



République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Ibn Khaldoun de Tiaret
Faculté des Sciences Appliquées
Département de Génie Mécanique

PROJET DE FIN DE CYCLE

MASTER

Domaine : Sciences et Technologies
Filière : Génie Mécanique
Parcours : Master
Spécialité : Construction Mécanique

Thème

Elaboration d'une formule analytique de facteur de forme pour le calcul de facteur d'intensité de contrainte des structures endommagées par fissuration

Préparé par :

HASSAN Sid Ahmed et MAKHLOUF Rachid

Soutenu publiquement le : 28 / 06 / 2022, Devant le jury composé de :

M. BOUZIDANE Ahmed	Professeur	(Univ. Ibn Khaldoun)	Président
M. ZAGANE Mohammed El Sallah	Maître de Conférences "A"	(Univ. Ibn Khaldoun)	Examineur
M. GUEMMOUR Mohamed Boutkhil	Maître de Conférences "B"	(Univ. Ibn Khaldoun)	Examineur
M. BALTACH Abdelghani	Maître de Conférences "A"	(Univ. Ibn Khaldoun)	Encadrant

Année universitaire : 2021 - 2022

Remerciements

Tout d'abord, nous remercions Dieu tout puissant qui nous a inspiré et donner le courage et la volonté d'accomplir ce travail.

En cette occasion nous tenons à remercier chaleureusement notre encadreur Dr : BALTACH Abdelghani pour ces conseils et orientations et ces énormes efforts qui ont été très bénéfiques à notre parcours et démarches pendant l'élaboration de notre mémoire de fin d'études.

Nous remercions également les membres de jury d'avoir accepté de débattre notre modeste travail.

Chaleureusement et sans oublier nous tenons à porter notre gratitude et remerciements à tous les enseignants du Département de Génie Mécanique qui ont contribué à notre formation et enseignement pendant notre cursus universitaire, à toutes les personnes qui nous ont porté aide et soutien soit de près ou de loin directement ou indirectement.

Nous voudrions remercier également tout le personnel de Département Génie Mécanique pour sa gentillesse et son soutien notamment l'équipe de notre classe.

Dédicaces

Nous dédions ce modeste travail à toutes les personnes qui nous ont aidés de près ou de loin plus particulièrement :

- *A nos très chers parents, tout notre respect et affection en témoignage de leur soutien, sacrifice, patience, ainsi que pour leurs conseils et orientations dans la vie.*
- *A toutes nos familles et nos très chers frères et sœurs.*
- *A tous nos enseignants et à nos collègues de promotion.*
- *A tous nos amis*
- *A tous ceux qui nous sont chers.*

✓ **HASSAN SJD AHMED**

✓ **MAKHOUF RACHID**

Table de matière

Introduction générale	01
<i>I- Recherche bibliographique sur la mécanique de la rupture</i>	
I.1 Généralités	02
I.2 Utilisation de la mécanique de la rupture en conception :	02
I.3 Mécanique linéaire de la rupture	05
I.3.1 Approche atomique de la rupture fragile	05
I.3.2 Rupture fragile	07
I.3.2.1 Rupture fragile Trans-granulaire (à clivage)	07
I.3.2.2 Rupture fragile inter granulaire	08
I.3.3 Critères de rupture	09
I.3.3.1 Critère énergétique.....	09
I.3.3.2 Critère mécanique (Irwin)	10
I.3.4 Modes de rupture	10
I.3.5 Concept du facteur d'intensité des contraintes FIC.....	12
I.3.6 Concentration de contraintes près d'un défaut	14
I.4 Mécanique non linéaire de la rupture	15
I.4.1 Notion de CTOD	15
I.4.2 L'intégrale J.....	15
I.4.2.1 Intégrale J dans la rupture fragile	16
I.5 Propagation des fissures et concept de tolérance au dommage	16
I.6 La plasticité confinée en pointe de fissure	18
<i>II-Estimation du degré de nocivité d'une fissure</i>	
II.1 Introduction	20
II.2 Validation du modèle éléments finis en comportement élastique linéaire	20
II.2.1 Éprouvette SECP (Single-EDGE CRACKED panel)	20
II.2.2 Propriétés mécaniques	21
II.2.3 Maillage par Eléments Finis et conditions aux limites	22
II.2.4 Résultats et discussion	23
II.3 Etude de la gravité de la configuration de la structure fissurée	25
II.3.1 Modèles géométriques	25
II.3.2 Modélisation par élément finis	26
II.3.3 Résultats et discussions	26

III-Élaboration d'une formule analytique de facteur de forme

III.1	Introduction	30
III.2	Modèle géométrique et propriétés mécaniques	30
III.3	Modèle élément finis et conditions aux limites	32
III.4	Résultats et discussion	33
III.4.1	Équation empirique	34
III.5	Solution analytique des facteurs d'intensités de contraintes	36
Conclusion générale		37

Annexe

A.1	Méthode des éléments finis	38
A.1.1	Introduction	38
A.1.2	Utilisation de la méthode des éléments finis	39
A.1.3	Démarche éléments finis	40
A.1.4	Principes de la méthode des éléments finis (MEF)	40
A.1.5	Étapes logiques du calcul par éléments finis	41
A.1.6	Vérification des données	41
A.1.6.1	Construction des tables	41
A.1.6.2	Calcul des matrices élémentaires et assemblage des matrices globales	41
A.1.6.3	Factorisation de la matrice de rigidité globale	41
A.1.6.4	Partition des degrés de liberté	42
A.1.7	Étapes pratiques du calcul par EF	43
A.1.7.1	Préprocesseur	44
A.1.7.2	Solveur	44
A.1.7.3	Post-processeur.....	44
A.1.8	La modélisation physique de systèmes mécaniques.....	44
A.1.9	Utilisation d'un logiciel éléments finis.....	45
A.1.9.1	Déroulement d'une étude.....	45
A.1.10	Organigramme d'un logiciel éléments finis.....	49
A.2	Généralités sur ABAQUS.....	51
A.2.1	ABAQUS.....	51
A.2.2	Unités	52
A.2.3	Descriptif	52
A.2.3.1	Type d'analyse	52

A.2.3.2	Problèmes	53
A.2.3.3	Types de non-linéarités	53
A.2.3.4	Non-linéarités matérielles	54
A.2.3.5	Non-linéarités géométriques.....	54
A.2.3.6	Non-linéarités de contact	54
A.2.4	Structure	54
A.2.4.1	Le fichier d'entrée	54
A.2.4.2	Modularité	55
	Références bibliographiques.....	56
	Résumé.....	58

Listes des figures

Figure I.1	Approche classique (RDM).....	03
Figure I.2	Approche utilisant la mécanique linéaire de la rupture	03
Figure I.3	Analyse des contraintes au voisinage d'un trou elliptique.....	04
Figure I.4	(a) Clivage dans un acier doux ruptures Trans-granulaire (clivage) et (b) inter-granulaire (décohésion) dans un acier doux a gros grains.....	05
Figure I.5	rupture par clivage (mode I de rupture)	06
Figure I.6	Courbe représentative de la fonction r tend vers $\sigma(r)$	07
Figure I.7	rupture par clivage à différentes échelles.....	08
Figure I.8	Aspect de rupture inter granulaire à l'échelle microscopique.....	08
Figure I.9	Fissure traversant de longueur $2a$ dans une plaque infinie.....	10
Figure I.10	Les trois modes de rupture.....	11
Figure I.11	Comparaison entre l'approche classique et celle de la MLR.....	12
Figure I.12	Tenseur de contrainte au point M.....	13
Figure I.13	Répartition des contraintes autour d'un trou dans une plaque.....	14
Figure I.14	Concept de tolérance au dommage.....	17
Figure I.15	Propagation de fissure en fatigue loi de Paris.....	18
Figure I.16	Zone plastique de pointe de fissure en mode 1.....	18
Figure I.17	Méthode d'Irwin pour le calcul de (r_y)	19
Figure II.1	Modèle géométrique d'éprouvette à une fissure latérale (les dimensions sont en mm)....	21
Figure II.2	Modèle EF de la plaque fissurée latéralement pour un rapport de longueur de fissure ($a/w=0.25$ correspond $a=6\text{mm}$) ; a) Conditions aux limites ; b) Modèle et maillage typique de la plaque étudiée ; (c) Maillage autour de la pointe de fissure.....	22
Figure II.3	Evolution du FIC en fonction du rapport de la longueur de fissure.....	24
Figure II.4	Répartitions de contraintes de Von Mises pour un rapport de longueur de fissure $a/w=0.25$	24
Figure II.5	Modèle géométrique des différentes configurations à étudier (les dimensions sont en mm). a) Fissure latérale ; b) Fissure centrale ; c) Double fissures centrales superposées ; d) Double fissures latérales superposées et e) Double fissures à côté gauche et droit	25

Figure II.6	Modèles EF des différentes configurations étudiées	26
Figure II.7	Variation du FIC en fonction du rapport de la longueur de fissure a/w pour les différentes structures fissurées.....	27
Figure II.8	Répartitions de contraintes de Von Mises pour un rapport de longueur de fissure $a/w=0.25$ pour toutes les configurations analysées a) Fissure latérale ; b) Fissure centrale ; c) Double fissures centrales superposées ; d) Double fissures latérales superposées et e) Double fissures à côté gauche et droit.....	28
Figure III.1	Modèle géométrique d'éprouvettes à une fissure latérale (les dimensions sont en mm)...	31
Figure III.2	Modèle EF de la plaque fissurée : (a) conditions aux limites ;(b) Modèle et maillage typique de 1/4 de la plaque ; (c) Maillage autour de la pointe de fissure.....	33
Figure III.3	Evolution du FIC en fonction du rapport de la longueur de fissure.....	34
Figure III.4	Evolution du facteur de forme en fonction du rapport de la longueur de fissure a/w	35
Figure A.1	Organisation générale d'un code de calcul.....	43
Figure A.2	Composants de la fenêtre principale (viewport).....	51
Figure A.3	Les éléments utilisés dans ABAQUS.....	53
Figure A.4	Les éléments non linéaires de différents nœuds.....	53

Liste des tableaux

Tableau II.1	Propriétés d'un matériau élastique isotrope (Acier EN 24).....	21
Tableau II.2	Nombre de nœuds et d'éléments de la structure étudiée.....	22
Tableau II.3	Résultats obtenus après l'analyse numérique.....	23
Tableau III.1	Propriétés des matériaux utilisés.....	31
Tableau III. 2	Nombre de nœuds et d'éléments de la plaque étudiée.....	32
Tableau III.3	Comparaison des FIC pour différentes éprouvettes (SENT étudiées).....	33
Tableau III.4	Paramètres de l'équation polynomiale du facteur de forme (F).....	36
Tableau A.1	Principales sources d'erreurs durant le calcul.....	48
Tableau A.2	Organigramme d'un logiciel éléments finis.....	50
Tableau A.3	Les unités d'ABAQUS.....	52

Liste des symboles

Symboles	Signification
a	Longueur de fissure
dW	Variation d'énergie
$[D]$	Matrice diagonale
E	Module d'Young
$\{F\}$	Vecteur force
G	Taux de restitution
J	L'intégrale énergétique
K_I	Facteur d'intensité de contrainte
K_t	Facteur de concentration de contrainte
$[K]$	Matrice de rigidité globale
ΔK	L'amplitude de facteur d'intensité de contrainte
$[L]$	Déplacements inconnus
R_{th}	Résistance théorique
$\{U\}$	Vecteur déplacement
γ	Energie de surface
σ_c	Contrainte théorique de clivage

Introduction générale

Introduction générale

La mécanique de la rupture est désormais considérée comme une matière mature et est devenue un cours important dans les programmes d'ingénierie de nombreuses universités. Il est également devenu un outil d'analyse et de conception utile pour les ingénieurs en mécanique, en structure et en matériaux. La mécanique de la rupture, en particulier la mécanique de la rupture élastique linéaire, est un domaine unique en ce que son cadre fondamental réside dans le champ de contraintes singulières de type racine carrée inverse devant une fissure. Presque toutes les propriétés de rupture d'un solide sont caractérisées à l'aide de quelques paramètres extraits de ces champs de contrainte et de déplacement près de la pointe de la fissure. Compte tenu de cette caractéristique unique de la mécanique de la rupture, nous pensons qu'il est essentiel que l'ingénieur saisisse pleinement les détails mathématiques et leur représentation de la physique associée dans l'expression mathématique, car la justification et les limites de cette approche apparemment simple sont incarnées dans le champ de contraintes singulier.

La présente étude porte sur la sévérité des fissures dans les composants mécaniques, où de tels défauts sont souvent impliqués. Notre travail s'intéresse particulièrement au problème des plaques, comportant plusieurs sortes de défauts pratiques, à savoir fissures centrales, latérales, aussi bien autres configurations.

Le facteur d'intensité de contrainte dans le domaine élastique linéaire est calculé à l'aide de la méthode des éléments finis. La nocivité des défauts dépend de la forme et de la taille de la fissure et d'autres paramètres géométriques structuraux.

Notre mémoire comporte quatre chapitres :

Dans le chapitre I, nous présentons un aperçu des principales théories de la mécanique de la rupture appliquées aux modèles fissurés. Nous donnons, en particulier, le premier chapitre qui décrit la notion de mécanique de la rupture

Dans le chapitre II, s'attache à décrire la méthode des éléments finis et application par logiciel Abaqus

Le chapitre III s'attache à décrire la modélisation, les discussions et les résultats qui estiment le degré de nocivité d'une fissure

Le chapitre IV est une formule générale qui résume les trois chapitres précédents

Enfin, le travail est clôturé par une conclusion générale rassemblant tous les principaux résultats obtenus ainsi que des suggestions pour d'éventuelles futures études.

CHAPITRE I :

**Recherche bibliographique sur la mécanique
de la rupture**

I.1 Généralités

La rupture de matériaux est importante dans la science des matériaux et en ingénierie. Lorsque l'homme devra faire face aussi longtemps qu'il construira des édifices ou fabriquera des structures. Le développement technologique et la connaissance de la mécanique de la rupture permettent aujourd'hui de trouver des solutions de mieux prévenir le risque de rupture. Avec La capacité portante d'une structure et sa durée de vie y est fortement ce liées. Ce premier chapitre a pour objectif de présenter les notions essentielles de la rupture et les critères de propagation de fissures adaptés aux matériaux [1].

A ce jour, basé sur les expériences, la théorie de la mécanique de la rupture n'est nullement une science de base exhaustive et exacte, cependant, plusieurs approches ont été proposées [2].

- On distingue deux modes de rupture, une *rupture ductile* qui requiert beaucoup d'énergie pour rompre une pièce et une *rupture fragile* qui n'en consomme pas ou peu.
- La rupture comprend deux phases, une phase d'endommagement et une phase de fissuration. L'endommagement se produit à l'échelle du matériau et peut être diffus ou localisé. La fissuration correspond à l'extension d'une fissure déjà existante.
- Domaine où peut être appliquée la théorie du maillon faible (et la loi de Wei bull)

I.2 Utilisation de la mécanique de la rupture en conception

On distingue deux catégories de rupture des structures :

- Soit une négligence dans la conception, dans la construction ou dans l'utilisation de la structure.
- Soit l'utilisation d'un nouveau matériau ou d'un nouveau procédé, qui peut provoquer une rupture inattendue.

Dans le premier cas, le risque de rupture peut être évité dès lors que la structure est bien dimensionnée avec un choix de matériaux adaptés et que les chargements sont correctement évalués.

Dans le deuxième cas, la prévention de la rupture est plus délicate. Lorsqu'on utilise un nouveau matériau ou un nouveau procédé, il y a souvent un certain nombre de facteurs que le concepteur ne maîtrise pas toujours car la mise en œuvre de nouvelles techniques, bien qu'elle procure des avantages, conduit inévitablement à des problèmes potentiels.

Chapitre I : Recherche bibliographique sur la mécanique de la rupture

Avant le développement de la mécanique de la rupture, le dimensionnement des structures utilisait la démarche « Résistance des matériaux » appelée aussi, « approche classique ».

L'approche basée sur la mécanique linéaire de la rupture est en revanche à trois variables : la contrainte appliquée σ , la ténacité K_C (qui remplace la limite d'élasticité) et une nouvelle variable attachée cette fois-ci à **la taille du défaut**. Pour cette même approche, deux études alternatives sont possibles : l'une utilise un critère d'énergie et l'autre le concept d'intensité des contraintes critique. Ces deux études sont, sous certaines conditions, équivalentes. Dans les deux prochaines sections, nous présentons brièvement ces deux études alternatives pour ensuite, en préciser les hypothèses et en exposer les calculs [3].



Figure I.1 : Approche classique (RDM) [4]

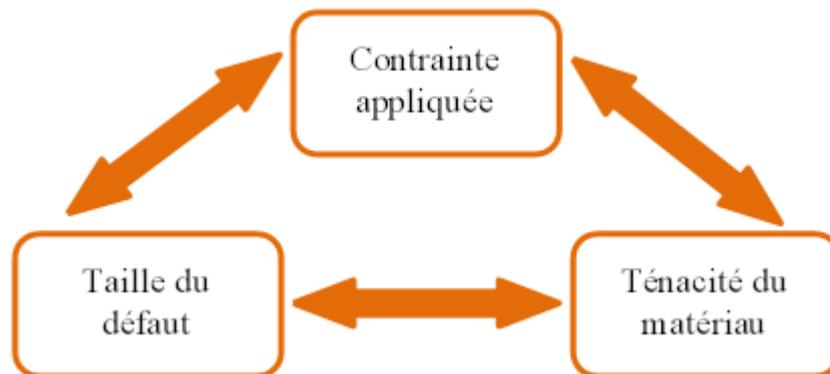


Figure I.2 : Approche utilisant la mécanique linéaire de la rupture [4]

a) Analyse des contraintes au voisinage d'un trou elliptique

C'était la première approche D'INGLIS en 1913. Il a montré que la contrainte au fond du trou elliptique d'une plaque chargée en traction σ est beaucoup plus élevée que la contrainte dans un champ lointain (figure. I.3).

