



**FACULTÉ DES SCIENCES APPLIQUÉES**  
**DÉPARTEMENT GÉNIE CIVIL**

**Mémoire de fin d'études en vue de l'obtention du diplôme de Master**

Spécialité : Génie Civil

Option : Structures

Présenté par :

ABDERREHIM Mohamed

SAADA Ismail

*Sujet du mémoire*

**Analyse de la réponse statique des plaques orthotropes  
épaisses**

*Soutenu publiquement le 07/10/2020 devant le jury composé de :*

M. TLIDJI	Youcef	Président
M. DRAICHE	Kada	Rapporteur
M. ABDELAZIZ	Hadj Henni	Examineur
Mme. KHELIFA	Zoubida	Examineur

Promotion : 2019/2020

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

# *Remerciement*

**Remerciement**

*Nous tenons tout d'abord à remercier **DIEU** de nous avoir donné le courage et la détermination nécessaire pour finaliser ce travail qui compte tant pour notre avenir intellectuel et professionnel.*

*Nous tenons notre immense gratitude à nos parents pour leur accompagnement tout au cours de ce cycle d'étude.*

*En second lieu, Nous remercions tout particulièrement notre encadreur Mr « **Kada DRAICHE** » qui a fait preuve d'une grande patience tout au long de notre recherche en nous prodiguant ses conseils et ses remarques éclairées qui nous ont été particulièrement précieuses.*

*Nos remerciements sincères aux **membres de jury** de nous avoir fait l'honneur de lire et d'évaluer notre travail et ce malgré leurs innombrables occupations.*

*Nous remercions **nos professeurs** pour leurs enseignements lesquels nous ont donné le goût de la rigueur scientifique et nous ont beaucoup aidés à rédiger, à structurer ce mémoire et à améliorer son contenu.*

*Enfin, nos remerciements à tous **nos amis, nos collègues** qui nous ont soutenu et encouragé pour la réalisation de cet humble mémoire.*

## *Dédicace*

*Dédicace*

*Rien n'est aussi beau à offrir que le fruit d'un labeur qu'on dédie Du fond du cœur à ceux qu'on aime et qu'on remercie en exprimant La gratitude et la reconnaissance durant toute notre existence*

*Je dédie ce modeste travail :*

*A Ceux que j'aime :*

*Mon père et ma mère qui ont toujours été présent pour me Soutenir, me conseiller, sacrifient pour moi et m'avoir permis D'arriver à ce stade d'éducation*

*Je le dédie aussi à :*

*Mes frères et sœurs, qui mon soutenus et crus en moi lors de mon parcours.*

*Et à ceux qui ont participé avec moi à ce travail, mon cher ami et binôme*

*Saada Ismail*

*Et à tous mes collègues et mes amis(e)*

*Toute la promotion 2019/2020*

ABDERREHIM MOHAMED

*Dédicace*

*Rien n'est aussi beau à offrir que le fruit d'un labeur qu'on dédie Du fond du cœur à ceux qu'on aime et qu'on remercie en exprimant La gratitude et la reconnaissance durant toute notre existence*

*Je dédie ce modeste travail :*

*A Ceux que j'aime :*

*Mon père et ma mère qui ont toujours été présent pour me Soutenir, me conseiller, sacrifient pour moi et m'avoir permis D'arriver à ce stade d'éducation*

*Je le dédie aussi à :*

*Mes frères et sœurs, qui mon soutenus et crus en moi lors de mon parcours.*

*Et à ceux qui ont participé avec moi à ce travail, mon cher ami et binôme*

***Abderrehim Mohamed***

*Et à tous mes collègues et mes amis(e)*

*Toute la promotion 2019/2020*

SAADA ISMAIL

## *Résumé*

## *Résumé*

Dans la présente étude, une nouvelle théorie **quasi-3D** de déformation en cisaillement prenant en compte l'effet de déformation de cisaillement transversal ainsi que l'effet de déformation normale transversale est proposé pour l'analyse de la flexion des plaques orthotropes épaisses. Le champ de déplacement dans le plan utilise des fonctions sinus hyperbolique et cosinus hyperbolique en termes de coordonnées d'épaisseur pour inclure l'effet de déformation en cisaillement. Cette théorie ne comporte que quatre variables, ce qui est inférieur à la théorie de la déformation en cisaillement du premier ordre (**FSDT**) et les autres théories conventionnelles d'ordre élevé (**HSDT**). Par conséquent, elle respecte les conditions aux limites sur les surfaces supérieure et inférieure de la plaque sans l'utilisation de facteur de correction de cisaillement. Les équations de mouvements et les conditions limites de la théorie proposée sont obtenues en utilisant le principe des travaux virtuels. Les résultats numériques sont obtenus en utilisant la méthode de Navier pour la flexion statique des plaques orthotropes simplement appuyées soumises aux différentes conditions de chargement. Ces résultats sont comparés avec d'autres modèles trouvés dans la littérature pour prouver l'efficacité et la précision de la théorie proposée.

**Mots clés :** théorie **quasi-3D** ; flexion ; plaques orthotropes épaisses ; déformation de cisaillement.

# *Abstract*

*Abstract*

In the present study, a new **quasi-3D** shear deformation theory taking into account the effect of transverse shear deformation as well as the effect of transverse normal deformation is proposed for the bending analysis of thick orthotropic plates. The in-plane displacement field uses hyperbolic sine and hyperbolic cosine functions in terms of thickness coordinates to include the effect of shear strain. This theory has only four variables, which is less than the first-order shear deformation theory (**FSDT**) and other conventional high-order shear deformation theories (**HSDT**). Therefore, it meets the boundary conditions on the top and bottom surfaces of the plate without the use of a shear correction factor. The equations of motion and the boundary conditions of the proposed theory are obtained using the principle of virtual work. Numerical results are obtained using the Navier method for the static bending of orthotropic simply supported plates subjected to different loading conditions. These results are compared with other models found in the literature to prove the efficiency and accuracy of the proposed theory.

**Keywords:** quasi-3D theory; flexion; thick orthotropic plates; shear deformation.

ملخص

## ملخص

في هذه الدراسة، تم اقتراح نظرية جديدة شبه ثلاثية الأبعاد لتشوه القص مع الأخذ في الاعتبار تأثير تشوه القص العرضي وكذلك تأثير التشوه العادي العرضي لتحليل الانحناء للوحات أرثوتروبية سميكة. يستخدم مجال الإزاحة في المستوي وظائف الجيب القطعي وجيب التمام القطعي من حيث إحدائيات السُمك لتشمل تأثير تشوه القص. هذه النظرية لها أربع متغيرات فقط، وهي أدنى من نظرية تشوه القص من الدرجة الأولى (FSDT) وغيرها من النظريات التقليدية عالية المستوى (HSDT). لذلك، فإنها تفي بشروط الحدود على الأسطح العلوية والسفلية للوحة دون استخدام عامل تصحيح القص. يتم الحصول على معادلات الحركة وشروط حدود النظرية المقترحة باستخدام مبدأ العمل الافتراضي. يتم الحصول على النتائج العددية باستخدام طريقة Navier للانحناء الثابت للألواح الأرتوتروبية المسنودة ببساطة والتي تخضع لظروف تحميل مختلفة. تمت مقارنة هذه النتائج مع النماذج الأخرى الموجودة في الأدبيات لإثبات كفاءة ودقة النظرية المقترحة.

**الكلمات المفتاحية:** نظرية شبه ثلاثية الأبعاد؛ انثناء؛ لوحات أرثوتروبية سميكة؛ تشوه القص.

# *Table des matières*

*Table des matières*

Remerciement.....	ii
Dédicace.....	iv
Résumé.....	vii
Abstract.....	ix
ملخص.....	xi
Table des matières.....	xiii
Liste des figures.....	xviii
Liste des tableaux.....	xxi
Liste des notations et symboles.....	xxiii
Liste des abréviations.....	xxvi
Introduction générale.....	2
<b>Chapire I Généralités sur les matériaux composites</b>	
<b>I.1</b> Introduction.....	<b>6</b>
<b>I.2</b> Classification des matériaux composites .....	<b>6</b>
<b>I.2.1</b> En fonction de type de la matrice.....	<b>7</b>
<b>I.2.1.1</b> Composites à Matrice Polymérique (P.M.C).....	<b>7</b>
<b>I.2.1.2</b> Composites à Matrice Métallique (M.M.C) .....	<b>7</b>
<b>I.2.1.3</b> Composites à Matrice Céramique (C.M.C).....	<b>7</b>
<b>I.2.1.4</b> Composites à Matrice Carbon (C.M.C).....	<b>8</b>
<b>I.2.2</b> En fonction de type de renforts .....	<b>8</b>
<b>I.2.2.1</b> Composites à renforts de fibres .....	<b>8</b>
<b>I.2.2.2</b> Composites à renforts de paillettes .....	<b>8</b>
<b>I.2.2.3</b> Composites à renforts de particules.....	<b>8</b>
<b>I.2.2.4</b> Composites stratifiés.....	<b>9</b>
<b>I.3</b> Constituants des matériaux composites .....	<b>9</b>
<b>I.3.1</b> Les matrices.....	<b>10</b>
<b>I.3.1.1</b> Organique .....	<b>10</b>
<b>I.3.1.1.1</b> Les résines thermodurcissables (TD).....	<b>10</b>
<b>I.3.1.1.2</b> Les résines thermoplastiques (TP).....	<b>12</b>
<b>I.3.1.1.3</b> Les résines thermostables .....	<b>13</b>
<b>I.3.1.2</b> Minérales .....	<b>13</b>
<b>I.3.1.2.1</b> Métalliques .....	<b>13</b>

I.3.1.2.2	Céramiques .....	13
I.3.2	Les renforts.....	14
I.3.2.1	Fibres de verre .....	14
I.3.2.2	Fibres de carbone.....	15
I.3.2.3	Fibres d'aramide .....	15
I.3.2.4	Fibres de bore .....	16
I.3.2.5	Fibres de silice (ou de quartz).....	16
I.3.2.6	Fibres de polyéthylène de haut module .....	16
I.3.2.7	Fibres naturelles.....	16
I.3.2.8	Fibres d'acier .....	17
I.3.2.9	Fibres de Polymères.....	17
I.3.2.10	Fibres de basaltes.....	17
I.3.3	Les charges et les additifs.....	18
I.3.3.1	Les charges .....	18
I.3.3.1.1	Charges renforçantes .....	18
I.3.3.1.2	Charges non renforçantes .....	19
I.3.3.2	Les additifs .....	19
I.4	Les matériaux composites structuraux .....	19
I.4.1	Les Monocouches.....	20
I.4.2	Les Stratifiées .....	20
I.4.3	Les Sandwichs.....	21
I.5	Domaines d'application des matériaux composites .....	22
I.5.1	Les composites dans la construction civile .....	22
I.5.2	Les composites dans l'automobile .....	22
I.5.3	Les composites dans la construction électrique .....	23
I.5.4	Les composites dans la construction industriel .....	23
I.5.5	Les composites dans les équipements de sports et loisirs .....	24
I.5.6	Les composites dans la construction nautique .....	24
I.5.7	Les composites dans l'aéronautique.....	24
I.5.8	Les composites dans le secteur médical .....	25
I.6	Conclusion .....	25

## **Chapitre II Lois de comportement et les différentes théories des plaques**

II.1	Introduction .....	27
II.2	Lois de comportements des matériaux .....	27
II.2.1	Matériau triclinique .....	28
II.2.2	Matériau monoclinique .....	29
II.2.2.1	Symétrie par rapport au plan $(x, y)$ .....	29

II.2.2.2	Symétrie par rapport au plan $(x, z)$ .....	29
II.2.2.3	Symétrie par rapport au plan $(y, z)$ .....	30
II.2.3	Matériau orthotrope.....	30
II.2.4	Matériau transversalement isotrope .....	31
II.2.5	Matériau isotrope.....	32
II.3	Définition d'une plaque orthotrope .....	33
II.4	Différentes théories des plaques .....	34
II.4.1	Approche monocouche équivalente .....	35
II.4.1.1	Théorie classique des plaques (CPT).....	36
II.4.1.2	Théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT) .....	37
II.4.1.3	Théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé (HSDT) .....	38
II.4.1.4	Théorie de déformation en cisaillement des plaques quasi-3D .....	42
II.4.2	Approche par couche.....	43
II.4.2.1	Les modèles zig-zag.....	43
II.4.2.2	Les modèles couches discrètes.....	44
II.4.3	Approche par développement asymptotique .....	45
II.4.4	Nouvelle théorie raffinée de déformation des plaques.....	46
II.5	Conclusion .....	46
 <b>Chapitre III Etude du comportement statique des plaques orthotropes épaisses</b>		
III.1	Introduction .....	48
III.2	Modèle d'une plaque orthotrope.....	48
III.3	Hypothèses de base de la présente théorie quasi-3D à quatre variables.....	49
III.4	Le champ de déplacement .....	50
III.5	Relation déformation-déplacement.....	51
III.6	Relation contrainte-déformation.....	51
III.7	Equations de mouvement et conditions aux limites .....	52
III.8	Solution analytique .....	55
III.9	Conclusion .....	57
 <b>Chapitre IV Résultats et discussions</b>		
IV.1	Introduction .....	59
IV.2	Flexion des plaques orthotropes simplement appuyées.....	59
IV.3	Résultats numériques et discussion .....	62
IV.4	Conclusion.....	72
<b>Conclusion générale</b> .....		<b>75</b>
<b>Références bibliographiques</b> .....		<b>78</b>

---

## *Liste des figures*

*Liste des figures*

**Chapitre I Généralités sur les matériaux composites**

<b>Figure I.1</b> : Classification des matériaux composites en fonction de type de la matrice.....	7
<b>Figure I.2</b> : Classification des matériaux composites en fonction de type de renforts. ....	9
<b>Figure I.3</b> : Constituants d'un matériau composite.....	9
<b>Figure I.4</b> : Classification des types de matrices.....	10
<b>Figure I.5</b> : Exemples d'application des composites à matrice métallique.....	13
<b>Figure I.6</b> : Exemples d'application des composites à matrice céramique.....	14
<b>Figure I.7</b> : Classification des types de renforts.....	14
<b>Figure I.8</b> : Fibres de verre.....	15
<b>Figure I.9</b> : Fibres de carbone.....	15
<b>Figure I.10</b> : Fibres d'aramide.....	16
<b>Figure I.11</b> : Fibre naturelle : a) - jute, b) - le jute tissé.....	16
<b>Figure I.12</b> : Fibre de basalte.....	17
<b>Figure I.13</b> : Pli à Renforcement unidirectionnel.....	20
<b>Figure I.14</b> : Matériaux composite stratifié.....	21
<b>Figure I.15</b> : Structure composite sandwich.....	21

**Chapitre II Lois de comportement et les différentes théories des plaques**

<b>Figure II.1</b> : Matériau triclinique.....	29
<b>Figure II.2</b> : Matériau monoclinique.....	30
<b>Figure II.3</b> : Matériau orthotrope.....	31
<b>Figure II.4</b> : Matériau transversalement isotrope.....	32
<b>Figure II.5</b> : Matériau isotrope.....	32
<b>Figure II.6</b> : Cinématique de Love-Kirchhoff.....	36
<b>Figure II.7</b> : Cinématique de Reissner-Mindlin.....	37
<b>Figure II.8</b> : Cinématique de la théorie d'ordre élevé.....	39
<b>Figure II.9</b> : Champ de déplacements des modèles zig-zag du premier ordre Nguyen [89]. .	44
<b>Figure II.10</b> : Champ de déplacements des modèles zig-zag d'ordre élevé Carrera [90].....	44

**Chapitre III Etude du comportement statique des plaques orthotropes épaisses**

<b>Figure III.1</b> : Géométrie de la plaque et système de coordonnées.....	49
-----------------------------------------------------------------------------	----

**Chapitre IV Résultats et discussions**

**Figure IV.1 :** Plaque orthotrope simplement appuyée sous une charge sinusoïdale..... **60**

**Figure IV.2 :** Plaque orthotrope simplement appuyée sous une charge uniformément répartie.  
..... **60**

**Figure IV.3 :** Plaque orthotrope simplement appuyée sous une charge linéairement variable.  
..... **61**

**Figure IV.4 :** Plaque orthotrope simplement appuyée sous une charge centrale linéaire. .... **61**

**Figure IV.5 :** Variation du déplacement axial adimensionnel  $\bar{u}$  à travers l'épaisseur d'une plaque orthotrope simplement appuyée soumise à une charge sinusoïdale,  $a=b$ ,  $a/h=10$ , matériau 1..... **63**

**Figure IV.6 :** Variation du déplacement transversal adimensionnel  $\bar{w}$  à travers l'épaisseur d'une plaque orthotrope simplement appuyée soumise à une charge sinusoïdale,  $a=b$ ,  $a/h=10$ , matériau 1..... **64**

**Figure IV.7 :** Variation des contraintes axiales adimensionnelles  $\bar{\sigma}_x$  à travers l'épaisseur d'une plaque orthotrope simplement appuyée soumise à une charge sinusoïdale,  $a=b$ ,  $a/h=10$ , matériau 1..... **64**

**Figure IV.8 :** Variation des contraintes axiales adimensionnelles  $\bar{\sigma}_y$  à travers l'épaisseur d'une plaque orthotrope simplement appuyée soumise à une charge sinusoïdale,  $a=b$ ,  $a/h=10$ , matériau 1..... **65**

**Figure IV.9 :** Variation des contraintes de cisaillement transversal  $\bar{\tau}_{xz}^{CR}$  à travers l'épaisseur d'une plaque orthotrope simplement appuyée soumise à une charge sinusoïdale (calculées à l'aide des relations constitutives),  $a=b$ ,  $a/h=10$ , matériau 1. .... **67**

**Figure IV.10 :** Variation des contraintes de cisaillement transversal  $\bar{\tau}_{xz}^{EE}$  à travers l'épaisseur d'une plaque orthotrope simplement appuyée soumise à une charge sinusoïdale (calculées à l'aide des équations d'équilibre),  $a=b$ ,  $a/h=10$ , matériau 1..... **67**

**Figure IV.11 :** Variation des contraintes de cisaillement transversal  $\bar{\tau}_{yz}^{CR}$  à travers l'épaisseur d'une plaque orthotrope simplement appuyée soumise à une charge sinusoïdale (calculées à l'aide des relations constitutives),  $a=b$ ,  $a/h=10$ , matériau 1. .... **68**

