

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique



Université Ibn Khaldoun de Tiaret
Faculté des Sciences Appliquées
Département de Génie Mécanique



MÉMOIRE DE FIN D'ETUDES

Pour l'obtention du Diplôme de Master

Domaine : Sciences et Technologie
Filière : Génie Mécanique
Parcours : Master
Spécialité : Construction Mécanique

Thème

Influence de la géométrie de distribution de la porosité sur la flexion et la vibration des plaques en matériau fonctionnellement graduées FGM

Préparé par :

ZEREG Yassmina

Soutenu publiquement le : 04/10/2020, devant le jury composé de :

M. BALTACH Abdelghani	Maître de Conférences "A" (Univ. Ibn Khaldoun) Président
Mme MAKHFI Souâd	Maître de Conférences "B" (Univ. Ibn Khaldoun) Examinateur
M. ZAGANE Mohamed El Sallah	Maître de Conférences "B" (Univ. Ibn Khaldoun) Examinateur
M. HADJI Lazreg	Maître de Conférences "B" (Univ. Ibn Khaldoun) Encadreur

Année universitaire : 2019 - 2020

Remerciements

Tout d'abord nous remercions avant tous, dieu le tout puissant qui nous a donné le courage, et la volonté pour atteindre notre objectif, et tous les enseignants qui ont contribué à notre formation durant tous les cycles.

*Il est difficile d'exprimer en quelques mots nos profondes reconnaissances vers notre promoteur Mr. **Hadjji Lazog** qui a assuré la direction scientifique de ce travail et pris le temps de nous faire profiter avec patience de sa expérience, ses connaissances et sa disponibilité constante à la réalisation de ce travail, veuillez accepter monsieur les expressions de nos sincères remerciements.*

Nos remerciements vont aux membres du jury d'avoir honoré notre soutenance et tout l'effort fourni afin de juger ce modeste travail.

Nous portons avec gratitude de reconnaissance pour l'ensemble des enseignants du département de Génie Mécanique qui ont contribué à notre formation du master en Génie Mécanique.

Nos remerciements s'adressent également à l'ensemble du personnel technique et administratif du département de Génie Mécanique de Tiaret ainsi que tous nos collègues.

A tous ceux ou celles qui nous apportés leur soutien, trouvent ici, l'expression de nos vive et sincère reconnaissance.

Dédicaces

Je dédie le travail :

A mes chers parents.

A ma famille..., mes frères et sœurs.

A tous mes amis et collègues.

A la mémoire de ceux qu'on aime et qui sont partis...

Sommaire

Résumé	I
Liste des figures	II
Liste des tableaux	IV
Liste des notations	V
Introduction générale	2

Chapitre I : Généralités sur les matériaux à gradient de propriétés.

I.1. Introduction.....	5
I.2. Aperçu historique sur les matériaux à gradient de propriétés.....	5
I.3. La Définition et le concept d'un matériau à gradient de propriétés.....	6
I.4. L'intérêt d'utilisation des FGM	8
I.5. Méthodes d'élaboration des FGM:.....	8
I.5.1. Coulage en Bande (Tape Casting ou Doctor-Blade).....	9
I.5.2. Coulage Séquentiel en Barbotine (Slip Casting).....	10
I.5.3. Compaction Sèche des Poudres	11
I.5.4. Dépôt par Electrophorèse.....	11
I.5.5. Projection Plasma	11
I.5.6. C. V. D. et P. V. D.....	12
I.5.7. Frittage et Infiltration.....	12
I.5.8. Frittage Laser Différentiel	12
I.5.9. Implantation Ionique (Sputtering)	13
I.5.10. Dépôt par Centrifugation	13
I.6. Propriétés physiques et mécaniques des FGM	14
I.6.1. Propriétés physiques de l'aluminium	14
I.6.2. Propriétés physiques de la céramique.....	15
I.7. Différence entre FGM et les matériaux composites traditionnels.....	16
I.8. Propriétés matérielles effectives d'un matériau FGM... ..	17
I.9. Domaines d'application des matériaux à gradients évalués FGM... ..	18
I.10. Les différentes lois qui régissent la variation des propriétés matérielles suivant l'épaisseur d'une plaque FGM... ..	20
I.10.1. Propriétés matérielles de la plaque P-FGM	20
I.10.2. Propriétés matérielles de la plaque S-FGM	21
I.10.3. Propriétés matérielles de la plaque E-FGM	22
I.11. Conclusion	23

Chapitre II : Les théories des plaques FGM.

II.1. Introduction	25
II.2. Les Différents Modèles des structures composites dans l'élasticité bidimensionnelles ..	25

II.2.1..Approche monocouche équivalente	25
II.2.1.1..Les modèles classiques Love-Kirchhoff (théorie classique des plaque stratifiées CLPT)	26
II.2.1.2..Les modèles Reissner-Mindlin (théorie de déformation en cisaillement du premier ordre FSDT)	27
II.2.1.3.Les modèles d'ordre élevé.....	28
II.2.2. Approche par couche.....	33
II.3. Conclusion	35

Chapitre III : Analyse de la flexion et la vibration des plaques poreuses en matériau FGM.

III.1. Introduction	37
III.2. Formulation de la problématique.....	38
III.2.1. Configuration géométrique.....	38
III.2.2.Hypothèses de base	41
III.2.3.Cinématique et équations constitutive	42
III.2.4.Equations de mouvement	44
III.2.5. Solutions de Navier pour les plaques rectangulaires en FGM	48
III.3. Conclusion	51

Chapitre IV : Validation et comparaison des résultats.

IV.1. Introduction	54
IV.2.Caractéristiques des paramètres étudiées	54
IV.2.1. Caractéristiques de la plaque considérée	54
IV.2.2. Variations des paramètres étudiées	55
IV.3. Analyse des résultats et discussions de l'effet des paramètres.....	57
IV.3.1. Analyse de flexion.	57
IV.3.2. .Analyse dynamique	67
IV.4. Conclusion.....	70
Conclusion générale et perspectives	73
Recherches bibliographiques	76

Résumé

L'intérêt de cette étude est l'analyse du comportement statique et dynamique des plaques rectangulaires épaisses poreuses en FGM en tenant compte des porosités qui se produisent à l'intérieur des matériaux à gradient de propriété « FGM » lors de leur fabrication. La théorie de cisaillement hyperbolique d'ordre élevé à quatre variables est utilisée dans ce travail. Quatre types de forme de porosité différents sont utilisés pour les plaques à gradient de propriété. La loi de mélange modifiée couvrant les phases de porosité est utilisée pour décrire approximativement les propriétés des plaques FGM avec porosité. Sur la base de la présente théorie des plaques poreuses, les équations de mouvement sont dérivées du principe d'Hamilton. Les solutions sont obtenues en utilisant les équations de Navier. Une étude paramétrique sera menée afin de souligner les effets des différents paramètres gouvernant la réponse des plaques poreuses en FGM.

Mots clés : Matériaux à gradient de propriété, Flexion, Vibration, Porosité ; Principe d'Hamilton

Abstract

The most interesting of this study is the analysis of the static and dynamic behavior of thick rectangular porous FGM plates by taking into account the porosities that occur inside the materials during their fabrication. The hyperbolic shear deformation plate theory with four variables is used in this work. Four different porosity types are used for functionally graded plates. The modified mixture rule covering the porosity phases is used to roughly describe the properties of FGM plates with porosity. Based on the present theory of porous plates, the equations of motion are derived from the Hamilton principle. The solutions are obtained using Navier's equations. A parametric study will be carried out in order to underline the effects of the various parameters governing the response of FGM porous plates.

Keywords: Functionally graded materials, Bending, Vibration, Porosity, Hamilton Principle.

ملخص

تتم أهمية هذه الدراسة في تحليل السلوك الساكن والديناميكي للصفائح المستطيلة السمكية المثقبة المتدرجة وظيفياً ، مع مراعاة المسامات التي تنشأ داخل هذه المواد المتدرجة وظيفياً أثناء تصنيعها. في هذا العمل قمنا باستخدام نظرية القص ذات درجة عالية بأربع متغيرات. أربعة أنواع مختلفة من شكل توزيع المسامية للصفائح المتدرجة وظيفياً قمنا باستخدامها في هذا العمل. قمنا باستخدام قانون الخلط المعدل الذي يغطي مراحل المسامية لوصف بالتقريب خصائص الألواح المثقبة المتدرجة وظيفياً. استناداً إلى النظرية الحالية للصفائح المثقبة ، معادلات الحركة لهذه الصفائح تم استخراجها بالإعتماد على مبدأ هاميلتون. يتم الحصول على الحلول باستخدام معادلات نايفي. في نهاية هذا العمل قمنا بإجراء دراسة بارامترية من أجل إبراز آثار المعايير المختلفة التي تحكم استجابة الصفائح المثقبة المتدرجة وظيفياً

الكلمات المفتاحية : المواد المتدرجة وظيفياً، الانحناء، الاهتزاز، مسامات، مبدأ هاميلتون

Liste des figures

Figure. I.1 : un type d'un matériau FGM en céramique et métal	6
Figure. I.2 : variation de la composition d'un FGM ,(a) Conductivité thermique,(b) résistance mécanique.....	7
Figure. I.3 : Principe de la méthode coulage en bande.....	10
Figure. I.4 : Disposition du procédé frittage laser différentiel.....	13
Figure. I.5: Schéma du procédé dépôt par centrifugation.....	14
Figure. I.6 : La distribution composante des matériaux.	17
Figure. I.7: Modèles analytiques pour une couche en FGM.....	18
Figure. I.8: Les principaux domaines d'application des FGM [Houari 2011].....	19
Figure.I.9 : La variation du module de Young dans une plaque P-FGM.....	20
Figure. I.10: Variation de la fraction volumique dans une plaque S-FGM	22
Figure.I.11: Variation du module de Young dans une plaque E-FGM.....	23
Figure. II.1: Cinématique de Love-Kirchhoff.	26
Figure. II.2: Cinématique de Reissner-Mindlin.	27
Figure.II.3:Variation de la fonction de gauchissement $f(x_3)=x_3$ et $f'(x_3)$ suivant l'épaisseur.....	28
Figure. II.4: Cinématique de la théorie d'ordre supérieur.....	29
Figure. II.5: Variation de la fonction de forme $f(z)$ des différents modèles en fonction de l'épaisseur.....	32
Figure. II.6: Variation de la dérivée de la fonction de forme $f'(z)$ des différents modèles suivant l'épaisseur.....	32
Figure.II.7:Champ de déplacements des modèles couches discrètes,approche Cinématique(Nguyen.2004).....	34
Figure.II.8: Champ de déplacements des modèles zig-zag, approche cinématique (Nguyen.2004).....	34
Figure. III.1 : Géométrie et coordonnées de la plaque poreuse en FGM.....	40

FigureIV.1 : Géométrie et coordonnées de la plaque FGM.....	55
Figure. IV.2 : Effet de la forme de distribution de porosité sur la flèche adimensionnel en fonction du rapport (a/b) d'une plaque FGM en Al/Al ₂ O ₃ (k = 1; $\alpha = 0,2$).....	61
Figure. IV.3 : Effet de la forme de la distribution de porosité sur la flèche adimensionnel en fonction de (a/h) d'une plaque carrée en Al/Al ₂ O ₃ (k = 1; $\alpha = 0,2$).....	62
Figure. IV.4 : : Effet du coefficient de porosité sur la flèche centrale d'une plaque carrée en FGM (k = 1).....	63
Figure. IV.5 : Effet de la forme de distribution de la porosité sur la contrainte normale à travers l'épaisseur d'une plaque carrée en Al/Al ₂ O ₃ (a / h = 10;).....	64
Figure. IV.6 : Effet de la forme de distribution de la porosité sur la contrainte normale à travers l'épaisseur d'une plaque carrée en Al/Al ₂ O ₃ (a / h = 10;)	64
Figure. IV.7 : Effet de forme de la distribution de porosité sur la contrainte de cisaillement à travers l'épaisseur d'une plaque carrée en Al/Al ₂ O ₃ (a / h = 10;).....	65
Figure. IV.8 : Effet de forme de la distribution de porosité sur la contrainte de cisaillement à travers l'épaisseur d'une plaque carrée en Al/Al ₂ O ₃ (a / h = 10;)	66
Figure. IV.9 : Effet de forme de la distribution de porosité sur la contrainte de cisaillement à travers l'épaisseur d'une plaque carrée en Al/Al ₂ O ₃ (a / h = 10;).....	66
Figure.IV.10 : Effet de la forme de la distribution de porosité sur la fréquence fondamentale adimensionnel en fonction du rapport par rapport (a/h) d'une plaque carrée en FGM (k = 2)	69
Figure. IV.11 : Effet du coefficient de porosité sur la fréquence fondamentale adimensionnel de la plaque FGM (k = 2).....	70

Liste des tableaux

Tableau III.1 : Différentes formes de distribution de la porosité.....	40
Tableau IV.1 : Propriétés matérielles du matériau FGM utilisé dans cette étude.....	55
Tableau IV.2 : Paramètres adimensionnels utilisés et leurs expressions correspondants.....	56
Tableau IV.3 : Effets de l'indice de la fraction volumique k sur les déplacements dimensionnels de la plaque FGM (a/h=10).....	58
Tableau IV.4: Effet de l'indice de la fraction volumique k sur les contraintes adimensionnelles de la plaque carré en FGM soumise à un chargement sinusoïdale (a/h=10).....	59
Tableau IV.5 : Comparaison des trois premiers fréquences naturelles de la plaque Al/ZrO2 pour différentes valeurs du rapport $a/h, \bar{\omega} = \left(\omega \left(\frac{a^2}{h} \right) \sqrt{\frac{\rho_m}{E_m}} \right)$, k=1.....	68

Liste des notations

$[]$	Matrice.
$\{ \}$	Vecteur colonne.
E	Module de Young
E_c	Module de Young de la céramique
E_m	Module de Young de métal
E_1	Module de Young de la face supérieure
E_2	Module de Young de la face inférieure
$E(z)$	Module de Young en fonction de « z »
ν	Coefficient de Poisson
$\nu(z)$	Coefficient de Poisson en fonction de « z »
$V(z)$	Fraction volumique
p	Paramètre de matériau
b	la largeur de la plaque
h	L'épaisseur total de la plaque
L	La longueur de la plaque
u, v, w	Les déplacements suivant les directions x, y et z
u_0, v_0, w_0	Les composantes du champ de déplacement sur le plan moyen de la plaque
ϕ_x, ϕ_y, ϕ_z	Les rotations autour des axes x, y et z
$f(z)$	Fonction de gauchissement (fonction de cisaillement transverse)
$f'(z)$	La première dérivée de la fonction de gauchissement par rapport à z
g	La première dérivée de la fonction de gauchissement par rapport à z
ρ	La densité massique
σ_x, σ_y	Contraintes normales
$\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$	Contraintes de cisaillement
$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$	Déformations dans les directions x et y et z
$\gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$	Déformations de distorsion
δ	Opérateur de variation
$\delta u, \delta v, \delta w_b, \delta w_s$	Variation virtuel de déplacement

δU	Variation de l'énergie de déformation interne de la plaque.
δV	Variation de l'énergie de déformation externe de la plaque.
δT	Variation de l'énergie de déformation cinétique de la plaque.
w_b	Composante de la flèche due à la flexion
w_s	Composante de la flèche due au cisaillement
N	Efforts normaux de membrane
M^b	Moments de flexion pure
M^s	Moments de flexion supplémentaire due au cisaillement transverse
S	Effort de cisaillement pur
m, n	Nombres de mode
A_{ij}	Termes de rigidité en membrane de la plaque
B_{ij}	Termes de rigidité de couplage de la plaque
D_{ij}	Termes de rigidité de flexion de la plaque
A_{ij}^s	Termes de rigidité de la plaque en cisaillement
B_{ij}^s	Termes de rigidité de la plaque en cisaillement
D_{ij}^s	Termes de rigidité de la plaque en cisaillement
H_{ij}^s	Termes de rigidité de la plaque en cisaillement
$I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, I_6$	constante d'inertie
Q_{ij}	Les coefficients de rigidité
∂	Dérivée partielle
a_{ij}	Valeurs propres
i, j	Nombres naturels
$[K]$	Matrice de rigidité
$[M]$	Matrice de masse
$\{\Delta\}$	Le vecteur de colonne
$\bar{\omega}$	Les fréquences adimensionnelles
ω	Fréquence naturelle de la plaque FGM
ϕ_α	Rotation de la normale au plan moyen autour des axes $x \alpha$

γ_α^0	Déformation de cisaillement mesurée sur le plan
ϕ_i	Rotations des sections déformées autour des axes 1 x et 2 x (termes du premier ordre)
k_x^b	Courbure suivant X due à la flexion.
k_x^s	Courbure suivant X due au cisaillement.
$U_{mn}, V_{mn}, W_{bmn},$ et W_{smn}	Paramètres arbitraires.
q	Charge transversale.

Introduction générale

Introduction générale

Les matériaux composites légers dont les rapports de résistance/poids et épaisseur/poids sont très grands, ont été utilisés avec succès dans l'industrie de génie civil, aéronautique et dans d'autres applications technologiques. Cependant, les matériaux composites traditionnels sont inutilisables sous un environnement à hautes températures. Les métaux ont été généralement utilisés dans le domaine de la technologie pendant plusieurs années grâce à leur excellente résistance mécanique et dureté. Mais dans des conditions de hautes températures, la résistance mécanique du métal devient faible comme pour les matériaux composites traditionnels. Les matériaux en céramique ont d'excellentes caractéristiques en résistance, thermique. Cependant, les applications de la céramique sont habituellement limitées du fait de leur faible dureté.

Le développement des matériaux composites a permis d'associer des propriétés spécifiques à différents matériaux au sein d'une même pièce. L'optimisation locale de ces propriétés par association d'un matériau de haute dureté à la surface d'un même matériau tenace pose le problème de l'interface, La transition brusque dans les propriétés des matériaux à travers l'interface entre les matériaux discrets peut entraîner une grande contrainte inter-laminaire ou une forte concentration de contraintes conduisant à la déformation plastique ou de fissuration. Une technique pour surmonter ces effets nuisibles et d'utiliser un matériau à gradient évalué (de l'anglicisme FUNCTIONALLY GRADED MATERIALS (FGM)).

Récemment, une nouvelle classe de matériaux composites connue sous le nom de matériau fonctionnellement gradués (FGM), ou matériaux à gradient de propriétés, a attiré une attention particulière.

Au stade de la production des matériaux fonctionnellement gradués (FGM), des micro-vides et des porosités peuvent se produire en raison d'erreurs de production ou techniques. Avec la porosité, le comportement mécanique des matériaux fonctionnellement gradués change considérablement. Ainsi, l'effet de la porosité sur les matériaux fonctionnellement gradués est un problème important et doit être étudié afin de concevoir en toute sécurité ces composites.

Plusieurs chercheurs ont étudiés le comportement des plaques en matériau FGM, et qui ont définis la fraction volumique en utilisant plusieurs lois de mélange; tel que la loi de puissance P-FGM, la loi exponentielle E- FGM ou encore la loi sigmoïde S-FGM pour assurer une répartition harmonieuse des contraintes entre tous les interfaces.

Le travail présenté dans ce mémoire s'articule autour de quatre chapitres comme suit :

- Le premier chapitre traite des généralités sur les matériaux à gradients évalués FGM et leurs domaines d'application.
- Au second chapitre, on présente les différentes théories des plaques.
- Le troisième chapitre, on présente une analyse statique et dynamique des plaques poreuses en matériaux à gradient de propriété « FGM ».
- Le quatrième chapitre contient une validation et comparaison des résultats.

Le présent travail se termine par une conclusion générale où on souligne l'efficacité de la présente théorie de cisaillement dans la résolution du comportement statique et dynamique des plaques poreuses en FGM simplement appuyées ainsi par des perspectives envisagées pour des travaux futures.

CHAPITRE I

**GENERALITES SUR LES MATERIAUX A
GRADIENTS DE PROPRIETES.**

I.1.Introduction

Un matériau, c'est quoi?

Il faut d'abord définir le concept de matériau. Un matériau n'est pas de la matière première brute, mais une matière élaborée en vue d'un usage. Cela nécessite une symbiose entre la préparation de nouveaux composites et la conception de nouveaux objets. Il est évident que la diversité des matériaux modernes est telle qu'on ne peut en faire une présentation exhaustive en quelques lignes. Il est plus en plus difficile de faire un choix entre les matériaux dits "traditionnels" comme le bois, le béton, l'acier et les matériaux "évolutifs" comme les céramiques, le métal, les plastiques. La tendance actuelle n'est d'ailleurs pas de les opposer comme des ennemis mais de les marier pour engendrer des matériaux plus performants tel que le matériau à gradient de propriétés "FGM". Ainsi la notion de matériau, matière première massive est dépassée par la notion de matériau objet technique très élaboré ayant une fonction précise à remplir.

I.2.Aperçu Historique Sur Les matériaux à gradient de propriétés

L'amélioration des performances des pièces structurales peut conduire à rechercher, au sein d'un même matériau, des propriétés différentes, souvent antagonistes, mais localement optimisées. Le développement des matériaux composites a permis d'associer des propriétés spécifiques à différents matériaux au sein d'une même pièce.

L'optimisation locale de ces propriétés, par association d'un matériau de haute dureté à la surface d'un matériau tenace par exemple, pose alors le problème de l'interface. Par exemple, une couche d'un matériau céramique peut coller à la surface d'une structure métallique pour former un revêtement barrière thermique dans les applications à haute température. La transition brusque dans les propriétés des matériaux à travers l'interface entre les matériaux discrets peuvent entraîner une grande contrainte inter laminaire ou une fortes concentrations de contraintes conduire à la déformation plastique ou de fissuration.

Une façon pour surmonter ces effets nuisibles on doit employer un matériau à gradient de propriété (en anglais : FUNCTIONALLY GRADED MATERIALS « FGM »).

Ces dernières années, les matériaux à gradients de propriétés ont été développés pour leurs excellentes propriétés mécaniques. Ces matériaux ont de grandes performances et capables de résister aux températures ultras hautes.

Les FGMs sont au microscope des matériaux Composites non homogènes. Un groupe de scientifiques, à Sendai (japon) a proposé pour la première fois le concept de FGM en 1984,

comme étant un nouveau matériau avec une barrière thermique ou des propriétés calorifuge (isolation thermique).

Au début, les FGMs ont été conçus en tant que matériaux thermiques de barrière dans les applications aéronautiques et les réacteurs .C'est par la suite que les FGMs ont développés dans le domaine militaire, l'automobile, le biomédicale, l'industrie de semi-conducteur et toutes utilisations dans un environnement à hautes températures.

