

République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique



Université Ibn Khaldoun de Tiaret

Faculté des Sciences Appliquées

Département de Génie Mécanique



MÉMOIRE DE FIN D'ETUDES

Pour l'obtention du Diplôme de Master

Domaine : Sciences et Technologie

Filière : Génie Mécanique

Parcours : Master

Spécialité : Énergétique

Thème

ÉTUDE DESCRIPTIVE DE LA MÉTHODE NUMÉRIQUE SPH

Préparé par :

Mlle. AZZOUZ Ilhem Aicha

Mlle. DAKICHE Keltoum

Soutenu publiquement le : 11 / 10 / 2020, devant le jury composé de :

M.BOUZIDANE Ahmed	Professeur	(Univ. Ibn Khaldoun)	Président
M.KARAS Abdelkader	Maître de Conférences "A"	(Univ. Ibn Khaldoun)	Examineur
M.HAMMOU Mahmoud	Maître Assistant "A"	(Univ. Ibn Khaldoun)	Examineur
M.ABOUSHIGHIBA Hichem	Maître de Conférences "B"	(Univ. Ibn Khaldoun)	Encadreur

Année universitaire : 2019 - 2020

REMERCIEMENTS

Avant tout autre remerciements,
Nous remercions Allah de nous avoir permis d'accomplir notre
mémoire.

Au terme de ce travail,
Nous tenons à adresser toute notre gratitude à l'encadreur de ce
mémoire, Dr. ABOUSHIGHIBA Hichem, enseignant au Département
de Génie Mécanique à l'Université Ibn Khaldoun de Tiaret, de nous
avoir donné la chance de traiter son thème et pour son guide, son
suivi, son assistance, et ses conseils précieux le long de notre
formation.

Nous remercions aussi Messieurs le président Pr. BOUZIDANE
Ahmed et les Membres du Jury Dr.KARAS Abdelkader,
Dr.HAMMOU Mahmoud, qui nous font l'honneur de bien vouloir
juger ce modeste travail.

Nous remercions aussi l'ensemble du staff pédagogique et
administratif du département du génie mécanique et nos collègues de
la promotion 2019/2020.

DEDICACES

*Je remercie Allah, le tout puissant,
Qui m'a armé de patience, de persévérance et de moyens indispensable pour la
réussite.*

Je dédie ce mémoire à :

❖ *Mon père, mon support de vie,*

C'est grâce à vous que tout ceci a été rendu possible.

*Vous m'avez éduqué et encouragé à persévérer. J'ai appris de vous le respect
de soi-même et la confiance en soi.*

❖ *Ma chère mère,*

Qui ma bénie par ces prières.

❖ *Je ne trouve pas les mots pour vous dire merci mes chères parents .Dieu
le rendra.*

❖ *Mes douces sœurs : Feryel, Aya, Amel et Batoul,*

Pour leur soutien moral et leurs conseils précieux.

❖ *Toute ma famille AZZOUZ et SEGHIER.*

❖ *Tous mes amies.*

❖ *Ma binôme DAKICHE keltoum et sa famille.*

❖ *Tous ceux que j'aime et qui m'aiment.*

AZZOUZ Ilhem Aicha.

DEDICACES

A l'homme de ma vie, mon exemple éternel, celui qui s'est toujours sacrifié

Pour me voir réussir, à toi mon père.

A maman pour son amour, et qu'elle m'a accordé en témoignage de ma reconnaissance envers sa confiance et sa tendresse.

A la lumière de mes jours, la source de mes efforts, la flamme de mon cœur, ma vie et bonheurs, ma grande mère « ma Allia » que j'adore, elle est partie malheureusement (paix à son âme).

A mon soutien moral et source de joie et de bonheur ; une personne très spécial dans ma vie «ALIANE Nabil».

A mes sœurs Nadjet et Israa pour l'amour qu'elle réserve et mes frères Mohamed, AEK, Abdelmadjid et Moustafa.

A mes oncles A.E.K, Moustafa et Hocine et mes tantes et mes cousins Aicha Hanane, Mariem, Molay.

A mon binôme qui es ma proche amie « AZZOUZ Ilhem » et à toutes sa famille.

Je la souhaite une vie pleine bonheur et de succès

A mes amis Nesrine, Merouane et Karima...

DAKICHE Keltoum.

TABLE DES MATIERES

REMERCIEMENTS ii

DEDICACES iv

TABLE DES MATIERESv

LISTE DES FIGURES..... viii

LISTE DES TABLEAUX x

NOMENCLATURE xi

TABLE DES ABRÉVIATIONS.....xiii

INTRODUCTION..... 1

CHAPITRE I : ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE.....5

 I.1 Introduction 5

 I.2 La mécanique des fluides numérique 5

 I.2.1 Description d’écoulements 5

 I.2.2 Discrétisation du domaine de calcul 7

 I.3 La méthode numérique SPH 9

 I.3.1 Définition de la méthode SPH 9

 I.3.2 Historique et développement de la méthode SPH 10

 I.3.3 Domaine d’application de la méthode SPH..... 12

 I.3.4 Le principe de la méthode SPH 13

 I.3.5 Avantages et inconvénients de la méthode SPH 15

 I.4 Dynamique des fluides 16

 I.4.1 Définition de la dynamique des fluides 16

 I.4.2 Les différents régimes d’écoulement 16

 I.4.3 La turbulence 17

 I.4.4 Les origines de la turbulence 18

 I.4.5 Les conséquences de la turbulence 18

 I.5 Ecoulements discontinus 18

 I.5.1 Ecoulement à surface libre..... 18

I.5.2 Ballotement.....	19
I.5.3 Fluide mixte non miscible	20
I.5.4 Effondrement d'une colonne d'eau	20
I.5.5 Impact (SPLASH) d'une goutte d'eau.....	21
I.5.6 Projection thermique.....	21
I.6 Conclusion.....	23
CHAPITRE II : FORMULATION MATHEMATIQUE.....	25
II.1 Introduction.....	25
II.2 Le principe de la méthode SPH	25
II.2.1 Discrétisation.....	25
II.2.2 Construction des fonctions de forme.....	26
II.2.3 Choix du noyau (la fonction de lissage).....	31
II.3 Application à la dynamique des fluides	33
II.3.1 Equation de continuité.....	34
II.3.2 Equation conservation de la quantité de mouvement.....	34
II.3.3 Equation de l'énergie.....	34
II.3.4 Résolution par la méthode SPH	35
II.3.5 Approximation du Laplacien.....	36
II.4 Techniques de stabilisation	37
II.4.1 Viscosité artificielle.....	37
II.4.2 Chaleur artificielle.....	38
II.5 Les conditions aux limites	38
II.5.1 La méthode des particules répulsives.....	38
II.5.2 Méthode des particules fantômes	39
II.5.3 Méthode des particules images.....	40
II.6 Recherche des particules voisines.....	41
II.7 Résolution (nombre de particules) minimale.....	42
CHAPITRE III : ETUDE DE CAS	44
III.1 Introduction	44
III.2 Présentation du code DualSPHysics.....	44
III.3 Présentation du code de calcul.....	45
III.3.1 FreeCAD	45
III.4 Étude numérique.....	46

III.5 Problème 1 : Champ de pression dans un réservoir statique	46
III.5.1 Description du problème :	46
III.5.2 Les paramètres physiques :	47
III.5.3 Simulation :	48
III.5.4 Validation par la solution analytique :	48
III.5.5 Résultat et discussion :	49
III.6 Problème 2 : Effondrement d'un barrage	49
III.6.1 Description du problème :	49
III.6.2 Les paramètres physiques :	50
III.6.3 Simulation :	50
III.6.4 Validation par des résultats expérimentaux :	51
III.6.5 Résultat et discussion :	51
III.7 Problème 3 : Impact (Splash) d'une goutte sur une surface libre liquide en 2D	54
III.7.1 Les paramètres physiques :	55
CONCLUSIONS	58
REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES.....	60
Résumé.....	

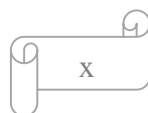
LISTE DES FIGURES

Figure I-1 :Description eulérienne d'un écoulement.	6
Figure I-2 : Description lagrangienne d'un écoulement.	7
Figure I-3 : Discrétisation d'un domaine de calcul par une méthode avec maillage.	8
Figure I-4 : Discrétisation d'un domaine de calcul par une méthode sans maillage.	9
Figure I-5 : Représentation schématique de la méthode SPH.....	10
Figure I-6 : Procédure de résolution de la méthode SPH.....	13
Figure I-7 : Représentation du domaine discrétisé.	14
Figure I-8 : Les différents régimes d'écoulements.	17
Figure I-9 : Vue schématique d'un écoulement à surface libre dans un réservoir.....	19
Figure I-10 : Ballotement d'eau dans un verre.	20
Figure I-11 : Mélange non miscible (eau-huile).	20
Figure I-12 : Représentation des étapes d'effondrement d'une colonne d'eau.....	21
Figure I-13 : Impact SPLASH d'une goutte d'eau sur un liquide.	21
Figure I-15 : Schéma simplifié du principe de projection thermique.	22
Figure I-16 : Projection thermique.....	22
Figure II-1 : Représentation schématique de la discrétisation du domaine Ω par un ensemble de points.	25
Figure II-2 : Approximations de particules SPH dans un domaine de problème à deux dimensions Ω avec une surface « S ».	27
Figure II-3 : Représentation schématique de la fonction noyau en 2D et 3D.....	30
Figure II-4 : Représentation des étapes du procédé de résolution par la méthode SPH.....	35
Figure II-5 : Conditions aux limites imposées à l'aide de particules répulsives selon Monaghan.....	39
Figure II-6 : Gestion des conditions aux frontières par la méthode des points de référence et particules fantômes.....	40
Figure II-8 : Gestion des conditions aux frontières par la méthode des particules images. ...	41
Figure II-9 : La recherche de particules voisines, a : directement et b : à l'aide d'une grille. 41	41
Figure III-1 : Logo DualSPHysics.....	44
Figure III-2 : Fenêtre principale de DesignSPHysics sous Free CAD.	45
Figure III-3 : Schéma du problème numéro 1.	46

Figure III-4: Schéma du problème numéro 1.	47
Figure III-5: La discrétisation 2D en 1681 particules.....	47
Figure III-6: La discrétisation 2D en 1681 particules.....	48
Figure III-7: Convergence de la pression dans le fond du réservoir.	49
Figure III-8: Schéma du barrage en effondrement.	50
Figure III-9: Validation du modèle numérique par les résultats expérimentaux de	51
Figure III-10: Comparaison des résultats de la présente étude avec ceux numériquement obtenus par	52
Figure III-11: Evolution de l'écoulement discontinu durant 1.3s.	53
Figure III-12: Forme du splash de gouttelette sur des surfaces libres liquides.	54
Figure III-13: Evolution de l'écoulement discontinu durant 6s.	56

LISTE DES TABLEAUX

Tableau I-1 : Les avantages et les inconvénients de la méthode SPH. 15
Tableau II-1 : Noyaux d'interpolation. 32
Tableau III-1 : Propriétés de la machine utilisée pour le calcul. 46



NOMENCLATURE

Re	Nombre de Reynold	
μ	viscosité dynamique	[Pa.s]
ρ	Masse volumique	[kg/m ³]
ϑ	viscosité cinématique	[m ² /s]
D	Diamètre	[m]
W	Fonction de lissage (noyau).	
h	Longueur de lissage	[m]
$\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$	Fonction Delta Dirac	
m	Masse.	[Kg]
i, j, k	Indices des particules fluides	
x	Position des particules	
v	Volumes des particules	[m ³]
B	Constante qui dépend des dimensions du problème et le noyau choisie	
r	Distance entre x et x'	
u, v, w	Composantes de vitesse suivant (x, y, z)	
S	Surface	[m ²]
\vec{v}	Vecteur de vitesse	
t	Temps	[s]
P	Pression	[Pa]
F	Force extérieure	[N]
g	Gravité	[m/s ⁻²]

N	Nombre total de particules voisines comprises dans le support du noyau.	
T	Température	[°C]
e_i	Energie interne spécifique de la particule fixe.	[J]
σ_i	Pression absolue.	[pa]
Π_{ij}	Viscosité artificielle	
α, β	Coefficients de viscosité linéaire	
ε	Paramètre permettant d'éviter les divisions	
H_i	Chaleur artificielle	

TABLE DES ABRÉVIATIONS, SIGLES ET ACRONYMES

SPH	Smoothed Particles Hydrodynamics.	Hydrodynamique des particules lissées
CFD	Computational fluid dynamics.	Dynamique des fluides computationnelle
MFN	computational fluid mechanics.	mécanique des fluides numérique
DF	Finite Differences.	Différences Finies
EF	Finite elements.	Éléments Finis
VF	Finite Volumes.	Volumes Finis.
VOF	Fluid Volumes.	Volumes de Fluides
ICEM	Cooperative Institute of the Modern School.	Institut coopératif de l'école moderne
EFG	The Galerkin method.	La méthode de Galerkin
RKPM	The Particular Kernel Reproduction Method.	La méthode de Reproduction de Noyau Particulier
MLPG	The Petrov-Galerkin method.	La méthode de Petrov-Galerkin
1D	One-Dimensionel.	Unidimensionnel
2D	Two-Dimensionel.	Bidimensionnel
3D	Tree-Dimensionel.	Tridimensionnel
MEF	mesh method.	méthode avec maillage
MDF	Fluid mechanics.	Mécanique des fluides
CUDA	Compute Unified Device Architecture.	Compute Unified Device Architecture
CAO	Computer assisted design	Conception assistée par ordinateur

**INTRODUCTION
GENERALE**

INTRODUCTION GENERALE

La modélisation numérique est devenue indispensable pour l'ingénierie en générale et pour le génie mécanique plus précisément. Il n'est pas étrange de rencontrer de grands projets entièrement conçus et testés numériquement (virtuellement) puis directement réalisés en échelle réelle sans le passage par les maquettes réduites.

Les méthodes les plus utilisées en CFD ont été dominées par celle des volumes finis qui est une méthode fortement liée au maillage du domaine géométrique étudié. La réussite en termes de convergence de la méthode est fortement conditionnée par la qualité du maillage du domaine. Ce qui rend la tâche du maillage la plus couteuse en temps et en efforts.

Les problèmes transitoires à géométrie évolutives ou à conditions aux limites changeantes sont un cauchemar pour les méthodes classiques à maillage comme la méthode des volumes finis. Ceci est dû à la nécessité de redéfinir le maillage (qui n'est pas une tâche simple) à chaque changement important dans la géométrie ou dans les conditions aux limites. Les écoulements discontinus tels que la chute d'une goutte de liquide sur une surface libre d'un autre liquide est quasiment impossible à étudier par les méthodes classiques à maillage.

La méthode décrite dans ce mémoire est une réponse à ces défis. En fait, la méthode dite hydrodynamique des particules lissées **SPH** (**S**moothed **P**articles **H**ydrodynamics) est une méthode entièrement sans maillage.

La méthode SPH passe par une technique mathématique qui convertie le domaine fluide continu en un groupe fini de particules liées entre elles par la physique du problème étudié : Navier-Stokes, thermique ... L'absence du maillage donne à cette méthode la possibilité d'étudier des écoulements d'une complexité évolutive extrême sans aucune adaptation particulière.

L'objectif de notre étude est d'introduire cette méthode numérique puissante et prometteuse pour compléter la collection d'outils numériques au service de l'ingénierie déjà existante et enseignée à notre université.

Pour cela l'étude est organisée en trois chapitres. Le premier présente une recherche bibliographique sur la mécanique des fluides numérique, sur les types de description d'écoulements et les différentes discrétisations du domaine de calcul appliquées dans les méthodes numériques classiques.

Ensuite, la méthode numérique SPH est introduite en commençant par son principe, l'historique de son développement, les domaines d'application, les avantages, les inconvénients et enfin les applications.

Le deuxième chapitre est consacré à la formulation mathématique de la méthode et les différentes formulations et variations de fonctions noyaux adoptées dans la littérature spécialisée.

Dans le dernier chapitre nous appliquons la méthode SPH sur des problèmes techniques typiques pour exposer son mode d'application, sa puissance mais aussi ses inconvénients.

L'étude est finalisée par une section dédiée aux conclusions où nous en tirons les plus importantes et nous proposons les perspectives à suivre pour un travail futur.

CHAPITRE I

ETUDE

BIBLIOGRAPHIQUE

CHAPITRE I : ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE

I.1 Introduction

Dans ce chapitre nous allons présenter la méthode numérique SPH ; (« Smoothed Particule Hydrodynamics » ou l'hydrodynamique des particules lissées), qui est relativement une nouvelle méthode numérique. On parlera aussi de la dynamique des fluides et des écoulements discontinus.

I.2 La mécanique des fluides numérique

La modélisation numérique (ou simulation numérique à l'aide d'ordinateurs) est devenue de plus en plus une approche très importante pour résoudre et analyser des problèmes pratiques complexes en ingénierie et en sciences. Un exemple typique est mécanique des fluides numérique (MFN), plus souvent désignée par le terme anglais **Computational Fluid Dynamics** (CFD), qui est une branche de la mécanique des fluides qui utilise des méthodes numériques pour résoudre et analyser des problèmes de mécanique des fluides.

Pour les simulations numériques de problèmes en mécanique des fluides, les équations gouvernantes peuvent être établies à partir des lois de conservation, qui stipulent que les variables de champ telles que la masse, la quantité de mouvement et l'énergie doivent être conservées au cours du processus d'évolution de l'écoulement. Ces trois principes fondamentaux de conservation, ainsi que des informations supplémentaires concernant la spécification de la nature du matériau / milieu, les conditions aux limites et les conditions au stade initial déterminent le comportement du système fluide [1].