**Figure IV.12 :** Variation des contraintes de cisaillement transversal  $\bar{\tau}_{yz}^{EE}$  à travers l'épaisseur d'une plaque orthotrope simplement appuyée soumise à une charge sinusoïdale (calculées à l'aide des équations d'équilibre),  $a=b$ ,  $a/h=10$ , matériau 1..... **68**

## *Liste des tableaux*

**Liste des tableaux**

**Chapitre I Généralités sur les matériaux composites**

**Tableau I.1 :** Caractéristiques mécaniques des résines thermodurcissables et thermoplastiques [48]. ..... **12**

**Tableau I.2 :** Caractéristiques mécaniques principales des fibres de renfort [48]. ..... **18**

**Chapitre IV Résultats et discussions**

**Tableau IV.1 :** Comparaison des déplacements transversaux  $\bar{w}$ , les contraintes axiales  $\bar{\sigma}_x, \bar{\sigma}_y$  et les contraintes de cisaillement adimensionnelles  $\bar{\tau}_{xy}$  dans les plaques orthotropes carrées simplement appuyées soumises à une charge sinusoïdale, matériau 1. .... **62**

**Tableau IV.2 :** Comparaison des contraintes de cisaillement transversales adimensionnelles  $\bar{\tau}_{xz}, \bar{\tau}_{yz}$  dans les plaques orthotropes carrées simplement appuyées soumises à une charge sinusoïdale, matériau 1. .... **65**

**Tableau IV.3 :** Comparaison des déplacements transversaux  $\bar{w}$ , les contraintes axiales  $\bar{\sigma}_x, \bar{\sigma}_y$  et les de cisaillement transversales adimensionnelles  $\bar{\tau}_{xz}^{CR}, \bar{\tau}_{xz}^{EE}$  dans les plaques orthotropes simplement appuyées soumises à une charge uniformément répartie, matériau 1. .... **69**

**Tableau IV.4 :** Comparaison des déplacements transversaux  $\bar{w}$ , les contraintes axiales  $\bar{\sigma}_x, \bar{\sigma}_y$  et les de cisaillement transversales adimensionnelles  $\bar{\tau}_{xz}^{CR}, \bar{\tau}_{xz}^{EE}$  dans les plaques orthotropes simplement appuyées soumises à une charge uniformément répartie, matériau 2. .... **70**

**Tableau IV.5 :** Comparaison des déplacements transversaux  $\bar{w}$ , les contraintes axiales  $\bar{\sigma}_x, \bar{\sigma}_y$  et les de cisaillement transversales adimensionnelles  $\bar{\tau}_{xz}^{CR}, \bar{\tau}_{xz}^{EE}$  dans les plaques orthotropes simplement appuyées soumises à une charge linéairement variable, matériau 1. .... **70**

**Tableau IV.6 :** Comparaison des déplacements transversaux  $\bar{w}$ , les contraintes axiales  $\bar{\sigma}_x, \bar{\sigma}_y$  et les de cisaillement transversales adimensionnelles  $\bar{\tau}_{xz}^{CR}, \bar{\tau}_{xz}^{EE}$  dans les plaques orthotropes simplement appuyées soumises à une charge linéairement variable, matériau 2. .... **71**

**Tableau IV.7 :** Comparaison des déplacements transversaux  $\bar{w}$ , les contraintes axiales  $\bar{\sigma}_x, \bar{\sigma}_y$  et les de cisaillement transversales adimensionnelles  $\bar{\tau}_{xz}^{CR}, \bar{\tau}_{xz}^{EE}$  dans les plaques orthotropes simplement appuyées soumises à une charge de ligne centrale, matériau 2. .... **72**

## *Liste des notations et symboles*

*Liste des notations et symboles*

$\{ \}$	Vecteur
$[ \ ]$	Matrice
$i, j$	Nombre naturel
$\sigma_{ij}$	Contrainte normale
$\tau_{ij}$	Contrainte de cisaillement
$\varepsilon_{ij}$	Déformation normale
$\gamma_{ij}$	Déformation de cisaillement
$[C_{ij}]$	Tenseur des rigidités
$x, y, z$	Système de coordonné
$E_i$	Module d'élasticité longitudinal
$G_{ij}$	Module d'élasticité transversal
$\nu_{ij}$	Coefficient de poisson
$[S_{ij}]$	Matrice de souplesse
$[S_{ij}^{-1}]$	Matrice inverse de souplesse
$u, v, w$	Les déplacements dans les directions $x, y, z$
$u_0, v_0, w_0$	Les composantes de déplacement sur le plan moyen de la plaque
$\partial$	Dérivée partielle
$\phi_x, \phi_y$	Rotations totales de la normale au plan moyen autour des axes $x, y$
$\gamma_{xz}^0, \gamma_{yz}^0$	Les déformations de cisaillement transverse mesurées sur le plan
$\theta_x, \theta_y$	Rotations autour des axes $x, y$ (les termes du deuxième ordre)
$w_b$	Composante de la flèche due à la flexion

## Liste des notations et symboles

---

$w_s$	Composante de la flèche due au cisaillement
$\psi_x, \psi_y$	Rotations autour des axes $x, y$ (les termes du troisième ordre)
$f(z)$	Fonction de cisaillement transverse (gauchissement)
$g(z)$	Dérivée de la fonction de gauchissement
$a, b, c$	Dimensions de la plaque
$U$	L'énergie de déformation virtuelle
$V$	L'énergie potentielle virtuelle due à la charge transversale
$T$	L'énergie cinétique virtuelle
$\delta$	L'opérateur variationnel
$q$	Charge extérieure
$P$	Charge centrale linière
$M_x^b, M_y^b, M_{xy}^b$	Moments de flexion
$M_x^s, M_y^s, M_{xy}^s$	Moments supplémentaires du au cisaillement transverse
$V_{xz}^s, V_{yz}^s, V_z^s$	Efforts de cisaillement
$\delta w_0, \delta\phi, \delta\psi, \delta\xi$	Champ virtuel de déplacement
$D_{ij}, F_{ij}, H_{ij}, FS_{ij}, HS_{ij}, Ds_{ij}, B_{ij}$	Termes de rigidité de la matrice
$m, n$	Nombres de mode
$\alpha, \beta$	Constants
$[K_{ij}]$	Matrice de rigidité

## *Liste des abréviations*

*Liste des abréviations*

<b>CPT</b>	La théorie classique des plaques
<b>FSDT</b>	La théorie de déformation en cisaillement du premier ordre
<b>SSDT</b>	La théorie de déformation en cisaillement du deuxième ordre
<b>HSDT</b>	La théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé
<b>RPT</b>	La théorie des plaques raffinée
<b>TSDT</b>	La théorie de la déformation en cisaillement trigonométrique
<b>ESDT</b>	La théorie de la déformation en cisaillement exponentiel
<b>HySDT</b>	La théorie de la déformation en cisaillement hyperbolique
<b>GD</b>	Composites à Grande Diffusion
<b>HP</b>	Composites à Hautes Performances
<b>PMC</b>	Composites à Matrice Polymérique
<b>MMC</b>	Composites à Matrice Métallique
<b>CMC</b>	Composites à Matrice Céramique
<b>CMC</b>	Composites à Matrice Carbone
<b>CMO</b>	Composites à Matrice organique
<b>TD</b>	Matrices thermodurcissables
<b>TP</b>	Matrices thermoplastiques
<b>PA</b>	Polyamide
<b>PET</b>	Polytéréphtalate éthylénique
<b>PBT</b>	Polytéréphtalate butylénique
<b>PC</b>	Polycarbonate
<b>PPS</b>	Polysulfure de phénylène
<b>POM</b>	Polyoxyméthylène
<b>PSU</b>	Polysulfurés
<b>PP</b>	Polypropylène

## *Liste des abréviations*

---

<b>PAI</b>	Polyamide-imide
<b>PEI</b>	Polyéther-imide
<b>PES</b>	Polyéther-sulfone
<b>PEEK</b>	Polyéther-éther-cétone
<b>HR</b>	Fibres à haute résistance classique
<b>HM</b>	Fibres à haut module
<b>PLA</b>	Poly-lactique
<b>ESLM</b>	Approche monocouche équivalente
<b>LW</b>	Approche par couche

# *Introduction générale*

## *Introduction générale*

Les progrès de la technologie des matériaux composites ont conduit à l'utilisation des plaques composites comme composants structurels dans diverses applications d'ingénierie en raison des propriétés mécaniques supérieures de ces matériaux. Toutefois, les effets de déformation par cisaillement sont plus prononcés dans ces structures en raison des faibles modules de cisaillement transversal par rapport aux modules de traction dans le plan, lorsqu'elles sont soumises à des charges transversales. Il est donc nécessaire de procéder à une analyse structurelle précise des plaques composites.

La théorie classique des plaques est basée sur l'hypothèse de Kirchhoff [1, 2] selon laquelle les lignes droites normales au plan médian non déformé restent droites et normales au plan médian déformé et ne subissent pas d'étirement d'épaisseur. Conformément aux hypothèses cinématiques formulées dans la théorie classique des plaques (**CPT**), toutes les déformations transversales de cisaillement et normales transversales sont nulles. Comme la déformation de cisaillement transversale est négligée dans la théorie classique des plaques, elle ne peut pas être appliquée aux plaques épaisses, dans lesquelles les effets de la déformation de cisaillement sont plus importants. Elle ne doit donc être appliquée qu'aux plaques minces.

La théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (**FSDT**) est considérée comme une amélioration par rapport à la théorie classique des plaques (**CPT**). Elle est basée sur l'hypothèse que les lignes droites normales au plan médian non déformé restent droites mais pas nécessairement normales au plan médian déformé. Reissner [3, 4] a été le premier à proposer une théorie des plaques cohérente basée sur les contraintes, qui intègre l'effet de la déformation en cisaillement ; tandis que Mindlin [5] a développé une théorie de déformation en cisaillement du premier ordre basée sur le déplacement. Dans ces théories, la distribution de la contrainte de cisaillement transversale est supposée être constante sur toute l'épaisseur de la plaque et par conséquent, un facteur de correction de cisaillement est nécessaire pour tenir compte de l'énergie de déformation due à la déformation en cisaillement.

Naghdi [6], Pister et Westmann [7], Whitney et Sun [8], Nelson et Lorch [9] ont présenté les théories de déformation en cisaillement du deuxième ordre (**SSDT**). Hildebrand *et al.* [10] ont examiné la théorie de la déformation en cisaillement du deuxième ordre et ont conclu que l'inclusion des termes quadratiques dans le déplacement axial ne présente pas d'avantage significatif par rapport à la théorie du niveau inférieur. De plus, cette théorie dépend de l'utilisation de facteurs de correction de cisaillement.

Les limites de la théorie classique, **FSDT** et **SSDT** ont stimulé le développement de théories de la déformation en cisaillement d'ordre élevé pour éviter l'utilisation de facteurs de correction du cisaillement, pour inclure l'effet du gauchissement de la section transversale et pour obtenir la variation réaliste des contraintes et des déformations transversales en cisaillement à travers l'épaisseur de la plaque. Les théories raffinées de la déformation en cisaillement basées sur l'expansion de la série de puissance pour les déplacements par rapport à la coordonnée d'épaisseur, et la troncature de la série à l'ordre requis de la coordonnée d'épaisseur sont appelées théories de la déformation en cisaillement d'ordre élevé. Ce type d'expansion en série a été initialement proposé par Basset [11].

Les théories d'ordre élevé basées sur les expansions en série sont développées par Donnell [12], Reissner [13], Provan et Koeller [14], Lo *et al.* [15, 16, 17] et qui sont modifiées par Levinson [18], Murthy [19], Reddy et Phan [20] et Blocki [21] pour obtenir la distribution de la contrainte de cisaillement parabolique à travers l'épaisseur de la plaque et pour satisfaire les conditions de surface sans cisaillement sur les surfaces supérieure et inférieure de la plaque afin d'éviter le besoin de facteurs de correction du cisaillement. Kant [22] a présenté une théorie de déformation en cisaillement raffinée du troisième ordre (**RPT**) pour l'analyse des plaques élastiques épaisses, qui aboutit à un système d'équation différentielle de deuxième ordre. Lee *et al.* [23] ont utilisé la théorie **HSDT** de Reddy [24, 25] pour l'analyse non linéaire des plaques isotropes épaisses. Hanna et Leissa [26] ont développé une théorie raffinée pour les plaques épaisses basée sur la théorie de Levinson, contenant quatre variables. La théorie admet une variation quadratique du déplacement transversal. Un examen complet de ces théories a été présenté par Noor et Burton [27]. Un récent document de synthèse présentant les orientations futures a été présenté par Ghugal et Shimpi [28].

Il existe également dans la littérature une classe de théories raffinées de la déformation en cisaillement utilisant des fonctions trigonométriques en termes de coordonnées d'épaisseur pour prendre en compte les effets de la déformation en cisaillement. En 1877, Levy [29] a développé une théorie raffinée pour les plaques isotropes épaisses en utilisant pour la première fois des fonctions sinusoïdales en termes de coordonnées d'épaisseur dans le champ de déplacement. Stein [30], Stein et Bains [31], Stein et Jegly [32] ont également proposé une telle théorie et l'ont appliquée aux plaques isotropes sous la forme modifiée. Les théories contenant des fonctions trigonométriques impliquant la coordonnée d'épaisseur dans les champs de déplacement des théories des plaques sont appelées théories de déformation en cisaillement trigonométriques (**TSDT**). Récemment, Shimpi et Patel [33], Shimpi [34], Shimpi *et al.* [35, 36] ont développé de nouvelles théories raffinées pour l'analyse des plaques isotropes et

orthotropes. Cependant, dans ces théories, l'effet de la contrainte normale transversale n'est pas pris en compte et les résultats pour les cas des charges limitées sont également donnés. Ces lacunes ont été supprimées par Ghugal et Sayyad [37] en cas de la flexion des plaques isotropes épaisses. Afin de vérifier la validité de cette théorie pour le cas des plaques en matériau composite, elle est appliquée aux plaques orthotropes en utilisant une fonction de cisaillement hyperbolique ; car les matériaux composites sont plus flexibles en cisaillement que leurs homologues isotropes. Étant donné que la théorie proposée incluant l'effet de déformation normale transversale (l'effet d'étirement de l'épaisseur) n'est pas pleinement exploitée pour divers types de matériaux, sa richesse et sa résistance ne peuvent être vérifiées. Elle est donc appliquée au matériau composite sous flexion pour vérifier la précision. Cette étude présente les résultats numériques pour différents cas de chargement en considérant l'effet de la déformation normale transversale.

Notre travail s'articule autour de quatre chapitres principaux, ainsi qu'une introduction générale et enfin une conclusion générale.

Le premier chapitre est consacré aux généralités sur les matériaux composites en donnant une vision assez large des principaux constituants, à savoir les résines, les renforts et leurs propriétés mécaniques, plus particulièrement les matériaux orthotropes.

Dans le deuxième chapitre nous présenterons les différentes théories des plaques, permettant de mettre leur champ de déplacement, de déformation et leur comportement, ensuite nous décrivons selon une synthèse historique récente, les fameuses tendances concernant la formulation des différentes théories des plaques correspondantes.

Dans le troisième chapitre nous avons proposé une solution analytique des plaques orthotropes simplement appuyées en utilisant une théorie **quasi-3D** hyperbolique de déformation en cisaillement avec effet d'étirement de l'épaisseur et les lois de comportement des plaques.

Le dernier chapitre est consacré aux commentaires des résultats obtenus par la validation du présent modèle sur des plaques orthotropes, afin de vérifier l'exactitude et l'efficacité de la présente théorie. Plusieurs facteurs ont été pris en considération au profit de cette étude (les propriétés matérielles, le rapport d'élanement et les conditions de chargement... etc.).

# *Chapitre I*

## *Généralités sur les matériaux composites*

## I Généralités sur les matériaux composites

### I.1 Introduction

Les matériaux composites ne sont pas une nouveauté, depuis la fin du 19<sup>ème</sup> siècle, ils sont employés dans la fabrication industrielle. De nos jours, ils sont très largement utilisés dans beaucoup de domaines car leur développement est rapide. Donc le 21<sup>ème</sup> siècle va être le siècle des matériaux composites.

Un matériau composite peut être défini d'une manière générale comme l'assemblage de deux ou plusieurs matériaux, l'assemblage final ayant des propriétés supérieures aux propriétés de chacun des matériaux constitutifs. On appelle maintenant de façon courante "matériaux composites" [41].

Aujourd'hui, il existe un grand nombre de type de matériau composite, il est possible de définir les classements des composites par rapport à leurs applications. Globalement, on classe les matériaux composites en deux catégories selon leurs performances : les composites à grande diffusion (**GD**) et les composites à haute performance (**HP**) [41].

**Les composites à grande diffusion (GD) :** représentent environ 95% des matériaux composites. Leurs caractéristiques mécaniques ou thermiques sont relativement faibles. Le taux volumique de renfort de ces composites avoisine 30%. Principalement, ils sont utilisés pour des raisons économiques et pour leur masse faible. Ce type de matériaux généralement à base de fibre de verre convient parfaitement aux grandes séries. Leurs principales applications se trouvent dans l'industrie des transports ainsi que les sports et les loisirs [41].

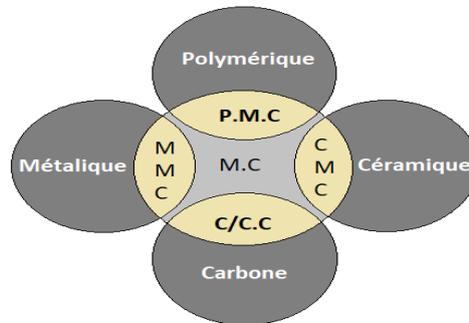
**Les composites à haute performance (HP) :** ont des caractéristiques mécaniques massives et / ou des caractéristiques thermiques supérieures à celles des alliages métalliques. Leurs propriétés dépendent des types de renfort et de matrice utilisés, de l'orientation des fibres ainsi que du taux volumique fibre. Les renforts sont plutôt des fibres longues et le taux volumique de fibre est supérieur à 50%. Ce type de matériau est principalement utilisé dans les industries aéronautiques. Le coût de la fabrication des matériaux hautes performances est plus élevé que celui des matériaux de grande diffusion [41].

