

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique



Université Ibn Khaldoun de Tiaret
Faculté des Sciences Appliquées
Département de Génie Mécanique



MÉMOIRE DE FIN D'ETUDES

Pour l'obtention du Diplôme de Master

Domaine : Sciences et Technologie

Filière : Génie Mécanique

Parcours : Master

Spécialité : Énergétique

Thème

Etude des limites du modèle standard de la conduction thermique dans les milieux granulaires par éléments finis

Préparé par : **M. OUHIBA Abdelhakim Salaheddine**

Soutenu publiquement le : 28 / 10 / 2020, devant le jury composé de :

| | | |
|--------------------|--|-----------|
| M. KARAS.A | Maître de Conférences "A" (Univ. Ibn Khaldoun) | Président |
| M. BOUZIDANE.A | Professeur (Univ. Ibn Khaldoun) | Examineur |
| M. BENARIBA.A | Maître Assistant "B" (Univ. Ibn Khaldoun) | Examineur |
| M. ABOUSHIGHIBA .H | Maître de Conférences "B" (Univ. Ibn Khaldoun) | Encadreur |

Remerciement

Je remercie d'abord ALLAH le tout puissant.

Je tiens à remercier aussi mon encadreur Dr. Aboshighiba Hicham pour m'avoir suivi et aidé durant la réalisation de ce travail, ainsi que les membres du jury d'avoir accepté de le juger.

Je remercie aussi l'ensemble du staff pédagogique et administratif du département du génie mécanique

Dédicaces

Je dédie ce travail à ma famille et Jack Donovan, Patrick McNamara.

TABLE DES MATIERES

| | |
|---|------|
| REMERCIEMENTS..... | ii |
| DEDICACES..... | iii |
| TABLE DES MATIERES..... | iv |
| LISTE DES FIGURES..... | vi |
| LISTE DES TABLEAUX | vii |
| NOMENCLATURE..... | viii |
| TABLE DES ABRÉVIATIONS..... | x |
| INTRODUCTION..... | 1 |
| CHAPITRE I : RECHERCHE BIBLIOGRAPHIQUE..... | 2 |
| I.1. Milieu granulaire | 2 |
| I.1.1. Définition | 2 |
| I.2. Milieu continu | 3 |
| I.3. Relation entre le milieu continu et le milieu granulaire | 3 |
| I.4. Généralités sur la conduction thermique..... | 4 |
| I.4.1. Principe du transfert de chaleur | 4 |
| I.4.2. Les modes de transferts thermiques..... | 5 |
| I.4.3. Conduction thermique | 5 |
| I.4.3.1. Le concept de continuité | 7 |
| I.4.3.2. Le flux de chaleur et la température..... | 7 |
| I.4.3.3. Gradient de température..... | 9 |
| I.4.3.4. Conductivité thermique..... | 10 |
| I.4.3.5. Diffusivité thermique | 12 |
| I.4.3.6. La Résistance aux contacts | 12 |
| I.5. Conduction thermique dans un milieu granulaire | 13 |
| I.6. Le nombre de Biot pour l’analyse thermique..... | 14 |
| CHAPITRE II : LES METHODES NUMERIQUES A MAILLAGE..... | 16 |
| II.1. Introduction..... | 16 |
| II.2. Méthode des différences finies | 16 |
| II.2.1. Principe..... | 17 |
| II.2.2. Techniques de maillage | 18 |

| | |
|---|----|
| II.2.3. Domaines d'applications | 19 |
| II.2.4. Avantages et inconvénients | 19 |
| II.3. Méthode des volumes finis | 19 |
| II.3.5. Principe..... | 21 |
| II.3.6. Techniques de maillage | 21 |
| II.3.7. Domaines d'applications | 22 |
| II.3.8. Avantages et inconvénients | 22 |
| II.4. Méthode des éléments finis..... | 22 |
| II.4.9. Principe..... | 23 |
| II.4.10. Techniques de maillage | 24 |
| II.4.11. Domaines d'applications | 25 |
| II.4.12. Avantages et inconvénients | 26 |
| CHAPITRE III : LIMITES DU MODELE STANDARD | 28 |
| III.1. Introduction | 28 |
| III.2. Les paramètres géométriques | 28 |
| III.3. Le modèle numérique par la méthode des éléments finis..... | 30 |
| III.3.13. Le maillage..... | 31 |
| III.4. Les résultats du modèle éléments finis | 34 |
| III.5. Influence du nombre des particules : | 35 |
| III.6. Conclusion : | 43 |
| CONCLUSIONS | 45 |

LISTE DES FIGURES

| | |
|---|----|
| Figure III-1: Modèle réaliste. | 28 |
| Figure III-2: Modèle approximatif. | 29 |
| Figure III-3: Le géométrie du modèle dans Ansys | 30 |
| Figure III-4: Le maillage des deux particules en contact, zone de contact 5mm | 32 |
| Figure III-5: Le maillage des deux particules en contact, zone de contact 3mm | 32 |
| Figure III-6: Le maillage des deux particules en contact zone de contact 1mm | 33 |
| Figure III-7: Le maillage des deux particules en contact zone de contact 0.001mm | 33 |
| Figure III-8: Zone de contact 5mm grande par rapport aux rayons des deux sphères. | 34 |
| Figure III-9: Zone de contact 3mm moyenne par rapport aux rayons des deux sphères. | 34 |
| Figure III-10: Zone de contact 1mm très petite par rapport aux rayons des deux sphères. ... | 35 |
| Figure III-11: Zone de contact 0.001mm extrêmement petite par rapport aux rayons des deux sphères. | 35 |
| Figure III-12: Maillage du modèle à deux particules | 36 |
| Figure III-13: Maillage du modèle à trois particules | 36 |
| Figure III-14: Maillage du modèle à quatre particules | 37 |
| Figure III-15: Maillage du modèle à cinq particules | 37 |
| Figure III-16: Etat thermique des deux particules après 10s | 38 |
| Figure III-17: Etat thermique des trois particules après 10s..... | 38 |
| Figure III-18: Etat thermique des quatre particules après 10s | 39 |
| Figure III-19: Etat thermique des cinq particules après 10s | 39 |
| Figure III-20: Evolution du nombre des nœuds en fonction du nombre des particules. | 41 |
| Figure III-21: Evolution du nombre des éléments en fonction du nombre des particules..... | 41 |
| Figure III-22: Evolution de la mémoire nécessaire aux calculs en fonction du nombre des particules. | 42 |
| Figure III-23: Evolution du temps des simulations en fonction du nombre des particules. ... | 42 |

LISTE DES TABLEAUX

Tableau III.1 : Paramètres du modèle numérique..... 29
Tableau III.2 : Propriétés de la machine utilisée pour le calcul 31
Tableau III.3 : Le temps de simulation et la mémoire allouée par simulation 40

NOMENCLATURE

| | | |
|---------------------------------|--------------------------------------|----------------------|
| μ | Viscosité dynamique. | [Pa. s] |
| ρ | Masse volumique. | [kg/m ³] |
| ϑ | Viscosité cinématique. | [m ² /s] |
| D | Diamètre. | [m] |
| H | Longueur de lissage. | [m] |
| i, j | Les indices des particules. | |
| x_i, x_j | La position des particules. | |
| Bi | Nombre de Biot. | |
| v_i, v_j | Les volumes des particules. | [m ³] |
| m | La masse. | [Kg] |
| k | La conductivité thermique. | [W/m · °C] |
| \hat{i}, \hat{j} et \hat{k} | Les vecteurs de direction unitaires. | |
| \vec{n} | Vecteur unitaire de la normale. | |
| C_p | La chaleur spécifique. | [J/kg · °C] |
| \bar{c} | La vitesse moyenne du son. | |
| α | Diffusivité thermique. | |
| Q_{ij} | La quantité de chaleur. | [J] |
| T_i, T_j | Les températures des particules . | [°C] |
| L | La dimension caractéristique. | [m] |
| A | La surface externe. | [m ²] |
| Ω | Le domaine. | |
| Δ_h^k | L'approximation de l'opérateur | |

différentiel.

| | | |
|-----------|------------------------------|---------------|
| Rg | Rayon de la sphère à gauche. | [<i>mm</i>] |
| Rd | Rayon de la sphère à droite. | [<i>mm</i>] |
| Rh | Rayon de la sphère en haut. | [<i>mm</i>] |

TABLE DES ABRÉVIATIONS, SIGLES ET ACRONYMES

| | | |
|------------|--|--|
| MED | Méthode des E lément D iscrets. | |
| CFD | Computational F luid D ynamics. | Dynamique des fluides computationnelle. |
| MEF | Méthode des E lément F inis. | |
| DNS | D irect N umerical S imulation. | Simulation des grandes structures de la turbulence. |
| MVS | Méthode des V olumes F inis. | |
| EDP | Equation aux D érivées P artielles. | |

**INTRODUCTION
GENERALE**

INTRODUCTION GENERALE

Les milieux granulaires sont partout autour de nous, et l'étude des phénomènes thermiques y régnant est d'une importance majeure. On les trouve dans les procédés mécaniques qui utilisent les poudres, l'agriculture, l'industrie pharmaceutique et d'autre. Trouver la solution analytique exacte pour un problème de transfert thermique n'est possible que pour très peu de cas académiques simples. Dès que le modèle étudié devient un peu réaliste d'un point de vu géométrique ou nature physique (paramètres non linéaire...) toute tentative de résolution doit passer obligatoirement par les méthodes numériques approximatives.

On peut classer les méthodes numériques selon plusieurs critères. Si on considère le maillage on peut distinguer :

- Les méthodes à maillage
- Les méthodes sans maillage.

Les milieux granulaires qui sont des assemblées de grains indépendants, sont difficiles à modéliser que ça soit à cause de la complexité de leur évolution géométrique c'est-à-dire leur écoulement ou la complexité des interactions physiques qu'ils font intervenir. La difficulté majeure dans leur modélisation réside dans le nombre important de leurs particules.

Le but de cette étude se résume en deux points :

Le premier c'est d'étudier les limites du modèle standard à modéliser le transfert thermique par conduction dans les milieux granulaires. Par modèle standard on veut dire les modèles utilisant les méthodes numériques à maillage.

Le deuxième c'est de vérifier l'hypothèse de l'homogénéité de la température au sein des grains lorsque le nombre dit de Biot est très petit.

Cette étude va en parallèle avec deux autres études effectuées dans le même département une dans la spécialité Energétique et une autre dans la spécialité Construction. La première exploite directement l'hypothèse de l'homogénéité du champ de la température pour introduire la méthode des éléments discrets. La deuxième traite les milieux granulaires dans un contexte de cinématique sans apport de chaleur. L'idée c'est de réunir les 3 études pour traiter le transfert de chaleur dans un milieu granulaire en « écoulement ».

Notre étude est organisée en trois chapitres. Le premier présente une recherche bibliographique sur les milieux granulaire et les concepts de base de transfert thermique.

Ensuite, dans le chapitre II les différentes méthodes classiques à maillage : méthode des différences finies, méthode des volumes finis et méthode des éléments finis, sont présentées.

La méthode des différences finies présente un handicap majeur à représenter les géométries ayant des courbures. Entre les deux autres méthodes nous avons opté pour celle des éléments finis sous la suite de Logiciel Ansys pour la simplicité de sa mise en œuvre.

Le dernier chapitre, c'est-à-dire le troisième, est consacré à l'étude des différentes configurations géométriques des grains et la comparaison entre les exigences en termes de ressources de calcul (temps de calcul, mémoire...) pour chaque scénario.

Ce mémoire est terminé par une conclusion générale dédiée aux conclusions où nous en tirons les plus importantes et nous proposons les perspectives à suivre pour un travail futur.

CHAPITRE I
LES MILIEUX
GRANULAIRES

CHAPITRE I : RECHERCHE BIBLIOGRAPHIQUE**I.1. Milieu granulaire****I.1.1. Définition**

Un milieu granulaire est constitué d'un ensemble de particules discrètes. Il présente des propriétés différentes des trois phases standards (gaz, liquide, solide). Les particules sont caractérisées par leur taille, forme, rugosité, densité... Toutes ces propriétés physicochimiques influencent fortement l'arrangement des particules, ce qui change le comportement dynamique et statique du milieu granulaire [1]. Les milieux granulaires sont soumis à diverses définitions en raison de leur comportement complexe. Un milieu granulaire avec une taille de particule généralement inférieure à 100 μm [2].

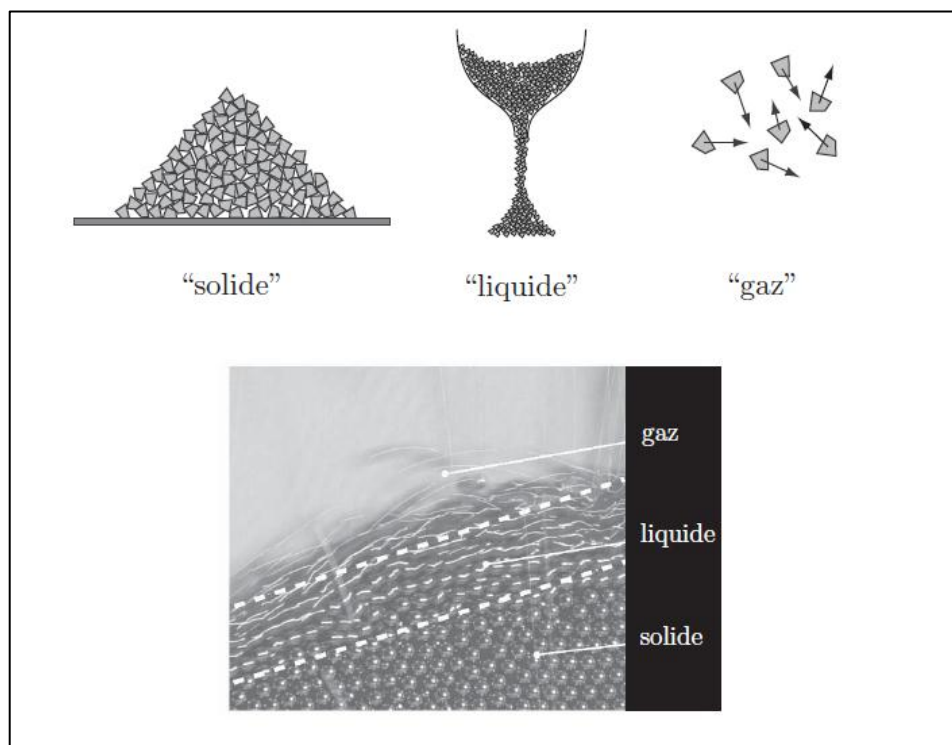


Figure I-1 : Les milieux granulaires peuvent se comporter comme un solide, un liquide ou un gaz selon le mode de sollicitation. Ces trois « états » peuvent également coexister dans une même configuration comme lors de l'écoulement de grains sur un tas (photographie).

Les matériaux géotechniques comprennent généralement un milieu granulaire composé de particules, et leur interaction est principalement affectée par le frottement et la viscosité entre les particules. Selon les méthodes de modélisation couramment utilisées pour ces matériaux, les milieux granulaires peuvent être considéré comme dualiste : continue et discrète. D'une part, leur caractère continu ont certainement permis le développement de puissantes propriétés phénoménologiques relations constitutives viscoélastiques, conduisant à une la modélisation par éléments finis des structures d'ingénierie [3].

I.2. Milieu continu

Le milieu continu c'est un moyen qui nous permet d'observé la déformation du solide et l'écoulement d'un fluide à l'échelle macroscopique [4].

La nature continue de ces propriétés des matériaux est mieux illustrée par la masse m , qui est définie comme une fonction continue du volume par l'introduction de la densité ρ et V qui est le volume.

$$\rho = \frac{dm}{dV} \quad (I.1)$$

L'hypothèse de continuité permet de définir les propriétés physiques de la matière comme des fonctions continues de volume [5].