Les méthodes numériques sont couramment divisées en deux catégories, selon la description choisie pour l'écoulement étudié : eulérienne ou bien lagrangienne.

I.2.1 Description d'écoulements

Les deux représentations (eulérienne et lagrangienne) diffèrent par la position de l'observateur par rapport à l'écoulement.

I.2.1.1 Description eulérienne

En description eulérienne, l'observateur est fixe par rapport à l'écoulement, il voit le fluide "défiler" devant lui (Figure I-1). Les méthodes eulériennes sont depuis longtemps les

plus répandues en Mécanique des Fluides Numérique, Cela en raison de l'aisance procurée par le fait de ne pas déplacer les éléments de la discrétisation (mailles, particules ...).

On trouve notamment :

- les méthodes de Différences Finies (DF),
- Éléments Finis (EF) et Volumes Finis (VF),
- les méthodes de Volumes de Fluides (VOF).

Ces méthodes proposent généralement une précision nettement supérieure que les alternatives lagrangiennes, sauf quand il s'agit de modéliser une surface libre.

A l'inverse, ces méthodes souffrent généralement d'un défaut de représentation des interfaces, qu'il s'agit de capturer au sein du domaine de calcul, les algorithmes existent à cet effet (fractions de volume, fonctions de couleur) mais la complexité de la méthode s'en trouve accrue [2].

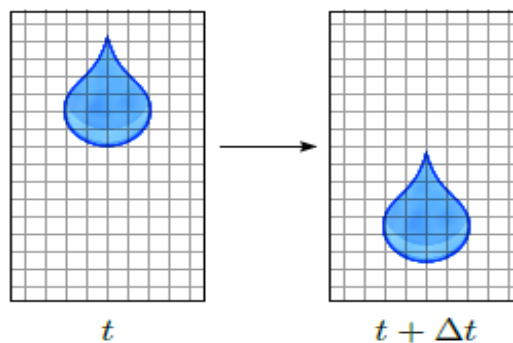


Figure I-1 : Description eulérienne d'un écoulement.

I.2.1.2 Description lagrangienne

En description lagrangienne, l'observateur fixe un volume infinitésimal de fluide et suit son évolution pendant toute la durée de l'écoulement. Ainsi, depuis la position initiale de cette particule élémentaire, l'utilisateur a connaissance de toute sa trajectoire dans le domaine de calcul (Figure I-2).

A l'inverse des méthodes eulériennes, les méthodes lagrangiennes permettent le suivi d'interfaces sans traitement algorithmique supplémentaire, a priori. Elles s'appliquent donc plus particulièrement à la modélisation d'écoulements à surface libre, ou diphasiques.

Parmi les méthodes numériques basées sur une formulation lagrangienne :

- La méthode SPH (Smoothed Particle Hydrodynamics),
- les méthodes Vortex ou les méthodes Lattice Boltzmann font partie aussi de cette famille de méthodes lagrangiennes [2].

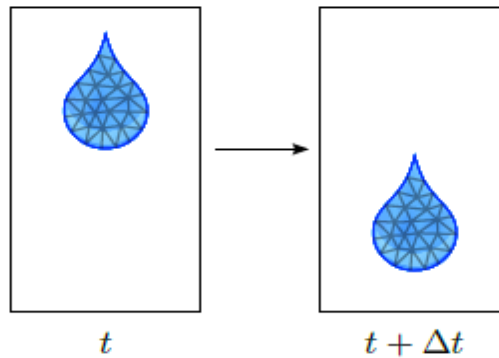


Figure I-2 : Description lagrangienne d'un écoulement.

I.2.2 Discrétisation du domaine de calcul

Le choix de la technique de discrétisation dépend du type de méthode numérique que l'on veut employer pour résoudre le problème d'intérêt. Il existe essentiellement deux types de familles de méthodes numériques pour la résolution des problèmes en mécanique des fluides. À savoir, les méthodes avec maillage et les méthodes sans maillage.

I.2.2.1 Méthodes avec maillage

Les méthodes maillées sont basées sur une représentation du domaine de calcul par des points ou nœuds, reliés par des arrêtes. Selon le nombre de dimensions physiques, ces points vont délimiter des éléments de calculs aux formes initialement simples (carré, triangle) et qui tendent à se complexifier (quadrilatère, hexagone) en deux dimensions, et (tétraèdres ou hexaèdres) en trois dimensions.

Parmi les essentielles méthodes avec maillage :

- La méthode des éléments finis ;
- La méthode des différences finis ;
- La méthode des volumes finis.

Outre la possibilité de prendre en compte des géométries complexes, il est souvent utile de pouvoir modéliser des frontières mobiles, ces méthodes nécessitent alors l'emploi d'un remaillage du domaine de calcul afin de tenir compte de sa déformation. Cette procédure peut être réalisée en employant des logiciels prévus à cet effet (Gambit, ICEM), mais la procédure est souvent lourde et déterminante dans le choix de la méthode de calcul.

Dans les cas extrêmes, le maillage peut finalement présenter de telles distorsions, dues à la déformation du domaine de calcul, que celui-ci perd en précision ou même en stabilité numérique [2].

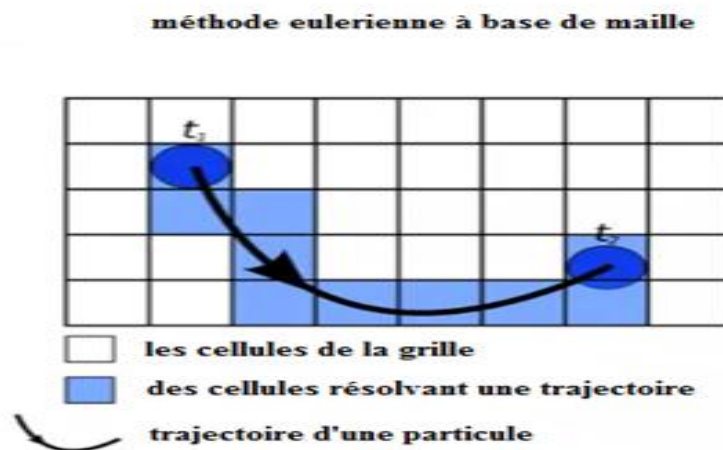


Figure I-3 : Discrétisation d'un domaine de calcul par une méthode avec maillage.

I.2.2.2 Méthodes sans maillage.

Afin de contourner ou alors de trouver une solution aux difficultés rencontrées avec les méthodes numériques avec maillage, la communauté scientifique s'est de plus en plus penchée sur le développement des méthodes numériques sans maillage.

L'idée principale des méthodes sans maillage est de se servir de nœuds ou de particules organisées arbitrairement et n'ayant aucune connexion entre eux comme c'est le cas avec les méthodes avec maillage. Ces nœuds ou particules peuvent permettre de donner des solutions précises et numériquement stables aux équations de la dynamique des fluides quelles que soient les conditions aux frontières imposées [3].

À ce jour, il existe plusieurs méthodes numériques sans maillage parmi lesquelles nous pouvons citer [2] :

- La méthode de Galerkin (EFG) ;
- La méthode de Reproduction de Noyau Particulier RKPM (RKPM) ;
- La méthode de Petrov-Galerkin (MLPG) ;
- Méthode d'hydrodynamique des particules lissées (SPH).

Certaines caractéristiques sont communes à toutes ces méthodes sans maillage ; cependant, elles présentent des différences dans leur processus d'approximation et de mise en œuvre.

Parmi toutes les méthodes sans maillage, nous sommes intéressés à une méthode unique dans les simulations de la dynamique de fluide, à savoir la méthode Smoothed Particle Hydrodynamics (SPH).

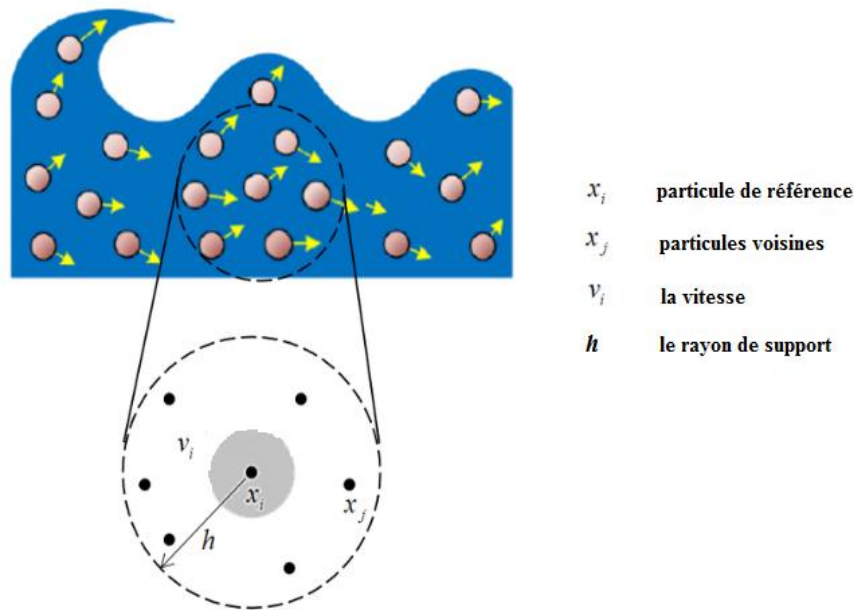


Figure I-4 : Discrétisation d'un domaine de calcul par une méthode sans maillage.

I.3 La méthode numérique SPH

I.3.1 Définition de la méthode SPH

La méthode SPH (L'hydrodynamique des particules lissées) est une nouvelle méthode numérique de simulation sans maillage et basée sur une formulation lagrangienne, elle est considérée comme la méthode des particules sans maillage moderne la plus ancienne ; est une méthode de discrétisation spatiale développée indépendamment par MONAGHAN et GINGOLD et LUCY, en 1977.

Dans cette méthode, le fluide est représenté par un ensemble de particules, considérées comme des éléments de masses, possédant des propriétés individuelles et qui se déplacent selon les équations régissant le système.

La motivation pour la création de cette méthode est venue du besoin de résoudre les problèmes complexes que les méthodes dites eulériennes, comme la méthode des différences finies, la méthode des éléments finis ou la méthode des volumes finis avaient du mal à résoudre [3].

Plusieurs codes SPH ont fait leur apparition : d'abord Gadget-2 (libre) en Astrophysique, puis SPH-flow (propriétaire), SPHysics (libre) et ISPH (libre) en Hydrodynamique, Sphyrac, DeseignSPHysics.

Ce dernier est celui que nous utiliserons dans notre simulation.

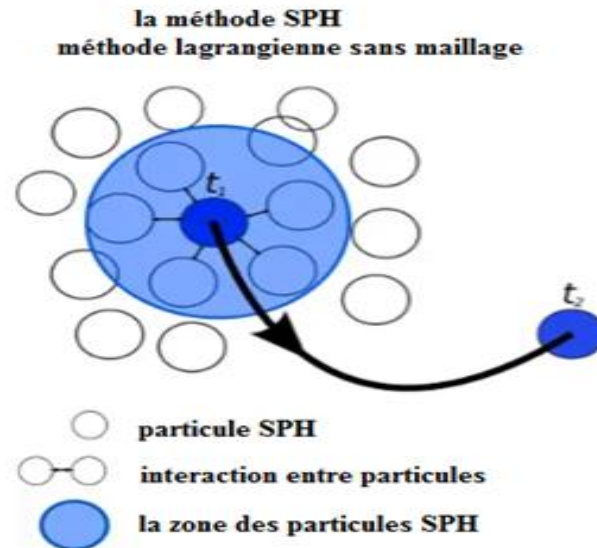


Figure I-5: Représentation schématique de la méthode SPH.

I.3.2 Historique et développement de la méthode SPH

La méthode SPH (Smoothed Particle Hydrodynamics) est l'une des plus anciennes méthodes lagrangiennes sans maillage pour la modélisation numérique en mécanique, elle a été développée à la fin des années 1970 pour résoudre les difficultés rencontrées dans les méthodes avec maillages. Ainsi au cours de ces trois dernières décennies, SPH a connu quelques succès sur la méthodologie et des applications spécifiques qui proposent des solutions pour une large gamme de problèmes de mécanique des fluides et des solides, l'astrophysique et d'autres domaines.

En 1977 [4] ; GINGOLD, MONAGHAN et LUCY soient les premiers à avoir inventé la méthode SPH pour résoudre des problèmes astrophysiques dans un espace ouvert en trois dimensions ; il s'agissait de simuler des phénomènes tels que la formation et l'évolution d'étoiles et de galaxies. Le mouvement collectif de ces corps est en effet proche de celui d'un liquide ou d'un gaz et peut donc être modélisé par les équations traditionnelles de la mécanique des fluides, la méthode a été popularisée dans le domaine de l'hydrodynamique grâce aux travaux de Monaghan.

Plus récemment au début des années 90 la méthode est essentiellement appliquée dans les domaines des impacts et à la mécanique des solides, cette extension a donné lieu à de nombreuses et indispensables améliorations.

Depuis 1991 jusqu'à 1993 [4] ; la méthode SPH a été appliquée à la mécanique des structures pour la modélisation des impacts hautes vitesses et des phénomènes de rupture,

perforation et fragmentation, cette extension de la méthode a initialement été proposée par LIBERSKY et al. En **1993**, Ils ont été suivis par BENZ et ASPHAUG qui ont utilisé les SPH pour modéliser la rupture des matériaux fragiles. Puis en **1996**, JOHNSON a également modélisé des impacts et des perforations avec des SPH [4].

Ainsi au cours des dernières années, différentes modifications ou corrections ont été tentées pour restaurer la cohérence et améliorer la précision, la stabilité, la convergence et l'efficacité de la méthode SPH.

Au cours des années **1999** et **2000** [1] ; CHEN et al. ont proposé une méthode de correction des particules lissées qui améliore la précision de la simulation à l'intérieur du domaine problématique et autour de la zone limite puis en **2003** elle a été améliorée par LIU et al. pour résoudre les problèmes de discontinuité tels que les ondes de choc dans un SPH discontinu. En **2005** et **2006** [1] ; LIU et al. ont utilisé un ensemble de fonctions de base pour approximer les variables de champ à un ensemble de particules distribuées arbitrairement cette étape est considéré comme une version améliorée de SPH avec de meilleures performances en matière de cohérence des particules. FANG et al. en **2006** ont encore amélioré la simulation des écoulements en surface libre.

La méthode a ensuite connu un essor important à travers son application en dynamique des fluides à partir du **XXIème** siècle. Elle a notamment été appliquée à la simulation dans la mécanique des fluides en générale. C'est encore aujourd'hui son principal champ d'application dont les majeures seront d'écrites ci-dessous :

- B. Solenthaler. **2009**, développe un SPH prédictif-correcteur pour permettre de meilleures contraintes d'incompressibilité [5] ;
- M. Ihmsen et al. **2010**, présentent la gestion des limites et le pas de temps adaptatif pour des interactions précises avec le corps rigide [6] ;
- K. Bodin et al. **2011**, remplacent l'équation standard de la pression d'état par une contrainte de densité et appliquent un intégrateur de temps [7] ;
- N. Akinci et al. **2012**, présentent une technique polyvalente de gestion des limites et de couplage rigide SPH bidirectionnelle entièrement basée sur les forces hydrodynamiques ; l'approche est applicable à différents types de solveurs SPH [8] ;
- M. Macklin et al. **2013** simule des flux incompressibles à l'intérieur du cadre de la dynamique basée sur la position, pour des pas de temps plus grands [9] ;

- N. Akinci et al. **2013**, présentent une tension de surface polyvalente et une technique d'adhésion fluide-solide bidirectionnelle qui permettent de simuler une variété d'effets physiques intéressants qui sont observés dans la réalité[10] ;
- Mahdavi et N. Talebbeydokhti. **2015**, proposent un algorithme hybride pour la mise en œuvre de conditions aux limites solides et simulent l'écoulement sur un déversoir à crête forte [11].

I.3.3 Domaine d'application de la méthode SPH

Concernant les applications, la méthode SPH intervient dans presque tous les domaines des sciences de l'ingénieur, citons ci-dessous :

I.3.3.1 Astrophysique

Au départ, la méthode SPH c'était dans le but de simuler les phénomènes astrophysiques tels que :

- Les géométries complexes et non symétriques ;
- la formation des galaxies des étoiles ;
- les impacts et les explosions ;
- La simulation des collisions stellaire et météores impacts [12].

I.3.3.2 Mécanique des solides

LIBERSKY et PETSCHER ont étendu la SPH à la mécanique solide à cause la possibilité de traiter une distorsion locale plus importante que les méthodes basées sur la grille, et parmi ces applications on peut citer :

- Simulations de formation de métaux ;
- la rupture par impact dans les solides ;
- la fracture et la fragmentation ;
- la propagation des ondes de choc dans les solides [13].

I.3.3.3 Dynamique des fluides

La méthode a été popularisée dans le domaine de l'hydrodynamique Elle a ensuite été appliquée à un grand nombre de problèmes différents notamment :

- Simulations des écoulements multiphasiques ;
- les écoulements avec surface libre, les écoulements viscoélastiques ;
- elle a été utilisée pour la simulation des écoulements autour des cylindres droits et d'autres corps ;
- résolution des discontinuités ;

- l'écoulement de Poiseuille et l'écoulement de Couette et l'écoulement dans une cavité avec couvercle en mouvement ;
- l'ingénierie offshore et les vagues [13].