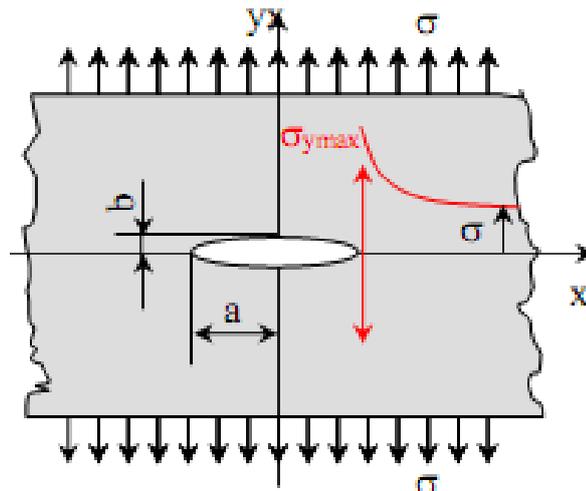


Figure I.3 : Analyse des contraintes au voisinage d'un trou elliptique [2]

b) Approche énergétique

Pour un solide élastique possédant une fissure S , la propagation de celle-ci entraîne une modification de son aire. Griffith exprime la conservation de l'énergie totale du système.

1. dW_{elast} : variation de l'énergie élastique
2. dW_{ext} : variation de l'énergie potentielle des forces extérieures ou travail de ces forces (données) changé de signe
3. dW_s : énergie dissipée dans la séparation, $W_s = 2\gamma dS$, γ étant **énergie de surface (J/m^2)** caractéristique du matériau, dS l'accroissement d'aire de la fissure, étant dû aux deux faces de la fissure

4. dW_{cin} : variation d'énergie cinétique.

La fissure se propagera de façon instable si $dW_{\text{cin}} > 0$, c'est-à-dire :

$$\frac{\partial}{\partial S} (W_{\text{elast}} + W_{\text{ext}}) + 2\gamma < 0 \tag{I.1}$$

$$\text{Avec } W_{\text{elast}} = \frac{1}{2} \sigma \varepsilon s a_0 \tag{I.2}$$

Par définition, le **taux de restitution d'énergie G** est :

$$G = - \frac{\partial}{\partial S} (W_{\text{elast}} + W_{\text{ext}}) \tag{I.3}$$

Le critère de propagation de Griffith se traduit par :

$$G > 2\gamma$$

L'initiation de la propagation à partir de la configuration S est possible lorsque :

$$G_c = 2\gamma$$

Chapitre I : Recherche bibliographique sur la mécanique de la rupture

Dès que G est supérieur à 2γ , une partie de l'énergie disponible sert précisément à rompre les liaisons : c'est **l'énergie de séparation**. L'excès d'énergie ($G-2\gamma$) transformé en énergie cinétique, qui pourrait à son tour, s'il n'y avait pas d'autre apport d'énergie extérieure, se dissiper dans la séparation de surface nouvelle. Ce processus peut mener à la propagation instable. Si les sollicitations extérieures sont telles que l'égalité

$$G=2\gamma$$

soit vérifiée à tout moment, alors il n'y a pas d'accroissement d'énergie cinétique : la rupture est contrôlée et la croissance de la fissure est stable [2]

Pour qu'il y ait rupture ($\sigma = R_{th}$)

$$W_{elast} \geq W_s$$

$$\frac{1}{2} \sigma \varepsilon s a_0 \geq 2 \gamma_s s \quad \text{avec } a_0 : \text{paramètre de maille}$$

$$\text{La résistance théorique à la traction : } R_{th} = 2\sqrt{E \gamma_s / a_0} \approx E/10 \quad (I.4)$$

I.3 Mécanique linéaire de la rupture

I.3.1 Approche atomique de la rupture fragile

La rupture fragile s'accompagne de très peu de déformation plastique. Dans les alliages métalliques, elle est de type (figure I.4) soit :

- Trans-granulaire : rupture par clivage ou par glissement dans un grain ;
- inter-granulaire : rupture par glissement le long des joints de grains [4].

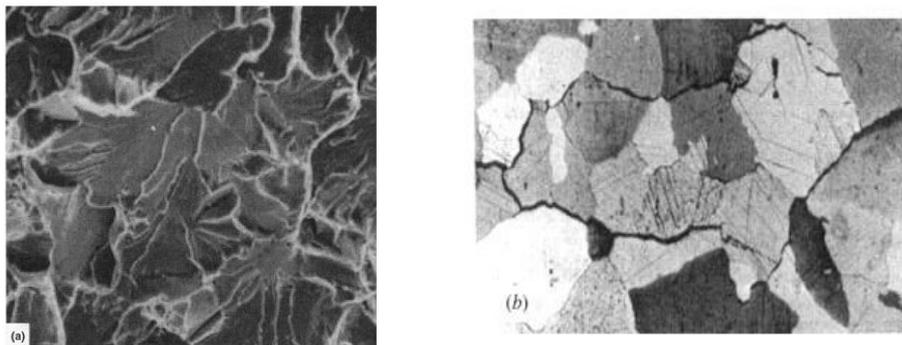


Figure I.4 : (a) Clivage dans un acier doux ruptures trans-granulaire (clivage) et (b) inter-granulaire (décohésion) dans un acier doux a gros grains [2]

L'approche atomique consiste à étudier une rupture par clivage en considérant les forces des liaisons atomiques ; la figure I.5 représente schématiquement ce type de rupture fragile qui se développe en mode d'ouverture, ou mode I selon la classification de la MLR.

Chapitre I : Recherche bibliographique sur la mécanique de la rupture

Le clivage opère par rupture des liaisons inter atomiques dans une direction perpendiculaire au plan de rupture. Il se produit préférentiellement le long de plans atomiques bien définis qui dépendent des matériaux. Par exemple, les matériaux cubiques centrés clivent selon les plans (100) alors que les cubiques faces centrées clivent difficilement [4].

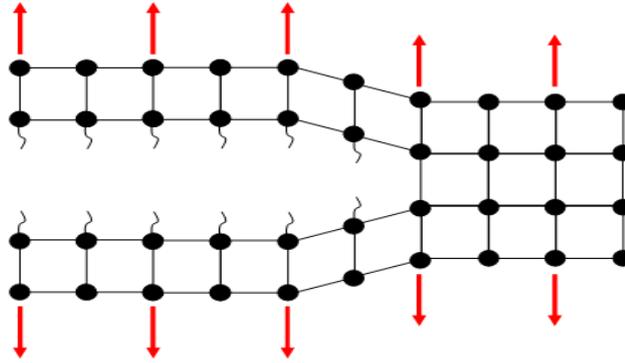


Figure I.5 : rupture par clivage (mode I de rupture) [4]

Pour calculer la contrainte de liaison atomique, il est nécessaire d'introduire la distance inter atomique r , puis de considérer la relation entre le déplacement des atomes, autour de leur position d'équilibre r_0 , et la force appliquée.

Cette force est la somme d'une composante d'attraction (en $1/r^2$) et d'une composante de répulsion (en $-1/r^9$). La contrainte de liaison est donc de la forme :

$$\sigma = A \left[\left(\frac{r_0}{r} \right)^2 - \left(\frac{r_0}{r} \right)^9 \right] \quad (\text{I.5})$$

Par la suite, nous entendons par **contrainte théorique de clivage** la valeur maximale, notée σ_c , de la fonction $\sigma(r)$ dont la courbe est représentée sur la figure I.6. Afin de mieux comparer les valeurs théorique et expérimentale de la contrainte de rupture par clivage, nous allons donner une approximation de la valeur théorique par deux méthodes différentes [4].

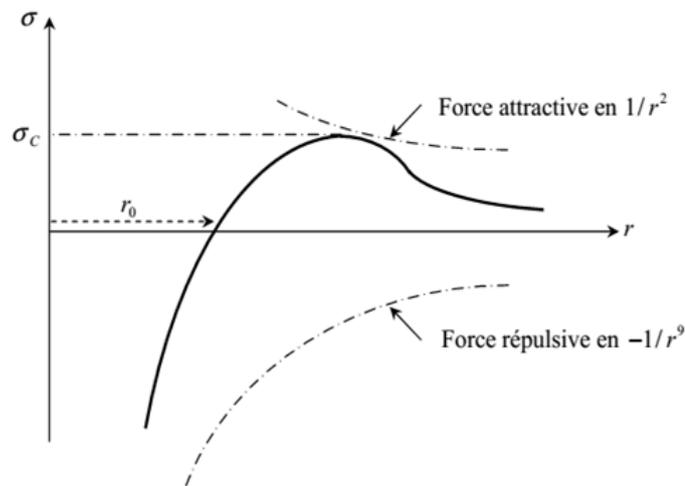


Figure I.6 : Courbe représentative de la fonction r tend vers $\sigma(r)$ [4]

I.3.2 Rupture fragile

Mécanisme : Se manifeste au niveau des liaisons intra-atomiques sans déformation plastique macroscopique.

Conditions : Intervient lorsque l'énergie de déformation locale due aux sollicitations extérieures devient égale à l'énergie nécessaire de décohésion atomique.

Caractéristiques

- Propagation très rapide de fissure ;
- Consommation d'énergie très faible ;
- Les défauts et accidents géométriques jouent un rôle essentiel dans l'amorçage de la rupture

[2].

I.3.2.1 Rupture fragile Trans-granulaire (à clivage)

La rupture suit des plans cristallographiques à travers le grain (plans de clivage). Faciès de rupture cristallin (aspect brillant (figure. I.7)).

(a) Echelle macroscopique : La surface de rupture est **perpendiculaire à la direction de sollicitation**.

(b) Échelle microscopique : Rupture **des liaisons interatomiques** dans une direction perpendiculaire au plan de rupture.

(c) Échelle microscopique : Une rupture **Trans granulaire**, la fissure suit des plans et directions cristallographiques dans chaque grain [2].

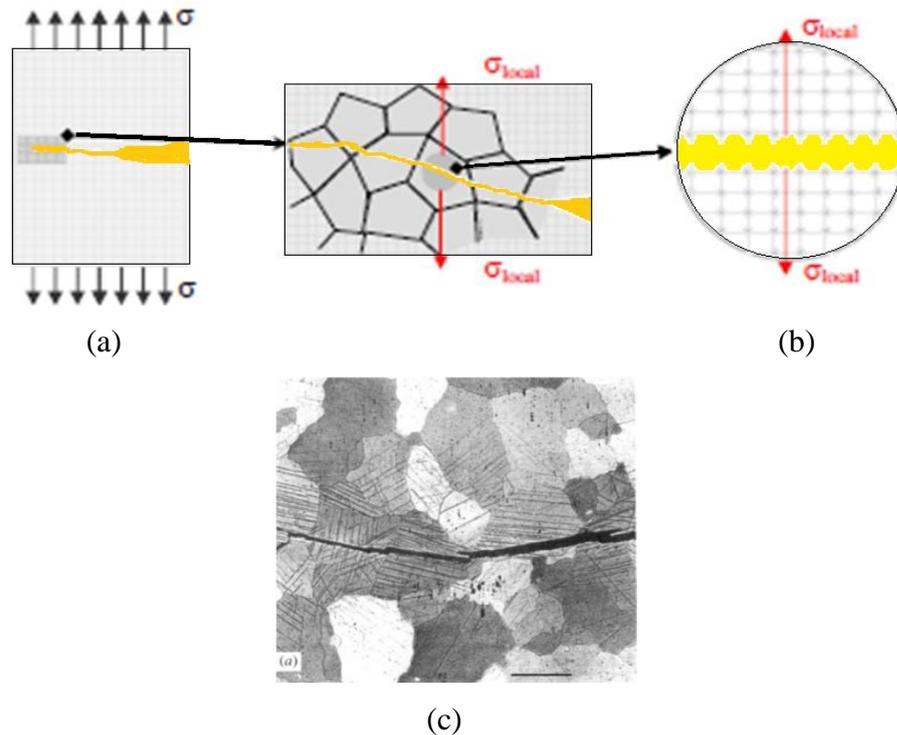


Figure I.7 : La rupture par clivage à différentes échelles [2]

I.3.2.2 Rupture fragile inter granulaire

Caractérisée par une décohésion inter granulaire ; La rupture suit les joints des grains

Mécanismes

Elle survient par accumulation d'impuretés ou d'inclusions (présence de seconde phase au joint du grain ou ségrégation d'un élément chimique), qui sont à l'origine d'une fragilité introduite, par exemple la fragilité au revenu.

Caractéristiques

La rupture présente deux aspects à l'échelle microscopique (figure I.8) :

- Aspect lisse, si la rupture suit les joints des grains) avec déformation plastique réduite
- Aspect de cupules.

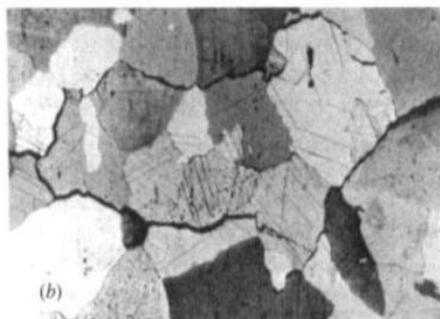


Figure I.8 : Aspect de rupture inter granulaire à l'échelle microscopique [2]

La rupture suit les facettes du grain par détérioration du joint de grain. La rupture inter granulaire se manifeste sous deux formes :

- Rupture fragile à basses températures quand les éléments d'impuretés ségrégués au joint du grain diminuent l'énergie de cohésion de ces joints ;
 - Rupture inter granulaire par fluage aux températures moyennes et élevées ($\geq 1/3 T$ fusion).
- Les défauts qui conduisent à ce type de rupture sont initialement des cavités puis leurs multiplications ou décohésion (points triple) [2].

I.3.3 Critères de rupture

I.3.3.1 Critère énergétique

L'approche énergétique est basée sur le postulat suivant : l'extension d'une fissure qui conduit la rupture se produit lorsque l'énergie fournie est suffisante pour vaincre la résistance du matériau : cette résistance se compose de l'énergie de création de surface, de l'énergie de plastification de l'extrémité de la fissure, et éventuellement d'autres types d'énergies dissipatives associées à la propagation d'une fissure.

Griffith fut le premier à proposer un critère d'énergie pour la rupture des matériaux fragiles, qui fut ensuite étendu aux matériaux ductiles par d'autres auteurs : IRWIN et OROWAN.

L'énergie de Griffith notée G (qu'on appelle aussi taux de restitution d'énergie) est définie par la variation d'énergie par unité de surface fissurée, associée à la propagation d'une fissure dans un matériau linéaire élastique. La rupture se produit lorsque G atteint une valeur critique G_C ; G_C est une mesure de la ténacité du matériau [5].

Pour une fissure de longueur $2a$ (figure I.9) dans une plaque de dimensions infinies (ce qui équivaut à dire que la longueur de fissure est très petite par rapport aux dimensions de la plaque dans le plan de chargement), constituée d'un matériau de module d'Young E et soumise à une contrainte de traction, l'énergie de Griffith G par unité de surface fissurée est donnée par :

$$G = \frac{\pi(\sigma^\infty)^2 a}{E} \quad (I.6)$$

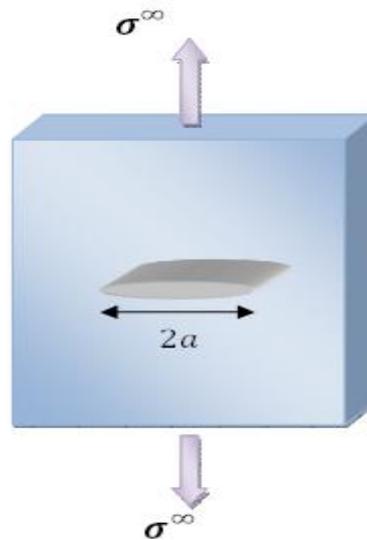


Figure I.9 : Fissure traversant de longueur $2a$ dans une plaque infinie [6]

La rupture se produit lorsque la contrainte appliquée σ^∞ , devenue trop grande, atteint une certaine valeur σ_r . Par conséquent, si G_c désigne la valeur critique de l'énergie obtenue pour la contrainte appliquée σ_r . La relation précédente devient :

$$G_c = \frac{\pi \cdot \sigma_r^2 \cdot a}{E} \quad (I.7)$$

Notons que pour une valeur fixée de G_c , la contrainte à rupture σ_r varie avec $1/\sqrt{a}$; de même, si les valeurs G_c et σ_0 sont fixées, la longueur de défaut critique a_c à laquelle la rupture se produit, est donnée par : (I.6)

$$a_c = \frac{E G_c}{\pi (\sigma_0)^2} \quad (I.8)$$

I.3.3.2 Critère mécanique (Irwin)

I.3.4 Modes de rupture

Une fissure est définie comme la surface Σ séparant localement un solide en deux parties. Le champ des déplacements est alors discontinu à travers cette surface et les trois composantes vectorielles de cette discontinuité forment les trois modes de rupture (Figure. I.10) le mode I pour une ouverture et le mode II pour un glissement plan (dans un cas tridimensionnel.

Le mode III pour un glissement anti-plan), Le cas réel est une superposition de ces modes, on parle alors de mode mixte [5].

Chapitre I : Recherche bibliographique sur la mécanique de la rupture

En théorie, les fissures sont planes et se propagent dans leur plan, il est ainsi possible de montrer que l'état général de propagation se limite à la superposition de trois modes :

- **Mode I** (mode par ouverture) : les surfaces de la fissure se déplacent dans des directions opposées et perpendiculairement au plan de fissure
- **Mode II** (glissement de translation) : les surfaces de la fissure se déplacent dans le même plan et dans une direction perpendiculaire au front de fissure
- **Mode III** (glissement de rotation) : les surfaces de la fissure se déplacent dans le même plan et dans une direction parallèle au front de fissure.