### I.2 Classification des matériaux composites

Les composites sont classés en deux grandes classes : en fonction de type de la matrice et en fonction de type de renforts [42].

### I.2.1 En fonction de type de la matrice

La classification des matériaux composites peut être effectuée selon plusieurs façons. En fonction de type de la matrice, les matériaux composites peuvent se classer selon les quatre familles suivantes (**Figure I.1**) :



**Figure I.1** : Classification des matériaux composites en fonction de type de la matrice.

#### I.2.1.1 Composites à Matrice Polymérique (P.M.C)

Les composites avancés les plus courants sont les composites de matrice de polymère constitués d'un polymère (par exemple : époxy, polyester, uréthane) renforcé par des fibres de diamètre mince (par exemple : graphite, aramides, bore). Les composites de graphite/époxy sont environ cinq fois plus forts que l'acier sur une base de poids-pour-poids. Les raisons pour qu'ils sont les composites les plus communes de leur faible coût, haute résistance, et les principes de fabrication simple [43].

#### I.2.1.2 Composites à Matrice Métallique (M.M.C)

Les composites à matrice métallique, comme son nom l'indique, ont une matrice métallique. L'aluminium, le magnésium et le titane sont des exemples de matrices dans de tels composites. Les fibres typiques incluent le carbure de carbone et de silicium. Les métaux sont principalement renforcés pour augmenter ou diminuer leurs propriétés en fonction des besoins de conception. Par exemple, la rigidité élastique et la résistance des métaux peuvent être augmentées, et de grands coefficients de l'expansion thermique et des conductivités thermiques et électriques des métaux peuvent être réduites, par l'ajout de fibres telles que le carbure de silicium [43].

#### I.2.1.3 Composites à Matrice Céramique (C.M.C)

Les composites à matrice céramique sont une classe avancée de matériaux structuraux constitués de renforts métalliques/non métalliques incorporés dans la matrice céramique.

Les composites à matrice céramique sont largement utilisés dans les applications d'ingénierie où la température de fonctionnement se situe entre 800°C et 1650° [42].

#### **I.2.1.4 Composites à Matrice Carbon (C.M.C)**

Les composites à matrice carbone utilisent une matrice avec des fibres en carbone. Ces composites sont utilisés dans des environnements à très haute température allant jusqu'à 3315°C, et sont 20 fois plus résistants et 30% plus légers que les fibres de graphite [43].

### **I.2.2 En fonction de type de renforts**

La classification des composites peut être effectuée selon diverses façons. Une manière simple consiste à les classer en fonction de type de renforts. Les composites sont donc divisés en quatre catégories suivantes (**Figure I.2**) :

- Composites à renforts de particules ;
- Composites à renforts de fibres ;
- Composites à renforts de paillettes ;
- Composites stratifiés.

#### **I.2.2.1 Composites à renforts de fibres**

Les composites de fibres sont des matériaux composés d'une matrice dans laquelle divers types de fibres sont ajoutés. Le comportement des composites de fibres est beaucoup influencé par le type de fibres et leur nature. Il existe deux grands types de fibres ; les macros- fibres et les microfibrilles. Les macros-fibres sont ajoutées à la structure afin d'augmenter sa ténacité et les microfibrilles sont ajoutées afin d'améliorer la résistance à la traction [44].

#### **I.2.2.2 Composites à renforts de paillettes**

Les paillettes ont une dimension très faible par rapport aux autres. La dispersion de ces particules minces est généralement aléatoire. Cependant, les paillettes peuvent être rangées parallèlement l'une par rapport à l'autre afin d'avoir des propriétés plus uniformes dans le plan [44].

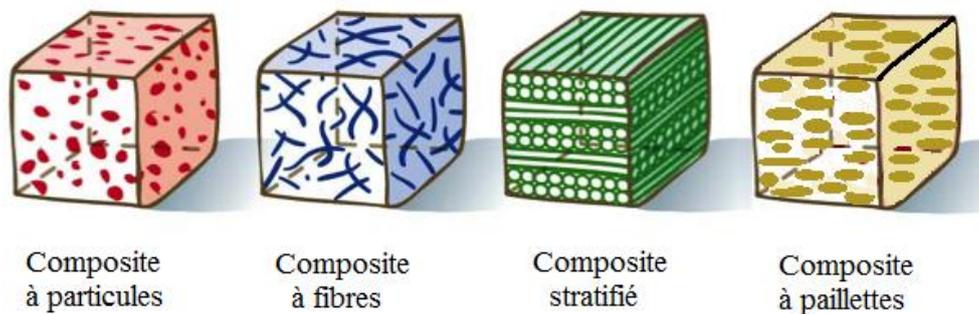
#### **I.2.2.3 Composites à renforts de particules**

Les matériaux composites de particules consistent à mettre des particules d'un ou plusieurs matériaux en suspension dans une matrice. En fait, le meilleur exemple est sûrement le béton. Le béton est composé de particules de sable et de gravier et elles sont liées ensemble par la

réaction chimique du ciment et de l'eau qui donne la pâte (matrice). Le béton est donc un composite de particules très complexes puisqu'une multitude de paramètres influence ses propriétés. Plusieurs ouvrages de référence traitent de ces paramètres [44].

#### I.2.2.4 Composites stratifiés

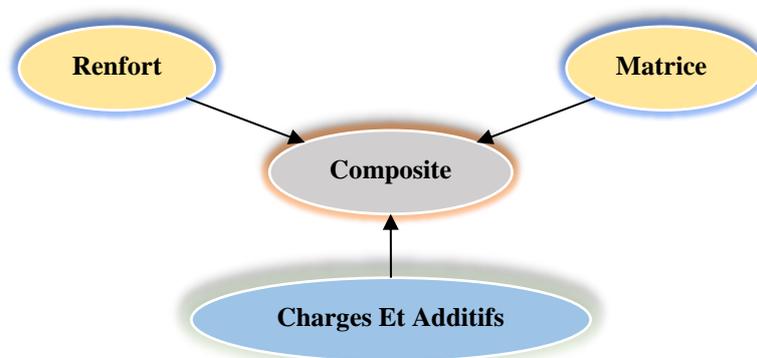
Un stratifié se compose d'au moins deux couches minces de matériau. Les couches peuvent être constituées de différents matériaux monolithiques comme dans les métaux plaqués ou du même matériau composite empilé selon différentes orientations comme pour des stratifiés composites à renforts de fibres longues. Ce dernier devient une classe hybride du composite comportant à la fois le composite à renfort de fibres et la technique de stratification [44].



**Figure I.2 :** Classification des matériaux composites en fonction de type de renforts.

### I.3 Constituants des matériaux composites

La réalisation d'un matériau composite nécessite donc l'association d'au moins deux composants : le renfort et la matrice, qui doivent être compatibles entre eux et se solidariser. Pour cela, un agent de liaison, appelé interface, est nécessaire. Des charges et des additifs peuvent être ajoutés au composite sous forme d'éléments fragmentaires, de poudres ou liquide, afin de modifier une propriété de la matière à laquelle on l'ajoute (**Figure I.3**) [45].



**Figure I.3 :** Constituants d'un matériau composite.

### I.3.1 Les matrices

Dans un grand nombre de cas, la matrice constituant le matériau composite est une résine polymère. Les résines polymères existent en grand nombre et chacune à un domaine particulier d'utilisation. Dans les applications où une tenue de la structure aux très hautes températures est requise, des matériaux composites à matrice métallique, céramique ou carbone sont utilisés. Dans le cas des matériaux en carbone des températures de 2200°C peuvent être atteints. La classification des types de matrices couramment rencontrées est donnée sur la (Figure I.4) [46].

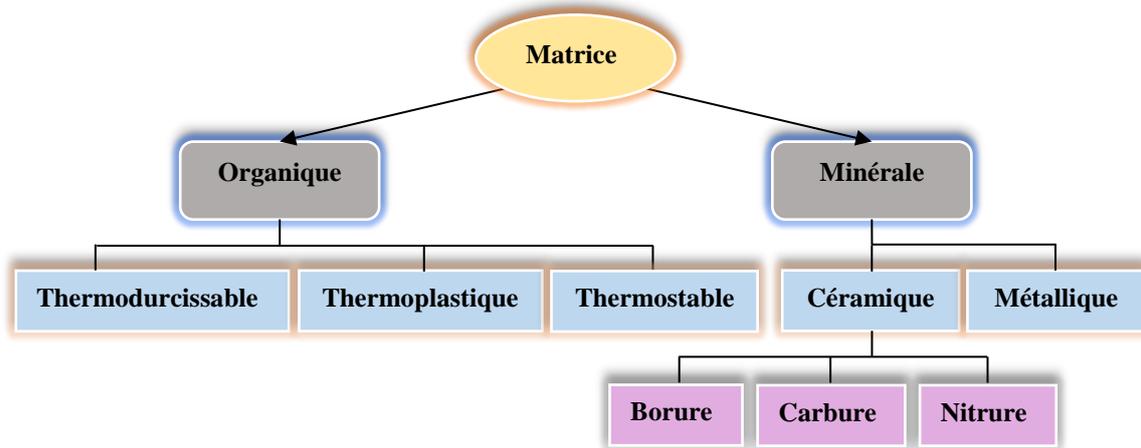


Figure I.4 : Classification des types de matrices.

#### I.3.1.1 Organique

Les gains potentiels apportés par ces matériaux sont connus et nombreux : réduction de la masse, intégration de fonctions, réduction des coûts, etc., ils doivent également répondre à des critères de durabilité sur du long terme et leur utilisation optimale, dans des conditions extrêmes d'environnement "température, humidité, pollutions éventuelles" et de sollicitations "chargements statique et dynamique", nécessite de se doter d'une méthodologie validée de caractérisation et de prévision des comportements en utilisation. Le comportement à long terme des CMO dépend de leur composition (matrice, renfort), des additifs "stabilisants, anti UV, charges minérales", de la pureté, de la masse moléculaire des monomères ainsi que de la nature des renforts et de l'orientation des fibres [47].

##### I.3.1.1.1 Les résines thermodurcissables (TD)

Les résines thermodurcissables sont les plus couramment utilisées pour la fabrication de pièces en matériaux composites. Elles se répartissent en différentes familles dont chacune possède une composition chimique particulière. Parmi ces matrices, on distingue principalement :

- **Polyesters** : sont largement utilisées dans les applications composites. Ce sont des polycondensats de diacides saturés et insaturés avec des polyalcools de type glycol. On distingue de nombreuses variétés de résines polyesters mais les plus utilisées sont les orthophtaliques et isophtaliques, le durcissement d'une résine polyester est appelé polymérisation ou réticulation [48].
- **Epoxydes** : sont utilisées dans la fabrication de composites hautes performances. Elles sont obtenues par condensation de bisphénol avec l'épichlorhydrine du glycérol en milieu basique. Les résines époxydes sont peu utilisées dans le secteur de l'automobile pour les pièces de grandes séries, du fait de leur coût élevé.
- **Vinylesters** : résultent de l'association de résines époxydes et d'acide méthacrylique. Essentiellement utilisées dans le domaine anticorrosion car elles sont particulièrement résistantes aux agressions chimiques de toutes sortes, elles offrent aussi des propriétés mécaniques supérieures aux résines polyesters et sont de ce fait utilisées dans divers domaines tels que le sport, le nautisme, l'automobile, la protection balistique, etc.
- **Phénoliques** : sont la résultante d'une réaction de polycondensation entre un phénol et un aldéhyde formol avec élimination d'eau. Les phénols confèrent à la résine un classement au feu et fumée sans ajout d'additifs spécifiques.
- **Polyuréthanes** : sont des polycondensats appartenant à la famille des plastiques alvéolaires therm durcissables qui sont des matériaux à base de polymères constitués d'une phase gazeuse dispersée dans une phase solide plastique. Les polyuréthanes peuvent se décliner en différents produits :
  - Polymères à chaînes linéaires longues ou courtes ;
  - Résines réticulées ;
  - Mousses therm durcissables souples ou rigides ;
  - Vernis, peintures, adhésifs.
- **Polyimides** : sont des résines thermostables qui conservent leurs caractéristiques à des températures très élevées : à environ 250°C sur de longues périodes (1 000 heures) et à 500 °C sur de courtes périodes (1 heure) et à 1 000°C pendant quelques secondes. Leur température d'utilisation peut varier de 300° à 320°C et leur structure moléculaire est infusible et insoluble.

### I.3.1.1.2 Les résines thermoplastiques (TP)

Les résines thermoplastiques occupent une place de plus en plus importante dans la fabrication des matériaux composites. Economiques et moins polluantes lors de leur transformation, elles offrent une bonne résistance à l'impact et permettent des cadences de production élevées grâce à des cycles relativement courts. Plus facilement recyclables que les résines thermodurcissables, leurs propriétés restent généralement plus faibles, exceptées pour quelques polymères très techniques et forcément plus onéreux. Les principales résines utilisées pour la fabrication de pièces en composites thermoplastiques, sont résumées :

- Polyamide (PA) : tenue au choc, bonne résistance à la fatigue et aux hydrocarbures ;
- Polytéréphtalate éthylénique et butylénique (PET, PBT) : bonne rigidité et ténacité ;
- Polycarbonate (PC) : tenue au choc ;
- Polysulfure de phénylène (PPS) : résistance à l'hydrolyse ;
- Polyoxyméthylène (POM) : bonne tenue à la fatigue ;
- Polysulfurés (PSU et PPS) : bonne stabilité chimique et à l'hydrolyse, peu de fluage ;
- Polypropylène (PP) : peu onéreux et assez stable en température, mais combustible [48].

**Tableau I.1** : Caractéristiques mécaniques des résines thermodurcissables et thermoplastiques [48].

Résines (TD) et (TP)	Densité g/cm <sup>3</sup>	Résistance traction (MPa)	Module flexion (GPa)	Tenue chaleur en continue (°C)
Polyester	1.2	50-60	3	120
Vinylester	1.15	70-80	3.5	140
Phénolique	1.2	40-50	3	120-150
Epoxyde	1.1-1.4	50-90	3	120-200
Polyuréthane	1.1-1.5	20-50	1	100-200
Polyimide	1.3-1.4	30-40	4	250-300
Polypropylène PP	0.9	20-30	1-1.6	58-115
Polycarbonate PC	1.2	60-70	2.2-2.6	120
Butylénique PBT	1.3	45-55	2.2-2.5	80-110
Éthylénique PET	1.3	55-75	2-2.2	105-120
Polyoxyméthylène POM	1.4	60-70	7-9	95-105
Polyamide PA	1.1	60-90	6-9	80-120
Polysulfurés PSU	1.5	55-90	2.3-2.6	150-200
Polyamide-imide PAI	1.3-1.4	195	4.9	275
Polyéther-imide PEI	1.5	105	3	170
Polyéther-sulfone PES	1.6	85	2.6	180
Polyéther-éther-cétone PEEK	1.5	100	3.7	>240

### I.3.1.1.3 Les résines thermostables

Les résines thermostables se distinguent des autres résines, précédemment considérées, essentiellement par leurs performances thermiques qui conservent leurs propriétés mécaniques pour des températures plus élevées que 200°C. Dans la pratique nous retrouvons pour ces résines les deux grandes familles des résines thermoplastiques et thermodurcissables. Les résines thermostables sont développées surtout dans les domaines de l'aviation et de l'espace, où les laboratoires cherchent à mettre au point de nouvelles résines. Parmi les résines thermostables [49].

### I.3.1.2 Minérales

#### I.3.1.2.1 Métalliques

Les matrices métalliques peuvent être utilisées à des températures plus élevées que les composites plastiques. La température exacte dépend du type de métal composant la matrice, mais elle est néanmoins plus élevée que celle pouvant être employée avec le métal seul, dans des conditions égales.

La température maximale est celle du fluage (déformation sous charge constante) au-delà de cette température, car la matrice n'est plus capable de transférer la charge sur les fibres. Afin de réduire au maximum le poids, la matrice métallique la plus courante est celle en alliage d'aluminium, bien que la température de fonctionnement autorisée ne soit pas aussi élevée.

Des composites à matrice à base de cuivre, de nickel, de titane et de magnésium ont été étudiés. Leur principale limite est le risque de réactions chimiques avec les fibres et, par conséquent, la dégradation des propriétés mécaniques attendue [50].



**Figure I.5 :** Exemples d'application des composites à matrice métallique.

#### I.3.1.2.2 Céramiques

Les composites à matrice céramique sont les plus prometteurs en termes de caractéristiques mécaniques et de résistance à la température élevée. Ils sont actuellement à

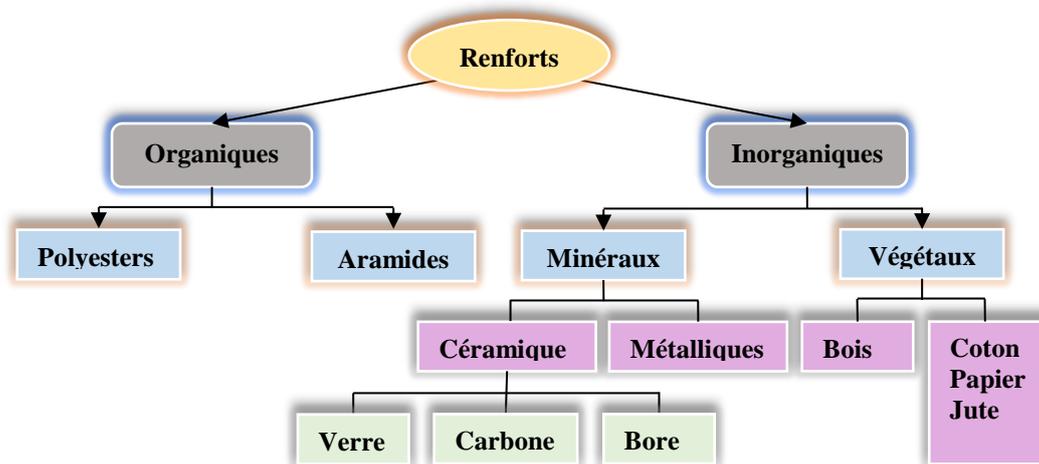
peine utilisés parce que leur technologie n'est pas suffisamment développée et à cause de la difficulté de distribuer uniformément les fibres sur la matrice, éliminant ainsi sa porosité interne. Les matrices utilisées jusqu'à présent sont principalement de l'aluminium ou de l'oxyde de silicium [50].