Ainsi, le champ d'application de la méthode SPH à la résolution des problèmes en physique et en mathématiques appliquées s'accroît d'année en année.

I.3.4 Le principe de la méthode SPH

Cette section présente brièvement le principe de travail de la méthode SPH et qui sera détaillé telle qu'elle a été formulée par MONAGHAN avec des équations physiques dans seront présenté dans le chapitre II.

La méthodologie Smoothed Particle Hydrodynamics (SPH) passe par plusieurs étapes [14] :

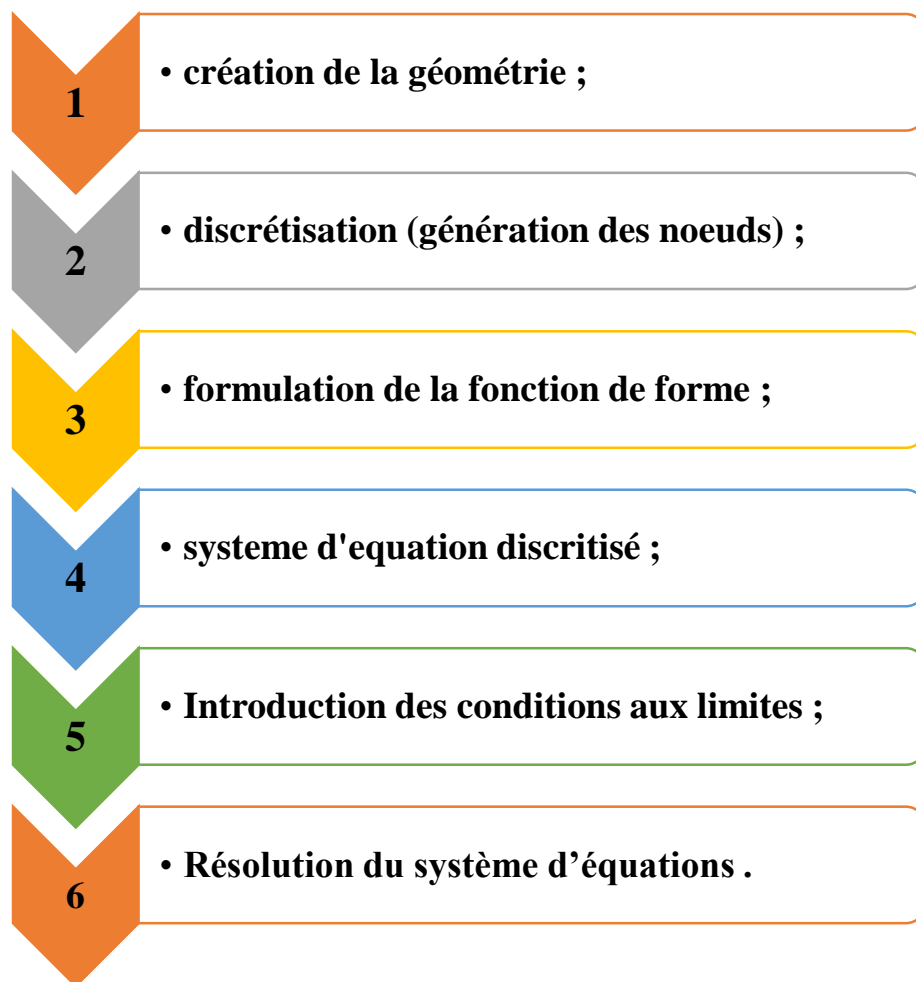


Figure I-6 : Procédure de résolution de la méthode SPH.

a) Modélisation de la géométrie :

Dans tous les méthodes numérique (avec et sans maillage) la création de la géométrie du cas étudier c'est la première étape pour la résolution d'un problème.

b) Génération des nœuds :

Dans les méthodes sans maillage, le domaine du problème est représenté par un ensemble de nœuds arbitrairement distribués.

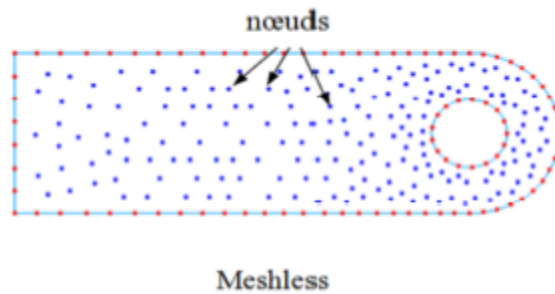


Figure I-7 : Représentation du domaine discrétisé.

c) Formulation de la fonction de forme :

Cette étape présente la formulation de la fonction de forme et pour cela il faut passer par :

- La fonction d'interpolation qui contient une fonction de lissage (noyau).
- Le choix du noyau.

d) Système des équations discrétisé.**e) Introduction des conditions aux limites :**

Imposer les conditions aux limites essentielles.

f) Résolution du système d'équations.

I.3.5 Avantages et inconvénients de la méthode SPH

Dans le tableau ci-dessous les avantages et les inconvénients de la méthode SPH sont résumés :

Tableau I-1 : Les avantages et les inconvénients de la méthode SPH [14].

Avantages	inconvénients
<ul style="list-style-type: none"> • Raffinement adaptatif ; • Coût moins élevé ; • Grandes déformations ; • Traitement de discontinuité. 	<ul style="list-style-type: none"> • Imposition des conditions aux limites ; • Intégration numérique ; • Taille du domaine d'influence.

Les avantages de la méthode SPH :

✓ **Raffinement adaptatif** : L'augmentation ou la diminution de la densité des nœuds dans le domaine est gérée d'une façon facile en méthodes sans maillage. Pour raffiner le maillage en une zone quelconque il suffit d'ajouter des nœuds.

✓ **Coût moins élevé** : La discrétisation tridimensionnelle (3D) à géométrie complexe est moins coûteuse avec les méthodes sans maillage.

✓ **Grandes déformations** : Les fonctions de forme sont moins dépendantes de la disposition des points de la discrétisation, ce qui rend les grandes déformations mieux tolérées.

✓ **Traitement de discontinuité** : en méthode SPH le problème est résolu facilement.

Les inconvénients de la méthode SPH :

✓ **Imposition des conditions aux limites** : Pour récapituler, on peut dire que l'inconvénient majeur des méthodes sans maillage en générale est la difficulté liée à l'imposition des conditions aux bords est plus délicate.

✓ **Intégration numérique** : La simulation numérique produit une solution approchée. L'écart entre la solution exacte et approchée est le résultat de deux sources d'erreurs : erreur de discrétisation (due au schéma d'approximation en espace, mais aussi du schéma en temps) et erreur d'intégration.

En MEF (méthode avec maillage) le domaine est discrétisé en éléments finis donc les points d'intégration sont placés régulièrement dans chaque élément. Donc les formules d'intégration sont exactes sur l'espace des fonctions polynomiales par parties.

Cependant, dans les méthodes sans maillage, la notion d'élément est absente. En effet, on peut utiliser les mêmes formules d'intégration, mais elles ne sont pas exactes. Pour minimiser l'erreur d'intégration en méthodes particulières on a tendance à faire augmenter la densité des points d'intégration.

✓ **Taille du domaine d'influence** : La taille du domaine d'influence doit répondre à deux compromis : dans un domaine de faible taille, le nombre des voisins diminuent, donc l'erreur numérique dans les calculs des dérivées augmente. Alors qu'avec un domaine de taille importante, le nombre des voisins augmentent, la matrice se remplit et la méthode sera « gourmande » en temps de calcul [14].

I.4 Dynamique des fluides

I.4.1 Définition de la dynamique des fluides

La dynamique des fluides ou l'hydrodynamique, est l'étude des mouvements des fluides, qu'ils soient liquides ou gazeux. Elle fait partie de la mécanique des fluides avec l'hydrostatique (statique des fluides). La résolution d'un problème de dynamique des fluides demande normalement de calculer diverses propriétés des fluides comme la vitesse, la viscosité, la densité, la pression et la température en tant que fonctions de l'espace et du temps.

Toutefois, les fluides. Comme les solides, doivent respecter deux principes universels : la conservation (de la masse et la quantité de mouvement).

I.4.2 Les différents régimes d'écoulement

En 1883 REYNOLDS a défini trois grands régimes d'écoulement et pour connaître ces régimes, il faut calculer le nombre de REYNOLDS qu'est donné par :

$$\text{Re} = \frac{\rho v D}{\mu} \quad (\text{I.1})$$

Les trois régimes d'écoulement sont :

I.4.2.1 Régime laminaire

On dit qu'un écoulement est laminaire lorsque le mouvement des particules est dans la même direction de façon régulière et ordonnées.

$$Re < 2000$$

I.4.2.2 Régime intermédiaire ou transitoire :

C'est lorsque l'écoulement est plus ou moins rectiligne avec un peu de mélange, Re est compris entre 2000 et 2500.

$$2500 > Re > 2000$$

I.4.2.3 Régime turbulent

L'écoulement est turbulent lorsque le déplacement est irrégulier et que des fluctuations aléatoires de vitesse se superposent au moyen mouvement du fluide.

$$Re > 2500$$

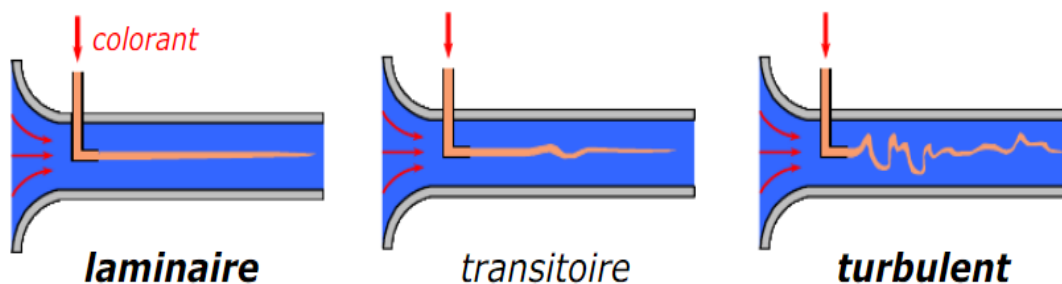


Figure I-8 : Les différents régimes d'écoulements.

I.4.3 La turbulence

La science de la turbulence a commencé vers la fin du XIXe siècle quand l'anglais Osborne Reynolds a pu observer la transition du régime laminaire au régime turbulent. Dans un tuyau, si l'eau passe lentement, on aura des filets bien réguliers c'est-à-dire un écoulement laminaire. Si cette eau va trop vite, il apparaît un très grand nombre de tourbillons et les pertes de charges dans le tuyau vont être très différentes.

I.4.4 Les origines de la turbulence

➤ **Les instabilités :**

Une instabilité est une bifurcation dans la solution d'une équation non linéaire qui s'opère pour une certaine valeur d'un paramètre de contrôle. Ce paramètre est un rapport entre le terme linéaire et non linéaire de l'équation. Pour l'équation de Navier Stokes c'est le nombre de Reynolds qui joue le rôle du paramètre de contrôle, il existe :

Instabilité de cisaillement, Instabilité centrifuge, Instabilité des tourbillons.

➤ **Le phénomène de décollement :**

Le décollement de couche limite laminaire est souvent à l'origine de la turbulence car il produit des zones potentiellement instables.

➤ **Transitions vers la turbulence :**

Il existe deux genres de transition :

Transition à caractère sous critique, Transitions à caractère supercritique [15].

I.4.5 Les conséquences de la turbulence

Les conséquences de la turbulence sont les suivants :

- Perte de stabilité ;
- Irréversibilité ;
- Plus grande dissipation d'énergie ;
- Plus grande divulsion ;
- Création de structures à grande échelle.

I.5 Ecoulements discontinus

Sous certaines conditions, on observe dans un fluide en mouvement des régions où certaines grandeurs matérielles (pression, vitesse, masse volumique...) varient très rapidement au point que la notion de continuité est mise en défaut localement. Ces régions sont assimilables à des surfaces de discontinuité. C'est le cas d'une surface libre ou d'une poche de cavitation et plus généralement de l'interface entre des fluides non miscibles...etc. [16].

I.5.1 Ecoulement à surface libre

Les écoulements en surface libre désignent des écoulements avec une interface libre entre l'air et l'eau, ces écoulements ont très courants dans les problèmes de mécanique de fluide. Ils ont été largement étudiés analytiquement, expérimentalement et numériquement.

Pour la méthode avec maillage, les difficultés rencontrées pour simuler des écoulements à surface libre sont souvent liées à l'interface air/eau, qui d'une part est-elle même une inconnue du problème et qui d'autre part, par sa position, influe sur le comportement de l'ensemble du domaine fluide [12].

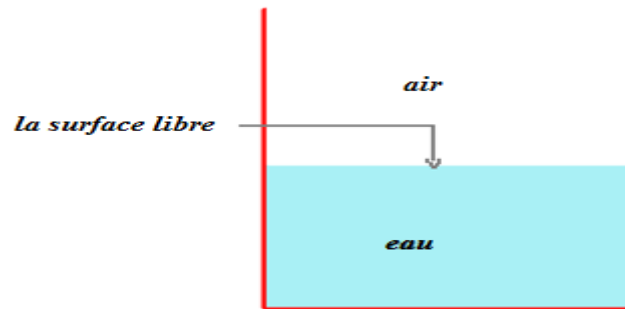


Figure I-9 : Vue schématique d'un écoulement à surface libre dans un réservoir.

I.5.2 Ballotement

Le ballotement signifie tout mouvement de la surface liquide libre à l'intérieur de son récipient. Elle est causée par toute perturbation des récipients de liquide partiellement remplis. Selon le type de perturbation et la forme du récipient, la surface liquide libre peut subir différents types de mouvement, y compris des battements simples planaires, non planaires, rotatifs, irréguliers, symétriques, asymétriques, quasi-périodiques et chaotiques. Lorsqu'elle interagit avec son récipient élastique, ou sa structure de support, la surface liquide libre peut présenter des types de mouvement fascinants sous forme d'échange d'énergie entre modes d'interactions. La surface libre modulée se produit lorsque le mouvement de la surface liquide libre interagit avec la dynamique structurelle du support élastique au voisinage des conditions de résonance interne. Sous un faible champ de gravité, la tension superficielle est dominante et le liquide peut être orienté de manière aléatoire à l'intérieur du réservoir en fonction essentiellement des caractéristiques de mouillage de la paroi du réservoir.

Le problème de base du ballotement de liquide implique l'estimation de la distribution de pression hydrodynamique, des forces, des moments et des fréquences propres de la surface du liquide libre. Ces paramètres ont un effet direct sur la stabilité dynamique et les performances des conteneurs en mouvement [17].



Figure I-10 : Ballotement d'eau dans un verre.

I.5.3 Fluide mixte non miscible

On peut l'appeler aussi une émulsion est un mélange homogène de deux substances liquides (FA et FB), non miscibles (insolubles l'un dans l'autre), comme l'eau et l'huile. Une substance (FB) est dispersée dans la phase continue (FA) sous forme de gouttelettes [18].



Figure I-11 : Mélange non miscible (eau-huile).

I.5.4 Effondrement d'une colonne d'eau

L'effondrer une colonne d'eau, initialement retenue par un mur vertical. Sous l'effet de la gravité, le fluide se déplace et heurte une paroi placée à l'extrémité opposée du domaine physique. Cet écoulement a été employé pour décrire et étudier les modèles standards de conditions aux parois. Il a également permis de vérifier que le modèle pouvait prendre en compte des déformations de la surface libre plus importantes que dans le cas précédent : impacts, reconnections [2]

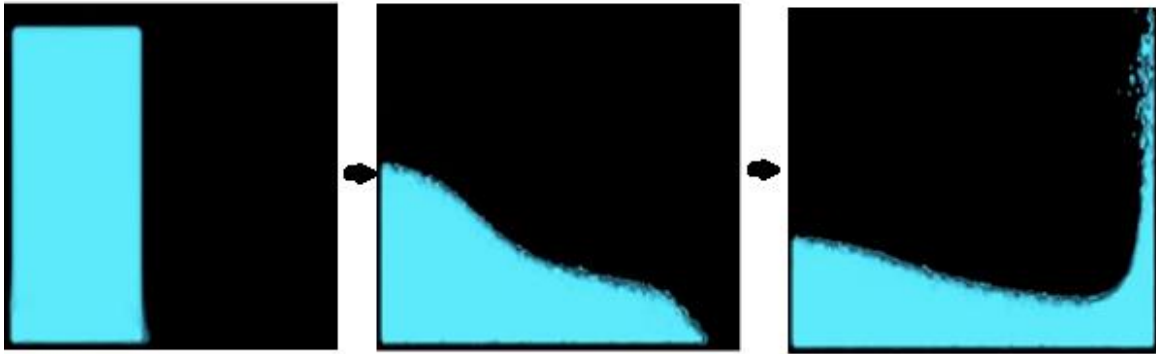


Figure I-12 : Représentation des étapes d'effondrement d'une colonne d'eau.

I.5.5 Impact (SPLASH) d'une goutte d'eau

Un "SPLASH" est un phénomène physique correspondant à l'impact d'un solide sur un liquide, d'un liquide sur un liquide ou enfin d'un liquide sur un solide. Lorsqu'une goutte d'eau ou de n'importe quel autre liquide tombe sur une surface, cette goutte se repend et crée une couronne avec un bord fin qui d'abord, développe des ondulations le long de ses bords puis se casse. Durant ce procédé, le fin filet compris dans la couronne se rétracte et se déchire en morceaux.