I.3. La Définition et le concept d'un matériau à gradient de propriétés

Un matériau à gradient de propriétés c'est un type de matériaux composites compose de deux ou plusieurs matériaux relatif à des fractions volumiques et microstructure qui sont conçus pour avoir une continuité spatiale des variable .un FGM est produit en changeant sans interruption la fraction de volume dans la direction d'épaisseur pour obtenir un profil bien déterminer. La plupart des chercheurs emploient trois fonctions pour décrire la variation de la fraction volumique qui sont :

- La fonction de puissance (P-FGM),
- La fonction sigmoïde (S-FGM),
- La fonction exponentielle (E-FGM),

Ces matériaux FGMs sont généralement faits à partir d'un mélange de métaux et de céramique (figure. I.1) par un processus de métallurgie de poudre, le coté métal riche est typiquement place dans les régions ou les propriétés mécaniques, comme la dureté, le besoin d'être élevés. En revanche, le céramique riche, ce qui à la conductivité faible et peut résister aux températures plus élevées, est place dans les régions de grands gradient de la température.

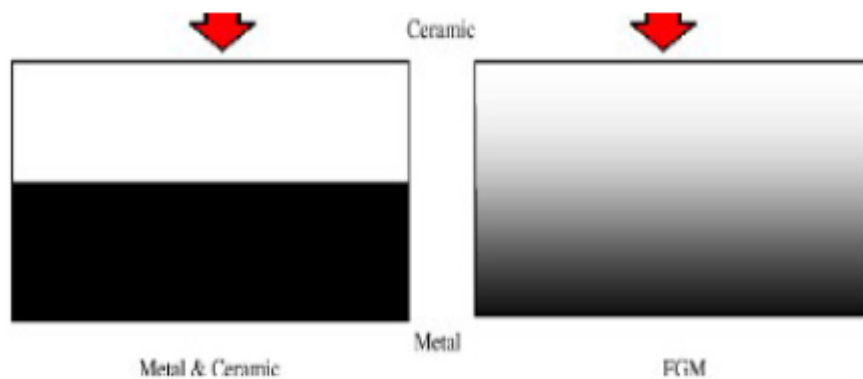


Figure. I.1 : un type d'un matériau FGM en céramique et métal (Hadji 2012).

Le concept de "matériaux à gradient de propriétés " a été développé dans le laboratoire national d'aérospatial du Japon en 1984 par M. Niino et ses collègues à Sendai. L'idée est de réaliser des matériaux utilisés comme barrière thermique dans les structures spatiales et les réacteurs à fusion (Koizumi.1992). Les FGMs peuvent être utilisés pour différentes applications, telles que les enduits des barrières thermiques pour les moteurs en céramique, turbines à gaz, couches minces optiques,

Les matériaux à gradient de propriétés sont donc des matériaux composites avec un caractère au microscope non homogène. Constitué de plusieurs couches contenant des composants différents tels que les céramiques et les métaux. Le changement continu dans la composition et donc dans la microstructure du matériau distingue les FGMs de matériaux composites conventionnels. Dans certains cas, on peut avoir un FGM constitué d'un même matériau mais microstructure différente.

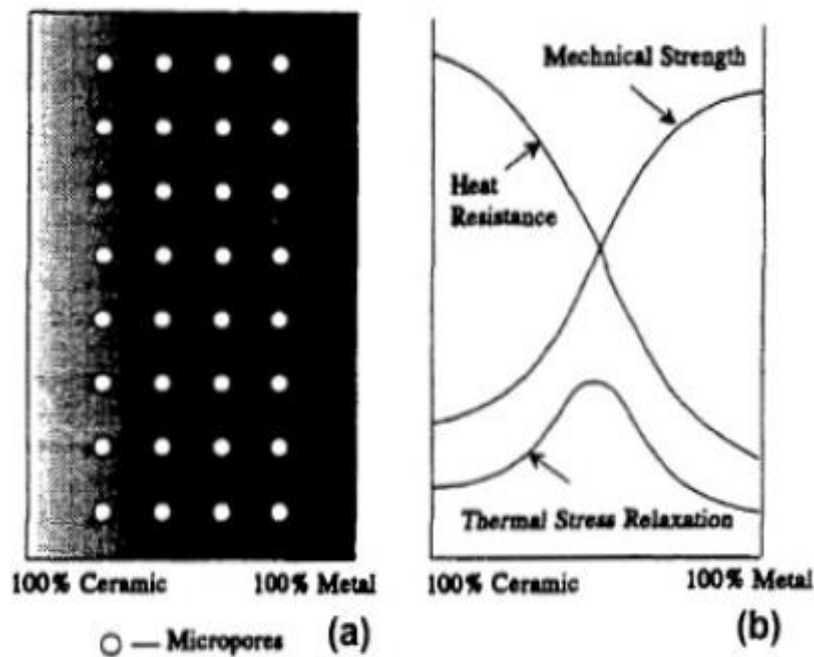


Figure. I.2 : Variation de la composition d'un FGM (Hadji 2012).

(a) Conductivité thermique,

(b) résistance mécanique,

En 1987, le gouvernement japonais a lancé un vaste projet intitulé "la recherche sur la technologie de base pour développement de matériaux à gradient de propriétés et l'étude de la relation des contraintes thermiques". L'intérêt du projet est de développer des matériaux présentant des structures utilisées comme barrière thermique dans les programmes aérospatiaux. Les matériaux constituant les parois des engins spatiaux sont appelés à travailler à des températures de surface de 1800°C ainsi qu'un gradient de température de l'ordre 1300°C. A cette année-là, aucun matériau industriel n'était connu pour supporter de telles sollicitations thermomécaniques (Koizumi.1992).

I.4. L'intérêt d'utilisation des FGM

Il y a beaucoup d'intérêt pour la mise sur pied des structures ainsi les conditions fonctionnelles peuvent varier avec l'endroit. Dans la plupart des cas, ceci impliquera de varier les matériaux qui sont employés aux endroits spécifiques dans la structure ayant pour résultat les interfaces discrètes dans tout. A nombre de proposé des technologies manufacturières pour le traitement de FGM.

I.5. Méthodes d'élaboration des FGM

L'obtention des qualités désirées nécessite de plus l'intervention de techniques sophistiquées et subtiles comme l'utilisation de lasers, de plasmas, l'implantation ionique, de dépôts en phase vapeurs, etc.

Les procédés de fabrication d'un matériau à gradient évalués peuvent habituellement être divisés en construisant la structure dans un espace hétérogène (mélange graduel) et la transformation de cette structure en matériau en bloc (solidification).

Les processus de mélange graduel peuvent être classés suivant ses constituants, l'homogénéisation et la ségrégation. Les procédés élémentaires sont basés sur la fabrication par étape de structure en matériaux graduels précurseurs ou poudres. Les avancés en technologie d'automatisation durant les dernières décennies ont rendu des processus élémentaires de progression technologiquement et économiquement durables. Dans la procédure d'homogénéisation qui traite une interface pointue entre deux matériaux est convertie dans un gradient par transport matériel. Les procédés d'homogénéisation et de ségrégation produisent un gradient continu, mais ont des limitations au sujet des types de gradients qui peuvent être produits.

Habituellement, le séchage et la solidification suivent les étapes du mélange graduel. Le besoin de ces processus de consolidation doit adapter aux FGM :

- Des conditions de procédure choisie pour ne pas altérer ou détruire le gradient en mode non contrôlé.
- Prêter attention a tout rétrécissement inégal du FGM pendant la consolidation.

Ces dernières années, les travaux menés au laboratoire ont permis de développer une méthode originale pour élaborer des composites à gradient continu de composition. Cette méthode est basée sur une technique de Co-sédimentation de poudres en milieu proportionnelle à la densité du matériau et au carré du diamètre de particule. En contrôlant et en adaptant les répartitions granulométriques de chaque poudre, il est possible d'obtenir différents gradient de concentration dans le dépôt formé à l'issue de sédimentation.

Il existe de nombreuses méthodes d'élaboration des matériaux a gradient de propriétés, les techniques les plus employées sont brièvement expliquées ci-dessous :

I.5.1. Coulage en Bande (Tape Casting ou Doctor-Blade)

Le coulage en bande consiste à couler une barbotine de poudres fines en suspension aqueuse ou non-aqueuse (la plupart des travaux commerciaux utilisent le procédé non-aqueux) sur un support plan en couches minces et régulières. Selon les cas, c'est soit la lame (doctor-Blade) qui est animée d'un mouvement de translation, soit le support qui se déplace sous la lame (figure. I.3). Les produits obtenus sont des feuillets avec des épaisseurs contrôlées (25-1000 μ m). Après un raffermissement de la pâte, les feuillets sont démoulés et ensuite découpés.

Le solvant doit avoir un point d'ébullition très bas et une viscosité faible. Il doit être soluble avec le liant le plastifiant et les autres ajouts, mais ne doit être ni soluble ni réactif avec la poudre céramique. Le liant donne une grande résistance mécanique au produit cru en permettant son maniement. Généralement un plastifiant est ajouté au liant pour baisser sa viscosité .Les liants (Plastifiants et dé flocculant) doivent être totalement dégagés pendant le délainage.

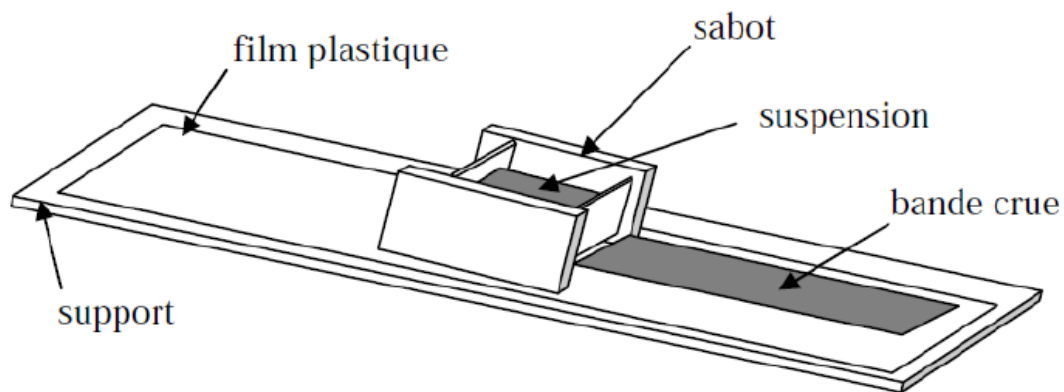


Figure. I.3 : Principe de la méthode coulage en bande (Hadji 2012).

L'un des plus anciens travaux sur l'étude de cette technique a été publié par Howatt. En 1947, et depuis d'autres travaux ont été réalisés (Reddy 1984). Ce procédé est devenu une technique économique pour la production des substrats céramiques de type Al_2O_3 et surtout pour les condensateurs à base de $BaTiO_3$. On peut d'ailleurs remarquer qu'il s'agit déjà de F.G.M puisqu'il faut empiler des couches conductrices (métaux rares) avec des couches diélectriques ($BaTiO_3$ principalement).

Le procédé de coulage en bande est largement utilisé pour réaliser des matériaux composites laminaires suivant deux méthodes :

- Réalisation directe de bandes multicouches grâce à un système de lames multiples c'est le cas des tri-couches élaborées par (Mistler 1973).
- Empilement des couches élaborées séparément dont la cohésion est ensuite assurée par une étape de thermo-compression (Reddy 1984).

I.5.2. Coulage Séquentiel en Barbotine (Slip Casting)

Le coulage en Barbotine (Slip Casting) consiste à couler une suspension dans un moule poreux qui va drainer le liquide grâce aux forces capillaires, laissant un tesson (couche de poudre compacte) sur la surface du moule. Après séchage, on obtient le corps en cru. Donc le coulage se effectuée en deux étapes essentielles :

- Formation du tesson ou « prise ».

- Consolidation du tesson « raffermissement ».

La filtration, c'est à dire la formation du tesson lors du coulage, peut être considéré comme un processus d'élimination d'une partie de l'eau de la barbotine; Cette eau migre à travers la couche de tesson déjà formée, sous l'effet :

- Du pouvoir de succion du plâtre (coulage classique) ; ou d'une pression appliquée sur la barbotine (coulage sous pression).

Dans le cas de la fabrication de multicouches, après la formation du premier tesson, le dépôt de la deuxième couche s'effectue de manière telle que la barbotine ne pénètre pas dans le tesson formé. Ce procédé est successivement reproduit pour les autres couches.

I.5.3. Compaction Sèche des Poudres

Cette technique consiste à verser successivement dans un moule en acier les poudres, et à chaque fois qu'une poudre est versée une faible compression est exercée. Ensuite la compaction de l'ensemble des couches sera effectuée. Ce procédé est suivi généralement par une pression isostatique et un délainage. La densification sera enfin l'étape finale (Bishop 1993). Ce procédé peut être envisagé pour la fabrication de pièces de formes complexes. En effet il s'applique aussi avec la technique du pressage isostatique, et de façon industrielle.

I.5.4. Dépôt par Electrophorèse

Le dépôt par électrophorèse est un procédé dans lequel une suspension colloïdale stable est placée dans une cellule contenant deux électrodes, le dépôt se fait par le mouvement des particules chargées au sein de la solution vers la cathode ou l'anode selon le signe de la charge des particules due à un champ électrique. L'élaboration des F.G.M peut se faire donc par le dépôt séquentiel des matériaux (Abdizadeh H 1997).

I.5.5. Projection Plasma

Un gaz soumis à une forte température (par exemple celle d'un arc électrique), se transforme en un état ionisé (plasma). Cette transformation est accompagnée d'un dégagement de chaleur important. Si une particule de céramique se trouve dans cet environnement, elle se fond totalement ou superficiellement, ce qui permet de la situer sur un substrat. La projection plasma des particules des divers matériaux est devenue une méthode très utilisée pour fabriquer des FGM. L'équipement relativement simple, le rendement élevé du dépôt des particules sur des substrats à géométrie compliquée, les performances des surfaces en

fonctionnement et la compatibilité des céramiques avec les métaux sont les avantages essentiels de cette technique (Steffes.H.D 1990).

I.5.6. C. V. D. et P. V. D.

Les dépôts chimique ou physique en phase vapeur sont des techniques dans lesquelles les atomes du matériau sont déposés sur la surface du substrat. Les techniques de C.V.D. et P. V. D. peuvent être utilisées pour façonner un F.G.M sur des substrats de formes compliquées.

I.5.7. Frittage et Infiltration

Cette technique est constituée de deux étapes et convient à la fabrication d'un composite à gradient de fonction composé de deux matériaux dont les températures de fusion sont très différentes :

- La première étape est de fabriquer une matrice frittée du matériau à haute température de fusion avec un gradient de porosité.
- La seconde étape est de remplir ces porosités avec le deuxième matériau fondu par infiltration.
- Le résultat est excellent pour la diminution de la contrainte thermique.

Cette technique peut être généralement appliquée pour plusieurs combinaisons de matériaux qui sont chimiquement inertes et qui ont des points de fusion bien différents les uns par rapport aux autres.

I.5.8. Frittage Laser Différentiel

Le rayonnement thermique du laser permet le contrôle de la température et la focalisation du point à chauffer. La différence de l'intensité de l'irradiation sur différents points du matériau, provoque un frittage différentiel le long de la pièce, ce qui résulte en des microstructures différentes, dépendant de la position du point irradié. Cette technique a été utilisée pour élaborer un F.G.M de PSZ/Mo. La figure. I.4 montre schématiquement la disposition du procédé utilisé par ces auteurs.

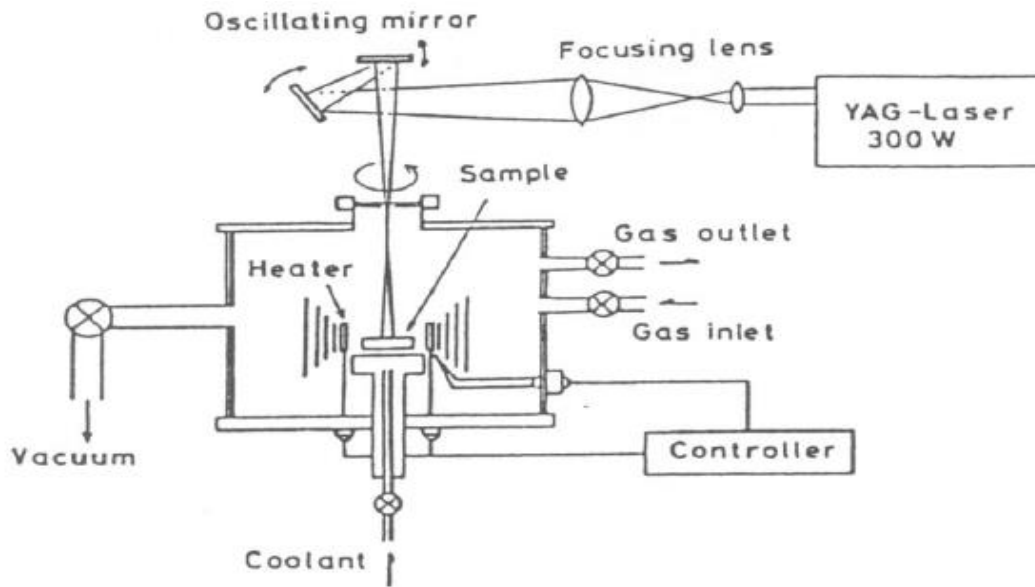


Figure I.4 : Disposition du procédé frittage laser différentiel (Hadji 2012).

I.5.9. Implantation Ionique (Sputtering)

C'est une technique avancée pour la fabrication des F.G.M permettant de réaliser seulement des épaisseurs fines ($<1\mu\text{m}$) sur différents substrats (plastiques, céramiques, et métaux). Le traitement s'effectue par les faisceaux énergétiques d'ions ou via des gaz réactifs. Les couches fabriquées présenteront un gradient de composition qui peut être très finement contrôlé (Abdizadeh H.1997).

I.5.10. Dépôt par Centrifugation

La technique consiste à verser une suspension colloïdale relativement diluée dans des flacons cylindriques, le tout est soumis à une centrifugation. La sédimentation s'opère et le liquide surnageant est retiré. Ce procédé est répété pour obtenir des multicouches (figure. I.5) (Abdizadeh H.1997).

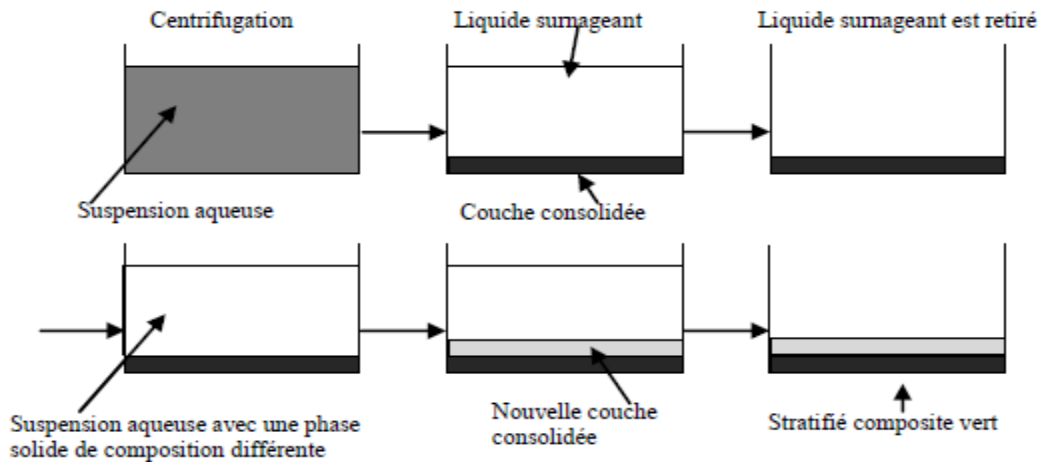


Figure I.5 : Schéma du procédé dépôt par centrifugation(Abdizadeh H.1997)..

I.6. Propriétés physiques et mécaniques des FGM

Pour ce travail le matériau FGM choisi est (Aluminium-Céramique).

I.6.1. Propriétés physiques de l'aluminium

Définition : L'Aluminium est un métal blanc qui après polissage peut devenir réfléchissant.

Propriétés physiques : L'Aluminium a une température de fusion relativement basse d'environ 660° . Il en résulte une facilité de fusion qui présente un avantage certain pour les opérations de fonderie. L'Aluminium est très ductile, on peut aisément le mettre en forme. La masse volumique de l'Aluminium est de 2700 kg/m^3 . L'utilisation de l'Aluminium s'impose donc dans les domaines aéronautiques et du transport.

Propriétés mécaniques : Les propriétés mécaniques des métaux présentent un grand intérêt dans la vie quotidienne, elles peuvent être classées en deux groupes :

- Celles qui se rapportent à la résistance mécanique du métal :

- Résistance à la traction.
- Résistance à la pénétration (dureté).

- Celles qui concernent les modifications de forme que le métal peut subir sans se briser :

- La malléabilité (mises en feuilles).
- La ductilité (mise en fils).

Propriétés des alliages d'aluminium : L'Aluminium a pour propriétés une :

- Température de travail élevée.
- Très bonne résistance à la corrosion.
- Légèreté.
- Très bonnes solidités, dureté et rigidité.
- Bon rapport force/poids.
- Bonnes propriétés de protection contre les interférences électromagnétiques.
- Bonne conductivité thermique.
- Conductivité électrique élevée.
- Bonnes caractéristiques de finition.
- Entièrement recyclable.

Résistance à la corrosion : Grâce à la couche d'oxyde qui se forme en surface, les alliages d'Aluminium résistent à la corrosion. On peut rendre cette couche protectrice d'oxyde plus épaisse par galvanisation. L'Aluminium et ses alliages peuvent être utilisés sans protection supplémentaire comme revêtement extérieur de bâtiments. Par contre dans les milieux corrosifs, les alliages d'Aluminium peuvent subir les effets de la corrosion. Des piqûres, de la corrosion sous contrainte, de la fatigue corrosion, voire de la corrosion généralisée peuvent se développer. Pour des conditions données, la sévérité de l'attaque dépend de l'alliage utilisé et de son état.

I.6.2. Propriétés physiques de la céramique

Définition : La céramique résulte des terres et des roches broyées (matériaux géologiques) ou bien d'une argile qui sera modelée puis cuite sous haute température (transformation irréversible) ce qui fait perdre au matériau sa plasticité donc il ne peut plus se réhydrater.

Propriétés physiques : La céramique a une facilité de fusion qui présente un avantage certain pour les opérations de fonderie. La masse volumique de la céramique est de 3800 kg/m^3 . L'utilisation de la céramique s'impose dans les domaines de l'habitat et du design,

l'industrie céramique et métallurgique, aéronautique et spatial, médicale et dans les revêtements.

Propriétés mécaniques : Les propriétés mécaniques du céramique dépendent des :

- Matières première employées.
- Méthodes de fabrication qui fixent les microstructures finales et déterminent la répartition des différentes phases en présence.

Propriétés des céramiques : Les propriétés de la céramique sont :

- Un module de YOUNG élevé (Liaisons, covalente, ioniques).
- Une dureté élevée (Abrasif, outils de coupe, surfaces de frottement qui doivent résister à l'usure, résistance mécanique élevée, bonne tenue à chaud, rigidité élevée).
- Une très bonne résistance à la compression non à la traction (Résistance à la compression = 200 MPa).