I.3. Relation entre le milieu continu et le milieu granulaire

Du point de vue macroscopique, on peut considérer le milieu granulaire comme un milieu continu, mais il est nécessairement discontinu localement à une échelle intermédiaire entre l'échelle macroscopique et celle du grain. L'idée d'un milieu continu est fondamentale dans les théories déterministes, en fait l'hypothèse de continuité ne correspond à aucun milieu granulaire réel, et tous ces corps sont discontinus sur le plan microscopique. A partir de ce qui précède, on voit qu'il est intéressant d'étudier les milieux granulaires considérés comme discontinus par une approche probabiliste puisque l'empilement des grains est aléatoire et les propriétés locales au sein du milieu peuvent différer considérablement d'une région à une autre. Cela constitue l'une des difficultés essentielles pour une définition mathématique rigoureuse des variables locales telles que le tenseur des contraintes [6].

L'hypothèse de continuité équivaut à l'existence d'une échelle qui définit les dimensions d'un volume élémentaire qui, par un processus d'homogénéisation, permet de passer à un milieu continu fictif de même comportement global que le milieu granulaire étudié à l'aide du premier gradient en général. Par contre, à une échelle d'observation pour laquelle les grains sont discernables à l'œil nu, l'hypothèse de continuité n'a plus de sens dès lors qu'il s'agit de donner une explication à des phénomènes globaux tels que la dilatance ou les désordres d'orientation des plans de rupture. Ces phénomènes sont pourtant, toujours perceptibles dans l'étude des matériaux composés des grains élémentaires qui n'interagissent entre eux que par les efforts de contact en des points d'un ensemble discret. Certains sols (sables, graviers, enrochements ...) font partie de cette catégorie de matériaux ainsi que la plupart des produits pharmaceutiques et agricoles ensilés dont la structure repose sur leur propre poids et les parois qui les limitent [7].

I.4. Généralités sur la conduction thermique

I.4.1. Principe du transfert de chaleur

Transfert thermique, Lorsque deux systèmes sont à des températures différentes, le système le plus chaud cède de la chaleur au plus froid. Il y a échange thermique ou encore transfert thermique entre ces deux systèmes. Cette situation se rencontre dans de nombreuses situations industrielles (moteurs thermiques ou même électriques, centrales électriques au fuel au gaz, etc...., électronique) ou domestique (chauffage de l'habitat).

Le transfert de chaleur est la science qui cherche à prédire le transfert d'énergie qui peut avoir lieu entre des corps matériels à la suite d'une différence de température. La thermodynamique enseigne que ce transfert d'énergie est défini comme de la chaleur. La science du transfert de chaleur ne cherche pas seulement à expliquer comment l'énergie thermique peut être transférée, mais aussi à prédire la vitesse à laquelle l'échange aura lieu dans certaines conditions spécifiques. Le fait qu'un transfert de chaleur est l'objectif souhaité d'une analyse met en évidence la différence entre le transfert de chaleur et la thermodynamique [8].

La thermodynamique, une autre branche de la science de l'ingénierie, étudie les interactions entre la chaleur et le travail d'un système et son environnement, et définit la chaleur comme la forme d'énergie qui franchit la limite d'un système en raison d'une différence de température existant entre le système et son environnement. En d'autres

termes, la chaleur est l'énergie en transition à travers la frontière du système et la différence de température est le potentiel moteur de sa propagation. Puisque la chaleur est de l'énergie en transit, il faut vraiment parler de transfert ou de flux de chaleur. Le flux de chaleur est vectoriel dans le sens où il est dans la direction d'un gradient de température négatif, c'est-à-dire de températures plus élevées vers des températures plus basses. Les lois de la thermodynamique peuvent être utilisées pour prédire la quantité brute de chaleur transférée vers ou depuis un système au cours d'un processus dans lequel le système passe d'un état thermodynamique (c'est-à-dire mécanique et chimique, ainsi que l'équilibre thermique) à un autre. Dans la plupart des cas, cependant, la considération primordiale peut être la période de temps pendant laquelle le transfert de chaleur se produit ou, simplement, la vitesse à laquelle il se produit. Les lois de la thermodynamique ne suffisent pas à elles seules à fournir de telles informations ; elles ne peuvent pas non plus expliquer les mécanismes du transfert de chaleur, qui ne sont pas strictement limités aux états d'équilibre. La science du transfert de chaleur, en revanche, étudie les mécanismes du transfert de chaleur et étend l'analyse thermodynamique, par le développement des relations empiriques et analytiques nécessaires, afin de calculer les taux de transfert de chaleur [9].

I.4.2. Les modes de transferts thermiques

Lorsqu'elles ne sont pas en équilibre thermique (à différentes températures), la chaleur peut être transférée d'un objet à un autre via trois processus physiques : la conduction, le rayonnement et la convection [10]. Seul le transfert par conduction sera retenu. En effet, pour des particules très fines, le transfert convectif est négligeable, et à température ambiante, le transfert de rayonnement est également négligeable [11].

I.4.3. Conduction thermique

A propos du mot "conduction", il faut immédiatement évoquer les concepts d'atomique et l'activité moléculaire, car les processus à ces niveaux soutiennent ce mode de transfert de chaleur. La conduction peut être considérée comme le transfert d'énergie des particules les plus énergétiques vers les particules les moins énergétiques d'une substance en raison des interactions entre les particules.

Le mécanisme physique de la conduction est plus facilement expliqué en considérant un gaz et en utilisant des idées familières de votre formation en thermodynamique. Imaginez un gaz dans lequel il existe un gradient de température et supposez qu'il n'y a pas de

mouvement massif ou macroscopique. Le gaz peut occuper l'espace entre deux surfaces qui sont maintenues à des températures différentes, comme le montre la (figure I.2). Nous associons la température d'un point quelconque à l'énergie des molécules de gaz à proximité de ce point. Cette énergie est liée au mouvement de translation aléatoire, ainsi qu'aux mouvements de rotation et de vibration internes des molécules.

Des températures plus élevées sont associées à des énergies moléculaires plus élevées. Lorsque des molécules voisines entrent en collision, comme elles le font constamment, un transfert d'énergie des molécules les plus énergétiques vers les moins énergétiques doit se produire. En présence d'un gradient de température, le transfert d'énergie par conduction doit alors se faire dans le sens de la diminution de la température. Cela serait vrai même en l'absence de collisions, comme le montre la (figure I.2). Le plan hypothétique à x_0 est constamment traversé par des molécules d'en haut et d'en bas en raison de leur mouvement aléatoire. Cependant, les molécules du haut sont associées à une température plus élevée que celles du bas, auquel cas il doit y avoir un transfert net d'énergie dans la direction x positive. Les collisions entre les molécules renforcent ce transfert d'énergie. On peut parler de transfert net d'énergie par un mouvement moléculaire aléatoire comme d'une diffusion d'énergie.

La situation est à peu près la même dans les liquides, bien que les molécules soient plus proches les unes des autres et que les interactions moléculaires soient plus fortes et plus fréquentes. De même, dans un solide, la conduction peut être attribuée à l'activité atomique sous forme de vibrations du réseau [12].

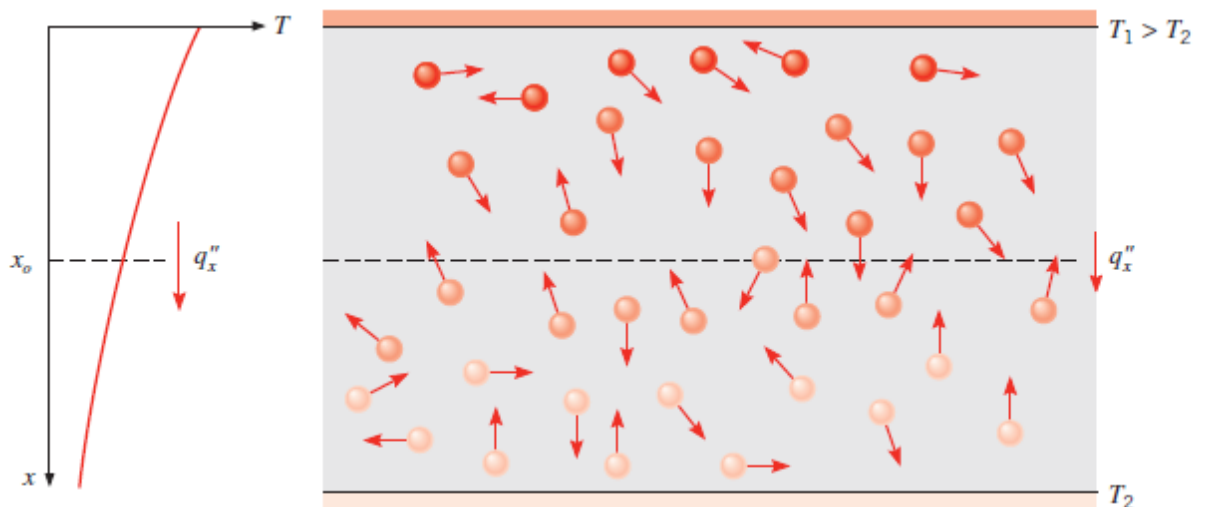


Figure I-2 : Association du transfert de chaleur par conduction avec la diffusion de l'énergie due à l'activité moléculaire.

I.4.3.1. Le concept de continuité

Bien que la matière semble continue, elle est composée de molécules, d'atomes et d'électrons qui se heurtent constamment en mouvement constant. La matière, bien qu'elle semble continue, est composée de molécules, d'atomes et d'électrons en mouvement constant et subissant des collisions. Comme on pense que la conduction de la chaleur se produit par l'échange d'énergie cinétique entre ces particules, l'approche la plus fondamentale pour analyser le transfert de chaleur dans une substance par conduction consiste donc à appliquer les lois du mouvement à chaque particule individuelle ou à un groupe statistique de particules, après quelques états de fait initiaux. Une telle approche donne un aperçu des détails de la conduction de la chaleur ; cependant, comme on pourrait le prévoir, elle serait trop lourde pour la plupart des situations qui se présentent en ingénierie.

Dans la plupart des problèmes d'ingénierie, l'intérêt principal ne réside pas dans le comportement moléculaire d'une substance, mais plutôt dans la façon dont la substance se comporte comme un milieu continu. Dans notre étude de la conduction thermique, nous allons donc ignorer la structure moléculaire de la substance et la considérer comme un milieu continu, ce qui est heureusement une approche valable pour de nombreux problèmes pratiques où seules des informations macroscopiques présentent un intérêt. Un tel modèle peut être utilisé à condition que la taille et le libre parcours moyen des molécules soient faibles par rapport aux autres dimensions existant dans le milieu, de sorte qu'une moyenne statistique soit significative. Cette approche, qui est également connue sous le nom d'approche phénoménologique dans l'étude de la conduction thermique, est plus simple que les approches microscopiques et donne généralement les réponses requises en ingénierie. D'autre part, pour compenser les informations perdues par la négligence de la structure moléculaire, certains paramètres, tels que l'état thermodynamique (c'est-à-dire thermo-physique) et les propriétés de transport, doivent être introduits de manière empirique. Parallèlement à l'étude de la conduction thermique par l'approche de la continuité, les considérations moléculaires peuvent également être utilisées pour obtenir des informations sur les propriétés thermodynamiques et de transport [9].

I.4.3.2. Le flux de chaleur et la température

Dans un corps solide qui contient des variations de température, le flux de chaleur passe d'une région de haute température à une région de basse température. Le terme flux thermique est le taux de transfert d'énergie (en Joules par seconde, ou J/s)

associé à l'énergie vibratoire des atomes et des molécules du corps. Le flux de chaleur est le flux de chaleur par unité de surface en tout point du corps. La théorie de la conduction thermique est la relation entre le flux de chaleur et la température dans un corps solide ; elle s'applique également aux liquides et aux gaz lorsqu'il n'y a pas de mouvement de masse du fluide.

La loi particulière qui régit la relation entre le flux de chaleur et le champ de température est nommée d'après Joseph Fourier. Pour un solide homogène et isotrope (c'est-à-dire un matériau dans lequel la conductivité thermique est indépendante de la direction), la loi de Fourier peut être donnée sous la forme en W/m^2 .

$$q''(\hat{r}, t) = -k\nabla T(\hat{r}, t) \quad (I.2)$$

Où le gradient de température $k\nabla T(\hat{r}, t)$ est un vecteur normal à la surface isotherme, le vecteur de flux de chaleur $q''(\hat{r}, t)$ représente le flux de chaleur par unité de temps, par unité de surface de la surface isotherme dans le sens de la diminution du gradient de température, et k est la conductivité thermique du matériau. Le signe moins est introduit dans l'équation (I.2) pour que le flux de chaleur soit une quantité positive dans la direction des coordonnées positives (c'est-à-dire à l'opposé du gradient de température), comme décrit ci-dessous. Ce texte considérera le flux de chaleur en unités SI W/m^2 et le gradient de température en K/m (équivalent à l'unité $^{\circ}C/m$), donnant à la conductivité thermique les unités de $W/(m.K)$. Dans le système de coordonnées cartésiennes (c'est-à-dire le système rectangulaire), l'équation (I.2) est écrite comme suit.

$$q''(x, y, z, t) = -\hat{i}k \frac{\partial T}{\partial x} - \hat{j}k \frac{\partial T}{\partial y} - \hat{k}k \frac{\partial T}{\partial z} \quad (I.3)$$

Où \hat{i} , \hat{j} et \hat{k} sont les vecteurs de direction unitaires le long des directions x , y et z , respectivement. Dans un corps solide avec un gradient de température constant, le flux de chaleur a une magnitude et une direction et il est désigné par le vecteur q . On peut considérer le vecteur de flux thermique dans les directions x , respectivement, comme données par

$$q''_x = -k \frac{\partial T}{\partial x} \quad (I.4)$$

Où le paramètre k est la conductivité thermique avec les unités $W/(m.K)$. En général, la conductivité thermique peut être une fonction de la température. Le signe négatif implique

que la chaleur circule toujours dans le sens de la réduction de la température. De même dans les directions y et z,

$$q''_y = -k \frac{\partial T}{\partial y} \quad (I.5)$$

Et

$$q''_z = -k \frac{\partial T}{\partial z} \quad (I.6)$$

C'est la loi de Fourier sur la conduction de la chaleur [13][14]

I.4.3.3. Gradient de température

Si l'on réunit tous les points de l'espace qui ont la même température, on obtient une surface dite surface isotherme. La variation de température par unité de longueur est maximale le long de la normale à la surface isotherme. Cette variation est caractérisée par le gradient de température [15].

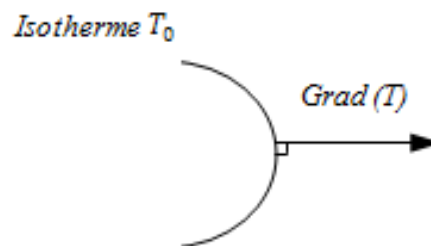


Figure I-3 : Gradient de température.

$$\overrightarrow{\text{grad}} = \vec{n} \frac{\partial T}{\partial n} \quad (I.7)$$

Avec :

\vec{n} Vecteur unitaire de la normale ;

$\frac{\partial T}{\partial n}$ Dérivée de la température le long de la normale.

I.4.3.4. Conductivité thermique

La conductivité thermique λ (souvent notée k dans les pays anglo-saxons) exprime, de par sa définition, l'aptitude d'un matériau à conduire la chaleur. C'est le flux de chaleur qui traverse une surface unité pour un matériau soumis à un gradient de température égal à l'unité.

Il existe une grande variation dans les conductivités thermiques des divers matériaux. La valeur la plus élevée est donnée par les métaux purs et la valeur la plus basse par gaz et vapeurs ; les matériaux isolants et les liquides inorganiques ont des conductivités qui se situent entre les deux. La conductivité thermique varie également en fonction de la température. Pour la plupart des métaux purs, elle diminue avec l'augmentation de la température, tandis que pour les gaz, elle augmente avec l'augmentation de la température. Pour la plupart des matériaux isolants, elle augmente avec l'augmentation de la température [16].