**Figure I.6 :** Exemples d'application des composites à matrice céramique.

### I.3.2 Les renforts

Les renforts assurent les propriétés mécaniques du matériau composite et un grand nombre de fibres sont disponibles sur le marché en fonction des coûts de revient recherchés pour la structure réalisée. Les renforts constitués de fibres se présentent sous les formes suivantes : linéique (fils, mèches), tissus surfaciques (tissus, mats), multidirectionnelle (tresse, tissus complexes, tissage tri directionnel ou plus). La classification des types de renforts couramment rencontrés est indiquée sur la (Figure I.7) [46] :

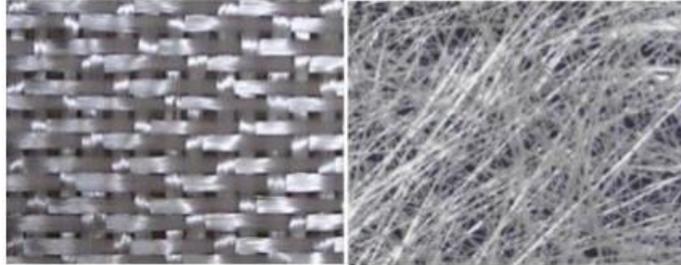


**Figure I.7 :** Classification des types de renforts.

#### I.3.2.1 Fibres de verre

Les fibres les plus employées sont les fibres de verre. Elles constituent le renfort essentiel des composites de grande diffusion. Elles sont obtenues à partir du sable (silice) et d'additifs (alumine, carbonate, magnésie, oxyde de bore). On distingue trois types de fibres de verre :

- **E** : pour les composites de grande diffusion et les applications courantes ;
- **R** : pour les composites hautes performances ;
- **D** : pour la fabrication de circuits imprimés (propriétés diélectriques) [51].

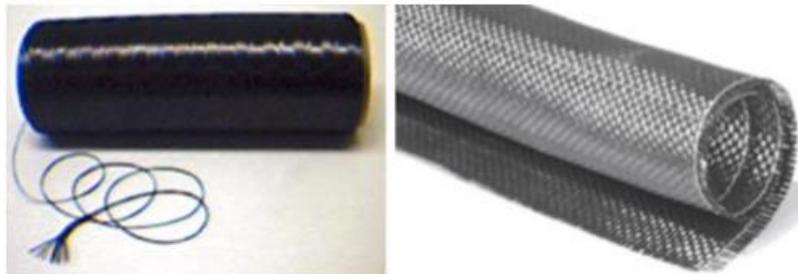


**Figure I.8** : Fibres de verre.

### I.3.2.2 Fibres de carbone

C'est la fibre la plus utilisée dans les applications hautes performances. Elle est obtenue par carbonisation de la fibre de Polyacrylonitrile. Selon la température de combustion, on distingue deux types de fibres :

- Fibres haute résistance classique (**HR**) : pour une combustion de 1000 à 1500 °C ;
- Fibres haut module (**HM**) : pour une température de combustion de 1800 à 2000 °C.

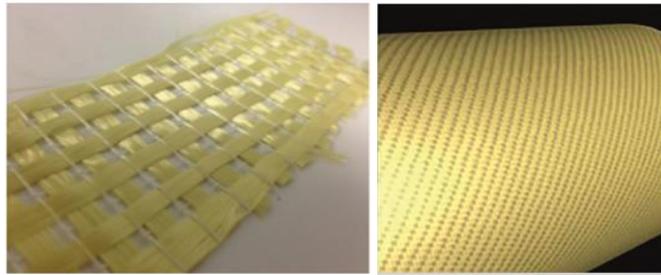


**Figure I.9** : Fibres de carbone.

### I.3.2.3 Fibres d'aramide

Souvent appelée KEVLAR, la fibre d'aramide est issue de la chimie des polyamides aromatiques. Il est possible de trouver deux types de fibres d'aramide de rigidités différentes :

- Les fibres à faible module : utilisées pour les câbles et les gilets pare-balles ;
- Les fibres à haut module : employées dans le renforcement pour les composites hautes performances [51].



**Figure I.10 :** Fibres d'aramide.

#### **I.3.2.4 Fibres de bore**

Fibres de haut module et insensibles à l'oxydation à hautes températures, elles sont obtenues par dépôt en phase gazeuse sur un substrat en tungstène [52].

#### **I.3.2.5 Fibres de silice (ou de quartz)**

Elles sont produites comme le verre, par fusion, et sont essentiellement utilisées pour leur haute tenue chimique et thermique dans les tuyères pour moteur de fusée [52].

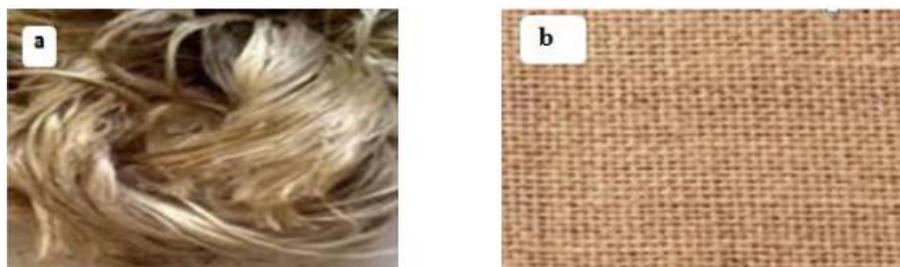
#### **I.3.2.6 Fibres de polyéthylène de haut module**

Les composites à fibres de polyéthylène se limitent aux applications balistiques et de blindage. Leur champ d'application est limité par leurs principales faiblesses :

- Mauvaise résistance à la température (fluage dès 90°C) ;
- Mauvaise adhérence entre les fibres et la matrice ;
- Très bonne résistance à la traction mais une mauvaise mouillabilité [53].

#### **I.3.2.7 Fibres naturelles**

Les fibres naturelles sont celles qui existent déjà dans la nature et qui peuvent être obtenues avec différents procédés, tant mécaniques que chimiques. Ils peuvent être approximativement classés selon leur origine : les fibres végétales, qui sont toutes ces fibres naturelles de lignocelluloses, les fibres animales (laine) et les fibres minérales (amiante) [50].



**Figure I.11 :** Fibre naturelle : a) - jute, b) - le jute tissé.

### I.3.2.8 Fibres d'acier

Les fibres d'acier au carbone représentent un type de fibre différent utilisé au cours des dernières années pour la production de matériaux composites à matrice de polymère renforcé d'acier (SRP) ou de coulis renforcé d'acier (SRG). Les tissus de fibres d'acier à haute résistance utilisés pour le renforcement structurel sont fabriqués à partir de filaments d'acier présentant une résistance mécanique extrêmement élevée. Les tissus en fibres d'acier ne sont disponibles sur le marché aujourd'hui qu'avec une géométrie mono-axiale en raison des grandes dimensions des filaments, ce qui rend difficile la production de tissus de chaîne et de trame fabriqués à partir de filaments d'acier [50].

### I.3.2.9 Fibres de Polymères

Les polymères biodégradables à base d'acide poly-lactique (**PLA**) sont utilisés pour des composites à fibres et à matrice **PLA** (composites **PLA/PLA**) pour des applications médicales d'ostéosynthèse ; ils pourraient constituer de nouvelles alternatives aux fibres existantes [50].

### I.3.2.10 Fibres de basaltes

Les fibres sont des fibres très fines de basalte, une roche volcanique faite de plagioclases, pyroxènes et olivines. Les fibres de basalte ont un diamètre allant de 9 à 13  $\mu\text{m}$  et sont idéales pour remplacer les fibres d'amiante, les fibres de basalte sont d'excellents isolants thermiques et acoustiques, et elles préservent leurs propriétés mécaniques même à des températures élevées et sont aussi très stables chimiquement (dans les milieux acides) (**Figure I.12**).

Les fibres de basalte sont assez bon marché, en dépit de leurs caractéristiques, qui sont nettement mieux que d'autres matériaux similaires utilisés aujourd'hui. En ce qui concerne la conduction de la chaleur, les températures d'application des produits en fibre de basalte sont sensiblement plus élevées (de 260 à 900  $^{\circ}\text{C}$ ) [50].



**Figure I.12** : Fibre de basalte.

**Tableau I.2** : Caractéristiques mécaniques principales des fibres de renfort [48].

Type de fibres	Densité g/cm <sup>3</sup>	Module en traction GPa	Résistance à la rupture MPa	Allongement %	Coefficient de dilatation 10 <sup>-6</sup> /°C
Verre	2.54	72	2800	2	7.2
Carbone HR	1.76	230	3290	1.4	3
Carbone HM	1.81	399	2450	0.5	- 0.5
Aramide	1.44	130	2340	2.8	- 4
Bore	2.6	414	2900	0.8	4.5
Polyéthylène	0.97	119	2625	4	10
Basalte	2.8	89	4800	3.15	8
Sisal	1.4	15	770	2.2	4
Lin	1.49	10	800	3	4
Silicium	3.18	428	3100	0.72	5

### I.3.3 Les charges et les additifs

Différents produits peuvent être incorporés à la résine pour lui conférer des caractéristiques particulières ou en réduire le coût.

L'addition de ces produits a pour fonction soit d'améliorer les caractéristiques mécaniques et physiques du produit fini, soit d'en faciliter la mise en œuvre. Nous donnons dans ce dessue des exemples de charges et d'additifs [49].

#### I.3.3.1 Les charges

##### I.3.3.1.1 Charges renforçantes

L'objet de l'incorporation de charges renforçantes est d'améliorer les caractéristiques mécaniques de la résine. Ces charges peuvent être classées suivant leur forme géométrique en deux catégories :

- **Charges sphériques** : L'intérêt essentiel de ces charges réside dans leur forme sphérique qui évite les concentrations de contraintes et par conséquent, diminue la susceptibilité à la fissuration de la matrice par rapport à des charges non sphériques. Elles se présentent sous forme de sphères, appelées généralement microbilles ou microsphères. Les microbilles de verre creuses représentent plus de 99 % des charges sphériques utilisées [49].
- **Charges non sphériques** : Parmi les charges renforçantes non sphériques, le mica est le matériau le plus utilisé. Il est alors incorporé sous forme d'écailles de dimensions de 100 à

500  $\mu\text{m}$ , et d'épaisseur de 1 à 20  $\mu\text{m}$ . Le mica est ajouté à des résines thermoplastiques ou thermodurcissables, pour des applications électriques ou électroniques [49].

### I.3.3.1.2 Charges non renforçantes

Les charges non renforçantes ont pour rôle soit de diminuer le coût des résines en conservant les performances des résines, soit d'améliorer certaines propriétés des résines [49].

Ces charges sont extraites de roches ou de minerais, d'où leur faible coût. Généralement, l'incorporation de ces charges conduit à :

- Une augmentation de la masse volumique de la matrice, du module d'élasticité, de la dureté, de la viscosité et de la stabilité dimensionnelle ;
- Une diminution du prix et de la résistance à la traction et à la flexion.

### I.3.3.2 Les additifs

Les additifs se trouvent en faible quantité (quelques % et moins) et interviennent comme :

- **Lubrifiants et agents de démoulage** : Ces additifs ont pour objet de faciliter le façonnage de la résine et de réduire la tendance de la résine à adhérer aux moules et mandrins [49].
- **Pigments et colorants** : Les pigments sont des produits insolubles se présentant sous forme de poudres ou de paillettes. À partir de ces pigments, il est possible d'obtenir des pâtes colorantes constituées de dispersions de pigments dans une pâte (résine, plastifiant). Leur emploi est limité, du fait d'une mauvaise tenue chimique et thermique [49].
- **Agents anti-retrait et agents de fluage** : La polymérisation des résines conduit à une diminution des distances interatomiques du monomère initial. Il s'ensuit un retrait de la résine polymérisée, qui peut aboutir à un mauvais état de surface, il est souvent nécessaire d'ajouter des produits spécifiques anti retrait, qui diminuent le phénomène de retrait [49].

## I.4 Les matériaux composites structuraux

Les matériaux composites, peuvent aussi être caractérisés par leur architecture. De ce fait, on distingue trois principales architectures au sein des pièces de matériaux composites couramment citées dans la littérature :

- Les monocouches.
- Les stratifiés.
- Les sandwichs.

### I.4.1 Les Monocouches

Les monocouches représentent l'élément de base de la structure composite. Les différents types de monocouches sont caractérisés par la forme du renfort : à fibres longues (unidirectionnelles UD, réparties aléatoirement), à fibres tissées, à fibres courtes [51].

Ces structures sont les plus courantes. La pièce est constituée d'un empilage de couches de renfort appelées plis. Il est possible de mixer différentes couches de renfort en fonction des propriétés mécaniques souhaitées.

Généralement les structures monolithiques sont réservées à des pièces de faibles épaisseurs (entre 3 et 5 mm) mais il est possible d'avoir des épaisseurs de pièces plus importantes en respectant certaines étapes intermédiaires de stratification afin de minimiser au maximum les phénomènes de retrait [48].

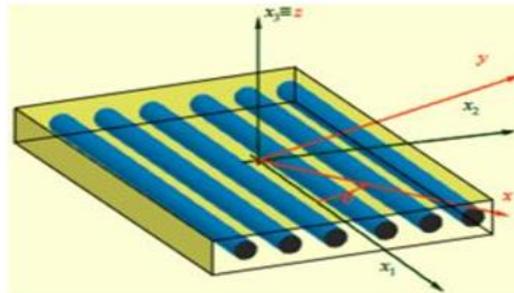


Figure I.13 : Pli à Renforcement unidirectionnel.

### I.4.2 Les Stratifiées

Les structures composites stratifiées sont constituées de couches successives de renforts imprégnés de résines. Les couches sont également nommées plis. Les structures stratifiées réalisées à partir de matériaux composites sont constituées d'empilements de nappes unidirectionnelles ou bidirectionnelles. Ces nappes sont formées de renforts en fibres longues liées par de la résine. Le rôle du renfort est d'assurer la fonction de résistance mécanique aux efforts. La résine assure quant à elle la cohésion entre les renforts de manière à répartir les sollicitations mécaniques. Les pièces structurelles sont réalisées par empilement de nappes en optimisant les directions des renforts en fonction des charges qu'elles doivent subir.

Une structure stratifiée est schématisée par un empilement de monocouches homogènes dans l'épaisseur et d'interfaces inter-laminaires. La couche et l'interface sont les deux entités appelées méso-constituants, comme illustré sur la (Figure I.14), qui forment les bases des modèles dédiés à l'étude des structures stratifiées. En élasticité, les couches sont parfaitement liées et l'interface ne joue aucun rôle particulier. L'étude des composites jusqu'à la phase ultime de la rupture montrera l'utilité d'employer un modèle d'interface [46].

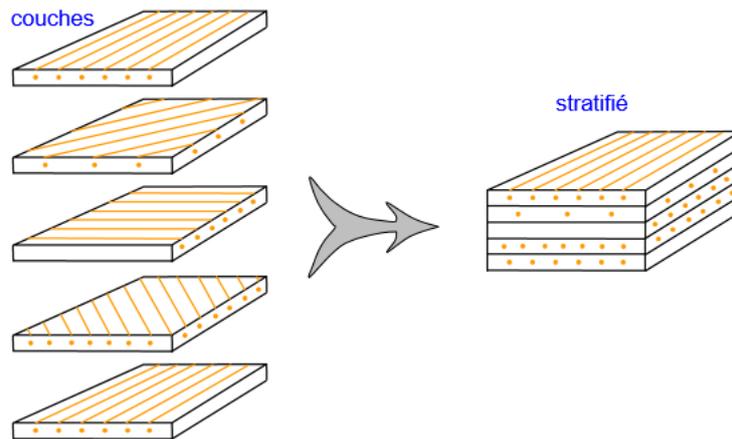


Figure I.14 : Matériaux composite stratifié.

### I.4.3 Les Sandwichs

Les structures composites subissant des sollicitations la flexion ou la torsion sont généralement construites en matériaux sandwichs. Une structure sandwich est composée d'une âme et de deux peaux en matériaux composites. L'assemblage est réalisé par collage à l'aide d'une résine compatible avec les matériaux en présence.

**Les noyaux (les âmes) :** il existe un grand nombre de matériaux qui peuvent être utilisés comme noyau. Ces matériaux sont divisés en trois classes :

1. Matériau solide à faible densité : balsa et mousse ;
2. Matériau à haute densité augmentés en forme cellulaire : nid d'abeilles ;
3. Matériau à haute densité augmentés sous la forme ondulée : feuilles ondulées.

**Les peaux :** sont généralement constituées de structures stratifiées. Une large variété de matériaux est utilisée comme peau : les feuilles de métaux comme l'aluminium, le titane...etc.

Ces structures ont une grande rigidité en flexion et torsion. L'âme de la structure sandwich résiste principalement aux contraintes de cisaillement et de compression hors plan, les peaux inférieures et supérieures supportent quant à elles les efforts dans leur plan [46].

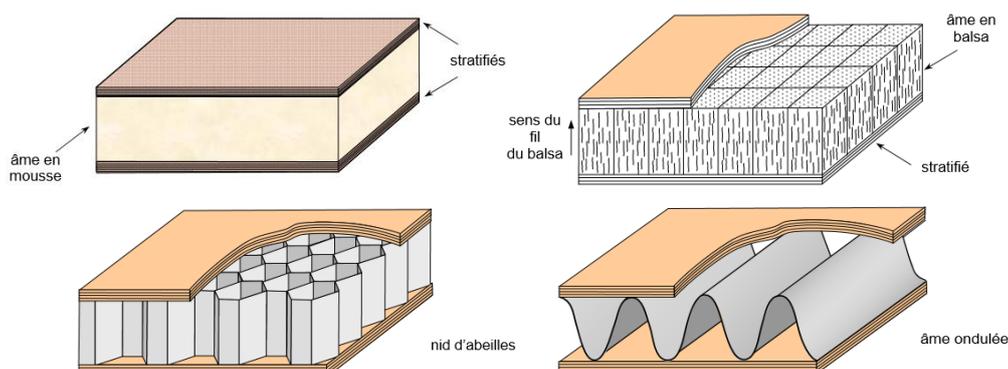


Figure I.15 : Structure composite sandwich.

## I.5 Domaines d'application des matériaux composites

Les matériaux composites apportent un gain de masse important par rapport à leurs caractéristiques mécaniques. La mise en œuvre de ces matériaux s'effectue à travers des procédés qui produisent la pièce en même temps que le matériau composite. Les composites entrent aujourd'hui dans pratiquement tous les domaines d'applications possibles : Piscines, bassins, bâtiments, les transports aériens, maritime, routier, ferroviaire, sports et loisirs. ...etc.