Ce nom provient de l'onomatopée anglaise "SPLASH" désignant le bruit produit par l'impact d'un liquide avec autre chose.



Figure I-13 : Impact SPLASH d'une goutte d'eau sur un liquide.

I.5.6 Projection thermique

Le principe consiste à projeter à l'aide d'un gaz vecteur un matériau dit d'apport chauffé à haute température sur un matériau support pour en modifier ses propriétés (Figure I-14). En S'agglomérant, les particules forment le revêtement. Les liaisons sont purement mécaniques. L'épaisseur du revêtement est comprise entre 50 microns et quelques millimètres, les différentes catégories de la projection thermique sont :

- ✓ projection flamme ;
- ✓ Projection par ARC électriques ;
- ✓ Projection COLD SPRAY ;
- ✓ Projection plasma [19].

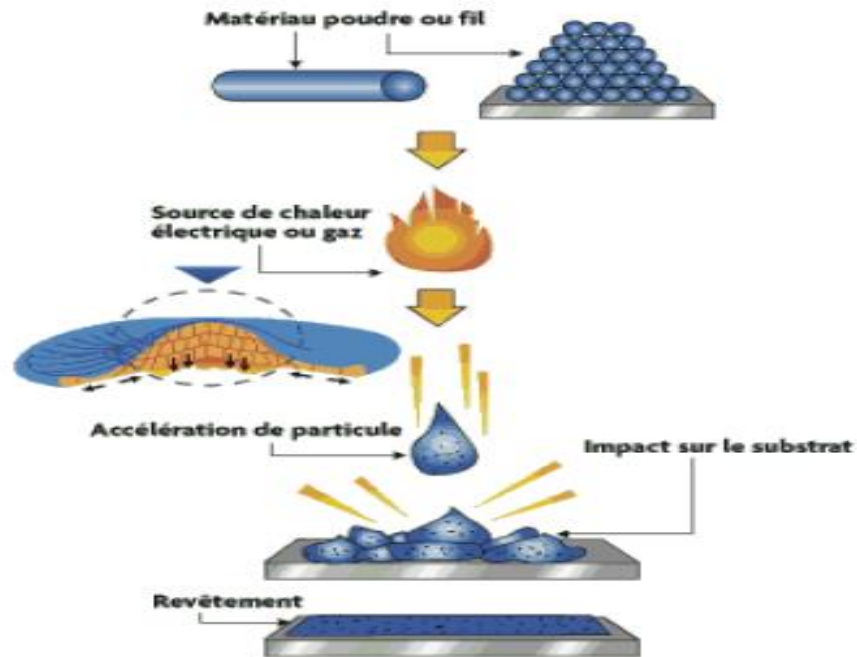


Figure I-14 : Schéma simplifié du principe de projection thermique [19].

Parmi les applications industrielles en génie mécanique les plus intéressantes de l'étude de l'impact des gouttelettes on trouve le revêtement par projection thermique.



Figure I-15 : Projection thermique.

I.6 Conclusion

Dans ce chapitre introductif, nous avons situé le type de méthode choisi à savoir la méthode d'hydrodynamique des particules lissées (SPH). Elle est considérée parmi les méthodes qui résolvent les difficultés rencontrées dans les méthodes traditionnelles (méthodes avec maillage).

Nous avons défini la SPH et ses différentes caractéristiques. En plus, nous avons fait une brève étude sur la dynamique des fluides et la turbulence.

Ce chapitre est finalisé par une recherche sur quelques écoulements discontinus.

CHAPITRE II
FORMULATIONS
MATHÉMATIQUES

CHAPITRE II : FORMULATION MATHÉMATIQUE**II.1 Introduction**

La méthode SPH fait appel à un certain nombre de notions mathématiques qu'on va décrire dans ce chapitre.

Ce chapitre se concentre sur le principe de la méthode SPH vue dans le chapitre précédent, commençons par une présentation détaillée des formulations SPH.

Il présente aussi l'application de la SPH à la mécanique des fluides et la reformulation des équations générales de MDF en équations discrétisé SPH suivant une procédure.

Finalement ce chapitre passe par des notations de technique de stabilisation de la SPH.

II.2 Le principe de la méthode SPH**II.2.1 Discrétisation**

Toute méthode numérique nécessite une représentation du domaine de calcul. Dans le cas présent, la description du domaine de calcul est lagrangienne et la discrétisation est sans maillage [4].

Avec SPH, le volume fluide est représenté par des particules discrètes, chaque élément de matière i est modélisé par une particule de position x_i et de volume v_i dont ils transportent les attributs (masse, position, viscosité, vitesse, etc.)

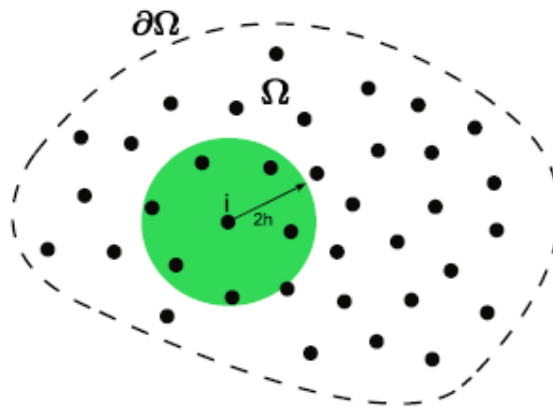


Figure II-1: Représentation schématique de la discrétisation du domaine Ω par un ensemble de points.

II.2.2 Construction des fonctions de forme

II.4.2.1 Approximation d'une fonction

Les fonctions de forme de la méthode SPH classique d'écrite par GINGOLD et MONAGHAN [20] sont basées sur une représentation dite intégrale des fonctions ou bien interpolation intégrale, Cette interpolation commence avec l'identité suivante :

$$f(x) = \int f(x') \delta(x - x') dx' \quad (\text{II. 1})$$

Et : Où $\delta(x - x')$ est la fonction Dirac tel que :

$$\delta(x - x') = \begin{cases} \infty & x = x' \\ 0 & x \neq x' \end{cases} \quad (\text{II. 2})$$

$$\int \delta(x - x') dx' = 1 \quad (\text{II. 3})$$

Cependant, pour une question de dérivabilité de la fonction test (de Dirac), on remplace celle-ci par une fonction de forme (couramment appelée noyau ou bien cloche) plus régulière, noté W . Elle doit être à support compact ce qui signifie que ses valeurs doivent être non nulles à l'intérieur d'un domaine et nulles à l'extérieur.

$$f(x) \approx \int f(x') W(x - x', h) dx' \quad (\text{II. 4})$$

Où la fonction delta a été remplacée par $W(x - x', h)$ qui est un noyau ou une fonction de lissage.

En notant h le paramètre de la fonction noyau qui contrôle la taille du support (la longueur de lissage).

La représentation intégrale montrée dans l'équation (II.4) ne peut être qu'une approximation, sauf pour des cas simples très particuliers. Donc, l'équation (II.4) s'écrit :

$$\langle f(x) \rangle = \int f(x') W(x - x', h) dx' \quad (\text{II. 5})$$

- les crochets représentant «une approximation».

Les fonctions de forme SPH sont finalement obtenues en discrétisant l'approximation intégrale continue (II.5). Pour cela, on réalise une somme discrète sur un ensemble de particules :

$$\langle f(x) \rangle = \sum_{j=1}^N f(x_j) W(x_i - x_j, h) \Delta v_j \quad (\text{II. 6})$$

Le volume étant égale à la masse divisé par la densité on peut écrire :

$$\langle f(x) \rangle = \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\rho} f(x_j) W(x_i - x_j, h) \quad (\text{II. 7})$$

Où N est le nombre total de particules dans la zone d'influence et j la particule en position x_j et de volume $v_j = m_j/\rho$, avec m_j et ρ respectivement la masse et la masse volumique de la particule j .

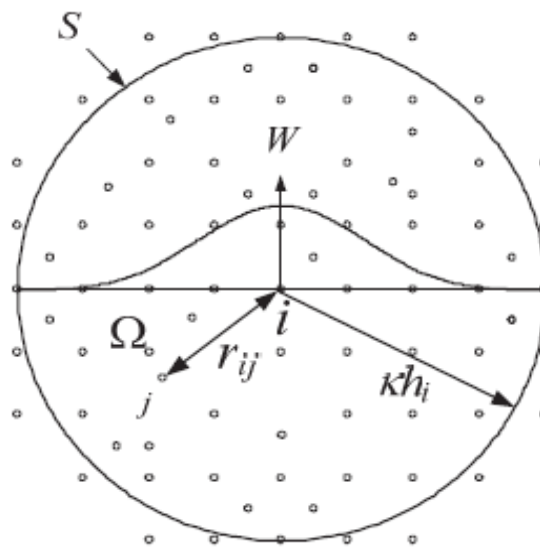


Figure II-2: Approximations de particules SPH dans un domaine de problème à deux dimensions Ω avec une surface « S ».

Où :

W : la fonction de lissage utilisée pour approximer les variables de champ à la particule i en utilisant des sommations moyennes sur les particules j dans le domaine de support avec une distance de coupure de kh .

II.4.2.3 La fonction de lissage (noyau)

La fonction de lissage (noyau) occupe une place très importante dans la méthode SPH, d'une manière générale la fonction de lissage est une fonction lisse et continue dont la dérivée première (et habituellement la dérivée seconde) est lisse et continue. Elle a généralement la forme d'une cloche qui permet pour une particule SPH donnée d'étaler ses propriétés vers les particules voisines. Afin d'être une bonne approximation de la fonction delta, la fonction de lissage W doit satisfaire les propriétés et les conditions suivantes :

1) **La condition de normalisation** : l'aire ou le volume sous la courbe de la fonction de lissage doit être égale à l'unité.

$$\int W(x - x', h) dx' = 1 \quad (\text{II. 8})$$

2) **La condition de la fonction delta Dirac** : lorsque la longueur de lissage h tend vers 0, la fonction de lissage devient la fonction delta.

$$\lim_{h \rightarrow 0} W(x - x', h) = \delta(x - x') \quad (\text{II. 9})$$

Qui permet d'assurer la convergence de la méthode.

3) **La propriété de compacité** : elle nécessite que la fonction de lissage soit zéro au-delà de son support compact.

$$W(x - x', h) = 0 \text{ Pour } |x - x'| > kh \quad (\text{II. 10})$$

Pour un certain $k > 0$.

4) **La propriété de positivité** : La fonction de lissage doit être positive à l'intérieur de son support compact

$$W(x - x', h) = 0 \text{ Pour } |x - x'| > kh \quad (\text{II. 11})$$

5) **Symétrique** : La fonction de lissage encore appelée noyau doit être sphériquement symétrique et paire.

$$W(x - x', h) = W(-(x - x'), h) \quad (\text{II. 12})$$

6) La propriété de monotonie : la fonction de lissage $W(x - x', h)$ doit décroître assez rapidement à mesure que l'on s'éloigne de la particule centrale x [1].

II.4.2.2 Approximation du gradient d'une fonction

L'approximation du gradient d'une fonction est basée sur le même principe présenté avec l'équation (II.5) [20]. On peut en effet écrire :

$$\langle \nabla \cdot f(x) \rangle = \int \nabla \cdot f(x') W(x - x', h) dx' \quad (\text{II. 13})$$

En réalisant une intégration par partie et en appliquant ensuite le théorème de la divergence, on peut écrire :

$$\langle \nabla \cdot f(x) \rangle = \int f(x') W(x - x', h) \cdot \vec{n} ds - \int f(x') \cdot \nabla W(x - x', h) \quad (\text{II. 14})$$

Où \vec{n} est le vecteur unitaire normal à la surface S .

Étant donné que la fonction de lissage W est généralement définie pour avoir un support compact (voir l'équation (II.10)), et que la valeur de W à la surface de l'intégrale dans l'équation (II.14) est nulle dans SPH.

Par conséquent, l'intégrale de surface sur le côté droit de l'équation (II.14) est également nulle. Donc, l'approximation du noyau des dérivées peut être écrite à partir de l'équation (II.14) comme suit :

$$\langle \nabla \cdot f(x) \rangle = - \int f(x') \cdot \nabla W(x - x', h) dx' \quad (\text{II. 15})$$

Et donc en réalisant le gradient de la somme discrète d'un ensemble de particules comme suit :

$$\langle \nabla \cdot f(x) \rangle = - \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\rho} f(x_j) \nabla W(x - x_j, h) \quad (\text{II. 16})$$

$\nabla W(x - x_j, h)$: Le gradient de la fonction noyau.

Outre les équations mentionnées ci-dessus, il existe certaines autres règles de fonctionnement peuvent être utiles pour dériver les formulations SPH pour les équations de

système complexes [1]. Par exemple, pour deux fonctions arbitraires des variables de champ f_1 et f_2 , les règles suivantes existent :

$$\langle f_1 \pm f_2 \rangle = \langle f_1 \rangle \pm \langle f_2 \rangle \tag{II. 17}$$

$$\langle f_1 \cdot f_2 \rangle = \langle f_1 \rangle \cdot \langle f_2 \rangle \tag{II. 18}$$

Donc, une SPH approximation de la somme des fonctions est égale à la somme des approximations SPH de la fonction individuelle, et une approximation SPH d'un produit de fonctions est égale au produit des approximations SPH des fonctions individuelles.

Si f_1 est une constante notée c , nous devrions avoir :

$$\langle c \cdot f_2 \rangle = c \cdot \langle f_2 \rangle \tag{II. 19}$$

L'opérateur d'approximation SPH est commutatif, c'est-à-dire :

$$\langle f_1 \pm f_2 \rangle = \langle f_2 \pm f_1 \rangle \tag{II. 20}$$

$$\langle f_1 \cdot f_2 \rangle = \langle f_2 \cdot f_1 \rangle \tag{II. 21}$$

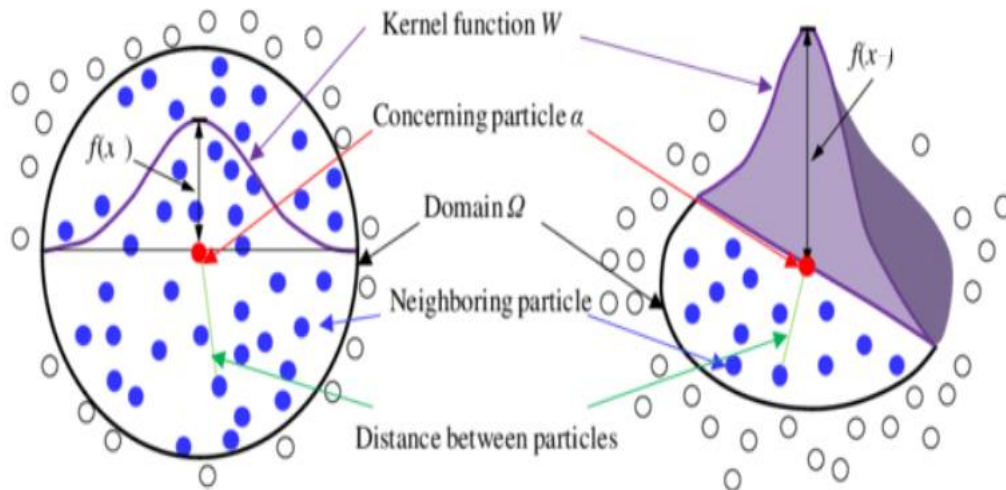


Figure II-3 : Représentation schématique de la fonction noyau en 2D et 3D.

II.2.3 Choix du noyau (la fonction de lissage)

Toute fonction qui satisfait les conditions (II.8) et (II.12) peut être utilisée comme fonction de lissage.

La forme générale de la fonction de lissage est la suivante [1]:

$$W(r, h) = \frac{B}{h^d} f\left(\frac{r}{h}\right) \tag{II.22}$$

Où B est une constante dépend de d la dimension du problème et $r = |x - x'|$.

Il existe plusieurs formes de noyaux proposées dans la littérature de MONAGHAN [1] et parmi les fonctions les plus utilisées :

- **La spline cubique** : proposée par MONAGHAN, sur un support de taille 2h, elle est aujourd’hui communément admise comme la plus performante :

$$W(r, h) = W_0 \left\{ \begin{array}{ll} \frac{2}{3} - q^2 + \frac{1}{2}q^3, & 0 \leq q < 1 \\ \frac{1}{6}(2 - q)^3, & 1 \leq q < 2 \\ 0, & q \geq 2 \end{array} \right\} \tag{II.23}$$

Où $W_0 = \frac{B}{h^d}$ vaut respectivement $\frac{1}{h}$, $\frac{15}{7\pi h^2}$ et $\frac{3}{2\pi h^3}$ pour les problèmes en 1, 2 et 3 dimensions, avec $q = \frac{r}{h}$ et $r = |x - x'|$.

- **La gaussienne** : sur un support de taille 3h:

$$W(r, h) = W_0 \left\{ \begin{array}{ll} e^{-q^2} & \text{si } 0 \leq q \leq 3 \\ 0 & \text{sinon} \end{array} \right\} \tag{II.24}$$

Où W_0 vaut respectivement $\frac{1}{\sqrt{\pi} h}$, $\frac{1}{\pi h^2}$ et $\frac{1}{\pi^{\frac{3}{2}} h^3}$ pour les problèmes monodimensionnels, bidimensionnels et tridimensionnels.

Bien d’autres fonctions de formes peuvent être employées mais celles-ci sont les plus utilisables.

