^T \underline{\underline{\delta u}} dS$$

Les intégrales sur le volume V et la surface S du corps peuvent être brisées élément par élément sur m éléments, comme

$$\sum_{c=1}^m \left[\int_{V_c} \underline{\underline{\sigma}}^T \underline{\underline{\partial}} \underline{\underline{\delta u}} dV \right] = \sum_{c=1}^m \left[\int_{V_c} \underline{\underline{f}}^T \underline{\underline{\delta u}} dV + \int_{S_c} \underline{\underline{t}}^T \underline{\underline{\delta u}} dS \right]$$

Chaque fois que deux éléments partagent une surface, les contributions de la deuxième intégrale s'annulent. Les composantes des contraintes sont données par les équations constitutives. Pour un matériau linéaire

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{C}} \underline{\underline{\varepsilon}}$$

Avec C donné par

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix}$$

Le travail virtuel interne sur chaque élément devient

$$\delta W_i^e = \int_{V_e} \underline{\underline{\sigma}} \underline{\underline{\delta \varepsilon}} dV = \int_{V_e} \underline{\underline{\varepsilon}}^T \underline{\underline{C}} \underline{\underline{\delta \varepsilon}} dV$$

L'expansion des déplacements peut s'écrire sous forme matricielle comme

$$\underline{\underline{u}} = \underline{\underline{N}} \underline{\underline{a}}$$

où \underline{N} contient les fonctions d'interpolation d'élément et \underline{a} les déplacements nodaux de l'élément, comme dans la section 2.1.4. Par conséquent, les souches sont

$$\underline{\varepsilon} = \underline{\partial u} = \underline{\partial N a} = \underline{B a}$$

Où $\underline{B} = \underline{\partial N}$ est la matrice déformation-déplacement. Maintenant, la forme discrétisée du travail virtuel interne sur un élément peut être calculé comme

$$\delta W_I^e = \int_{V_e} \underline{a}^T \underline{B}^T \underline{C B} \delta \underline{a} dV = \underline{a}^T \int_{V_e} \underline{B}^T \underline{C B} dV \delta \underline{a} = \underline{a}^T \underline{K}^e \delta \underline{a}$$

où la matrice de rigidité de l'élément \underline{K}^e est

$$\underline{K}^e = \int_{V_e} \underline{B}^T \underline{C B} dV$$

L'œuvre virtuelle externe devient

$$\delta W_E^e = \int_{V_c} \underline{f}^T \underline{\delta u} dV + \int_{S_c} \underline{t}^T \underline{\delta u} dS = \left(\int_{V_c} \underline{f}^T \underline{N} dV + \int_{S_c} \underline{t}^T \underline{N} dS \right) \delta \underline{a} = (\underline{P}^e)^T \delta \underline{a}$$

où se trouve le vecteur de force d'élément

$$\underline{P}^e = \int_{V_c} \underline{N}^T \underline{f} dV + \int_{S_c} \underline{N}^T \underline{t} dS$$

Les intégrales sur le volume de l'élément V_e et la surface de l'élément S_e sont généralement évaluées numériquement par la procédure d'intégration de Gauss. Pour l'intégrale de volume, une telle procédure nécessite une évaluation de l'intégrale en quelques points à l'intérieur du volume.

Ces points, appelés points de Gauss, sont importants pour deux raisons. Tout d'abord, la matrice constitutive \underline{C} est évaluée à ces emplacements. Deuxièmement, les valeurs les plus précises des déformations (et des contraintes) sont également obtenues à ces emplacements.

L'assemblage des équations d'élément δW_E^e et δW_I^e dans le principe du travail virtuel pour le corps entier se fait de la même manière. Évidemment, le processus est plus compliqué que pour les éléments en barres. Les détails de ces processus et de sa programmation informatique font partie de la technologie des éléments finis, qui sort du cadre de ce manuel. Finalement, toutes les matrices de rigidité des éléments \underline{K}^e et les vecteurs de force des éléments \underline{P}^e sont assemblés en un système global pour le corps entier

$$\underline{Ka} = \underline{P}$$

Ensuite, les conditions aux limites sont appliquées au système (2.47) d'une manière systématique ressemblant à la procédure de la section 2.1.6. Ensuite, le système algébrique d'équations (2.47) est résolu pour trouver le tableau de déplacement nodal Q sur tout le corps. Puisque les résultats des déplacements nodaux pour chaque élément peuvent être trouvés quelque part dans Q , il est possible de revenir à (2.35) et à (2.39) pour calculer les déformations et contraintes n'importe où à l'intérieur des éléments.

II – 2 Analyse par éléments finis des poutres stratifiées

L'analyse des contraintes et des déformations des composites peut être effectuée à différents niveaux (Figure 8). Le niveau de détail nécessaire à la description du matériau dépend du niveau de post-traitement souhaité.

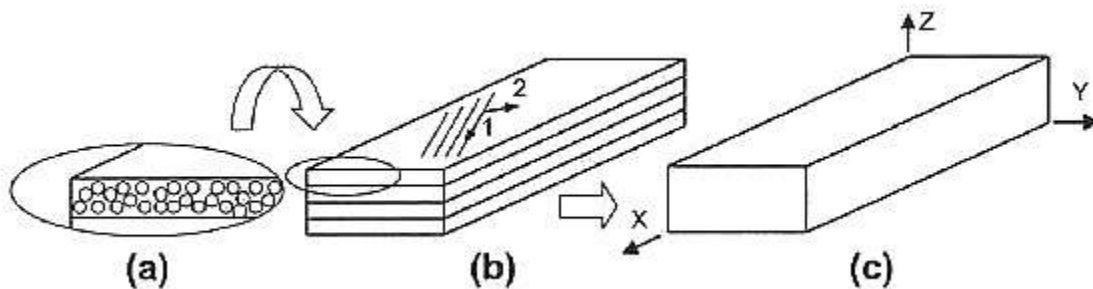


Figure (I.8): (a) Micromécanique, (b) niveau de la lame et (c) approche au niveau du stratifié.

Lorsqu'un grand niveau de détail est nécessaire, la déformation et la contrainte sont calculées au niveau du constituant, c'est-à-dire de la fibre et de la matrice. Dans ce cas, il est nécessaire de décrire la microstructure, y compris la forme des fibres et la répartition géométrique, et les propriétés matérielles des constituants. Plus de détails sont donnés plus bas où la modélisation micromécanique est utilisée pour générer des propriétés pour toute combinaison de fibres et de matrice.

Avec une approche moins détaillée, le matériau composite peut être considéré comme un matériau équivalent homogène. Dans ce cas, son comportement structurel peut être analysé en utilisant les propriétés orthotropes.

Parfois, il n'est pas possible d'utiliser la simplification de la coque. Dans ces cas, le composite doit être analysé comme solide. Dans tous les cas, la plupart des structures stratifiées peuvent être analysées en utilisant les simplifications des plaques et de la coque expliquées plus bas.

Si l'ensemble du stratifié est analysé comme une coque homogène équivalente, en utilisant l'approche de niveau macro-échelle (voir Figure 8 c), la distribution des contraintes dans le stratifié ne peut pas être obtenue. Cependant, cette description très simple du stratifié est suffisante lorsque seuls les déplacements, les charges et modes de flambage, ou les fréquences et modes de vibration sont nécessaires. Dans ces cas, seule la rigidité du stratifié est nécessaire. Dans certains cas, une description matérielle même plus simple suffira. Par exemple, lorsque le stratifié est seulement unidirectionnel, ou si le stratifié est équilibré et symétrique, le stratifié peut-être modélisé comme une seule couche de matériau orthotrope.

D'un autre côté, si la contrainte et les déformations doivent être calculées, la séquence réelle d'empilement des stratifiés doit être entrée dans le programme. Dans ce cas, les propriétés élastiques de chaque lamelle, ainsi que l'épaisseur et l'orientation des fibres de chaque lamelle doivent être données. Cette méthode est généralement appelée approche au niveau méso-échelle.

II – 3 Types d'éléments de coque dans les codes d'éléments finis

Dans les codes d'éléments finis commerciaux, diverses théories sur les plaques et les coques sont mises en œuvre et différenciées par types d'éléments, appelés éléments de coque. Les propriétés du stratifié peuvent être spécifiées de deux manières: en définissant les matrices constitutives ou en spécifiant les propriétés individuelles des couches.

Lorsque les propriétés moyennes du stratifié sont utilisées, l'élément de coque ne peut pas faire la distinction entre les différentes couches. Il ne peut relier que les forces et moments généralisés à des déformations et courbures généralisées. Certains éléments de coque, appelés éléments de coque en couches, ont la capacité de calculer les propriétés du stratifié à l'aide de la séquence d'empilage du stratifié et des propriétés des lamelles. Ensuite, il est possible d'analyser le modèle au niveau méso-échelle.

Le choix du type d'élément approprié est très important lors de l'utilisation de la méthode des éléments finis pour analyser les composites. Le type d'élément doit être choisi en fonction du problème et des résultats souhaités. Les principaux types d'éléments de coque non en couches et

en couches dans sont présentés dans la figure 9. Ces éléments permettent de modéliser des coques minces à moyennement épaisses, jusqu'à un rapport côté / épaisseur de 10. Certains d'entre eux ont 4 nœuds et d'autres ont 8 nœuds en utilisant des fonctions d'interpolation de degré supérieur. Ces éléments de coque sont définis dans l'espace 3D. et ont six degrés de liberté à chaque nœud (translation dans les directions nodales x, y et z et rotations autour des axes nodaux x, y et z). La 6ème DOF (rotation autour de l'axe z) est incluse dans la formulation de la coque pour permettre la modélisation des plaques pliées, mais elle ne serait pas nécessaire si la surface de la coque est lisse.