• **I.7. Différence entre FGM et les matériaux composites traditionnels**

Un modèle simple illustrant les différences entre les matériaux à gradient de propriétés (FGM) et les matériaux plus conventionnels est montré sur la (figure I.6) : (a) un matériau plans composé, (b) un matériau relié et (c) un matériau à gradient de propriété. Le matériau plan composé à une caractéristique plane, et le matériau relié a une frontière sur l'interface de deux matériaux. Les FGM ont de excellentes caractéristiques qui diffèrent de ceux des matériaux plans composés et reliés. Par conséquent, les FGM attirent l'attention en termes de leur application dans les domaines industriels. Puisque les FGM ont une double propriété des deux matières premières qui sont mélangées ensemble, et la distribution composante est graduée sans interruption.

Par exemple, l'un des FGM qui se composent du métal et en céramique a la caractéristique de la conductivité thermique et de la force métallique dans le côté en métal et la résistivité aux hautes températures dans le côté en céramique.

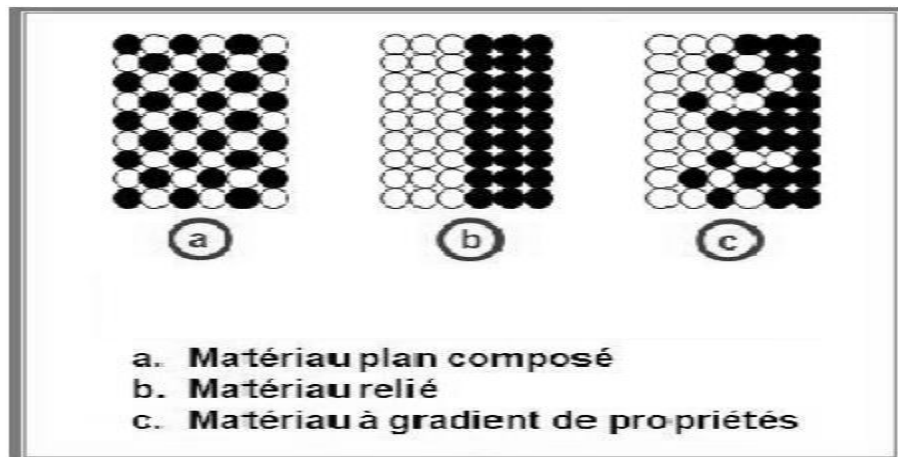


Figure. I.6 : La distribution composante des matériaux (Bouiadjra 2015).

I.8. Propriétés matérielles effectives d'un matériau FGM

Les matériaux à gradient de propriétés sont généralement fabriqués par deux phases matérielles avec des propriétés différentes. Une description détaillée des microstructures graduée réelles n'est pas disponible, excepté peut-être pour l'information sur la distribution de fraction volumique. Puisque la fraction de volume de chaque phase varie graduellement dans la direction de la graduation, les propriétés effectives des FGM changent le long de cette direction.

Par conséquent, nous avons deux approches possibles pour modéliser un FGM.

- La première approche : une variation par tranche de fraction volumique de la céramique ou du métal est assumée, et le FGM est pris pour être posé avec la même fraction de volume dans chaque région, c.-à-d., couches quasi homogènes de céramique-métal (figure. I.7a).
- La deuxième approche : une variation continue de la fraction volumique de la céramique ou du métal est assumée (figure. I.7b), et la fraction de volume en métal peut être représentée suivant une fonction dépendante de la coordonnée Z (épaisseur).

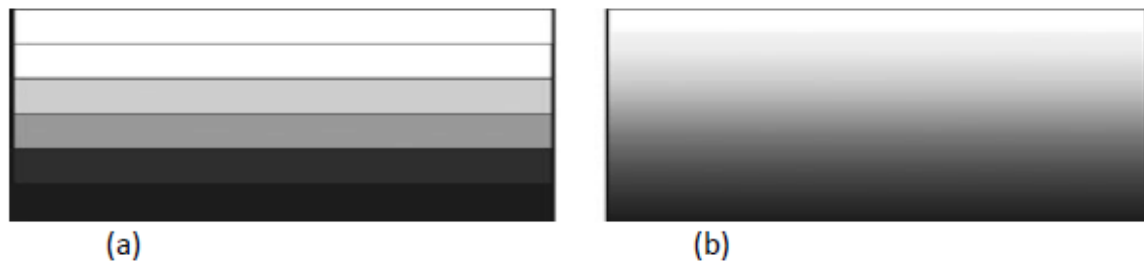


Figure. I.7 : Modèles analytiques pour une couche en FGM (Hadji 2012).

La plupart des chercheurs emploient la fonction de loi de puissance ; la fonction exponentielle, ou la fonction sigmoïde pour décrire les fractions de volume. Par conséquent, on considère dans notre travail des plaques FGM avec des variations de la fraction de volume qui suit des fonctions de la loi de puissance.

I.9. Domaines d'application des matériaux à gradients évalués FGM

Le concept des matériaux à gradient évalués FGM est applicable dans des nombreux et larges intervalles de domaines tels que les matériaux de construction, matériaux de conversion d'énergie, aéronautique, aérospatiale, nucléaire et semi-conducteurs. Ainsi, ces matériaux ont deux propriétés contradictoires : la conductivité thermique et l'isolation thermique. Actuellement, ils permettent la production des matériaux légers, résistants et durables.

Les principaux domaines d'application des FGM sont :

- **Génie civil** : ponts à poutre en caisson, les cheminées, les fondations élastiques (ces structures de plaques peuvent être trouvées dans différents types d'applications industrielles telles que radiers), réservoirs de stockage, les piscines.

- **Aéronautique** : composants de moteur-fusée, corps des avions spatiaux.

- **Chimique** : l'échangeur de chaleur, tube de chaleur, récipient de réaction.

- **Ingénierie** : outils de coupe, éléments de moteur.

- **L'énergie nucléaire** : composante des réacteurs nucléaires, pastilles de combustible.

- **Électronique** : semi-conducteur à bande graduée, capteurs.

- **Optique** : fibres optiques, lentilles.

- **Conversion d'énergie** : générateur thermoélectrique, convertisseur thermoionique, pile à combustible.

- **Matières biologiques** : implants, peau artificielle,
- **Produits en générale** : matériaux de constructions, corps de voiture, verres de fenêtre.

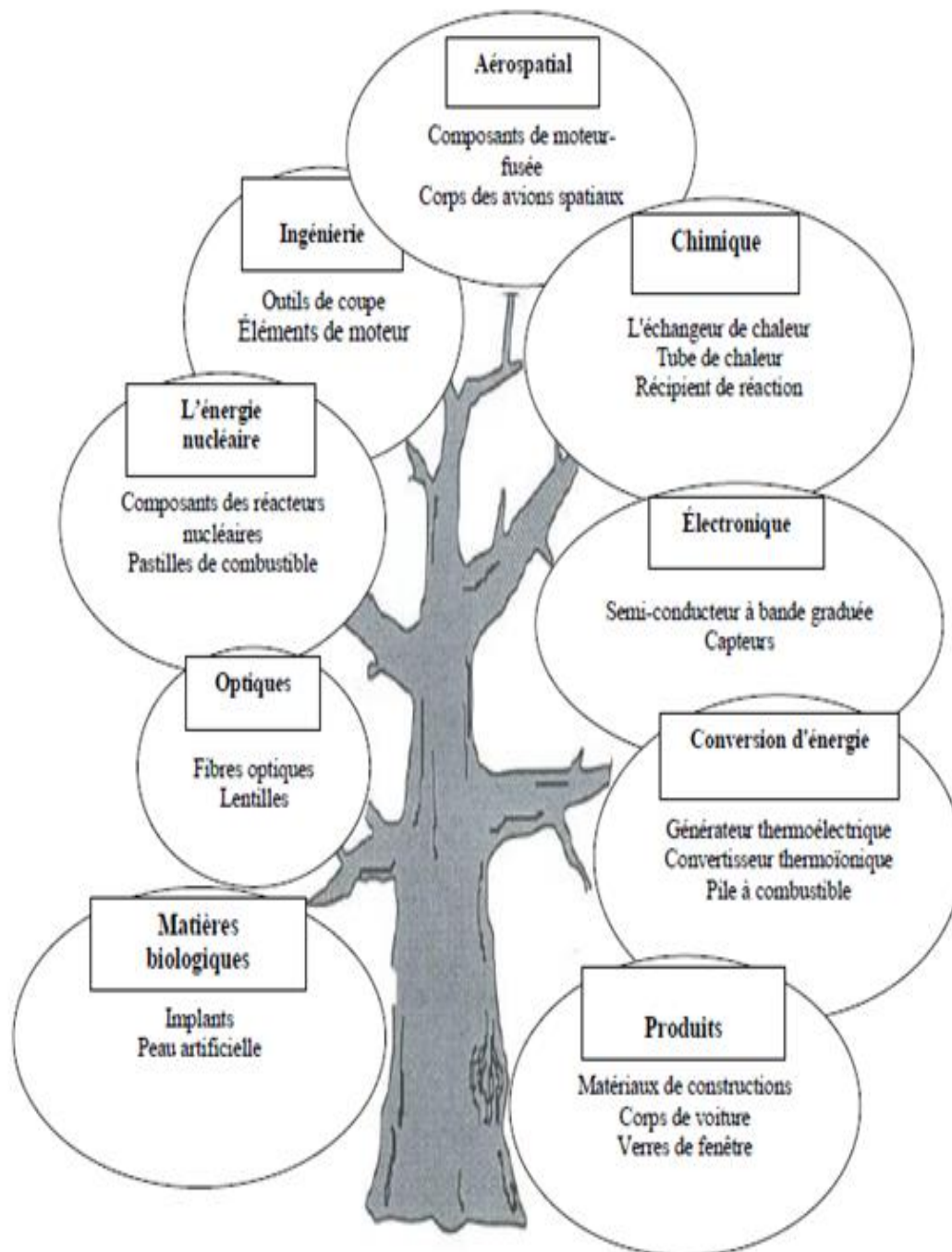


Figure I.8 : Les principaux domaines d'application des FGM (Houari. 2011).

I.10. Les différentes lois qui régissent la variation des propriétés matérielles suivant l'épaisseur d'une plaque FGM

I.10.1. Propriétés matérielles de la plaque P-FGM

La fraction volumique de la classe P-FGM obéit à une fonction en loi de puissance.

$$V(z) = \left(\frac{z + h/2}{h} \right)^p \quad (I.1)$$

Où p est un paramètre du matériau et h est l'épaisseur de la plaque. Une fois que la fraction de volume local $V(z)$ est définie, les propriétés matérielles d'une plaque P-FGM peuvent être déterminées par la loi des mélanges :

$$E(z) = V(z).E_1 + [1 - V(z)].E_2 \quad (I.2)$$

Où E_2 et E_1 sont respectivement les propriétés matérielles (modules de Young ou densité) de la surface inférieure ($z = -h/2$) et de la surface supérieure ($z = h/2$) de la plaque FGM. La variation de ces propriétés dans la direction de l'épaisseur de la plaque P-FGM est représentée dans (Figure I.9), il apparaît clairement que le module de Young par exemple change rapidement près de la surface inférieure pour $p > 1$, et augmente rapidement près de la surface supérieure pour $p < 1$.

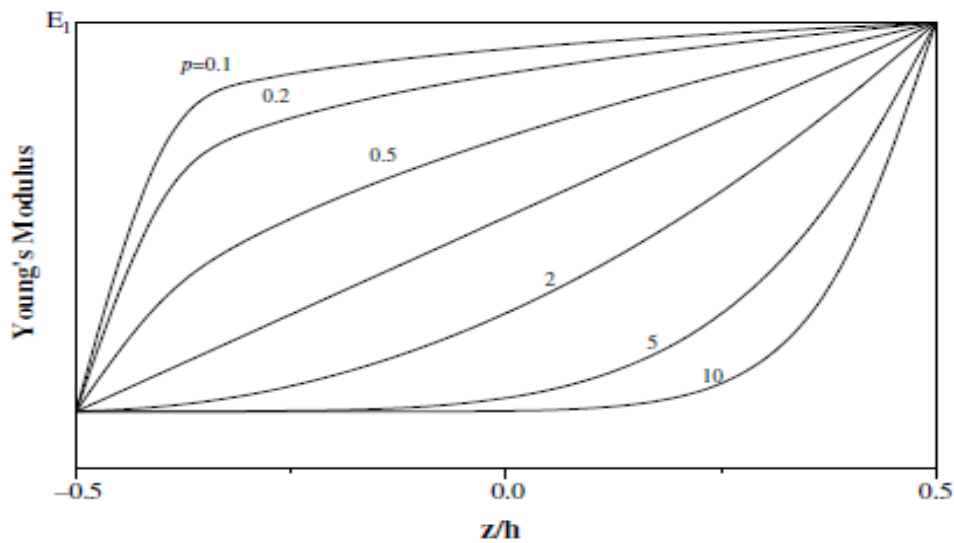


Figure I.9 : La variation du module de Young dans une plaque P-FGM (Hadji 2012).

I.10.2 Propriétés matérielles de la plaque S-FGM

Dans le cas d'ajouter une plaque P-FGM d'une simple fonction de loi de puissance à une plaque composite multicouche, les concentrations des contraintes apparaissent sur l'interfaces où le matériau est continu mais change rapidement. Par conséquent, Chung et chi ont défini la fraction de volume de la plaque FGM en utilisant deux fonctions de loi de puissance pour assurer une bonne distribution des contraintes parmi toutes les interfaces. Les deux fonctions de loi de puissance sont définis par :

$$V_1(z) = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{h/2 - z}{h/2} \right)^p \quad \text{Pour } 0 \leq z \leq h/2 \quad (\text{I.3})$$

$$V_2(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{h/2 + z}{h/2} \right)^p \quad \text{Pour } -h/2 \leq z \leq 0$$

En utilisant la loi des mélanges, le module de Young de la plaque S-FGM peut être calculé par :

$$E(z) = V_1(z).E_1 + [1 - V_1(z)].E_2 \quad \text{Pour } 0 \leq z \leq h/2 \quad (\text{I.4})$$

$$E(z) = V_2(z).E_1 + [1 - V_2(z)].E_2 \quad \text{Pour } -h/2 \leq z \leq 0$$

La figure I.9 montre que la variation de la fraction volumique dans les équations (I.3) et (I.4) représente les distributions sigmoïdes, et cette plaque FGM est appelée (Plaque S-FGM).

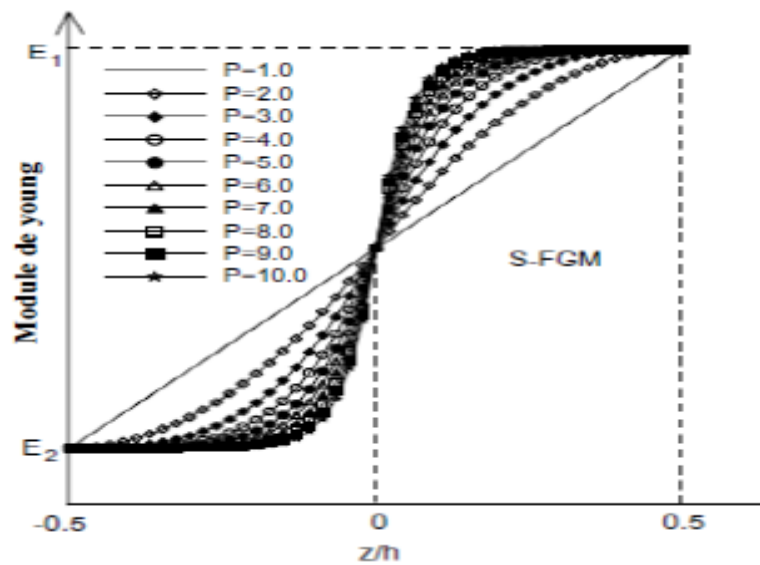


Figure I.10 : Variation de la fraction volumique dans une plaque S-FGM (Hadji 2012).

I.10.3 Les propriétés matérielles de la plaque E-FGM

Pour décrire les propriétés matérielles des matériaux FGM, la plupart des chercheurs utilisent la fonction exponentielle qui s'écrit sous la forme :

$$E(z) = A.e^{B.(z+h/2)} \quad (I.5)$$

Avec,

$$A = E_2 \quad \text{et} \quad B = \frac{1}{h} \cdot \ln\left(\frac{E_1}{E_2}\right) \quad (I.6)$$

La variation du module de Young à travers l'épaisseur de la plaque E-FGM est représentée dans (Figure I.10).

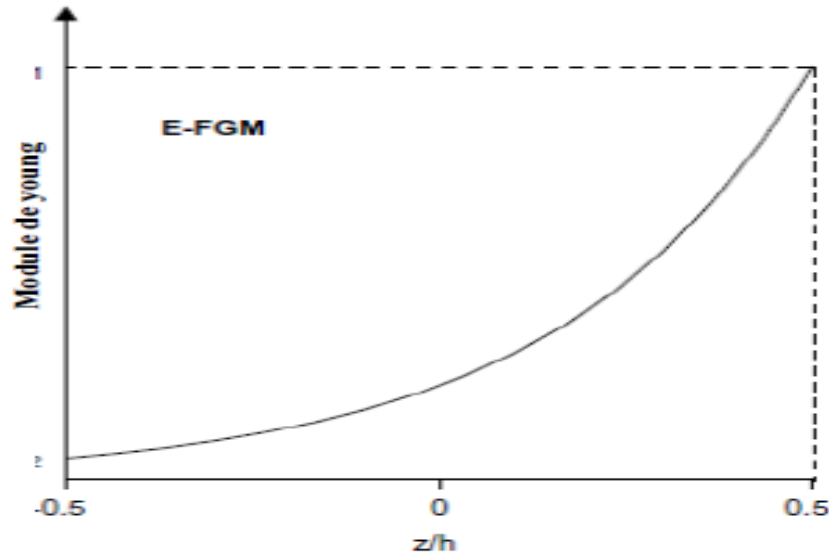


Figure I.11 : Variation du module de Young dans une plaque E-FGM (Hadji 2012).

I.11. Conclusion

Nous avons vu dans ce chapitre une brève introduction aux matériaux à gradient de propriété FGM, d'où une vue sur l'historique de leur développement, leur méthodes d'élaboration, leur propriété, ensuite on s'est intéresser aux domaine d'application de ces dernier et l'intérêt de leur utilisation et par la suite nous avons cité les différentes lois possibles qui servent à décrire la variation des propriétés matérielles du matériau FGM (module de Young, masse volumique et coefficient de poisson) suivant l'épaisseur d'une plaque, ces lois peuvent être de puissances, exponentielles ou même sigmoïde.

CHAPITRE II

LES THEORIES DES PLAQUES FGM.

II.1. Introduction

Une structure FGM peut être considérée comme un corps hétérogène. La caractéristique géométrique d'une plaque est une épaisseur faible par rapport aux autres dimensions. La modélisation des structures FGM modernes avec une forte anisotropie (par exemple : faible rapport du module de cisaillement transverse de l'âme par rapport au module d'élasticité longitudinal des peaux dans le cas des structures sandwich) exige des théories raffinées qui prennent en compte une bonne description des cisaillements transverses. On trouve dans (Noor 1989) des revues complètes sur les différents modèles existants de type élasticité tridimensionnelle ou de type plaque.

Durant ces dernières années, plusieurs modèles bidimensionnels ont été développés pour la modélisation des structures multicouches tenant compte des cisaillements transverses. Ils peuvent être regroupés en fonction du type d'approche adopté :

- Approche monocouche équivalente
- Approche par couche
- Approche développement asymptotique

II.2. Les Différents Modèles des structures composites dans l'élasticité bidimensionnelles

II.2.1. Approche monocouche équivalente

Dans l'approche monocouche équivalente, la variation des caractéristiques physicomécaniques selon l'épaisseur n'est pas un facteur déterminant du nombre d'équations, la plaque FGM est homogénéisée et considérée donc comme une seule couche.

Depuis le premier travail de Sophie Germain en 1815 sur les plaques minces en passant par les modèles du premier ordre de Love-Kirchhoff et de Reissner-Mindlin, de nombreux auteurs ont développé des théories de plaques à partir de cinématiques ou champs de contraintes plus raffinés. Nous passons en revue, dans ce qui suit, les principaux modèles.

II.2.1.1. Les modèles classiques Love-Kirchhoff (théorie classique des plaque stratifiées CLPT)

En commence par le model le plus simple est le plus général appelé model de Love-Kirchhoff. Ce modèle est basé sur une distribution linéaire des déplacements suivant l'épaisseur (Reissner 1961).

L'hypothèse adoptée est celle de Love-Kirchhoff (Kirchhoff. 1850) des contraintes planes, les déformations dues au cisaillement transverse sont négligées. La normale à la surface moyenne de la plaque reste perpendiculaire et droite à celle-ci après déformation (Figure. II.1).

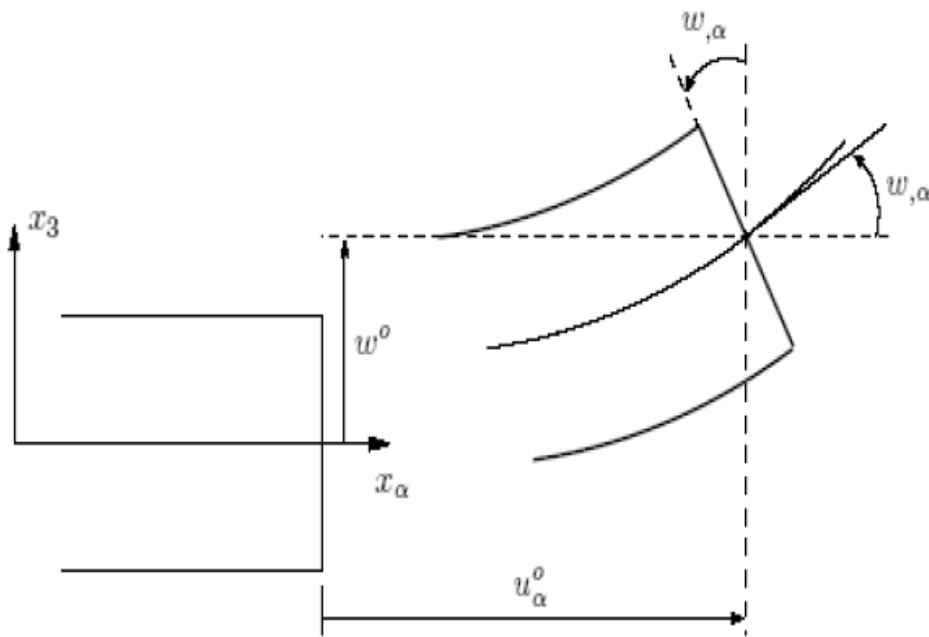


Figure. II. 1 : Cinématique de Love-Kirchhoff.

Le champ de déplacements de Love-Kirchhoff s'écrit alors,

$$\begin{cases} u_{\alpha}(x_1, x_2, x_3 = z) = u_{\alpha}^0(x_1, x_2) - z w_{,\alpha}(x_1, x_2) \\ u_3(x_1, x_2, x_3 = z) = w(x_1, x_2) \end{cases}, \alpha = 1, 2 \quad (\text{II.1})$$

Avec,

u_{α}^0 : Le déplacement de membrane dans la direction α ,

W : La flèche de la plaque,

$w_{,\alpha}$: La rotation due a la flexion (sans cisaillement).