Le mode I est souvent le plus critique

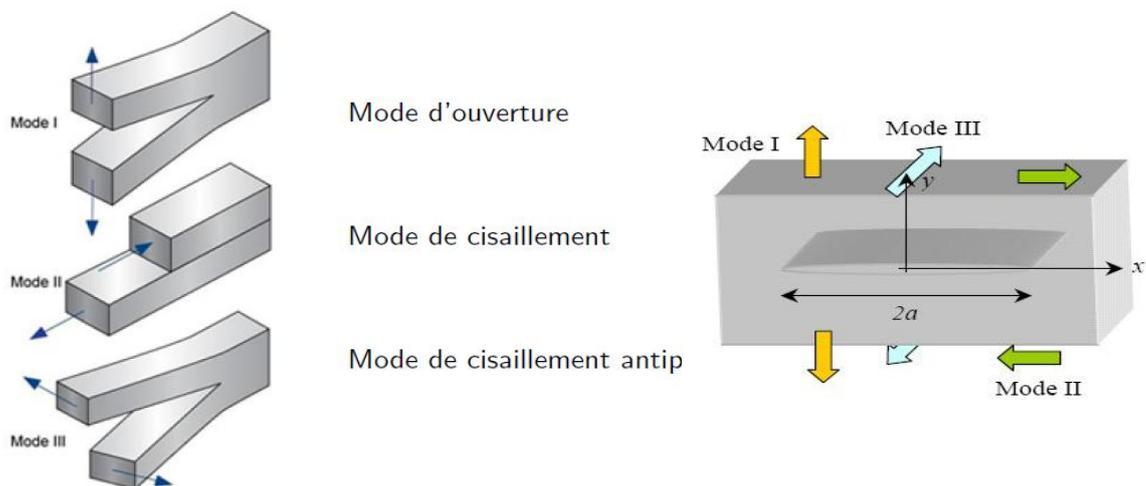


Figure I.10 : Les trois modes de rupture [2]

La figure I.10, illustre bien la différence entre l'approche classique qui fait abstraction de l'existence d'une fissure (le critère de rupture est $\sigma^\infty = \sigma_E$) et l'approche par la MLR qui prend en compte la présence de la fissure (σ^∞ proportionnelle à $1/\sqrt{a}$) [2].

La zone de non rupture située sous les deux courbes représentent les approches précédentes qui montre chacune des deux zones limitées par la longueur de défaut a_0 , correspond à une approche particulière. L'énergie de Griffith G est la force motrice dans un matériau dont la résistance à la rupture est donnée par G_C . Ce qui peut être mis en analogie avec l'approche basée sur la limite d'élasticité où la contrainte joue le rôle de force motrice dans un matériau dont la résistance à la déformation plastique est donnée par la limite d'élasticité σ_E [5].

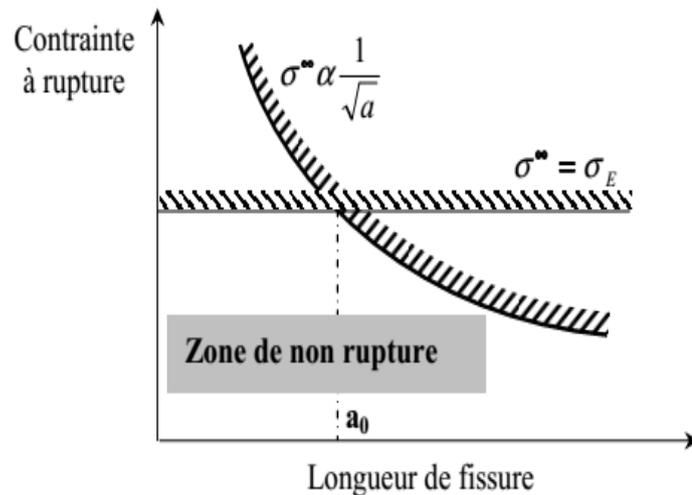


Figure I.11 : Comparaison entre l'approche classique et celle de la MLR [7]

Cette analogie illustre aussi le concept de similitude. La limite d'élasticité d'un matériau, mesurée à partir d'essais sur des éprouvettes de laboratoire, est indépendante de la taille des éprouvettes et peut donc être utilisée pour des structures de tailles différentes dès lors que le matériau est raisonnablement homogène.

Ce principe de similitude est l'une des hypothèses fondamentales de la mécanique de la rupture, la ténacité d'un matériau (mesurée par G_C) est indépendante de la taille et de la géométrie de la structure fissurée.

Cette hypothèse de similitude reste valable tant que le comportement du matériau demeure linéaire élastique [5].

I.3.5 Concept du facteur d'intensité des contraintes FIC

Lorsqu'un matériau soumis à une sollicitation mécanique développe une fissure, celle-ci peut se propager selon plusieurs modes distincts : l'ouverture (**mode I**), le glissement (**mode II**) ou encore le glissement dévié (**mode III**) (figure **Modes de rupture**).

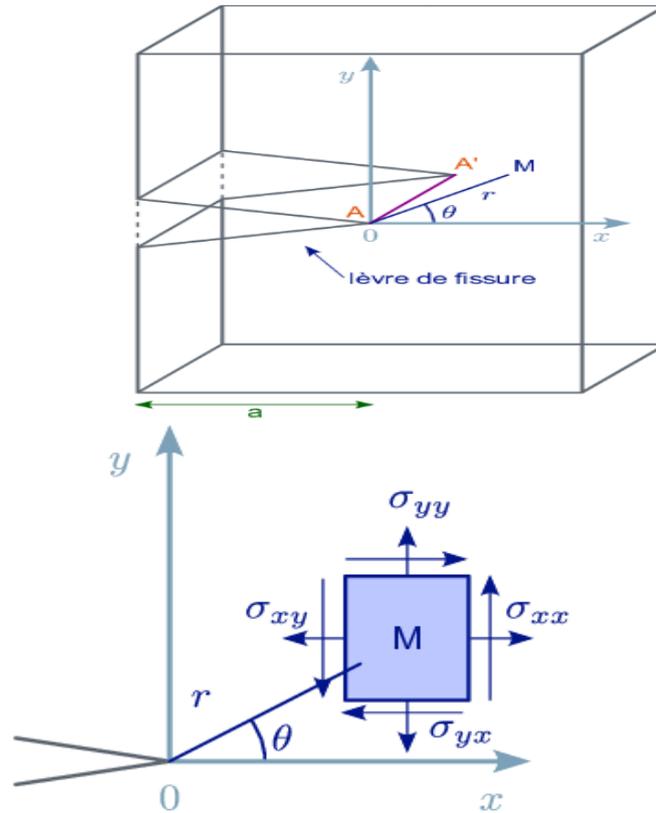


Figure I.12 : Tenseur de contrainte au point M [1]

Le mode le plus étudié est le mode par ouverture (Mode I), parce qu'il est le plus dangereux dans les matériaux cristallins, pour lequel les contraintes en pointe de fissure, typiquement au point M défini à la figure, s'expriment par :

$$\sigma_{ij}(M) = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}(\theta) \quad (I.9)$$

- Avec $ij = xx, yy, xy$ ou yx
- Où : K_I est le facteur d'intensité de contrainte en **mode I** définit la position du point M , et (θ) est une fonction trigonométrique.

On constate que, si r se rapproche de 0, alors les contraintes tendent vers l'infini, ce qui bien sûr n'a pas de sens et pose le problème de la validité du modèle, développé dans le cadre d'une approche élastique linéaire.

De surcroît, l'augmentation des contraintes au voisinage de la fissure conduit généralement à un dépassement local de la limite d'élasticité qui se traduit par l'apparition d'une zone déformée plastiquement dont les dimensions sont simplement estimées en appliquant le critère de plasticité de contrainte [4].

Chapitre I : Recherche bibliographique sur la mécanique de la rupture

Le facteur d'intensité de contrainte K_I se calcule à partir de la contrainte appliquée, de la géométrie de la pièce et de la taille de la fissure :

$$K_I = \alpha \cdot \sigma_0 \cdot \sqrt{\pi \cdot a} \quad (\text{I.10})$$

(α) est un coefficient géométrique, par exemple pour une plaque semi-infinie : [7]

$$K_I = 1,12 \cdot \sigma_0 \cdot \sqrt{\pi \cdot a} \quad (\text{I.11})$$

I.3.6 Concentration de contraintes près d'un défaut

Les calculs de dimensionnement des structures sont principalement basés sur la théorie de l'élasticité. Lorsque la limite d'élasticité est dépassée, des déformations plastiques se développent, ce qui nécessite l'utilisation des théories plus compliquées de la plasticité. Cependant, la fatigue des matériaux ou encore la corrosion sous tension, se produisent le plus souvent à des niveaux de contrainte relativement bas où la théorie de l'élasticité est applicable. Dans les structures, des entailles géométriques dues à des changements brusques de section (épaulements, gorge, cannelure, orifice de lubrification ...) sont souvent inévitables compte tenu de leur rôle fonctionnel. Au voisinage de ces incidents de forme, les répartitions des contraintes sont inhomogènes et conduisent à des concentrations de contraintes : la figure I.13 illustre ces concentrations où l'on observe que la contrainte atteinte à la racine du trou est bien plus élevée que la contrainte nominale (σ_{nom}) de traction appliquée à la plaque.

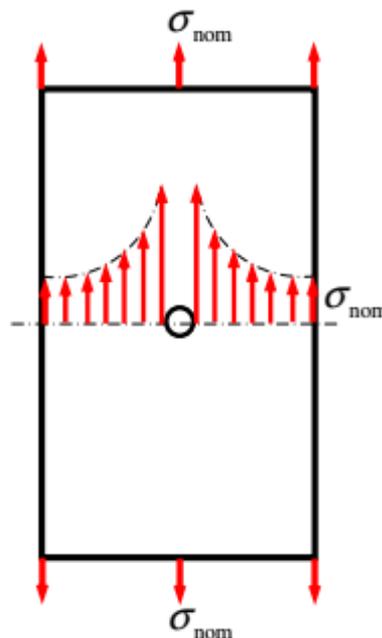


Figure I.13 : Répartition des contraintes autour d'un trou dans une plaque [2]

Le facteur de concentration des contraintes est le rapport de la contrainte maximale (σ_{\max}) observée à la racine de l'incident de forme sur la contrainte nominale (σ_{nom}) à laquelle la structure est soumise. Ce facteur, noté K_t est donné par :

$$K_t = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{\text{nom}}} \quad (\text{I.12})$$

La sévérité de la concentration de contraintes dépend de la géométrie et de la configuration de l'entaille. Lorsqu'on conçoit une structure, on cherche à réduire autant que possible les concentrations de contraintes pour éviter notamment les problèmes de rupture par fatigue [2].

I.4 Mécanique non linéaire de la rupture

I.4.1 Notion de CTOD

Le CTOD ou Crack Tip Opening Displacement, c'est à dire, déplacement d'ouverture en pointe de fissure émoussement.

Les matériaux à haute résistance ayant généralement une faible ténacité, on peut leur appliquer la mécanique linéaire de la rupture. Ces procédures sont utilisables si la taille de la zone plastifiée est très petite devant la longueur de fissure ($ZP \ll a$).

Par contre, les matériaux à faible résistance et faible limite d'élasticité ont une ténacité élevée ; ceci signifie que la taille ZP à la rupture est $\gg a$. Wells a introduit le concept de déplacement à la pointe de fissure (COD) pour ces matériaux.

L'extension de fissure peut se produire quand le matériau à la pointe de fissure a atteint une certaine déformation plastique : cette quantité peut être reliée au COD qui est une quantité mesurable [2].

I.4.2 L'intégrale J

L'intégrale énergétique J représente certains avantages sur le paramètre écartement de fissure δ . Cette intégrale introduite initialement en mécanique non linéaire de rupture, peut également être utilisée en mécanique linéaire de rupture. Ce paramètre présente des avantages notamment la possibilité de mesure expérimentale directe (et assez simple) par traitement du diagramme « charge- déplacement le long de la ligne de chargement ». Comme le facteur d'intensité de contraintes, l'intégrale J caractérise des champs de contraintes et de déformations dans la région près de la pointe de fissure dans le domaine plastique du matériau.

Chapitre I : Recherche bibliographique sur la mécanique de la rupture

Pour un comportement linéaire élastique du matériau, la relation entre le facteur d'intensité des contraintes K_I et l'intégrale énergétique J pour la fissure en mode I est :

$$J_I = G_I = K_I^2 / E' \quad (I.13)$$

Cette relation nous indique la signification physique de l'intégrale J qui n'est autre qu'une équivalence du paramètre G . Elle représente donc un taux de libération d'énergie de déformations élastiques lors de la croissance stable de la fissure.

En dehors du domaine d'applicabilité de la mécanique linéaire de rupture, une telle interprétation physique de l'intégrale J est perdue.

Cependant dans le domaine des déformations élasto-plastiques du matériau l'intégrale J demeure un paramètre caractérisant l'intensité des champs des contraintes et des déformations dans la région près de la pointe de la fissure. Cette propriété justifie son utilisation comme critère rupture de préférence au facteur d'intensité de contraintes. Par analogie avec l'expression précédente pour le mode I de rupture, on peut noter :

$$J_I \geq J_{IC} \quad [2]$$

I.4.2.1 Intégrale J dans la rupture fragile

En utilisant l'égalité de J et G , un bilan énergétique réalisé par Irwin dans une structure élastique pour une avancée élémentaire de la fissure prouve que le facteur d'intensité de contraintes est lié à l'intégrale J^{el} par une relation quadratique suivante :

$$J^{el} = \frac{K_I^2}{E'} + \frac{K_{II}^2}{E'} + \frac{(1+\nu) K_{III}^2}{E} \quad (I.14)$$

Avec :

$$E' = \begin{cases} E & \text{contraintes planes} \\ \frac{E}{1-\nu^2} & \text{en déformations planes} \end{cases}$$

Cette expression montre que l'intégrale de **RICE** comme le facteur d'intensité de contraintes permet de caractériser au moyen d'un seul scalaire la sévérité d'un chargement sur une structure élastique fissurée soumise à un mode d'ouverture éventuellement complexe [2].

I.5 Propagation des fissures et concept de tolérance au dommage

La MLR permet le calcul de la durée de vie d'une structure soumise à des sollicitations cycliques (phénomène de fatigue) ou sujette à des effets de corrosion sous tension, puisque dans ce cas :

Chapitre I : Recherche bibliographique sur la mécanique de la rupture

- la vitesse de propagation des fissures est caractérisée par un paramètre tel que le FIC,
- et la taille critique de défaut à ne pas dépasser est directement liée à la ténacité du matériau.

Par exemple, pour la fissuration par fatigue des alliages métalliques, la propagation de fissure da/dN est généralement représentée par la relation empirique de Paris :

$$\frac{da}{dN} = C(\Delta K)^m \quad (I.15)$$

Où C et m sont des constantes du matériau, et ΔK l'amplitude du facteur d'intensité des contraintes. Parce que les structures contiennent inévitablement des défauts de type fissure, défauts en général inhérents aux procédés même de fabrication des composants, leurs dimensions sont choisies de sorte que ces défauts ne puissent atteindre la taille critique conduisant à la rupture brutale : il s'agit du concept de tolérance au dommage.

La MLR fournit les outils nécessaires pour déterminer cette taille critique et suivre la propagation de la fissure. L'évolution au cours du temps (figure I.14) de la taille d'un défaut (de type fissure de fatigue ou de corrosion sous tension) illustre bien le concept de tolérance au dommage [7].

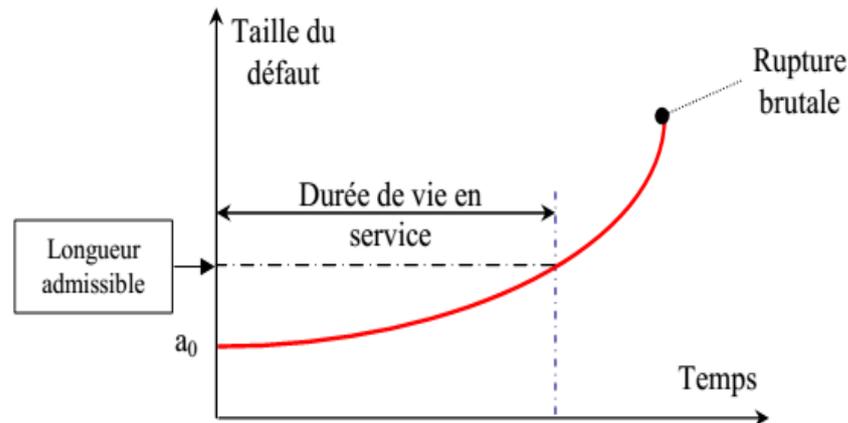


Figure I.14 : Concept de tolérance au dommage [2]

En pratique, la longueur de fissure initiale a_0 correspond à la limite de détection des moyens de contrôle non destructif, et la longueur critique est déterminée à partir du chargement appliqué et de la ténacité du matériau. Quant au coefficient de sécurité, il est choisi de sorte que la longueur admissible du défaut reste inférieure à la longueur critique. La durée de vie de la structure est alors déterminée en calculant le temps nécessaire pour que la longueur de défaut passe de a_0 à la longueur admissible [7].