Des éléments iso paramétriques à nœuds (voir Fig. 9) basés sur la théorie de déformation par cisaillement de premier ordre, ayant cinq degrés de liberté par nœud, sont utilisés pour développer la procédure d'analyse par éléments finis. Les fonctions de forme pour un élément iso paramétrique quadrilatère à neuf nœuds sont

$$\begin{aligned}
 N_i &= 1/4(\xi^2 + \xi_i\xi)(\eta^2 + \eta_i\eta) & i=1,2,3,4 \\
 N_i &= 1/2(1 - \xi^2)(\eta^2 + \eta_i\eta) & i=5,7 \\
 N_i &= 1/2(\xi^2 + \xi_i\xi)(1 - \eta^2) & i=6,8 \\
 N_i &= (1 - \xi^2)(1 - \eta^2) & i=9
 \end{aligned}
 \tag{II.1}$$

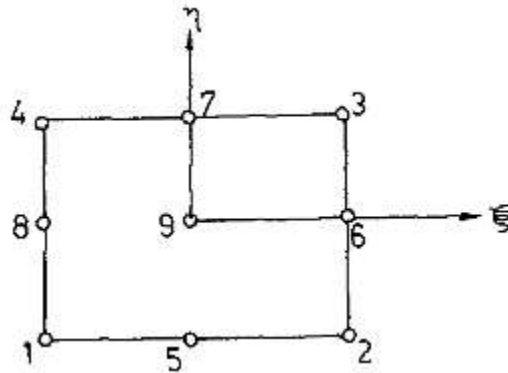


Figure (I.9:) Élément iso paramétrique rectangulaire à neuf nœuds.

Les fonctions de déplacement (u, v, w) en un point (x, y, z) sont supposées comme suit

$$\begin{aligned}
 u(x, y, z) &= u_0(x, y) + z\theta_x(x, y) \\
 v(x, y, z) &= v_0(x, y) + z\theta_y(x, y) \\
 w(x, y, z) &= w_0(x, y)
 \end{aligned}
 \tag{II.2}$$

Les paramètres u_0 , v_0 , w_0 , θ_y et θ_z sont les déplacements et rotations dans le plan médian. Ceux-ci sont exprimés comme

$$u_0 = \sum_{i=1}^9 N_i u_{0i} \quad v_0 = \sum_{i=1}^9 N_i v_{0i} \quad w_0 = \sum_{i=1}^9 N_i w_{0i}
 \tag{II.3}$$

$$\theta_x = \sum_{i=1}^9 N_i \theta_{xi} \quad \theta_y = \sum_{i=1}^9 N_i \theta_{yi}
 \tag{II.4}$$

La matrice de masse des éléments est donnée par

$$[M_e] = \int_{A_e} \int_{-h/2}^{h/2} [N]^T [\rho] [N] dz dA
 \tag{II.5}$$

Où

$$[p] = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & P & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 & P \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ P & 0 & 0 & Q & 0 \\ 0 & P & 0 & 0 & Q \end{bmatrix}
 \tag{II.6}$$

Avec

$$\langle I, P, Q, R, S, T, U \rangle = \int_{-h/2}^{h/2} X(1, z, z^2, z^3, z^4, z^5, z^6) p(z) dz$$

(II.7)

La matrice de rigidité de l'élément est définie comme

$$[K_e] = \int_{A_c} [B]^T [D] [B] dA \quad (\text{II.8})$$

Où [B] et [D] sont des matrices de fonctions de forme et de forces de cisaillement respectivement.

En assemblant toutes les matrices de masse et de rigidité des éléments par rapport aux coordonnées globales, l'équation statique suivante est obtenue

$$[K]\{d\} = \{F\} \quad (\text{II.9})$$

Où

{d} est le vecteur d'accélération

{F} est le vecteur de force

[K] est la matrice de rigidité globale.

La solution de l'équation (10) est obtenue en employant la procédure d'élimination de Gauss.

Les contraintes peuvent être évaluées à l'aide des relations constitutives, mais cela conduit à des discontinuités appréciables dans la contrainte de cisaillement transversale (τ_{xz}) à l'interface.

Les déformations membranaires et la courbure de l'élément de coque dans le système cartésien local sont obtenues à partir de l'éqn (7) comme

$$\{\varepsilon\} = [H]\{q_0\} \quad (\text{II.10})$$

où

$$\{\varepsilon\}^T = \{\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \gamma_{xy}, K_{xx}, K_{yy}, K_{xy}\} = \{\varepsilon, K\}$$

et

[H] = matrice de déformation

Pour la formulation de l'équation gouvernante, on utilise le principe de l'énergie potentielle minimale, qui s'exprime comme suit pour un cas général:

$$\pi = \sum \int \left[\frac{1}{2} \varepsilon \sigma - \varepsilon \sigma_0 \right] dV \quad (\text{II.11})$$

Où ε = déformations. σ = contraintes. σ_0 = contraintes initiales, V = volume et m = nombre d'éléments. L'équation (9) peut être spécialisée pour un élément de coque stratifié comme suit:

$$\pi = \sum \int_A \left[\frac{1}{2} \begin{Bmatrix} \varepsilon \\ K \end{Bmatrix}^T \begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \varepsilon \\ K \end{Bmatrix}^T \begin{Bmatrix} N^T \\ M^T \end{Bmatrix} \right] dA \quad (\text{II.12})$$

Où

$$\begin{bmatrix} N \\ M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N''_x \\ N''_y \\ N''_{xy} \\ M''_x \\ M''_y \\ M''_{xy} \end{bmatrix} = \text{contraintes et moments résultants}$$

$$\begin{bmatrix} N^T \\ M^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N^T_X \\ N^T_Y \\ N^T_{XY} \\ M^T_X \\ M^T_Y \\ M^T_{XY} \end{bmatrix} = \text{contraintes thermiques et moments résultants}$$

(II.13)

Et A = aire élémentaire.

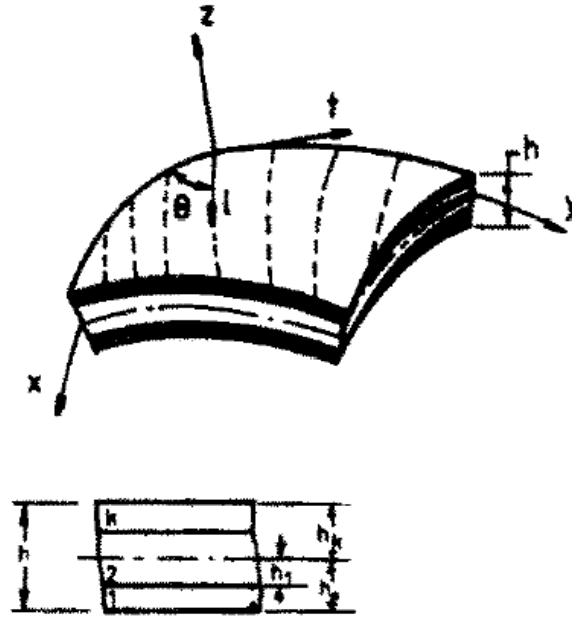


Fig. (II-3) : Construction stratifiée d'un élément de coque.

La relation constitutive du stratifié est exprimée comme (Fig. (II-3))

$$\begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{ij} & B_{ij} \\ B_{ij} & D_{ij} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon \\ K \end{Bmatrix} \quad (\text{II.14})$$

Où

$$(A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}) = \sum_{k=1}^n \int_{h_{\alpha-1}}^{h_{\alpha}} [\bar{Q}_{ij}]^{(k)} (1, z, z^2) dz$$

dans laquelle $[\bar{Q}_{ij}]^{(k)}$ est la matrice de propriétés généralement orthotrope de la kème couche.

$$(N_{ij}^T, M_{ij}^T) = \sum_{k=1}^n \int_{h_{\alpha-1}}^{h_{\alpha}} [\bar{Q}_{ij}]^{(k)} \times \{x\} T(1, z) dz \quad (\text{II.15})$$

où T = élévation de température, qui sera une fonction de (x, y, z)

$$\{x\} = \begin{Bmatrix} x_{xx} \\ x_{yy} \\ x_{xy} \end{Bmatrix} = [R] \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{II.16})$$

RI = matrice de transformation des coordonnées du matériau

l, t = directions matérielles principales.

En substituant les équations (II.10), (II.14) et (II.15) dans l'eqn (II.11) et en effectuant les variations par rapport aux degrés de liberté nodaux (q_a) et égalant à zéro, on a

$$\sum^m \int \left[[H]^T \begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix} [H] \{q_0\} - [H]^T \begin{Bmatrix} N^T \\ M^T \end{Bmatrix} \right] dA = 0 \quad (\text{II.17})$$

L'équation (13) se réduit à

$$[k] \{q_0\} = \{f\} \quad (\text{II.18})$$

Où

$[k]$ = matrice de rigidité des éléments

$\{f\}$ = vecteur de charge thermique cohérent

En utilisant la formulation ci-dessus, qui peut gérer les variations de température à la fois sur la surface et à travers l'épaisseur. De plus, il peut prendre en charge les variations des propriétés du matériau en fonction de la température.

II – 4 Entrée orthotrope équivalente pour l'analyse par élément fini du stratifié

Certains codes d'analyse par élément fini n'ont pas d'éléments stratifiés et n'acceptent pas les matrices A, B, D et H comme expliqué dans la section précédant. Cependant, s'ils comportent des éléments orthotropes, il est toujours possible d'effectuer une analyse de déformation, de vibration et de flambage pour les composites stratifiés.

II – 5 Stratifié unidirectionnel dans l'analyse par élément fini

Pour modéliser un stratifié unidirectionnel, des éléments de coque standard peuvent être utilisés, même s'ils ne sont pas de coque stratifiée, et obtenir toujours des résultats corrects de déplacements, de déformations et de contraintes. La géométrie des coques est une surface qui représente la surface médiane de la coque réelle, située à mi-chemin de l'épaisseur. La coordonnée d'épaisseur positive pointe le long d'une normale à la surface médiane de la coque

(direction z locale qui coïncide avec la direction 3). C'est la définition normale des éléments et elle est utilisée dans les éléments de coque.