### I.5.1 Les composites dans la construction civile

L'utilisation des composites renforcés de fibres de carbone pourra se développer dans le secteur de la construction civile lorsque leur prix deviendra inférieur à 30F/kg.

Les composites utilisés dans le bâtiment peuvent être :

- À matrice therm durcissable (**TD**) (polyester, vinylester, phénolique, polyuréthane) ;
- À matrice thermoplastique (**TP**) ; ces derniers sont en nette progression ;
- Les renforts sont en fibres de verre tissées ou non.

Les composites permettent de mieux protéger les bâtiments contre les agressions extérieures grâce à leurs qualités :

- De résistance à la corrosion ;
- D'étanchéité et d'isolation thermique (panneaux isothermes) ;
- D'isolation phonique ;
- De bonne tenue aux variations climatiques, de température et d'humidité.

### I.5.2 Les composites dans l'automobile

Le secteur de l'automobile utilise pour 95% des composites à matrice polyesters et fibres de verre, mais devrait intégrer massivement les composites thermoplastiques. Les composites les plus couramment utilisés dans le secteur automobile sont du type (**GD**).

Les composites permettent une plus grande liberté de conception :

- L'intégration de fonctions, c'est à dire la conception de pièces complexes multi-usages, réduit le nombre des pièces nécessaires à la réalisation de sous-ensemble.
- Les possibilités de diversification des séries automobiles sont accrues, car ne nécessitant que des investissements faibles.

Les pièces en composite facilitent l'entretien de la voiture grâce à la facilité du montage et du démontage permise par la conception de formes complexes, le nombre de pièces et de

liaisons mécaniques est réduit (pare-chocs) et grâce au retour automatique des pièces à leur forme initiale en cas de choc léger, dans la limite de la déformation élastique du matériau [53].

### I.5.3 Les composites dans la construction électrique

Le secteur de la construction électrique et électronique utilise massivement des composites (GD), essentiellement sous forme de semi-produits SMC comprimés à matrice thermodurcissable (polyester) et renforcés par des fibres de verre (courtes ou longues).

En utilisant les propriétés remarquables des matériaux composites, la construction électrique réalise des équipements fiables, aux fonctions multiples et longues durées de vie.

Les caractéristiques propres aux matériaux composites permettent de répondre à des besoins liés à la sécurité, tels que :

- Leur propriété d'isolant électrique pour les supports de rail, les noyaux de transformateurs, les coupe-circuits ;
- Leur transparence aux ondes électromagnétiques pour les radômes (guidage d'ondes) ;
- Leur résistance au feu (boîtiers de disjoncteurs) ;
- La résistance aux températures élevées des composites à matrice polyesters (radiateurs d'intérieur surmoulés sur insert métallique) [53].

### I.5.4 Les composites dans la construction industriel

Dans la construction industrielle, les fibres de carbone pourront être utilisées à la fois comme renfort et comme capteur, et seront associées à des résines polyesters ou époxy.

Les composites utilisés pour la fabrication des tuyauteries sont constitués par :

- Une matrice polyester ou époxy ;
- Des renforts en fibres de verre tissées ou fibres de carbone.

Pour la construction des réservoirs industriels, ils sont constitués par une matrice thermodurcissable, ou thermoplastique, renforcée de fibres de verre ou de carbone.

Les composites facilitent le travail du concepteur grâce à leurs propriétés :

- D'adaptabilité à des formes complexes permettant d'intégrer, dès le stade de la création, des fonctions de cadres formant poteaux et de charpentes des bâtiments, de toiture pour la couverture de réservoir d'eau potable ;
- La facilité d'assemblage des pièces (charpente pour un bâtiment de test informatique) ;
- L'allègement des structures autoportantes de grande taille (cheminées, silos). [54]

### I.5.5 Les composites dans les équipements de sports et loisirs

Les sports et loisirs utilisent des composites (**HP**) avec un taux de renforts de plus de 70% :

- À matrice époxy et fibres de verre avec un taux de renforts pouvant atteindre 70%, l'époxy assurant, en outre, une fonction adhésive entre les différents constituants ;
- À matrice polyamide et fibres de carbone ;
- À tissus en Twintex.

Les composites permettent d'augmenter sur mesure les performances et la fiabilité des articles de sports. Ils permettent d'accroître la longévité des articles de sport, sans réparation, pendant toute leur durée de vie (de 1 à 7 ans) grâce à leurs :

- Résistance mécanique (raquettes, skis de Rossignol) ;
- Composites thermoplastiques, et résistance aux chocs (raquettes) ;
- Rigidité (clubs de golf, battes de base-ball) ;
- Résistance à l'humidité (toboggans aquatiques) [55].

### I.5.6 Les composites dans la construction nautique

Le moulage au contact représente encore 85% des composites utilisés dans la construction nautique. Parmi les composites utilisés dans l'industrie nautique :

- Les composites à matrice polyester et fibres de verre ;
- Les composites à matrice époxy et fibres de carbone ;
- Les composites à matrice polyuréthane et fibres de verre ;
- Les composites à matrice polypropylène et fibres courtes [54].

L'allègement des structures est le principal apport des composites utilisées dans la construction nautique, tels que les bateaux commerciaux de transport de fret et de passagers, des dragueurs de mines et des petites embarcations de tourisme et les bateaux de compétition.

### I.5.7 Les composites dans l'aéronautique

L'aéronautique utilise principalement des composites (**HP**) constitués d'une matrice époxy associée à un taux élevé de renforts en fibres de carbone, pour la fabrication de pièces de structure primaire des appareils en raison de leur légèreté et de leur souplesse de forme.

Les composites facilitent et réduisent la maintenance des appareils grâce à leurs :

- Résistance à la corrosion ;
- Résistance à la propagation des fissures ;
- Excellente tenue à la fatigue [55].

### I.5.8 Les composites dans le secteur médical

Les applications des composites aux secteurs médical et de la sécurité sont très récentes et concernent très peu les solutions traditionnelles, mais plutôt les composites :

- À matrice époxy et fibres de carbone, ou d'aramide ;
- À matrice thermoplastique et fibres longues de verre, d'aramide ou de carbone.

L'utilisation des composites permet d'augmenter la fiabilité et la précision des instruments grâce à une :

- Meilleure résistance aux chocs ;
- Grande rigidité pour les instruments chirurgicaux de précision (guides de perçage auparavant en Inox, prothèses) ;
- Bonne résistance à la corrosion (prothèses, brancards) [53].

### I.6 Conclusion

Pour beaucoup d'applications structurales, les matériaux composites apparaissent comme de sérieux concurrents des métaux du fait principalement de leur légèreté qui permet un gain de poids, de leur insensibilité à la corrosion saline, la résistance à l'oxydation et enfin l'isolation thermique et électrique. Du fait de leur importance, dans ce premier chapitre, on a fait appel aux définitions et des notations liées aux matériaux composites, dans le but de donner une vision assez large des différents constituants d'un matériau composite et leurs propriétés mécaniques. Nous avons aussi discuté sur leur développement et leurs domaines d'application dans la construction civile, industrielle et aérospatiale.

L'utilisation des composites dans les différents domaines de construction montre que c'est une excellente alternative aux solutions traditionnelles.

## *Chapitre II*

### *Lois de comportement et les différentes théories des plaques*

## II Lois de comportement et les différentes théories des plaques

### II.1 Introduction

Les matériaux orthotropes présentent actuellement un intérêt important dans le domaine des applications industriels modernes tels que le domaine de la mécanique, de l'aéronautique, du génie civil et de la biomécanique vu leur dureté leur légèreté, leur super élasticité et leur durée de vie [56].

Notre objectif à travers ce chapitre, est de présenter les différentes théories des plaques, progressant de la théorie classique de Kirchhoff (plaques minces) à la théorie de déformation en cisaillement de premier ordre des plaques de Mindlin (plaques moyennement épaisses) [5], et enfin, à la théorie de troisième ordre de Reddy (plaques épaisses) [24, 25]. Ces deux dernières théories des plaques permettent de clarifier l'effet de la déformation en cisaillement transversale qui a été négligée dans la théorie des plaques de Kirchhoff [1, 2]. En utilisant le principe des déplacements virtuels, les équations de mouvement et les conditions aux limites qui sont dérivées pour les plaques d'épaisseur uniforme sur la base des hypothèses cinématiques des théories des plaques évoquées ci-dessus.

### II.2 Lois de comportements des matériaux

Les champs des déformations et des contraintes dans un milieu sont liés par des lois appelées lois de comportement, caractérisant le comportement mécanique d'un milieu. Cependant, la loi de comportement est exprimée par la loi de Hooke qui a été généralisée par Cauchy (1789-1857) [43].

Un matériau possède un comportement élastique linéaire s'il existe une relation linéaire biunivoque entre le tenseur des contraintes et le tenseur des déformations :

$$\{\sigma_{ij}\} = [C_{ij}]\{\varepsilon_{ij}\} \quad (\text{II.1})$$

Où  $\{\sigma_{ij}\}$  et  $\{\varepsilon_{ij}\}$  représentent les vecteurs des contraintes et des déformations, respectivement. Néanmoins,  $[C_{ij}]$  représente le tenseur des rigidités ou d'élasticité, est un tenseur du quatrième ordre, Ce tenseur est donc défini par 36 composantes indépendantes, la relations de comportement s'écrit en notation vectorielle sous la forme suivante [46] :

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} \quad (\text{II.2})$$

### II.2.1 Matériau triclinique

Le matériau qui a vingt et un constantes élastiques indépendantes à un point est appelé un matériau triclinique. Une fois que ces constantes sont trouvées pour un point particulier, la relation de contrainte et de tension peut être développée à ce point.

Notez que ces constantes peuvent varier d'un point à l'autre si le matériau n'est pas homogène. Même si le matériau est homogène (ou supposé être), il faut trouver ces vingt et un constantes élastiques analytiquement ou expérimentalement. Cependant, de nombreux matériaux naturels et synthétiques possèdent la symétrie matérielle, c'est-à-dire que les propriétés élastiques sont identiques dans les directions de symétrie parce que la symétrie est présente dans la structure interne. Heureusement, cette symétrie réduit le nombre de constantes élastiques indépendantes en mettant à zéro ou en reliant certaines des constantes au sein de la rigidité de  $\mathbf{6}$  à  $\mathbf{6}[C_{ij}]$ . Cela simplifie les relations de droit du Hooke pour divers types de symétrie élastique [43].

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{14} & C_{24} & C_{34} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{15} & C_{25} & C_{35} & C_{45} & C_{55} & C_{56} \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & C_{46} & C_{56} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} \quad (\text{II.3})$$

En fait, il est possible de montrer que le nombre de constantes non nulles peut être réduit à dix-huit par un changement de base approprié.

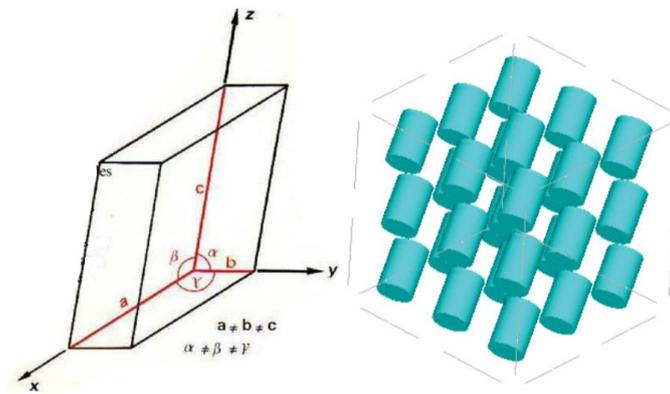


Figure II.1 : Matériau triclinique.

## II.2.2 Matériau monoclinique

Par définition, un matériau monoclinique possède un plan de symétrie matériel. Dans ce cas, la matrice de comportement doit être telle qu'un changement de base effectué par rapport à ce plan ne modifie pas la matrice. On montre dans cette partie que lorsque des symétries matérielles existent le nombre de composantes nécessaires à décrire le comportement élastique linéaire est inférieur à vingt et un. L'effet des symétries élastiques par rapport aux plans  $(x, y)$ ,  $(x, z)$  et  $(y, z)$  sur la relation de comportement élastique linéaire est étudiée dans la suite. Il faut bien noter que lorsque l'on tient compte d'une symétrie, la forme de la matrice  $[C_{ij}]$  de rigidité [46].

### II.2.2.1 Symétrie par rapport au plan $(x, y)$

Le matériau étudié présente un plan de symétrie  $(x, y)$ . Dans ce cas, la forme de la matrice de rigidité doit être telle qu'un changement de base effectué par rapport à ce plan ne modifie pas la matrice, on obtient la relation de comportement en rigidité suivante :

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & C_{36} \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & C_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{45} & C_{55} & 0 \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} \quad (\text{II.4})$$

### II.2.2.2 Symétrie par rapport au plan $(x, z)$

Le matériau étudié présente un plan de symétrie  $(x, z)$ . Dans ce cas, on obtient la relation de comportement en rigidité suivante :

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & C_{15} & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & C_{25} & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & C_{35} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & C_{45} \\ C_{15} & C_{25} & C_{35} & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{45} & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} \quad (\text{II.5})$$

### II.2.2.3 Symétrie par rapport au plan (y, z)

Le matériau étudié présente un plan de symétrie (y, z). Dans ce cas, on obtient la relation de comportement en rigidité suivante :

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & C_{34} & 0 & 0 \\ C_{14} & C_{24} & C_{34} & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & C_{56} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{56} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} \quad (\text{II.6})$$

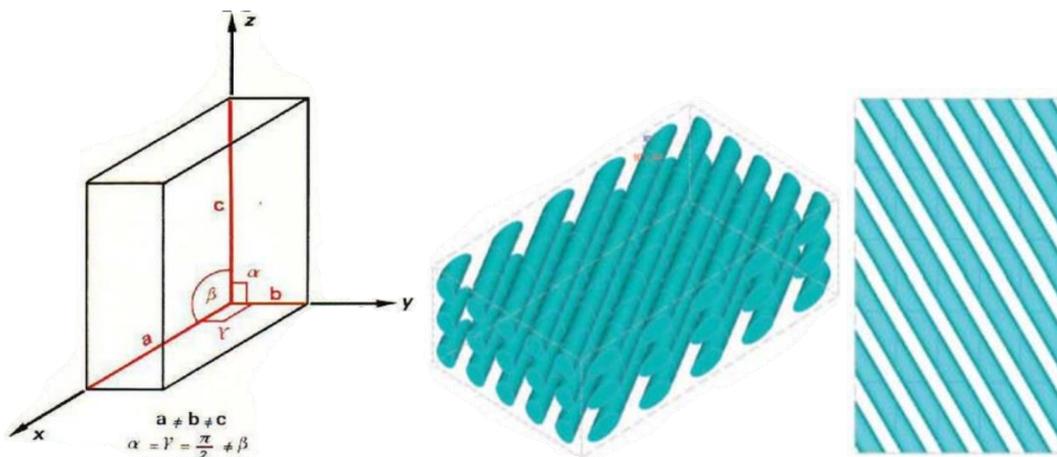


Figure II.2 : Matériau monoclinique.

### II.2.3 Matériau orthotrope

Un matériau monoclinique suivant deux plans perpendiculaires est dit orthotrope. De plus, un matériau qui possède deux plans de symétries perpendiculaires possède obligatoirement le troisième et ce type de matériau est dit orthotrope. Un matériau orthotrope est caractérisé par neuf constants élastiques indépendants si les plans de symétries sont connus. Dans le cas où les plans (x, y), (x, z) et (y, z) sont des plans de symétries perpendiculaires, il faut vérifier les trois relations de symétrie simultanément. À partir des relations de comportement, on obtient facilement la relation de comportement des matériaux orthotropes [46] :

$$\{\sigma_{ij}\} = [C_{ij}]\{\varepsilon_{ij}\} \quad (\text{II.7})$$

Dans la base d'orthotrope (x, y, z), la relation de comportement exprimée en rigidité :

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} \quad (\text{II.8})$$

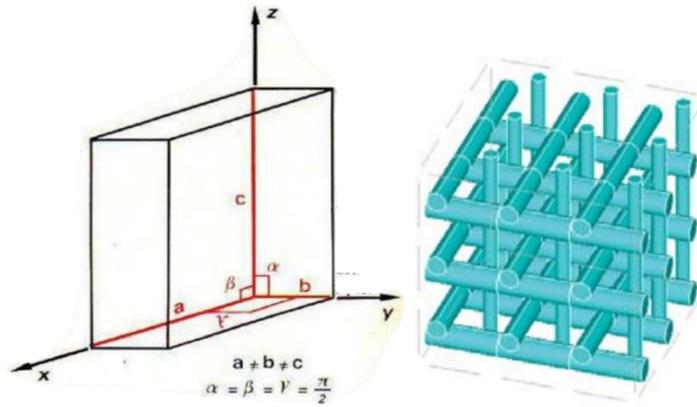


Figure II.3 : Matériau orthotrope.

### II.2.4 Matériau transversalement isotrope

Un matériau composite orthotrope posé dans de plus une symétrie de révolution au tour d'un axe est nommée isotrope transverse. Un matériau isotrope transverse est caractérisé par cinq constantes élastiques indépendantes si la base est connue. Par la suite, les relations d'invariances matérielles par rapport à une rotation autour de l'axe x sont développées à titre d'exemple. La relation de comportement d'un matériau isotrope transverse d'axe x exprimée en rigidité et en souplesse est développée [46].

À partir d'un matériau orthotrope, en exprimant les relations d'invariances matérielles par rapport à l'axe x, on obtient après calcul la relation de comportement suivante :

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{23} & C_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{C_{22} - C_{23}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} \quad (\text{II.9})$$

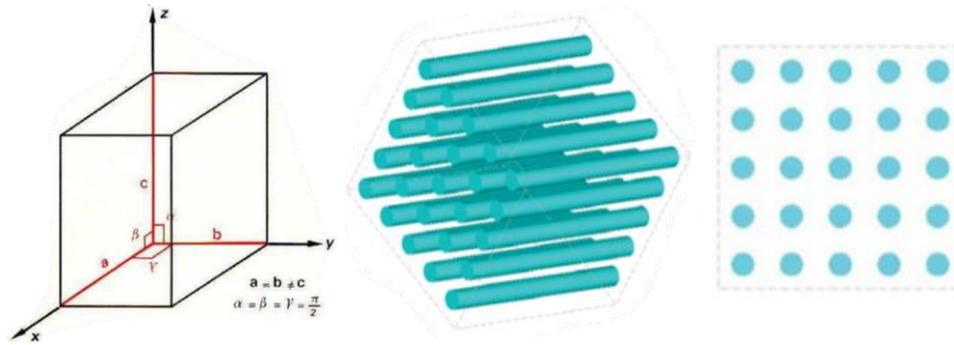


Figure II.4 : Matériau transversalement isotrope.