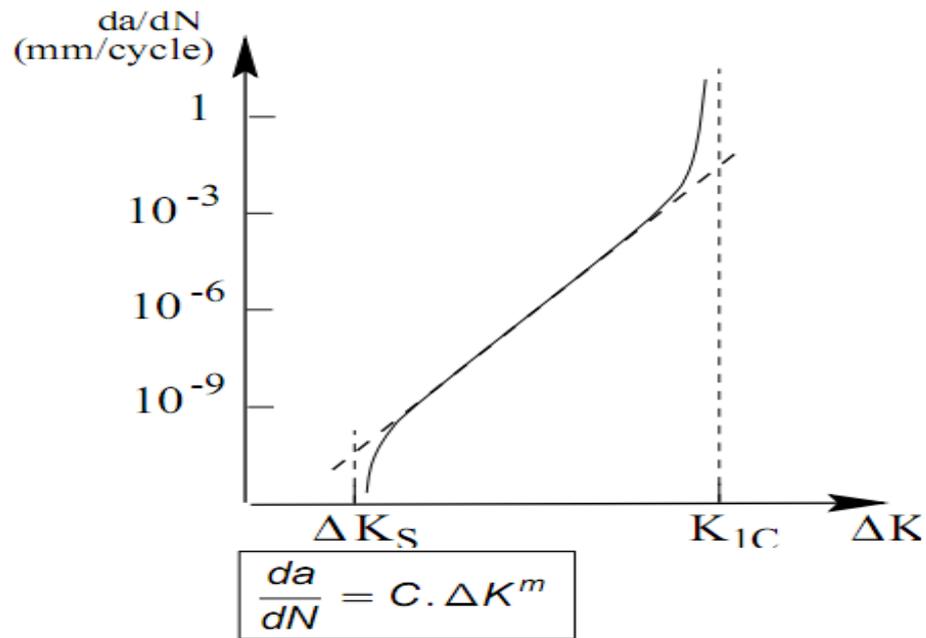


Figure I.15 : Propagation de fissure en fatigue loi de Paris [8]

I.6 La plasticité confinée en pointe de fissure

On considère ici que le matériau est ELASTO-PLASTIQUE parfait de limite élastique et vérifie le critère de von Mises. Une première approche consiste à repérer le lieu géométrique des contraintes qui égalent le critère de Von Mises. Avec l'hypothèse de contraintes planes, ce lieu géométrique est donné par la relation en coordonnées polaires suivante :

$$\frac{r}{a} = \frac{1}{2} \left(\frac{\sigma}{\sigma_0} \right)^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \left(1 + 3 \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \right) \quad (\text{I.16})$$

L'allure de cette zone plastique est représentée sur la figure I.16 est caractérisée par une fissure chargée en mode I.

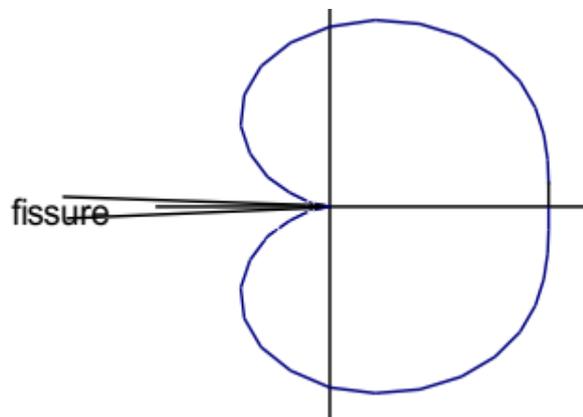


Figure I.16 : Zone plastique de pointe de fissure en mode I [2].

Chapitre I : Recherche bibliographique sur la mécanique de la rupture

Irwin propose un calcul plus fin, toujours en mode I et dans l'hypothèse de contraintes planes, prenant en compte un rééquilibrage des efforts. La figure I.17 représente la distribution des contraintes dans la direction orthogonale à la fissure avant écrêtage

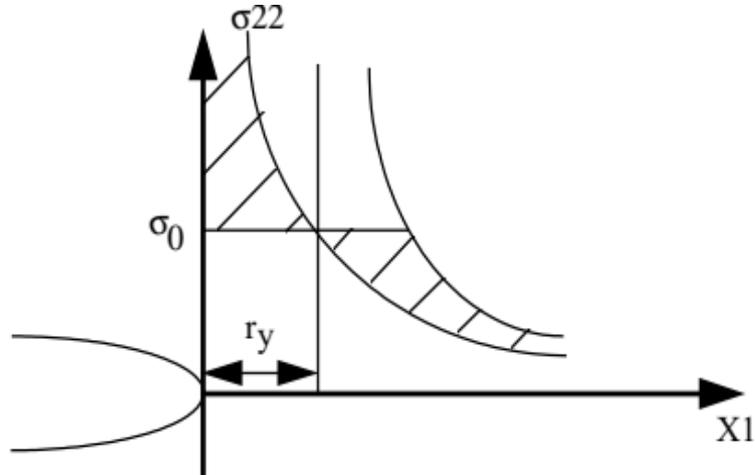


Figure I.17 : Méthode d'Irwin pour le calcul de (r_y) [2]

La fissure se comporte alors comme une fissure de longueur $a+r_y$, avec:

$$\frac{r_y}{a} = \phi = \frac{1}{2} \left(\frac{\sigma}{\sigma_0} \right)^2 \quad (\text{I.17})$$

Irwin complète sa solution en développant une approche plus approximative en déformations planes, il obtient alors :

$$\Phi = \frac{1}{\beta} \left(\frac{\sigma}{\sigma_0} \right)^2 \quad (\text{I.18})$$

Avec $\beta = 2$ en contraintes planes

Et $\beta = 6$ en déformations planes

Cette correction n'est applicable qu'aux faibles niveaux de chargement. Il est donc illusoire de l'appliquer au-delà de la plasticité généralisée, d'autres corrections intervenant à ce niveau, comme nous le verrons par la suite. Nous serons amenés à utiliser la correction de plasticité empirique suivante:

$$\Phi = \frac{1}{2} \frac{(\sigma/\sigma_0)^2}{1+(\sigma/\sigma_0)^2} \quad (\text{I.19})$$

Cette dernière expression permettant de limiter la correction de plasticité confinée lorsque les niveaux de chargement sont importants [2].

CHAPITRE II :

**Estimations du degré de nocivité d'une
fissure**

II.1 Introduction

Les progrès considérables de l'informatique ces dernières décennies ont permis le développement et l'utilisation systématique d'outils de simulation numérique très performants. Dans le domaine de la mécanique des structures on retient particulièrement l'utilisation de la méthode des Eléments Finis qui est apparue dans les années soixante. Elle était alors essentiellement utilisée par les chercheurs et pour des domaines d'application très pointus en raison du coup et de la complexité de mise en œuvre. Dans le contexte que nous venons d'évoquer, l'utilisation d'un logiciel d'analyse en éléments finis pour modéliser le problème de rupture des structures dans tel secteur présente un grand intérêt et en particulier pour le cas des structures contenant une fissure. Alors, le comportement en rupture de telle structure est analysé par la détermination numériquement du facteur d'intensité de contrainte K_I en pointe de la fissure. Dans ce chapitre, nous nous intéressons en premier lieu à la validation de notre modèle numérique. Ensuite, une étude comparative aura lieu pour l'évaluation de facteur d'intensité des contraintes (FIC) de différentes configurations des structures fissurées. Cette comparaison nous permettra d'évaluer le degré de nocivité des fissures sur la structure endommagée et par conséquent la réduction de la durée de vie de la structure endommagée par fissuration.

Un comportement élastique a été entrepris pour cette étude. Des exemples numériques sur différentes configurations de fissures et de charges sont présentés [9].

II.2 Validation du modèle éléments finis en comportement élastique linéaire

II.2.1 Eprouvette SECP (Single-edge cracked panel)

Tout d'abord, il est important de valider notre modèle élément finis. Notre étude permet de comparer les valeurs du facteur d'intensité des contraintes obtenues par la méthode des éléments finis. Pour ce faire, considérons une plaque isotrope mince de section rectangulaire (96 x 24) mm² contenant une fissure latérale, sollicitée aux contraintes de traction uniforme comme elle est indiquée dans la figure ci-dessous (figure II.1).

Chapitre II : Estimations du degré de nocivité d'une fissure

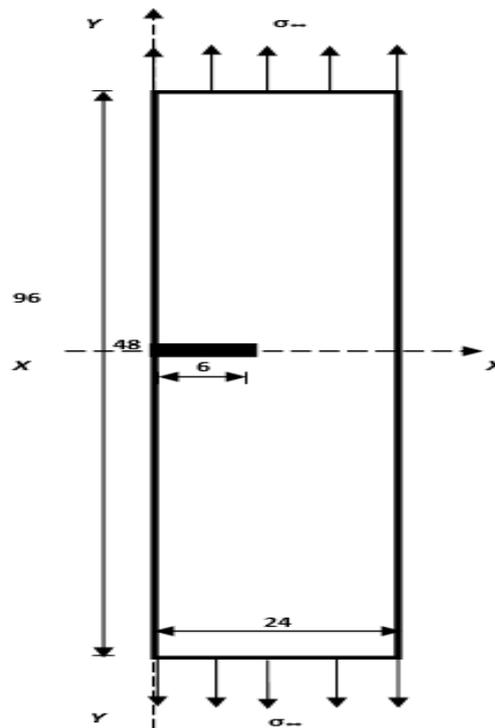


Figure II.1 : Modèle géométrique d'éprouvette à une fissure latérale (les dimensions sont en mm) [10].

II.2.2 Propriétés Mécaniques

Les propriétés mécaniques de la plaque sont : le module de Young et le coefficient de poisson sont regroupés dans le tableau 1. La plaque fissurée a été soumise à une charge de traction uni axiale dans la direction verticale suivant l'axe "Y-Y" sous la contrainte appliquée d'amplitude $\sigma = 1 \text{ MPa}$ et une fissure de longueur $a=6\text{mm}$.

L'analyse a été effectuée en mode **I** pure avec une variation du rapport de la longueur de fissure en fonction de la largeur des modèles géométriques comprises entre ($a = 0.1 \times W$ et $a = 0.7 \times W$)

Où : W est la largeur de la plaque.

Les propriétés des matériaux utilisés dans cette étude sont comme suit [11] :

Tableau II.1 : Propriétés d'un matériau élastique isotrope (Acier EN 24)

Propriétés du matériau	Material	Module d'Young	Coefficient du Poisson	Limite d'élasticité	Charge de rupture
valeurs	EN24	210000 MPa	0.3	235 MPa	400N/mm ²

II.2.3 Maillage par Eléments Finis et conditions aux limites

Dans la figure II.2 nous avons représenté le maillage et les conditions aux limites de la plaque étudiée. Un maillage raffiné a été utilisé au voisinage proche de la fissure afin d'avoir des résultats précis. Le facteur d'intensité des contraintes K_I a été déterminé par la méthode des éléments finis avec le code de calcul Abacus 6.14. La plaque a été discrétisé par des éléments de type Quadratique 2D.

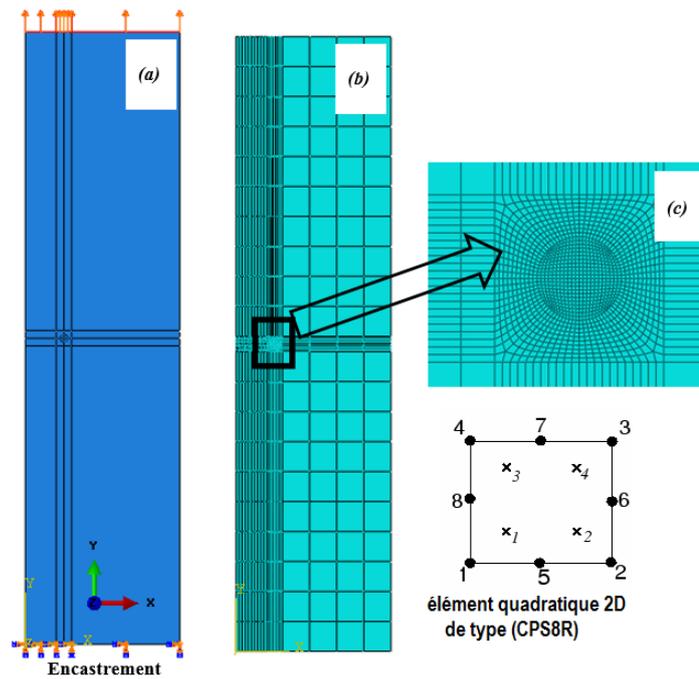


Figure II.2 : Modèle EF de la plaque fissurée latéralement pour un rapport de longueur de fissure ($a/w=0.25$ correspond $a=6mm$) ; a) Conditions aux limites ; b) Modèle et maillage typique de la plaque étudiée ; (c) Maillage autour de la pointe de fissure.

Le nombre de nœuds et d'éléments sont répertorié dans tableau II.2. Tous les composants ont été discrétisés par des éléments tétraèdres linéaires à quatre nœuds (C3D10).

Tableau II.2 : Nombre de nœuds et d'éléments de la structure étudiée.

Modèles	Taille de l'élément	Nombre d'éléments	Nombre de nœuds	Type d'éléments
SENT Epreuve	0,01~4,5	2312	7155	Quadratique 2D (CPS8R)

Chapitre II : Estimations du degré de nocivité d'une fissure

II.2.4 Résultats et discussion

L'influence de la taille de la fissure caractérisée par le rapport a/w , sur l'évolution du facteur d'intensité de contrainte K_I d'une plaque fissurée latéralement a été étudié dont le but de valider notre modèle numérique. Les résultats obtenus numériquement avec les résultats de SZE et al [10] sont regroupées dans le tableau II.3.

Tableau II.3 : Résultats obtenus après l'analyse numérique.

T=a/w	K_I (Mpa,mm ^{1/2}) calculé	Sze et al [10]	Erreur %
0,1	3,274		/
0,2	5,343		/
0,3	7,967		/
0,4	11,73		/
0,5	17,56		/
0,6	27,46		/
0,7	46,64		/
0,25	6,553	6,501	0.007

Nous remarquons que les résultats obtenus numériquement augmentent avec l'augmentation du rapport a/w . Par comparaison entre nos résultats et celle obtenue par SZE et al [10] pour une taille de fissure $a/w = 0.25$ on peut dire qu'il existe une bonne corrélation soit une erreur ne dépasse pas 5%, ceci confirme la validité du modèle élément finis.

L'effet de la taille de la fissure sur le comportement mécanique d'une plaque fissurée latéralement est représenté sur la figure II.3. Cette dernière représente la variation du FIC calculé numériquement en fonction de la taille de la fissure caractérisée par le rapport « a/w ».

Chapitre II : Estimations du degré de nocivité d'une fissure

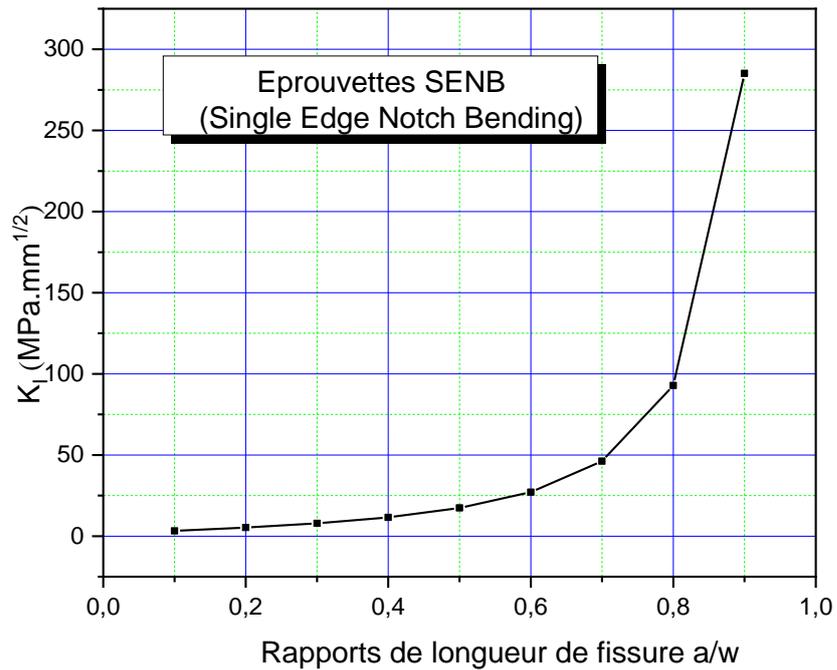


Figure II.3 : Evolution du FIC en fonction du rapport de la longueur de fissure.

Cette dernière montre que l'augmentation de la fissure conduit à une augmentation important du facteur d'intensité de contrainte K_I et par conséquent la rupture de la plaque.

La figure II.4 représente les ISO valeurs représentant la distribution des contraintes de Von Mises pour un rapport de longueur de fissure $a/w=0.25$.

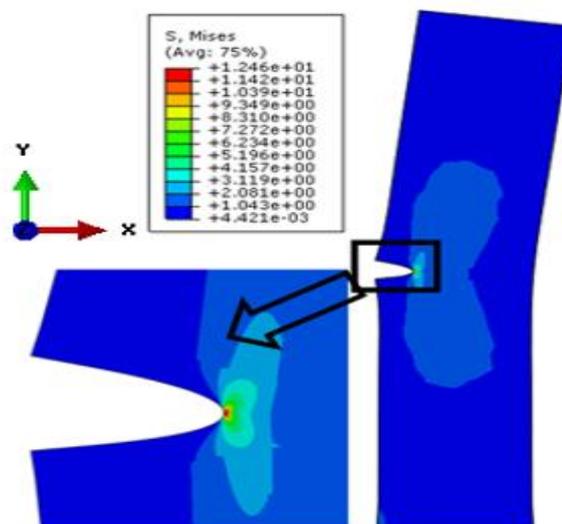


Figure II.4 : Répartitions de contraintes de Von Mises pour un rapport de longueur de fissure $a/w=0.25$

Chapitre II : Estimations du degré de nocivité d'une fissure

A partir de la fugue représentée ci-dessus, l'intensité de contrainte est maximale à la pointe de la fissure.

II.3 Etude de la gravité de la configuration de la structure fissurée.

Dans cette partie, nous venons de savoir l'effet de la configuration de la structure fissurée sur les valeurs du facteur FIC et par conséquent la rupture de la structure étudiée.

II.3.1 Modèles géométriques :

Pour bien remettre cette problématique, on a choisi cinq configurations des structures fissurées. La figure II.5 ci-dessous présente les configurations à étudier.