II.2.1.2. Les modèles Reissner-Mindlin (théorie de déformation en cisaillement du premier ordre FSDT)

Le cisaillement transverse ne peut être négligé; sa prise en compte est adoptée par Mindlin dont l'hypothèse cinématique est la suivante :

La normale reste droite mais non perpendiculaire à la surface moyenne (à cause de l'effet du cisaillement transverse) dans la configuration déformée (Figure. II.2). Le champ de déplacements de Reissner-Mindlin s'écrit :

$$\begin{cases} u_\alpha(x_1, x_2, x_3 = z) = u_\alpha^0(x_1, x_2) - z\phi_{,\alpha}(x_1, x_2) \\ u_3(x_1, x_2, x_3 = z) = w(x_1, x_2) \end{cases} \quad (\text{II.2})$$

Avec,

ϕ_α : La rotation de la normale au plan moyen autour des axes x_α ,

$\gamma_\alpha^0 = (w_{,\alpha} + \phi_\alpha)$: La déformation de cisaillement transverse mesurée sur le plan moyen.

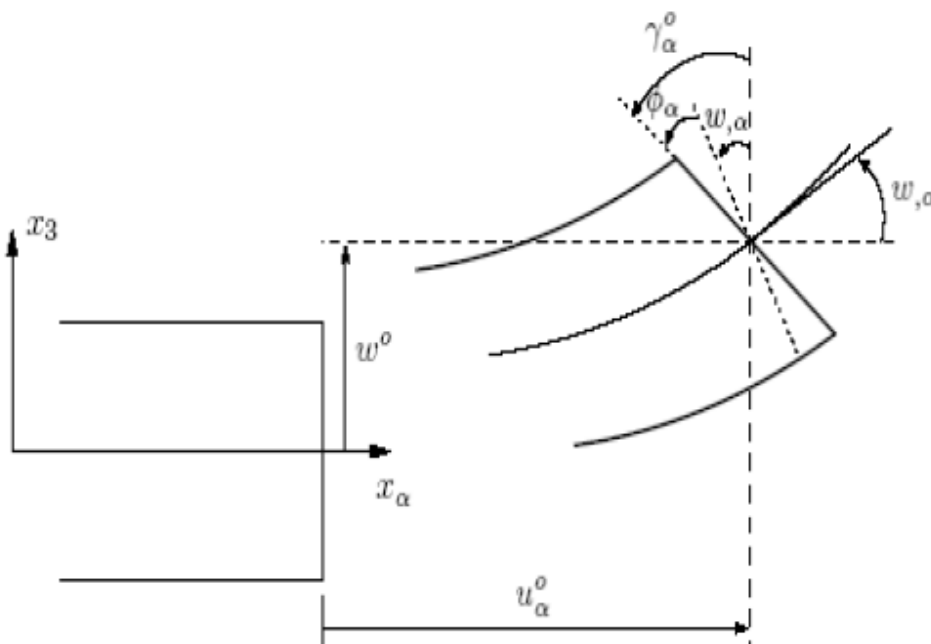


Figure. II.2 : Cinématique de Reissner-Mindlin.

Avec ce choix de la forme des champs de déplacements, les déformations transversales γ_α^0 sont constantes en z . Les contraintes de cisaillement sont donc uniformes à n'importe

quel point suivant l'épaisseur et ça évitent la discontinuité entre les couches dans les composites conventionnels.

Cette mauvaise description d'uniformité de distribution des contraintes oblige à introduire des coefficients correcteurs pour mieux prendre en compte, dans l'écriture de l'énergie, les effets du cisaillement transversal (Whitney 1973). Les résultats obtenus dépendent essentiellement du choix empirique dans des situations complexes des coefficients correcteurs et l'étude des plaques épaisses reste aléatoire par ce type d'approche cinématique.

La Figure. II.3 montre la variation de la fonction de forme ainsi que sa dérivée par rapport à l'épaisseur de la plaque. Cette variation est plus authentique pour le cas des plaques stratifiés ou au niveau de l'interface il y a une discontinuité de distribution des propriétés alors que pour les FGM ce problème est résolu.

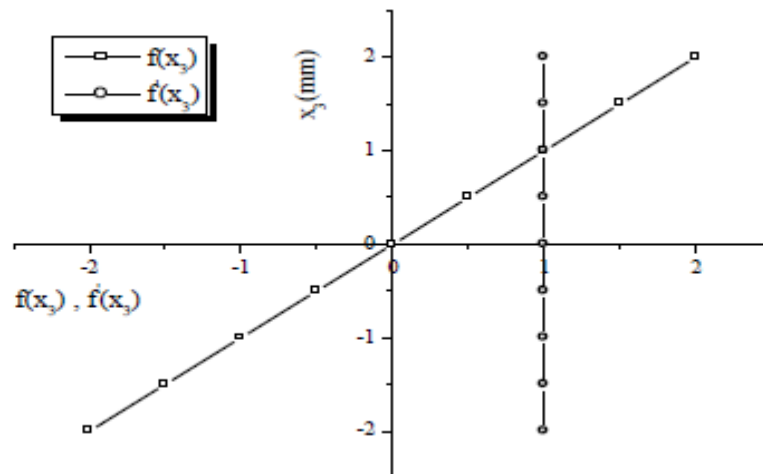


Figure. II.3 : Variation de la fonction de gauchissement $f(x_3) = x_3$ et $f'(x_3)$ suivant l'épaisseur.

II.2.1.3. Les modèles d'ordre élevé

Pour franchir les limites des théories du premier ordre, plusieurs auteurs proposent des théories à un ordre supérieur. Les modèles sont basés sur une distribution non linéaire des champs suivant l'épaisseur. Ces modèles permettent de représenter le gauchissement de la section dans la configuration déformée (Figure. II.4), (Liberscu 1967). La plupart des modèles d'ordre supérieur utilisent un développement en série de Taylor des champs de déplacements qui s'écrivent de la forme :

$$u_i(x_1, x_2, x_3) = u_i^0(x_1, x_2) + z\phi_i^{0(1)}(x_1, x_2) + z^2\phi_i^{0(2)}(x_1, x_2) + z^3\phi_i^{0(3)}(x_1, x_2) + z^4\phi_i^{0(4)}(x_1, x_2) + \dots \quad (\text{II.3})$$

Partons de ce principe, nous pouvons utiliser différents ordres, en fonction de la complexité du problème et de la précision souhaitée. La plupart des études sont basées sur un développement en 3ème ordre, assurant ainsi un niveau minimum de complexité. La valeur de $\phi_j^{0(i)}$ détermine la nature de la théorie. Ainsi, la théorie du premier ordre de Reissner-Mindlin est obtenue en posant : $\phi_i^{0(j)} = 0$ pour $j = 2,3,4$ et $\phi_3^{0(1)} = 0$.

En principe, ces modèles d'ordre supérieur sont plus précis que les modèles du premier ordre. La précision augmente avec l'ordre de développement, c'est à dire avec le nombre de paramètres supplémentaires. Cependant, les conditions aux limites sur les bords sont difficiles à satisfaire et le nombre de variables de déplacement indépendantes dépasse celui des modèles classiques. Pour réduire le nombre de paramètres de déplacement, plusieurs simplifications sont proposées. On impose souvent les conditions de nullité des contraintes de cisaillement transverse aux surfaces supérieure et inférieure de la plaque. Le développement en série de Taylor est utilisé avec $\phi_i^{o(4)} = \phi_i^{o(2)} = \phi_i^{o(1)} = 0, \phi_i^{o(3)}, \alpha = \{1,2\}$. Le champ de déplacement devient :

$$\begin{cases} u_\alpha(x_1, x_2, x_3 = z) = u_\alpha^o(x_1, x_2) - zw_{,\alpha} + f(z)\gamma_\alpha^o(x_1, x_2) \\ u_3(x_1, x_2, x_3 = z) = w(x_1, x_2) \end{cases} \quad (\text{II.4})$$

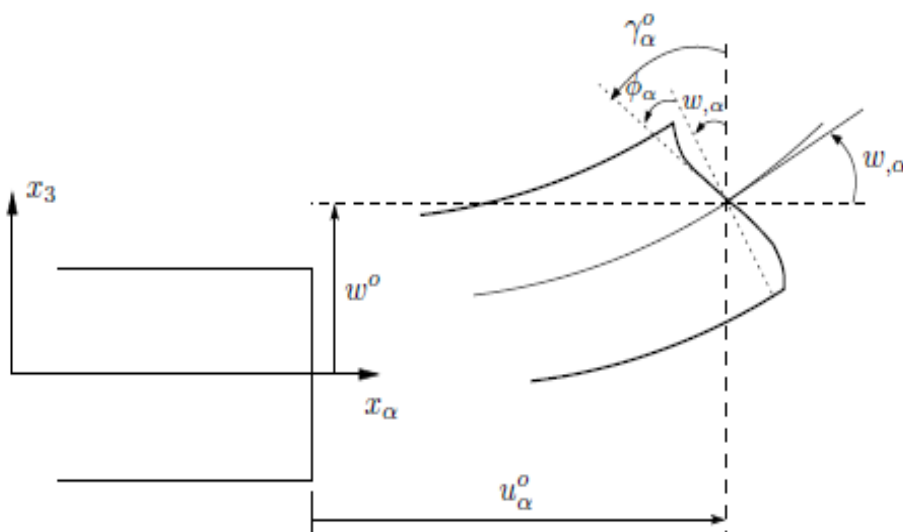


Figure.II.4: Cinématique de la théorie d'ordre supérieur .

Voici quelques contributions importantes de développement de modèles d'ordre supérieur qui se sont distingués dans la littérature et qui diffèrent par la fonction de cisaillement $f(z)$:

- L'approche d'Ambartsumyan (Ambartsumyan 1969) avec :

$$f(z) = \frac{z}{2} \left(\frac{h^2}{4} - \frac{z^2}{3} \right) \quad (\text{II.5})$$

- L'approche de Reissner (Reissner 1945) :

$$f(z) = \frac{5}{4} z \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right) \quad (\text{II.6})$$

- L'approche de Reddy (Reddy 1987) avec :

$$f(z) = z \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right) \quad (\text{II.7})$$

Dans le modèle de (Reddy 1987), le champ de déplacement membranaire est cubique et le déplacement normal w est constant. Ce modèle donne une bonne approximation pour les contraintes de cisaillement transverse par rapport à la solution élastique tridimensionnelle. La distribution des contraintes de cisaillement transversal est parabolique suivant l'épaisseur. Les conditions aux limites sur les surfaces libres sont satisfaites.

- L'approche de Touratier (Touratier 1991) avec :

$$f(z) = \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{z}{h}\right) \quad (\text{II.8})$$

Touratier propose le modèle "sinus" qui est différent des autres modèles d'ordre supérieur puisqu'il n'utilise pas de fonction polynomiale. Une fonction trigonométrique sinusoïdale est donc introduite pour modéliser la répartition des contraintes de cisaillement suivant l'épaisseur. La fonction de cisaillement transverse s'écrit comme suit :

$$\begin{aligned}
 f(z) &= \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) = \frac{h}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \left(\frac{\pi z}{h}\right)^{2n+1} \\
 &= z \left(1 - \frac{\pi^2}{3!} \frac{z^2}{h^2} + \frac{\pi^4}{5!} \frac{z^4}{h^4} - \frac{\pi^6}{7!} \frac{z^6}{h^6} + \dots \right)
 \end{aligned}
 \tag{II.9}$$

Les différents termes du développement correspondent aux différents modèles cités précédemment. Suivant la troncature choisie, on obtient la théorie Love-Kirchhoff, la théorie Reissner-Mindlin ou les modèles d'ordre supérieur (aux coefficients près).

Les contraintes de cisaillement transversal déterminées par le modèle "sinus" prennent une forme cosinusoidale dans l'épaisseur de la plaque. La précision de ce modèle par rapport à la solution exacte est meilleure que la théorie de (Reddy 1984).

Récemment, Afaq et al. (Afaq 2003) propose un modèle exponentiel avec une cinématique plus riche.

La fonction de cisaillement transverse est de la forme suivante :

$$f(z) = ze^{-2\left(\frac{z}{h}\right)^2} \tag{II.10}$$

Le choix de la fonction exponentielle permet un développement en puissance pair et impair de la variable z alors que la fonction "sinus" [Touratier] ne permet qu'un développement en puissances impaires.

- L'approche de Aydogdu (Aydogdu 2005) avec ;

$$f(z) = z\alpha \frac{e^{-2\left(\frac{z}{h}\right)^2}}{\ln(\alpha)} \quad \alpha > 0 \tag{II.11}$$

h : étant l'épaisseur de la plaque FGM.

Il faut remarquer que les modèles issus d'une approche monocouche équivalente pressentent des contraintes de cisaillement transverse discontinues aux interfaces si les couches ont des propriétés différentes, même si la continuité du champ de déformation est assurée. Ceci présente un inconvénient sérieux lors de l'analyse locale à l'interface des structures multicouches (effets de bord sur les contraintes, délaminage . . .).mais pour le cas

des matériaux FGM cette approche paraît très appropriée, du fait que la variation des propriétés se fait continuellement selon l'épaisseur.

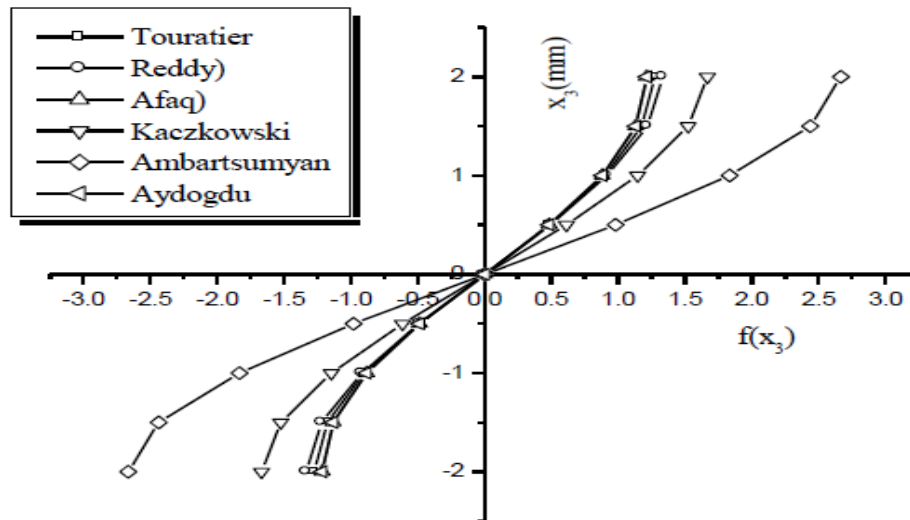


Figure. II.5 : Variation de la fonction de forme $f(z)$ des différents modèles en fonction de l'épaisseur.

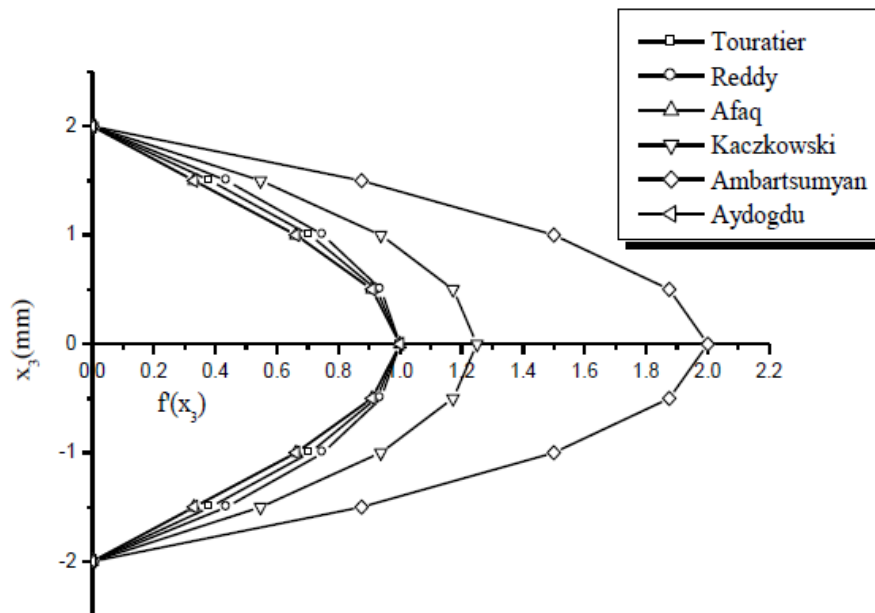


Figure. II.6 : Variation de la dérivée de la fonction de forme $f'(z)$ des différents modèles suivant l'épaisseur.

En fonction des Figures. II.5 et II.6 on remarque que les deux approches d'Ambartsumyan et de Kaczowski sont un sensiblement loin des autres fonctions de forme ; Elles sont servies comme bases pour développer les autres fonctions qui sont plus proches de l'analyse 3D.

Il faut remarquer que les modèles issus d'une approche monocouche équivalente présentent des contraintes de cisaillement transverse discontinues aux interfaces si les couches ont des propriétés différentes, même si la continuité du champ de déformation est assurée. Ceci présente un inconvénient sérieux lors de l'analyse locale à l'interface des structures multicouches (effets de bord sur les contraintes, délaminage . . .).mais pour le cas des matériaux FGM cette approche paraît très appropriée, du fait que la variation des propriétés se fait continuellement selon l'épaisseur.

II. 2. 2. Approche par couche

Ces approches sont destinées justement à mieux décrire les effets d'interface pour les matériaux composites conventionnels.

Ainsi différents modèles issus de l'approche par couche ont été proposés (Afaq. 2003) ; (Reddy 1984). Le multicouche est subdivisé en sous structures (correspondant en fait à chaque couche ou chaque ensemble de couches). On applique à chaque sous structure une théorie du premier ordre ou un modèle d'ordre supérieur, imposant un champ de déplacement vérifiant la continuité aux interfaces entre les différentes couches.

Les modèles de ce type sont relativement coûteux (l'ordre des équations de comportement dépend du nombre de couche), mais ils permettent l'obtention de résultats plus précis, notamment en ce qui concerne le calcul des contraintes hors plan.

D'une manière générale, les modèles issus de l'approche par couche peuvent être classés en deux groupes : les modèles couches discrètes ou chaque couche est considérée comme une plaque en imposant les conditions de continuité en déplacements ou en contraintes aux interfaces et les modèles zig-zag ou la cinématique satisfait à priori les conditions de contact est indépendante du nombre de couches. (Figures II.7 et II. 8).

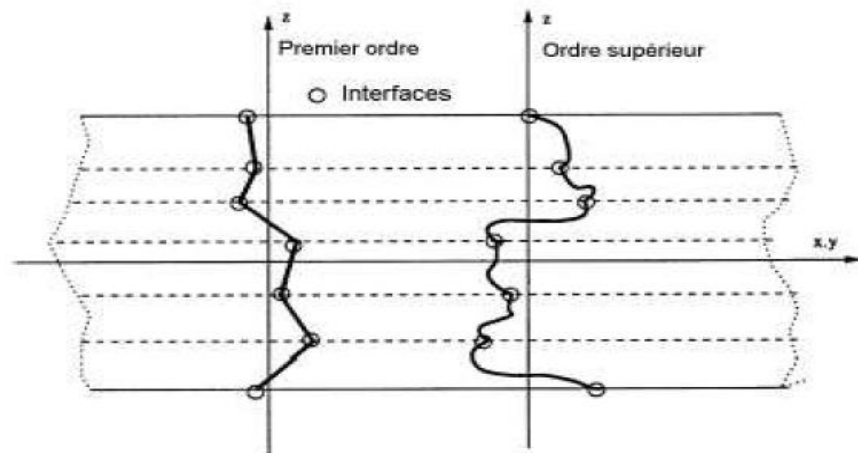


Figure. II.7 : Champ de déplacements des modèles couches discrètes, approche Cinématique(Nguyen.2004).

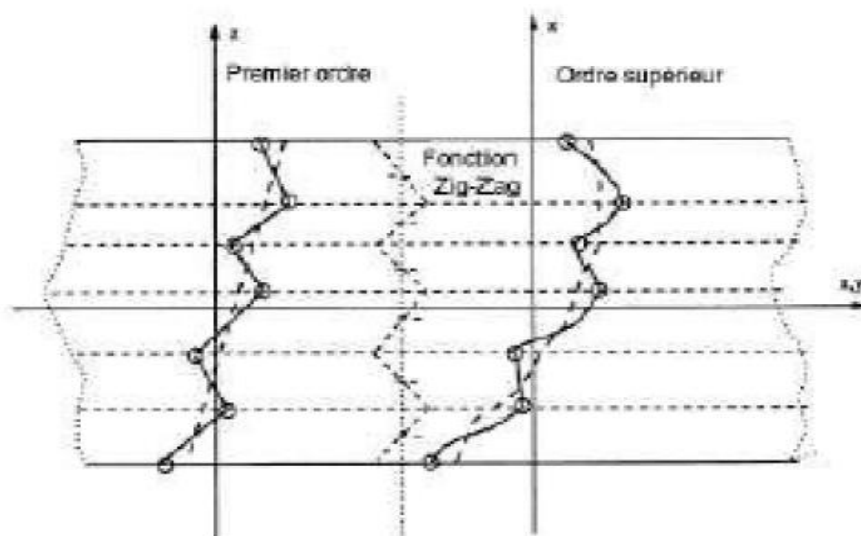


Figure II. 8 : Champ de déplacements des modèles zig-zag, approche cinématique (Nguyen.2004).

II.3. Conclusion

Dans cette partie on a décrit les différentes théories des plaques à savoir l'approche monocouche équivalente, l'approche par couche et l'approche développement asymptotique. Nous concluons aussi que l'approche monocouche équivalente est mieux adaptée pour les matériaux FGM car il n'y a pas de changement brusque dans les caractéristiques mécaniques contrairement aux composites conventionnels où le délaminage est un problème à ne pas écarter.

Donc on a eu recours au modèle monocouche équivalent pour les plaques épaisses et les poutres courtes pour différentes théories d'ordre élevé où la prise en compte du cisaillement transversal est nécessaire pour une étude plus exacte.

CHAPITRE III

**ANALYSE DE LA FLEXION ET LA VIBRATION
DES PLAQUES POREUSES EN MATERIAU FGM.**

III.1 Introduction

Les matériaux fonctionnellement gradués (FGM) sont une classe de composites qui ont une variation continue des propriétés matérielle d'une surface à l'autre et éliminent ainsi la concentration des contraintes trouvées dans les composites stratifiés.

Un type de matériau FGM est fabriqué à partir d'un mélange de deux phases de matériau, par exemple, la céramique et le métal. La raison de l'utilisation multiple des matériaux FGM dans une variété de structures d'ingénierie aérospatiale, automobile, civile et mécanique est que leurs propriétés matérielles peuvent être adaptées à différentes applications et environnements de travail. Actuellement, les FGM sont développés pour une utilisation générale en tant que composants structurels dans des environnements à température extrêmement élevée.