- Quelques noyaux avec une représentation graphique en dimension 1 :

Tableau II-1 : Noyaux d'interpolation.

Noyau	Formule	Représentation graphique
Spline cubique	$W(r, h) =$ $W0 \left\{ \begin{array}{ll} \frac{2}{3} - q^2 + \frac{1}{2}q^3, & 0 \leq q < 1 \\ \frac{1}{6}(2 - q)^3, & 1 \leq q < 2 \\ 0, & q \geq 2 \end{array} \right\}$ <p>Avec : $W0 = 1$</p>	<p>The graph shows the cubic spline kernel $w(r, h)$ plotted against $q = r/h$. The x-axis ranges from 0.0 to 2.0, and the y-axis ranges from -0.1 to 0.7. The curve is red with circular markers at $q = 0, 0.5, 1.0, 1.5, 2.0$. The values are approximately: (0, 0.667), (0.5, 0.5), (1.0, 0.167), (1.5, 0.017), (2.0, 0).</p>
Gaussienne	$W(r, h) =$ $W0 \left\{ \begin{array}{ll} e^{-q^2} & \text{si } 0 \leq q \leq 3 \\ 0 & \text{sinon} \end{array} \right\}$ <p>Avec : $W0 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$</p>	<p>The graph shows the Gaussian kernel $w(r, h)$ plotted against $q = r/h$. The x-axis ranges from 0.0 to 3.5, and the y-axis ranges from 0.0 to 0.6. The curve is blue with circular markers at $q = 0, 0.5, 1.0, 1.5, 2.0, 3.0$. The values are approximately: (0, 0.5), (0.5, 0.433), (1.0, 0.242), (1.5, 0.106), (2.0, 0.054), (3.0, 0.020).</p>

<p>Quadratique</p>	$W(r, h) =$ $W_0 \begin{cases} \frac{3}{16} q^2 - \frac{3}{4} q + \frac{3}{4} & \text{si } 0 \leq q \leq 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ <p>Avec : $W_0 = 1$</p>	<table border="1"> <caption>Data points for Quadratic shape function</caption> <thead> <tr> <th>q=r/h</th> <th>w(r,h)</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>0.0</td><td>0.75</td></tr> <tr><td>0.5</td><td>0.42</td></tr> <tr><td>1.0</td><td>0.19</td></tr> <tr><td>1.5</td><td>0.06</td></tr> <tr><td>2.0</td><td>0.00</td></tr> </tbody> </table>	q=r/h	w(r,h)	0.0	0.75	0.5	0.42	1.0	0.19	1.5	0.06	2.0	0.00		
q=r/h	w(r,h)															
0.0	0.75															
0.5	0.42															
1.0	0.19															
1.5	0.06															
2.0	0.00															
<p>Lucy</p>	$W(r, h) =$ $W_0 \begin{cases} (1 + 3q)(1 - q)^3 & \text{si } 0 \leq q \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ <p>Avec : $W_0 = \frac{5}{4}$</p>	<table border="1"> <caption>Data points for Lucy shape function</caption> <thead> <tr> <th>q=r/h</th> <th>w(r,h)</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>0.0</td><td>1.25</td></tr> <tr><td>0.1</td><td>1.30</td></tr> <tr><td>0.2</td><td>1.25</td></tr> <tr><td>0.5</td><td>0.78</td></tr> <tr><td>0.8</td><td>0.25</td></tr> <tr><td>1.0</td><td>0.00</td></tr> </tbody> </table>	q=r/h	w(r,h)	0.0	1.25	0.1	1.30	0.2	1.25	0.5	0.78	0.8	0.25	1.0	0.00
q=r/h	w(r,h)															
0.0	1.25															
0.1	1.30															
0.2	1.25															
0.5	0.78															
0.8	0.25															
1.0	0.00															

II.3 Application à la dynamique des fluides

Cette section présente le procédé d'obtention des équations générales de la dynamique des fluides avec des formulations SPH discrétisé, où les écoulements sont tridimensionnels et turbulents d'un fluide Newtonien incompressible. Ils sont régis par des équations traduisant le transport de la masse, la quantité de mouvement et l'énergie, présentées ci-après.

Equation de NAVIER STOKES

Les équations de NAVIER STOKES sont très puissantes. Elles peuvent décrire à la fois les écoulements laminaires et turbulents.

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 v + F \tag{II. 25}$$

Où : ρ est la masse volumique, v représente la vitesse, p la pression, μ c'est la viscosité dynamique et F la force extérieure (ex : la gravité g).

II.3.1 Equation de continuité

Elle exprime le principe de la conservation de la masse.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \cdot \text{div}(\vec{v}) = 0 \quad (\text{II. 26})$$

Où :

ρ : Est la masse volumique, t le temps et \vec{v} le vecteur vitesse.

Pour un écoulement permanent ($\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$), tridimensionnel incompressible ($\rho = \text{cst}$) l'équation (II.20) devient :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (\text{II. 27})$$

II.3.2 Equation conservation de la quantité de mouvement

Cette équation est tirée de l'application de la 2ème loi de Newton à un volume de contrôle élémentaire de fluide. Elle permet d'établir des relations entre les caractéristiques du fluide, celles de ses mouvements et les causes qui les produisent.

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \rho v \cdot (\nabla v) = -\nabla \sigma + \nabla \tau \quad (\text{II. 28})$$

Avec : $\left(\frac{\partial v_i}{\partial t}\right)$: Variation locale de la vitesse ;

$(\rho v \cdot (\nabla v))$: Variation convective de la vitesse ;

$(\nabla \sigma)$: Résultante des Forces de pression ;

$(\nabla \tau)$: Résultante des Forces visqueuse.

Pour un écoulement newtonien ($\nabla \tau = 0$).

II.3.3 Equation de l'énergie

Cette équation est obtenue à partir du premier principe de la thermodynamique.

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial (v_j \cdot T)}{\partial x_j} = \frac{\lambda}{\rho \cdot c_p} \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial x_j^2} \quad (\text{II. 29})$$

II.3.4 Résolution par la méthode SPH

On passe des équations générales de la mécanique aux équations discrète SPH par un procédé détaillé dans la figure ci-dessous [21] :

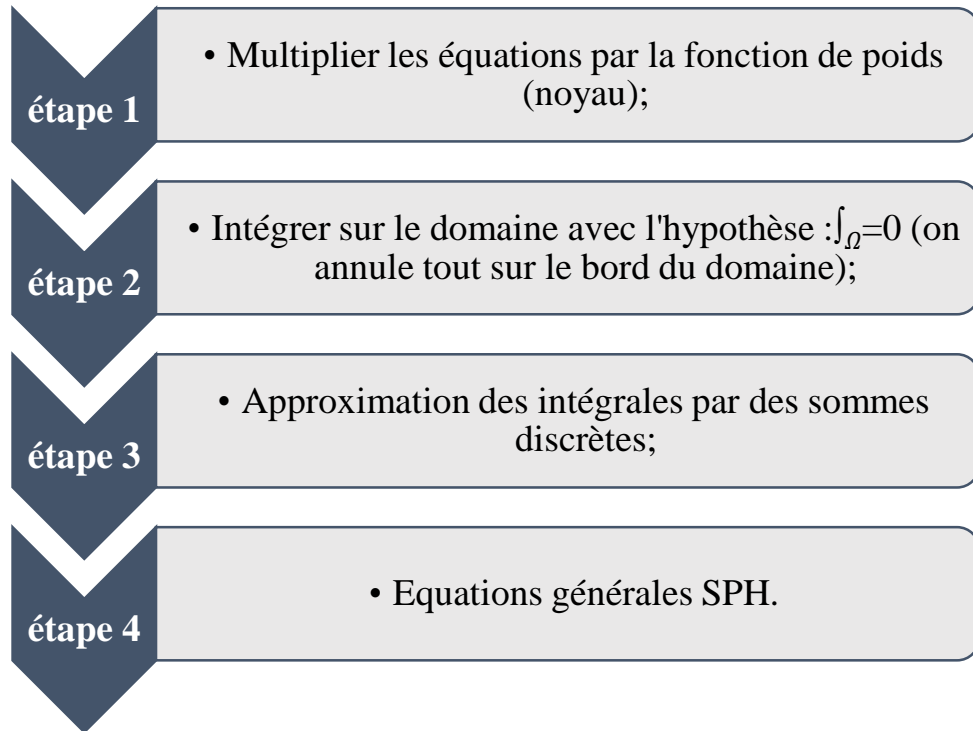


Figure II-4: Représentation des étapes du procédé de résolution par la méthode SPH.

Les équations (II.26) et (II.28) sont discrétisées à l'aide des approximations (II.7) et (II.16) de façon à obtenir les équations discrètes du modèle :

- **Equation de continuité pour un nœud i s'écrit :**

Il existe deux formulations. L'une permet le calcul direct des masses volumiques initiales, l'autre permet de calculer l'incrément de masse volumique à chaque pas de temps.

- **Formulation 1 :**

$$\langle \rho(x) \rangle = \sum_{j=1}^N m_j W(x_i - x_j, h) \quad (\text{II. 30})$$

- **Formulation 2 :**

$$\langle \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \right)_i \rangle = \rho_i \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\rho_j} (v_i - v_j) \nabla W(x_i - x_j, h) \quad (\text{II. 31})$$

Où :

N : Le nombre total de billes voisines comprises dans le support du noyau.

v_i : La vitesse de la particule fixe

v_j : La vitesse de la particule voisine.

- **Equation conservation de la quantité de mouvement (Navier-Stokes) pour un nœud i s'écrit :**

$$\left\langle \frac{\partial v}{\partial t} \right\rangle_i = -m_j \sum_{j=1}^N \left(\frac{\sigma_i}{\rho_i^2} + \frac{\sigma_j}{\rho_j^2} \right) \nabla W(x_i - x_j, h) \quad (\text{II. 32})$$

Où :

m_j : La masse portée par le nœud j .

σ_i : La pression absolue agissant à la particule fixe

σ_j : La pression absolue agissant à la particule voisine.

- **Equation de l'énergie pour un nœud i s'écrit :**

$$\left\langle \frac{de_i}{dt} \right\rangle = -p_i \sum_{j=1}^N m_j (v_i v_j) \nabla W(x_i x_j, h) + \varepsilon_v + \nabla \cdot q + q_H \quad (\text{II. 33})$$

e_i : L'énergie interne spécifique de la particule fixe.

II.3.5 Approximation du Laplacien

L'approximation laplacienne peut être obtenue à partir de l'expansion de la série de Taylor autour d'un point spatial fixe. Dans le repère cartésien, l'expression du laplacien d'une fonction a la forme suivante :

$$\Delta f_i = \left(\frac{\partial^2 f_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f_i}{\partial y^2} \right) = 2 \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\rho_j} (f_i - f_j) \cdot \Delta x_{ij} \nabla W(x_i - x_j, h) \quad (\text{II. 34})$$

$$\Delta x_{ij} = \frac{x_i - x_j}{|x_i - x_j|^2} \quad (\text{II. 35})$$

Où :

Δf_i : L'approximation SPH du laplacien de la fonction à la position de la particule fixe.

II.4 Techniques de stabilisation

Comme décrit dans les sections précédentes, le formalisme SPH utilise des opérateurs centrés dans un système explicitement résolu et, par conséquent, un tel formalisme est inconditionnellement instable. Afin de restaurer la stabilité, il est nécessaire d'ajouter une certaine diffusion numérique.

Dans cette section les techniques les plus utilisées sont brièvement décrites.

II.4.1 Viscosité artificielle

Les viscosités artificielles n'ont aucun rapport avec les viscosités réelles, elles sont introduites pour traiter les chocs, et pour stabiliser les simulations par GINGOLD et MONAGHAN en 1983. Ces viscosités artificielles peuvent être considérées comme des formes de pression visqueuse, et elles peuvent être facilement incluses dans les équations du mouvement. Associée à chaque couple de nœuds $i - j$, elle peut s'écrire [4] :

$$\Pi_{ij} = \begin{cases} \frac{-\alpha c h \mu_{ij} + \beta h^2 \mu_{ij}^2}{\rho_{ij}} & \text{si } \mu_{ij} \leq 0 \\ 0 & \text{si } \mu_{ij} \geq 0 \end{cases} \quad (\text{II. 36})$$

Avec : $\rho_{ij} = (\rho_i + \rho_j)/2$

α et β : sont respectivement les coefficients de viscosité linéaire et quadratique, h : est le paramètre du support de la fonction noyau et c est la vitesse du son dans le matériau. En dimension 3, on a :

$$\mu_{ij} = \frac{(v_i - v_j) \cdot (x_i - x_j)}{\|x_i - x_j\|^2 + \varepsilon^2} \quad (\text{II. 37})$$

Où ε est un paramètre permettant d'éviter les divisions et les valeurs conseillées pour l'eau sont $0.8 \leq \alpha \leq 1.5$ et $1 \leq \beta \leq 3$.

L'équation de conservation de la quantité de mouvement s'écrit donc désormais :

$$\left\langle \frac{\partial v}{\partial t} \right\rangle_i = - \sum_{j=1}^{N_v} m_j \left(\frac{\sigma_i}{\rho_i^2} + \frac{\sigma_j}{\rho_j^2} + \Pi_{ij} \right) \nabla W_{ij} \quad (\text{II. 38})$$

Où : $\nabla W_{ij} = \nabla W(x_i - x_j, h)$.

II.4.2 Chaleur artificielle

La viscosité artificielle de type Monaghan décrite ci-dessus donne souvent de bons résultats lors de la modélisation des chocs. Cependant, un échauffement excessif peut se produire dans certaines circonstances graves. NOH a résolu ce problème en ajoutant un terme de conduction thermique artificielle à l'équation d'énergie (NOH, 1987).

Une forme SPH de terme de chaleur artificielle a été dérivée par (MONAGHAN, 1995) comme suit et est ajoutée à l'équation d'énergie si nécessaire [1].

$$H_i = 2 \sum_{j=1}^N \frac{(q_i + q_j)}{(\rho_i + \rho_j)} \frac{e_i - e_j}{|x_{ij}|^2 + \varepsilon^2} x_{ij} \cdot \nabla w_{ij} \quad (\text{II. 39})$$

Où :

$$q_i = -\alpha c h \mu_i + \beta h^2 \mu_i^2$$

$$q_j = -\alpha c h \mu_j + \beta h^2 \mu_j^2$$

II.5 Les conditions aux limites

La modélisation des conditions aux limites utilisée pour résoudre le problème dans SPH nécessite une attention particulière. En effet, le succès de toute simulation numérique de problèmes définis dans un domaine borné nécessite une bonne gestion des conditions aux limites du problème. Le problème ici est un peu délicat, car comme nous l'avons vu, l'obtention d'une grandeur physique en un point donné nécessite un lissage autour de ce point. Notez que les points situés près de la limite du problème et où il n'y a pas assez d'espace pour lisser peuvent présenter des difficultés. Plusieurs possibilités et différentes alternatives sont proposées dans la littérature pour bien gérer les conditions aux limites en SPH. Ici, nous présentons trois méthodes couramment utilisées [3] :

II.5.1 La méthode des particules répulsives

Une approche pour la gestion des conditions aux frontières est celle qui consiste à modéliser les parois du domaine avec des particules (particules frontières) qui exercent une force répulsive sur les particules du fluide.

Un modèle de force souvent utilisé est proposée par MONAGHAN .Elle se décrit comme suit :

Pour une particule i du fluide, la force totale par unité de masse agissant sur elle est donnée par la relation :

$$f_i = \sum_k f_{ik} = \sum_k \frac{m_k}{m_i + m_k} B(x, y) n_k \quad (\text{II. 40})$$

Où :

f_{ik} : La force par unité de masse exercée par la k-ième particule frontière sur la i-ième particule de fluide ;

n_k : Le vecteur unitaire normal localisé sur la particule k ;

En considérant que y est dans la direction normale à la paroi et que x est dans la direction tangentielle à celle-ci ;

$B(x; y)$: La fonction choisie de manière à s'assurer que B croisse rapidement lorsque y tend vers zéro (pour empêcher la pénétration dans la paroi) et la variation suivant x doit assurer que la force ressentie par une particule qui se déplace parallèlement à la paroi soit toujours une constante.

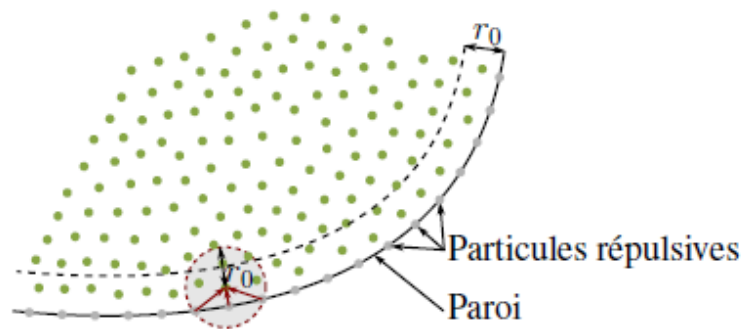


Figure II-5 : Conditions aux limites imposées à l'aide de particules répulsives selon Monaghan.

II.5.2 Méthode des particules fantômes

Une autre méthode utilisée pour pallier aux problèmes des conditions aux frontières est la méthode des particules fantômes.