II – 6 Stratifié symétrique dans l'analyse par élément fini

Si un stratifié multidirectionnel est équilibré et symétrique, les propriétés orthotropes apparentes du stratifié peuvent être trouvées. Les propriétés apparentes du stratifié représentent la rigidité d'une plaque orthotrope équivalente (fictive) qui se comporte comme le stratifié réel sous des charges dans le plan. Ces propriétés apparentes ne doivent pas être utilisées pour prédire la réponse en flexion. Lorsque la seule réponse importante est la flexion, par ex. une poutre en porte-à-faux épaisse sous pliage, la formulation indiquée doit être utilisée pour obtenir les propriétés apparentes du stratifié. Cependant, dans la plupart des conceptions structurelles utilisant une coque composite, le stratifié travaille sous des charges planes et la formulation de second ordre doit être utilisée.

II – 7 Stratifié asymétrique dans l'analyse par éléments finis

Si le stratifié n'est pas symétrique, un couplage flexion-extension doit être envisagé. À proprement parler, un tel matériau n'est pas orthotrope et ne doit pas être modélisé avec un matériau stratifié équivalent. Même dans ce cas, si seuls les éléments de coque orthotropes sont disponibles et que les effets de couplage flexion-extension ne sont pas sévères, le matériau pourrait être approché par un matériau orthotrope en négligeant les matrices B et D. Les rapports définis peuvent être utilisés pour évaluer la qualité de l'approximation obtenue à partir des propriétés élastiques apparentes. Des précautions doivent être prises pour les stratifiés déséquilibrés que les matrices A et H soient formulées dans une coordonnée.

II – 8 La séquence d'empilage du stratifié pour le stratifié multidirectionnel dans l'analyse par éléments finis

Pour le calcul de la déformation et de la contrainte à la méso-échelle (niveau de la lame), il est nécessaire de connaître la description du stratifié et les propriétés de chaque lame. La description du stratifié multidirectionnel comprend la séquence d'empilage du stratifié, qui spécifie l'angle de chaque lame par rapport à l'axe x du stratifié, l'épaisseur et les propriétés du matériau élastique de chaque lame. Ensuite, le logiciel calcule les matrices A, B, D et H en interne. De cette manière, le logiciel peut calculer les composantes de contrainte dans chaque couche.

III.1.1 Introduction

Après avoir construit un modèle, il doit assurer qu'il fonctionne efficacement dans ses conditions d'utilisation. En l'absence d'outils d'analyse, cette tâche ne peut être remplie qu'en exécutant de très longs et très coûteux cycles de développement du produit. Un cycle typique de développement d'un produit inclut les étapes suivantes :

1. Construction de notre modèle.
2. Construction du prototype de conception.
3. Test du prototype en conditions réelles.
4. Evaluation des résultats des tests en conditions réelles.
5. Modification de la conception en fonction des résultats des tests en conditions réelles.

Ce processus continue jusqu'à ce qu'une solution acceptable soit trouvée. L'analyse permet d'atteindre les objectifs suivants :

- Réduction des coûts par simulation des tests du modèle sur ordinateur au lieu de leur exécution réelle coûteuse.
- Réduction de la durée de développement par diminution du nombre de cycles de développement du produit.
- Amélioration des produits par des tests rapides de différentes conceptions et scénarios avant la prise de décision finale, vous permettant de disposer de plus de temps pour réfléchir à de nouvelles conceptions.

Pour mener notre étude par simulation numérique, nous avons utilisé le module Simulation de logiciel Solidworks version 2018, qui est l'un des logiciels de CAO les plus utilisés dans le monde, Et qui permet de vérifier la conception. Il est basé sur la méthode des éléments finis.

III.1.2Présentation Solidwork

Le logiciel de CAO SOLIDWORKS est une application de conception mécanique 3D paramétrique qui permet aux concepteurs d'esquisser rapidement des idées, d'expérimenter des fonctions et des cotes afin de produire des modèles et des mises en plan précises.

III.1.3 Historique

Créé en 1993 par l'éditeur américain éponyme, SOLIDWORKS est racheté le 24 juin 1997 par la société Dassault Systèmes.

Parmi les plus grandes organisations utilisant Solidworks, on peut citer Franckie, Équipement d'emballage MMC, AREVA, Patek Philippe, ME2C, SACMO, Le Boulch, Robert Renaud, Mega Bloks, Axiome.

III.1.4 Fonctionnement

Solidworks est un modèleur 3D utilisant la conception paramétrique. Il génère 3 types de fichiers relatifs à trois concepts de base : la pièce, l'assemblage et la mise en plan. Ces fichiers sont en relation. Toute modification à quelque niveau que ce soit est répercutée vers tous les fichiers concernés.

III.1.5 Les pièces

Une pièce est la réunion d'un ensemble de fonctions volumiques avec des relations d'antériorité, des relations booléennes (ajout retrait)... Cette organisation est rappelée sur l'arbre de construction. Chaque ligne est associée à une fonction qu'on peut renommer à sa guise.

III.1.6 Les assemblages

Les assemblages sont obtenus par la juxtaposition de pièces. La mise en position de pièces est définie par un ensemble de contraintes d'assemblage associant, deux entités respectives par une relation géométrique (coïncidence, tangence, coaxialité...). Dans une certaine mesure, ces associations de contraintes s'apparentent aux liaisons mécaniques entre les pièces.

III.1.7 Les mises en plan

Les mises en plan concernent à la fois les pièces (dessin de définition) ou les assemblages (dessin d'ensemble). Pour aboutir à un plan fini d'une pièce on peut estimer mettre 2 fois moins de temps qu'avec un outil DAO (temps de conception et exécution du dessin). En effet, en DAO, chaque trait est indépendant, et c'est au dessinateur de savoir quelles entités graphiques sont concernées par une modification. Le logiciel 3D ne fait qu'une projection de l'objet

III.1.8 Les extensions des fichiers

Chaque type de fichier possède une extension qui lui est propre :

- .sldprt, pour les fichiers pièce
- .sldasm, pour les fichiers assemblage
- .slddrw, pour les fichiers plans
- .slddrt, pour les fichiers de fond de plan

III.1.9 Produits associés

Un certain nombre de modules complémentaires qui s'interfacent avec Solidworks :

- **SolidWorks Simulation** : Logiciel de simulation, vérification de conception dans les domaines statique (pièces et assemblages), thermique, flambement, fréquentiel, fatigue, optimisation, dynamique, linéaire et non linéaire, test de chute, conception d'appareils à pression
- **SolidWorks Flow Simulation**: Logiciel de simulation, analyse des fluides.
- **SolidWorks Motion**: Logiciel de simulation cinématique.
- **PhotoWorks**: Moteur de rendu photoréaliste 3D. (Photowiew 360 depuis la version 2007 (2006 bêta))
- **SolidWorks Animator**: Fonction d'animation en 3D (exportation dans un format vidéo standard de la simulation de mouvement d'un assemblage)
- **SolidWorks PDM**: Logiciel de SGDT, gestion centralisée des données (assemblages, pièces, documents texte, etc.).
- **SolidWorks Routing**: Conception de tuyauteries, de tubes, de câblages et de harnais dans SolidWorks
- **SolidWorks eDrawings**: Logiciel de visualisation, de marquage, de collaboration et de mesure de fichiers CAO 3D natifs.
- **SolidWorks Toolbox**: Bibliothèque de pièces standard intégrée dans l'interface SolidWorks (plusieurs millions de pièces, dont des vis, écrous, roulements, rondelles...)
- **SolidWorks Enterprise PDM**: Logiciel de SGDT, gestion centralisée des données (assemblages, pièces, documents texte, etc.) avec Workflow, dialogue avec les ERP et synchronisation multi-site.
- **FeatureWorks**: Logiciel de reconnaissance de fonctions à partir d'un volume importé sans arborescence (aussi appelée historique de conception)

- **CircuitWorks:** Logiciel d'import/export de données électriques et électronique (format idf par exemple mais pas seulement) pour reconstruction en volume dans SolidWorks.
- **ToolAnalyst:** Analyse de tolérance sur les assemblages SolidWorks tolérancés.
- **3DVIA Composer:** Logiciel de création de contenu pour la documentation, l'illustration technique, les catalogues, brochures commerciales, documents de formation, manuels de maintenance... à partir des données CAO avec mise à jour des modifications venant de la CAO.