Au stade de la production des matériaux fonctionnellement gradués FGM, des microvides et des porosités peuvent se produire en raison d'erreurs de production ou techniques. Avec la porosité, le comportement mécanique des matériaux fonctionnellement gradués change considérablement. Ainsi, l'effet de la porosité sur les matériaux fonctionnellement gradués est un problème important et doit être étudié afin de concevoir en toute sécurité ces composites.

Ces dernières années, de nombreux chercheurs sont concentrés sur la recherche de matériaux FGM poreux. Wattanasakulpong et Ungbhakorn (2014) ont étudié les caractéristiques de vibration des poutres poreuses en FGM en utilisant une méthode de transformation différentielle avec différents types de supports élastiques. Wu et al. (2018) ont effectué une analyse par éléments finis pour étudier vibrations libres et forcées des poutres poreuses en matériau FGM en utilisant les théories des poutres d'Euler-Bernoulli de Timoshenko. Akbaş (2017) a examiné la vibration et l'analyse statique des plaques fonctionnellement gradués avec une porosité. Avcar (2019) a examiné la vibration libre des poutres FGM avec porosité avec différents modèles de distribution de porosité. Bourada et al. (2019) ont étudié le comportement dynamique d'une poutre FGM poreuse en utilisant une théorie de déformation de cisaillement sinusoïdal. Ramteke et al. (2019) ont étudié les effets de la porosité sur les caractéristiques propres des structures fonctionnellement gradués avec différents types de porosité et distributions de matériaux.

Comme le montre la littérature, l'effet de la forme de distribution de la porosité sur le comportement statique et dynamique des plaques FGM n'a pas été étudié en détail.

L'objectif visé dans ce chapitre est de développer une théorie de déformation de cisaillement hyperbolique pour étudier l'effet de la forme de distribution de la porosité sur le comportement en flexion et en vibration libre des plaques FGM. L'effet dû à la porosité est inclus en utilisant une loi de mélange modifiée couvrant les phases de porosité proposées par Wattanasakulpong (2014), Demirhan (2019). La particularité de cette étude à partir d'articles publiés dans la littérature est d'étudier les plaques poreuses fonctionnellement graduées avec quatre types de porosité et la théorie des plaques d'ordre élevé. Les effets des paramètres de porosité, des types de porosité et du rapport géométrique des plaques sur la contrainte normale, la contrainte de cisaillement, la flèche statique et les fréquences de vibration sont présentés et discutés.

III.2. formulation de la problématique

III.2.1. Configuration géométrique

Considérons une plaque rectangulaire en matériau FGM occupant la région $[0, a] \times [0, b] \times [-h/2, h/2]$ du système de coordonnées $(x; y; z)$ comme représenté sur la figure III.1. Cette plaque est faite d'un matériau isotrope avec des propriétés des matériaux variant sans interruption dans la direction de l'épaisseur z uniquement. Nous supposons que la composition varie de la surface inférieure à la surface supérieure, c'est-à-dire que la surface inférieure ($z = -h/2$) de la plaque est riche en métal alors que la surface supérieure ($z = +h/2$) est riche en céramique.

Dans cette étude, nous considérons une plaque FGM imparfaite avec une fraction volumique de porosité avec une forme de distribution différente entre le métal et la céramique. La loi de mélange modifiée proposée par Wattanasakulpong (2014) est donnée par :

$$P(z) = P_m \left(V_m - \frac{\alpha}{2} \right) + P_c \left(V_c - \frac{\alpha}{2} \right) \quad (III.1)$$

La loi de puissance de la fraction volumique de la céramique est supposée comme

$$V_c = \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^k \quad (\text{III.2})$$

La loi de mélange modifiée devient

$$P(z) = (P_c - P_m) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^k + P_m - (P_c + P_m) \frac{\alpha}{2} \quad (\text{III.3})$$

Où, k est l'indice de loi de puissance qui prend des valeurs supérieures ou égales à zéro. La plaque FGM devient une plaque entièrement céramique lorsque k est égal zéro et entièrement métallique pour une valeur élevée de k .

Les propriétés mécaniques tel que le module de Young E , et la densité de masse ρ des FGM imparfaite peuvent être écrites comme une fonction de la coordonnée d'épaisseur z (surface médiane) comme suit (Ait Atmane et al. 2015, Hassaine Daouadji et al. 2016, Hadji et al. 2015)

$$E(z) = (E_c - E_m) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^k + E_m - (E_c + E_m) \frac{\alpha}{2} \quad (\text{III.4a})$$

$$\rho(z) = (\rho_c - \rho_m) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^k + \rho_m - (\rho_c + \rho_m) \frac{\alpha}{2} \quad (\text{III.4b})$$

Les propriétés des matériaux d'une plaque FGM parfaite peuvent être obtenues lorsque la fraction volumique de porosité α est fixée à zéro. En raison des faibles variations du coefficient de Poisson, il est supposé constant. Plusieurs distributions de porosité ont été étudiées dans le présent travail, telles que «O», «V» et «X» (tableau III.1).

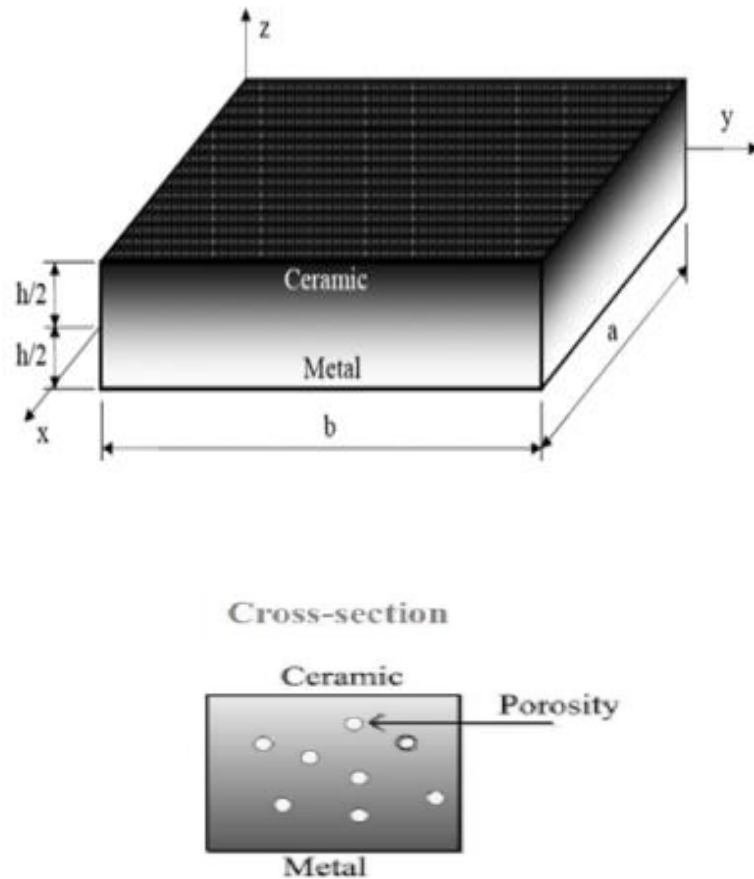


Figure III.1 : Géométrie et coordonnées de la plaque poreuse en FGM.

Tableau III.1 : Différentes formes de distribution de la porosité

Formes de distribution de la porosité	Expression du module de Young	Schéma
Forme Homogène	$E(z) = (E_c - E_m) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^k + E_m - (E_c + E_m) \frac{\alpha}{2}$	
Forme "O"	$E(z) = (E_c - E_m) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^k + E_m - (E_c + E_m) \frac{\alpha}{2} \left(1 - 2 \frac{ z }{h} \right)$	
Forme "X"	$E(z) = (E_c - E_m) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^k + E_m - (E_c + E_m) \frac{\alpha}{2} \left(2 \frac{z}{h} \right)$	
Forme "V"	$E(z) = (E_c - E_m) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^k + E_m - (E_c + E_m) \frac{\alpha}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right)$	

III.2.2. Hypothèses de base

Les hypothèses de la présente théorie hyperbolique des plaques sont les suivantes :

- Les déplacements sont petits par rapport à l'épaisseur de la plaque et, en conséquence les déformations sont infinitésimales.
- Le déplacement transverse w contient deux composantes de flexion w_b et de cisaillement w_s . Ces composantes sont en fonction des coordonnées x et y et du temps t .

$$W(x, y, z, t) = w_b(x, y, t) + w_s(x, y, t) \quad (\text{III.5})$$

- La contrainte normale transversale σ_z est négligeable devant les autres contraintes planes σ_x et σ_y .
- Les déplacements U dans la direction x , et V dans la direction y sont définis par superposition des déplacements dus aux effets d'extension, de flexion et de cisaillement.

$$U = u + u_b + u_s, \quad V = v + v_b + v_s \quad (\text{III.6})$$

- Les composantes de flexion u_b et v_b sont supposées les mêmes déplacements donnés par la théorie classique des plaques. Donc, les expressions pour u_b et v_b peuvent être donnés comme :

$$u_b = -z \frac{\partial w_b}{\partial x}, \quad v_b = -z \frac{\partial w_b}{\partial y} \quad (\text{III.7})$$

- À partir de l'état de déplacement de composantes u_s et v_s se dérivent les composantes de déformation γ_{xz} , γ_{yz} qui varient paraboliquement à travers l'épaisseur de la plaque, tout en assurant la condition de nullité des contraintes de cisaillement τ_{xz} , τ_{yz} aux surfaces inférieure et supérieure de la plaque. Par conséquent, les expressions pour u_s et v_s peuvent être donnés comme :

$$u_s = -f(z) \frac{\partial w_s}{\partial x}, v_s = -f(z) \frac{\partial w_s}{\partial y} \quad (\text{III.8})$$

III.2.3. équations cinématique et constitutive

En se basant, sur les hypothèses de la section précédente, le champ de déplacement peut être obtenu utilisant Eqs. (III.5) – (III.8) comme :

$$\begin{aligned} U(x, y, z, t) &= u_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_b}{\partial x} - f(z) \frac{\partial w_s}{\partial x} \\ V(x, y, z, t) &= v_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_b}{\partial y} - f(z) \frac{\partial w_s}{\partial y} \\ W(x, y, z, t) &= w_b(x, y, t) + w_s(x, y, t) \end{aligned} \quad (\text{III.9})$$

Où u_0 et v_0 sont les déplacements du plan médian de la plaque dans les directions x et y , respectivement; w_b et w_s sont les composants de flexion et de cisaillement de déplacement transversal, respectivement. Il convient de noter que, contrairement à la théorie de cisaillement de premier ordre FSDPT, cette théorie ne nécessite pas de facteur de correction de cisaillement. Dans ce travail, la présente théorie de déformation de cisaillement hyperbolique proposer pour l'analyse du problème de flexion et la vibration des plaques poreuses en matériau FGM est sous la forme :

$$f(z) = z \left[1 + \frac{3\pi}{2} \operatorname{sech} \left(\frac{1}{2} \right)^2 \right] - \frac{3\pi}{2} h \tanh \left(\frac{z}{h} \right) \quad (\text{III.10})$$

Il est claire que le champ de déplacement dans l'équation (III.9) introduit seulement quatre variables (u_0 , v_0 , w_b et w_s). Le champ de déformations se déduit des déplacements de l'équation (III.7) soit :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} k_x^b \\ k_y^b \\ k_{xy}^b \end{Bmatrix} + f(z) \begin{Bmatrix} k_x^s \\ k_y^s \\ k_{xy}^s \end{Bmatrix} \text{ et } \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = g(z) \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^s \\ \gamma_{xz}^s \end{Bmatrix}, \quad (\text{III.11})$$

Ou

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} k_x^b \\ k_y^b \\ k_{xy}^b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w_b}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} k_x^s \\ k_y^s \\ k_{xy}^s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w_s}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^s \\ \gamma_{xz}^s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial w_s}{\partial y} \\ \frac{\partial w_s}{\partial x} \end{Bmatrix},$$

(III.12a)

Et

$$g(z) = 1 - \frac{df(z)}{dz}$$

(III.12b)

Pour les FGMs élastiques et isotropes, les relations constitutives peuvent être écrites comme :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (III.13a)$$

Et

$$\begin{Bmatrix} \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{44} & 0 \\ 0 & Q_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} \quad (III.13b)$$

Ou

$$\begin{aligned} Q_{11} &= Q_{22} = \frac{E(z)}{1-\nu^2} \\ Q_{12} &= \frac{\nu E(z)}{1-\nu^2} \\ Q_{44} &= Q_{55} = Q_{66} = \frac{E(z)}{2(1+\nu)} \end{aligned} \quad (III.14)$$

III.2.4. Équations de mouvement

Le principe d'énergie d'Hamilton est utilisé ici pour obtenir les équations de mouvement appropriées pour le champ de déplacement et les équations constitutives. Le principe peut être énoncé sous forme analytique :

$$0 = \int_0^t (\delta U + \delta V - \delta T) dt \quad (\text{III.15})$$

Où δU est la variation de l'énergie de déformation; δT est la variation de l'énergie cinétique; et δV est la variation virtuel de l'énergie potentiel ou le travail des forces extérieures.

La variation de l'énergie de déformation de la plaque est donnée par :

$$\begin{aligned} \delta U &= \int_V [\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz} + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz}] dV \\ &= \int_A [N_x \delta \varepsilon_x^0 + N_y \delta \varepsilon_y^0 + N_{xy} \delta \gamma_{xy}^0 + M_x^b \delta k_x^b + M_y^b \delta k_y^b + M_{xy}^b \delta k_{xy}^b \\ &\quad + M_x^s \delta k_x^s + M_y^s \delta k_y^s + M_{xy}^s \delta k_{xy}^s + S_{yz}^s \delta \gamma_{yz}^s + S_{xz}^s \delta \gamma_{xz}^s] dA = 0 \end{aligned} \quad (\text{III.16})$$

Où

A : est la surface

N, M et S : sont les forces et moments résultants et sont définies par :

$$(N_i, M_i^b, M_i^s) = \int_{-h/2}^{h/2} (1, z, f) \sigma_i dz \quad (i = x, y, xy) \quad (\text{III.17a})$$

et

$$(S_{xz}^s, S_{yz}^s) = \int_{-h/2}^{h/2} g(\tau_{xz}, \tau_{yz}) dz \quad (\text{III.17b})$$

La variation de l'énergie cinétique de la plaque peut être exprimée comme :

$$\begin{aligned} \delta T &= \int_{\frac{-h\Omega}{2}}^{\frac{h}{2}} \int [\dot{u} \delta \dot{u} + \dot{v} \delta \dot{v} + \dot{w} \delta \dot{w}] \rho(z) dA dz \\ &= \int_A \{ I_0 [\dot{u}_0 \delta \dot{u}_0 + \dot{v}_0 \delta \dot{v}_0 + (\dot{w}_b + \dot{w}_s) (\delta \dot{w}_b + \delta \dot{w}_s)] \\ &\quad - I_1 \left(\dot{u}_0 \frac{\partial \delta \dot{w}_b}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}_b}{\partial x} \delta \dot{u}_0 + \dot{v}_0 \frac{\partial \delta \dot{w}_b}{\partial y} + \frac{\partial \dot{w}_b}{\partial y} \delta \dot{v}_0 \right) \\ &\quad - I_2 \left(\dot{u}_0 \frac{\partial \delta \dot{w}_s}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}_s}{\partial x} \delta \dot{u}_0 + \dot{v}_0 \frac{\partial \delta \dot{w}_s}{\partial y} + \frac{\partial \dot{w}_s}{\partial y} \delta \dot{v}_0 \right) \\ &\quad + J_1 \left(\frac{\partial \dot{w}_b}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{w}_b}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}_b}{\partial y} \frac{\partial \delta \dot{w}_b}{\partial y} \right) + K_2 \left(\frac{\partial \dot{w}_s}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{w}_s}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}_s}{\partial y} \frac{\partial \delta \dot{w}_s}{\partial y} \right) \\ &\quad + J_2 \left(\frac{\partial \dot{w}_b}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{w}_s}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}_s}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{w}_b}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}_b}{\partial y} \frac{\partial \delta \dot{w}_s}{\partial y} + \frac{\partial \dot{w}_s}{\partial y} \frac{\partial \delta \dot{w}_b}{\partial y} \right) \} dA \end{aligned} \quad (\text{III.18})$$

Où (.) représente la dérivée par rapport au variable temps t ; $\rho(z)$ est la densité de masse, et (I_i, J_i, K_i) sont les inerties massiques défini par :

$$(I_0, I_1, I_2) = \int_{-h/2}^{h/2} (1, z, z^2) \rho(z) dz \quad (\text{III.19a})$$

$$(J_1, J_2, K_2) = \int_{-h/2}^{h/2} (f, z f, f^2) \rho(z) dz \quad (\text{III.19b})$$

La variation du travail effectué peut être exprimée comme

$$\delta V = - \int_A q \delta W dA \quad (III.20)$$

En remplaçant les l'équation. (III.16), (III.18) et (III.20) dans l'équation. (III.15) et en intégrant par parties, en rassemblant les coefficients δu_0 , δv_0 , δw_b et δw_s , les équations de mouvement pour la plaque FGM poreuse résultantes sont

$$\begin{aligned} \delta u_0 : \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} &= I_0 \ddot{u}_0 - I_1 \frac{\partial \ddot{w}_b}{\partial x} - J_1 \frac{\partial \ddot{w}_s}{\partial x} \\ \delta v_0 : \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} &= I_0 \ddot{v}_0 - I_1 \frac{\partial \ddot{w}_b}{\partial y} - J_1 \frac{\partial \ddot{w}_s}{\partial y} \\ \delta w_b : \frac{\partial^2 M_x^b}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^b}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^b}{\partial y^2} + q &= I_0 (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) + I_1 \left(\frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} + \frac{\partial \ddot{v}_0}{\partial y} \right) - I_2 \nabla^2 \ddot{w}_b \\ &- J_2 \nabla^2 \ddot{w}_s \\ \delta w_s : \frac{\partial^2 M_x^s}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^s}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^s}{\partial y^2} + \frac{\partial S_{xz}^s}{\partial x} + \frac{\partial S_{yz}^s}{\partial y} + q &= I_0 (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) + J_1 \left(\frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} + \frac{\partial \ddot{v}_0}{\partial y} \right) \\ &- J_2 \nabla^2 \ddot{w}_b - K_2 \nabla^2 \ddot{w}_s \end{aligned} \quad (III.21)$$

Substituant l'équation (III.11) dans l'équation. (III.12) et les résultats ultérieurs de l'équation. (III.17), les forces et moments résultants en termes de déformations sont donnés :

$$\begin{Bmatrix} N \\ M^b \\ M^s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B & B^s \\ B & D & D^s \\ B^s & D^s & H^s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon \\ k^b \\ k^s \end{Bmatrix}, \quad S = A^s \gamma, \quad (III.22)$$

Dans lequel :

$$N = \{N_x, N_y, N_{xy}\}^t, \quad M^b = \{M_x^b, M_y^b, M_{xy}^b\}^t, \quad M^s = \{M_x^s, M_y^s, M_{xy}^s\}^t \quad (III.23a)$$

$$\varepsilon = \{\varepsilon_x^0, \varepsilon_y^0, \gamma_{xy}^0\}^t, \quad k^b = \{k_x^b, k_y^b, k_{xy}^b\}^t, \quad k^s = \{k_x^s, k_y^s, k_{xy}^s\}^t, \quad (III.23b)$$

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 \\ B_{12} & B_{22} & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \quad (III.23c)$$

$$B^s = \begin{bmatrix} B_{11}^s & B_{12}^s & 0 \\ B_{12}^s & B_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & B_{66}^s \end{bmatrix}, \quad D^s = \begin{bmatrix} D_{11}^s & D_{12}^s & 0 \\ D_{12}^s & D_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & D_{66}^s \end{bmatrix}, \quad H^s = \begin{bmatrix} H_{11}^s & H_{12}^s & 0 \\ H_{12}^s & H_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & H_{66}^s \end{bmatrix} \quad (III.23d)$$

$$S = \{S_{xz}^s, S_{yz}^s\}^t, \quad \gamma = \{\gamma_{xz}^s, \gamma_{yz}^s\}^t, \quad A = \begin{bmatrix} A_{44}^s & 0 \\ 0 & A_{55}^s \end{bmatrix}$$

(III.23e)

Et les composants de rigidité sont donnés comme :

$$\begin{Bmatrix} A_{11} & B_{11} & D_{11} & B_{11}^s & D_{11}^s & H_{11}^s \\ A_{12} & B_{12} & D_{12} & B_{12}^s & D_{12}^s & H_{12}^s \\ A_{66} & B_{66} & D_{66} & B_{66}^s & D_{66}^s & H_{66}^s \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{11} (1, z, z^2, f(z), z f(z), f^2(z)) \begin{Bmatrix} 1 \\ \nu \\ \frac{1-\nu}{2} \end{Bmatrix} dz \quad (III.24a)$$

Ou

$$(A_{22}, B_{22}, D_{22}, B_{22}^s, D_{22}^s, H_{22}^s) = (A_{11}, B_{11}, D_{11}, B_{11}^s, D_{11}^s, H_{11}^s) \quad (III.24b)$$

$$A_{44}^s = A_{55}^s = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{44} [g(z)]^2 dz, \quad (III.24c)$$

Équations (III.21) peuvent être exprimées en termes des déplacements (u_0, v_0, w_b, w_s) en remplaçant les forces résultantes de l'équation (III.22) dans l'équation (III.21). Pour la plaque FGM, les équations de mouvement (III.21) prennent la forme :

$$\begin{aligned} (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + A_{66} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + A_{22} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 w_b}{\partial x^2 \partial y} - B_{22} \frac{\partial^3 w_b}{\partial y^3} \\ - B_{22}^s \frac{\partial^3 w_s}{\partial y^3} - (B_{12}^s + 2B_{66}^s) \frac{\partial^3 w_s}{\partial x^2 \partial y} = I_0 \ddot{v}_0 - I_1 \frac{\partial \ddot{w}_b}{\partial y} - J_1 \frac{\partial \ddot{w}_s}{\partial y} \end{aligned} \quad (III.25a)$$

$$\begin{aligned} (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + A_{66} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + A_{22} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} - (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 w_b}{\partial x^2 \partial y} - B_{22} \frac{\partial^3 w_b}{\partial y^3} \\ - B_{22}^s \frac{\partial^3 w_s}{\partial y^3} - (B_{12}^s + 2B_{66}^s) \frac{\partial^3 w_s}{\partial x^2 \partial y} = I_0 \ddot{v}_0 - I_1 \frac{\partial \ddot{w}_b}{\partial y} - J_1 \frac{\partial \ddot{w}_s}{\partial y} \end{aligned} \quad (III.25b)$$

$$\begin{aligned} B_{11} \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} + (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial y^2} + (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 v_0}{\partial x^2 \partial y} + B_{22} \frac{\partial^3 v_0}{\partial y^3} - D_{11} \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^4} \\ - 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^2 \partial y^2} - D_{22} \frac{\partial^4 w_b}{\partial y^4} - D_{11}^s \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^4} - 2(D_{12}^s + 2D_{66}^s) \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^2 \partial y^2} \\ - D_{22}^s \frac{\partial^4 w_s}{\partial y^4} + q = I_0 (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) + I_1 \left(\frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} + \frac{\partial \ddot{v}_0}{\partial y} \right) - I_2 \nabla^2 \ddot{w}_b - J_2 \nabla^2 \ddot{w}_s, \end{aligned} \quad (III.25c)$$

$$\begin{aligned} B_{11}^s \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} + (B_{12}^s + 2B_{66}^s) \frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial y^2} + (B_{12}^s + 2B_{66}^s) \frac{\partial^3 v_0}{\partial x^2 \partial y} + B_{22}^s \frac{\partial^3 v_0}{\partial y^3} - D_{11}^s \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^4} \\ - 2(D_{12}^s + 2D_{66}^s) \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^2 \partial y^2} - D_{22}^s \frac{\partial^4 w_b}{\partial y^4} - H_{11} \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^4} - 2(H_{12}^s + 2H_{66}^s) \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^2 \partial y^2} - H_{22}^s \frac{\partial^4 w_s}{\partial y^4} \\ + A_{55}^s \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} + A_{44}^s \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} + q = I_0 (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) + J_1 \left(\frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} + \frac{\partial \ddot{v}_0}{\partial y} \right) - J_2 \nabla^2 \ddot{w}_b - K_2 \nabla^2 \ddot{w}_s, \end{aligned} \quad (III.25d)$$

Il est clair, lorsque l'effet de cisaillement de déformation transversale est négligé, l'équation. (III.25) donne les équations du mouvement de la plaque FGM de la théorie classique CPT.