### II.2.5 Matériau isotrope

Un matériau pour lequel, en un point quelconque, les composantes du tenseur  $[C_{ij}]$  sont identiques dans toutes les directions est un matériau isotrope. Dans le cadre de l'élasticité linéaire, un tel matériau est fonction uniquement de deux paramètres caractéristiques indépendants. On peut démontrer qu'un matériau isotrope correspond en fait à un matériau orthotrope possédant de plus une symétrie de révolution autour de chacun de ces axes d'orthotrope [46].

À partir d'un matériau orthotrope, en exprimant les relations d'invariances matérielles par rapport aux axes  $(x, y, z)$ , on obtient après calcul la relation de comportement d'un matériau isotrope. Il y a bien deux paramètres caractéristiques indépendants :

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{12} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{C_{11}-C_{12}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{C_{11}-C_{12}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{C_{11}-C_{12}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} \quad (II.10)$$

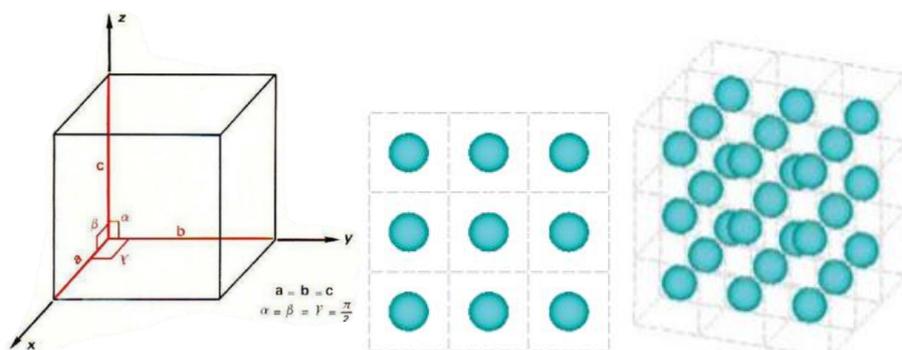


Figure II.5 : Matériau isotrope.

Nous résumons le nombre de constantes élastiques indépendantes pour différents types de matériaux :

- Triclinique : 21 ;
- Monoclinique : 13 ;
- Orthotrope : 9 ;
- Transversalement isotrope : 5 ;
- Isotrope : 2.

### II.3 Définition d'une plaque orthotrope

Une plaque en matériau orthotrope est une structure caractérisée par neuf constants élastiques indépendants, si les plans de symétries sont connus.

Formulation en souplesse dans la base d'orthotropie  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ , la matrice des souplesses  $[S_{ij}]$  d'un matériau orthotrope est exprimée en fonction des modules d'élasticité et les coefficients de Poisson sous la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{12}}{E_1} & -\frac{\nu_{13}}{E_1} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{21}}{E_2} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{31}}{E_3} & -\frac{\nu_{32}}{E_3} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{13}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{bmatrix} \quad (\text{II.11})$$

Si la base d'orthotropie  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$  est connue, les propriétés mécaniques élastiques d'un matériau orthotrope sont déterminées par neuf constantes d'élasticité indépendantes suivantes  $E_1, E_2, E_3, G_{23}, G_{13}, G_{12}, \nu_{23}, \nu_{13}$  et  $\nu_{12}$  car la matrice des souplesses  $[S_{ij}]$  est symétrique.

La matrice de souplesse  $[S_{ij}]$  étant symétrique, on impose alors les égalités suivantes sur les modules d'élasticité et les coefficients de Poisson :

$$-\frac{\nu_{12}}{E_1} = -\frac{\nu_{21}}{E_2} \quad ; \quad -\frac{\nu_{13}}{E_1} = -\frac{\nu_{31}}{E_3} \quad ; \quad -\frac{\nu_{23}}{E_2} = -\frac{\nu_{32}}{E_3} \quad (\text{II.12})$$

Lors de l'application d'un état de traction uniforme suivant l'axe  $x$  d'un échantillon orthotrope, on impose  $\sigma_{11} \neq 0$  uniquement et on obtient :

$$\begin{aligned}\varepsilon_{11} &= S_{11}\sigma_{11} \Rightarrow \sigma_{11} = S_{11}^{-1}\varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} &= S_{12}\sigma_{22} \Rightarrow \varepsilon_{22} = S_{12}S_{11}^{-1}\varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{33} &= S_{13}\sigma_{22} \Rightarrow \varepsilon_{33} = S_{13}S_{11}^{-1}\varepsilon_{11}\end{aligned}\quad (\text{II.13})$$

D'un point de vue expérimental, il suffit de généraliser la loi de Hooke introduite pour un matériau isotrope. Elle s'écrit classiquement en fonction du module d'Young et du coefficient de Poisson.

$$\sigma_{11} = E_1\varepsilon_{11} \quad ; \quad \varepsilon_{22} = -\nu_{12}\varepsilon_{11} \quad ; \quad \varepsilon_{33} = -\nu_{13}\varepsilon_{11} \quad (\text{II.14})$$

On déduit alors facilement les relations suivantes par identification :

$$S_{11} = \frac{1}{E_1} \quad ; \quad S_{12} = -\frac{\nu_{12}}{E_1} \quad (\text{II.15a})$$

Lors de l'application d'un état de traction uniforme suivant les deux autres axes d'un échantillon orthotrope, on obtient les relations suivantes :

$$S_{22} = \frac{1}{E_2} \quad ; \quad S_{23} = -\frac{\nu_{23}}{E_2} \quad ; \quad S_{33} = \frac{1}{E_3} \quad ; \quad S_{13} = -\frac{\nu_{13}}{E_3} \quad (\text{II.15b})$$

Lors de l'application d'un état de cisaillement uniforme sur un échantillon orthotrope suivant les différents plans, on obtient, par identification, les coefficients de cisaillement de la matrice de souplesse :

$$\tau_{12} = G_{12}\gamma_{12} \quad ; \quad \tau_{13} = G_{13}\gamma_{13} \quad ; \quad \tau_{23} = G_{23}\gamma_{23} \quad (\text{II.16})$$

Ce qui entraîne :

$$S_{66}^{-1} = G_{12} \quad ; \quad S_{44}^{-1} = G_{23} \quad ; \quad S_{55}^{-1} = G_{13} \quad (\text{II.17})$$

#### II.4 Différentes théories des plaques

Une structure composite multicouche peut être considérée comme un corps hétérogène constitué d'un nombre fini de couches homogènes anisotropes collées. La caractéristique géométrique d'une plaque est une épaisseur faible par rapport aux autres dimensions. La modélisation des structures multicouches modernes avec une forte anisotropie (par exemple : faible rapport du module de cisaillement transverse de l'âme par rapport au module d'élasticité longitudinal des peaux dans le cas des structures sandwich) exige des théories raffinées qui

prennent en compte une bonne description des cisaillements transverses. On trouve dans Noor [24], Kant et Carrera [22] des revues complètes sur les différents modèles existants de type élasticité tridimensionnelle ou de type plaque.

L'intérêt d'une approche tridimensionnelle réside dans l'obtention de résultats exacts tridimensionnels, utiles notamment comme référence. L'adoption d'une approche tridimensionnelle ne présente toutefois d'utilité que dans la mesure où les équations différentielles finalement obtenues peuvent être résolues. L'approche tridimensionnelle (3D) est donc limitée à certains cas de géométrie, empilement et chargement simple.

Durant ces dernières années, plusieurs modèles bidimensionnels ont été développés pour la modélisation des structures multicouches tenant compte les cisaillements transverses. Ils peuvent être regroupés en fonction du type d'approche adopté [57] :

- Approche monocouche équivalente ;
- Approche par couche ;
- Approche développement asymptotique.

#### II.4.1 Approche monocouche équivalente

Dans l'approche monocouche équivalente, le nombre d'équations ne dépend pas du nombre de couche, dans cette approche, la plaque multicouche hétérogène complexe est homogénéisée et considérée comme une seule couche statiquement équivalente. Depuis le premier travail de Sophie Germain en 1815 sur les plaques minces en passant par les modèles du premier ordre de Love-Kirchhoff et de Reissner-Mindlin, de nombreux auteurs ont développé des théories des plaques à partir des champs de déplacement où les champs de contraintes plus raffinés.

Ces théories sont très intéressantes dans l'étude des plaques et des coques, car celles-ci s'affranchissent ainsi de la discrétisation dans la direction de l'épaisseur, faisant ainsi ressortir le caractère bidimensionnel de la structure. Cependant, en considérant une approximation du déplacement unique dans toute l'épaisseur de la plaque, cette classe de théories assure la continuité des déformations entre les diverses strates, mais ne permet pas de modéliser la continuité des contraintes aux interfaces des couches. Ainsi, les contraintes inter-laminaires ne peuvent généralement pas être déterminées avec précision à l'aide de ces seules méthodes, ce qui implique donc souvent l'utilisation d'autres théories pour effectuer une correction a posteriori des contraintes. Dans cette catégorie, on considère généralement trois déclinaisons de cette approche dans ce qui suit [58].

### II.4.1.1 Théorie classique des plaques (CPT)

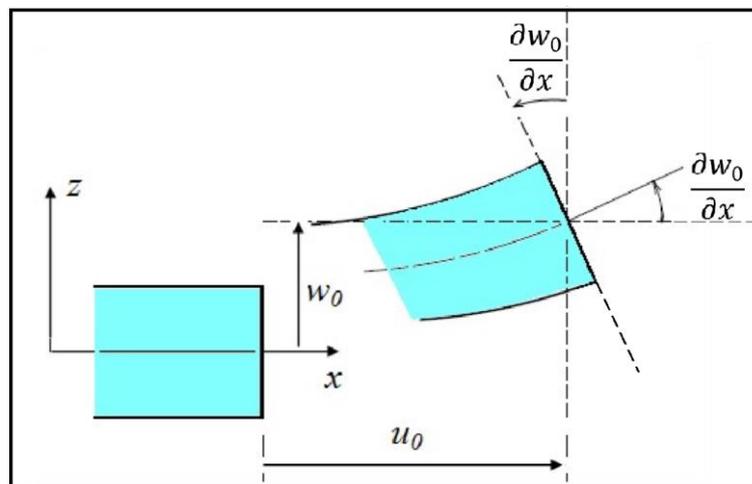
Ce modèle est basé sur une distribution linéaire des déplacements suivant l'épaisseur Reissner [59]. L'hypothèse adoptée est celle de Kirchhoff [60] des contraintes planes, les déformations dues aux cisaillements transverses sont négligées. La normale à la surface moyenne de la plaque reste perpendiculaire et droite à celle-ci après déformation (**Figure II.6**) ce qui revient à négliger les effets de déformation en cisaillement transverse.

Plusieurs chercheurs ont utilisé cette théorie telle que Yanga et Shen [61], Ghannadpour *et al.* [62], Chakraverty et Pradhan [63], Ruan et Wang [64], Loy *et al.* [65], Du *et al.* [66], Ebrahimi et Najafizadeh [67].

En se basant sur les hypothèses ci-dessus, le champ de déplacement est donné par :

$$\begin{cases} u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} \\ v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} \\ w(x, y, z) = w_0(x, y) \end{cases} \quad (\text{II.18})$$

Avec  $(u_0, v_0, w_0)$  sont les composantes du champ de déplacement sur le plan moyen de la plaque ( $z = 0$ ) [68].



**Figure II.6 :** Cinématique de Love-Kirchhoff.

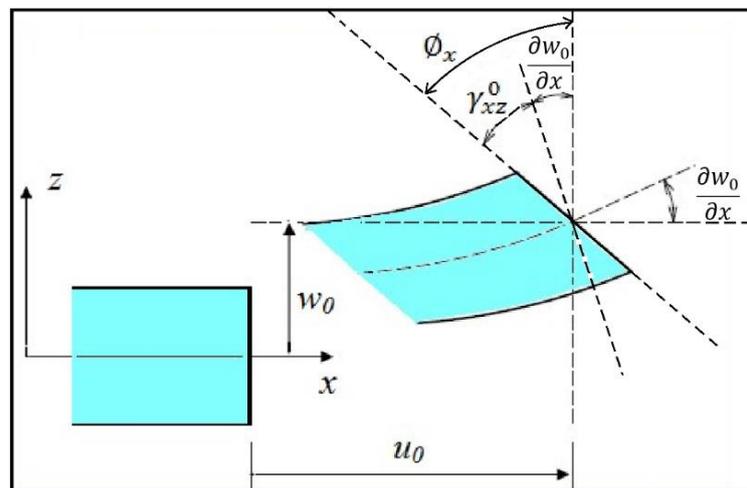
Puisque ce modèle ne tient pas en compte l'effet de cisaillement transverse, il donne des résultats imprécis pour les plaques épaisses.

### II.4.1.2 Théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT)

Les modèles élaborés selon la théorie **FSDT**, sont basés sur les hypothèses adoptées dans la théorie des plaques de Mindlin-Reissner, dans ce cas les contraintes et les déformations sont constantes à travers l'épaisseur de la plaque, ce qui nécessite donc des facteurs de correction de cisaillement, les études sur la théorie **FSDT** peuvent être référées dans (Reissner [3, 4], Mindlin [5]). Cette théorie est basée sur le champ de déplacement suivant :

$$\begin{cases} u(x, y, z) = u_0(x, y) - z\phi_x(x, y) \\ v(x, y, z) = v_0(x, y) - z\phi_y(x, y) \\ w(x, y, z) = w_0(x, y) \end{cases} \quad (\text{II.19})$$

Où  $(u_0, v_0, w_0)$  et  $(\phi_x, \phi_y)$  sont les déplacements en membrane et les rotations sur les axes  $x$  et  $y$ , respectivement. La **FSDT** étend la cinématique du **CPT** en incluant une déformation transversale brute de cisaillement dans ses hypothèses cinématiques, c'est-à-dire que la variation de cisaillement transversal est supposée être constante par rapport à la coordination de l'épaisseur. Dans le **FSDT**, les facteurs de correction de cisaillement sont employés pour corriger l'écart entre les distributions réelles de la contrainte de cisaillement transversale et celles calculées à l'aide des relations constitutives de la théorie **FSDT**. Généralement, ces facteurs dépendent de la géométrie de la structure étudiée, des propriétés constitutives de chaque couche (cas des matériaux composites) et les conditions aux limites.



**Figure II.7** : Cinématique de Reissner-Mindlin.

Avec :  $(\phi_x, \phi_y)$  représentent les angles de rotation totale de la normale au plan moyen autour des axes  $x$  et  $y$ , respectivement (**Figure II.7**), de tel sorte que :

$$\phi_x = \gamma_{xz}^0 + \frac{\partial w_0}{\partial x}, \phi_y = \gamma_{yz}^0 + \frac{\partial w_0}{\partial y} \quad (\text{II.20})$$

Où  $(\gamma_{xz}^0, \gamma_{yz}^0)$  les déformations de cisaillement transverse mesurées sur le plan moyen [69].

#### II.4.1.3 Théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé (HSDT)

À la différence de la théorie **CPT** et la théorie **FSDT** avec les acceptations de la distribution linéaire du déplacement par l'épaisseur, la théorie d'ordre élevé (**HSDT**) est basée sur une distribution non linéaire des champs dans l'épaisseur. Par conséquent, on tient compte des effets de la déformation transversale de cisaillement et/ou de la déformation normale transversale. Ces modèles n'exigent pas des facteurs de correction de cisaillement.

Les théories d'ordre élevé introduisent des inconnues supplémentaires qui sont souvent difficiles à interpréter en termes physiques. La théorie du second ordre avec inextensibilité transversale est basée sur le champ de déplacement exprimé comme suit :

$$\begin{cases} u(x, y, z) = u_0(x, y) - z\phi_x(x, y) + z^2\theta_x(x, y) + z^3\psi_x(x, y) \\ v(x, y, z) = v_0(x, y) - z\phi_y(x, y) + z^2\theta_y(x, y) + z^3\psi_y(x, y) \\ w(x, y, z) = w_0(x, y) \end{cases} \quad (\text{II.21})$$

Où les variables  $(\phi_x, \phi_y)$  représentent les rotations des sections déformées autour des axes  $x$  et  $y$ , respectivement "termes du premier ordre", tandis que  $(\theta_x, \theta_y)$  symbolisent les termes du deuxième ordre "courbure" et  $(\psi_x, \psi_y)$  les termes du troisième ordre "gauchissement des sections" [69].

Cependant, l'augmentation de l'ordre de l'approximation introduit des degrés de liberté supplémentaires, ce qui alourdit passablement le problème à résoudre. Afin de réduire la complexité, de nombreuses hypothèses supplémentaires ont été formulées Whitney et Sun [8], Reddy [24]. Les hypothèses les plus utilisées considèrent que la plaque ou la coque est incompressible dans la direction transverse et que la contrainte de cisaillement s'annule sur les peaux du stratifié Reddy [25] (**Figure II.8**). La première hypothèse entraîne alors l'annulation des termes d'ordre deux dans le développement du déplacement dans l'épaisseur, tandis que la seconde hypothèse permet de relier le coefficient du terme cubique à celui du terme linéaire, ce qui réduit finalement le problème à un même niveau de complexité que le modèle **FSDT** (seulement cinq inconnues,  $u_0, v_0, w_0, \phi_x, \phi_y$ ).