Cette approche consiste à créer sur une distance, au moins égale à la longueur de lissage à partir de la paroi, plusieurs lignes de particules dites fantômes. L'on crée également dans le domaine de calcul, contenant les particules réelles, une ligne de points dits de référence situés à une distance normale à la paroi, comparable à la distance minimale initiale des particules réelles. En chacun de ces points de référence, l'on détermine la vitesse u_r du fluide qui lui est associé :

$$u_r = \frac{\sum_j (m_j / \rho_j) u_j w_{rj}}{\sum_j (m_j / \rho_j) w_{rj}} \quad (\text{II. 41})$$

Où la sommation sur j couvre toutes les particules fluides (particules réelles) voisines.

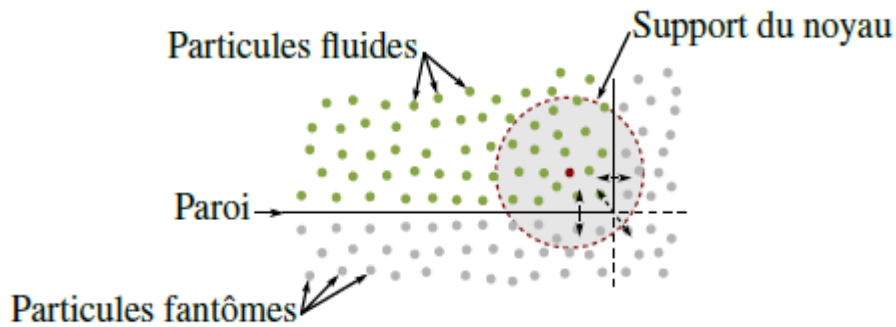


Figure II-6: Gestion des conditions aux frontières par la méthode des points de référence et particules fantômes.

II.5.3 Méthode des particules images

La méthode des particules images consiste à créer à l'extérieur de la paroi des particules dites images qui sont miroirs pour les particules de fluide (particules réelles) qui se trouvent une distance au plus égale à $2h$ de cette paroi. Ainsi pour chaque particule de fluide i proche d'une frontière, c'est-à-dire que la distance qui la sépare de la paroi est inférieure ou égale à $2h$, l'on crée une particule image i' qui est son image par rapport à cette même paroi (voir Figure II-7).

Chaque particule image porte les mêmes propriétés (masse, densité, viscosité) que la particule dont elle est image. Par contre la vitesse de chaque particule image doit être obtenue en fonction de la vitesse de la particule fluide dont elle est image de façon à satisfaire aux conditions de non glissement et de non pénétration sur la paroi.

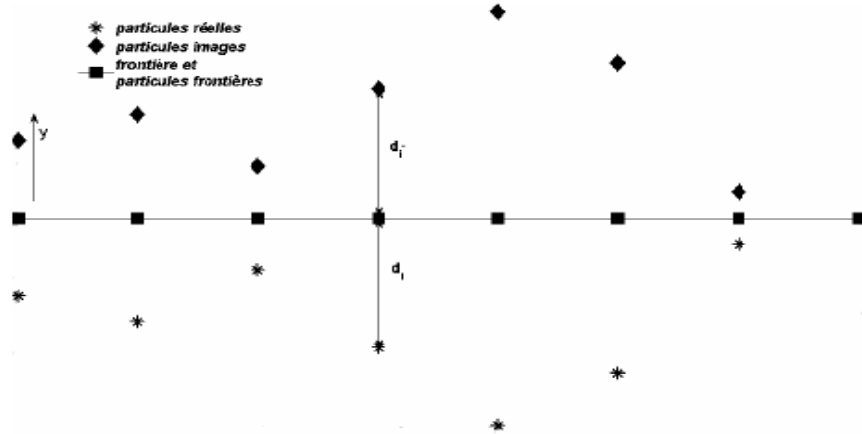


Figure II-7 : Gestion des conditions aux frontières par la méthode des particules images.

II.6 Recherche des particules voisines

La littérature sur les méthodes lagrangiennes présente plusieurs techniques de recherche de particules voisines (procédure nécessaire à réaliser, notamment dans les écoulements fluides, à chaque itération numérique, et qui a une influence directe sur le temps de simulation). Dans les analyses bidimensionnelles, les listes de voisines sont couramment utilisées dans les simulations de particules. Dans les problèmes 3D, la technique de l'ocree est actuellement appliquée en conjonction avec la parallélisation dans la recherche directe, la méthode de recherche la plus simple, une particule i est fixée et toutes les paires de particules ij dans le domaine verront leurs distances est inférieure au rayon de support kh , une particule voisine est trouvée et stockée dans une matrice [22].

La figure II-8 montre les régions où la recherche directe, et en utilisant une grille (dans laquelle seules les particules dans la région bleu clair réduite seront analysées) [22].

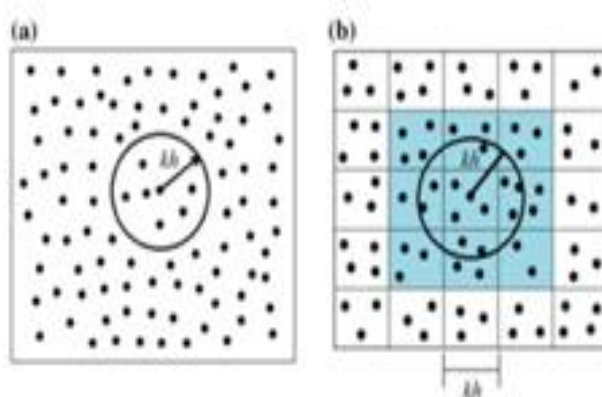


Figure II-8 : La recherche de particules voisines, a : directement et b : à l'aide d'une grille.

II.7 Résolution (nombre de particules) minimale

Pour que les interpolations soient représentatives dans le domaine discrétisé, le nombre minimum de particules voisines dans le domaine d'influence doit être de 5, 21 et 57 dans les cas 1D, 2D et 3D, respectivement. Après avoir effectué des tests de calcul, on a vu que l'augmentation du nombre de particules voisines ne modifie pas davantage les résultats numériques, mais affecte cependant le temps passé dans la simulation [22].

CHAPITRE III
ETUDE DE CAS

CHAPITRE III : ETUDE DE CAS

III.1 Introduction

Dans ce chapitre nous allons traiter quelques exemples typiques pour montrer la puissance de la méthode SPH ainsi que ses handicaps.

Les problèmes sont des problèmes de plus en plus sophistiqués et qui nécessitent des techniques mathématiques très élaborées. Pour cela nous les traiterons en utilisant le code de calcul DualSPHysics .Il est aussi possible d'utiliser le code DesignSPHysics comme un module en langage Python sous le logiciel libre FreeCAD.

III.2 Présentation du code DualSPHysics

DualSPHysics est un code basé sur la méthode SPH. Il est développé pour étudier les phénomènes d'écoulement en surface libre où les méthodes eulériennes peuvent être difficiles à appliquer.

DualSPHysics est une collection de programmes écrits en C++, CUDA et Java en licence Libre.

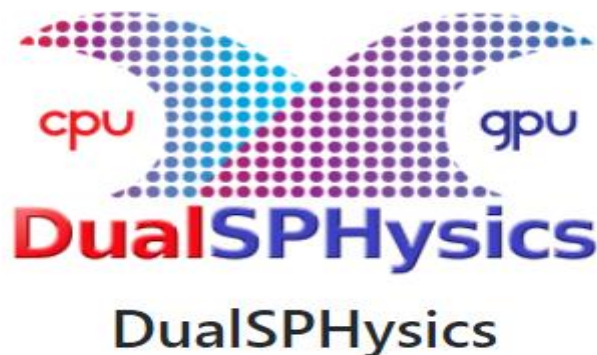


Figure III-1: Logo DualSPHysics.

Il existe deux méthodes pour faire la simulation :

- Avec le code Dual SPHysics directement.
- Avec DesignSPHysics, qui fournit une interface utilisateur graphique pour DualSPHysics, et c'est notre choix pour la modélisation.

III.3 Présentation du code de calcul

DesignSPHysics est un module logiciel intégré à FreeCAD, qui permet à l'utilisateur de créer des cas avec des fluides et des solides et les exporte vers un format compatible DualSPHysics. Il peut créer des scènes 3D et 2D délimitées par un cube ou un plan (limites de la simulation de cas) avec toutes les fonctionnalités de FreeCAD.

Devant le site officiel de DesignSPHysics, au 05 novembre 2019 le développement de DesignSPHysics est principalement piloté par Andrés Vieira. Il est entièrement conçu en Python 3.7 et est censé être autonome et multiplateforme.

Actuellement, DesignSPHysics est gratuit et peut être téléchargé à partir du gestionnaire de modules complémentaires FreeCAD.

III.3.1 FreeCAD

FreeCAD est une application de modélisation paramétrique CAO 3D. Il est principalement conçu pour la conception mécanique, mais sert également à toutes les autres utilisations où vous devez modéliser des objets 3D avec précision et contrôler l'historique de la modélisation.

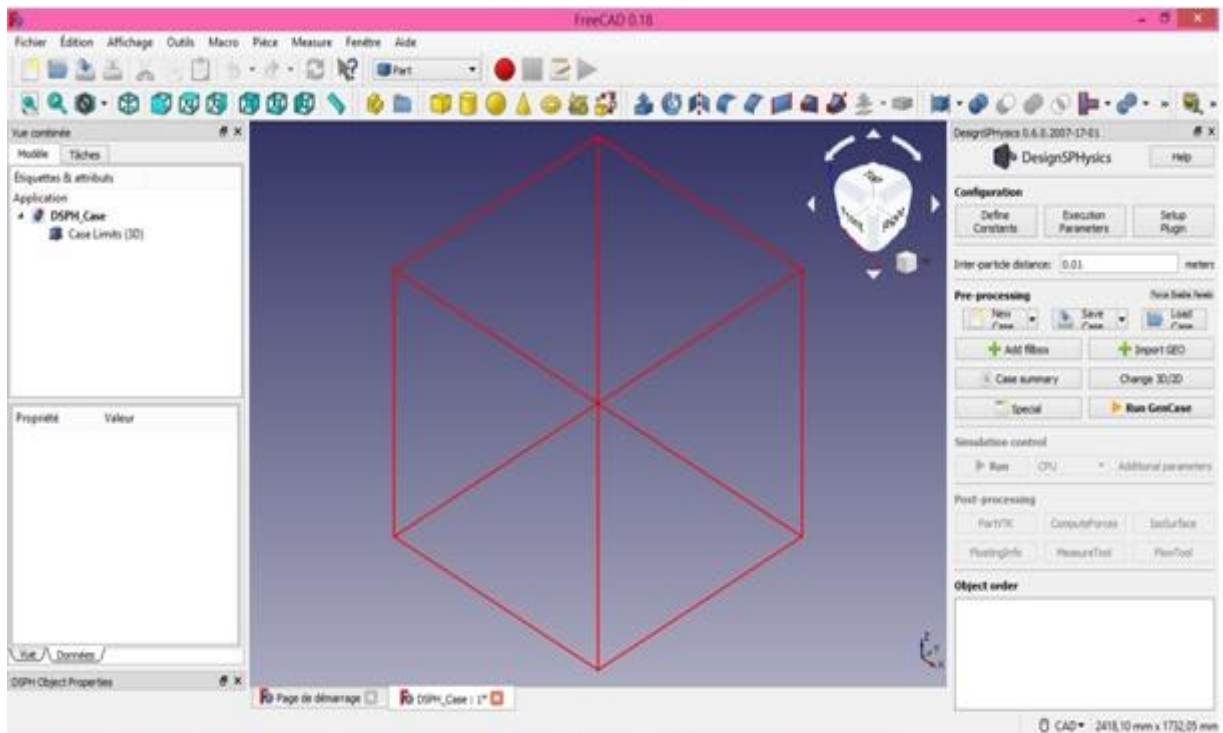


Figure III-2 : Fenêtre principale de DesignSPHysics sous Free CAD.

III.4 Étude numérique

Tous les problèmes sont traités sur la même machine ayant les performances suivantes :

Tableau III-1 : Propriétés de la machine utilisée pour le calcul.

Type de machine	Laptop Microsoft Surface Book
CPU	i7-6600 de 4 cœurs de 2.81GHz chacun
GPU	NVIDIA GeForce de 8G
RAM	16G
Système	64bit Windows 10
Refroidissement	Interne et un autre externe

III.5 Problème 1 : Champ de pression dans un réservoir statique

III.5.1 Description du problème :

Le premier problème est un problème statique de mécanique des fluides. C'est le problème de calcul de pression dans un réservoir sans fuite à surface supérieure libre. Il est relativement simple est connu dans la littérature scolaire, et il admet une solution analytique.

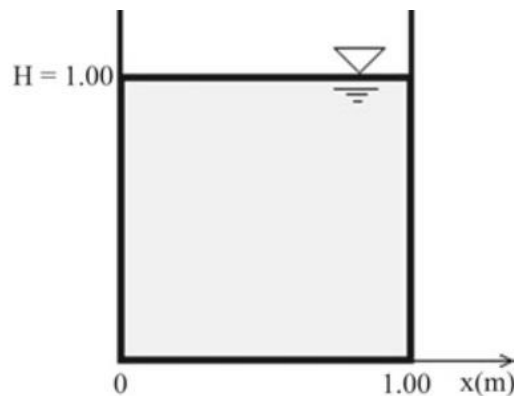


Figure III-3: Schéma du problème numéro 1.

III.5.2 Les paramètres physiques :

Les paramètres physiques sont comme suit :

1. Le réservoir est aux conditions atmosphériques de pression et de température
2. Le liquide qu'il contient c'est de l'eau
3. La forme du réservoir est cubique de 1m de longueur de chaque côté.
4. La simulation est faite en régime transitoire de 10s

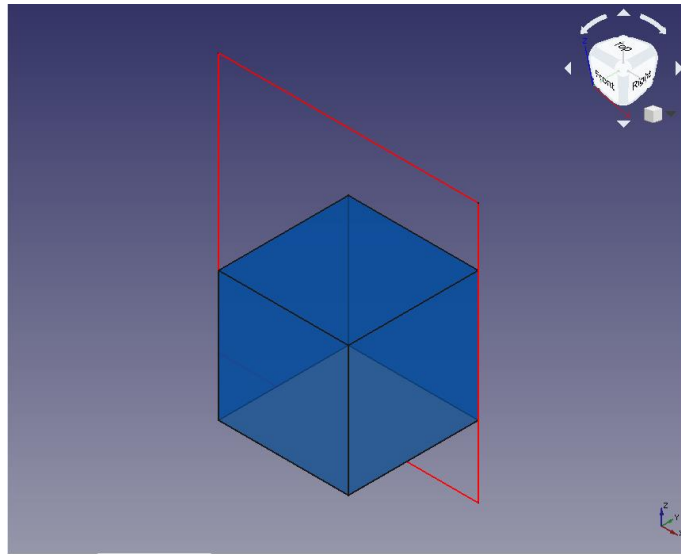


Figure III-4: Schéma du problème numéro 1.

Le problème est symétrique et peut être traité en 2D. La discrétisation 2D en 1681 particules est représentée sur la figure suivante

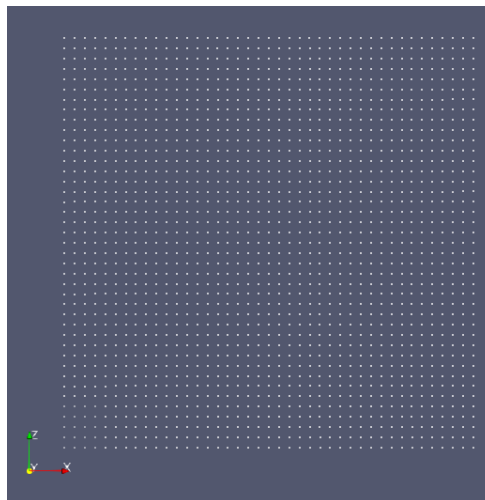


Figure III-5: La discrétisation 2D en 1681 particules.

III.5.3 Simulation :

Après 282s (ou 4.7min) de temps d'exécution de simulation sur la même machine le calcul converge vers la solution représentée sur la figure ci-dessous :

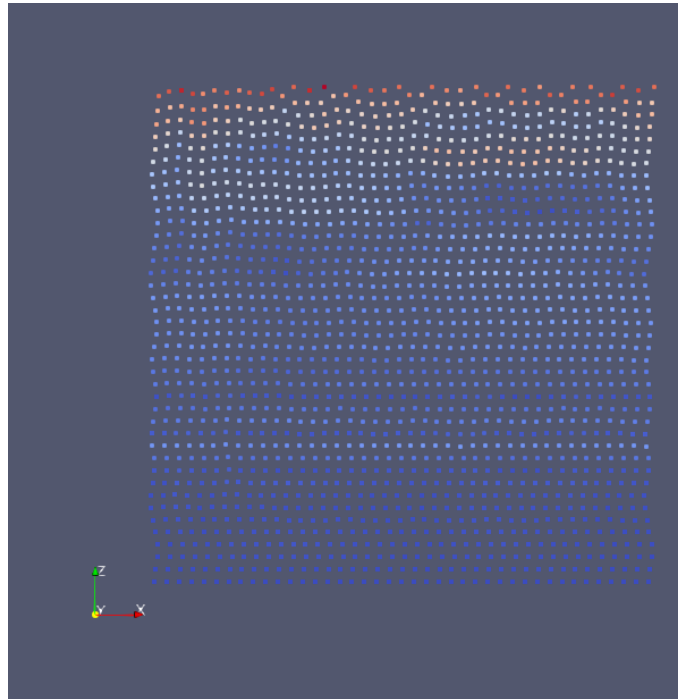


Figure III-6: La discrétisation 2D en 1681 particules.