III.2.5. Solutions de Navier pour les plaques rectangulaires en FGM

Pour une solution analytique des équations (III.25), la méthode de Navier est utilisée pour une plaque rectangulaire en FGM avec des conditions de frontière spécifiques (appuyée - appuyée). Les conditions aux limites suivantes sont imposées aux bords de la plaque.

$$\begin{aligned} v(-a/2, y) &= w_b(-a/2, y) = w_s(-a/2, y) \\ &= \frac{\partial w_b}{\partial y}(-a/2, y) = \frac{\partial w_s}{\partial y}(-a/2, y) = 0 \end{aligned} \quad (\text{III.26a})$$

$$\begin{aligned} v(a/2, y) &= w_b(a/2, y) = w_s(a/2, y) \\ &= \frac{\partial w_b}{\partial y}(a/2, y) = \frac{\partial w_s}{\partial y}(a/2, y) = 0 \end{aligned} \quad (\text{III.26b})$$

$$\begin{aligned} N_x(-a/2, y) &= M_x^b(-a/2, y) = M_x^s(-a/2, y) = N_x(a/2, y) = M_x^b(a/2, y) \\ &= M_x^s(a/2, y) = 0 \end{aligned} \quad (\text{III.26c})$$

$$\begin{aligned} u(x, -b/2) &= w_b(x, -b/2) = w_s(x, -b/2) \\ &= \frac{\partial w_b}{\partial x}(x, -b/2) = \frac{\partial w_s}{\partial x}(x, -b/2) = 0 \end{aligned} \quad (\text{III.26d})$$

$$u(x, b/2) = w_b(x, b/2) = w_s(x, b/2) = \frac{\partial w_b}{\partial x}(x, b/2) = \frac{\partial w_s}{\partial x}(x, b/2) = 0 \quad (\text{III.26e})$$

$$\begin{aligned} N_y(x, -b/2) &= M_y^b(x, -b/2) = M_y^s(x, -b/2) \\ &= N_y(x, b/2) = M_y^b(x, b/2) = M_y^s(x, b/2) = 0 \end{aligned} \quad (\text{III.26f})$$

Les fonctions des déplacements qui satisfont les équations des conditions aux limites (IV.23) sont développées en séries de Fourier comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_0 \\ v_0 \\ w_b \\ w_s \end{array} \right\} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \begin{array}{l} U_{mn} \cos(\lambda x) \sin(\mu y) e^{i\omega t} \\ V_{mn} \sin(\lambda x) \cos(\mu y) e^{i\omega t} \\ W_{bmn} \sin(\lambda x) \sin(\mu y) e^{i\omega t} \\ W_{smn} \sin(\lambda x) \sin(\mu y) e^{i\omega t} \end{array} \right\} \quad (\text{III.27})$$

Ou U_{mn} , V_{mn} , W_{bmn} , et W_{smn} sont des paramètres à déterminer, et ω est la fréquence propre associée au (m, n) nième mode propre, et $\lambda = m\pi/a$ et $\mu = n\pi/b$.

La charge transversale q est développée en séries de Fourier comme suit

$$q(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} q_{mn} \sin(\lambda x) \sin(\mu y) \quad (\text{III.28})$$

Les coefficients q_{mn} pour le cas de charge uniformément répartie (UL) est définis comme suit:

$$q_{mn} = \begin{cases} \frac{16q_0}{mn\pi^2} & \text{pour } m, n \text{ impaire} \\ 0 & \text{pour } m, n \text{ paire} \end{cases} \quad (\text{III.29})$$

Ou q_0 représente l'intensité de la charge au centre de la plaque. Pour le cas d'une charge distribuée de manière sinusoïdale (SL), nous avons

$$q(x, y) = q_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) \quad (\text{III.30})$$

avec

$$m = n = 1 \text{ et } q_{11} = q_0 \quad (\text{III.31})$$

En substituant l'équation (III.27) dans l'équation (III.28) dans l'équation (III.25), les solutions analytiques peuvent être obtenues à partir des équations suivantes :

$$\left(\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & S_{24} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & S_{34} \\ S_{14} & S_{24} & S_{34} & S_{44} \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} m_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_{33} & m_{34} \\ 0 & 0 & m_{34} & m_{44} \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} U_{mn} \\ V_{mn} \\ W_{bmn} \\ W_{smn} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ q_{mn} \\ q_{mn} \end{Bmatrix} \quad (\text{III.32})$$

On peut réduire les équations (3.30) à la forme algébrique suivante:

Pour l'analyse à la flexion :

$$[K]\{\Delta\} = \{F\} \quad (\text{III.33a})$$

Pour l'analyse dynamique :

$$([K] - \omega^2[M])\{\Delta\} = \{0\} \quad (\text{III.33b})$$

Avec

$$\{\Delta\}^T = \{U_{mn}, V_{mn}, W_{bmn}, W_{smn}\} \quad (\text{III.34})$$

$[K]$ et $[M]$ sont les matrices symétriques données par

$$[K] = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & S_{24} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & S_{34} \\ S_{14} & S_{24} & S_{34} & S_{44} \end{bmatrix}, \quad [M] = \begin{bmatrix} m_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_{33} & m_{34} \\ 0 & 0 & m_{34} & m_{44} \end{bmatrix}, \quad (\text{III.35})$$

Dans lesquelles :

$$\left\{ \begin{array}{l} S_{11} = A_{11}\lambda^2 + A_{66}\mu^2, \\ S_{12} = \lambda\mu (A_{12} + A_{66}) \\ S_{13} = -\lambda(B_{11}\lambda^2 + (B_{12} + 2B_{66})\mu^2), \\ S_{14} = -\lambda(B_{11}^s\lambda^2 + (B_{12}^s + 2B_{66}^s)\mu^2), \\ S_{22} = A_{66}\lambda^2 + A_{22}\mu^2, \\ S_{23} = -\mu((B_{12} + 2B_{66})\lambda^2 + B_{22}\mu^2), \\ S_{24} = -\mu((B_{12}^s + 2B_{66}^s)\lambda^2 + B_{22}^s\mu^2), \\ S_{33} = D_{11}\lambda^4 + 2(D_{12} + 2D_{66})\lambda^2\mu^2 + D_{22}\mu^4, \\ S_{34} = D_{11}^s\lambda^4 + 2(D_{12}^s + 2D_{66}^s)\lambda^2\mu^2 + D_{22}^s\mu^4, \\ S_{44} = H_{11}^s\lambda^4 + 2(H_{12}^s + 2H_{66}^s)\lambda^2\mu^2 + H_{22}^s\mu^4 + A_{55}^s\lambda^2 + A_{44}^s\mu^2, \\ m_{11} = m_{22} = I_1, \\ m_{33} = I_0 + I_2(\lambda^2 + \mu^2), \\ m_{34} = I_0 + J_2(\lambda^2 + \mu^2), \\ m_{44} = I_0 + K_2(\lambda^2 + \mu^2), \end{array} \right. \quad (\text{III.36})$$

III.3 Conclusion

Dans ce chapitre, L'analyse de la flexion et de la vibration libre des plaques poreuses simplement appuyées en matériau fonctionnellement graduées (FGM) sont examinées par une

théorie de déformation de cisaillement hyperbolique. Cette théorie prend en compte les effets de cisaillement transversal et la distribution parabolique des contraintes de cisaillement suivant l'épaisseur de la plaque et satisfait les conditions de nullité de la contrainte de cisaillement sur les faces supérieure et inférieure de la plaque FGM sans l'aide des facteurs de correction de cisaillement. Les propriétés des matériaux de la plaque FGM analysée et supposées être graduées dans le sens de l'épaisseur selon une distribution simple de loi de puissance P-FGM en termes des fractions de volume des constituants. La loi du mélange modifiée couvrant les phases de porosité est utilisée pour décrire approximativement les propriétés des plaques FGM avec porosité. Sur la base de la présente théorie des plaques, les équations de mouvement sont dérivées du principe des travaux virtuels et le principe d'Hamilton. Les solutions sont obtenues en utilisant les équations de Navier, et les résultats de la flexion et de la vibration des plaques FGM poreuses sont trouvées en résolvant le problème aux valeurs propres. Une validation des résultats de cette nouvelle théorie des plaques raffinées ainsi qu'une étude paramétrique seront fait ultérieurement.

CHAPITRE IV

VALIDATION ET COMPARAISON DES ESULTATS.

IV.1. Introduction

Ce chapitre vise à mettre en évidence la nouvelle théorie de déformation de cisaillement hyperbolique des plaques développé dans le chapitre précédent. La théorie proposée contient quatre inconnues et quatre équations gouvernantes, par ailleurs elle vérifie les conditions limites sans contraintes sur les surfaces supérieure et inférieure de la plaque, sans tenir compte du facteur de correction de cisaillement. Dans ce contexte, l'étude de la réponse mécanique sera réalisée pour l'analyse de flexion et la vibration libre des plaques poreuses en matériaux fonctionnellement gradués FGM, en considérant les porosités qui peuvent se produire à l'intérieur des matériaux en cours de leur fabrication. L'effet de la forme de distribution de la porosité est également étudié. Dans les exemples numériques, les effets des paramètres de porosité, le type de porosité, l'indice matériel et les paramètres de géométrie de la plaque sur la flexion et la vibration libre des plaques fonctionnellement graduées sont étudiés.

IV.2. Caractéristiques des paramètres étudiées

Afin de mettre en évidence l'exactitude de la théorie hyperbolique exposée dans le chapitre 3, pour l'analyse du comportement statique et dynamique des plaques en matériaux fonctionnellement gradués simplement appuyées sans et avec porosité, une plaque rectangulaire en matériaux fonctionnellement gradués sera traitée.

IV.2.1. Caractéristiques de la plaque considérée

Considérons une plaque rectangulaire en matériau FGM occupant la région $[0, a] \times [0, b] \times [-h/2, h/2]$ du système de coordonnées $(x; y; z)$ comme représenté sur la figure IV.1. La plaque est réalisée en matériau isotrope avec les propriétés matérielles qui varient sans interruption dans la direction de l'épaisseur z .

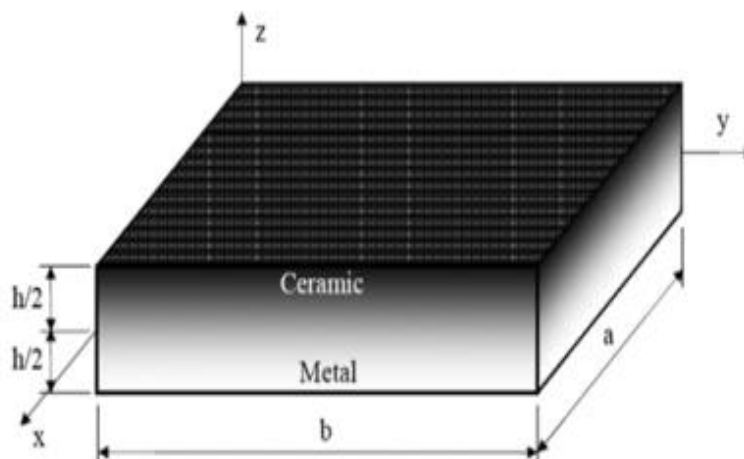


Figure IV.1 : Géométrie et coordonnées de la plaque FGM.

Les propriétés matérielles de la plaque poreuse en FGM sont supposés variables suivant l'épaisseur de la plaque selon une simple loi de puissance P-FGM. La partie inférieure de la plaque FGM est riche en Métal, tandis que la surface supérieure est riche en céramique. Le tableau IV.1 montre les propriétés matérielles utilisées dans la présente étude.

Tableau IV.1 : Propriétés matérielles du matériau FGM utilisé dans cette étude.

	Matériaux		Définition des propriétés	Symbole
1	Céramique	Alumine (Al_2O_3)	Le module d'élasticité	$E_c = 380 \text{ GPa}$
			La masse volumique	$\rho_c = 3800 \text{ kg/m}^3$.
		Zirconia (ZrO_2)	Le module d'élasticité	$E_c = 200 \text{ GPa}$
			La masse volumique	$\rho_c = 5700 \text{ kg/m}^3$.
2	Métal (Al)		Le module d'élasticité	$E_m = 70 \text{ GPa}$
			La masse volumique	$\rho_m = 2702 \text{ kg/m}^3$.

IV.2.2. Variations des paramètres étudiées

Les divers paramètres considérés dans cette étude sont (voir tableau IV.2) :

- Le rapport d'épaisseur sur Coté a/h ,

- L'indice de la fraction volumique k ,
- La fraction volumique de la porosité α ,
- Le mode de vibration m, n ,
- La forme de distribution de la porosité.

Pour plus de commodité, les paramètres adimensionnelles suivantes sont utilisés (voir tableau IV.2):

Tableau IV.2: Paramètres adimensionnels utilisés et leurs expressions correspondants

Paramètre adimensionnels	Notation	L'expression
Pour l'analyse de flexion		
La flèche adimensionnelle.	\bar{W}	$\bar{W} = 10 \frac{E_c h^3}{q_0 a^4} w \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2} \right)$
Le déplacement adimensionnel suivant x.	\bar{U}	$\bar{U} = 100 \frac{E_c h^3}{q_0 a^4} u \left(0, \frac{b}{2}, \frac{-h}{4} \right)$
Le déplacement adimensionnel suivant y.	\bar{V}	$\bar{V} = 100 \frac{E_c h^3}{q_0 a^4} v \left(\frac{a}{2}, 0, \frac{-h}{6} \right)$
La contrainte normale adimensionnelle suivant x.	$\bar{\sigma}_x$	$\bar{\sigma}_x = \frac{h}{hq_0} \sigma_x \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{h}{2} \right)$
La contrainte normale adimensionnelle suivant y.	$\bar{\sigma}_y$	$\bar{\sigma}_y = \frac{h}{hq_0} \sigma_y \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{h}{3} \right)$
La contrainte tangentielle adimensionnelle dans le plan xy.	$\bar{\tau}_{xy}$	$\bar{\tau}_{xy} = \frac{h}{hq_0} \tau_{xy} \left(0, 0, \frac{-h}{3} \right)$
La contrainte tangentielle adimensionnelle dans le plan xz.	$\bar{\tau}_{xz}$	$\bar{\tau}_{xz} = \frac{h}{hq_0} \tau_{xz} \left(0, \frac{b}{2}, 0 \right)$
La contrainte tangentielle adimensionnelle dans le plan yz.	$\bar{\tau}_{yz}$	$\bar{\tau}_{yz} = \frac{h}{hq_0} \tau_{yz} \left(\frac{a}{2}, 0, \frac{h}{6} \right)$
Pour l'analyse dynamique		
La fréquence de vibration adimensionnelle.	$\bar{\omega}$	$\bar{\omega} = \left(\omega \left(\frac{a^2}{h} \right) \sqrt{\frac{\rho_m}{E_m}} \right)$

IV.3. Analyse des résultats et discussions de l'effet des paramètres

IV.3.1. Analyse de flexion

Pour l'analyse statique, la plaque est soumise à une charge transversale sinusoïdale donnée par

$$q(x, y) = q_{11} \sin(\lambda x) \sin(\mu y) \quad (\text{IV.1})$$

Les propriétés de la plaque poreuse en matériau FGM changent à travers l'épaisseur de la plaque selon la loi de puissance P-FGM. Les surfaces inférieures et supérieures de la plaque FGM sont riches de métal et de céramique respectivement.

Afin de prouver la validité de la présente théorie de cisaillement proposé, les résultats ont été obtenus pour les plaques rectangulaires poreuse en matériau FGM et comparés avec ceux déjà existants dans la littérature tels que : la théorie de déformation de cisaillement généralisée développée par Zenkour (Zenkour 2006), la théorie de déformation de cisaillement (ZSDT) développée par Dharan (Dharan et al.2010), et les résultats obtenus par le modèle de Reddy basé sur la théorie d'ordre élevé HSDT (Reddy 2000). Les résultats sont reportés dans le tableau IV.3 et IV.4. Ces tableaux présentent les résultats numériques adimensionnels des déplacements et des contraintes des plaques poreuses avec la distribution de forme homogène H respectivement. Ces tableaux montrent aussi l'effet de la fraction de volume k ou l'indice matériel et le paramètre de la fraction de porosité α sur les contraintes et les déplacements d'une plaque carrée en FGM avec un rapport $a/h=10$. D'après les résultats présentés dans ces deux tableaux, on constate ce qui suit :

- Un bon accord entre les résultats de la présente théorie de cisaillement proposé et ceux de la littérature quand la plaque est parfaite ($\alpha = 0$).
- Pour l'effet de l'indice de la fraction de volume k , On peut observer que lorsque la plaque devient de plus en plus métallique (k augmente), la flèche \bar{W} et la contrainte normale $\bar{\sigma}_x$ augmentent mais la contrainte normale $\bar{\sigma}_y$ diminue.
- Il est très intéressant de noter que les contraintes d'une plaque entièrement en céramique sont les mêmes que celle d'une plaque entièrement en métal. Cela est dû au fait que dans ces deux cas, la plaque est entièrement homogène et les contraintes ne dépendent pas du module d'élasticité.

- En introduisant la fraction volumique de porosité α , on constate que l'augmentation de ce paramètre conduit à une augmentation de la flèche, déplacements et contraintes adimensionnelles ce qui montre que la porosité a une influence significative sur les déplacements et les contraintes des plaques FGM.

Tableau IV.3 : Effets de l'indice de la fraction volumique k sur les déplacements dimensionnels de la plaque FGM (a/h=10).

k	Model	α	\bar{U}	\bar{V}	\bar{W}
Céramique	ZSDT (Dharan <i>et al.</i> 2010)	$\alpha = 0$	0.21805	0.14493	0.29423
	GSDT (Zenkour 2006)	$\alpha = 0$	0.23090	0.15390	0.29600
	HSDT (Reddy 2000)	$\alpha = 0$	0.21805	0.14493	0.29423
	Présente	$\alpha = 0$	0.21816	0.14489	0.29604
		$\alpha = 0.1$	0.23189	0.15400	0.31468
		$\alpha = 0.2$	0.24746	0.16435	0.33581
0.2	ZSDT (Dharan <i>et al.</i> 2010)	$\alpha = 0$	0.2818	0.1985	0.33672
	GSDT (Zenkour 2006)	$\alpha = 0$	-	-	-
	HSDT (Reddy 2000)	$\alpha = 0$	0.28172	0.19820	0.33767
	Présente	$\alpha = 0$	0.30479	0.21539	0.35988
		$\alpha = 0.1$	0.33202	0.23552	0.38827
		$\alpha = 0.2$	0.36454	0.25971	0.42162
0.5	ZSDT (Dharan <i>et al.</i> 2010)	$\alpha = 0$	0.42135	0.31096	0.44387
	GSDT (Zenkour 2006)	$\alpha = 0$	-	-	-
	HSDT (Reddy 2000)	$\alpha = 0$	0.42131	0.31034	0.44407
	Présente	$\alpha = 0$	0.43859	0.32549	0.45369
		$\alpha = 0.1$	0.49628	0.37089	0.50253
		$\alpha = 0.2$	0.57114	0.43023	0.56405
1	ZSDT (Dharan <i>et al.</i> 2010)	$\alpha = 0$	0.64258	0.49673	0.59059
	GSDT (Zenkour 2006)	$\alpha = 0$	0.6626	0.5093	0.5889
	HSDT (Reddy 2000)	$\alpha = 0$	0.64137	0.49438	0.58895
	Présente	$\alpha = 0$	0.64112	0.49408	0.58893
		$\alpha = 0.1$	0.77156	0.60065	0.68318
		$\alpha = 0.2$	0.96748	0.76194	0.81924
2	ZSDT (Dharan <i>et al.</i> 2010)	$\alpha = 0$	0.9022	0.71613	0.76697
	GSDT (Zenkour 2006)	$\alpha = 0$	0.92810	0.73110	0.75730
	HSDT (Reddy 2000)	$\alpha = 0$	0.89858	0.71035	0.75747
	Présente	$\alpha = 0$	0.89793	0.70968	0.75733
		$\alpha = 0.1$	1.18383	0.94886	0.94196
		$\alpha = 0.2$	1.73521	1.41394	1.28005
5	ZSDT (Dharan <i>et al.</i> 2010)	$\alpha = 0$	1.06786	0.84942	0.94325
	GSDT (Zenkour 2006)	$\alpha = 0$	1.11580	0.87920	0.91180
	HSDT (Reddy 2000)	$\alpha = 0$	1.06297	0.84129	0.90951
	Présente	$\alpha = 0$	1.06620	0.84399	0.91171
		$\alpha = 0.1$	1.52547	1.23283	1.19970
		$\alpha = 0.2$	2.70313	2.24280	1.87542

Métal	ZSDT (Dharan <i>et al.</i> 2010)	$\alpha = 0$	1.18373	0.78677	1.59724
	GSDT (Zenkour 2006)	$\alpha = 0$	1.25340	0.83560	1.6070
	HSDT (Reddy 2000)	$\alpha = 0$	1.18373	0.78677	1.59724
	Présente	$\alpha = 0$	1.18429	0.78652	1.60709
		$\alpha = 0.1$	1.74527	1.15909	2.36835
		$\alpha = 0.2$	3.31601	2.20227	4.49987