III.2Présentation Solidwork

III.2.1 poutre en aluminium renforcée

III.2.1.1-Présentation du problème à résoudre :

Le problème qu'en va résoudre consiste à renforcer une poutre en aluminium ou acier chargée en flexion 3 points par matériau composite. (**fig. 11**)

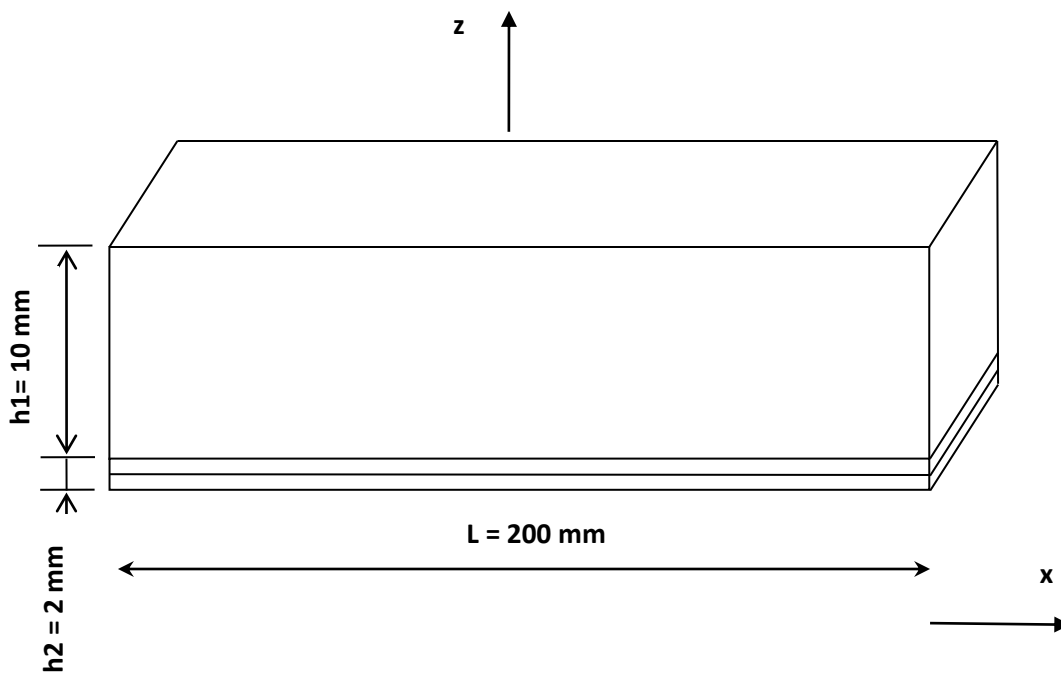


Figure 11. Poutre métallique renforcée par couche en matériau composite.

Les renforts, dont le rôle est d'assurer les fonctions mécaniques, se présentent généralement sous forme de fibres dont l'orientation au sein du matériau composite dépend de la sollicitation

mécanique appliquée. Les fibres en verre et en carbone sont principalement utilisées dans la formulation des résines et contribuent à l'amélioration de la résistance et de la rigidité du matériau composite.

Les caractéristiques mécaniques de l'acier, l'aluminium et les fibres sont présentées dans le tableau (1).

La poutre utilisée dans ce travail est de longueur, $L = 200$ mm, de largeur $b = 40$ mm, et hauteur $h = 10$ mm.

Le renforcement de la poutre par matériaux composites (Carbone /époxyde) est réalisé par une couche ($n = 1$) de hauteur $h = 2$ mm

Tableau 1 : Les caractéristiques mécaniques de l'acier, l'aluminium et les fibres.

| | Carbone | Acier | Aluminium |
|--|-------------|-------------|-------------|
| Module de Young longitudinal (GPa) | 230 | 210 | 70 |
| Module de Young transversal E_{LT} (GPa) | 14.4 | 210 | 70 |
| Module de cisaillement Longitudinal G_{LT} (GPa) | 4.9 | / | / |
| Coefficient de Poisson ν_{LT} (GPa) | 0.32 | 0.29 | 0.34 |

III.2.1.2-Effet de l'orientation des fibres de la couche composite sur la flèche de poutre

En raison de la nature anisotrope de structures composites, il est difficile d'envisager directement leurs caractéristiques et leur comportement mécanique. Cette étude a été réalisée pour fournir plus de détails sur la flèche de la poutre composite travaillant en flexion trois points. La flèche de la poutre est donnée par l'équation pour $x=L/2$ (aux milieux de la poutre) :

$$W_c = \frac{PL^3}{48E_x I} = \frac{PL^3}{48b} D_{11}^*$$

Ou

$$D_{11}^* = \frac{1}{D_{11}}$$

$$W_c = \frac{PL^3}{48bD_{11}}$$

D'après [17] le paramètre équivalent de rigidité D est :

$$D_{11} = \sum_{k=1}^n bE_x^k \frac{(h_k^3 - h_{k-1}^3)}{3}$$

En introduit l'équation W_c sur notre fonction objective. On trouve :

$$W_c = \frac{PL^3}{48b \left[\sum_{k=1}^n bE_x^k \frac{(h_k^3 - h_{k-1}^3)}{3} \right]}$$

Avec le module équivalent d'élasticité de chaque couche s'écrit sous la forme : [18].

$$\frac{1}{E_x^k} = \left(\frac{\cos^4(\theta_k)}{E_{11}} \right) + \left(\frac{1}{G_{12}} - \frac{2\nu_{12}}{E_{11}} \right) \cos^2(\theta_k) \sin^2(\theta_k) + \frac{\sin^4(\theta_k)}{E_{22}}$$

La flèche dû à la flexion de la poutre dépend de divers paramètres, parmi lequel en peut citer :

L'orientation des fibres, la géométrie de la structure, le type de chargement et l'environnement.

Dans ce qui suit, nous allons étudier l'effet de l'orientation des fibres sur la flèche des poutres en aluminium ou acier renforcé par différents matériaux : carbone-époxyde, verre-époxyde avec 1 seule couche et 2 couches de renfort.

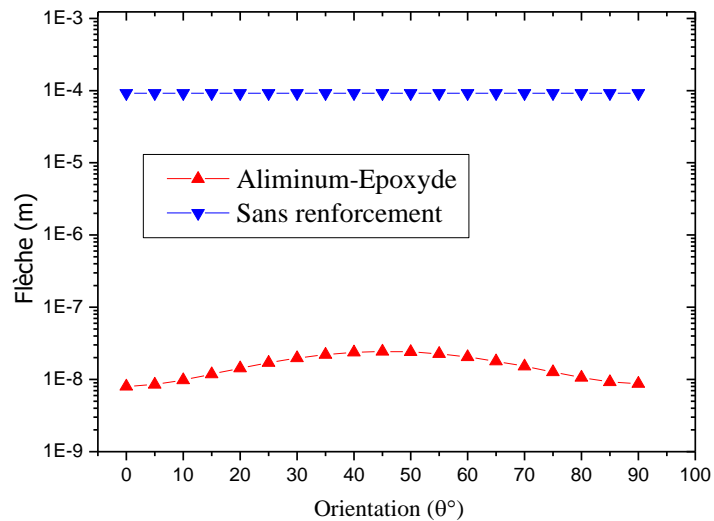
La partie numérique de l'étude de l'effet de renfort en composite sur la flèche est réalisée par le logiciel SOLIDWORKS.

III.2.1.3- Effet de l'orientation des fibres sur la flèche des poutres chargées en flexion trois points en Acier et Aluminium renforcées à différents types de matériaux :

III.2.1.3.1-Renforcement par une seule couche

1^{er} cas : poutre en Aluminium.

La variation de la flèche de la poutre Aluminium renforcée par une couche en carbone-époxyde en fonction de l'orientation des fibres est donnée dans la figure 12.



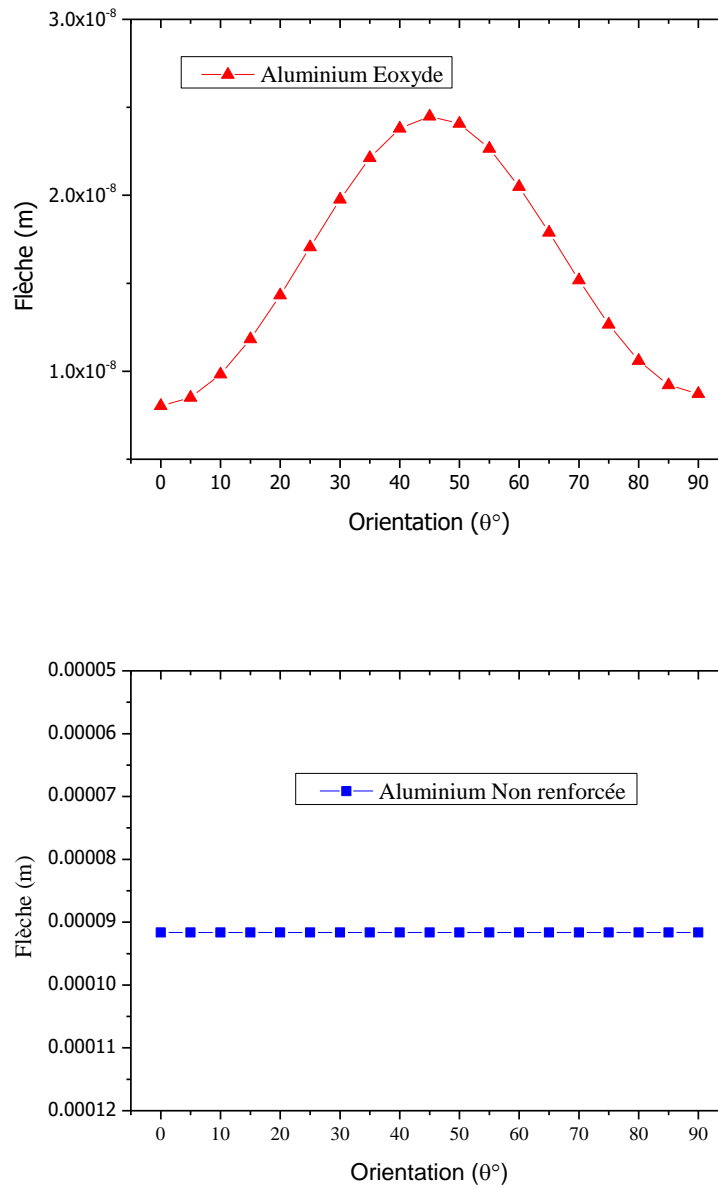


Figure 12: Variation de la flèche en fonction de l'orientation des fibres a renfort composite carbone époxyde (poutre en Aluminium).