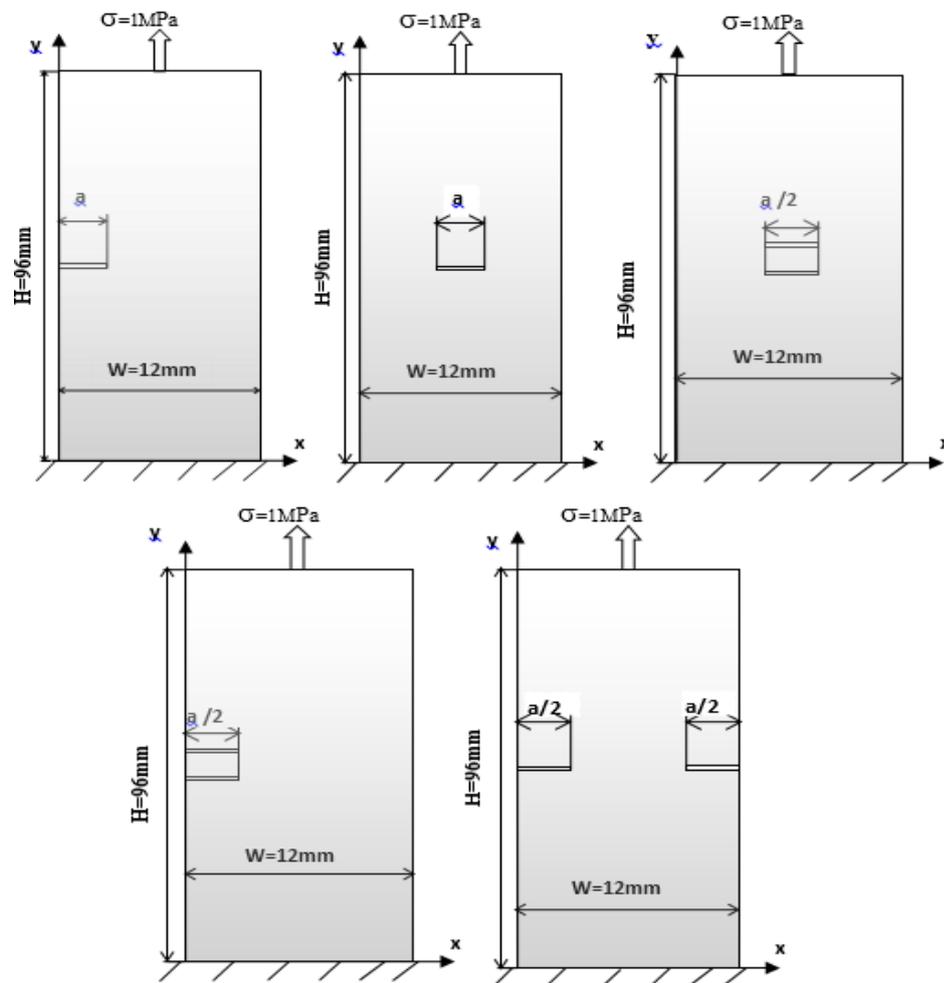


Figure II.5 : Modèle géométrique des différentes configurations à étudier (les dimensions sont en mm). a) Fissure latérale ; b) Fissure centrale ; c) Double fissures centrales superposées ; d) Double fissures latérales superposées et e) Double fissures à côté gauche et droit.

Chapitre II : Estimations du degré de nocivité d'une fissure

Pour cette analyse comparative entre les différentes configurations, présentées dans la figure ci-dessus et pour faciliter la comparaison, les rapports a/w ont été choisis pour coïncider avec a/w 0.25.

II.3.2 Modélisation par élément finis

L'objectif de cette étude est d'analyser numériquement les variations du facteur d'intensité de contrainte du précédent modèle pour différentes configurations.

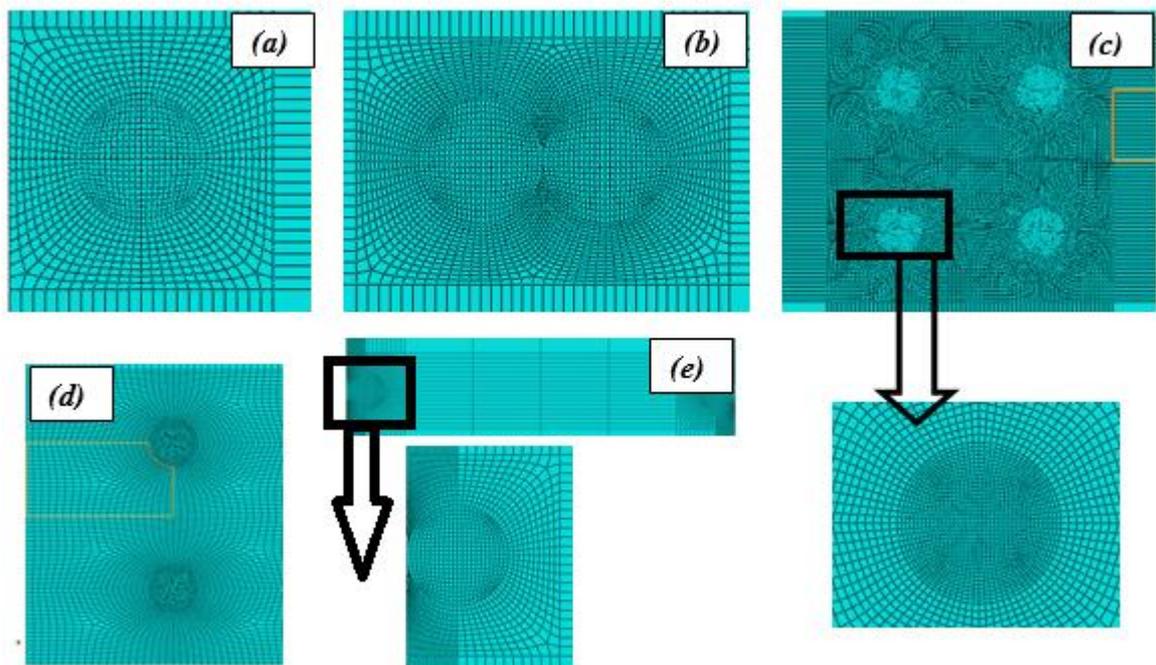


Figure II.6 : Modèles EF des différentes configurations étudiées.

Dans ces modèles les valeurs de contrainte se ressemblent convergentes sauf dans le premier modèle, nous avons grands valeurs de contrainte et donc la plaque subit une grande résistance.

II.3.3 Résultats et discussions

Les résultats obtenus numériquement sont représentés dans la figure II.7. Cette dernière présente une comparaison entre les résultats obtenus numériquement du facteur d'intensité des contraintes K_I pour les différentes configurations en fonction de la longueur de fissure caractérisée par le rapport a/w .

Chapitre II : Estimations du degré de nocivité d'une fissure

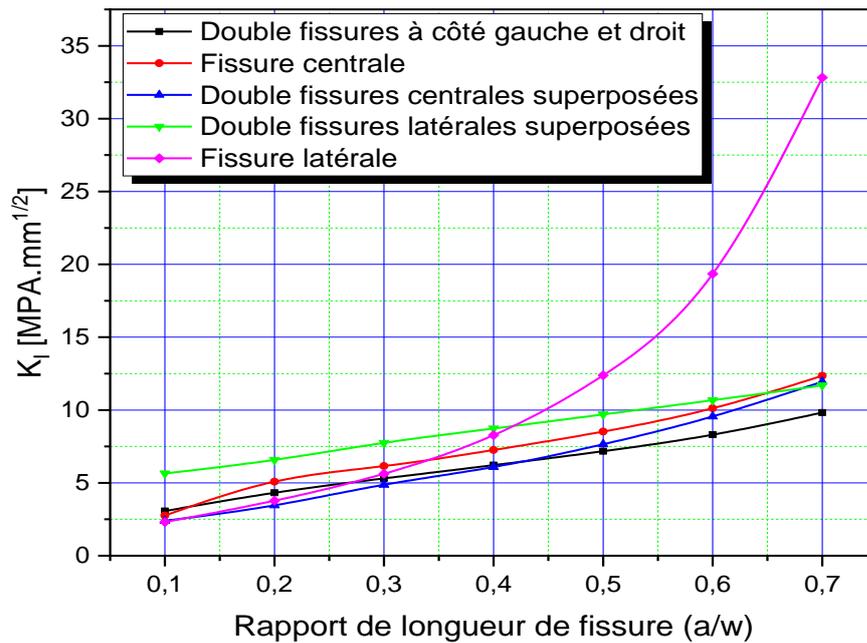


Figure II.7 : Variation du FIC en fonction du rapport de la longueur de fissure a/w pour les différentes structures fissurées.

La figure II.7 compare les valeurs de facteur d'intensité de contrainte en fonction de la longueur de fissure pour différentes configurations. On voit que l'augmentation de longueur de fissure provoque une amplification de facteur d'intensité de contrainte. On peut noter qu'il y a un rapprochement entre toutes les courbes, ce rapprochement devient de plus en plus serré pour les trois premières configurations (Fissure centrale ; double fissures centrales superposées et double fissures à côté gauche et droit). Ceci est plus prononcé pour les petites longueurs de fissure. Pour l'ensemble, il y a une tendance presque la même pour toutes les configurations. En effet, on peut le voir aussi dans cette figure que la variation de K_I montre une grande augmentation pour le cas d'une fissure latérale.

La figure II.8 représente les ISO valeurs représentant la distribution des contraintes de Von Mises pour un rapport de longueur de fissure $a/w=0.25$ pour toutes les configurations des structures fissurées. Les configurations analysées sont ;a) Fissure latérale ; b) Fissure centrale ; c) Double fissures centrales superposées ; d) Double fissures latérales superposées et e) Double fissures à côté gauche et droit.

Chapitre II :
Estimations du degré de nocivité d'une fissure

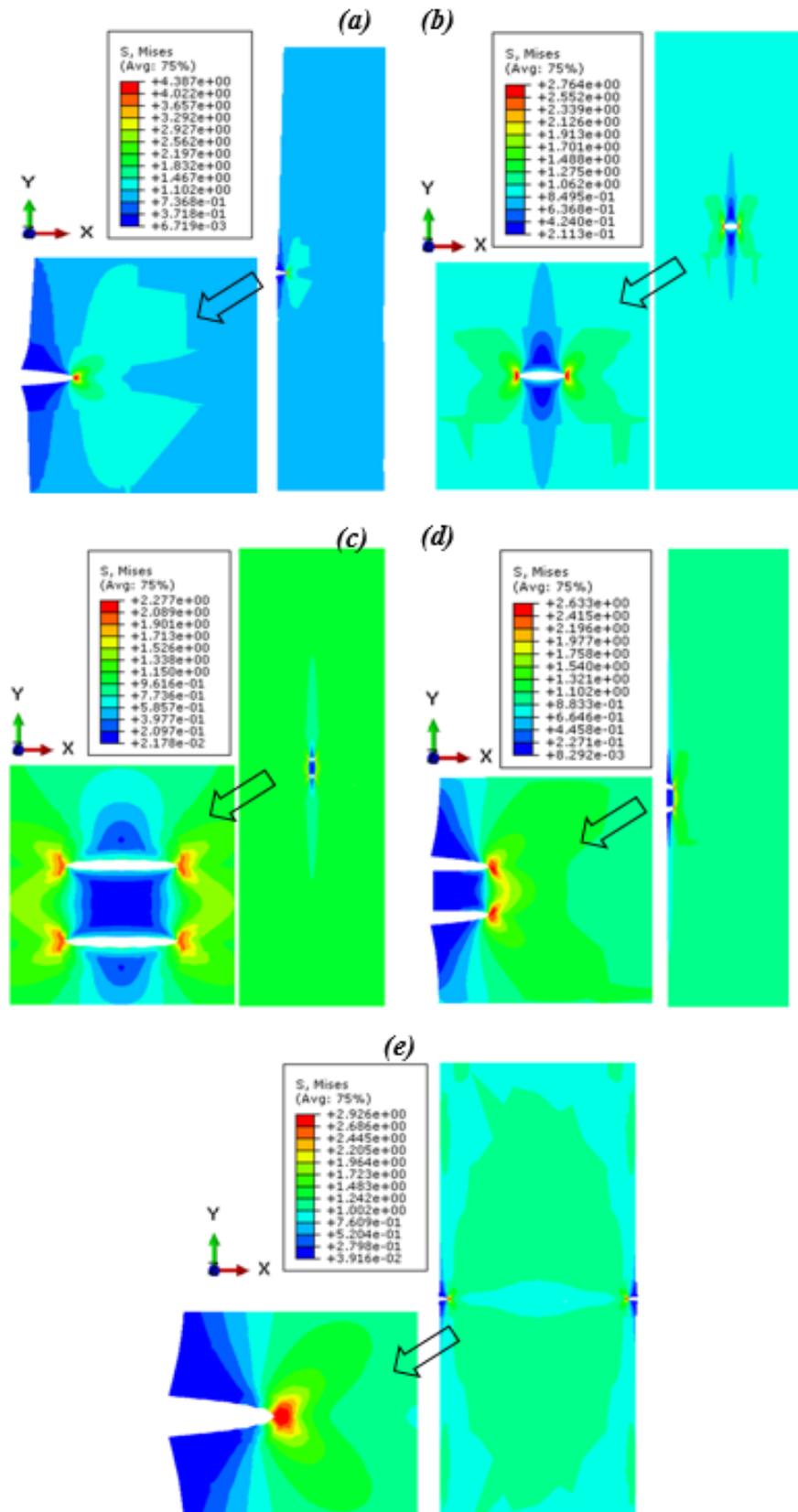


Figure II.8 : Répartitions de contraintes de Von Mises pour un rapport de longueur de fissure $a/w=0.25$ pour toutes les configurations analysées a) Fissure latérale ; b) Fissure centrale ; c) Double fissures centrales superposées ; d) Double fissures latérales superposées et e) Double fissures à côté gauche et droit.

Chapitre II : **Estimations du degré de nocivité d'une fissure**

A partir du travail réalisé précédâmes, on peut dire que la configuration de la structure fissurée joue un rôle très important sur le degré de nocivité. D'après les résultats obtenus par la méthode des éléments finis, la structure avec une fissure latérale (4,38 MPa) est la configuration la plus dangereuse surtout pour des longueurs des fissures importantes. La structure avec double fissures centrées (2,27 MPa), présente la meilleure configuration et automatiquement une longue durée de la vie. Pour les autres configurations, la durée de vie reste presque la même.

CHAPITRE III :

Élaboration d'une formule analytique de facteur de forme

III.1 Introduction

La plupart des composants d'ingénierie structurelle endommagent sous l'action d'un chargement non statique. Les contraintes appliquées résultant de ce type de chargement provoquent une dégradation physique des matériaux impliqués. Au cours du temps, les dommages accumulés peuvent provoquer l'apparition et la croissance de fissures qui rendent les structures ou les composants inutilisables. Ce chapitre est une analyse numérique du comportement à la rupture d'une structure fissurée. À cet effet, nous avons modélisé des plaques contenant une fissure latérale soumises à une charge de traction uni-axiale (mode I). Notre étude est basée sur la détermination du facteur d'intensité des contraintes pour différentes longueurs de fissure. À la lumière des résultats du facteur d'intensité des contraintes, on a établi une expression analytique avec des paramètres géométriques de la fissure, tels que la largeur de la plaque et la longueur de la fissure. Cette expression analytique nous permet de déterminer directement la valeur de facteur d'intensité des contraintes sans passer par la modélisation numérique.

III.2 Modèle géométrique et propriétés mécaniques

Notre travail a été fait sur des éprouvettes SENT (Single EdgeNotch Tension). Pour cette étude, nous avons choisi l'exemple précédent (chapitre 03). Pour ce faire, considérons des plaques minces en Acier EN24 de sections rectangulaires [(96 x 12) ; (96x24) ; (96x36) ; 96x48] mm² contenant une fissure latérale, sollicitée aux contraintes de traction uniforme comme elle est indiquée dans la figure ci-dessous (figure III.1)

Chapitre III :
Elaboration d'une formule analytique de facteur de forme

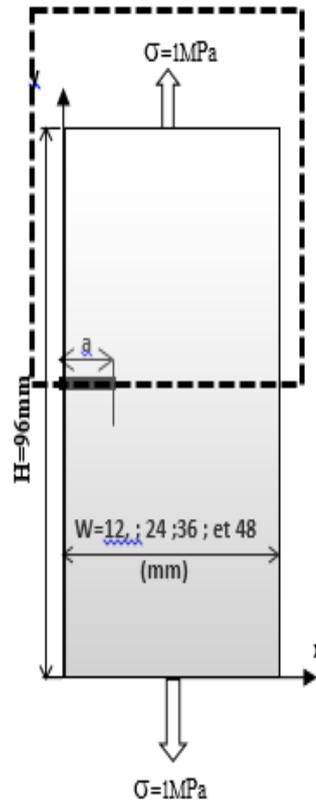


Figure III.1 : Modèle géométrique d'éprouvettes à une fissure latérale (les dimensions sont en mm) [10].

Les propriétés mécaniques de la plaque en Acier EN24 destinés à la construction métallique sont : le module de Young et le coefficient de poisson sont regroupées dans le tableau1. La plaque fissurée a été soumise à une charge de traction uni axiale dans la direction verticale suivant l'axe 'Y-Y' sous la contrainte appliquée d'amplitude $\sigma = 1 \text{ MPa}$ et une fissure de longueur $a=6 \text{ mm}$. L'analyse a été effectuée en mode I pure pour diverses longueurs de fissure (a) comprises entre ($a=0.1*W$ et $a=0.7*W$)

Où : W est la largeur de la plaque.

Les propriétés mécaniques de matériau utilisé dans cette étude sont comme suit :

Tableau III.1 : Propriétés des matériaux utilisés [11]

Propriétés du matériau	Material	Module d'Young	Coefficient du Poisson	Limite d'élasticité	Charge de rupture
valeurs	EN24	210000 MPa	0.3	235 MPa	400N/mm ²

III.3 Modèle élément finis et conditions aux limites

Un modèle par éléments finis deux dimensionnel (2D) a été réalisé dans cette analyse. Pour cela, le code des éléments finis commercial Abacus 6.14 a été utilisé pour calculer les valeurs du facteur d'intensité des contraintes. Il est bien établi qu'en mécanique de la rupture élastique linéaire, le taux de restitution d'énergie G est équivalent à la valeur de l'intégrale J et il est lié au facteur d'intensité de contrainte K_I par la relation suivante :

$$K_I = \sqrt{G \times E'} \quad (III.1)$$

$$\text{Où } \begin{cases} E' = E & \text{cas d'une contrainte plane} \\ E' = E/(1-\nu^2) & \text{cas d'une déformation plane} \end{cases} \quad (III.2)$$

Le modèle par éléments finis de la plaque avec une fissure latérale est illustré dans la figure 2. Cette dernière représente le maillage et les conditions aux limites de la plaque étudiée. Vu la symétrie suivant les axes X-X, on se limite à étudier la moitié (1/2) de la plaque rectangulaire afin de minimiser le temps de calcul. Un maillage raffiné a été utilisé au voisinage proche de la fissure afin d'avoir des résultats précis.