Tableau IV.4 : Effet de l'indice de la fraction volumique k sur les contraintes adimensionnelles de la plaque carré en FGM soumise à un chargement sinusoïdale ($a/h=10$).

k	Model	α	$\bar{\sigma}_x$	$\bar{\sigma}_y$	$\bar{\tau}_{xy}$	$\bar{\tau}_{xz}$	$\bar{\tau}_{yz}$
Céramique	ZSDT (Dharan <i>et al.</i> 2010)	$\alpha = 0$	1.98915	1.31035	0.70557	0.23778	0.23778
	GSDT (Zenkour 2006)	$\alpha = 0$	1.9955	1.3121	0.7065	0.2462	0.2132
	HSDT (Reddy 2000)	$\alpha = 0$	1.98915	1.31035	0.70557	0.23778	0.19051
	Présente	$\alpha = 0$	1.99515	1.31219	0.70656	0.24406	0.21289
		$\alpha = 0.1$	1.99515	1.31219	0.70656	0.24406	0.21289
		$\alpha = 0.2$	1.99515	1.31219	0.70656	0.24406	0.21289
0.2	ZSDT (Dharan <i>et al.</i> 2010)	$\alpha = 0$	2.1227	1.30962	0.6678	0.22557	0.2256
	GSDT (Zenkour 2006)	$\alpha = 0$	-	-	-	-	-
	HSDT (Reddy 2000)	$\alpha = 0$	2.12671	1.30958	0.66757	0.22532	0.18045
	Présente	$\alpha = 0$	2.26003	1.38706	0.72053	0.24805	0.22655
		$\alpha = 0.1$	2.28168	1.39323	0.72174	0.24836	0.22755
		$\alpha = 0.2$	2.30723	1.40051	0.72317	0.24872	0.22871
0.5	ZSDT (Dharan <i>et al.</i> 2010)	$\alpha = 0$	2.60436	1.47175	0.66709	0.23909	0.23869
	GSDT (Zenkour 2006)	$\alpha = 0$	-	-	-	-	-
	HSDT (Reddy 2000)	$\alpha = 0$	2.61051	1.47147	0.66668	0.23817	0.19071
	Présente	$\alpha = 0$	2.61929	1.45863	0.69119	0.24945	0.24311
		$\alpha = 0.1$	2.68941	1.47532	0.68966	0.24997	0.24577
		$\alpha = 0.2$	2.77837	1.49653	0.68775	0.25061	0.24896
	ZSDT (Dharan <i>et al.</i> 2010)	$\alpha = 0$	3.07011	1.48935	0.61395	0.22705	0.23919

1	GSDT (Zenkour 2006)	$\alpha = 0$	3.087	1.4894	0.611	0.2462	0.2622
	HSDT (Reddy 2000)	$\alpha = 0$	3.08501	1.4898	0.61111	0.23817	0.19071
	Présente	$\alpha = 0$	3.08640	1.4895	0.61106	0.24406	0.26178
		$\alpha = 0.1$	3.26288	1.5185	0.59549	0.24406	0.26721
		$\alpha = 0.2$	3.51847	1.5604	0.57289	0.24406	0.27399
2	ZSDT (Dharan <i>et al.</i> 2010)	$\alpha = 0$	3.58089	1.3968	0.54947	0.22705	0.22719
	GSDT (Zenkour 2006)	$\alpha = 0$	3.6094	1.3954	0.5441	0.2265	0.2763
	HSDT (Reddy 2000)	$\alpha = 0$	3.60664	1.39575	0.54434	0.22568	0.1807
	Présente	$\alpha = 0$	3.60856	1.39561	0.54413	0.22427	0.27558
		$\alpha = 0.1$	3.96831	1.41036	0.50721	0.22074	0.28539
		$\alpha = 0.2$	4.61670	1.43564	0.44023	0.21543	0.29843
5	ZSDT (Dharan <i>et al.</i> 2010)	$\alpha = 0$	4.19547	1.1087	0.57811	0.21792	0.21813
	GSDT (Zenkour 2006)	$\alpha = 0$	4.2488	1.1029	0.5755	0.2017	0.2429
	HSDT (Reddy 2000)	$\alpha = 0$	4.24293	1.10539	0.57368	0.21609	0.17307
	Présente	$\alpha = 0$	4.24758	1.10329	0.57553	0.19919	0.24164
		$\alpha = 0.1$	4.74916	1.03851	0.55112	0.18612	0.25074
		$\alpha = 0.2$	5.78994	0.88676	0.50484	0.16142	0.26720
Métal	ZSDT (Dharan <i>et al.</i> 2010)	$\alpha = 0$	1.98915	1.31035	0.70557	0.23778	0.23778
	GSDT (Zenkour 2006)	$\alpha = 0$	1.9955	1.3121	0.7065	0.2462	0.2132
	HSDT (Reddy 2000)	$\alpha = 0$	1.98915	1.31035	0.70557	0.23778	0.19051
	Présente	$\alpha = 0$	1.99515	1.31219	0.70656	0.24406	0.21289
		$\alpha = 0.1$	1.99515	1.31219	0.70656	0.24406	0.21289
		$\alpha = 0.2$	1.99515	1.31219	0.70656	0.24406	0.21289

La figure IV.2 montre l'effet du rapport (a/b) et de la forme de la distribution de porosité sur la flèche transversal adimensionnel \bar{W} des plaques FGM fabriquées avec Al/Al₂O₃. Le coefficient de porosité α est égal 0.2. À partir de cette figure, on remarque que

la flèche adimensionnel diminué en augmentant le rapport (a/b) de la plaque. La flèche pour une plaque avec le modèle de distribution de porosité uniforme H est la plus élevée devant les autres modèles de plaques FGM imparfaites. Les valeurs les plus élevées de la flèche adimensionnelle sont obtenues pour la forme de distribution de porosité homogène H, tandis que les plus faibles correspondent à la forme de distribution de porosité en X. La forme de distribution de porosité en V et en O donne à peu près les mêmes valeurs de la flèche adimensionnelle. Un autre résultat de la figure IV.1 est que la différence entre les distributions de porosité diminue de manière significative en augmentant le rapport de la plaque (a/b).

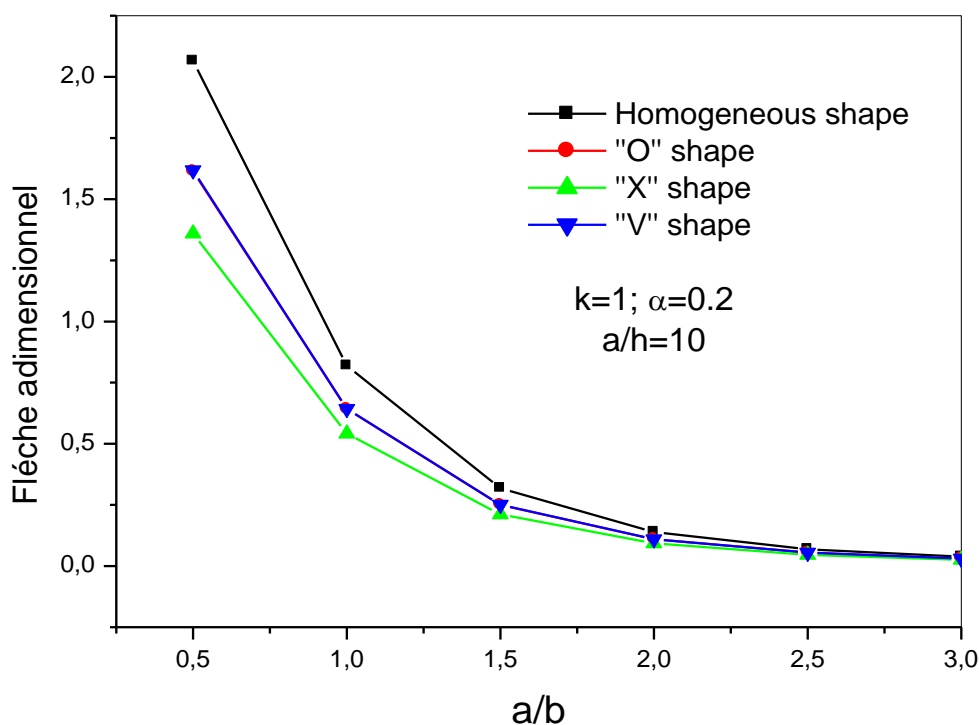


Figure IV.2 : Effet de la forme de distribution de porosité sur la flèche adimensionnel en fonction du rapport (a/b) d'une plaque FGM en Al/Al_2O_3 ($k = 1$; $\alpha = 0,2$).

Sur la figure IV.3, nous présentons l'effet de la forme de distribution de porosité sur la flèche adimensionnel d'une plaque carrée en Al/Al_2O_3 pour différente valeur du rapport (a/h). Il est à noter que l'effet de la forme de distribution de porosité sur la flèche est très significatif en augmentant le rapport a/h (lorsque la plaque devient plus mince). La forme distribution de porosité en V et O donne à peu près les mêmes valeurs de la flèche adimensionnelle.

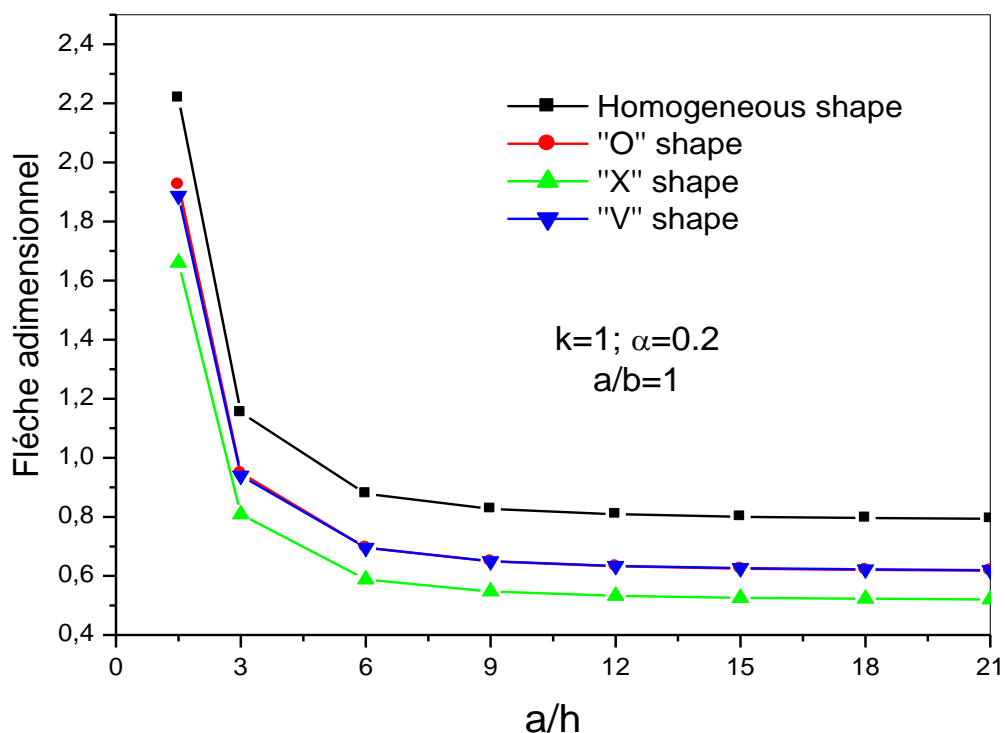


Figure IV.3 : Effet de la forme de la distribution de porosité sur la flèche adimensionnel en fonction de (a/h) d'une plaque carrée en Al/Al_2O_3 ($k = 1$; $\alpha = 0,2$).

La variation du coefficient de porosité α sur la flèche adimensionnel est illustrée sur la figure IV.4. Le coefficient de porosité α a un effet important sur les la flèche principalement pour la forme de distribution de porosité homogène H où l'augmentation du coefficient de porosité augmente le déplacement transversal \bar{W} . Avec l'augmentation de ce paramètre de porosité, la différence entre les distributions de porosité augmente considérablement.

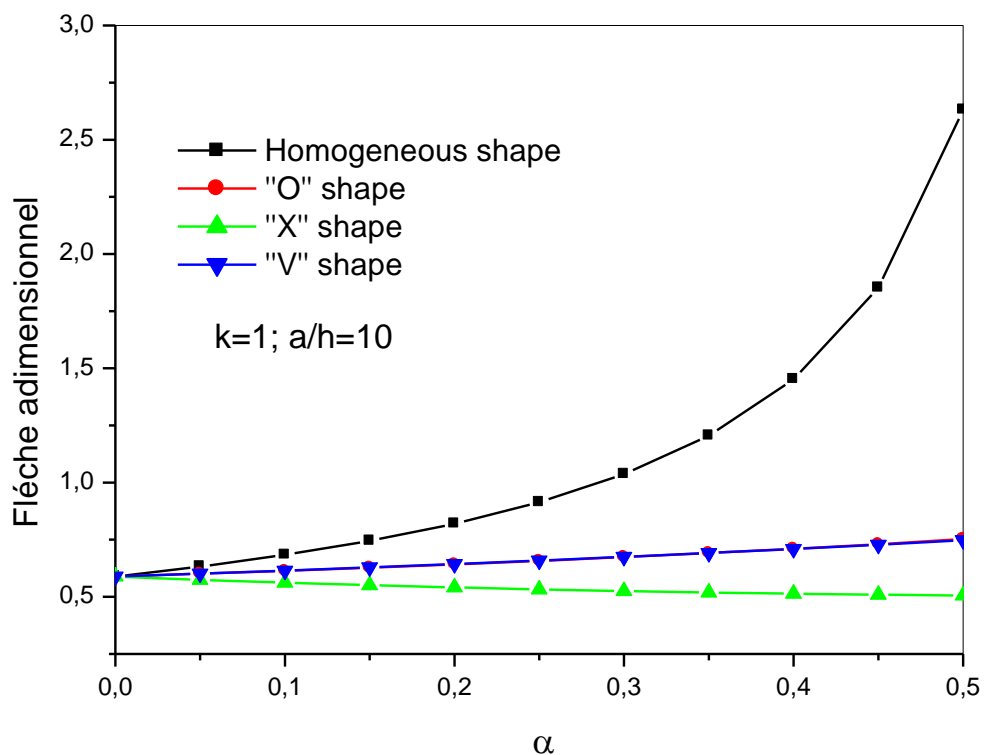


Figure IV.4 : Effet du coefficient de porosité sur la flèche centrale d'une plaque carrée en FGM ($k = 1$).

Les figures IV.5 et IV.6 montrent l'influence de la forme de distribution de la porosité sur la contrainte normale avec un coefficient de porosité $\alpha = 0.2$. D'après ces figures, il est clair que la contrainte longitudinale est maximale pour la forme distribution de porosité homogène H et elle est minimale pour la forme distribution de porosité en X.

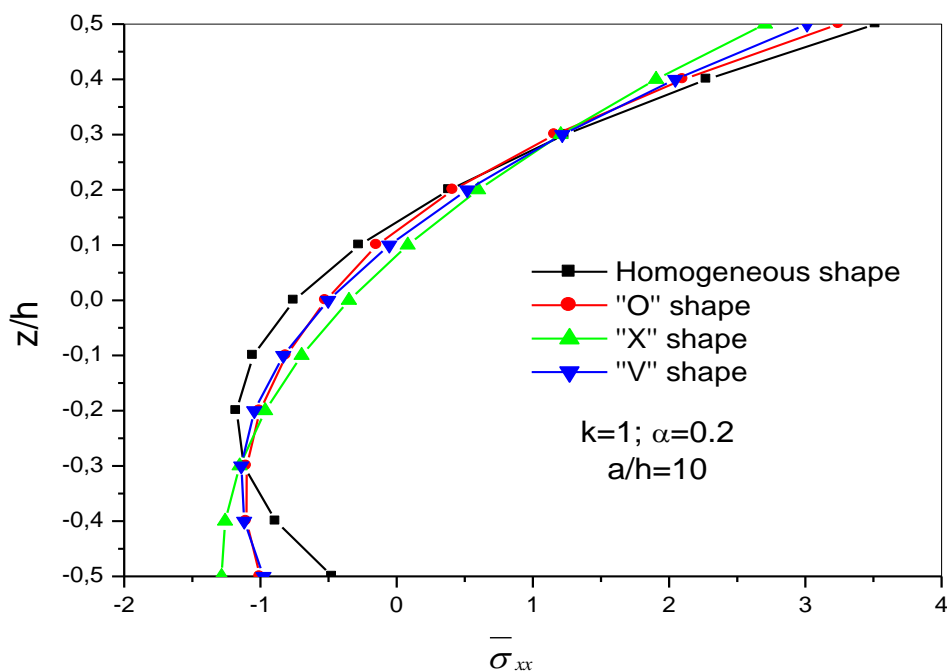


Figure IV.5 : Effet de la forme de distribution de la porosité sur la contrainte normale $\bar{\sigma}_{xx}$ à travers l'épaisseur d'une plaque carrée en Al/Al₂O₃ ($a/h = 10$; $\alpha = 0.2$).

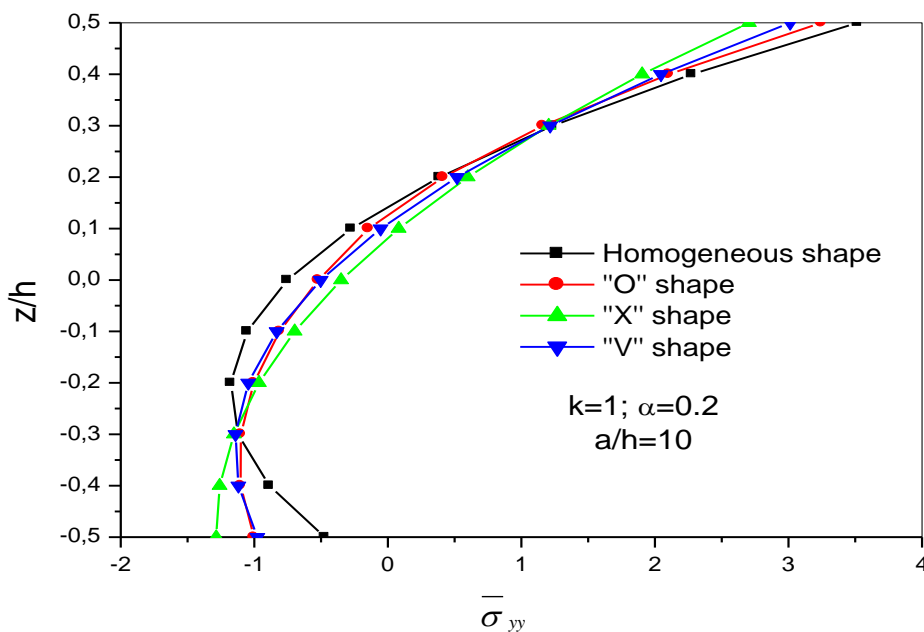


Fig. IV.6 : Effet de la forme de distribution de la porosité sur la contrainte normale $\bar{\sigma}_{yy}$ à travers l'épaisseur d'une plaque carrée en Al/Al₂O₃ ($a/h = 10$; $\alpha = 0.2$).

Les figures IV.7 à IV.9 montrent l'influence de la forme de distribution de la porosité sur les contraintes de cisaillement avec un coefficient de porosité $\alpha = 0.2$. Il est clair que les distributions ne sont pas paraboliques. De plus, la contrainte de cisaillement est maximale pour la forme de distribution de porosité en H et elle est minimale pour la forme de distribution de la porosité en X.

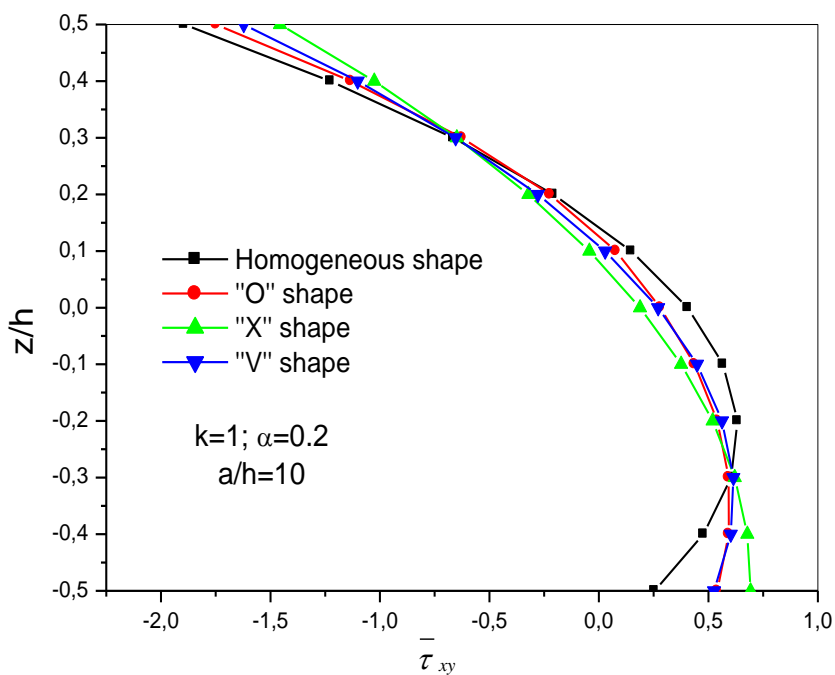


Figure IV.7 : Effet de forme de la distribution de porosité sur la contrainte de cisaillement $\bar{\tau}_{xy}$ à travers l'épaisseur d'une plaque carrée en Al/Al₂O₃ ($a/h = 10$; $\alpha = 0.2$).

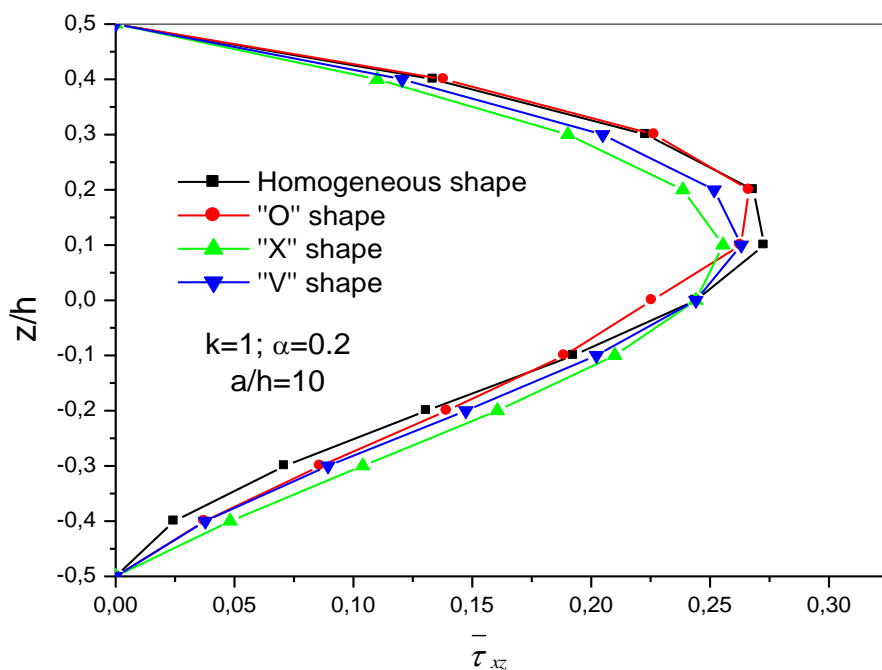


Figure IV.8 : Effet de forme de la distribution de porosité sur la contrainte de cisaillement $\bar{\tau}_{xz}$ à travers l'épaisseur d'une plaque carrée en Al/Al₂O₃ ($a / h = 10$; $\alpha = 0.2$).