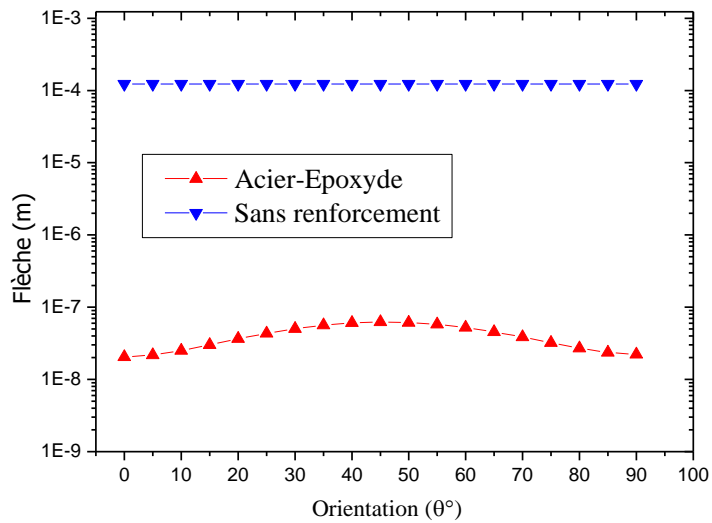
Les différents résultats montrent que pour l'orientation 0° la flèche est minimale, mais à partir de l'orientation 5° la flèche augmente avec l'augmentation de θ jusqu'à $\theta = 45^\circ$, puis la flèche se stabilise pour les orientations des fibres sont comprise entre 50° et 75°.

Cette figure montre que pour l'orientation des fibres avec $\theta = 0^\circ$ la couche de renforcement en carbone-époxyde donne une flèche minimale, c'est la nature et les caractéristiques mécaniques du matériau de fibre de carbone qui a provoqué cette faible flèche.

La différence en flèche pour les deux matériaux composites est de l'ordre de 56% pour une orientation 0° alors que la différence diminue avec l'augmentation de θ on constate aussi que les valeurs de la flèche coïncident à partir de $\theta = 40^\circ$.

2^{em} cas : poutre en Acier.

La variation de la flèche de la poutre en Acier renforcée par une couche en carbone-époxyde en fonction de l'orientation des fibres est donnée dans la figure 13.



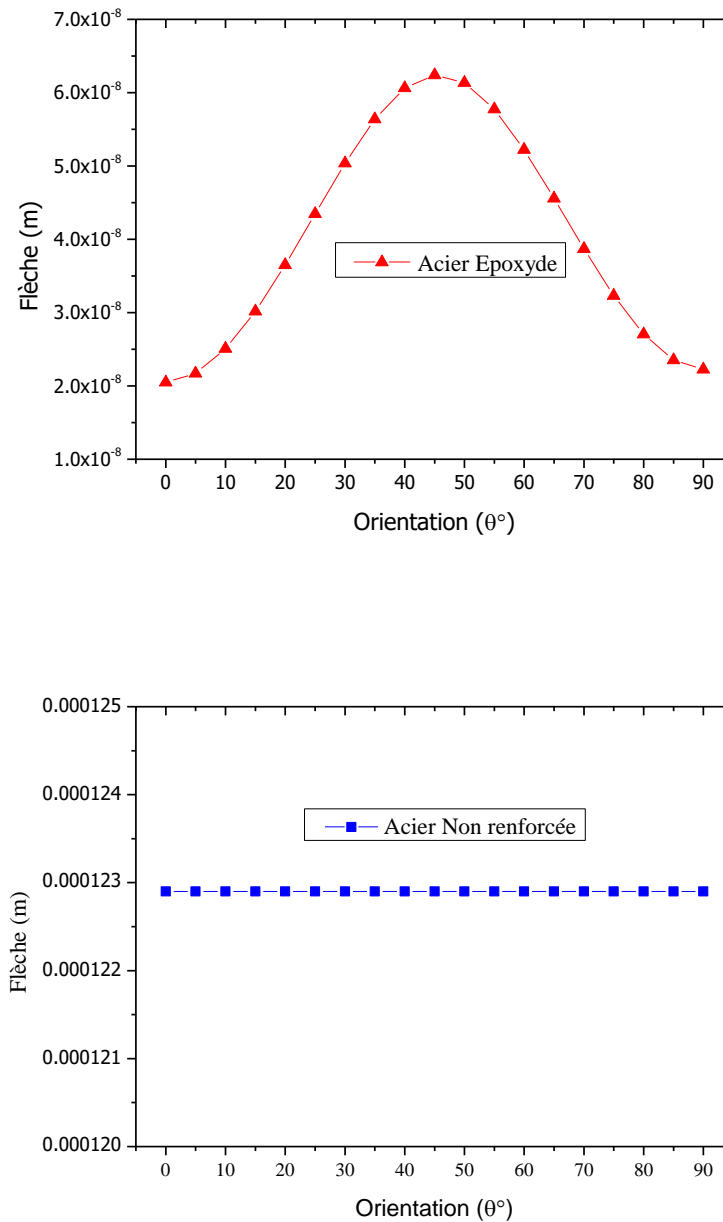
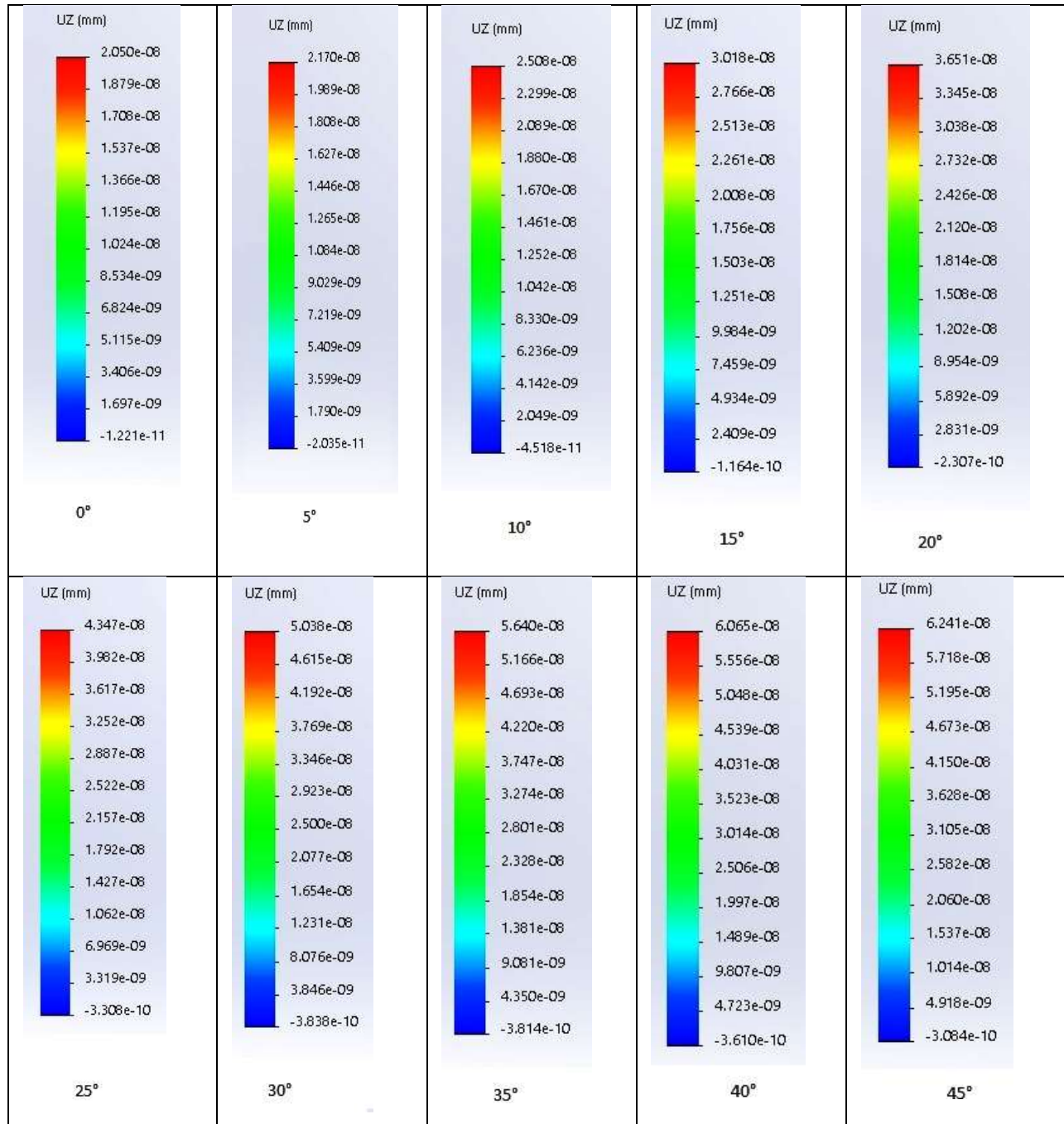