λ Elle s'exprime en $W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}$ et dépend de :

- La nature physico-chimique du matériau ;
- La nature de la phase considérée (solide, liquide, gaz) ;
- La température ;
- L'orientation dans les matériaux anisotropes ;
- Elle dépend de la température lorsque l'on considère des plages étendues de température. Dans ce cas on pourra cependant souvent considérer une variation linéaire avec T , sous la forme :

$$\lambda = \lambda_0 \cdot (1 + b \cdot T) \quad (I.8)$$

Où λ_0 Désigne la conductivité à $T = T_0$ et b est une constante expérimentale.

L'état solide, Dans la vision moderne des matériaux, un solide peut être composé d'électrons et d'atomes libres liés dans un arrangement périodique appelé le réseau. En conséquence, le transport de l'énergie thermique peut être dû à deux effets : la migration des électrons libres et les ondes vibratoires du réseau. Lorsqu'on les considère comme un phénomène semblable à celui des particules, les quanta de vibration du réseau sont appelés phonons. Dans les métaux purs, c'est la contribution des électrons au transfert de chaleur

par conduction qui domine, tandis que dans les matériaux non conducteurs et les semi-conducteurs, c'est la contribution des phonons qui est dominante. La théorie cinétique donne l'expression suivante pour la conductivité thermique [17].

$$k = \frac{1}{3} C \bar{c} \lambda_{\text{mfp}} \quad (\text{I.9})$$

Pour les matériaux conducteurs tels que les métaux, $C \equiv C_e$ est la chaleur spécifique de l'électron par unité de volume, est la vitesse moyenne de l'électron, et $\lambda_{\text{mfp}} \equiv \lambda_{\text{ph}}$ est le libre parcours moyen de l'électron, qui est défini comme la distance moyenne parcourue par un électron avant qu'il n'entre en collision avec une imperfection dans le matériau ou avec un phonon. Dans les solides non conducteurs, $C \equiv C_{ph}$ est la chaleur spécifique du phonon, \bar{c} est la vitesse moyenne du son, et $\lambda_{\text{mfp}} \equiv \lambda_{\text{ph}}$ est le libre parcours moyen du phonon, qui est à nouveau déterminé par les collisions avec des imperfections ou d'autres phonons. Dans tous les cas, la conductivité thermique augmente à mesure que le libre parcours moyen des porteurs d'énergie (électrons ou phonons) s'accroît [12].

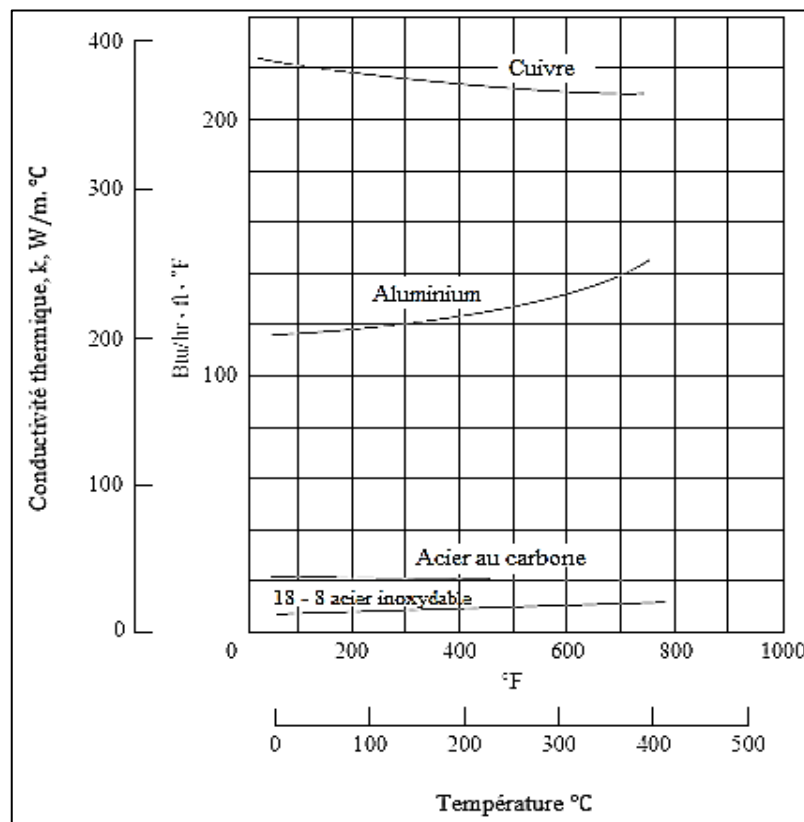


Figure I-4 : Conductivité thermique de certains solides typiques.

I.4.3.5. Diffusivité thermique

Le produit C_p , que l'on rencontre fréquemment dans l'analyse du transfert de chaleur, est appelé la capacité thermique d'un matériau. Tant la chaleur spécifique C_p que la chaleur La capacité C_p représente la capacité de stockage de chaleur d'un matériau. Mais C_p l'exprime par unité de masse alors que C_p l'exprime par unité de volume, comme on peut le constater à partir de leurs unités $J/kg \cdot ^\circ C$ et $J/m^3 \cdot ^\circ C$, respectivement. Une autre propriété du matériau qui apparaît dans l'analyse de la conduction thermique transitoire est la diffusivité thermique, qui représente la vitesse à laquelle la chaleur se diffuse à travers un matériau et est définie comme.

$$\alpha = \frac{\text{Chaleur conduite}}{\text{Chaleur stockée}} = \frac{k}{\rho C_p} \quad (I.10)$$

Notez que la conductivité thermique k représente la façon dont un matériau conduit la chaleur, et la capacité thermique C_p représente la quantité d'énergie qu'un matériau stocke par unité de volume. Par conséquent, la diffusivité thermique d'un matériau peut être considérée comme le rapport entre la chaleur conduite à travers le matériau et la chaleur stockée par unité de volume. Un matériau qui a une conductivité thermique élevée ou une faible capacité thermique aura évidemment une grande diffusivité thermique. Plus la diffusivité thermique est importante, plus la propagation de la chaleur dans le milieu est rapide. Une faible valeur de diffusivité thermique signifie que la chaleur est principalement absorbée par le matériau et qu'une petite quantité de chaleur sera conduite plus loin [18].

I.4.3.6. La Résistance aux contacts

Lorsque deux couches différentes de matériaux conducteurs sont mises en contact thermique, une résistance thermique se développe à l'interface. C'est ce qu'on appelle la résistance de contact. Une chute de température importante se produit à l'interface et doit être prise en compte dans le calcul du transfert de chaleur. La résistance de contact dépend dans une large mesure de la rugosité de la surface. La pression qui maintient les deux surfaces ensemble influence également la résistance de contact. Lorsque les surfaces sont réunies, le contact est partiel et de l'air peut être emprisonné entre les autres points, comme le montre la (figure I.5) [19].

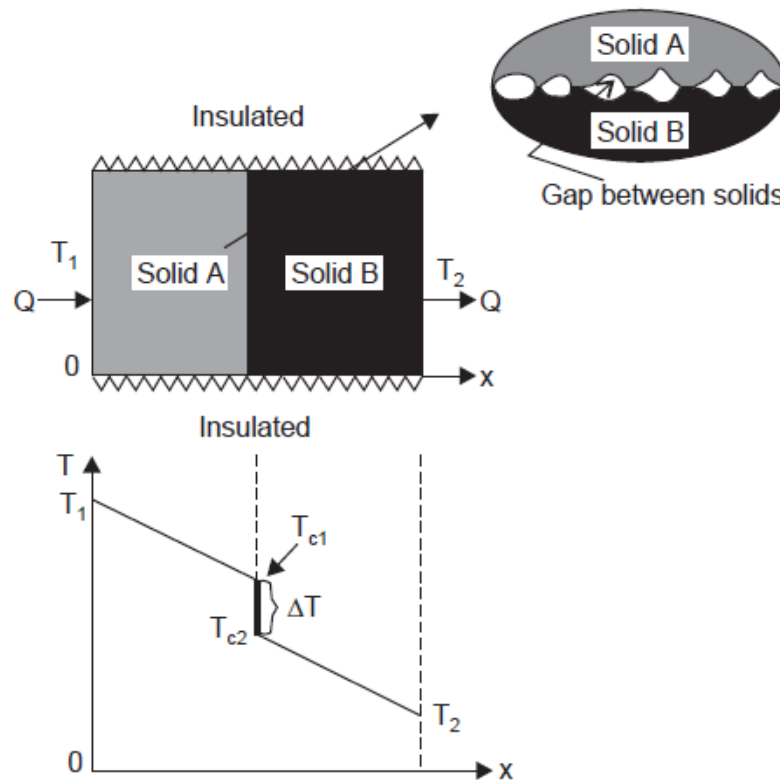


Figure I-5 : Chute de température de la résistance de contact.

I.5. Conduction thermique dans un milieu granulaire

Dans de nombreuses applications pratiques de traitement de matériaux, des matériaux granulaires soumis au cisaillement sont rencontrés. De plus, beaucoup de ces applications impliquent également un transfert de chaleur, par lequel le solide est en contact avec une surface de refroidissement ou de chauffage, et un échange de chaleur se produit entre la surface et les particules pendant le contact. Le degré d'échange thermique dépend des propriétés thermo physiques des particules et des parois, du fluide poreux, de la forme des particules et du temps de contact [20].

Le transfert de chaleur par conduction est exprimé par la relation de Fourier. Ce sont des flux de chaleur à l'intérieur de chaque particule qui apparaissent dès qu'un gradient de température s'établit dans le solide. Le deuxième mode de transfert de chaleur est dû au contact physique entre les particules. Ce phénomène est quantifié par la conductivité de contact entre les particules, qui est fortement influencée par la nature et les propriétés thermo-physiques des éléments en contact. Le flux de chaleur transféré entre deux particules i et j est modélisé par l'intermédiaire de la conductance de contact

$$Q_{ij} = H_C \times (T_j - T_i) \quad (\text{I.11})$$

Où Q_{ij} est la quantité de chaleur de la particule i reçu par la particule j , H_C la conductance contact, T_j et T_i les températures respectivement des particules i et j [21].

I.6. Le nombre de Biot pour l'analyse thermique

Le nombre de Biot Bi , représentant le rapport entre la résistance de conduction interne et la résistance de convection externe :

$$Bi = \frac{\text{Résistance de conduction interne}}{\text{Résistance à la convection de la surface externe}} = \frac{L/kA}{1/hA} = \frac{hL}{k} \quad (\text{I.12})$$

Où h est le coefficient de transfert de chaleur à la surface externe, k la conductivité thermique du solide, et L la dimension caractéristique, mieux définie par le quotient du volume divisé par la surface externe A [17].

Le nombre de Biot joue un rôle fondamental dans les problèmes de conduction qui impliquent des effets de convection de surface. Il fournit une mesure de la chute de température dans le solide par rapport à la différence de température entre la surface du solide et le fluide, il est également évident que le nombre de Biot peut être interprété comme un rapport des résistances thermiques [12].

CHAPITRE II
LES METHODES
NUMERIQUES A
MAILLAGE

CHAPITRE II : LES METHODES NUMERIQUES A MAILLAGE

II.1. Introduction

Trouver la solution analytiquement pour un problème de transfert thermique n'est possible que pour très peu de cas académiques simples. Dès que le modèle étudié devient un peu réaliste d'un point de vue géométrique ou nature physique (paramètres non linéaire...) toute tentative de résolution doit passer obligatoirement par les méthodes numériques approximatives.

On peut classer les méthodes numériques selon plusieurs critères. Si on considère le maillage on peut distinguer :

- Les méthodes à maillage
- Les méthodes sans maillage.

Dans cette étude c'est la première catégorie qui est testée afin de voir ses limites et par la suite introduire les méthodes du deuxième type mais dans une autre étude. Ce chapitre expose les trois méthodes les plus connues.

II.2. Méthode des différences finies

La méthode des différences finies (MDF) a été l'une des premières approches appliquées à la solution numérique des équations différentielles. Elle a été utilisée pour la première fois par Euler, probablement en 1768. La méthode des différences finies est directement appliquée à la forme différentielle des équations qui régissent le problème [28], qui ont été largement utilisées comme modèles mathématiques pour une grande variété de phénomènes physiques et artificiels. Ces modèles décrivent des populations ou des objets qui évoluent continuellement et dans lesquels le temps (ou la variable indépendante) est un sous-ensemble de l'ensemble des nombres réels. En revanche, les équations de différence décrivent des populations ou des objets qui évoluent discrètement et dans lesquels le temps (ou la variable indépendante) est un sous-ensemble de l'ensemble des nombres entiers. Dans de nombreux cas, on est incapable de résoudre une équation différentielle donnée. Dans ce cas, nous devons utiliser un schéma numérique pour approcher les solutions des équations différentielles. Un schéma numérique conduit à la

construction d'une équation différentielle associée qui se prête mieux au calcul, soit par une calculatrice graphique, soit par un ordinateur [27].

II.2.1. Principe

Le principe est d'utiliser une expansion en série de Taylor pour la discrétisation des dérivées des variables de flux [28]. L'idée des méthodes de différences finies est en fait assez simple, puisqu'elle correspond à une estimation d'un dérivé par le rapport de deux différences selon la définition théorique du dérivé.

Pour une fonction $u(x)$, la dérivée au point x est définie par :

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x} \quad (\text{II. 1})$$

Si nous supprimons la limite de l'équation ci-dessus, nous obtenons une différence finie qui explique le nom donné à cette méthode.

Si Δx est petit mais fini, l'expression à droite est une approximation de la valeur exacte de u_x . L'approximation sera améliorée en réduisant Δx , mais pour toute valeur finie de Δx , une erreur est introduite, l'erreur de troncature, qui va à zéro pour Δx tendant vers zéro.

La puissance de Δx avec laquelle cette erreur tend vers zéro est appelée l'ordre de précision de l'approximation de la différence, et peut être obtenue à partir d'un développement en série de Taylor de $u(x + \Delta x)$ autour du point x .

En fait, tout le concept d'approximation aux différences finies est basé sur la nature de l'extension de Taylor qui est l'outil le plus important dans l'analyse des méthodes de différences finies. Il peut s'écrire comme une série infinie

$$u(x + h) = u(x) + hu'(x) + \frac{h^2}{2}u''(x) + \dots + \frac{h^k}{k!}u^{(k)}(x) + \dots \quad (\text{II. 2})$$

Si $u(x)$ est "analytique" (différentiable à tout ordre), ou comme une somme finie

$$u(x + h) = u(x) + hu'(x) + \frac{h^2}{2}u''(x) + \dots + \frac{h^k}{k!}u^{(k)}(\xi) + \dots \quad (\text{II. 3})$$

Où $x < \xi < x + h$ (ou $x + h < \xi < x$ si $h < 0$) si $u(x)$ est différentiable jusqu'au k -ième ordre. La deuxième forme de l'expansion de Taylor est parfois appelée théorème de la valeur moyenne étendue. Comme indiqué précédemment, nous pouvons représenter les dérivées d'une équation différentielle par des formules de différence finie aux points de grille pour obtenir un système algébrique linéaire ou non linéaire. Il existe plusieurs types de formules de différences finies à considérer, mais en général leur précision est directement liée à la magnitude de h (généralement petite) [25][29].

II.2.2. Techniques de maillage

Afin de résoudre numériquement le problème (1), on va créer d'abord un maillage constitué d'un nombre fini de points $M_{i,j}$ de Ω nommé "nœuds du maillage". On va utiliser N et M pour représenter deux entiers ≥ 0 et par $h = \frac{1}{N+1}$ et $k = \frac{1}{M+1}$ deux paramètres de discrétisation conçus pour se rapprocher de zéro (figure II-1).