La précision des rigidités des couches orthotropes ainsi obtenues avec les modèles **HSDT** est nettement supérieure à celle trouvée à l'aide des théories d'ordre inférieur et le recours au

facteur de correction de cisaillement n'est généralement pas nécessaire [57]. Les théories du troisième ordre simplifiées semblent optimales, des modèles **HSDT** d'ordre élevé restent bien plus précis dans le cas des plaques ou coques épaisses fortement orthotropes. Le développement de l'équation (II.21) est utilisé avec l'annulation des termes du deuxième ordre ( $\theta_x, \theta_y$ ), l'expression du champ de déplacement devient :

$$\begin{cases} u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + f(z) \gamma_{xz}^0(x, y) \\ v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} + f(z) \gamma_{yz}^0(x, y) \\ w(x, y, z) = w_0(x, y) \end{cases} \quad (\text{II.22})$$

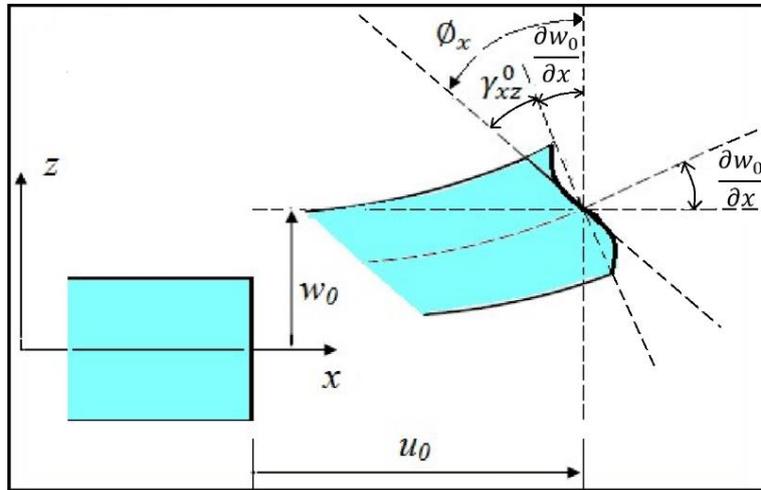


Figure II.8 : Cinématique de la théorie d'ordre élevé.

La fonction de cisaillement transverse  $f(z)$  définit la forme de la répartition des contraintes sur l'épaisseur de la plaque. Cependant, les déplacements de la théorie classique de plaque (**CPT**) est obtenue en prenant  $f(z) = 0$ , alors que la théorie du premier ordre (**FSDT**) peut être obtenue par  $f(z) = z$ .

Nous présentons ici quelques contributions importantes au développement de modèles d'ordre supérieur qui se sont distingués dans la littérature et qui diffèrent par la fonction de formes  $f(z)$ .

Le premier modèle et celle d'Ambartsumyan [70] donnée par la forme suivante :

$$f(z) = \frac{z}{2} \left( \frac{h^2}{4} - \frac{z^2}{3} \right) \quad (\text{II.23})$$

- Le modèle de Reissner [71] avec :

$$f(z) = \frac{5}{4} z \left( 1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right) \quad (\text{II.24})$$

- Le modèle de Levinson [18] et Reddy [72] avec :

$$f(z) = z \left( 1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right) \quad (\text{II.25})$$

- Le modèle de Aydogdu [73] avec :

$$f(z) = z \alpha^{\frac{-2\left(\frac{z}{h}\right)^2}{\ln(\alpha)}} \quad \alpha > 0 \quad (\text{II.26})$$

Dans le modèle de Reddy [74], le champ de déplacement membranaire est cubique, la distribution des contraintes de cisaillement transverse est parabolique à travers l'épaisseur et les conditions aux limites sur les surfaces libres sont satisfaites. Ce qui donne une bonne approximation pour les contraintes de cisaillement transverse par rapport à la solution d'élasticité tridimensionnelle (Elasticité **3D**) [75].

En 1991, une fonction trigonométrique sinusoïdale est introduite dans un modèle sinus (**TSDT**) pour modéliser la répartition des contraintes de cisaillement à travers l'épaisseur est proposé par Touratier [76], ce modèle (**TSDT**) est différent des autres modèles d'ordre supérieurs puisqu'il n'utilise pas de fonction polynomiale. La fonction de cisaillement transverse s'écrit comme suite :

$$f(z) = \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \quad (\text{II.27})$$

Les contraintes de cisaillement transverses déterminées par le modèle (**TSDT**) prennent une forme sinusoïdale à travers l'épaisseur de la plaque. La précision de ce modèle par rapport à la solution exacte est meilleure que la théorie de Reddy [24, 25].

Karama et al. [57] ont développé une version exponentielle de la théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé (The exponential shear deformation plate theory ESDPT) est obtenue en prenant :

$$f(z) = z e^{-2\left(\frac{z}{h}\right)^2} \quad (\text{II.28})$$

Le choix de la fonction exponentielle permet un développement en puissance pair et impair de la variable  $z$ , alors que la fonction sinus de Touratier [76] ne permet qu'un développement en puissance impair.

Malgré le fait que les modèles d'ordre élevé assurent une continuité de déplacement et de déformation à l'interface, les contraintes de cisaillement inter laminaire et les contraintes d'interface, restent discontinues. Ceci présente un inconvénient lors de l'analyse locale de l'interface des structures multicouches dont les propriétés des couches sont très différentes.

La version hyperbolique de la théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé (The hyperbolic shear deformation plate theory HySDT) développée par Ait Atmane et *al.* [77] est obtenue en prenant :

$$f(z) = \frac{\cosh\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\left[\cosh\left(\frac{\pi}{2}\right) - 1\right]} z - \frac{\left(\frac{h}{\pi}\right) \sinh\left(\frac{\pi z}{h}\right)}{\left[\cosh\left(\frac{\pi}{2}\right) - 1\right]} \quad (\text{II.29})$$

Le modèle raffiné employé par Shimpi [34] pour étudier les effets de déformation de cisaillement dans les plaques épaisses.

$$f(z) = h \left[ \frac{1}{4} \left( \frac{z}{h} \right) - \frac{5}{4} \left( \frac{z}{h} \right)^3 \right] \quad (\text{II.30})$$

Le modèle hyperbolique d'El Meiche et *al.* [78] développé pour examiner la stabilité et la vibration libre des plaques sandwichs fonctionnellement graduées est de forme :

$$f(z) = \frac{\left(\frac{h}{\pi}\right) \sinh\left(\frac{\pi z}{h}\right) - z}{\cosh\left[\left(\frac{\pi}{2}\right) - 1\right]} \quad (\text{II.31})$$

Le nouveau modèle hyperbolique inverse de la théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé développé par Grover et *al.* [79] pour analyser la flexion et le flambement des plaques sandwichs et stratifiés en matériaux composites :

$$f(z) = z \left( 1 + \frac{6}{h\sqrt{13}} \right) - \sinh^{-1} \left( \frac{3z}{h} \right) \quad (\text{II.32})$$

Le nouveau modèle de la théorie de déformation de cisaillement utilisé par Meksi et al. [80] pour analyser le comportement mécanique des structures **FGM** est de forme :

$$f(z) = z - \frac{h \sinh\left(\frac{10z}{h}\right)}{10 \cos(5)} + \frac{h}{100} \quad (\text{II.33})$$

Plusieurs chercheurs proposent quelques contributions importantes de développement de modèles d'ordre élevés pour franchir les limites des théories du premier ordre (Ambartsumyan [70], Reissner [71], Levinson [18], Whitney [8], Nelson [9], Lo et al. [17], Touratier [76]), ces modèles sont basés sur une distribution non linéaire des champs de déplacement à travers l'épaisseur, et qui permettent de représenter le gauchissement de la section transversale dans la configuration déformée par des fonction de cisaillement  $f(z)$  [57].

#### II.4.1.4 Théorie de déformation en cisaillement des plaques quasi-3D

En divisant le déplacement transversal on plusieurs composantes dont la flexion, le cisaillement et en prenant en considération l'effet d'étirement de l'épaisseur de la plaque. Thai et Kim [81] ont proposé une théorie de déformation des plaques **quasi-3D** à cinq variables comme la théorie de la déformation en cisaillement du premier ordre (**FSDT**), contrairement à 6 pour les théories conventionnelles à ordre élevé. Meradjah et al. [82], Hamidi et al. [83], Draiche et al. [84], et Bennoun et al. [85] ont proposée à l'aide de différentes fonctions de forme plusieurs méthodes analogiques de cinq-inconnues **quasi-3D**, En apportant des nouvelles hypothèses pour les théories **quasi-3D** à six-variables que Zenkour [86] a pu proposer une nouvelle théorie **quasi-3D** a quatre variables pour les plaques **FGM**. Mantari et Guedes Soares [87] ont aussi proposé une théorie **quasi-3D** simples à quatre variables pour des plaques **FGM** en combinant l'effet de cisaillement et l'effet d'étirement du déplacement transversal à l'aide d'une fonction hyperbolique.

Cette théorie est donnée par le champ de déplacement suivant :

$$\begin{cases} u(x, y, z) = u_0(x, y) + z u_1(x, y) + f(z) u_z(x, y) \\ v(x, y, z) = v_0(x, y) + z v_1(x, y) + f(z) v_z(x, y) \\ w(x, y, z) = w_0(x, y) + z w_1(x, y) + g(z) w_z(x, y) \end{cases} \quad (\text{II.34})$$

## II.4.2 Approche par couche

Ces approches sont destinées justement à mieux décrire les effets d'interface pour les matériaux composites conventionnels. Les différents modèles issus de l'approche par couche ont été proposés par Reddy [88], Nguyen [89], Carrera [90], Di Sciuva [91]. Le multicouche est subdivisé en sous structures correspondant en fait à chaque couche ou chaque ensemble de couches on applique à chaque sous structure une théorie du premier ordre ou un modèle d'ordre supérieur imposant un champ de déplacement vérifiant la continuité aux interfaces entre les différentes couches [58].

Dans la modélisation des effets locaux, l'inclusion de la déformation normale transverse est importante pour deux raisons : premièrement, la contrainte normale transverse est une contrainte généralement significative dans ces régions, si ce n'est pas la dominante. Deuxièmement, les modèles par-couche qui négligent la déformation normale transverse ne satisfont pas les conditions aux limites en traction concernant les contraintes du cisaillement transverse au niveau des bords libres du composite orthotropes. Un examen des conditions aux limites naturelles pour les équations différentielles de mouvement développées dans les références (pour le cas des théories par-couche qui négligent la déformation normale transverse) révèle que les contraintes en cisaillement transverse satisfont les conditions aux limites en traction au bord libre de la structure, dans le sens intégral uniquement et non pas dans le sens local (malgré le niveau de raffinement suivant l'épaisseur).

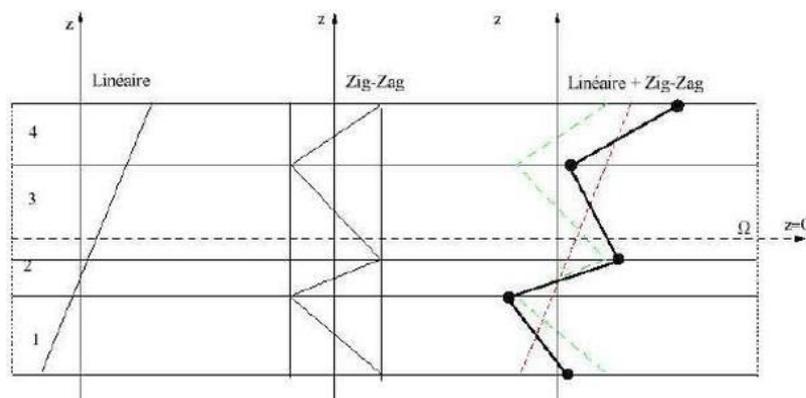
Les modèles issus de l'approche par couche peuvent être classés en deux groupes :

- Les modèles zig-zag ou la cinématique satisfait a priori les conditions de contact est indépendante du nombre de couches [53].
- Les modèles couches discrètes ou chaque couche est considérée comme une plaque en imposant les conditions de continuité en déplacements ou en contraintes aux interfaces.

### II.4.2.1 Les modèles zig-zag

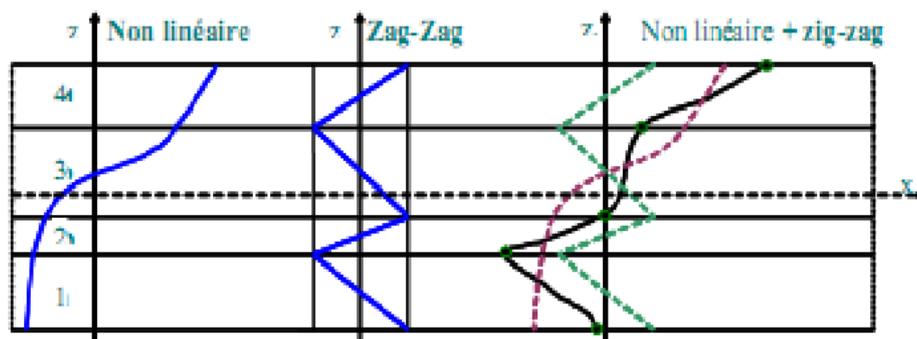
En 1987, Di Sciuva [91] a proposé un modèle de théorie de zig-zag du premier ordre. Dans ce modèle, la superposition du champ de déplacement global d'une théorie du premier ordre (FSDT) et d'une fonction zig-zag, la fonction zig-zag donne une contribution des déplacements membranaires qui est continue à travers l'épaisseur mais sa dérivée première est discontinue à l'interface (**Figure II.10**). Les déformations transversales sont donc discontinues et la continuité des contraintes de cisaillement transverse aux interfaces est assurée.

La bonne modélisation de la distorsion de la normale à la surface déformée est l'avantage principal du champ de déplacement des modèles zig-zag, ainsi que dans la vérification des conditions de continuité, et ce sans augmenter pour autant le nombre et l'ordre des équations fondamentales de la théorie du premier ordre. Le recours à des coefficients de correction pour le cisaillement transverse est évité. Plusieurs chercheurs ont réalisé des améliorations significatives pour le modèle zig-zag (Carrera [90]) en se basant sur le concept de Di Sciuva [91]. L'amélioration principale est l'introduction d'une distribution non linéaire des déplacements.



**Figure II.9 :** Champ de déplacements des modèles zig-zag du premier ordre Nguyen [89].

On superpose le champ zig-zag (linéaire par morceau) à un champ de déplacement d'ordre élevé (**Figure II.10**). Les conditions de compatibilité sont satisfaites sur les surfaces supérieures et inférieures des plaques pour réduire le nombre de paramètres [58].



**Figure II.10 :** Champ de déplacements des modèles zig-zag d'ordre élevé Carrera [90].

#### II.4.2.2 Les modèles couches discrètes

Les modèles couches discrètes adoptent une approximation plus fine des champs suivant l'épaisseur du multicouche que les modèles de plaque d'ordre supérieur ou zig-zag puisqu'ils proposent une cinématique par couche plutôt qu'une cinématique globale voir (**Figure III.9**).

En fait, avec les modèles couches discrètes, le multicouche est représenté par un ensemble de plaques (objets **2D**) couplés par des efforts d'interface. Les conditions de continuité aux interfaces sont assurées. Le nombre de paramètres inconnus dépend du nombre de couche de la plaque composite.

Pour les modèles couches discrètes particulières et les modèles multi particulières, le premier travail semble être celui de Pagano qui propose le modèle local dans Pagano [92]. Le modèle local a été construit à partir de la formulation variationnelle de Hellinger-Reissner et d'une approximation polynomiale des champs de contraintes par couche.

La formulation variationnelle d'Hellinger-Reissner restreinte aux approximations de ces champs de contraintes conduit à une cinématique du multicouches à  $7n$  champs en  $(x, y)$ ,  $n$  étant le nombre de couches de la plaque. Ces champs cinématiques contiennent des composantes correspondantes à des moments du deuxième ordre qui n'ont pas un sens physique très clair [68]. Toutefois, la formulation mixte d'Hellinger-Reissner permet de déduire le comportement élastique linéaire généralisé du modèle. Ce modèle pose quelques difficultés au niveau des conditions aux limites et reste assez lourd compte tenu du nombre élevé de champs cinématiques intervenants. Ce modèle a été le point de départ pour un ensemble de travaux menés à (Ecole Nationale des Ponts et Chaussées) dont l'objectif est de proposer une série de simplifications permettant d'alléger tout en conservant un bon niveau de prédictibilité [91].

### II.4.3 Approche par développement asymptotique

Le développement asymptotique intervient au niveau de l'intégration des équations de l'élasticité "les équations constitutives et de mouvements". L'état caractérisant les déformations de la structure est donc constitué par la réunion des parties respectivement situées à l'intérieur et aux frontières, ce qui explique le procédé classique pour résoudre ce type de problème, à savoir la construction d'intégrales dites intérieures, qui correspondent à des solutions variant faiblement à l'intérieur du domaine, que l'on estime déterminées avec une erreur asymptotique "très petite". Un deuxième type d'intégrales, à fortes variations, caractérisant la solution près des bords est également construit Friedrichs *et al.* [93], Goldenveizer [94]. Le travail le plus complet et intéressant semble celui de Ladeveze [95]. Dans un premier temps, ils utilisent les résultats de la théorie **CPT**. Puis, au voisinage du bord, ils posent le problème tridimensionnel de la détermination des champs "contraintes et déplacements" correcteurs. Ce problème est décomposé en problème bidimensionnels "couches limites perpendiculaires au bord". Ensuite, on fait une approche mixte en contrainte-déplacement résolue par exemple, par des

développements en séries de Fourier. L'endommagement dans les couches et à la fois aux interfaces sont pris en compte [91].

#### II.4.4 Nouvelle théorie raffinée de déformation des plaques

En (2002) un nouveau modèle raffiné pour les plaques isotropes (**RPT** : Refined Plate Theory) a été développé par Shimpi [34]. Ce modèle ne contient que deux variables qui donne seulement quatre inconnus à trouvés au lieu des cinq dans le cas des théories **HSDT** conventionnelles, avec une distribution parabolique des contraintes cisaillement à travers l'épaisseur de la plaque. En plus, cette théorie n'exige pas de facteur de correction de cisaillement. De plus, cette théorie est similaire avec la théorie classique en ce qui concerne les équations du mouvement, les conditions aux limites et les expressions des moments. Sur la base de cette théorie raffinée, le flambement des plaques orthotropes a été analysé avec succès par Thai et Kim [96], ainsi, l'étude de la vibration libre des plaques stratifiées et sandwiches respectivement [75].