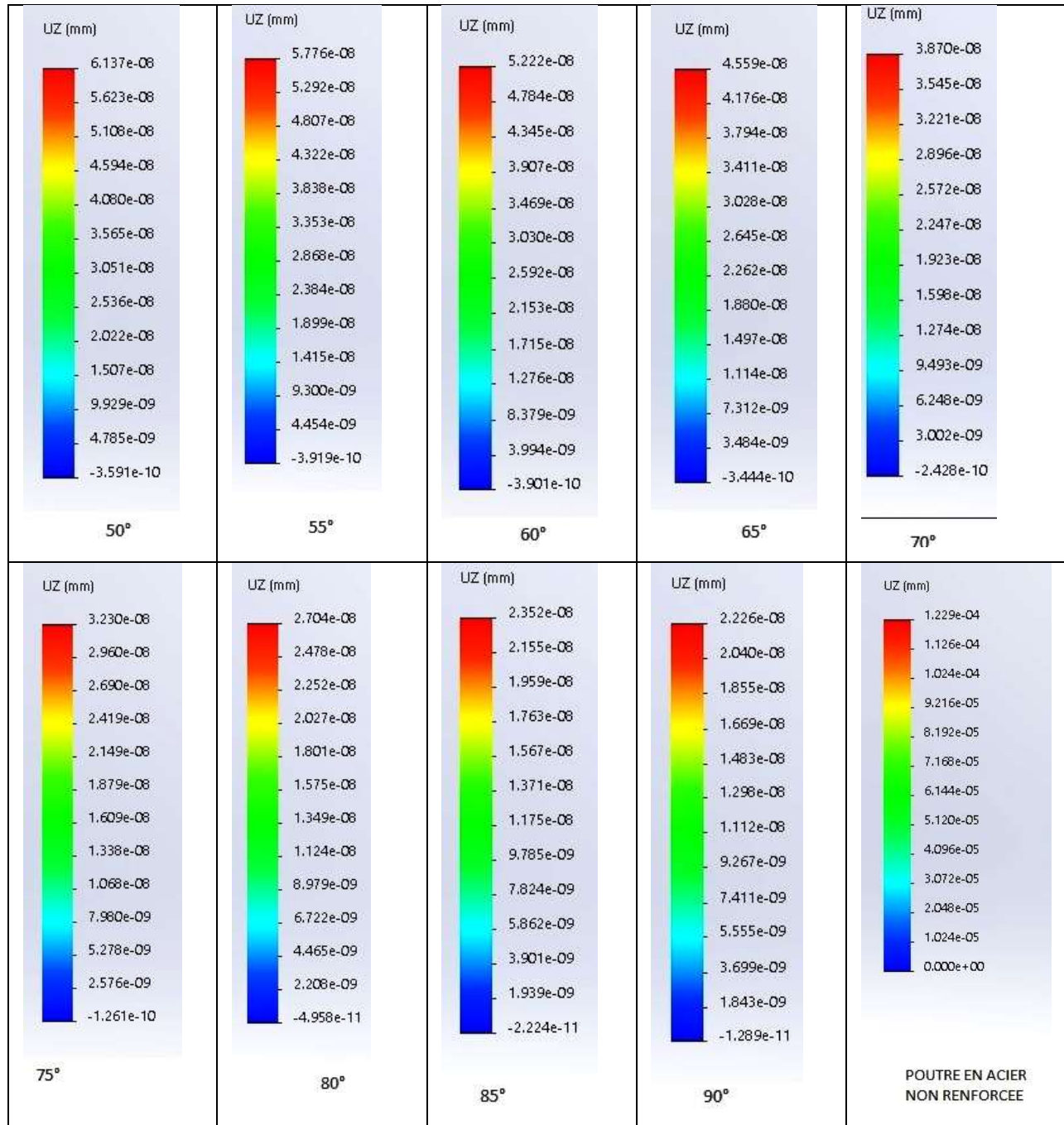
Figure III.13 : Variation de la flèche en fonction de l'orientation des fibres a renfort composite carbone époxyde (poutre en Acier).

Les différents résultats montrent que pour l'orientation 0° la flèche est minimale, la flèche augmente avec l'augmentation de θ jusqu'à $\theta = 25^\circ$, à partir de cette valeur la flèche se stabilise entre 3.4 mm et 3.6 mm.

Les résultats montrent que la flèche est presque similaire pour les deux cas ; mais la différence est de l'ordre 1.1mm pour $\theta = 0^\circ$, et elle diminue jusqu'à $\theta = 15^\circ$. La couche de renforcement en carbone-époxyde est meilleure dans l'intervalle $\theta = [0^\circ - 15^\circ]$.