La plaque a été discrétisé par des éléments de type Quadrilatéral Biquadratiques à 8 nœuds (CPS8R) (figure 2b). Les éléments singuliers de pointe de fissure de quart de point ont été considérés dans la région de la pointe de fissure [12] (figure 2c). Le nombre de nœuds et d'éléments est répertorié dans le tableau III.2.

Tableau III. 2 : Nombre de nœuds et d'éléments de la plaque étudiée

Taille de l'élément	Nombre d'éléments	Nombre de nœuds	Type d'éléments
0,12~1,08	1156	3603	Quadratiques à 8 nœuds (CPS8R)

La figure 2 présente le maillage utilisé pour la présente simulation numérique.

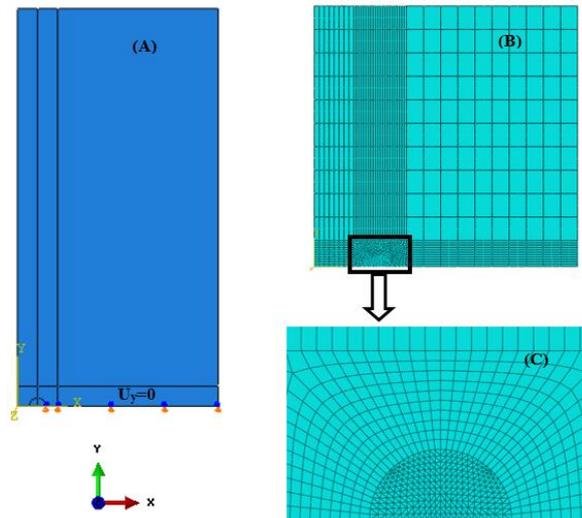


Figure III.2 : *Modèle EF de la plaque fissurée : (a) conditions aux limites ; (b) Modèle et maillage typique de 1/4 de la plaque ; (c) Maillage autour de la pointe de fissure.*

III.4 Résultats et discussion

Les résultats obtenus numériquement sont regroupés dans le tableau III.3. Ce tableau présente une comparaison de résultats numériques du facteur d'intensité des contraintes K_I pour les différentes dimensions de plaque proposées.

Tableau III.3 : *Comparaison des FIC pour différentes éprouvettes (SENT) étudiées.*

Sections	12x96	24x96	36x96	48x96
<i>a/w</i>	<i>facteur d'intensité des contraintes FIC</i>			
0,1	2,312	3,274	4,017	4,633
0,2	3,773	5,343	6,55	7,555
0,3	5,625	7,967	9,763	11,26
0,4	8,274	11,73	14,36	16,58
0,5	12,38	17,56	21,51	24,82
0,6	19,34	27,46	33,64	38,83
0,7	32,82	46,64	57,17	66,01
0,1	2,312	3,274	4,017	4,633

Chapitre III : Elaboration d'une formule analytique de facteur de forme

De façon générale, l'augmentation de longueur de fissure provoque une amplification de facteur d'intensité de contrainte K_I . Cette remarque elle est valable pour les différentes plaques avec une augmentation de K_I par l'augmentation de la largeur de la plaque.

Nous représentons sur la Figure III.3, l'évolution du FIC calculé numériquement des différents cas de plaque en fonction de la taille de la fissure caractérisée par le rapport « a/w »

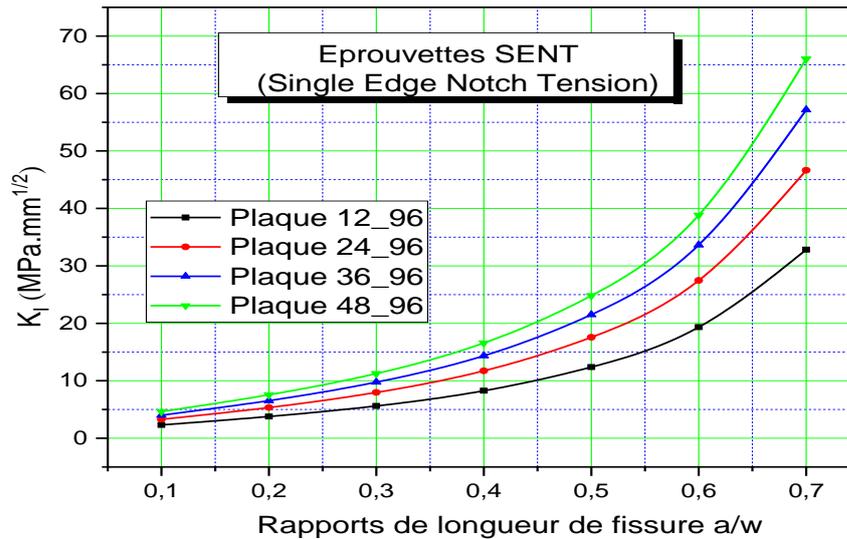


Figure III.3 : Evolution du FIC en fonction du rapport de la longueur de fissure

Une tendance similaire a été observée pour toutes les configurations analysées, c'est à dire la valeur de facteur d'intensité de contrainte K_I augmente avec l'augmentation de la longueur de fissure. Nous notons cependant que, l'augmentation de la largeur de la plaque conduit à une amplification des valeurs de facteur d'intensité de contrainte K_I .

III.4.1 Équation empirique

Dans le but de développer des expressions analytiques donnant le facteur de forme (F) en fonction des paramètres géométriques d'une éprouvette SENT, on normalise les facteurs d'intensité des contraintes obtenus numériquement par la relation suivante :

$$F(a/w) = \frac{K_I}{\sigma \sqrt{\pi a}} \quad (\text{III.3})$$

Où

σ : contrainte appliquée ;

a : longueur de fissure ;

K_I : facteur d'intensité de contrainte en mode I pure.

W : largeur de la plaque

Chapitre III : Elaboration d'une formule analytique de facteur de forme

La figure III.4 représente l'évolution de facteur de forme (F) en fonction de la longueur de fissure caractérisée par le rapport « a/w ».

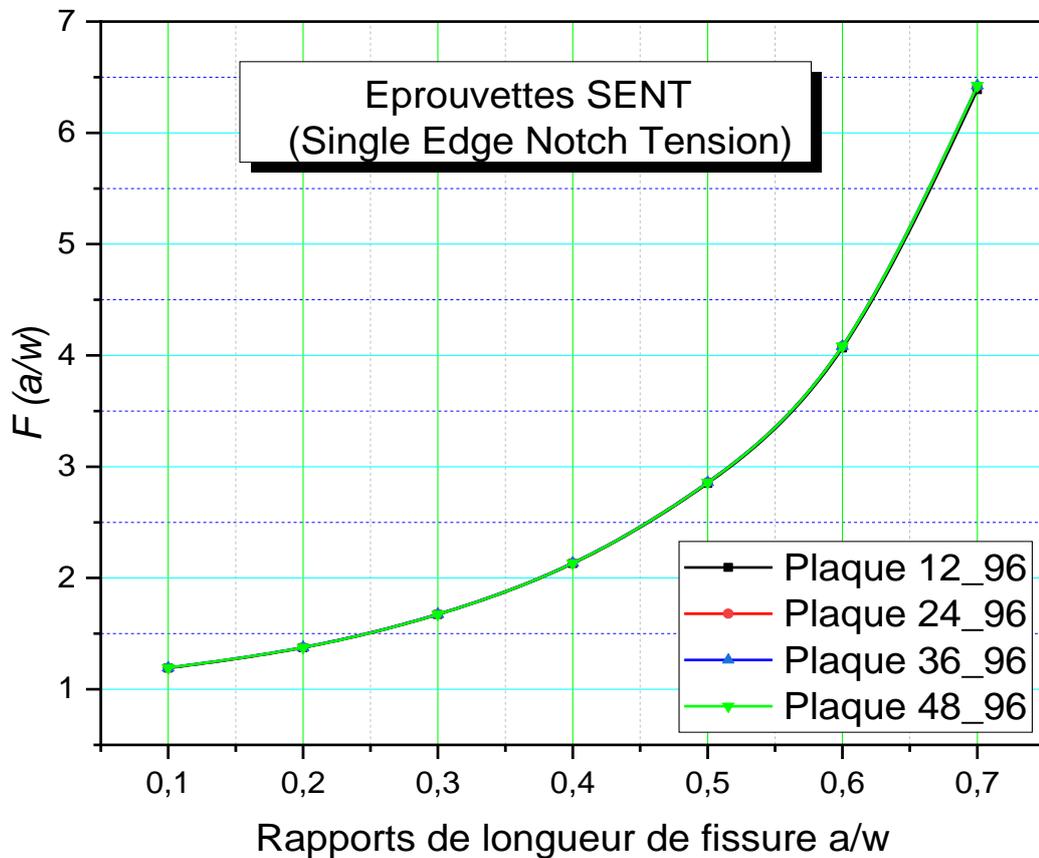


Figure III.4 : Evolution du facteur de forme $f(a/w)$ en fonction du rapport de la longueur de fissure a/w

On remarque d'après la figure ci-dessus que, les courbes représentant l'évolution du facteur de forme sont identiques. Pour toutes les configurations analysées, l'augmentation de la longueur de fissure caractérisée par le rapport a/w provoque une croissance exponentielle du facteur de forme.

À ce stade, il est possible d'exploiter les résultats des éléments finis actuels dans le but de formuler une expression simple permettant de prédire le facteur d'intensité des contraintes. Les expressions proposées sont en fonction des paramètres géométriques de l'éprouvette et de la fissure tels que la longueur de la fissure. On note cependant, que la gamme d'applicabilités des rapports a/w est prise comme suit :

$$0.1 \leq a/w \leq 0.7$$

Chapitre III : Elaboration d'une formule analytique de facteur de forme

III.5 Solution analytique des Facteurs d'intensités de contraintes :

Il est nécessaire de rechercher une relation polynômiale décrivant le facteur de forme (F) en fonction des paramètres géométriques de l'éprouvette. Pour déterminer le degré du polynôme, il est judicieux de diversifier les points d'analyse afin d'avoir un bon lissage des courbes. Pour cela le degré 3 des polynômes d'ajustement des résultats donne plus d'affinité ce qui résulte en l'expression de la forme suivante :

$$F(a/w) = A_0 + A_1 (a/w) + A_2 (a/w)^2 + A_3 (a/w)^3 \quad (\text{III.4})$$

Où :

A_i ($i = 0, 1, 2, 3$) sont des paramètres de l'équation polynomiale (3) donnés par le tableau suivant.

Tableau III.4 : Paramètres de l'équation polynomiale du facteur de forme (F)

A_0	A_1	A_2	A_3
0,57518	7,98901	25,66766	37,08692

On constate à partir du tableau III.4, que le facteur de forme (F) peut être écrit en tant qu'expression analytique intégrant les paramètres géométriques de l'éprouvette et la longueur de la fissure à la forme suivante :

$$F(a/w) = 0,57518 + 7,98901 (a/w) + 25,66766 (a/w)^2 + 37,08692 (a/w)^3$$

On peut proposer que cette expression soit valable pour le calcul de facteur d'intensité de contrainte pour cette géométrie.

Conclusion générale

Conclusion générale

La présence d'une fissure dans une structure sous charge nécessite, pour des raisons de sécurité évidentes, de connaître de manière précise son degré de nocivité. Lorsque cette fissure se propage, sous chargement, il est important d'évaluer rapidement l'évolution de ce degré de nocivité et plus concrètement la durée de vie résiduelle de la structure fissurée. La résolution de ce type de problème, dans le cadre de la mécanique de la rupture, s'effectue classiquement par la méthode des éléments finis.

A travers de ces résultats numériques, nous pouvons tirer les conclusions principales suivantes :

- Pour une structure fissurée, une augmentation de la taille de la fissure conduit à une augmentation du facteur d'intensité des contraintes et par conséquent la rupture de la composante mécanique.
- Le même comportement est obtenu quel que soit la configuration étudiée.
- La valeur du facteur d'intensité des contraintes (nocivité) dépend fortement à la configuration de la structure fissurée.
- La contrainte équivalente de Van Mises est concentrée à la pointe de fissure.
- En aucune configuration, le comportement mécanique de la structure garde sa tendance malgré la variation de la largeur de la plaque.
- Une expression empirique pour les facteurs d'intensité de contrainte normalisée a été proposée.

Annexe

A.1 Méthode des éléments finis

A.1.1 Introduction

Les codes éléments finis font maintenant partie des outils couramment utilisés lors de la conception et à l'analyse des produits industriels. Les outils d'aide à la modélisation devenant de plus en plus perfectionnés, l'utilisation de la méthode des éléments finis s'est largement développée et peut sembler de moins en moins une affaire de spécialistes. Si l'utilisation de la méthode se démocratise de par la simplicité croissante de mise en œuvre, la fiabilité des algorithmes et la robustesse de la méthode, il reste néanmoins des questions essentielles auxquelles l'ingénieur devra répondre s'il veut effectuer une analyse par éléments finis dans de bonnes conditions :

Formaliser les non-dits et les réflexions qui justifient les choix explicites ou implicites de son analyse du problème [13];

- Évaluer la confiance qu'il accorde aux résultats produits ;
- Analyser les conséquences de ces résultats par rapport aux objectifs visés.

L'objectif de cette partie est de présenter les principes de base de cette méthode en insistant sur l'enchaînement des tâches (démarche et hypothèses associées) qui assurent la cohérence du processus de calcul. Ces connaissances vous seront utiles pour maîtriser les deux principales difficultés de mise au point d'un modèle numérique :

- Problèmes préliminaires à la phase de calcul ;
- Problèmes liés à l'exploitation des résultats et le retour à la conception.

Il ne faut pas perdre de vue que l'analyse des résultats nécessite une bonne compréhension des différentes étapes mathématiques utilisées lors de l'approximation, pour pouvoir estimer l'erreur du modèle numérique par rapport à la solution exacte du problème mathématique.

Sans oublier que le modèle numérique ne peut fournir que de résultats relatifs aux informations contenues dans le modèle mathématique qui découle des hypothèses de modélisation.

Nous nous limiterons à la présentation de modèles élémentaires utilisés dans le cadre des théories linéaires. Bien que simples ces modèles permettent déjà de traiter un grand nombre d'applications liées aux problèmes de l'ingénieur. Du point de vue pédagogique, ils sont suffisamment complexes pour mettre en avant les difficultés de mise en œuvre de la méthode.

L'idée fondamentale de cette méthode est de discrétiser le problème en décomposant le domaine matériel à étudier en éléments de forme géométrique simple. Sur chacun de ces éléments il sera plus simple de définir une approximation nous permettant d'appliquer les méthodes présentées dans la première partie de ce cours. Il ne reste alors qu'à assembler les formes matricielles élémentaires pour obtenir les équations relatives à la structure à étudier. C'est sous cette forme pragmatique qu'elle est utilisée par les ingénieurs, et que nous allons maintenant l'aborder[13].

Toutes les méthodes d'approximation ont un même objectif, remplacer un problème mathématique défini sur un milieu continu (équations différentielles ou intégrales) par un problème mathématique discret (équation matricielle), problème de dimension finie que l'on sait résoudre numériquement[14].

En résumé, les questions essentielles auxquelles l'ingénieur devra répondre s'il veut effectuer une analyse par un modèle numérique dans de bonnes conditions, sont [13] :

- Quel modèle mathématique utiliser ?
- Quel modèle numérique faut-il lui associer ?
- Quelle est l'erreur d'approximation commise ?
- Peut-on améliorer le modèle numérique ?
- Faut-il changer le modèle mathématique ?

Les équations du modèle retenu, sont soumises à un certain nombre d'hypothèses basées sur les sciences de l'ingénieur. Il faut connaître le domaine de validité de ces hypothèses pour pouvoir vérifier que la solution obtenue est satisfaisante ; La solution exacte d'un modèle mathématique qui ne correspond pas à la réalité physique ne vaut rien. [14]

A.1.2 Utilisation de la méthode des éléments finis

La méthode des éléments finis fait partie des outils de mathématiques appliquées. En analyse numérique, la méthode des éléments finis est utilisée pour résoudre numériquement des équations aux dérivées partielles. Celles-ci peuvent par exemple représenter analytiquement le comportement dynamique de certains systèmes physiques (mécaniques, thermodynamiques, acoustiques, etc.). En mathématique, Il s'agit de remplacer un problème compliqué pour lequel a priori on ne connaît pas de solution, par un problème plus simple que l'on sait résoudre [15].

La méthode des éléments-finis (MEF) est une méthode d'approximation numérique de solutions de problèmes aux limites statiques ou dynamiques tels que [16] :

- Diffusion thermique
- Mécaniques des milieux continus (solides et fluides)
- Électromagnétisme

Mais en fait, absolument tous les problèmes d'équations aux dérivées partielles (EDP) aux limites.

Il s'agit, comme dans toutes les méthodes numériques, de trouver une approximation discrète.

Pour faire bref, d'un problème différentiel aux limites linéaire, on trouve une formulation vibrationnelle associée équivalente, dont on calcule une approximation de la solution en projetant sur un espace de dimension finie, ce qui à résoudre au final un système linéaire.