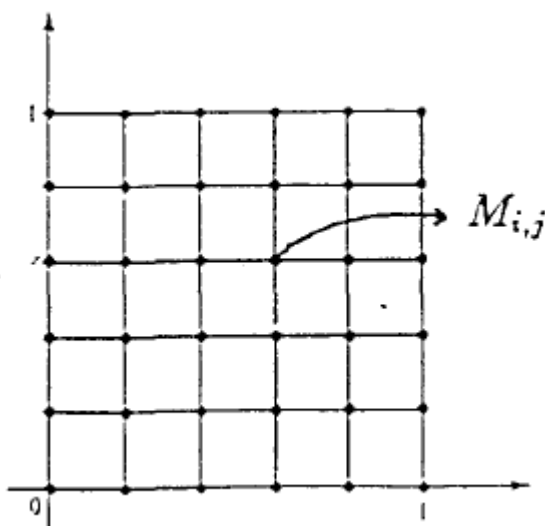


Figure II-1 : Maillage en MDF (\bullet points de Ω_h^k).

On note par Ω_h^k tous les nœuds du maillage par Γ_h^k point à l'intersection Γ et d'une ligne horizontale ou/et verticale du maillage. Sauf circonstances particulières, il n'y a aucune raison pour que les points de Γ_h^k deviennent des points Ω_h^k .

Le problème discret associé à (1) et au maillage choisi, consiste à trouver une fonction φ_h^k définie sur $\Omega_h^k \cup \Gamma_h^k$ telle que

$$\begin{cases} \Delta_h^k \varphi_h^k + f_h^k = 0 & \text{sur } \Omega_h^k \\ \varphi_h^k|_{\Gamma_h^k} = 0 & \text{sur } \Gamma_h^k \end{cases} \quad (\text{II. 4})$$

Où Δ_h^k est l'approximation de l'opérateur différentiel $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2}{\partial^2 y}$ [33].

II.2.3. Domaines d'applications

La méthode des différences finies ne peut être appliquée qu'à des géométries assez simples. Aujourd'hui, elle est parfois utilisée pour la simulation numérique directe de la turbulence (DNS), mais elle est rarement utilisée dans les applications industrielles [28]. Il existe des solveurs et packages rapides pour les domaines réguliers, par exemple les solveurs de Poisson Fishpack (Adams et al.) et Clawpack (LeVeque, 1998).

II.2.4. Avantages et inconvénients

- Souvent relativement simple à utiliser, et assez facile à comprendre ;
- Facile à mettre en œuvre pour les domaines réguliers, par exemple les domaines rectangulaires en coordonnées cartésiennes, et les domaines circulaires ou annulaires en coordonnées polaires ;
- Faible coût de calcul ;
- Difficile à mettre en œuvre pour des géométries compliquées ;
- Avoir de fortes exigences de régularité (l'existence de dérivés d'ordre élevé) ;
- Limitation à des géométries simples [25][32].

II.3. Méthode des volumes finis

La méthode des volumes finis utilise directement l'expression intégrale de l'équation loi de conservation-Navier-Stokes / Euler. Il a d'abord été utilisé par McDonald's pour simuler des flux invisibles en 2D [28]. Elle est utilisée pour la résolution numérique des équations différentielles partielles, tout comme la méthode des différences finies et la méthode des éléments finis. Contrairement à la méthode des différences finies, qui implique des approximations pour les dérivées, les méthodes des volumes finis et des éléments finis utilisent des approximations intégrales. Cependant, la méthode des volumes

finis est basée directement sur ce que l'on appelle La forme "forte" de l'équation à résoudre, tandis que la méthode des éléments finis est basée sur la formulation variationnelle de ce que l'on appelle L'équation « faible » [14]. Au début, la méthode a été développée comme une formulation spéciale de la méthode des différences finies. L'algorithme numérique a les cas suivants :

- Le domaine d'analyse (de calcul) est divisé en volumes finis (génération du maillage) ;
- L'intégration formelle des équations sur tous les volumes de contrôle ;
- La discrétisation, qui implique la substitution des différentes approximations de type différences finies pour les termes intégrés en représentant différents processus d'écoulement comme la convection, la diffusion et le terme source. Le résultat est la conversion des intégrales dans un système d'équations algébriques ;
- La résolution du système d'équations algébriques par l'utilisation d'une méthode itérative.

Le premier pas qui est l'intégration sur le volume de contrôle, fait la distinction entre la méthode des volumes finis et tous les autres techniques numériques. Le résultat de l'intégration exprime la conservation exacte de la grandeur physique, Φ , sur chaque volume de contrôle. Cette relation claire entre l'algorithme numérique et le principe de conservation physique détermine la principale attraction de la méthode des volumes finis et son concept devient plus facile à comprendre que le concept de la méthode des éléments finis ou de la méthode spectrale.

La conservation de la variable générale d'écoulement Φ , par exemple une composante de la vitesse ou de l'enthalpie (la température), sur le volume de contrôle peut être exprimée comme un bilan entre les différents processus qui tendent de l'augmenter ou bien de la baisser, c'est-à-dire [15]

[Le taux de changement, dans le temps, de Φ sur le volume de contrôle] = [le flux net de Φ dû à la convection dans le volume de contrôle] + [le flux net de Φ dû à la diffusion dans le volume de contrôle] + [le taux net de création de Φ dans le volume de contrôle]

II.3.5. Principe

Le principe de la méthode des volumes finis est de diviser le domaine Ω dans le volume de contrôle, puis d'intégrer l'équation différentielle à différents volumes de contrôle, et enfin d'utiliser la méthode suivante pour approximer la différence finie de débit au bord du volume de contrôle.

En effet, une équation aux dérivées partielles est approchée par un maillage de volumes finis (qui sont de petits volumes disjoints en 3D, des surfaces en 2D, ou des segments en 1D) qui se reconnectent comme un champ d'étude.

La méthode des volumes finis est très appropriée pour résoudre les lois de conservation. En fait, pour les équations aux dérivées partielles contenant des termes divergents, la divergence de flux ou théorème de Green-Ostrogradski est utilisée pour convertir l'intégrale de volume du terme divergent en une intégrale de surface. Par conséquent, il devient plus facile d'évaluer le terme d'écoulement à l'interface entre des volumes limités. Par conséquent, en considérant les règles de conservation des flux entrants et sortants entre deux volumes finis adjacents, la fonction de flux numérique est utilisée pour calculer la valeur approximative du flux à l'interface [14].

II.3.6. Techniques de maillage

Elle est basée sur un maillage non structuré (par exemple triangulaire). Il convient donc aux géométries irrégulières et complexes. Le MVF présente un autre avantage par rapport au MEF pour les problèmes de mécanique des fluides. Jusqu'à présent, les méthodes numériques que nous avons présentées étaient basées sur les EDP. En revanche, la MVF est basée sur la forme intégrale des lois de conservation, plutôt que sur leur forme différentielle. Cela conduit à une plus grande précision/stabilité, en particulier pour les gradients prononcés (c'est-à-dire les grands dérivés) à l'intérieur d'un domaine, ce que l'on appelle aussi la propriété de capture des chocs. Pour expliquer cela plus clairement, comme nous l'avons déjà mentionné, la dynamique de l'écoulement peut être décrite par la conservation de la masse, du moment et de l'énergie. Ces lois sur la conservation peuvent être rédigées sous la forme d'un système de EDP [30].

II.3.7. Domaines d'applications

De nombreux codes de simulation numérique en mécanique des fluides reposent sur cette méthode : Fluent, StarCD, CFX, FineTurbo, elsA [32].

II.3.8. Avantages et inconvénients

Le principal avantage de la méthode des volumes finis est que la discrétisation spatiale s'effectue directement dans l'espace physique. Elle est aussi très flexible - elle peut être facilement mise en œuvre sur des grilles structurées ou non structurées. Cela rend la méthode des volumes finis particulièrement adaptée au traitement de flux avec des géométries complexes [28]. L'inconvénient c'est qu'il existe peu de résultats théoriques de convergence [32].

II.4. Méthode des éléments finis

La méthode des éléments finis a été proposée dans un article de Richard Courant au début des années 1940, bien que les racines historiques de la méthode remontent à des travaux antérieurs de Galerkin en 1915 ; malheureusement, la pertinence de l'article de Courant n'a pas été reconnue à l'époque et l'idée a été oubliée. Au début des années 1950, la méthode a été redécouverte par des ingénieurs, mais son analyse mathématique systématique n'a commencé qu'une décennie plus tard. Depuis lors, la méthode des éléments finis a été développée pour devenir l'une des techniques les plus générales et les plus puissantes pour la solution numérique des équations différentielles, qui est largement utilisée dans la conception et l'analyse techniques [26].

Elle a été développée pour résoudre des problèmes compliqués en ingénierie, notamment dans la modélisation de l'élasticité et de la mécanique des structures impliquant des PDE elliptiques et des géométries compliquées. Mais aujourd'hui, le champ d'application est assez vaste. Nous utiliserons les problèmes de modèles 1D et 2D suivants pour introduire la méthode des éléments finis :

$$1D : -u''(x) = f(x), \quad 0 < x < 1, \quad u(0) = 0, u(1) = 0 ;$$

$$2D : -(u_{xx} + u_{yy}) = f(x, y), \quad (x, y) \in \Omega; \quad u(x, y)|_{\partial\Omega} = 0 .$$

Où Ω est un domaine délimité dans le plan (x, y) avec la limite $\partial\Omega$ [25].

On appelle généralement un élément fini à l'intérieur d'un domaine d'étude Ω un sous-domaine Ω_e , dont les dimensions sont beaucoup plus petites que les dimensions de le domaine Ω , mais sont néanmoins finis. La géométrie de ces éléments peut être triangulaire (bidimensionnelle) ou tétraédrique (tridimensionnelle), pour ne citer que les plus simples (parfois appelés simplexes), ou plus généralement quadrilatères et polyèdres. Un élément est caractérisé par son nombre de nœuds et par le degré de la fonction d'approximation inconnue. Il peut être rectangulaire ou curviligne et l'ordre d'approximation peut varier de 1 à 6 (ou plus) dans diverses applications.

La figure II-2 présente quelques exemples d'éléments [31].

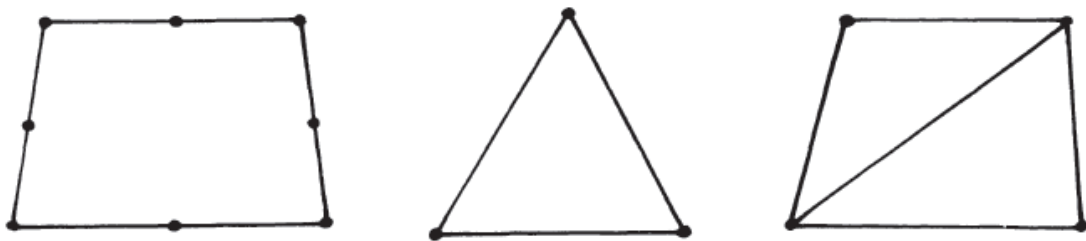


Figure II-2 : Éléments finis.

II.4.9. Principe

Le principe de la MEF consiste à définir une partition sur le domaine (une décomposition en sous-domaines (éléments finis) qui couvrent l'ensemble du domaine mais qui ne se chevauchent pas), ce qu'on appelle la discrétisation. La figure II-3 donnent quelques exemples de discrétisation en deux et trois dimensions.

La discrétisation étant accomplie, le domaine d'origine Ω est caractérisé par une grille de points, qui sont les nœuds communs aux éléments adjacents. La fonction inconnue sera décrite par sa valeur à chacun des nœuds de la grille. Cette fonction inconnue sera interpolée sur le domaine Ω à partir de ses valeurs nodales (aux nœuds) qui proviennent de la solution. Elle sera approchée par une fonction continue par morceaux. Les conditions de continuité seront définies par la nature des éléments en conjonction avec les conditions de continuité imposées par la nature du problème [31].

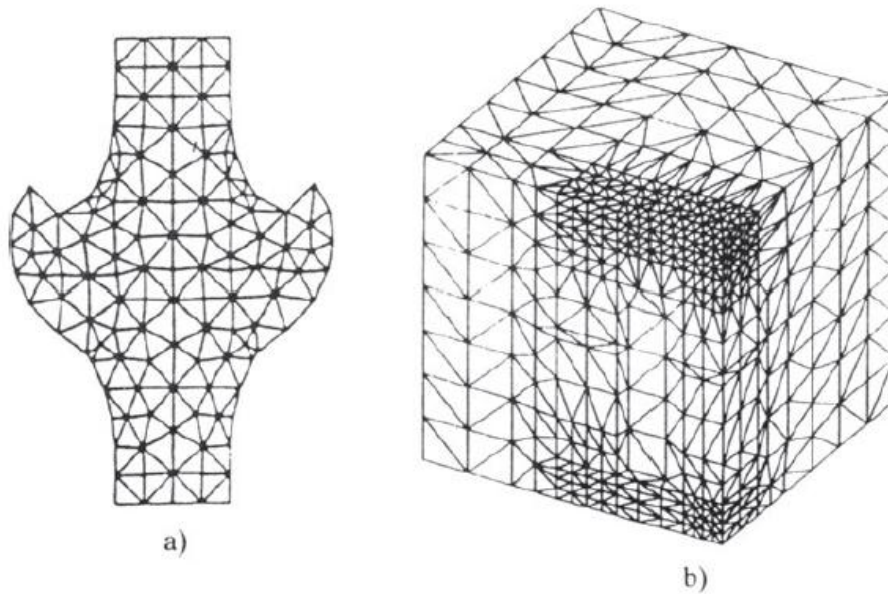


Figure II-3 : (a) Maillage bidimensionnel (éléments triangulaires) ; (b) Maillage tridimensionnel (éléments tétraédriques).

II.4.10. Techniques de maillage

La majorité des problèmes de modélisation des océans impliquent des géométries complexes telles que comme des côtes irrégulières, des bras de mer, des îles et des caps. Les côtes régulières (rectangulaires ou Les grilles (curvilignes) ne peuvent pas résoudre commodément ces géométries complexes. La méthode des éléments finis (MEF) est basée sur un maillage irrégulier (par exemple triangulaire) qui peut facilement résoudre des géométries complexes (par exemple, la figure II-4). Elle est née dans le domaine de la mécanique des solides pour calculer les contraintes et les déformations des structures. Cependant, elle est aujourd'hui appliquée à un large éventail de problèmes multiphysiques, y compris la mécanique des fluides et la modélisation des océans. La MEF peut être considérée comme une méthode numérique générale pour résoudre les équations au dérivées partielles (EDP) [30].

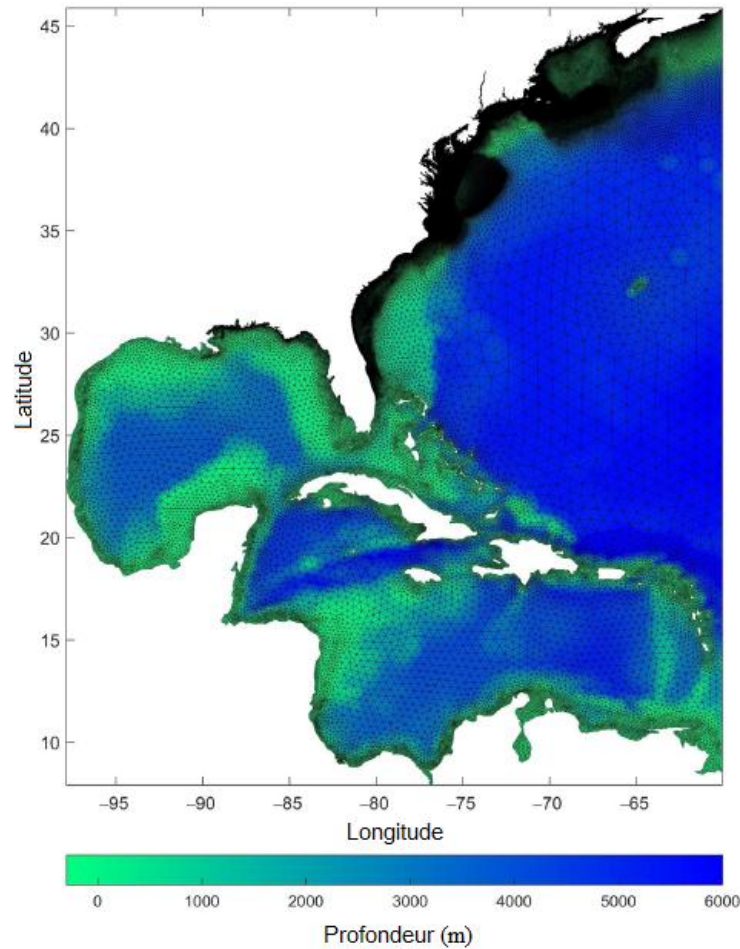


Figure II-4 : Un exemple de maillage triangulaire à éléments finis utilisé pour simuler les marées et les ondes de tempête sur la côte atlantique des États-Unis. Le maillage compte 3 110 470 nœuds et 6 114 065 éléments, avec une taille moyenne de 333 m (10 m à ~121 km) [30].