Après environ 500 pas dans le temps, la pression statique dans le fond du réservoir se stabilise aux alentours de la pression 10206Pa

III.5.4 Validation par la solution analytique :

La solution analytique est disponible et elle est donnée par :

$$P = \rho gh \quad (\text{III.1})$$

$$P = 1000 \times 9.8 \times 1 \quad (\text{III.2})$$

$$P = 9800 \text{ Pa} \quad (\text{III.3})$$

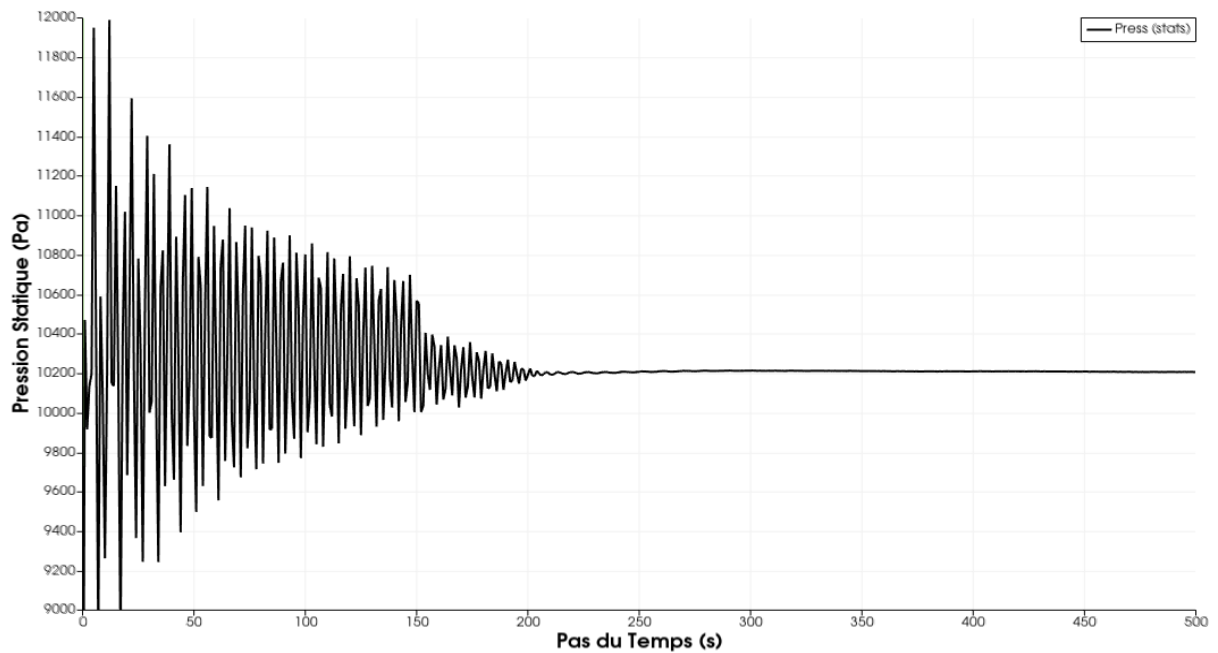


Figure III-7: Convergence de la pression dans le fond du réservoir.

Il est à noter que la pression est la variable la moins préférée à extraire par la méthode SPH à cause de l'agitation continue des particules. Cette agitation est difficile à éliminer et continue de faire un sujet de recherche.

III.5.5 Résultat et discussion :

L'erreur relative entre la solution numérique par SPH et la solution analytique est d'environ 4%, et elle peut être encore améliorée en augmentant le nombre des points ou particules (la résolution). Cependant ceci risque d'augmenter le temps d'exécution.

Ce problème simple qui admet une solution analytique est un moyen efficace pour introduire la méthode et montrer sa capacité à traiter des géométries continues.

III.6 Problème 2 : Effondrement d'un barrage

Dans le deuxième problème on considère l'écoulement d'une masse fluide, initialement retenue par un obstacle vertical (Figure III-8).

III.6.1 Description du problème :

Sous l'effet de la gravité la colonne d'eau s'effondre en formant un front qui se déplace rapidement le long du sol. Quand un mur est placé à l'extrémité opposée du domaine,

l'impact du front d'eau forme un jet vertical et s'effondre à nouveau. La surface libre subit ainsi plusieurs **fragmentations** et reconnections successives complexes.

Du point de vue mécanique, l'intérêt de cet écoulement réside dans sa nature instationnaire et surtout discontinue. Les phénomènes qui y sont rencontrés sont très similaires à ceux observés lors de tsunamis, ressauts hydrauliques, déferlements en mer ou encore lors du franchissement de structures marines.

Du point de vue modélisation, la méthode SPH est particulièrement intéressante sur ce cas, où le suivi des interfaces est complexe.

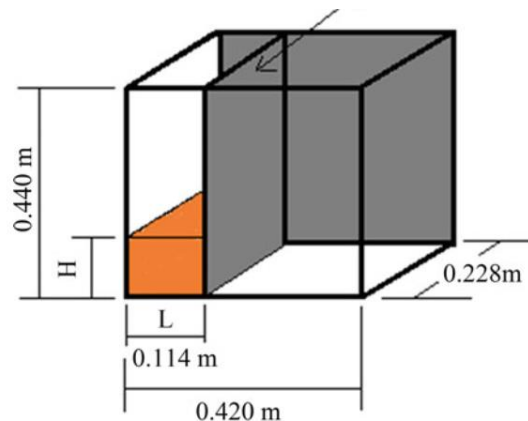


Figure III-8: Schéma du barrage en effondrement.

III.6.2 Les paramètres physiques :

Les paramètres physiques sont comme suit :

1. Le fluide considéré est l'eau ;
2. L'obstacle est instantanément enlevé ;
3. Les dimensions du problème sont décrites dans la Figure III-8 ;
4. La simulation est faite en régime transitoire sur une durée de 1.5s ;
5. Le problème est traité en 2D, avec 6560 particules.

III.6.3 Simulation :

Paramètres de la simulation :

Total Runtime.....: 1127.732788 sec

Particles of simulation (initial): 6560

Après 1128 s (environ 19 min) de temps d'exécution de simulation toujours sur la même machine le calcul converge vers la solution représentée sur la Figure III-9.

III.6.4 Validation par des résultats expérimentaux :

L'expérience est réalisée expérimentalement dans [22] et ses résultats sont utilisés pour valider ceux de notre étude. La comparaison est faite sur la base de l'évolution de la configuration géométrique en transitoire du fluide en écoulement.

III.6.5 Résultat et discussion :

La ressemblance est très claire dans la Figure III-9 entre les résultats expérimentaux (aussi numérique du même auteur) et ceux de notre étude. Cependant, on remarque un léger retard dans l'écoulement prédit par la SPH. Ceci peut être expliqué par le fait qu'il est impossible expérimentalement d'enlever l'obstacle instantanément et que cela se fait graduellement.

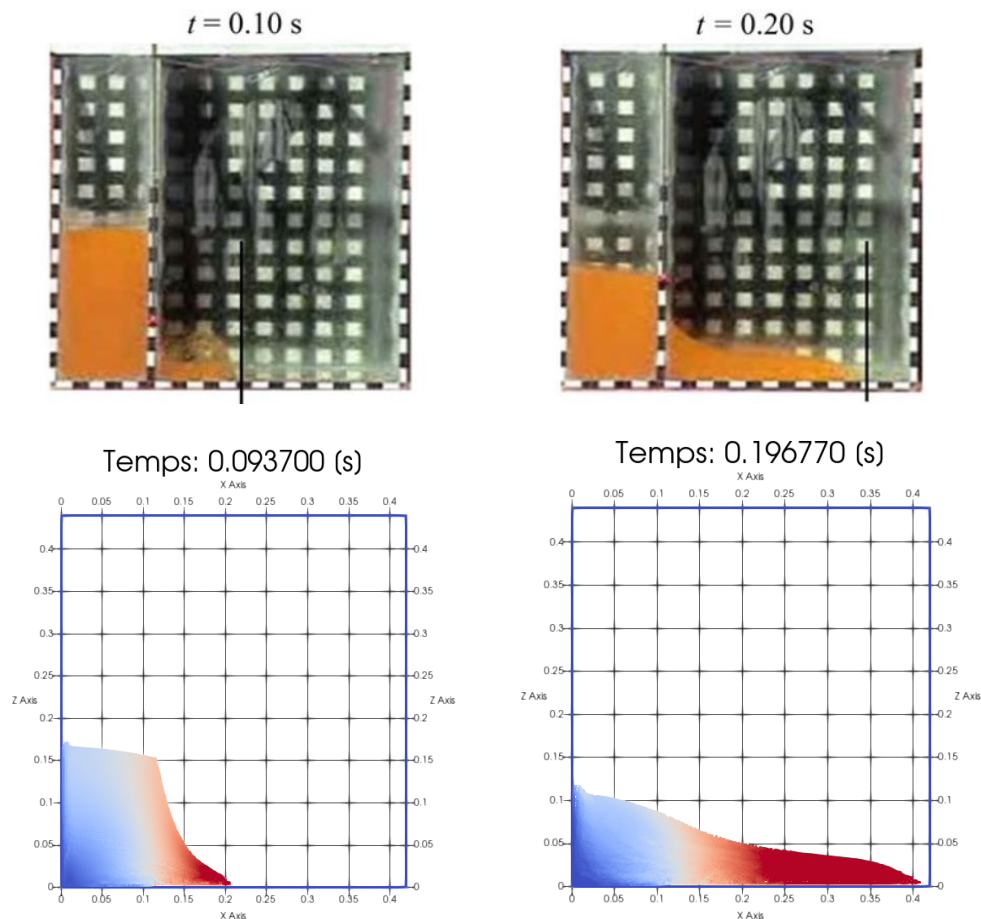


Figure III-9: Validation du modèle numérique par les résultats expérimentaux de Carlos Alberto Dutra Fraga Filho [22].

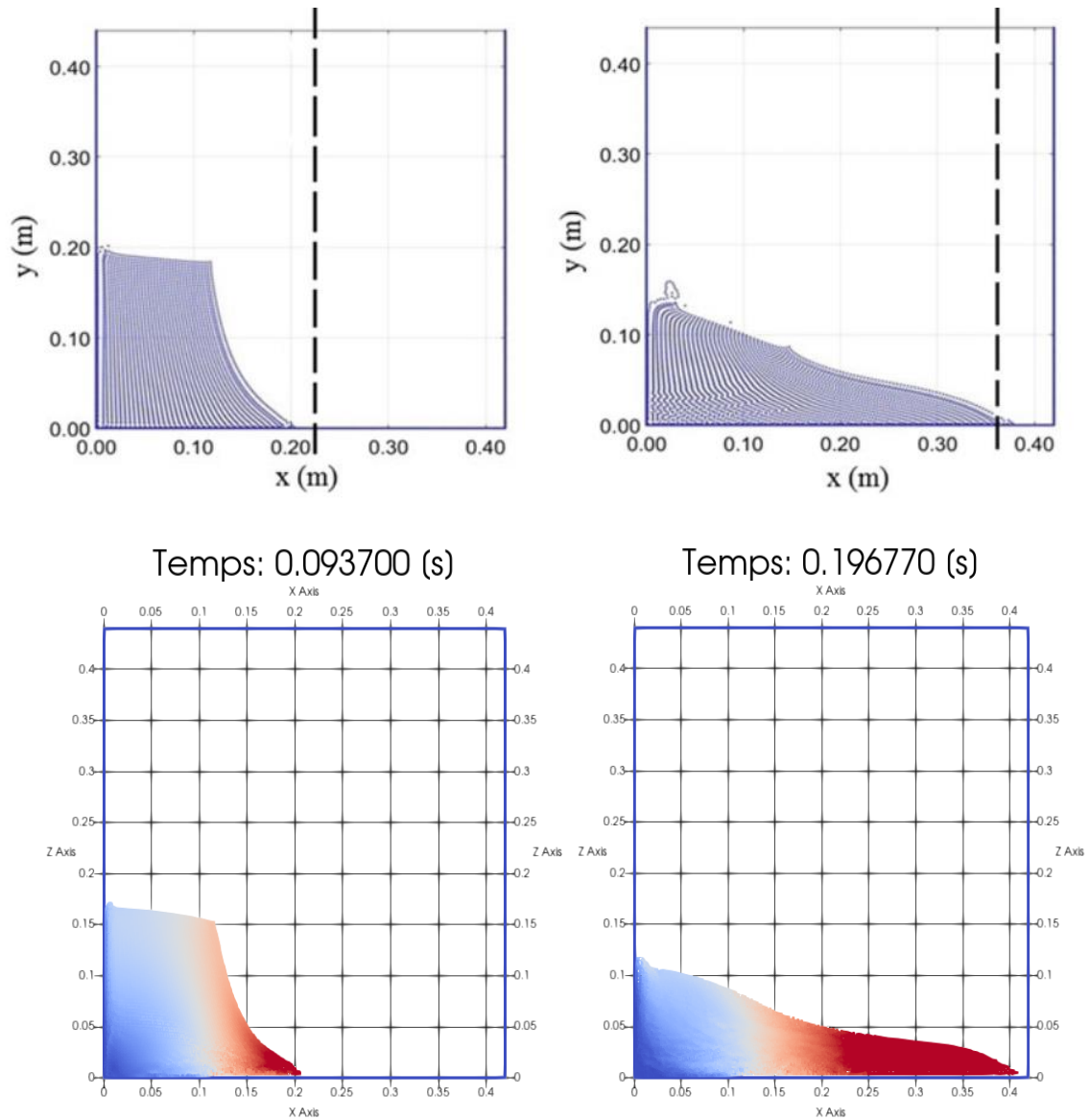


Figure III-10: Comparaison des résultats de la présente étude avec ceux numériquement obtenus par Carlos Alberto Dutra Fraga Filho [22].

Ce problème est extrêmement difficile à modéliser par une des méthodes à maillage comme les volumes ou les éléments finis. Ceci est dû au changement continu de la géométrie et des conditions aux limites ce qui complique la tâche importante de la génération du maillage qui doit se faire à chaque itération.

Ce problème typique peut être étendu à d'autres problèmes de la mécanique comme par exemple le ballotement des fluides dans les réservoirs en mouvement. Ce qui lui donne une grande importance dans la catégorie des écoulements à surface libre.

La couleur rouge : l'écoulement des particules est en vitesse ;
La couleur bleu : l'écoulement des particules est stable.

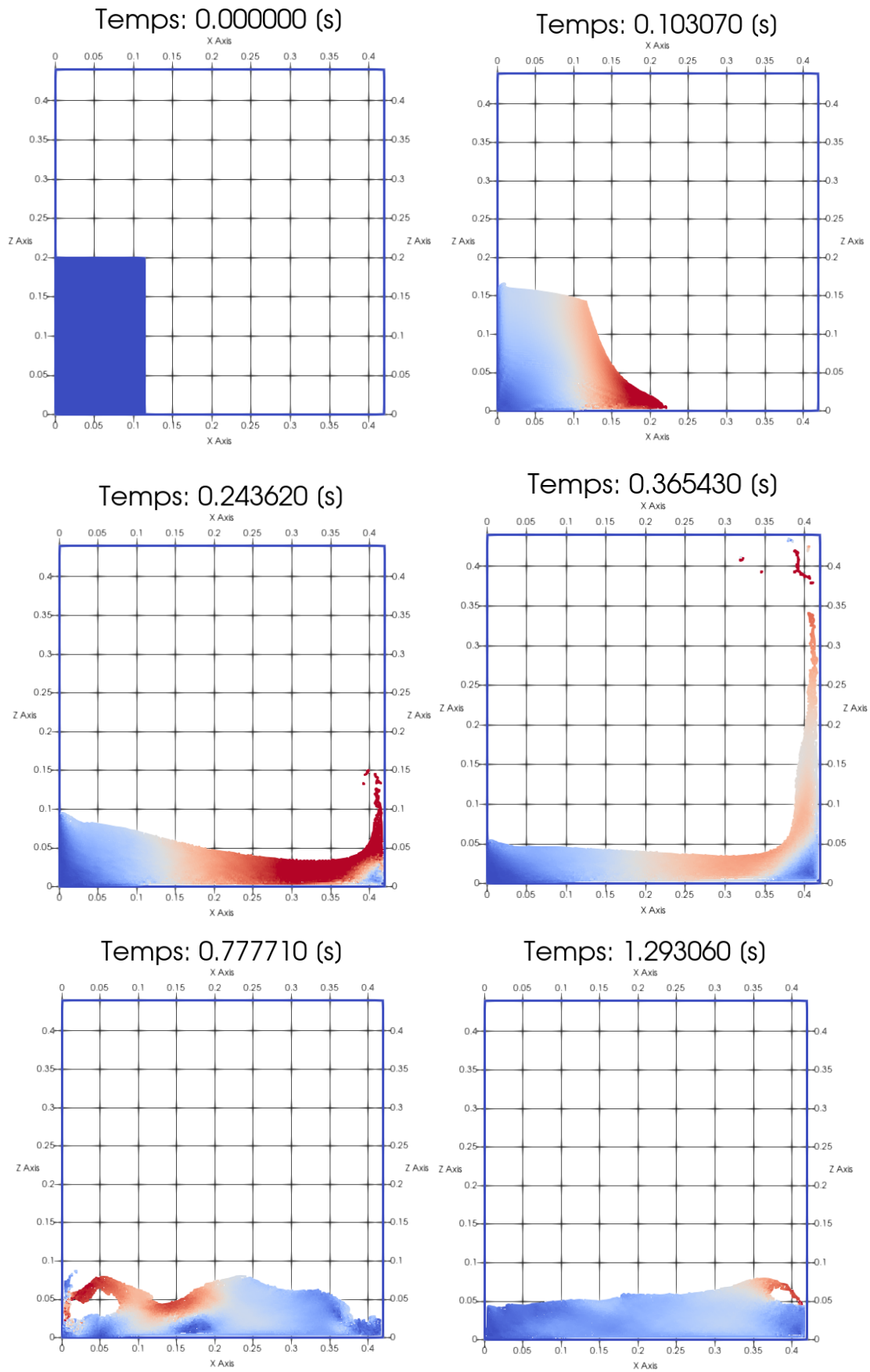


Figure III-11: Evolution de l'écoulement discontinu durant 1.3s.