A.1.3 Démarche éléments finis

Les principales étapes de construction d'un modèle éléments finis, qui sont détaillées par la suite, sont les suivantes [13] :

- Discrétisation du milieu continu en sous domaines ;
- Construction de l'approximation nodale par sous domaine ;
- Calcul des matrices élémentaires correspondant à la forme intégrale du problème ;
- Assemblage des matrices élémentaires.
- Prise en compte des conditions aux limites.
- Résolution du système d'équations.

A.1.4 Principes de la méthode des éléments finis (MEF)

La MEF est basée sur une idée simple : subdiviser (discrétiser) une forme complexe en un grand nombre de sous-domaines élémentaires de forme géométrique simple (éléments finis) interconnectés en des points appelés nœuds [14].

Nous considérons le comportement mécanique de chaque élément séparément, puis nous assemblons ces éléments de telle façon que l'équilibre des forces et la compatibilité des déplacements soient satisfaits en chaque nœud.

La MEF utilise des approximations simples des variables inconnues dans chaque élément pour transformer les équations aux dérivées partielles en équations algébriques.

Les nœuds et les éléments n'ont pas forcément de signification physique particulière, mais sont basés sur des considérations de précision de l'approximation.

A.1.5 Étapes logiques du calcul par éléments finis

- Définir les nœuds et les éléments (Créer le maillage) [14].
- Pour chaque élément, établir la matrice de rigidité élémentaire $[K^e]$ reliant les degrés de libertés (déplacements) nodaux $\{u^e\}$ et les forces $\{f^e\}$ appliquées aux nœuds : $[k^e] \{u^e\} = \{f^e\}$.
- Assembler les matrices et les vecteurs élémentaires en un système global $[K] \{U\} = \{F\}$ de manière à satisfaire les conditions d'équilibre aux nœuds.
- Modifier le système global en tenant compte des conditions aux limites.
- Résoudre le système $[K] \{U\} = \{F\}$ et obtenir les déplacements $\{U\}$ aux nœuds.
- Calculer les gradients (flux de chaleur, déformations et contraintes) dans les éléments et les réactions aux nœuds sur lesquels les conditions aux limites sont imposées.

$[K]$: matrice caractérisant le système

$\{U\}$: variables inconnues du problème

$\{F\}$: sollicitations connues (second membre)

Les principales étapes du calcul sont [17] :

A.1.6 Vérification des données

A.1.6.1 Construction des tables

- Construction de la table des nœuds et de la table des éléments
- Partition des degrés de liberté
- Calcul de la place mémoire nécessaire au calcul
- Segmentation des matrices globales

A.1.6.2 Calcul des matrices élémentaires et assemblage des matrices globales

- Matrice de rigidité
- Matrice de masse pour une analyse dynamique
- Matrice de rigidité géométrique pour la recherche des charges critiques
- Vecteur(s) force(s) pour une analyse statique

A.1.6.3 Factorisation de la matrice de rigidité globale

$$[K] = [L] [D] [L]^T \quad (\text{A.1})$$

$[L]$ est une matrice triangulaire inférieure dont les termes diagonaux sont égaux à l'unité

[D] est une matrice diagonale. Si le nombre de liaisons est suffisant tous les pivots sont strictement positifs.

a) Analyse statique

Pour chaque problème statique [18] :

- Résolution du système d'équations linéaires :

$$[K] \{U_i\} = \{F_i\} \quad (A.2)$$

Où i est le numéro du problème (cas simple ou combinaison). S'il y a des déplacements imposés

Non nuls, le logiciel génère un cas de charges 0 qui se réduit aux déplacements imposés.

- Édition d'un fichier neutre

b) Analyse dynamique

- Le système d'équation utilisé par Abaqus : $[M] \{\ddot{U}_i\} + [K] \{U_i\} = \{F_i\}$ (A.3)

- Résolution du problème aux valeurs propres :

$$[K] \{U\} = \omega^2 [M] \{U\} \quad (A.4)$$

- Edition d'un fichier neutre

c) Flambement linéaire :

- Résolution du problème aux valeurs propres :

$$[K] \{U\} = -\lambda [M] \{U\} \quad (A.5)$$

- Edition d'un fichier neutre

À la fin du calcul, le logiciel génère un fichier dont l'extension est *.res*. Ce fichier contient des informations sur le déroulement du calcul.

A.1.6.4 Partition des degrés de liberté

Les degrés de liberté de la structure (d.d.l.) sont numérotés de façon à obtenir la partition de ceux-ci en trois sous-ensembles [18] :

- Déplacements inconnus : (L)
- Déplacements connus non nuls : (P)
- Déplacements nuls : (S)

La partition des d.d.l. induit une partition des matrices globales : vecteur force $\{F\}$, vecteur déplacement $\{U\}$, matrice de rigidité $[K]$, . . . :

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} \{F_L\} \\ \{F_P\} \\ \{F_S\} \end{Bmatrix}, \quad \{U\} = \begin{Bmatrix} \{U_L\} \\ \{U_P\} \\ \{U_S\} \end{Bmatrix}, \quad [K] = \begin{bmatrix} [K_{LL}] & [K_{LP}] & [K_{LS}] \\ [K_{PL}] & [K_{PP}] & [K_{PS}] \\ [K_{SL}] & [K_{SP}] & [K_{SS}] \end{bmatrix} \quad (\text{A.6})$$

Les lignes et les colonnes associées aux déplacements nuls ne sont jamais assemblées. La partition des d.d.l. est effectuée avant la segmentation en blocs des matrices globales.

a) Analyse statique

Les équations d'équilibre $\{F\} = [K] \{U\}$ s'écrivent :

$$\begin{Bmatrix} \{F_L\} \\ \{F_P\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [K_{LL}] & [K_{LP}] \\ [K_{PL}] & [K_{PP}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{U_L\} \\ \{U_P\} \end{Bmatrix} \quad (\text{A.7})$$

Les déplacements inconnus sont solution du système d'équations :

$$[K_{LL}] \{U_L\} = \{F_L\} - [K_{LP}] \{U_P\} \quad (\text{A.8})$$

c) Analyse dynamique

Le système utilisé par ABAQUS : $[M] \{U\} + [K] \{U\} = \{F_{ID}\}$

Le problème aux valeurs propres $[K] \{U\} = w^2 [M] \{U\}$ se réduit à :

$$[K_{LL}] \{U_L\} = w^2 [M_{LL}] \{U_L\} \quad (\text{A.9})$$

A.1.7 Etapes pratiques du calcul par EF

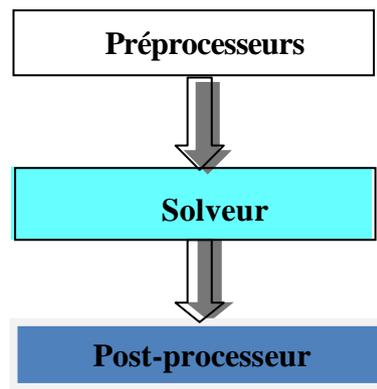


Figure A.1 : Organisation générale d'un code de calcul [14]

A.1.7.1 Préprocesseur

- Choisir le type d'éléments
- Entrer les propriétés géométriques
- Entrer les paramètres physiques
- Créer le modèle géométrique
- Créer le maillage
- Définir les nœuds et les éléments
- Appliquer les sollicitations
- Imposer les conditions aux limites

A.1.7.2 Solveur

- Choisir le type d'analyse (statique, dynamique,)
- Construire la matrice et le vecteur élémentaire $[k^e], \{f^e\}$
- Assembler $[k^e]$ et $\{f^e\}$ dans $[K]$ et $\{F\}$
- Prendre en compte les conditions aux limites
- Résoudre le système d'équations $[K]\{U\} = \{F\}$

Calculer les variations additionnelles (gradients, réactions, σ , ϵ ...)

A.1.7.3 Post-processeur

- Présente les résultats de façon intelligible et synthétique :
 - Sous forme numérique
 - Sous forme graphique
- Effectuer Des Fonctions Complémentaires : Combinaisons, Interprétations

interpolations Animation, ...

A.1.8 La modélisation physique de systèmes mécaniques

Résulte généralement des équations différentielles partielles qui ne peuvent pas être résolues analytiquement ou qui n'ont pas une solution exacte, pour raisons de complexité du domaine discrète du problème ou des conditions aux limites. Ainsi, une méthode numérique doit être employée pour la solution approximée du problème physique. La Méthode des Eléments finis (MEF) est souvent considérée comme la méthode la plus appropriée pour des études de cette nature [19]

A.1.9 Utilisation d'un logiciel éléments finis

Un programme général de type industriel doit être capable de résoudre des problèmes variés de grandes tailles (de mille à quelques centaines de milliers de variables). Ces programmes complexes nécessitent un travail d'approche non négligeable avant d'espérer pouvoir traiter un problème réel de façon correcte. Citons à titre d'exemple quelques noms de logiciels : NASTRAN, ANSYS, ADINA, ABAQUS, CASTEM 2000, CESAR, SAMCEF, etc. Les possibilités offertes par de tels programmes sont nombreuses [14] :

- Analyse linéaire ou non d'un système physique continu ;
- Analyse statique ou dynamique ;
- Prise en compte de lois de comportement complexes ;
- Prise en compte de phénomènes divers (élasticité, thermiques, électromagnétiques, de plasticité, d'écoulement.) pouvant être couplés
- Problèmes d'optimisation, etc.

L'utilisation de tels programmes nécessite une formation de base minimale [13].

A.1.9.1 Déroulement d'une étude

Pour réaliser une étude par éléments finis, il faut que les objectifs de l'étude soient bien définis.

Le cadre de l'étude, c'est-à-dire le temps et les moyens disponibles, doit être compatible avec les objectifs et la précision cherchée. Supposons toutes ces conditions remplies, l'étude proprement dite est organisée de façon logique selon les étapes suivantes [13] :

a) Analyse du problème

Cette analyse doit fixer les paramètres du calcul et conduire à la réalisation d'un maillage.

Cette phase basée sur l'expérience personnelle acquise dépend de nombreuses considérations. La difficulté essentielle est de trouver un bon compromis entre les paramètres propres au problème et ceux relatifs à l'environnement de travail. L'analyse du problème nous conduit à préciser un certain nombre d'hypothèses, et à effectuer des choix qui conditionnent les résultats.

b) Choix du modèle

En calcul des structures, les plus classiques sont de type : poutre, élasticité plane, axisymétrique, coques mince ou épaisse, tridimensionnel à ces modèles mathématiques correspondent des familles d'éléments finis.

c) Choix du type d'éléments

Il est fonction de la précision voulue, de la nature du problème, mais aussi du temps disponible. On choisira les éléments les mieux adaptés dans les familles disponibles.

d) Choix du maillage

Il dépend essentiellement de la géométrie, des sollicitations extérieures, des conditions aux limites à imposer, mais aussi des informations recherchées :

Locales ou globales. Sans oublier bien entendu le type d'outils dont on dispose pour réaliser ce maillage.

e) Hypothèses de comportement

- Quel modèle retenir pour représenter le comportement du matériau ?
- Le calcul est-il linéaire ?
- Doit-on modéliser l'amortissement ?
- Si le matériau est hétérogène ou composite, peut-on utiliser une méthode d'homogénéisation ?
- Peut-on traduire l'incompressibilité du milieu ?

Lors d'une étude, on peut être amené à utiliser des éléments finis nouveaux. Il est indispensable de vérifier leur comportement sur des problèmes élémentaires si possible proches de l'étude menée.

L'ouvrage « Guide de validation des logiciels de calculs des structures, AFNOR technique 1990 » contient des cas tests pouvant servir pour de nombreux problèmes.

Ces cas tests permettent de comparer la solution obtenue avec d'autres solutions numériques ou analytiques. Ce travail préliminaire est utile pour former sa propre expérience et permet de valider l'utilisation du modèle testé.

f) Création et vérification des données

Cette étape dépend du logiciel utilisé. La syntaxe utilisée pour définir le jeu de données est définie dans le mode d'emploi du bloc fonctionnel correspondant. En sortie, un fichier est créé, qui contient toutes les informations nécessaires à l'exécution des calculs. Les vérifications relatives au jeu de données se font généralement graphiquement, grâce à un module informatique appelé préprocesseur.

Différents contrôles peuvent être utilisés pour valider le jeu de données :

- Vérification de la géométrie de la pièce et du maillage
- Vérification de la prise en compte des sollicitations et des conditions cinématiques (liaisons) imposées à la structure.
- Vérification des propriétés mécaniques utilisées.

Pour des problèmes spécifiques, d'autres contrôles seront envisagés. L'objectif d'éviter de faire tourner un calcul inutilement. Ceci d'autant plus que la recherche d'une solution acceptable pour un problème donné est rarement le résultat d'un seul calcul.

g) Exécution du calcul

Ce bloc, le plus coûteux en temps machine est souvent exécuté en tâche de fond. Un fichier de résultats permet de vérifier que les différentes phases de calculs se sont correctement déroulées :

- Interprétation des données, vérification des paramètres manquants ;
- Construction des matrices, espace utile pour les gros problèmes ;
- Singularité de la matrice raideur, problème de conditions aux limites ou de définition des éléments ;
- Convergence, nombre d'itérations, etc.

Ce fichier peut contenir aussi les résultats du calcul (déplacements, résidus, contraintes...) ce qui lui confère dans ce cas un volume généralement très important. Il peut arriver que le calcul échoue. Les principales sources d'erreurs généralement observées à ce niveau sont listées dans le tableau :

Tableau A.1 : Principales sources d'erreurs durant le calcul [13].

erreurs	causes	Remèdes
singularité de K	Éléments mal définis, existence de modes rigides, intégration numérique	Modifier la topologie du maillage, modifier les liaisons, modifier le nombre de points d'intégration
résolution des équations	Arrondi numérique, non Convergence	Travailler en double précision, changer d'algorithme, augmenter le nombre d'itérations

h) Exploitation des résultats

Les calculs demandés dans le cahier des charges ont le plus souvent pour objectif de valider ou de vérifier le dimensionnement d'une structure. Les résultats obtenus et les conclusions relatives aux phénomènes à étudier devront être présentés de façon synthétique : tableaux, courbes, visualisation. Cela justifie largement l'utilisation d'un post-processeur, qui propose des outils pour sélectionner les informations que l'on veut étudier.

Attention, lors de l'utilisation de ces outils, il faut savoir ce que cache l'information qui vous est proposée graphiquement, sachant que celle-ci est construite à partir de résultats discrets :

- Valeur moyenne sur un élément : comment est-elle définie ?
- Valeur maximale sur l'élément : comment est-elle calculée ?
- Valeurs aux nœuds (écarts entre les éléments) : à quoi correspondent-elles ?
- Les courbes d'iso-contraintes sont-elles une signification ? etc.

Différentes vérifications doivent être effectuées pour valider les résultats. Elles poussent, dans la plupart des cas, à remettre en cause le modèle pour en créer un nouveau, dont on espère qu'il améliorera la solution précédente.

Pour valider une solution, il faut procéder dans l'ordre, en estimant dans un premier temps la précision du modèle.

Puis lorsque celle-ci est jugée suffisante, nous procédons à sa validation. Les indicateurs sur la précision du modèle sont généralement locaux. Ils concernent des informations élémentaires calculées aux nœuds ou aux points d'intégration ces informations sont très souvent fournies en valeur moyenne sur l'élément. Les indicateurs locaux sur la précision d'un modèle mécanique peuvent être :

- Discontinuité des contraintes entre des éléments adjacents. Le plus simple, pour un matériau isotrope, est de visualiser la contrainte équivalente de Von Mises, cela permet d'avoir une idée des zones fortement chargées ayant un fort gradient de contrainte. Ces zones seront l'objet de toute notre attention.

- Valeur du tenseur des contraintes sur les bords libres (certaines valeurs doivent être nulles). En pratique, il faudra estimer ces valeurs à partir des valeurs obtenues aux points d'intégration

- Densité d'énergie interne de déformation sur chaque élément, l'idéal étant d'avoir un écart le plus faible possible. Ayant les informations sur la qualité de la solution, différents contrôles peuvent être envisagés pour valider votre modèle :

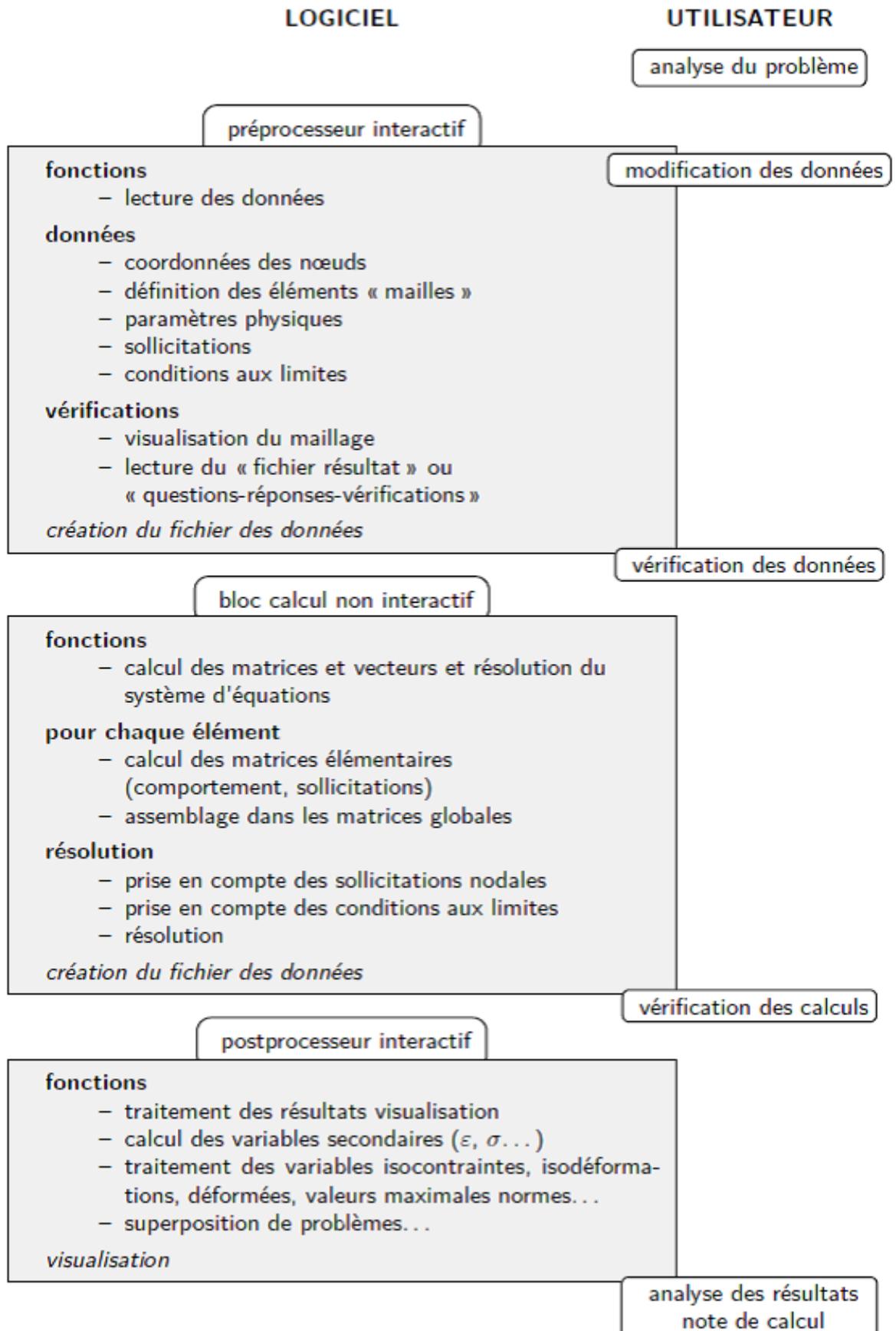
- Ordre de grandeur des résultats obtenus
- Vérification des hypothèses du modèle
- Justification des choix de départ.