II.4.11. Domaines d'applications

L'application de la méthode des éléments finis à des problèmes de mécanique des fluides/solides comporte de nombreuses étapes. Cependant, les concepts de base de la méthode sont présentés brièvement, car de nombreux problèmes d'énergie renouvelable utilisent les codes MEF pour les simulations numériques. ADCIRC est un modèle de circulation océanique basé sur MEF qui peut être utilisé pour simuler la ressource en énergie marémotrice d'une région.

ADCIRC est un modèle de circulation océanique basé sur MEF qui peut être utilisé pour simuler la ressource en énergie marémotrice d'une région. La MEF est aussi une technique courante pour l'analyse des aubes de turbines à marée ou la conception structurelle de

dispositifs d'énergie renouvelable dans l'océan [30], et aussi dans de nombreux progiciels commerciaux, par exemple Ansys, Matlab PDE Tool-Box, Triangle et PLTMG [25].

II.4.12. Avantages et inconvénients

- Très efficace pour les problèmes structurels (de type elliptique) ;
- Approche adaptée aux problèmes de frontières complexes ;
- Fondement théorique solide, au moins pour la PDE elliptique, en utilisant la théorie de l'espace Sobolev ;
- Des exigences de régularité plus faibles ;
- La génération de maillages peut être difficile, mais il existe maintenant de nombreux progiciels qui permettent de le faire, par exemple Matlab, Triangle, Pltmg, Fidap, Gmsh et Ansys ;
- Grand coût en temps de calcul et mémoire [25][32].

CHAPITRE III
LIMITES DU MODELE
STANDARD

CHAPITRE III : LIMITES DU MODELE STANDARD**III.1. Introduction**

Dans ce chapitre nous allons traiter un problème de conduction thermique pure (sans convection ni rayonnement) dans un milieu granulaire par la méthode des Eléments Finis. Nous allons progressivement diminuer la taille de la zone de contact entre deux molécules puis on ajoutera une plus de particules au modèle graduellement. L'objectif, de l'étude de la zone de contact est de voir son influence sur la répartition de la température. Alors que celui du nombre des particules c'est de voir l'influence sur les performances de calcul : temps de simulation et mémoire de stockage. L'outil utilisé est la suite Ansys (Ansys Mechanical, Design Modeler, ICEM-CFD).

III.2. Les paramètres géométriques

La modélisation du contact a été pour la première fois étudiée de manière quantitative par Hertz. Selon sa théorie, lorsque deux corps sphériques ou un corps sphérique et une paroi plane entre en contact ils se déforment élastiquement et s'aplatissent à la zone de contact. La zone de contact plate est idéalement de forme circulaire. Un modèle simple mais assez proche de celui développé par Hertz est le modèle qui suppose une interpénétration des deux solides dans la zone de contact circulaire et ignore toute déformation hors cette zone.

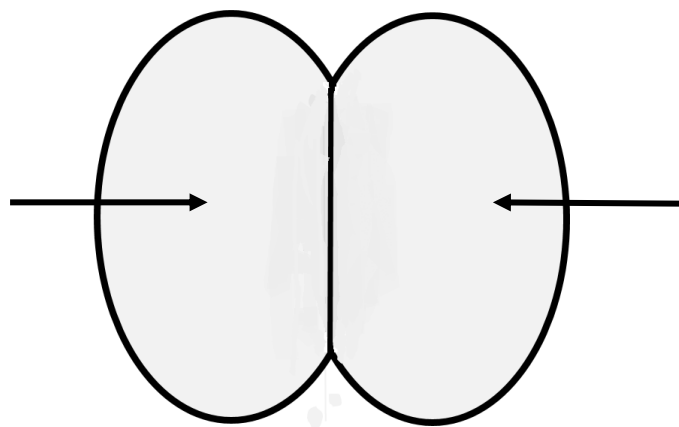


Figure III-1: Modèle réaliste.

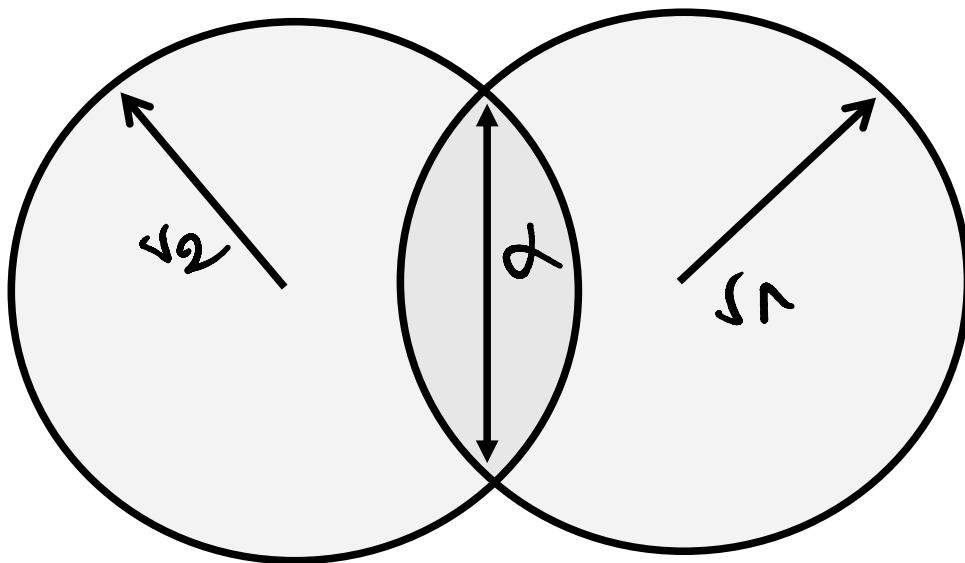


Figure III-2: Modèle approximatif.

La taille des grains, le rayon de contact, le pas du temps et les propriétés du matériau constituant les grains sont les paramètres les plus importants pour la simulation.

Nous allons adopter des valeurs proches de celle des paramètres publiés dans des articles de références à savoir : [34], [35], [36], qui sont très proches entre eux.

Tableau III.1 : Paramètres du modèle numérique

| Paramètre | Valeur |
|-------------------------------------|--------|
| Rayon des grains (mm) | 6 |
| Densité ρ (kg/m ³) | 7900 |
| Conductivité thermique W/(m K) | 60.5 |
| Chaleur spécifique (J/(kg K)) | 434 |
| Température T1 (°C) | 100 |
| Température T2 (°C) | 25 |
| Pas du temps Δt (s) | 0.0001 |
| Temps total t (s) | 10 |

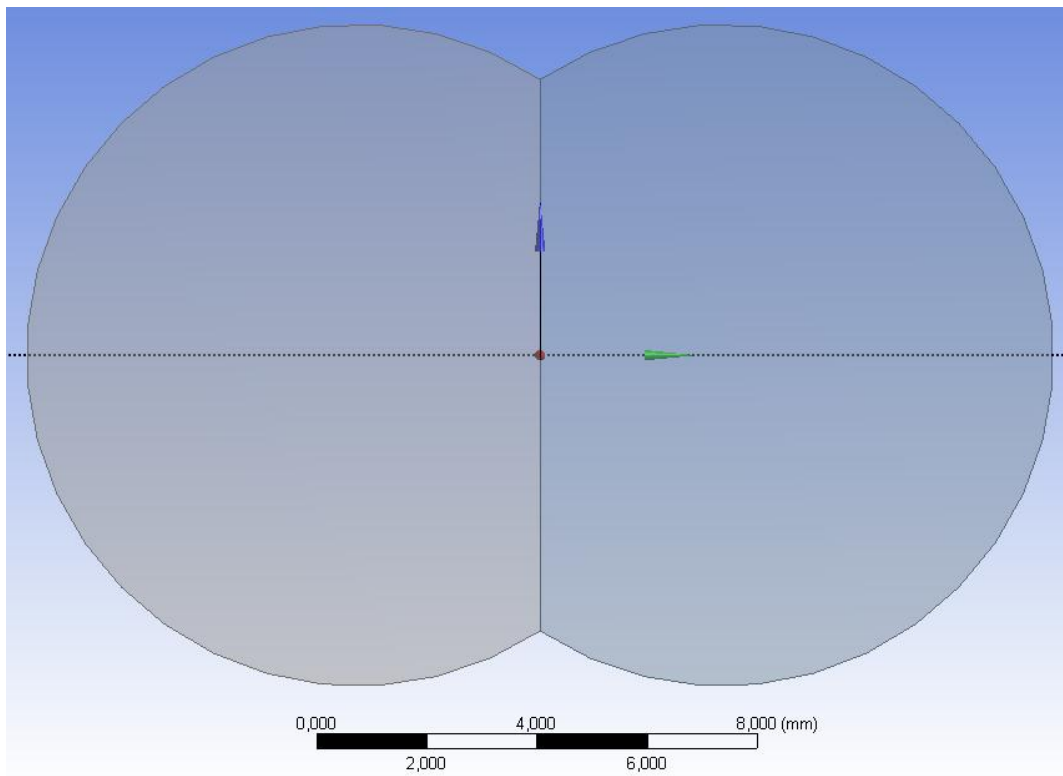


Figure III-3: La géométrie du modèle dans Ansys

III.3. Le modèle numérique par la méthode des éléments finis

Le modèle numérique adopté est le modèle 2D de deux particules de géométries identiques étant initialement à deux températures différentes et en contact sur une longueur (en 3D sera une surface circulaire) qu'on va varier. La périphérie libre des deux particules est supposée parfaitement isolée.

Tous les problèmes sont traités sur la même machine ayant les performances suivantes :

Tableau III.2 : Propriétés de la machine utilisée pour le calcul

| | |
|-----------------|--------------------------------------|
| Type de machine | Laptop Microsoft Surface Book |
| CPU | i7-6600 de 4 cœurs de 2.81GHz chacun |
| GPU | NVIDIA GeForce de 8G |
| RAM | 16G |
| Système | 64bit Windows 10 |
| Refroidissement | Interne et un autre externe |

III.3.13. Le maillage

Le maillage type structuré du cas de deux particules en contact avec des zones de contact de tailles variées. La qualité « Skewness » moyenne pour tous les cas reste au maximum 0.2 ce qui est très petit par rapport à 1. Un soin spécial est donné autour de la zone de contact où le maillage est raffiné.

Cas de la zone de contact extrêmement large 5mm:

Le maillage à dominance structurée du cas « zone de contact **extrêmement** large » est composé de 4096 nœuds et 1300 éléments avec une qualité « Skewness » moyenne de 0.12.

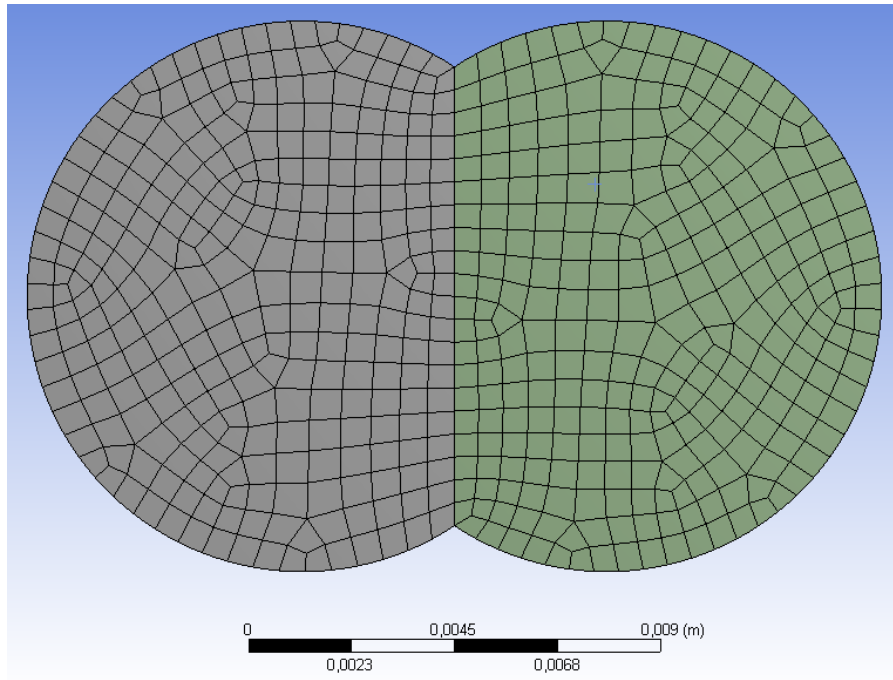


Figure III-4: Le maillage des deux particules en contact, zone de contact **5mm**.

Cas de la zone de contact large 3mm:

Le maillage à dominance structurée du cas « zone de contact large » est composé de 4655 nœuds et 1485 éléments avec une qualité « Skewness » moyenne de 0.13.

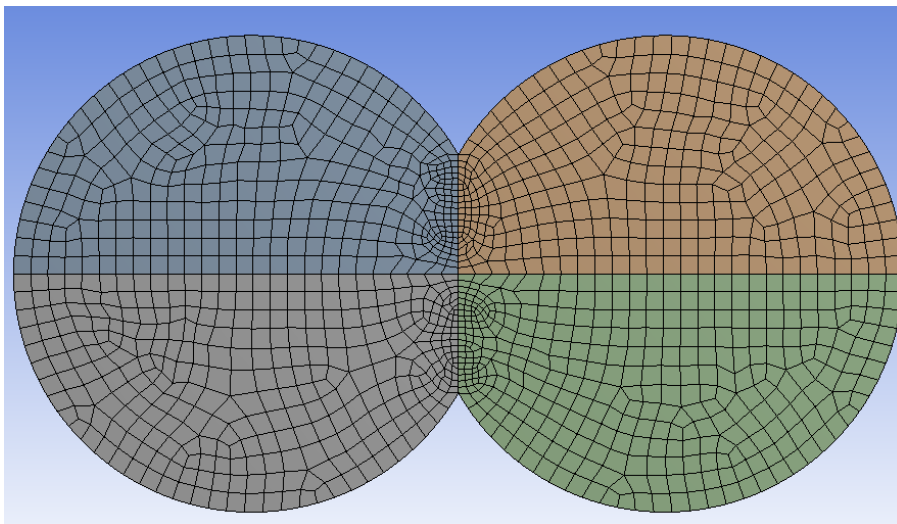


Figure III-5: Le maillage des deux particules en contact, zone de contact **3mm**.

Cas de la zone de contact petite 1mm:

Le maillage à dominance structurée du cas « zone de contact large» est composé de 5604 nœuds et 1792 elements avec une qualité « Skewness » moyenne de 0.15.