III.7 Problème 3 : Impact (Splash) d'une goutte sur une surface libre liquide en 2D

L'impact de goutte est un phénomène qui peut être rencontré plus souvent qu'on ne le croit dans la nature ou dans de très nombreuses applications industrielles. L'impact de goutte se retrouve dans la peinture en spray, l'impression jet d'encre ou encore dans les chambres de combustion des moteurs.

Dans d'autres cas on souhaite maximiser la surface traitée et éviter les pertes à cause d'éventuels rebonds dus à la faible mouillabilité par exemple dans le traitement de revêtement des surfaces par projection thermique ou le traitement des plantes avec des pesticides.

Bien que ce soit un phénomène relativement familier, l'impact de goutte n'est pas simple à étudier. Il a fallu attendre le développement des outils numériques et des caméras rapides à la fin du vingtième siècle pour pouvoir être en mesure de faire des études sérieuses de ce problème.

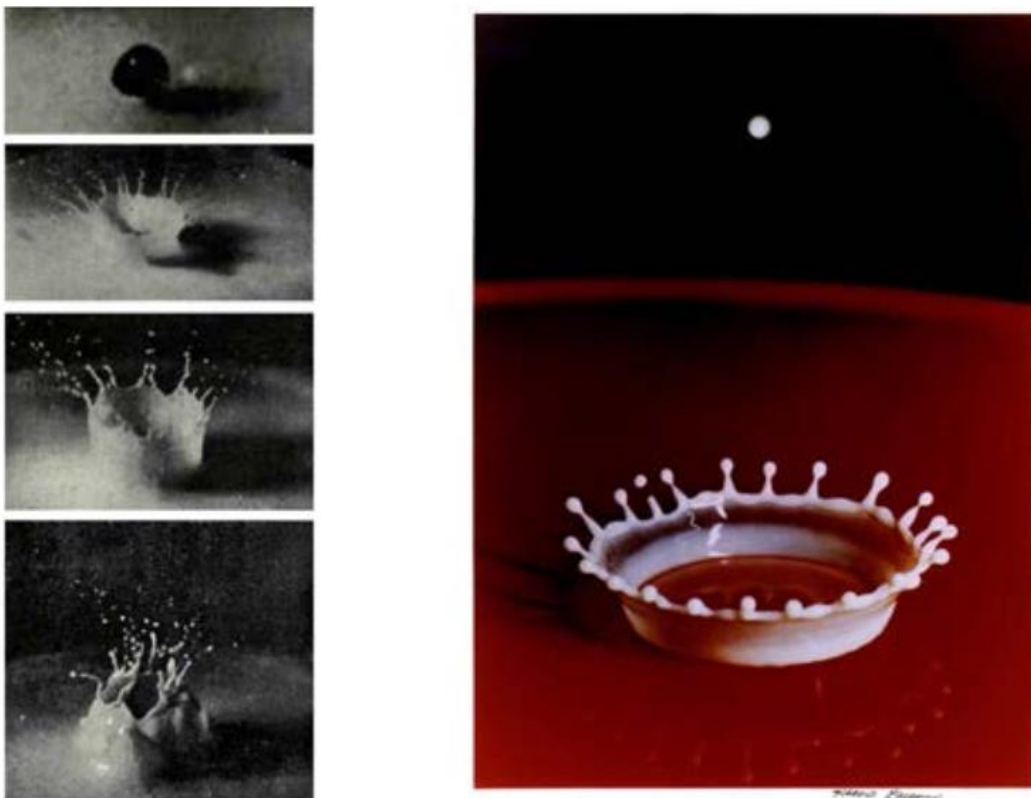
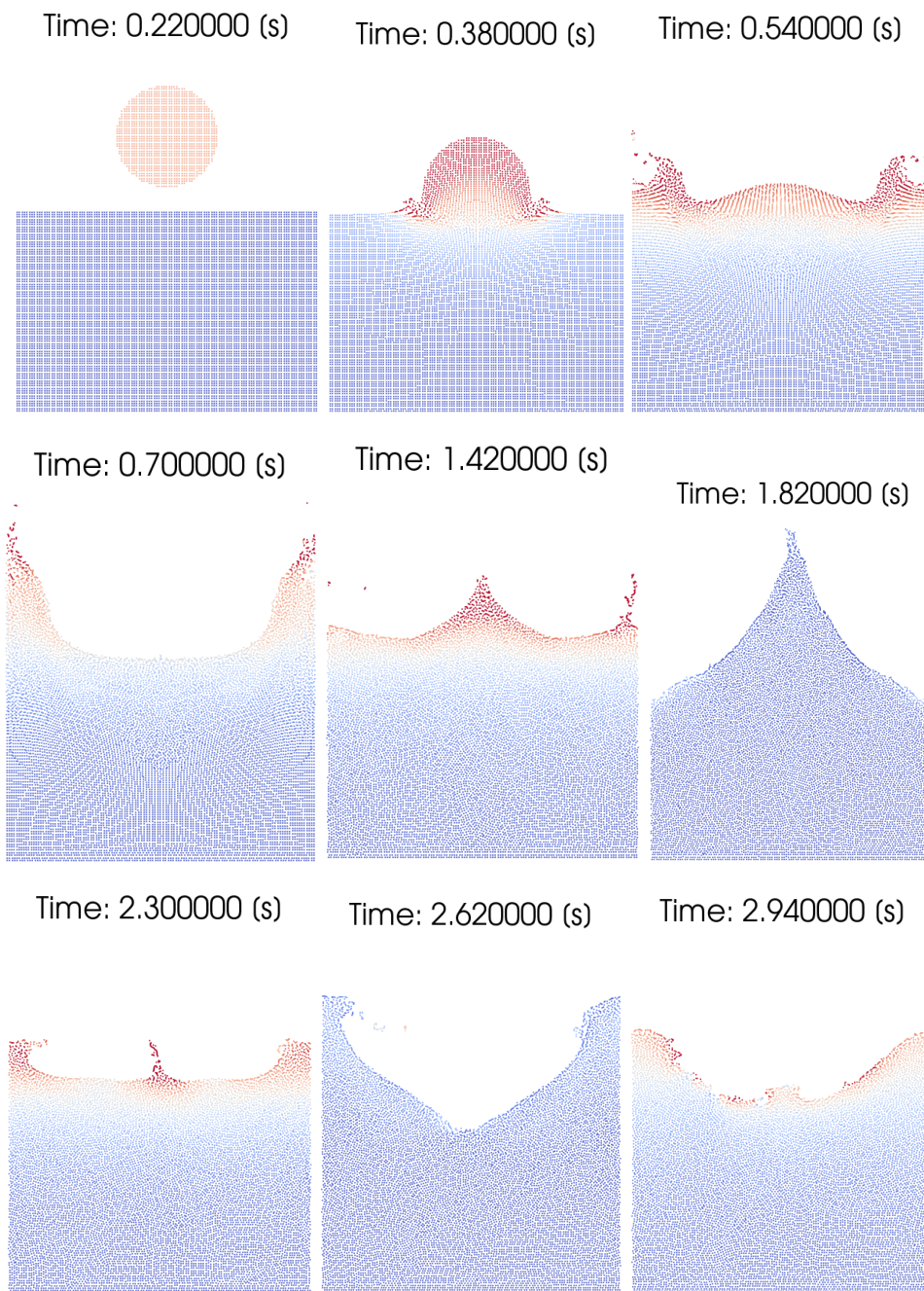


Figure III-12: Forme du splash de gouttelette sur des surfaces libres liquides.

III.7.1 Les paramètres physiques :

Les paramètres physiques sont comme suit :

6. Le fluide considéré est l'eau (la goutte et le fluide dans le récipient) ;
7. La simulation est faite en régime transitoire sur une durée de 6s ;
8. Le problème est traité en 2D.



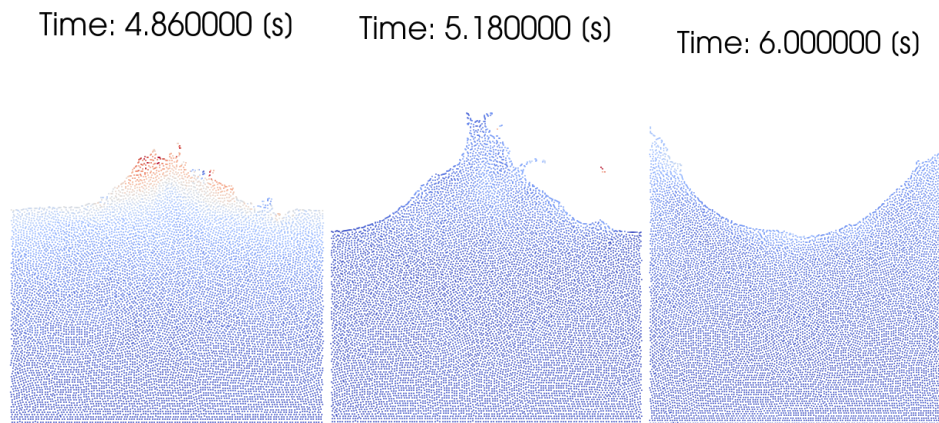


Figure III-13: Evolution de l'écoulement discontinu durant 6s.

Ce dernier problème est encore plus compliqué que le précédent, vu que la goutte en chute peut être de nature différente que celle de la surface sur laquelle elle se heurte :

1. Les deux peuvent être des fluides de la même espèce (comme le cas étudié) ;
2. Les deux peuvent être des fluides mais non miscibles ;
3. Un peut être fluide et l'autre solide.

Le problème montre la puissance de la méthode SPH qui peut traiter ce genre de problème, et ceci de façon naturelle sans aucune adaptation de la méthode.

**CONCLUSION
GENERALE**

CONCLUSIONS

En conclusion, L'objectif de ce mémoire est d'introduire la méthode **Smoothed Particle Hydrodynamics** (SPH) qui est purement lagrangienne et relativement nouvelle.

Dans une étape introductive de ce travail nous avons présenté la mécanique des fluides numérique, qui traite les méthodes avec et sans maillage et leur importance dans la modélisation. Nous avons vu aussi que la mise en œuvre des méthodes avec maillage est très difficile et coûteuse lors de leur application aux écoulements à surface libre et cela est dû au re-maillage continu du domaine étudié.

De ce fait, et dans le but de résoudre ses problèmes, des nouvelles techniques sans maillage en vu le jour.

Dans ce mémoire on a présenté la méthode numérique **Smoothed Particle Hydrodynamics** ou SPH, comme une solution radicale aux difficultés liées au maillage.

Les points suivants sont évoqués :

- Le principe de la méthode ;
- Le domaine d'application ;
- Les avantages et les inconvénients ;
- La fonction de forme de la méthode ;
- L'application de la méthode à la mécanique des fluides ;
- Les techniques de stabilisation ;
- Les conditions aux limites...etc.

Trois cas pratiques ont été traités pour montrer la puissance de la méthode à traiter des écoulements discontinus :

1. Réservoir avec une surface libre ;
2. Effondrement d'un barrage ;
3. Impact SPLASH d'une goutte d'eau.

En perspective, et pour intégrer la méthode à l'axe de recherche en tribologie de notre département, on propose l'application de la méthode aux écoulements fluides avec des impuretés solide, les nano-fluides ou les écoulements micro-polaires. Ceci permettra d'analyser plus en détail la dynamique des particules durant l'écoulement contrairement aux modèles approximatifs en milieu continu.

REFERENCES
BIBLIOGRAPHIQUES

REFERENCES

- [1] **M.-B. Liu et G. R. Liu**
Particle methods for multi-scale and multi-physics.
New Jersey, World Scientific (2016).
- [2] **J-M Cherfils**
Développements et applications de la méthode SPH aux écoulements visqueux à surface libre, Mécanique.
Université de Havre (2011).
- [3] **R. G. K. Noutcheuwa**
Une nouvelle méthode smoothed particle hydrodynamics : simulation des interfaces immergées et de la dynamique Brownienne des molécules avec des interactions hydrodynamiques.
Université de Montréal (2012).
- [4] **F. Caleyron**
Simulation numérique par la méthode SPH de fuites de fluide consécutives à la déchirure d'un réservoir sous impact.
INSA de Lyon (2011).
- [5] **B. Solenthaler**
Predictive-Corrective Incompressible SPH.
University of Zurich-Suisse (2009).
- [6] **M. Ihmsen, N. Akinci, M. Gissler, et M. Teschner**
Boundary Handling and Adaptive Time-stepping for PCISPH.
Université de Fribourg-Allemagne (2010).
- [7] **K. Bodin, C. Lacoursière, et M. Servin**
Constraint fluids.
Université d'Umeå- Suède (2011).

- [8] **N. Akinci, M.Ihmsen, G.Solenthaler, M.Teschner et G. Akinci**
Versatile rigid-fluid coupling for incompressible SPH.
ACM Transactions on Graphics (2012).
- [9] **M. Macklin, M Müller**
Position based fluids.
ACM Transactions on Graphics, (2013).
- [10] **N. Akinci, G. Akinci, et M. Teschner**
Versatile surface tension and adhesion for SPH fluids.
Université de Fribourg-Allemagne (2013).
- [11] **Mahdavi et N. Talebbeydokhti**
A hybrid solid boundary treatment algorithm for smoothed particle hydrodynamics.
Université de technologie de Sharif-Iran 2015.
- [12] **B.Maroua et B.Sihem**
Simulation de la coalescence des objets compacts.
université de Batna (2019).
- [13] **X. Lu**
Simulations numériques de l'action de la houle sur des ouvrages marins dans des conditions hydrodynamiques sévères.
université de normandie-France (2016).
- [14] **M. K. Mohammed**
Analyse des problèmes d'élasticité plane par la méthode sans maillage.
Université d'USTO-Oran (2013).

[15] **O. Cadot**

Introduction à la turbulence, cours de l'ENSTA.

École d'ingénieur Paris Tech-France (2015).

[16] **J.-F. Sini**

Cours de Mécanique des Fluides.

Engineering school-France (2006).

[17] **R. A. Ibrahim**

Liquid Sloshing Dynamics : Theory and Applications.

New York : Cambridge University Press (2005).

[18] **G.Romain**

Modélisation globale de l'alimentation d'une emprise lubrifiée par émulsion : simulation numérique directe et analyse physique des phénomènes.

Université de Bordeaux (2010).

[19] **B. Savary**

Panorama de la projection thermique.

France, 2012.

[20] **R. Gingold et J. Monaghan**

Kernel estimates as a basis for general particle methods in hydrodynamics.

Journal of Computational Physics.

[21] **D.Régis**

Modélisation d'impacts par la méthode particulaire SPH Etude de cas.

Université Pierre et Marie CURIE.

[22] **C. A. D. F. Filho**

Smoothed Particle Hydrodynamics : Fundamentals and Basic Applications in Continuum Mechanics.

Springer, (2018).

Résumé

Dans ce travail, nous avons présenté une étude descriptive de la méthode numérique sans maillage l'hydrodynamique des particules lissée (SPH).

Après, une présentation de l'état de l'art de la méthode, on a défini le modèle mathématique de la construction des fonctions de forme du SPH, avec son application à la dynamique des fluides tel que les équations de Navier-stokes.

Nous avons fait une étude de trois problèmes des écoulements discontinus avec de code de calcul DeseignSPHysics.

Mots-clés : hydrodynamique des particules lissée (SPH), sans maillage, surface libre, dynamique des fluides, écoulement discontinu, DeseignSPHysics.

Abstract

In this work, we introduce a descriptive study of meshless numerical method for smoothed particle hydrodynamics (SPH).

After a presentation of the state of the art of the method, we defined the mathematical model of SPH shape function construction and applied it to fluid dynamics (such as Navier-stokes equation).

We made a study of three discontinuous flow problems with DeseignSPHysics compute code.

Keywords: smooth particle hydrodynamics (SPH), meshless, free surface, hydrodynamics, discontinuous flow, DeseignSPHysics.

ملخص

في هذا العمل، قدمنا دراسة وصفية للطريقة العددية غير المتشابكة للديناميكا المائية للجسيمات الملساء (SPH).

بعد عرض تقديمي لحالة فن الطريقة، حددنا النموذج الرياضي لبناء وظائف الشكل لـ SPH، مع تطبيقه على ديناميكيات السوائل مثل معادلات Navier-stokes.

لقد قمنا بدراسة ثلاثة مشكلات تدفق متقطعة باستخدام كود حساب DeseignSPHysics.

الكلمات المفتاحية: الديناميكا المائية للجسيمات الملساء (SPH)، بدون شبكة، سطح حر، ديناميكيات السوائل، التدفق غير المستمر، DeseignSPHysics.