La comparaison des résultats des différents modèles permet d'améliorer puis de valider un modèle final. Une fois la fiabilité du modèle assurée, on peut conclure sur l'adéquation entre la structure et le cahier des charges. La synthèse de ces calculs préliminaires est indispensable car elle vous permet de justifier et de définir les limites du (des) modèle(s) retenu(s) [13].

A.1.10 Organigramme d'un logiciel éléments finis

Tout logiciel de calcul par la méthode des éléments finis contient les étapes caractéristiques ou Blocs fonctionnels décrits sur la figure A.2 [13].

Tableau A.2 : Organigramme d'un logiciel éléments finis [13].



A.2 Généralités sur Abaqus

A.2.1 ABAQUS

Est un code de calcul par la méthode des éléments finis créé en 1978

Deux grands codes [20]

- **ABAQUS/Standard** : résolution par un algorithme statique implicite
- **ABAQUS/Explicit** : résolution par un algorithme dynamique explicite

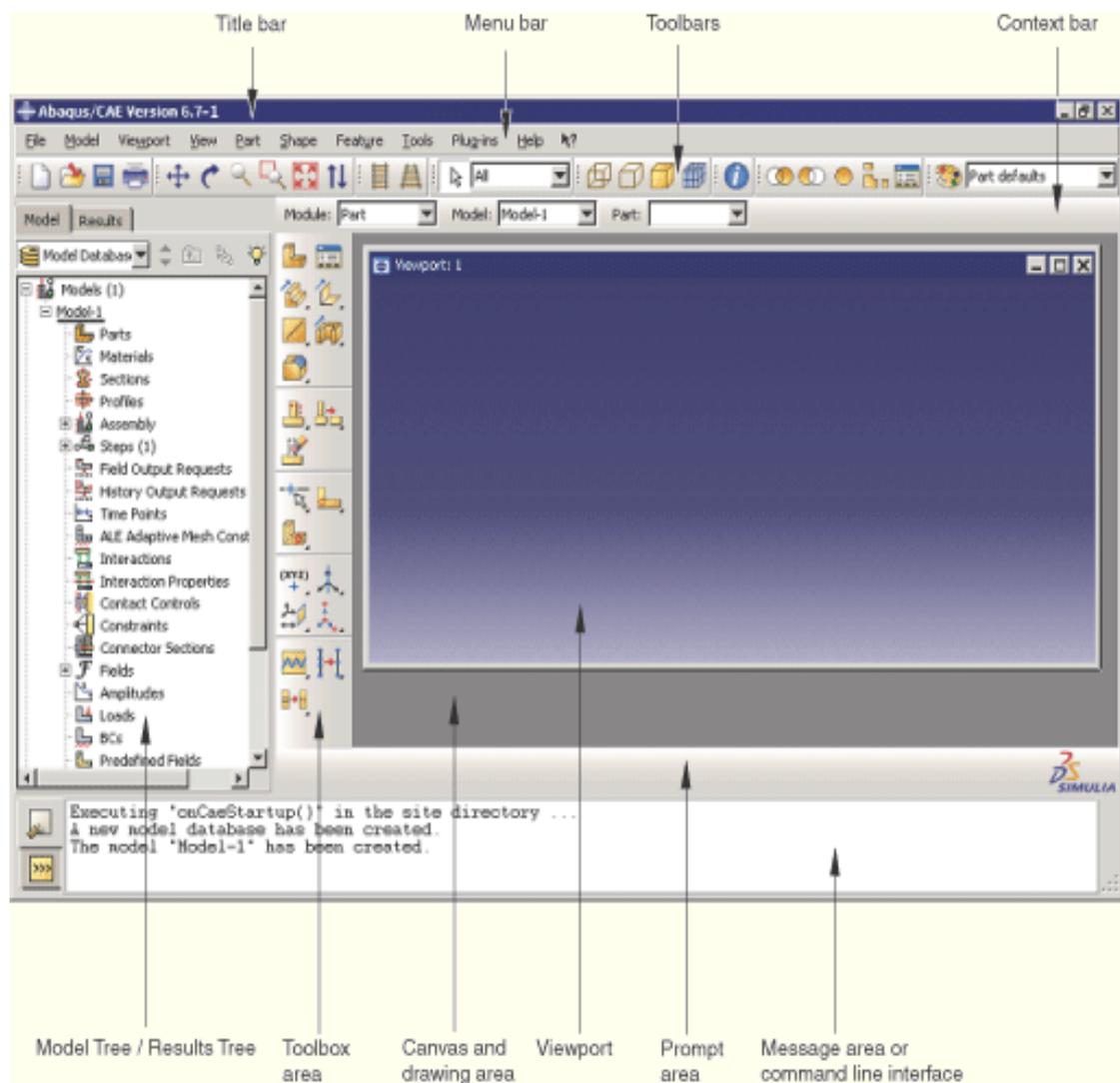


Figure A.2 : Composants de la fenêtre principale (viewport) [21].

A.2.2 Unités

ABAQUS ne gère pas les unités : c'est à l'utilisateur d'utiliser un système d'unités cohérent [20].

Tableau A.3: Les unités d'ABAQUS [20].

Quantity	SI	SI(mm)	SI	US Unit(ft)	US Unit(inch)
Length	M	Mm	M	Ft	In
Force	N	N	kN	Lbf	Lbf
Mass	Kg	tonne(10^3 kg)	tonne	Slug	lbfs ² /in
Time	S	S	S	S	s
Stress	Pa(N /m ²)	Mpa(N /mm ²)	kpa	Lbf/ft ²	psi(lbf/ in ²)
Energy	J	mJ(10^{-3})	kj	ftlbf	in lbf
Density	Kg/m ³	tonne/mm ²	tonne/m ³	Slug/ft ³	lbfs ² /in ⁴

A.2.3 Descriptif

Description succincte des possibilités d'ABAQUS :

- Analyses
- Éléments
- Non-linéarités

A.2.3.1 Type d'analyse

Domaines physiques :

- Mécanique
- Thermique
- Électrique (pièze et thermique)
- Problèmes couplés

A.2.3.2 Problèmes

- Statique et dynamique
- Linéaires et non linéaires

Dynamique des corps rigides : depuis version 6.1

Un très large choix d'éléments (plus de 100)

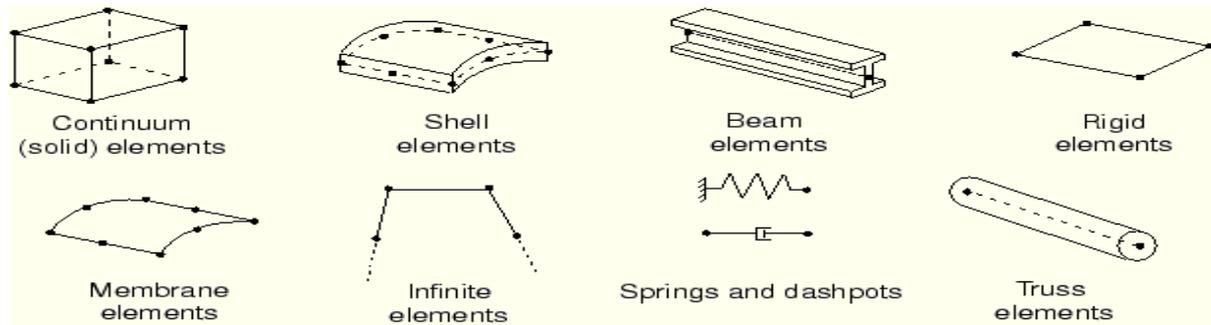


Figure A.3 Les éléments que utilisé dans ABAQUS [20].

A.2.3.3 Types de non-linéarités

- Matériaux
- Géométriques
- Contact

Algorithmes robustes et paramétrables (NEWTON-RAPHSON standard à pas adaptatifs et méthode RIKS)

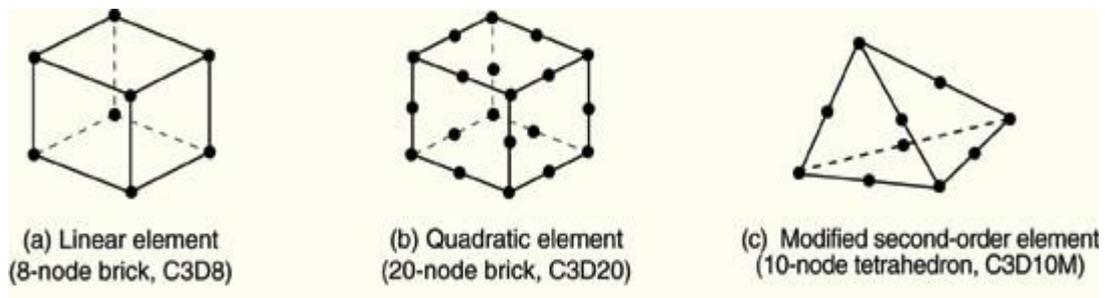


Figure A.4 Les éléments non linéaires de différents nœuds [20].

A.2.3.4 Non-linéarités matérielles

- Hyper-élasticité
- Plasticité
- Viscoplasticité
- Endommagement

- Non-isotrope (y compris laminâtes = composites) Possibilités de programmer de nouvelles lois de comportement (en FORTRAN)

A.2.3.5 Non-linéarités géométriques

- Grandes déformations
- Grands déplacements
- Grandes rotations
- Instabilités (bifurcations, points-limites)

Possibilités de remaillage automatique (type r) sur ABAQUS/Explicit

A.2.3.6 Non-linéarités de contact

- Grands déplacements
- Contact 2D et 3D
- Rigide/Rigide, Rigide/Déformable, Déformable /Déformable.
- Lois de frottement diverses et complexes Possibilités de programmer de nouvelles lois d'interaction (en FORTRAN) [20].

A.2.4 Structure

Description de la structure d'ABAQUS :

- Structure et fonctionnement du logiciel
- Syntaxe du fichier d'entrée
- Fichiers produits par ABAQUS

A.2.4.1 Le fichier d'entrée

Méthodes pour générer un fichier d'entrée (. inp) :

- À la main (fichier texte)
- Avec ABAQUS/CAE
- Avec un logiciel annexe (I-DEAS, NASTRAN,)

A.2.4.2 Modularité

La modularité d'ABAQUS :

- Génération automatique de modèle
- L'analyse multi-étapes
- Utilisation de Python et de CAE

Automatisation et modularisation des modèles

- Utiliser les commandes *INCLUDE et *INPUT
- Utiliser Python et la commande *PARAMETER
- Utiliser Python en conjonction avec CAE

Références bibliographiques

Références bibliographiques

- [1] **Jean, Claude.C.** "Mécanique du solide et des matériaux Elasticité Plasticité-Rupture." *ESPCI - Laboratoire d'hydrodynamique et mécanique Physique 1.*
- [2] **Diha, A.** Polycopie de Cours "Mécanique de la rupture, cours et exercices." *Université de Tébessa. Faculté des Sciences et de la Technologie, (2018).*
- [3] **Anderson T.L.** "Fracture mechanics." *Third edition. Boca Raton, FL 33487-2742: CRC Press (2005).*
- [4] **Zeghloul.A.** "Concepts fondamentaux de la mécanique de la rupture." *Université de Lorraine, (2016).*
- [5] **Soumahoro.Z.** "Etude du couplage thermomécanique dans la propagation dynamique de fissure." *Thèse de Doctorat. L'École Polytechnique, (décembre 2005).*
- [6] **Benhamouda.A.** "Etude du comportement des fissures dans les tubes sous pression interne" *Mémoire de Magistère, Université Mentouri Constantine, (2009-2010).*
- [7] **Zeghloul.A.** "Concepts fondamentaux de la mécanique de la rupture." *Université de Metz, (2004. 11).*
- [8] **Saci.T et Khiri.O.** "Calcul à la rupture d'une poutre simple isotrope pré-fissurée, chargée en flexion 3 et 4 points" *Mémoire de Master, Université L'Arbi Ben M'hidi, Oum El-Bouaghi, (2017-2018).*
- [9] **Pinzelli R.F, Vanthier D.** Kevlar in Sport Goods, composites, J.E.C.conférence, paris, 1987 tels.
- [10] **Sze.K.** "Hybrid finite element models for piezoelectric materials", *Department Of Mechanical engineering sciences, 1999, V.266 n.3, P.519-547.*
- [11] **Pastrama.S.D.** "Weight functions from finite element displacements", *Department of Mechanical Engineering and Industrial Management, Rua dos Bragas, 4099 Porto Codex, Portugal, (1998).*
- [12] **Ayatollahi.M.R.** "Wide range data for crack tip parameters in two disc-type specimens under mixed mode loading", *Department Of Mechanical Engineering, Iran University of science and technology, 2007, P.660-670.*
- [13] **Oudin.H.** "Méthode des éléments finis." *s.l. : Ecole centrale de Nantes, (2008).*
- [14] **Dhatt.G et Touzot.G.** "Une Présentation de la Méthode des Éléments Finis." *Les presses de l'université Laval, Québec, (1981).*
- [15] **Nguyen.TH and Huyen.TT.** "Éléments finis, du classique au iso géométrique." *Mémoire Université de Nice – Sophia Antipolis Mémoire de Mastère (2011-2012).*
- [16] **Choï.D.** "Méthode des éléments-finis par l'exemple." *Groupe mécanique modélisation mathématique et numérique Université de Caen, Bld Maréchal Juin, 14032 Caen Cedex, France. Version : (Janvier 2016).*
- [17] **Debard.Y.** "Mémorisation des matrices globales." *Méthodes de calculs. Institut Universitaire de Technologie de Mans (26 Juin 2006-21 Juin 2011).*

Références Bibliographiques

[18]**Pascault.G.P.**"Chimie et mise en œuvre des mélanges réactifs." *Initiation à la chimie et à la physico-chimie macromoléculaire, volume matériaux composites à base de polymère.* (1989). Ed. GFP, 7, pp9-42.

[19]**Faria.A.W.** "Modélisation par éléments finis de plaques composites, contribution a l'étude de l'amortissement, endommagement et prise en compte d'incertitudes." *Université fédérale de Uberlândia* (2010).

[20]**Bochard.S.**"Introduction au logiciel ABAQUS." *Mécatro2-ENSIBS*, (18/09/2012).

[21]**Suvranu.D.E.**"Introduction to finite elements." *De Department of Mechanical, Aerospace and Nuclear Engineering:MANE 4240/ CIVL 4240.*

RESUMÉ

L'objectif de ce travail est de déterminer l'évolution du degré de nocivité d'un défaut dans une plaque fissurée sous chargement statique d'une part, et d'élaborer une expression analytique qui donne les valeurs de facteur d'intensité des contraintes d'une autre part. Pour cela, une modélisation numérique en 2-D en mode I pure a été réalisée par des éprouvettes avec différentes configurations en utilisant le code de calcul Abaqus14 basé sur la méthode des éléments finis. Sur la base des résultats numériques obtenus à partir des différents modèles traités, une expression empirique pour les facteurs d'intensité de contraintes a été proposée en fonction des paramètres géométriques des éprouvettes fissurées telle que la longueur de la fissure et la largeur des éprouvettes.

ABSTRACT

The objective of this work is to determine the evolution of the degree of harmfulness of a defect in a cracked plate under static loading on the one hand, and to work out an analytical expression which gives the values of stress intensity factor of the another hand. For this, a 2-D numerical modeling in pure I mode was carried out of the specimens with different configurations using the Abaqus14 computer code based on the finite element method. On the basis of the numerical results obtained from the different models treated, an empirical expression has been proposed according to the geometric parameters of the cracked specimens such as the length of the crack and the width of the specimens.

خلاصة

الهدف من هذا العمل هو تحديد تطور درجة خطورة حدوث شق في صفيحة معدنية معرضة لحمل ثابت من جهة، و عمل معادلة تحليلية التي تعطينا قيم عامل شدة الإجهاد من جهة أخرى. لهذا الغرض، تم تنفيذ برمجة رقمية ثنائية الأبعاد للنوع الأول قدمنا فيها نماذج مختلفة الشكل باستخدام برمجة متطورة أباكوس14 معتمدة على طريقة العناصر المحدودة. بناء على النتائج الرقمية المتحصل عليها عن طريق معالجة نماذج مختلفة، تم اقتراح معادلة وفقا للمعايير الهندسية للنماذج المتصدعة مثل طول الشق و عرض النماذج.