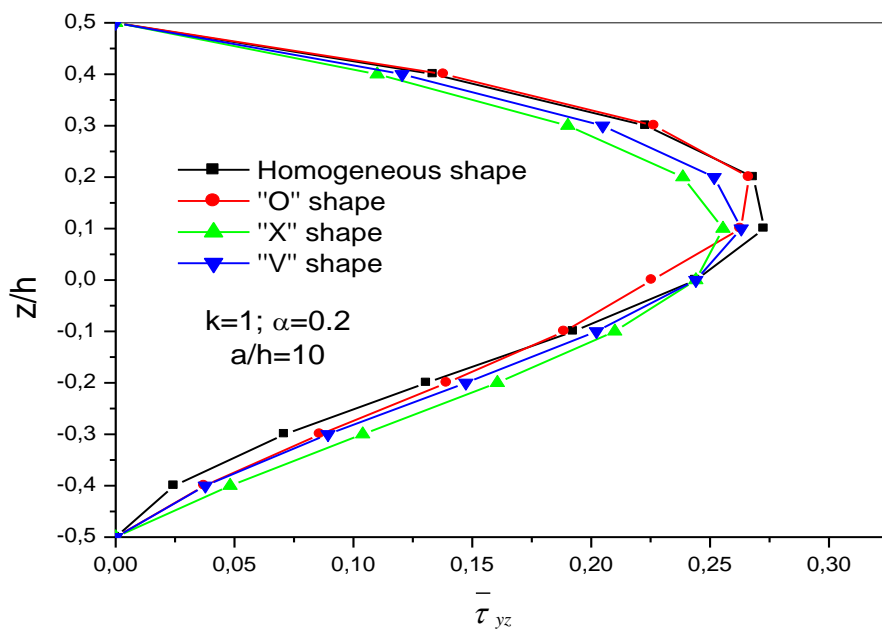


Figure IV.9 : Effet de forme de la distribution de porosité sur la contrainte de cisaillement $\bar{\tau}_{yz}$ à travers l'épaisseur d'une plaque carrée en Al/Al₂O₃ ($a / h = 10$; $\alpha = 0.2$).

IV.3.2. Analyse dynamique

La précision de la présente théorie proposée est également étudiée par l'analyse de la vibration libre des plaques poreuses en matériau FGM. Quatre formes de distribution de la porosité à l'intérieur du matériau sont considérées à savoir :

- Distribution de porosité de forme Homogène H ;
- Distribution de porosité de forme O ;
- Distribution de porosité de forme X ;
- Distribution de porosité de forme V ;

Les propriétés des matériaux utilisés dans la présente étude sont :

Céramique (P_c , Zirconia, Al_2O_3) : $E_c = 200 \times 10^9 \text{ GPa}$, $\nu = 0.3$, $\rho_c = 5700 \text{ Kg/m}^3$.

Métal (P_M , Aluminium, Al) : $E_m = 70 \times 10^9 \text{ GPa}$, $\nu = 0.3$, $\rho_c = 2702 \text{ Kg/m}^3$.

Les résultats numériques sont présentés en termes des fréquences fondamentales naturelles adimensionnelles :

$$\bar{\omega} = \left(\omega \left(\frac{a^2}{h} \right) \sqrt{\frac{\rho_m}{E_m}} \right) \quad (\text{IV.2})$$

Afin de valider la présente théorie proposée, une étude comparative est réalisée. Plusieurs paramètres sont variés et leur comportement dynamique est étudié. Dans l'étude de validation, le tableau IV.5 présente les trois premières fréquences propres pour le mode de vibration fondamental ($m = n = 1$) avec différent rapport a/h de la plaque et comparés aux résultats obtenus à partir de la présente théorie de cisaillement et à ceux obtenus par les résultats de la théorie de déformation de cisaillement (ZSDT) développée par Dharan (Dharan et al.2010), le modèle de Reddy basé sur la théorie d'ordre élevé HSDT (Reddy 2000), et la théorie de déformation de cisaillement de premier ordre HSDT2 développé par Trung et al. 2008.

A partir des résultats trouvés dans ce tableau, un bon accord entre les résultats de la présente théorie avec les autres théories existante dans la littérature quand la plaque est parfaite ($\alpha = 0$). En introduisant le paramètre de la fraction volumique de porosité α , on peut constater que l'augmentation de ce facteur conduit à une augmentation des fréquences propres de vibration ce qui montre que la porosité a une influence significative sur la fréquence des plaques poreuse en FGM.

Tableau IV.5 : Comparaison des trois premiers fréquences naturelles de la plaque Al/ZrO₂ pour différentes valeurs du rapport a/h , $\bar{\omega} = \left(\omega \left(\frac{a^2}{h} \right) \sqrt{\frac{\rho_m}{E_m}} \right)$, $k=1$.

a/h	Théories	α	Mode		
			1	2	3
5	ZSDT (Dharan <i>et al.</i> 2010)	$\alpha = 0$	5.6554	15.2996	25.9247
	HSDT (Reddy 2000)	$\alpha = 0$	5.6914	15.3408	25.9257
	HSDT2 (Trung, 2008)	$\alpha = 0$	5.7123	15.339	25.776
	Présente	$\alpha = 0$	5.6777	15.3438	25.776
		$\alpha = 0.1$	5.9337	16.1738	27.1444
$\alpha = 0.2$		6.2278	17.1549	28.7561	
10	ZSDT	$\alpha = 0$	6.18	30.6643	51.8649
	HSDT (Reddy 2000)	$\alpha = 0$	6.1863	30.6861	51.8665
	HSDT2 (Trung, 2008)	$\alpha = 0$	6.1932	30.685	51.795
	Présente	$\alpha = 0$	6.1813	30.6876	51.7915
		$\alpha = 0.1$	6.4985	32.3475	54.5798
$\alpha = 0.2$		6.8700	34.3097	57.8731	
20	ZSDT	$\alpha = 0$	6.3359	61.3633	103.7394
	HSDT (Reddy 2000)	$\alpha = 0$	6.3371	61.3744	103.7404
	HSDT2 (Trung, 2008)	$\alpha = 0$	6.339	61.374	103.71
	Présente	$\alpha = 0$	6.3358	61.3751	103.7029
		$\alpha = 0.1$	6.6738	64.6951	109.3058
$\alpha = 0.2$		7.0724	68.6195	115.9276	

Dans la figure IV.10, la relation entre le rapport (a/h) de la plaque et la fréquence fondamentale est présentée pour différents modèles de porosité avec un indice matériel $k = 2$ et un coefficient de porosité α est égal 0.2. On remarque sur cette figure que la différence entre les modèles de porosité augmente avec l'augmentation du rapport (a/h). Avec des valeurs plus élevées de (a/h) de la plaque, les distributions de porosité jouent un rôle important sur le comportement de vibration libre des plaques poreuses en FGM. La forme de distribution de la porosité homogène H donne les plus grandes valeurs de la fréquence fondamentale. Le modèle de porosité V et O donne presque les mêmes valeurs de fréquence

de vibration. De plus, le résultat du modèle de porosité X donne les valeurs les plus basses de la fréquence fondamentale. La raison de cette situation est que le vide empile plus dans la distribution de porosité X, et donc la rigidité des plaques est la plus faible dans le modèle de porosité X. En conséquence, le modèle de porosité X donne la fréquence fondamentale la plus basse contrairement aux autres modèles de porosité.

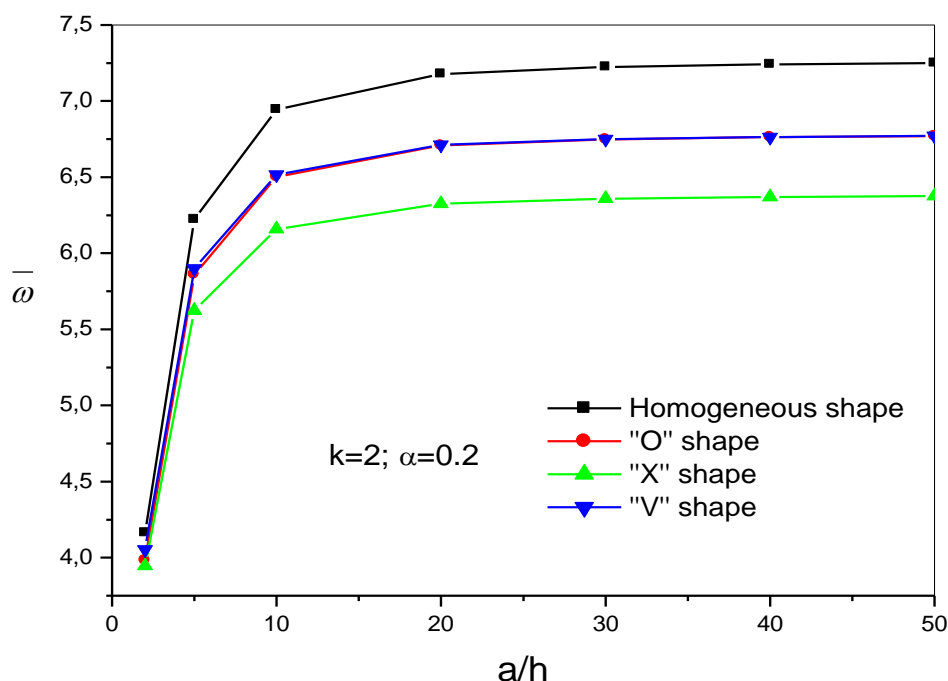


Figure IV.10 : Effet de la forme de la distribution de porosité sur la fréquence fondamentale adimensionnel $\bar{\omega}$ en fonction du rapport par rapport (a/h) d'une plaque carrée en FGM ($k = 2$).

La figure IV.11 montre les effets du coefficient de porosité α sur la fréquence fondamentales adimensionnel pour $k=2$ et $a/h=10$. Comme le montre la figure IV.11, l'augmentation du coefficient de porosité α permet d'augmenter considérablement la différence entre les modèles de porosité et les résultats des modèles de porosité V et O sont très proches.

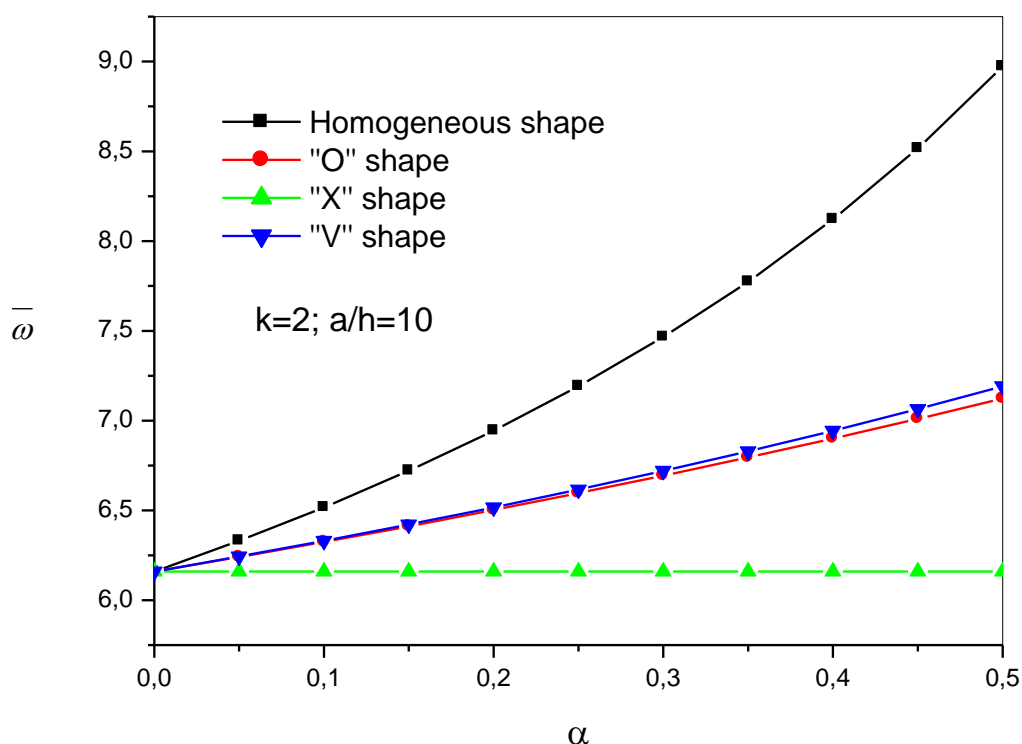


Figure IV.11 : Effet du coefficient de porosité α sur la fréquence fondamentale adimensionnel $\bar{\omega}$ de la plaque FGM ($k = 2$).

IV.4. Conclusion

Ce chapitre présente une nouvelle théorie de cisaillement de déformation hyperbolique pour l'analyse du comportement statique et dynamique des plaques poreuses en matériau FGM. Quatre formes de distribution de la porosité à l'intérieur du matériau sont considérées dans cette étude. Les solutions de Navier sont présentées pour analyser la flexion et la vibration libre des plaques poreuses en FGM. Les contraintes et les déplacements sont calculés pour les plaques poreuses avec le mélange métal-céramique. D'après les résultats analysés, le gradient de propriété du matériau et le paramètre de la porosité jouent des rôles essentiels dans la détermination de la réponse des plaques FGM poreuses. Toutes les études comparatives ont démontré que les déplacements et les contraintes obtenues en utilisant la présente théorie de cisaillement (avec quatre inconnues) et d'autres théories de déformation de cisaillement d'ordre élevé (avec cinq inconnues) sont presque identiques. Cette théorie est également utilisée pour la prédiction des fréquences fondamentales des plaques poreuses en

FGM. L'influence jouée par les rapports de dimensionnement, l'élanement de la plaque et la forme de distribution de la porosité sont étudiés. La présente théorie de cisaillement fournit des résultats en excellent accord avec les résultats disponibles dans la littérature. En conclusion, on peut dire que la présente théorie proposé est précis et simple pour résoudre le comportement statique et dynamique des plaques poreuses en FGM.

**CONCLUSION
GENERALE ET
PERSPECTIVES**

Conclusion générale

L'objectif de notre étude consiste à analyser le comportement statique et dynamique des plaques poreuses en matériaux à gradients de propriétés « FGM » sous l'effet du cisaillement transverse. La mise en évidence de l'effet du cisaillement transverse dans cette étude nous a permis de décrire avec une bonne précision les champs de contraintes et de déformations induites, pour cela nous traités :

- Les résultats obtenue par la présente théorie de cisaillement sont presque identiques avec ceux calculés à partir des théories de déformation de cisaillement disponibles dans la littérature.
- La flèche augmente avec l'augmentation de l'indice matériel k .
- La flèche, les contraintes normales et tangentielles dépendent des géométries de la plaque et de l'indice matériel k .
- La flèche adimensionnel diminué en augmentant le rapport (a/b) de la plaque.
- La flèche pour une plaque avec le modèle de distribution de porosité uniforme H est la plus élevée devant les autres modèles de plaques FGM imparfaites.
- La forme de distribution de porosité en X donne la plus faible flèche adimensionnel.
- La forme de distribution de porosité en V et en O donne à peu près les mêmes valeurs de la flèche adimensionnelle.
- La contrainte longitudinale est maximale pour la forme distribution de porosité homogène H, et elle est minimale pour la forme de distribution de porosité en X.
- Pour les fréquences de vibration, la différence entre les modèles de porosité augmente avec l'augmentation du rapport (a/h) .
- La forme de distribution de la porosité homogène H donne les plus grandes valeurs de la fréquence fondamentale. Le modèle de porosité V et O donne presque les mêmes valeurs de fréquence de vibration.
- Le résultat du modèle de porosité X donne les valeurs les plus basses de la fréquence fondamentale.

En conclusion, on peut dire que la théorie de cisaillement des plaques proposée est exacte et simple pour la résolution du comportement de flexion et de la vibration libre des plaques poreuses en FGM. Le développement de la présente théorie est également considéré pour des conditions aux limites générales.

En perspective à ce travail, nous envisagerons d'étudier le problème de cisaillement, et d'utiliser la nouvelle théorie de cisaillement pour les cas suivants :

- La prise en compte de l'effet de la température dans l'étude de la flexion et la vibration ;
- Utilisation de la théorie raffinée pour d'autres types d'appuis ;
- Effet du cisaillement transverse sur le comportement mécanique des plaques sandwichs poreuses en matériaux à gradient de propriétés;
- Il s'avère indispensable de recourir à la méthode des éléments finis qui permet de résoudre des problèmes plus compliqués comparativement à la méthode analytique.

REFERENCES
BIBLIOGRAPHIQUES

Références bibliographiques

- [Afaq 2003] Un nouveau modèle raffiné pour les structures multicouches, In Comptes-rendus des 13^{èmes} Journées Nationales sur les Composites, 289-292. Strasbourg, March 2003.
- [Ait Atmane 2015] Ait Atmane, H., Tounsi, A. and Bernard, F., Effect of thickness stretching and porosity on mechanical response of a functionally graded beams resting on elastic foundations, *Int. J. Mech. Mater.*, 1-14, 2015.
- [Abdizadeh H 1997] Elaboration et caractérisation de composites « composites lumineuses tri-couches à base d'alumine, thèse de doctorat INSA de Lyon, 212 p, 1997.
- [Akbaş 2017] Akbaş, Ş.D., Vibration and static analysis of functionally graded porous plates, *Journal of Applied and Computational Mechanics*, 3(3), 199-207, 2017.
- [Ambartsumyan 1969] Theory of anisotropic plate. Technomic Publishing Co, 1969.
- [Avcar 2019] Avcar, M., Free vibration of imperfect sigmoid and power law functionally graded beams, *Steel and Composite Structures*, 30(6), 603-615, 2019.
- [Aydogdu 2005] Metin Aydogdu, Vibration analysis of cross-ply laminated beams with general boundary conditions by Ritz method, *International Journal of Mechanical Sciences* 47, 1740–1755, 2005.
- [Bishop 1993] Bishop, A., Lin, C.Y., Navaratnam, M., Rawlings, R.D., Mc Shane, H.B., A functionally gradient material produced by a powder metallurgical process, *Journal of Materials Science Letters*, 12 (19), 1516-18, 1993.
- [Bouiadjra 2015] Bouiadjra, B.R, Contribution à l'Etude de la Stabilité des Plaques Epaissees en Composite sur fondations Elastiques, Thèse de doctorat, Université de des sciences et de la technologie d'ORAN MOHAMED BOUDIAF, 2015.
- [Bourada 2019] Bourada, F., Bousahla, A.A., Bourada, M., Azzaz, A., Zinata, A., and Tounsi, A., Dynamic investigation of porous functionally graded beam using a sinusoidal shear deformation theory, *Wind and Structures*, 28(1), 19-30, 2019.
- [Demirhan 2019] Demirhan, P.A. and Taskin, V., Bending and free vibration analysis of Levy-type porous functionally graded plate using state space approach, *Compos. B Eng.*, 160, 661-676, 2019.

- [Dharan 2010]** Dharan, S., Syam Prakash, V. and Savithri, S., A higher order shear deformation model for functionally graded plates, International Conference on Technological Trends (ICTT-2010), Trivandrum, India, November.
- [Hadji 2012]** Hadji, L., Contribution à l'étude de la vibration des plaques sandwiches en FGM, Thèse de doctorat, Université Djillali Liabes de Sidi Bel Abbés, 2012.
- [Hadji 2015]** Hadji, L. and Adda Bedia, E.A., Influence of the porosities on the free vibration of FGM beams, Wind Struct., 21(3), 273-287, 2015.
- [Hassaine Daouadji 2016]** Hassaine Daouadji, T., Benferhat, R. and Belkacem, A. (2016), Bending analysis of an imperfect advanced composite plates resting on the elastic foundations, Coupled Syst. Mech., 5(3), 269-285, 2016.
- [Koizumi 1992]** The concept of FGM, ceramic transaction, functionally graded materials. Functionally Graded Materials, 34, 3-10, 1992.
- [Liberscu 1967]** On the theory of anisotropic elastic shell and plates. Int J Solids Structures, 3, 53, 68, 1967.
- [Mistler 1973]** High strength substrates produced by multiple layer casting technique, Am. Ceram. Soc. Bull, 52(11), 850-54, 1973.
- [Noor 1989]** Assesment of shear deformation theories for multilayered composite plates, Appl Mech Rev, 42(1), 1, 12, 1989.
- [Kirchhoff 1950]** Uber das gleichgewicht und die bewegung einer elastischen scheibe. Journal fur reine und angewandte Mathematik, 40, 51, 88, 1850.
- [Ramteke 2019]** Ramteke, P.M., Panda, S.K. and Sharma, N., Effect of grading pattern and porosity on the eigen characteristics of porous functionally graded structure, Steel and Composite Structures, 33(6), 865, 2019.
- [Reddy 1984]** A simple higher-order theory for laminated composite plates. Jornal of Applied Mechanics, 51, 745-752, 1984.
- [Reddy 1987]** A generalization of two-dimensional theories of laminated composite plate. Commun. Appl. Numer. Methods, 3, 173,180, 1987.
- [Reddy 2000]** Reddy, J.N., Analysis of functionally graded plates, Int. J. Numer. Method. Eng., 47(1-3), 663-684, 2000.

[Reissner 1945] The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates. *J. Appl. Mech.*, 12, 69, 77, 1945.

[Reissner 1961] Reissner, E., & Stavsky, Y., Bending and stretching of certain types of hetero-geneous aelotropic elastic plate. *J. appl.mech.*, 28, 402,408, 1961.

[Steffes H D 1990] Dvorak M. Wewel. Plasma sprayed functionally graded materials-processing and application, in proceeding of the first international symposium on functionally gradient materials-Sedai Japan, 1990.

[Trung 2008] Trung, K..N., Karam, S., Guy, B., (2008), First order shear deformation plate models for Functionally graded materials, *Composite Structures*, 83, 25-36, 2008.

[Tauratier 1991] An efficient standard plate theory. *Engng Sci*, vol. 29(8), 901-916, 1991.

[Wattanasakulponga 2014] Wattanasakulponga, N. and Ungbhakornb, V. (2014), Linear and non linear vibration analysis of elastically restrained ends FGM beams with porosities, *Aero. Sci. Technol.*, 32(1), 111-120, 2014.

[Whitney 1973] Shear correction factors for orthotropic laminates under static loads *J. Applied Mechanics*, 40, 302-304, 1973.

[Zenkour 2006] Zenkour, A.M., 2006, Generalised shear deformation theory for bending analysis of functionally graded plates, *Applied Mathematical Modelling*, 30, 67-84, 2006.