Tableaux : Poutre en acier

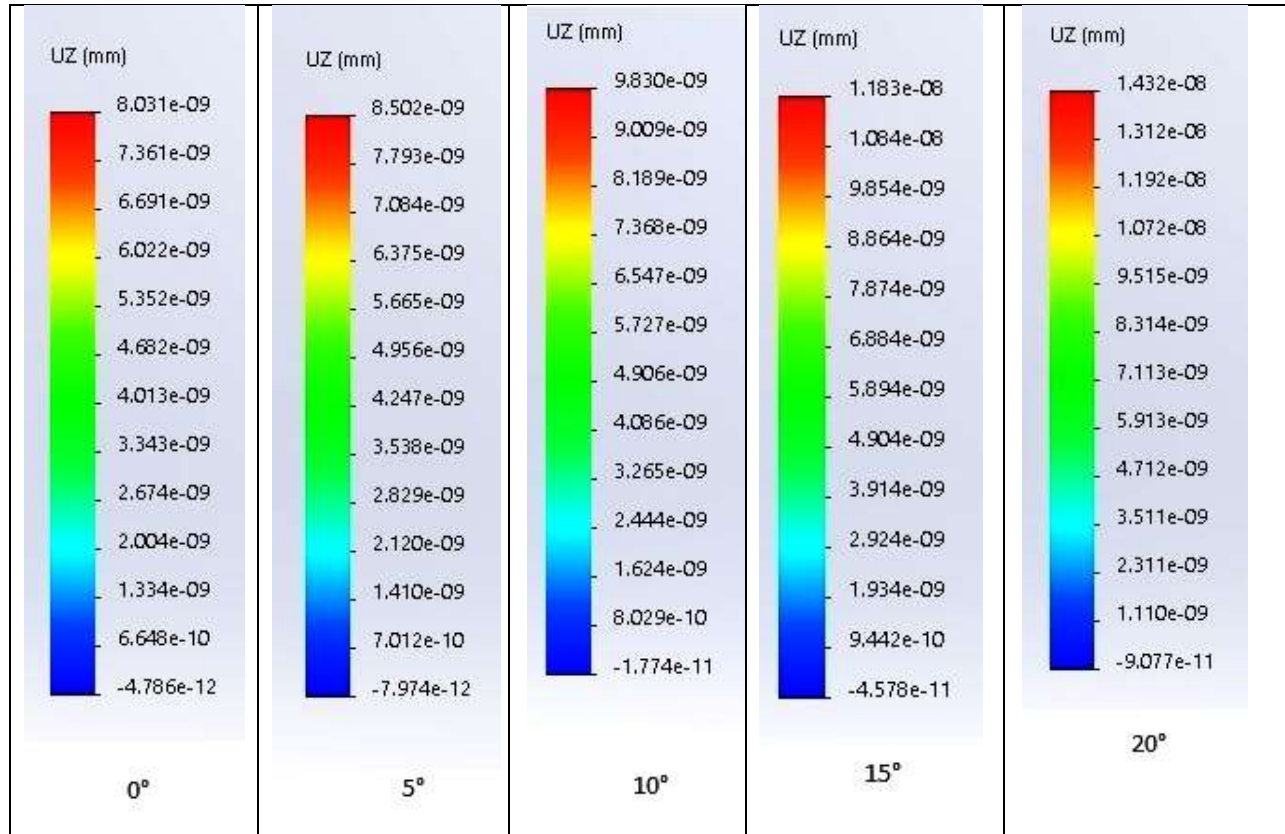


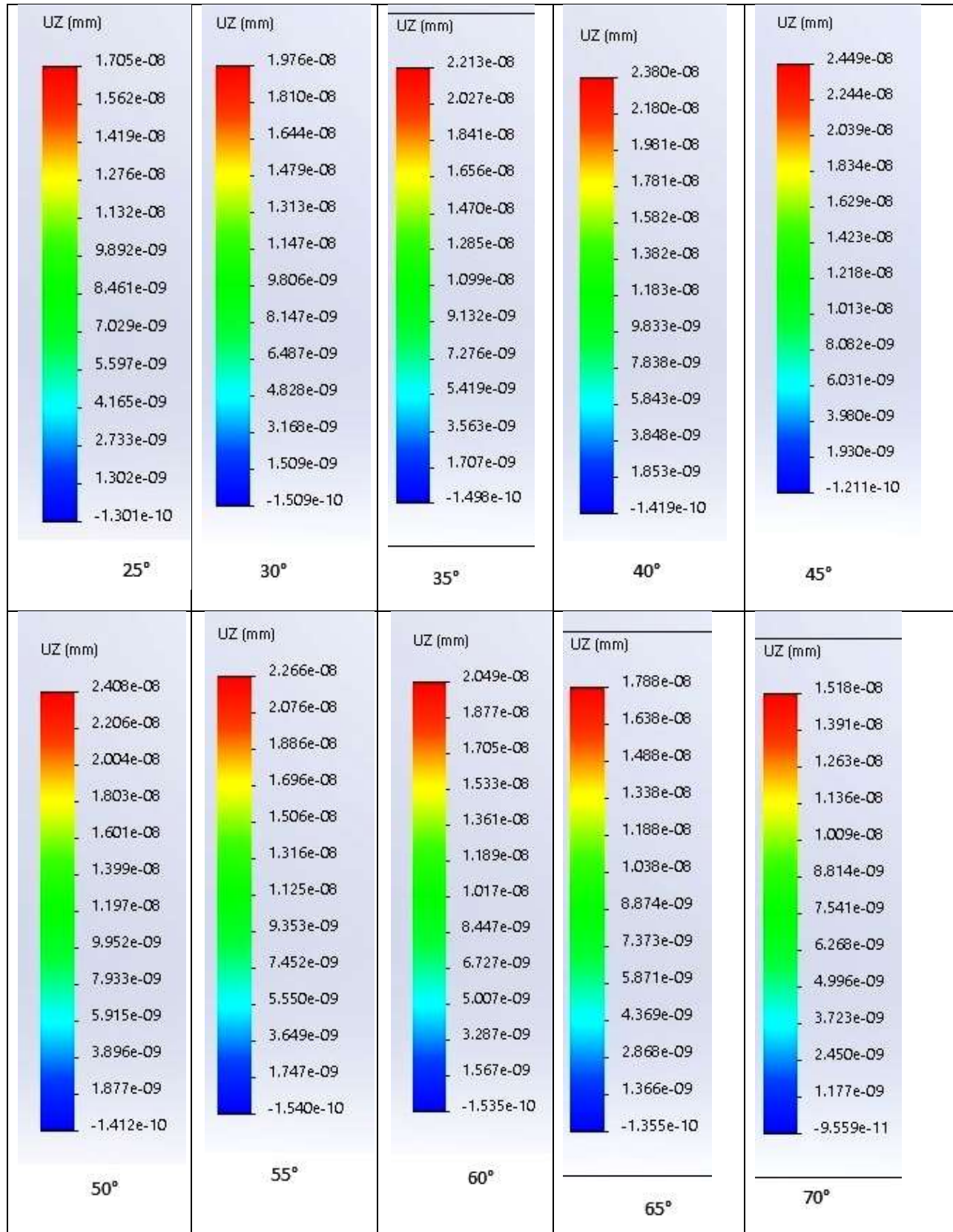


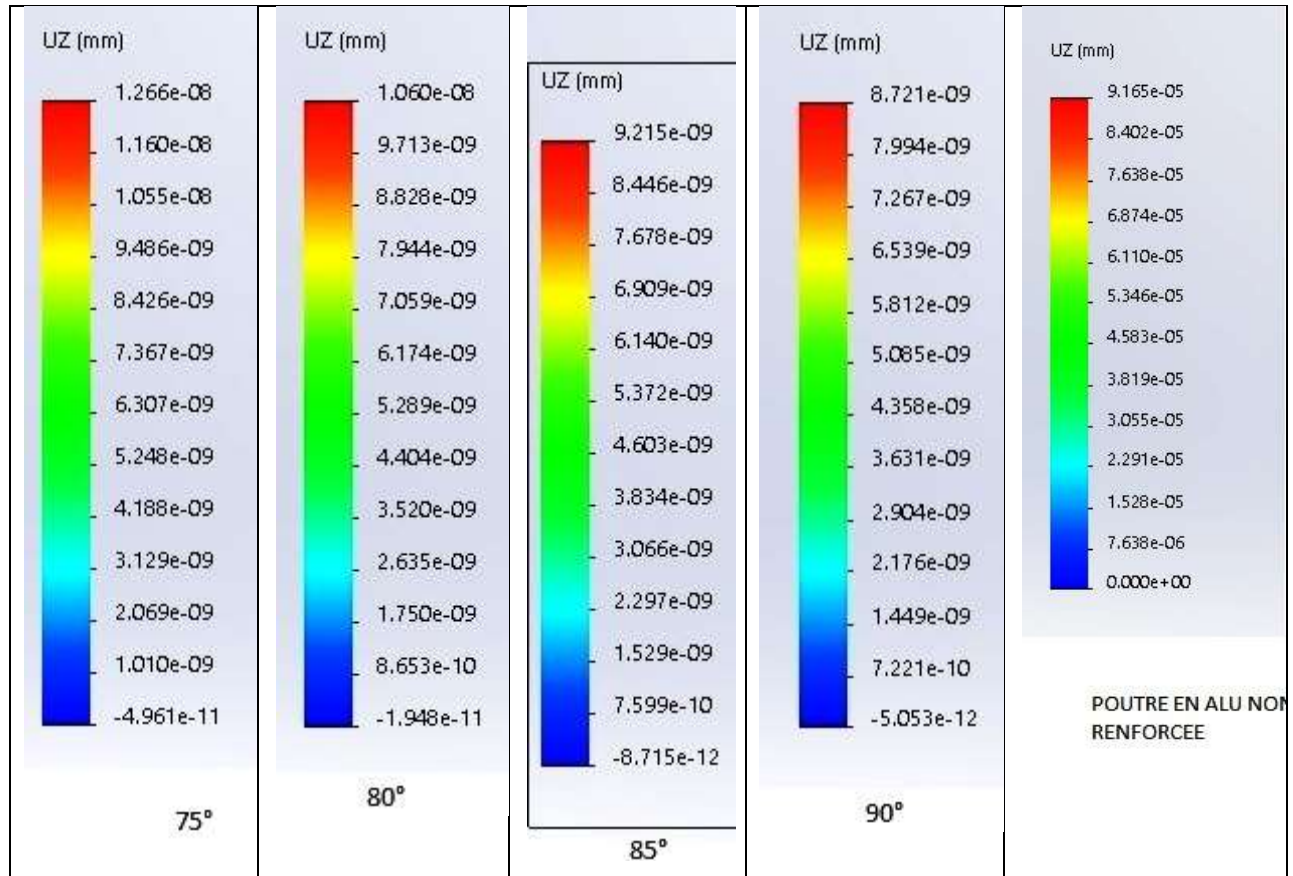
L'analyse de la variation de la flèche, pour une poutre en acier renforcée, montre que la flèche est maximale à la position de $\theta = 45^\circ$ ($62.4 \cdot 10^{-9}$ mm).

Comparée à une poutre en acier sans renforcement, une amélioration nette de la flèche est constatée. Donc on a une augmentation de la rigidité de flexion.

Tableaux : Poutre en Aluminium







L'analyse de la variation de la flèche, pour une poutre en acier renforcée, montre que la flèche est maximale à la position de $\theta = 45^\circ$ ($24.5 \cdot 10^{-9}$ mm).

Comparée à une poutre en acier sans renforcement, une amélioration nette de la flèche est constatée. Donc on a une augmentation de la rigidité de flexion.

III.2.2. Conclusion

En supposant l'état de contrainte plane pour toutes les couches, un modèle d'élasticité bidimensionnel est proposé pour l'analyse de flexion des poutres GRClaminées. Etant donné que seules les variables liées aux surfaces supérieure et inférieure des poutres sont conservées dans le modèle actuel, les variables totales sont indépendantes du nombre de couches. Les déflexions et les contraintes inter laminaires sont obtenues et comparées pour les poutres de nano composites stratifiés aux conditions aux limites de S-S, C-S et C-C. Les effets des modèles de distribution du graphène, des conditions aux limites, des rapports longueur / épaisseur, des incréments de fraction de graphène de couche et du nombre de couches sont étudiés. On constate que le rapport longueur / épaisseur joue un rôle important dans les comportements de flexion et de vibration des poutres GRC stratifiées. Il est suggéré que les poutres GRC laminées longues avec motif X conviennent au pliage, mais les poutres GRC laminées courtes avec motif X ne conviennent pas en raison de sa rigidité de cisaillement transversale relativement plus faible.

Conclusion générale

Une méthode d'analyse par éléments finis pour étudier les caractéristiques les paramètres de flexion des poutres composites stratifiées et renforcées a été développée en utilisant une théorie de déformation par cisaillement de premier ordre.

Les poutres composites et sandwich multicouches sont largement utilisés dans de nombreuses applications d'ingénierie. Alors que les stratifiés composites offrent une rigidité et une résistance supérieures et réduisent le poids par rapport aux structures métalliques conventionnelles, les structures sandwich peuvent réduire davantage le poids structurel et améliorer les performances sans sacrifier la rigidité et la résistance.

La plupart des études sur les problèmes de flexion des poutres stratifiées GRC ont utilisé les modèles monocouche équivalents basés sur différentes théories de poutres. Par conséquent, un modèle d'élasticité bidimensionnel pour l'analyse de flexion des poutres laminées en GRC, pour lequel la déformation d'épaisseur ainsi que la déformation de cisaillement dans chaque couche sont comptées.

ANNEXE A

Propriétés des matériaux utilisées dans la Simulation

Module d'élasticité

Module d'élasticité dans les directions globales X, Y et Z. Pour un matériau présentant une élasticité linéaire, le module d'élasticité dans une direction donnée est défini comme la valeur de contrainte dans cette direction, qui entraîne une déformation unitaire dans la même direction. En d'autres termes, c'est le rapport entre la contrainte et la déformation correspondante dans cette direction.

Les modules d'élasticité sont utilisés dans les études statiques, non linéaires, fréquentielles, dynamiques et de flambage.

Le module d'élasticité a été initialement introduit par Young et est souvent appelé module d'Young.

Module de cisaillement

Le module de cisaillement, également appelé module de raideur, correspond au rapport entre la contrainte de cisaillement dans un plan et la déformation de cisaillement correspondante.

Les modules de cisaillement sont utilisés dans les études statiques, non linéaires, fréquentielles, dynamiques et de flambage.

Coefficient de Poisson

L'extension du matériau dans la direction longitudinale s'accompagne de contractions dans les directions latérales. Si un corps est soumis à une contrainte de traction dans la direction X, le coefficient de Poisson correspond au rapport de la contraction latérale dans la direction Y à la déformation longitudinale dans la direction X. Il s'agit d'une grandeur sans dimension. Pour les matériaux isotropiques, le coefficient de Poisson dans les différents plans est le même.

Le coefficient de Poisson est utilisé dans les études statiques, non linéaires, fréquentielles, dynamiques et de flambage.

Coefficient de dilatation thermique

Le coefficient de dilatation thermique est la variation de longueur, par unité de longueur, sous l'effet de l'augmentation de température d'un degré (changement de la déformation normale par unité de température).

Vous spécifiez le coefficient moyen de dilatation thermique qui est basé sur la température de référence (T_0) associée à la condition sans contrainte

Le coefficient de dilatation thermique est utilisé dans les analyses statiques, fréquentielles et de flambage si le chargement thermique est utilisé. L'analyse fréquentielle utilise cette propriété

dans le seul cas où l'incidence des chargements sur les fréquences (chargement Stress Stiffening) est prise en compte

Conductivité thermique

La conductivité thermique caractérise l'aptitude d'un matériau à transmettre l'énergie calorifique par conduction. Elle est définie comme le taux de transfert thermique à travers une unité d'épaisseur d'un matériau par unité de variation de température. La conductivité thermique est exprimée en BTU/in sec °F dans le système anglo-saxon et en W/m K dans le système SI.