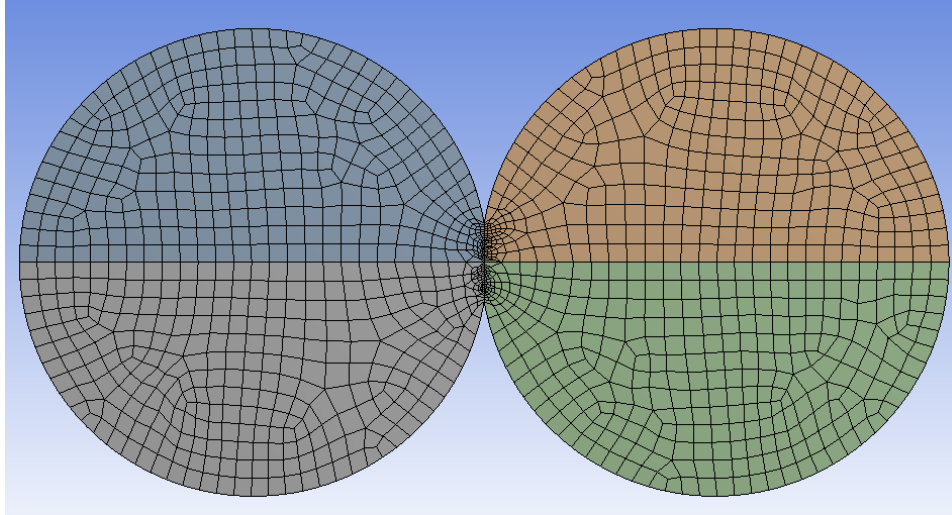


Figure III-6: Le maillage des deux particules en contact zone de contact **1mm**.

Cas de la zone de contact extrêmement petite 0.001mm:

Le maillage type structuré du cas « zone de contact large» est composé de 8753 nœuds et 2809 elements avec une qualité « Skewness » moyenne de 0,2.

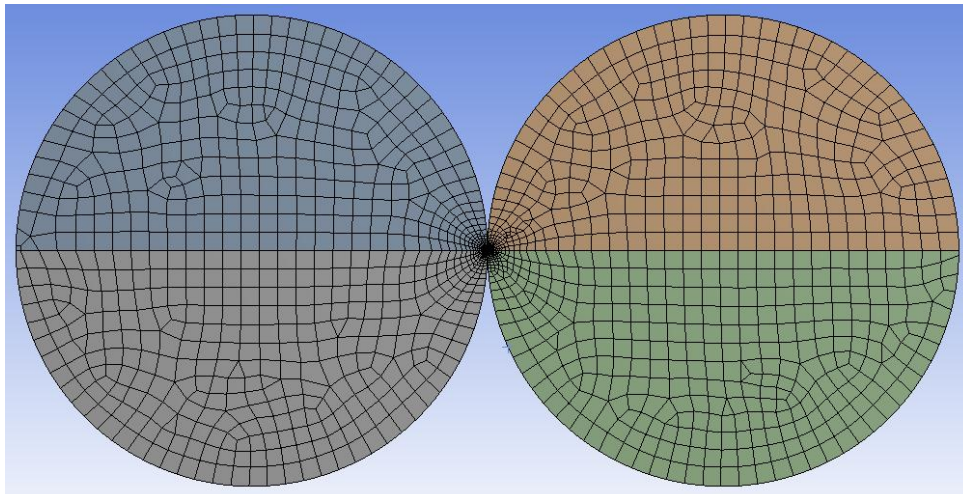


Figure III-7: Le maillage des deux particules en contact zone de contact **0.001mm**.

III.4. Les résultats du modèle éléments finis

Seulement la répartition (l'homogénéité) de la température nous intéresse. C'est pour cela aucune valeur n'est indiquée sur les 4 figures suivantes.

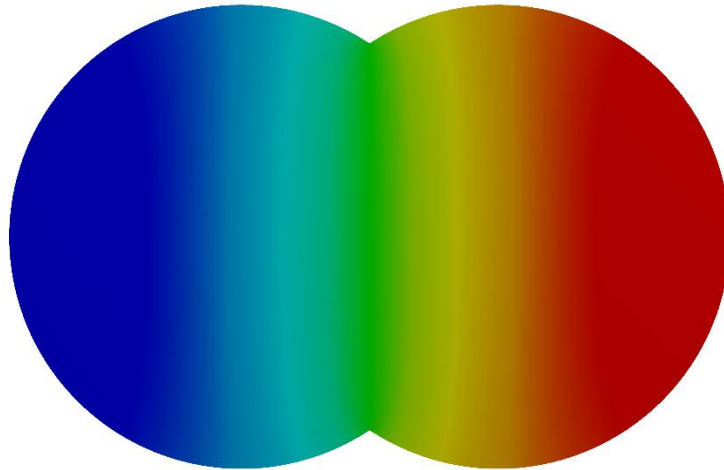


Figure III-8: Zone de contact **5mm** grande par rapport aux rayons des deux sphères.

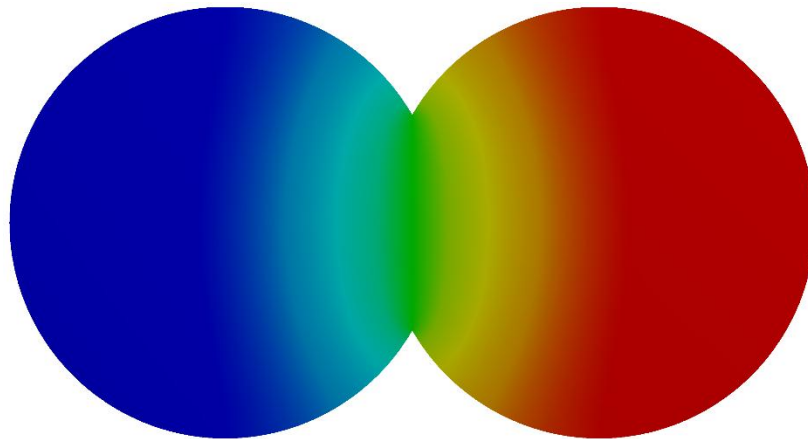


Figure III-9: Zone de contact **3mm** moyenne par rapport aux rayons des deux sphères.

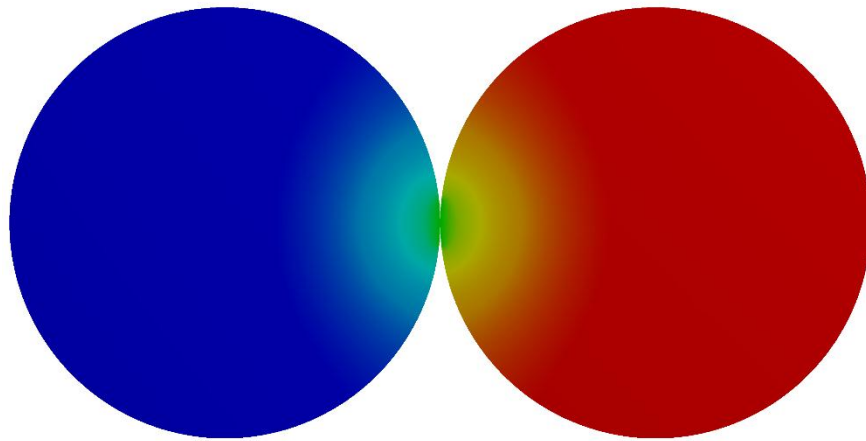


Figure III-10: Zone de contact **1mm** très petite par rapport aux rayons des deux sphères.

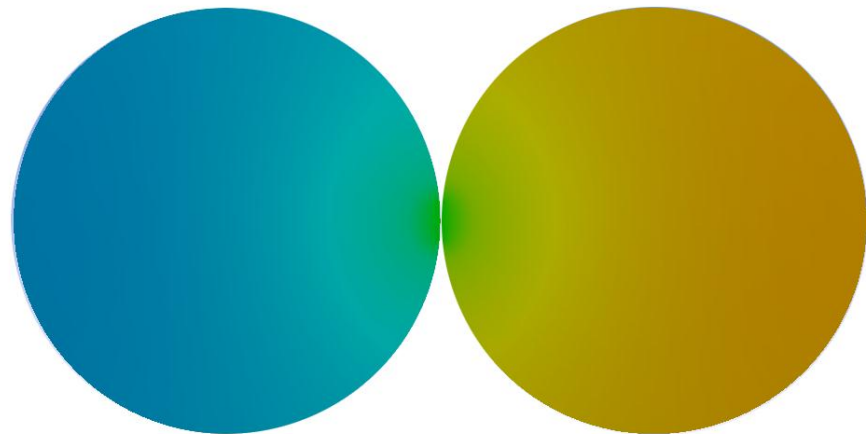


Figure III-11: Zone de contact **0.001mm** extrêmement petite par rapport aux rayons des deux sphères.

Il est clair que plus on augmente la taille de la zone de contact plus la répartition de la température devient non-uniforme.

III.5. Influence du nombre des particules :

Dans la suite on augmentera le nombre de particules par 1. L'influence de l'ajout d'une seule particule sur le temps d'analyse et la mémoire de stockage sera analysée.

Pour étudier l'influence du nombre des particules sur les performances du calcul, principalement le temps d'exécution et la mémoire de stockage, une série de simulations est effectuée. Elle consiste en un nombre de particules qui augmente graduellement de 2 à 5. A chaque fois une seule particule est initialement à 100°C quant aux autres elles sont initialement à 25°C. Le transfert est simulé pour 10s.

Pour avoir une comparaison équitable les particules sont maillées identiquement par 100 nœuds dans leurs périphéries et 10 nœuds dans la zone de contact égale à 0.1mm.

La qualité moyenne du maillage par le paramètre : distorsion « Skewness » : est de 0,22176