La conductivité thermique est utilisée dans les études thermomécaniques en régime permanent ou transitoire.

Masse volumique

La masse volumique est la masse de l'unité de volume d'un corps. Elle est exprimée en lb/in³ dans le système anglo-saxon et en kg/m³ dans le système SI. La masse volumique est utilisée dans les études statiques, non linéaires, fréquentielles, dynamiques, thermiques et de flambage. Les études statiques et de flambage utilisent cette propriété uniquement si vous définissez des forces dues à la masse (gravitationnelles et/ou centrifuges).

Chaleur spécifique

La chaleur spécifique d'un matériau est la quantité de chaleur nécessaire pour faire augmenter d'un degré la température d'une unité de masse du matériau. Elle est exprimée en Btu in/lbf °F dans le système anglo-saxon et en J/kg K dans le système SI. Cette propriété est uniquement utilisée dans les études thermomécaniques en régime transitoire.

Rapport d'amortissement du matériau

Le rapport d'amortissement du matériau permet de définir l'amortissement comme une propriété de matériau. Cette propriété est utilisée dans l'analyse dynamique pour calculer le rapport d'amortissement modal équivalent pour chaque mode.

ANNEXE B

Contrainte de Von Mises ou contrainte équivalente

Contrairement aux composantes des contraintes, la contrainte de von Mises n'a pas de direction. Elle est entièrement définie par sa grandeur, avec des unités de contrainte. La contrainte de Von Mises est utilisée par le critère de rupture pour évaluer la rupture d'un matériau ductile.

La contrainte de Von Mises est calculée à partir des six composantes de contrainte, comme suit :

$$VON = \{0,5 [(SX - SY)^2 + (SX - SZ)^2 + (SY - SZ)^2] + 3(TXY^2 + TXZ^2 + TYZ^2)\}^{(1/2)} \quad (C.1)$$

Ou à partir des trois contraintes principales :

$$VON = \{0,5 [(P1 - P2)^2 + (P1 - P3)^2 + (P2 - P3)^2]\}^{(1/2)} \quad (C.2)$$

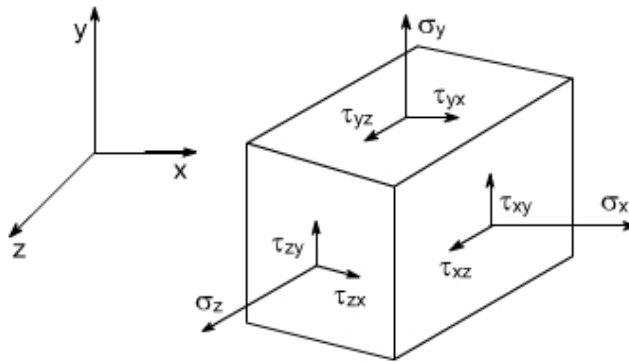


Figure B.1 : Contrainte Von Mises

| | |
|-----|--|
| SX | Contrainte normale X |
| SY | Contrainte normale Y |
| SZ | Contrainte normale Z |
| TXY | Contrainte de cisaillement dans la direction Y sur le plan normal à la direction X |
| TXZ | Contrainte de cisaillement dans la direction Z sur le plan normal à la direction X |
| TYZ | Contrainte de cisaillement dans la direction Z sur le plan normal à la direction Y |

Tableau B.1 : Composantes de contrainte

Modèle linéaire élastique isotropique

Un matériau est dit isotropique lorsque ses propriétés ne varient pas avec la direction. Par conséquent, les matériaux isotropiques ont les mêmes modules d'élasticité, coefficient de Poisson, coefficient de dilatation thermique, conductivité thermique, etc. dans toutes les directions. Le terme isotropique est parfois utilisé pour désigner des matériaux sans directions préférées pour les coefficients de dilatation thermique.

References

- [1] Triantafillou, T. C. “Shear Strengthening of Reinforced Concrete Beams Using Epoxy-Bonded FRP Composites” *ACI Structural Journal*, V.95, N°2, Mar-Apr (1998), PP.107-115.
- [2] Guido Camata; Enrico Spacone.Roko Zarnic “Experimental and nonlinear finite element studies of RC beams Strengthened with FRP plates. *Composites: Part B* 38(2007)277-288.
- [3] Meier, U. (1992). “Carbon fiber-reinforced polymers: Modern materials in bridge engineering.” *Struct. Engrg. Int.*, Zurich, 1, 7–92.
- [4] Ritchie, P. A., Thomas, D. A., Lu, L. W., and Connelly, G. M. (1991). “External reinforcement of concrete beams using fiber reinforced plastics.” *ACI Struct. J.*, 88(4), 490–500.
- [5] Saad atmanesh, H., and Ehsani, M. R. (1991). “RC beams strengthened with GFRP plates. I: Experimental study.” *J. Struct. Engrg.*, ASCE, 117(11), 3417–3433.
- [6] Oehlers DJ, Bradford MA. *Steel and Concrete Composite Structural Members: Fundamental Behaviour*. Pergamon Press: Oxford, 1995.
- [7] Oehlers DJ, Bradford MA. *Elementary Behaviour of Composite Steel and Concrete Structural Members*. Butterworth-Heinemann: Oxford, 1999.
- [8] Newmark NM, Siest CP, Viest IM. Tests and analysis of composite beams with incomplete interaction. *Proceedings of the Society of Experimental Stress Analysis* 1952; **9**(1):75 –92.
- [9] Rafiee MA. Graphene-based Composite Materials. *Dissertations & Theses - Gradworks*. 2011;442:282-6.
- [10] Timoshenko S.P. On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bars. *Philosophical Magazine*, 41:744-746, 1921.
- [11] Timoshenko S.P. On the transverse vibrations of bars of uniform cross section. *Philosophical Magazine*, 43:125-131, 1922.
- [12] Timoshenko S.P. *Résistance des matériaux*. Tomes 1 et 2. Dunod, Paris, 1968.
- [13] Berthelot j.m., « *Matériaux composites comportement mécanique et analyse des structures* », 4ème édition, Lavoisier, 2005.
- [14] Daniel gay., « *Matériaux composites* », 4ème édition, Hermes France, 1997.
- [15] Carter, G.H., Kibler, G.K. (1977) “*Entropy Model for Glass Transition in Wet Resins and Composites*,” *Journal of Composite Materials*, Vol.32, PP. 265-273.
- [16] Carrera, E. (2002). Theories and finite elements for multilayered, anisotropic, composite plates and shells. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 9(2), 87-140.
- [17] Vinson, J. R., & Sierakowski, R. L. (2006). *The behavior of structures composed of composite materials* (Vol. 105). Springer.
- [18] Mehdi Hajianmalekli and Mohammed S Qatu. *Mechanics of composite Beam*

Misissippi State University USA. (2011).

[19] Shen HS, Lin F, Xiang Y. Nonlinear vibration of functionally graded graphene-reinforced composite laminated beams resting on elastic foundations in thermal environments. *Nonlinear Dynamics*. 2017;90:899-914.

[20] Reddy RMR, Karunasena W, Lokuge W. Free vibration of functionally graded-GPL reinforced composite plates with different boundary conditions. *Aerospace Science and Technology*. 2018;78:147-56.

[21] Pagano NJ. Exact Solutions for Composite Laminates in Cylindrical Bending. *Journal of Composite Materials*. 1969;3:398-411

ملخص

الصفائح عبارة عن هياكل مركبة شائعة تتشكل عن طريق تكديس عدة طبقات تلتصق ببعضها البعض. كون الطبقات متباينة الخواص ولها توجهات مختلفة، فإن هذه الهياكل لها سلوكيات معقدة، والتي لا تسمح النماذج المتجانسة والخواص بمحاكاتها بشكل صحيح. يركز هذا المورد على الحالة الخاصة للحزم المصفحة، ويوضح كيف يمكن تكييف قوة المواد للتنبؤ بسلوكها. وبالتالي، فإن محاكاة سلوك الصفائح تتضمن بشكل عام نظرية الصفائح، بدلاً من نظرية الشعاع. تؤدي هذه النظريات إلى مشاكل رياضية ثنائية الأبعاد؛ ينتج عن ذلك كتابة أكثر تعقيداً في حالة النماذج متباينة الخواص وغير المتجانسة مثل تلك التي يستخدمها المرء للرقائق حيث يتم استخدام محللات العناصر المحدودة لتنفيذ عمليات المحاكات.

ABSTRACT

Laminates are common composite structures formed by stacking several layers adhering to each other. Since the layers are anisotropic and have different orientations, these structures have complicated behaviors that homogeneous and isotropic models do not allow to simulate correctly. This resource focuses on the special case of laminated beams, and shows how the strength of materials can be adapted to predict their behavior.

The simulation of the behavior of laminates therefore generally involves plate theory, rather than beam theory. These theories lead to 2D mathematical problems; that results in a more complicated writing in the case of anisotropic and heterogeneous models like those which one uses for the laminates from where the use of finite element solvers to carry out the simulations.

RESUME

Les stratifiés sont des structures composites courantes, formées par l'empilement de plusieurs couches adhérent l'une à l'autre. Les couches étant anisotropes et possédant des orientations différentes, ces structures ont des comportements compliqués, que les modèles homogènes et isotropes ne permettent pas de simuler correctement. Cette ressource s'intéresse au cas particulier des poutres stratifiées, et montre comment la résistance des matériaux peut être adaptée pour prévoir leur comportement.

La simulation du comportement des stratifiés fait donc généralement appel à la théorie des plaques, plutôt qu'à la théorie des poutres. Ces théories conduisent à des problèmes mathématiques 2D; cela se traduit par une écriture plus compliquée dans le cas de modèles anisotropes et hétérogènes comme ceux que l'on emploie pour les stratifiés d'où l'emploi de solveurs Eléments Finis pour mener les simulations.