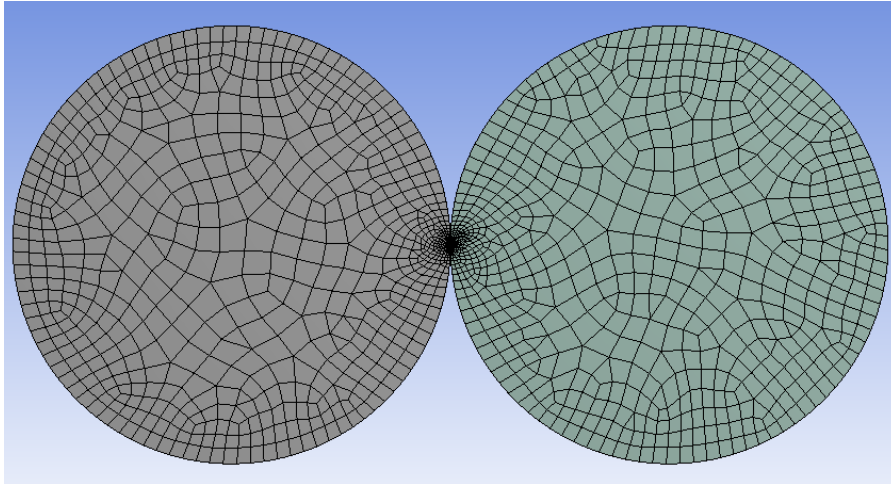


Figure III-12: Maillage du modèle à **deux** particules

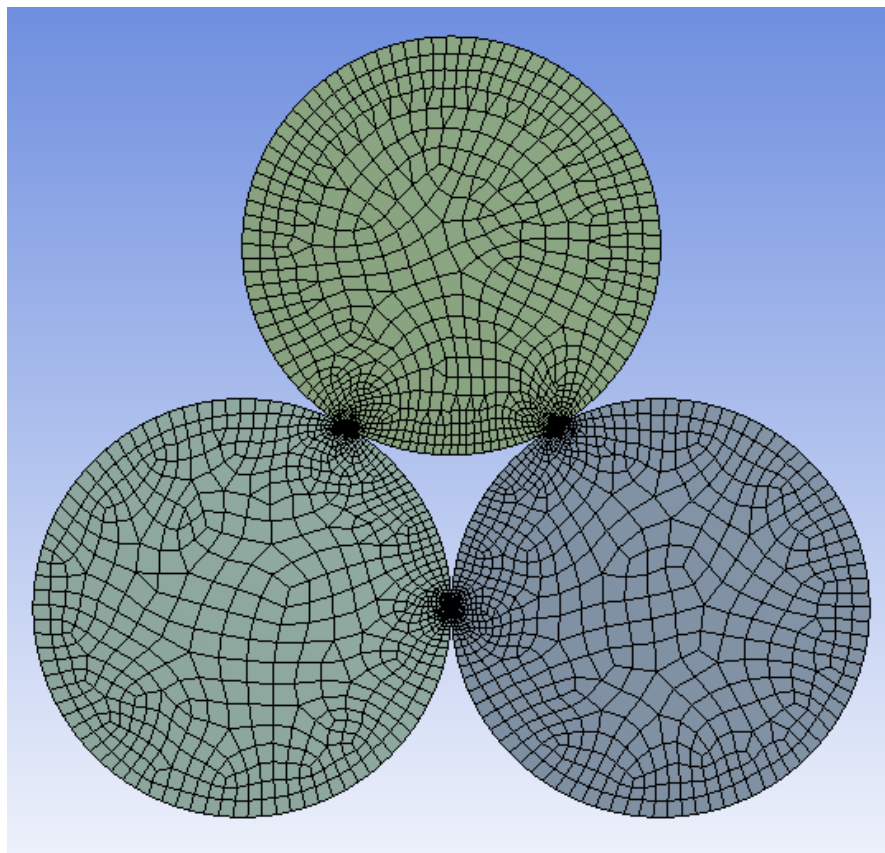


Figure III-13: Maillage du modèle à **trois** particules

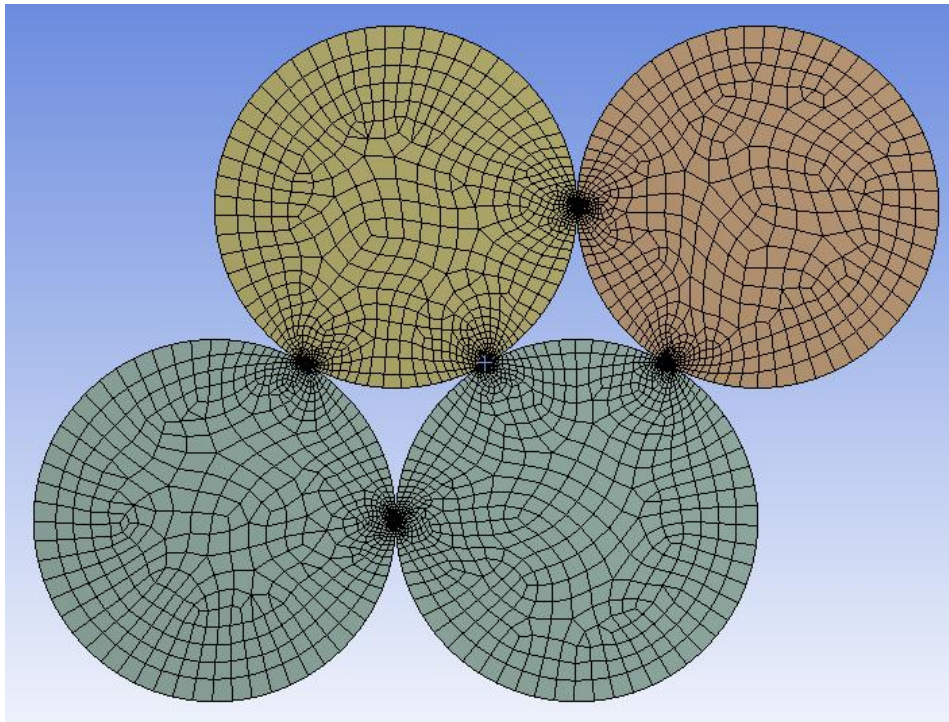


Figure III-14: Maillage du modèle à **quatre** particules

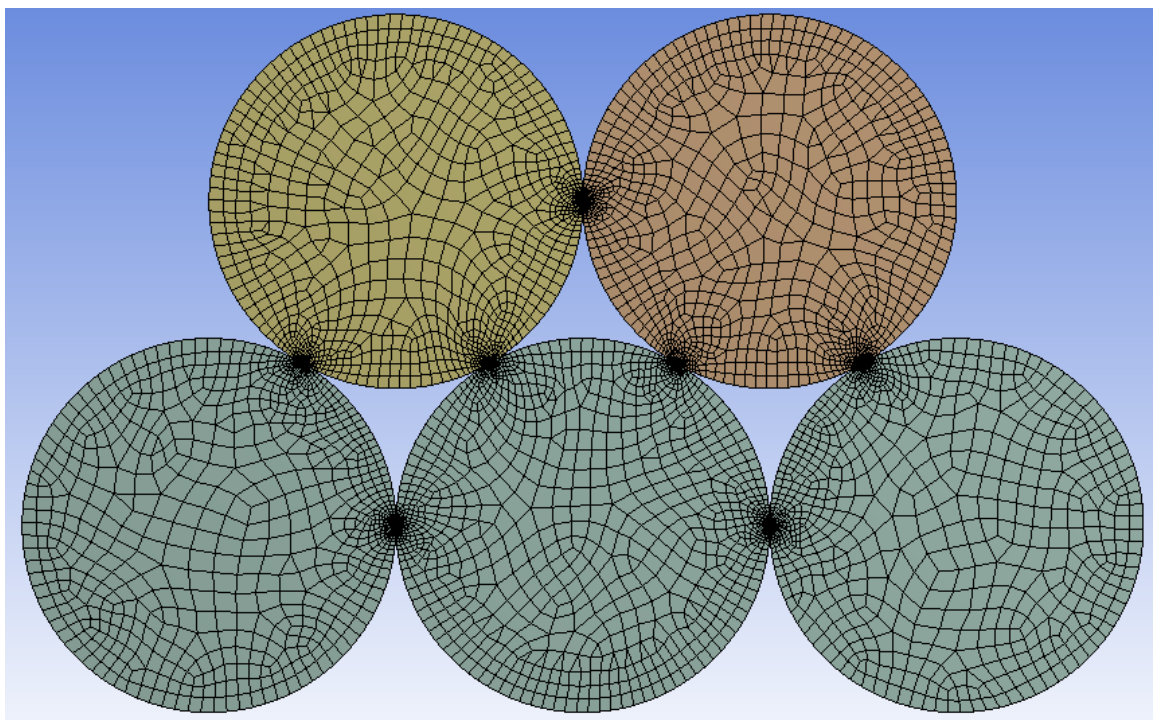


Figure III-15: Maillage du modèle à **cinq** particules

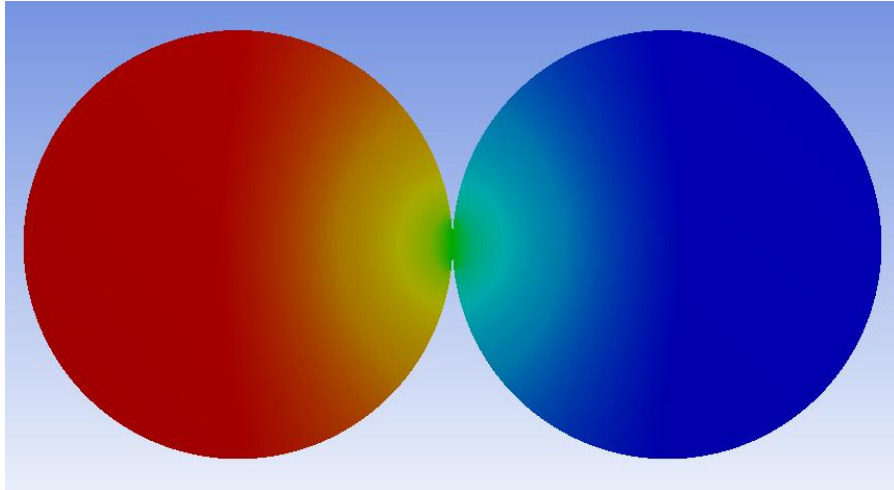


Figure III-16: Etat thermique des **deux particules** après 10s

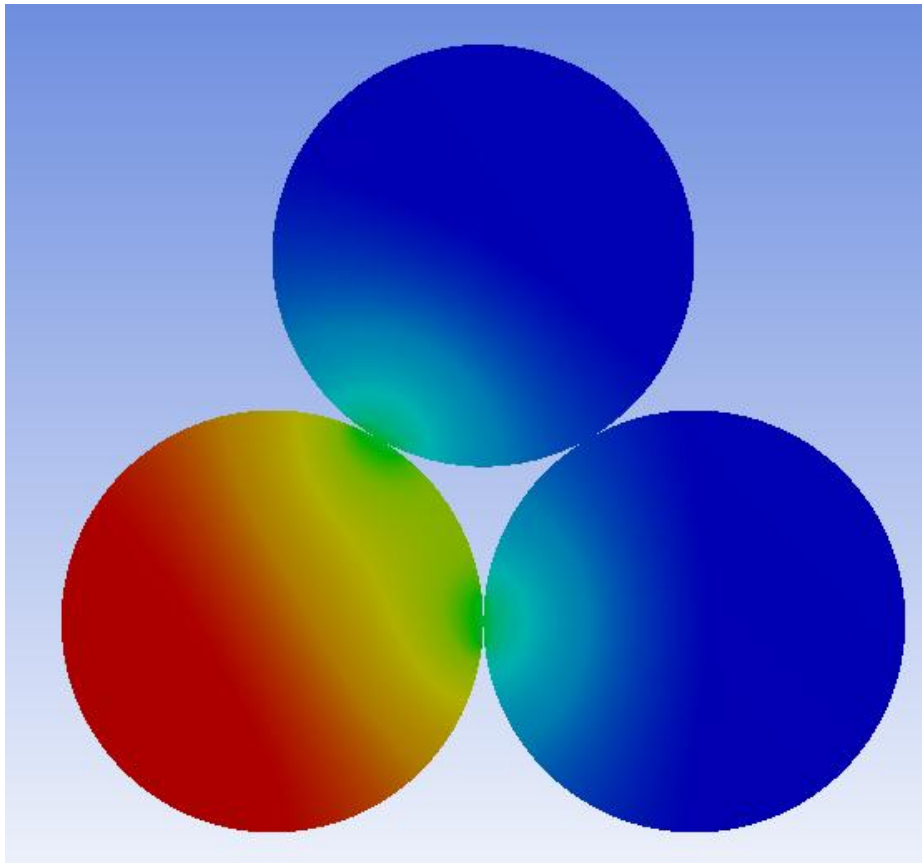


Figure III-17: Etat thermique des **trois particules** après 10s

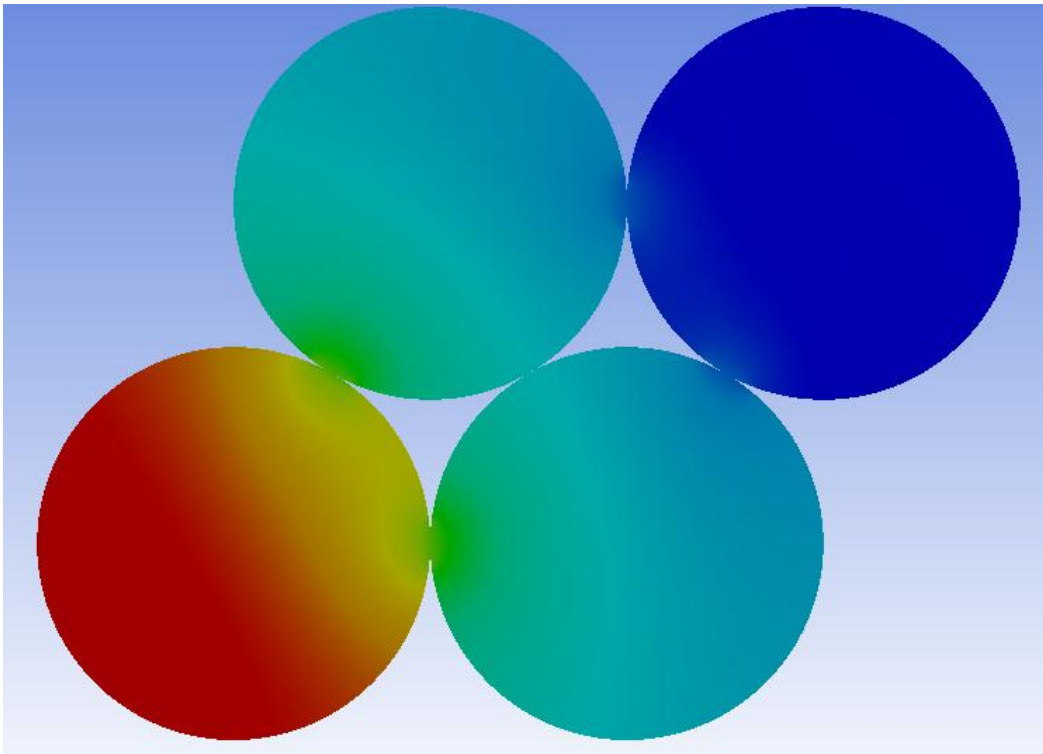


Figure III-18: Etat thermique des **quatre particules** après 10s

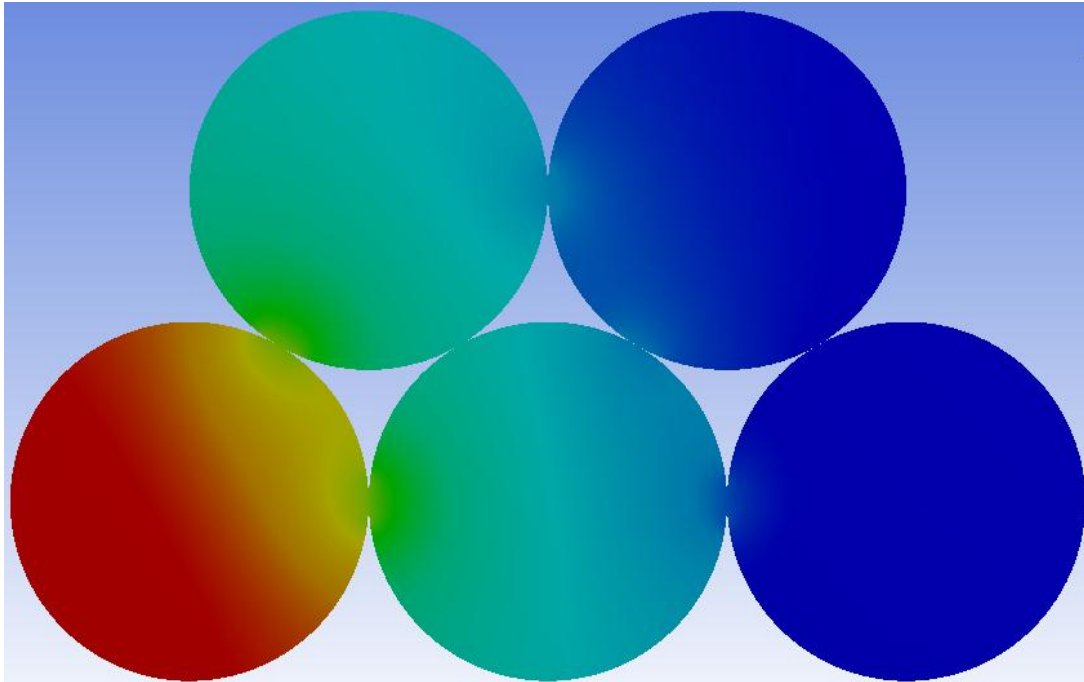


Figure III-19: Etat thermique des **cinq particules** après 10s

En termes de ressource de calcul le temps nécessaire pour chaque simulation ainsi que la mémoire vive allouée sont représentés sur le tableau suivant

Tableau III.3 : Le temps de simulation et la mémoire allouée par simulation

| Nombre de Particules | Mémoire (MB) | Temps de simulation (s) |
|----------------------|--------------|-------------------------|
| 2 | 668 | 132 |
| 3 | 1319 | 237 |
| 4 | 2188 | 369 |
| 5 | 2551 | 571 |

L'évolution du nombre des nœuds ainsi que celui des éléments sont représentées en fonction du nombre des particules dans les deux figures suivantes. La tendance est clairement linéaire avec une pente d'environ 5000. Ce qui signifie que l'augmentation du nombre des particules par seulement « 1 » entraîne une augmentation dans la densité du maillage par 5000 ce qui est très important.

La relation entre la mémoire de stockage nécessaire et le nombre des particules est moins claire, cependant elle peut aussi être approchée à une droite linéaire de pente égale à environ 650. Ceci signifie qu'une augmentation du nombre des particules par « 1 » nécessite 600MB de mémoire supplémentaire.

Le temps varie clairement avec le nombre des particules exponentiellement. Ceci signifie que l'augmentation du temps nécessaire pour la simulation varie extrêmement et de plus en plus vite par rapport au nombre des grains.

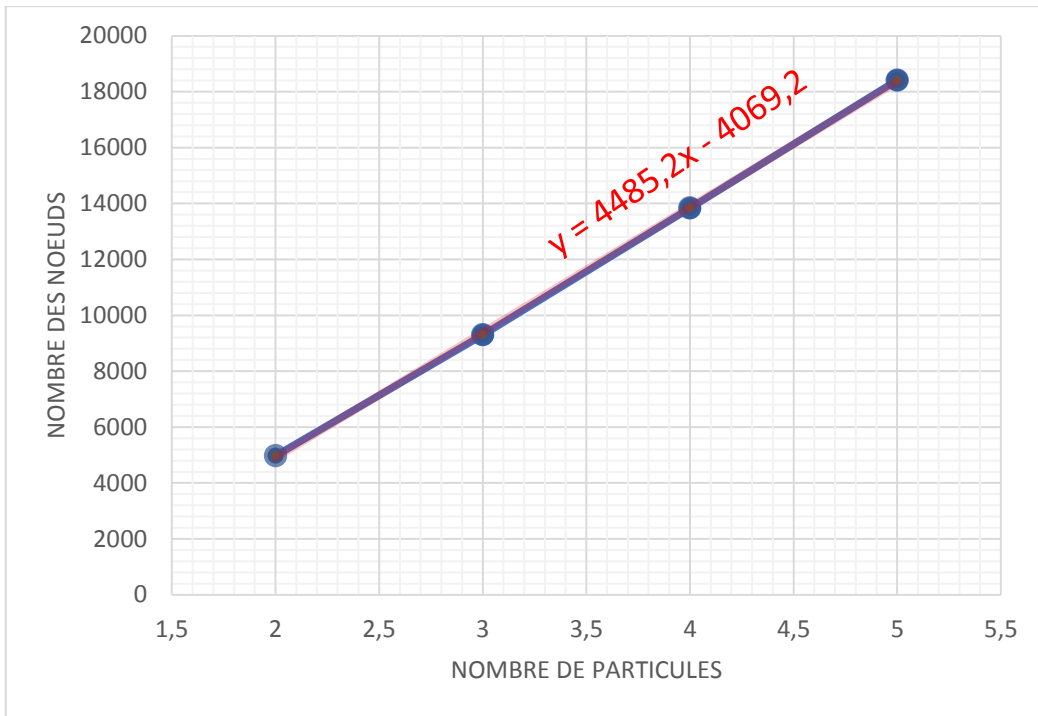


Figure III-20: Evolution du nombre des nœuds en fonction du nombre des particules.

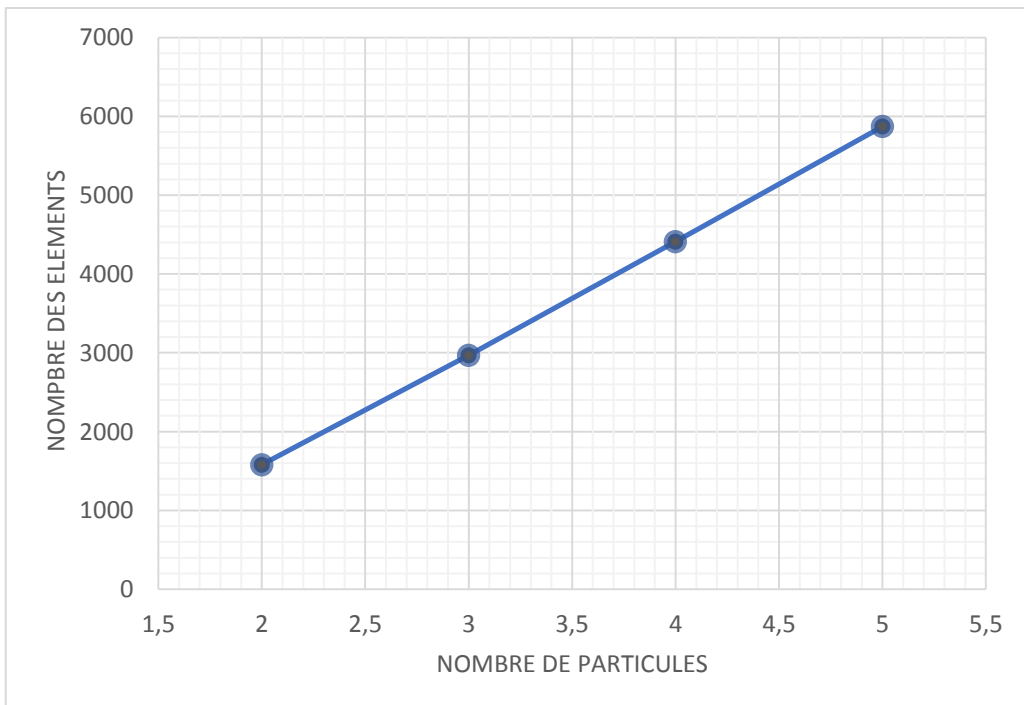


Figure III-21: Evolution du nombre des éléments en fonction du nombre des particules.

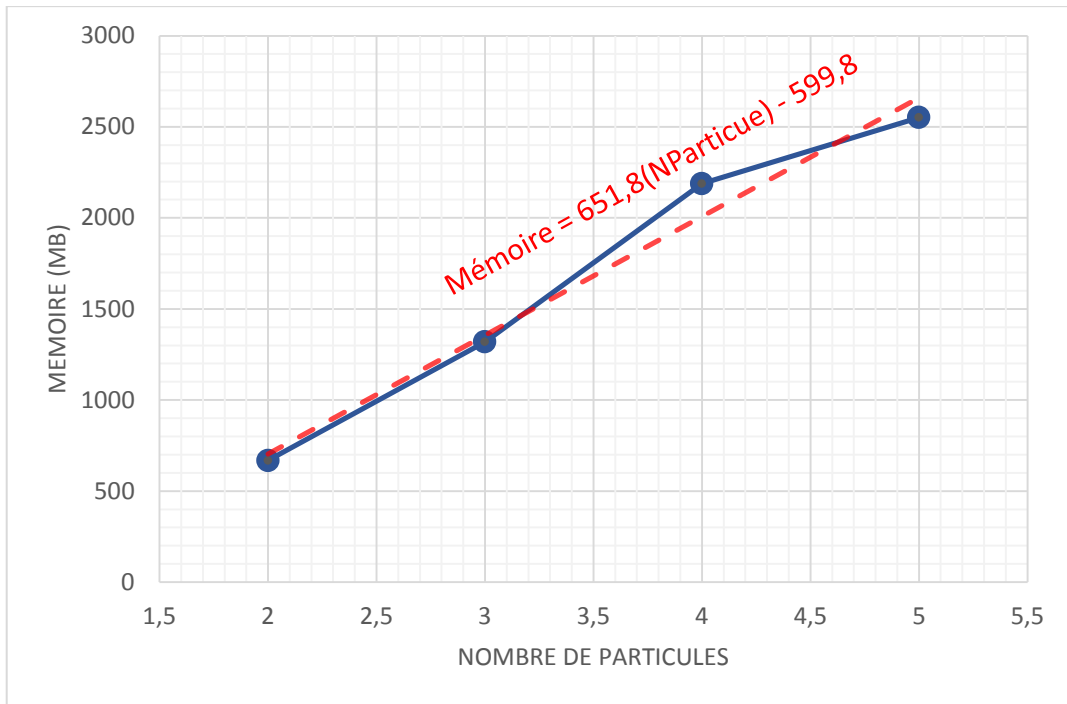


Figure III-22: Evolution de la mémoire nécessaire aux calculs en fonction du nombre des particules.

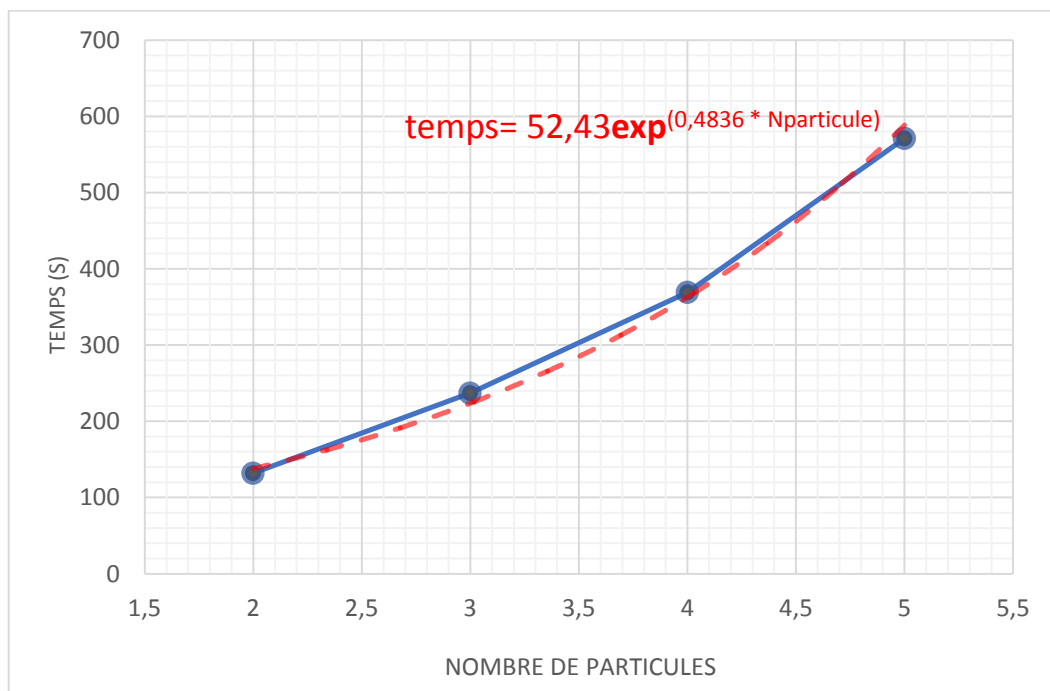


Figure III-23: Evolution du temps des simulations en fonction du nombre des particules.

III.6. Conclusion :

D'après les résultats des calculs liés à la taille de la zone de contact, on confirme la validité de l'hypothèse de l'homogénéité du champ de la température à faible nombre de Biot c'est-à-dire lorsque la zone de contact est petite.

Quant aux résultats liés aux nombres des particules, on a trouvé que les ressources de calcul augmentent de manière très significative avec la moindre augmentation dans le nombre des particules.

CONCLUSION GENERALE

CONCLUSIONS

En conclusion, l'objectif de ce mémoire étant d'étudier les limites des méthodes classiques (à maillage) à modéliser le transfert thermique par conduction dans les milieux granulaires, il est maintenant clair que ces méthodes sont inadéquates pour cela.

Ceci est motivé par l'énorme ressources nécessaires que ce soit en termes de mémoire de stockage ou de temps d'exécution. En fait, d'après les résultats des calculs liés aux nombres des particules, on a trouvé que les ressources de calcul augmentent de manière très significative (exponentielle pour le temps) avec la moindre augmentation dans le nombre des particules.

Par conséquent toute tentative de modélisation d'un milieu granulaire doit être faite par une méthode sans maillage, à condition que le nombre de Biot soit suffisamment petit pour justifier la validité de l'hypothèse de l'homogénéité du champ de la température. Cette condition est essentielle pour la mise en œuvre des méthodes sans maillage comme la méthode des éléments discrets (MED) et peut être assurée en diminuant la taille de la zone de contact entre les particules.

REFERENCES

- [1] X. Huang, « Influence des particules fines sur la stabilité d'un milieu granulaire », p.115.
- [2] J. Duran, « The physics of fine powders: plugging and surface instabilities », *Comptes Rendus Physique*, vol. 3, n° 2, p. 217- 227, janv. 2002.
- [3] X. Li, Y. Feng, et G. Mustoe, Éd., *Proceedings of the 7th International Conference on Discrete Element Methods*, vol. 188. Singapore: Springer Singapore, 2017.
- [4] J. Salençon, *Mécanique des milieux continus - tome 1 - concepts généraux*. ECOLE POLYTECH, 2005.
- [5] A. A. Munjiza, *The Combined Finite-Discrete Element Method*. John Wiley & Sons Ltd, 2004.
- [6] N. E. Abriak et F. Parsy, « Etude d'un matériau granulaire. Passage du milieu discontinu au milieu continu : approche expérimentale », *Rev. Fr. Geotech.*, 1993.
- [7] F. Ganiou, « Etude de la localisation des déformations dans les matériaux granulaires par la technique de traitement d'images », Doctorat, l'Université des Sciences et Technologies de Lille, Mécanique, 1994.
- [8] J. Holman, *Heat Transfer (Mcgraw-hill Series in Mechanical Engineering)*, Tenth Edition. The McGraw-Hill Companies, 2010.
- [9] S. Kakaç, Y. Yener, et C. P. Naveira-Cotta, *Heat Conduction, Fifth Edition*, 1st Edition. CRC Press, 2018.
- [10] J. N. Reddy et D. K. Gartling, *The Finite Element Method in Heat Transfer and Fluid Dynamics*, 0 éd. CRC Press, 2010.
- [11] I. Cherbourg-Manche et A. de Saint-Lô, « Conductivité thermique apparente d'un milieu granulaire en fonction des contraintes mécaniques ».
- [12] T. L. Bergman et F. P. Incropera, Éd., *Fundamentals of heat and mass transfer*, 7th ed. Hoboken, NJ: Wiley, 2011.
- [13] K. D. Cole, J. V. Beck, A. Haji-Sheikh, et B. Litkouhi, *Heat conduction using green's functions*, Second edition. CRC Press, 2010.
- [14] D. W. Hahn et M. N. Ozisik, *Heat Conduction*, Third Edition. John Wiley & Sons, Inc, 2012.

- [15] H. Fares, « Etude et simulation numérique de la convection naturelle dans des cavités fermées », Master académique en génie mécanique option énergétique, Université Mouloud Mammeri, Faculté de génie de la construction, Département de génie mécanique, Tizi-Ouzou, 2011.
- [16] B. J. M. Al-Minshawy, « Heat conduction from two spheres », Master of science in mathematics, King fahd university of petroleum & minerals, Dharaan, Saudi arabia, 2010.
- [17] Von Kármán, T., *Z. Angew. Math. Mech.*, 1, 232, 1921.
- [18] Y. a. Cengel, *Heat Transfer - A Practical Approach*, 2nd edition. United States: McGraw-Hill Education - Europe, 2002.
- [19] C. P. Kothandaraman, *Fundamentals of Heat and Mass Transfer*. New Age International, 2006.
- [20] C. J. Desai, « Heat transfer to a stationary and moving sphere immersed in a fluidized bed », Doctor of Philosophy, Iowa State University, Digital Repository, Ames, 1989.
- [21] V. D. Nguyen, C. Cogne, J. Fortin, M. Guessasma, E. Bellenger, et C. Marie, « Etude des transferts thermiques en milieux granulaires ».
- [22] J. N. Reddy et D. K. Gartling, *The Finite Element Method in Heat Transfer and Fluid Dynamics*, 0 éd. CRC Press, 2010.
- [23] C. P. Kothandaraman, *Fundamentals of Heat and Mass Transfer*. New Age International, 2006.
- [24] I. Cherbourg-Manche et A. de Saint-Lô, « Conductivité thermique apparente d'un milieu granulaire en fonction des contraintes mécaniques ».
- [25] L. Zhilin, Q. Zhonghua, et T. Tao, *Numerical Solution of Differential Equations - Introduction to Finite Difference and Finite Element Methods*, Cambridge University Press. 2017.
- [26] E. Suli et D. F. Mayers, *An Introduction to Numerical Analysis*, Cambridge University Press. 2003.
- [27] S. Elaydi, *An introduction to difference equations*, 3rd ed. New York: Springer, 2005.
- [28] Blazek, J. « Principles of Solution of the Governing Equations. Computational Fluid Dynamics: Principles and Applications », 29–75. 2003.
- [29] C. Hirsch, *Numerical computation of internal and external flows: fundamentals of computational fluid dynamics*, 2nd ed. Oxford ; Burlington, MA: Elsevier/Butterworth-Heinemann, 2007.

- [30] S. P. Neill et M. R. Hashemi, « Ocean Modelling for Resource Characterization », in *Fundamentals of Ocean Renewable Energy*, Elsevier, 2018, p. 193- 235.
- [31] Sabonnadière, J.-C., & Coulomb, J.-L. «Principles of the Finite Element Method. Finite Element Methods in CAD», 1–19. (1987).
- [32] Eric Goncalvès da Silva. Méthodes et Analyse Numériques. Engineering school. Institut Polytechnique de Grenoble, pp.99, 2007.
- [33] H. En-nefkhaoui, « Simulation numérique d'un écoulement visqueux incompressible dans une géométrie complexe par la méthode des matrices d'interpolation. », Docteur en mécanique, Université des sciences & technologies, Lille, 1994.
- [34] Vargas, Watson L., and J. J. McCarthy. "Heat Conduction in Granular Materials." *AIChE Journal* 47, No. 5, May 2001.
- [35] Gui, Nan, and Jianren Fan. "Numerical Study of Heat Conduction of Granular Particles in Rotating Wavy Drums." *International Journal of Heat and Mass Transfer* 84, May 2015.
- [36] Shi, Deliang, Watson L. Vargas, and J.J. McCarthy. "Heat Transfer in Rotary Kilns with Interstitial Gases." *Chemical Engineering Science* 63, No. 18, September 2008.

Résumé

Dans ce travail, nous avons présenté les limites des méthodes classiques (à maillage) à modéliser le transfert thermique par conduction dans les milieux granulaires et que la modélisation d'un milieu granulaire doit être faite par une méthode sans maillage, comme la méthode des éléments discrets (MED). L'outil utilisé est la suite Ansys. Les résultats liés aux nombres des particules montrent que les ressources de calcul augmentent de manière très significative (exponentielle pour le temps) avec la moindre augmentation dans le nombre des particules. Par conséquent toute tentative de modélisation d'un milieu granulaire doit être faite par une méthode sans maillage, à condition que le nombre de Biot soit suffisamment petit pour justifier la validité de l'hypothèse de l'homogénéité du champ de la température.

Abstract

In this work, we have presented the limits of classical (mesh) methods to model heat transfer by conduction in granular media and that modeling of a granular medium must be done by a non-mesh method, such as the discrete element method. (MED). The tool used is the Ansys suite Ansys. The results related to the number of particles show that the computational resources increase very significantly (exponentially for time) with the slightest increase in the number of particles. Therefore any attempt to model a granular medium must be made by a non-mesh method, provided that the Biot number is small enough to justify the validity of the assumption of the homogeneity of the temperature field.

ملخص

في هذا العمل ، قدمنا حدود الطرق الكلاسيكية (الشبكة) لنمذجة نقل الحرارة عن طريق التوصيل في وسط حبيبي وأن نمذجة الوسط الحبيبي يجب أن تتم بطريقة غير شبكية ، مثل طريقة العناصر المنفصلة. (MED). الأداة المستخدمة هي مجموعة Ansys . تظهر النتائج المتعلقة بعدد الجسيمات أن الموارد الحسابية تزداد بشكل كبير (أسياً بالنسبة للزمن) مع أدنى زيادة في عدد الجسيمات. لذلك يجب إجراء أي نمذجة لوسط حبيبي بطريقة غير شبكية ، بشرط أن يكون رقم Biot صغيراً بما يكفي لتبرير صحة افتراض تجانس مجال درجة الحرارة.