Le champ de déplacement de celle théorie s'écrit de la façon suivante :

$$\begin{cases} u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + f(z) \gamma_{xz}^0(x, y) \\ v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} + f(z) \gamma_{yz}^0(x, y) \\ w(x, y, z) = w_b(x, y) + w_s(x, y) \end{cases} \quad (\text{II.35})$$

#### II.5 Conclusion

Dans ce chapitre on a présenté, un aperçu général sur les différentes théories des plaques à savoir les théories qui se basent sur les modèles monocouches équivalente de la théorie d'élasticité bidimensionnelle, telle que la théorie classique de Love-Kirchhoff (**CPT**) utilisée pour l'étude des plaques minces, la théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (**FSDT**) de Reissner-Mindlin, la théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé (**HSDT**) appliquée par plusieurs chercheurs. Ensuite nous avons présenté la théorie de déformation en cisaillement **quasi-3D** qui prend en considération l'effet de l'étirement de l'épaisseur. A la base de l'approche monocouche équivalente, dans le chapitre suivant nous nous attacherons à présenter une nouvelle théorie de déformation en cisaillement **quasi-3D** pour l'étude de la flexion statique des plaques orthotropes épaisses simplement appuyées.

## *Chapitre III*

### *Etude du comportement statique des plaques orthotropes épaisses*

### III Etude du comportement statique des plaques orthotropes épaisses

#### III.1 Introduction

Dans ce travail, une nouvelle théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé (**HSDT quasi-3D**) est proposée pour l'analyse de la réponse statique des plaques orthotropes simplement appuyées. Les plaques sont soumises aux différents type chargements. Les solutions analytiques sont déterminées en utilisant la méthode de Navier.

La détermination de la contrainte de cisaillement transverse développée dans l'épaisseur des plaques soumises à la flexion, est habituellement effectuée sous quelques hypothèses bien connus, basées sur la forme du champ de déplacement à travers leurs épaisseurs. Ces théories étant conçus comme une approximation d'une réalité de trois dimensions, on comprend qu'il puisse en exister plusieurs, différences entre eux dans la précision des approximations sur lesquelles elles sont fondées.

Dans la présente étude, un nouveau modèle basé sur la théorie de la déformation en cisaillement transverse d'ordre élevé qui tient en considération l'effet de l'étirement de l'épaisseur est proposé pour déterminer le comportement de flexion des plaques orthotropes. La présente théorie donne une description hyperbolique de la contrainte de cisaillement à travers l'épaisseur et satisfait exactement les conditions aux limites de contrainte de cisaillement nulle sur les bords supérieur et inférieur de la plaque. Il a été observé que cette théorie donne des résultats plus précis en ce qui concerne les solutions d'élasticité **3D** pour l'analyse de flexion et des contraintes.

#### III.2 Modèle d'une plaque orthotrope

On considère une plaque élastique rectangulaire en matériau orthotrope, de côtés  $a$  et  $b$  et d'épaisseur  $h$ . Les coordonnées  $x$ ,  $y$  et  $z$  sont prises selon la longueur, la largeur, et l'épaisseur, respectivement, comme il est montré dans la **Figure III.1** ci-dessous. La plaque est soumise à une charge mécanique transversale appliquée sur la face supérieure. Les coordonnées cartésiennes utilisées pour décrire les déformations infinitésimales d'une plaque orthotrope occupant une région :

$$0 \leq x \leq a ; 0 \leq y \leq b ; -h/2 \leq z \leq h/2 \quad (\text{III.1})$$

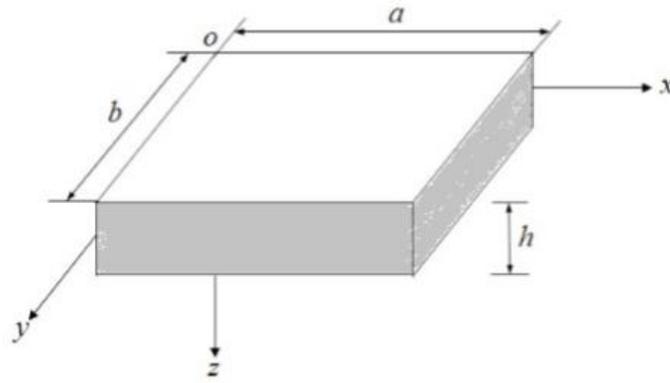


Figure III.1 : Géométrie de la plaque et système de coordonnées.

### III.3 Hypothèses de base de la présente théorie quasi-3D à quatre variables

La modélisation mathématique de la présente théorie **quasi-3D** de déformation en cisaillement hyperbolique pour les plaques orthotropes est basée sur certaines hypothèses cinématiques et physiques :

$$\begin{cases} u = u_0 + u_b + u_s \\ v = v_0 + v_b + v_s \\ w = w_0 + w_s \end{cases} \quad (\text{III.2})$$

1. Les déplacements sont faibles par rapport à l'épaisseur de la plaque  $h$  et par conséquent, les déformations impliquées sont infinitésimales :

$$u_0 = 0 \quad , \quad v_0 = 0 \quad (\text{III.3})$$

2. Le déplacement dans le plan  $u$  suivant la direction  $x$  ainsi que le déplacement  $v$  suivant la direction  $y$  peut être dissociés en deux composantes, de flexion et de cisaillement :

$$u = u_b + u_s \quad , \quad v = v_b + v_s \quad (\text{III.4a})$$

Car les composantes de flexion  $u_b$  et  $v_b$  sont supposées être similaires aux déplacements donnés par la théorie classique des plaques. Par conséquent, les expressions de  $u_b$  et  $v_b$  peuvent être données comme :

$$u_b = -z \frac{\partial w(x, y)}{\partial x} \quad , \quad v_b = -z \frac{\partial w(x, y)}{\partial y} \quad (\text{III.4b})$$

Et les composantes de cisaillement  $u_s$  et  $v_s$  sont supposées être de nature hyperbolique par rapport à la coordonnée d'épaisseur, de sorte que la contrainte de cisaillement maximale se

produit sur un axe neutre. Par conséquent, les expressions de  $u_s$  et  $v_s$  peuvent être données aussi comme :

$$u_s = f(z)\phi(x, y) \quad , \quad v_s = f(z)\psi(x, y) \quad (\text{III.4c})$$

Où  $\phi(x, y)$  et  $\psi(x, y)$  sont les fonctions inconnues associées aux pentes de cisaillement.

3. Le déplacement transversal  $w$  dans la direction  $z$  est supposé être en fonction des coordonnées  $x$  et  $y$  :

$$w = w_0 + w_s \quad (\text{III.5a})$$

Le déplacement  $w_0$  par rapport à l'épaisseur de la plaque  $h$  et la composante de cisaillement  $w_s$  est supposée être de nature hyperbolique par rapport à la coordonnée d'épaisseur, de sorte que la contrainte de cisaillement maximale se produit sur un axe neutre. Par conséquent, l'expression de  $w_s$  peuvent être données aussi comme :

$$w_s = g(z)\xi(x, y) \quad (\text{III.5b})$$

#### III.4 Le champ de déplacement

Le champ de déplacement de la présente théorie des plaques orthotropes est de la forme [37]:

$$\begin{cases} u(x, y, z) = -z \frac{\partial w(x, y)}{\partial x} + f(z)\phi(x, y) \\ v(x, y, z) = -z \frac{\partial w(x, y)}{\partial y} + f(z)\psi(x, y) \\ w(x, y, z) = w_0 + g(z)\xi(x, y) \end{cases} \quad (\text{III.6})$$

Où  $u$  et  $v$  sont les déplacements dans le plan suivant les directions  $x$  et  $y$ , respectivement.  $w$  Est le déplacement transversal dans la direction  $z$ . La fonction sinus hyperbolique est assignée en fonction de la distribution de contrainte de cisaillement à travers l'épaisseur de la plaque. Les fonctions  $\phi$ ,  $\psi$  et  $\xi$  représentent les rotations de la plaque à la surface neutre, qui sont des fonctions inconnues à déterminer.

Ainsi que  $f(z)$  et  $g(z)$  représentent la fonction de cisaillement et leur dérivée, respectivement. Elles sont exprimées par :

$$f(z) = z - \frac{\left(\frac{h}{\pi}\right) \sinh\left(\frac{\pi z}{h}\right) - z}{\cosh\left(\frac{h}{2}\right) - 1} \quad \text{et} \quad g(z) = \frac{df(z)}{dz} = 1 - \frac{\cosh\left(\frac{\pi z}{h}\right) - 1}{\cosh\left(\frac{h}{2}\right) - 1} \quad (\text{III.7})$$

### III.5 Relation déformation-déplacement

Les déformations normales et de cisaillement de la plaque orthotrope peuvent être déterminés en utilisant la théorie de l'élasticité linéaire déformation-déplacement.

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \varepsilon_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} \quad (\text{III.8})$$

Substituer les composantes du champ de déplacement donné par l'équation (III.6) dans l'équation (III.8), nous obtenons :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = z \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^b \\ \varepsilon_y^b \\ \gamma_{xy}^b \end{Bmatrix} + f(z) \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^s \\ \varepsilon_y^s \\ \gamma_{xy}^s \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \varepsilon_z \end{Bmatrix} = g(z) \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^s \\ \varepsilon_z^s \end{Bmatrix}, \quad \varepsilon_z = g'(z) \varepsilon_z^s \quad (\text{III.9})$$

Car les termes de déformations ont pour expressions :

$$\begin{aligned} \varepsilon_x^b &= -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \varepsilon_y^b = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad \gamma_{xy}^b = -2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \\ \varepsilon_x^s &= \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad \varepsilon_y^s = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \gamma_{xy}^s = \frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \\ \gamma_{yz}^s &= \psi + \frac{\partial \xi}{\partial y}, \quad \gamma_{xz}^s = \phi + \frac{\partial \xi}{\partial x} \\ \varepsilon_z^s &= \xi \end{aligned} \quad (\text{III.10})$$

### III.6 Relation contrainte-déformation

En se limitant à un comportement élastique linéaire, l'expression des contraintes pour une plaque orthotrope rectangulaire peut être déterminée en écrivant la relation qui existe entre ces dernières et les déformations, le champ des contraintes s'écrit donc :

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{13} & 0 & 0 & 0 \\ \bar{Q}_{21} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{23} & 0 & 0 & 0 \\ \bar{Q}_{31} & \bar{Q}_{32} & \bar{Q}_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{Q}_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{Q}_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{Q}_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{bmatrix} \quad (\text{III.11})$$

Où :  $(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz})$  et  $(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz})$  sont les composantes des contraintes et des déformations, respectivement. Les coefficients de rigidités  $\bar{Q}_{ij}$  peuvent être exprimés en fonction des constantes tels que donnés par Jones [38] :

$$\begin{aligned} \bar{Q}_{11} &= \frac{E_1(1 - \nu_{23}\nu_{32})}{\Delta} ; \bar{Q}_{12} = \frac{E_1(\nu_{21} + \nu_{31}\nu_{23})}{\Delta} ; \bar{Q}_{13} = \frac{E_1(\nu_{31} + \nu_{21}\nu_{32})}{\Delta} \\ \bar{Q}_{22} &= \frac{E_2(1 - \nu_{13}\nu_{31})}{\Delta} ; \bar{Q}_{23} = \frac{E_2(\nu_{32} + \nu_{12}\nu_{31})}{\Delta} ; \bar{Q}_{33} = \frac{E_3(1 - \nu_{12}\nu_{21})}{\Delta} \\ \bar{Q}_{66} &= G_{12} ; \bar{Q}_{44} = G_{23} ; \bar{Q}_{55} = G_{13} \end{aligned} \quad (\text{III.12})$$

$$\Delta = 1 - \nu_{12}\nu_{21} - \nu_{23}\nu_{32} - \nu_{13}\nu_{31} - \nu_{21}\nu_{32}\nu_{13}$$

### III.7 Equations de mouvement et conditions aux limites

Les équations de mouvement de la présente théorie sont obtenues en utilisant le principe des travaux virtuels. Pour étudier les problèmes de la flexion des plaques orthotropes rectangulaires simplement appuyées soumises aux différentes conditions de chargement transversal, ce principe peut être exprimé comme :

$$\int_0^t (\delta U + \delta V - \delta K) dt = 0 \quad (\text{III.13})$$

Où  $\delta U$  représente la variation de l'énergie de déformation virtuelle de la plaque et  $\delta V$  est la variation de l'énergie potentielle virtuelle due à la charge transversale  $q(x, y)$  agissant sur la surface supérieure de la plaque et  $\delta K$  est la variation de l'énergie cinétique virtuelle. Ces variations sont données par les équations suivantes :

$$\delta U = \int_{-h/2}^{h/2} \int_0^a \int_0^b (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \sigma_z \delta \varepsilon_z + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz} + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz}) dz dx dy \quad (\text{III.14a})$$

$$\delta V = - \int_0^a \int_0^b q(x, y) \delta w_0 dx dy \quad (\text{III.14b})$$

$$\delta K = \int_{-h/2}^{h/2} \int_0^a \int_0^b \rho \left( \delta \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \delta \left( \frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + \delta \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right) dz dx dy \quad (\text{III.14c})$$

Dans le cas de la flexion, on admet que l'énergie cinétique de la plaque est nulle ( $\delta K = 0$ ), en effet l'équation du principe des travaux virtuels ci-dessus devient :

$$\int_v (\delta U + \delta V) dv = 0 \quad (\text{III.15})$$

En substituant les valeurs des déformations et des contraintes exprimées par les équations (III.9), (III.10) et (III.11) dans l'équation (III.15), et en faisant l'intégration à travers l'épaisseur de la plaque, on obtient :

$$\int_0^a \int_0^b \left[ \begin{aligned} & -M_x^b \frac{\partial^2 \delta w_0}{\partial x^2} + M_x^s \frac{\partial^2 \delta \phi}{\partial x^2} - M_y^b \frac{\partial^2 \delta w_0}{\partial y^2} + M_y^s \frac{\partial^2 \delta \psi}{\partial y^2} + V_z^s \delta \xi - 2M_{xy}^b \frac{\partial^2 \delta w_0}{\partial x \partial y} \\ & + M_{xy}^s \frac{\partial \delta \phi}{\partial y} + M_{xy}^s \frac{\partial \delta \psi}{\partial x} + V_{xz}^s \delta \phi + V_{xz}^s \frac{\partial \delta \xi}{\partial x} + V_{yz}^s \delta \psi + V_{yz}^s \frac{\partial \delta \xi}{\partial y} - q(x, y) \delta w_0 \end{aligned} \right] dx dy = 0 \quad (\text{III.16})$$

Où  $(M_x^b, M_y^b, M_{xy}^b)$  sont des moments résultats analogues à la théorie classique des plaques,  $(M_x^s, M_y^s, M_{xy}^s)$  et  $(V_z^s, V_{xz}^s, V_{yz}^s)$  sont des moments résultants dus au cisaillement transversal. Ces moments résultants sont exprimés par :

$$\begin{aligned} (M_x^b, M_y^b, M_{xy}^b) &= \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) z dz \\ (M_x^s, M_y^s, M_{xy}^s) &= \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) f(z) dz \\ (V_{xz}^s, V_{yz}^s) &= \int_{-h/2}^{h/2} (\tau_{xz}, \tau_{yz}) g(z) dz \\ (V_z^s) &= \int_{-h/2}^{h/2} g'(z) \sigma_z dz \end{aligned} \quad (\text{III.17})$$

En substituant les équations (III.14) et (III.16) dans le principe des travaux virtuels de l'équation (III.15) et en faisant l'intégration par parties, et en recueillant les coefficients  $\delta w_0, \delta \phi, \delta \psi$  et  $\delta \xi$  égaux à zéro séparément, les équations différentielles du mouvement sont obtenues comme suit :

$$\delta w_0 : \frac{\partial^2 M_x^b}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_y^b}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^b}{\partial x \partial y} + q = 0 \quad (\text{III.18a})$$

$$\delta \phi : \frac{\partial M_x^s}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}^s}{\partial y} - V_{xz}^s = 0 \quad (\text{III.18b})$$

$$\delta \psi : \frac{\partial M_y^s}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}^s}{\partial x} - V_{yz}^s = 0 \quad (\text{III.18c})$$

$$\delta \xi : \frac{\partial V_{xz}^s}{\partial x} + \frac{\partial V_{yz}^s}{\partial y} - V_z^s = 0 \quad (\text{III.18d})$$

### Conditions aux limites :

Le long des arêtes  $x = 0$  et  $x = a$ , les conditions aux limites sont les suivantes ;

$$M_x^b = \left( \frac{\partial M_x^b}{\partial x} + 2 \frac{\partial M_{xy}^b}{\partial y} \right) = M_x^s = M_{xy}^s = V_{xz}^s = 0 \quad \text{ou bien : } \frac{\partial w_0}{\partial x} = w_0 = \phi = \psi = \xi = 0 \quad (\text{III.19a})$$

Le long des arêtes  $y = 0$  et  $y = b$ , les conditions aux limites sont les suivantes ;

$$M_y^b = \left( \frac{\partial M_y^b}{\partial y} + 2 \frac{\partial M_{xy}^b}{\partial x} \right) = M_y^s = M_{xy}^s = V_{yz}^s = 0 \quad \text{ou bien : } \frac{\partial w_0}{\partial y} = w_0 = \phi = \psi = \xi = 0 \quad (\text{III.19b})$$

Aux coins  $(x = 0, y = 0)$ ,  $(x = a, y = 0)$ ,  $(x = 0, y = b)$  et  $(x = a, y = b)$  la condition à la limite est donnée par :

$$M_y^b = 0 \quad \text{ou bien : } w_0 = 0 \quad (\text{III.19c})$$

En substituant les termes de contraintes résultantes de l'équation (III.17) dans l'équation (III.18), les équations différentielles du mouvement en termes de variables de déplacement inconnues  $w_0(x, y)$ ,  $\phi(x, y)$ ,  $\psi(x, y)$  et  $\xi(x, y)$  sont obtenues sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \delta w_0 : & -\frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} D_{11} + \frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3} F_{11} - 2 \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial y^2} D_{12} + \frac{\partial^3 \phi}{\partial x \partial y^2} F_{12} + \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^2 \partial y} F_{12} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} B_{s_{13}} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} B_{s_{23}} \\ & - \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^4} D_{22} + \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} F_{22} - 4 \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial y^2} D_{66} + 2 \frac{\partial^3 \phi}{\partial x \partial y^2} F_{66} + 2 \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^2 \partial y} F_{66} + q = 0 \end{aligned} \quad (\text{III.20a})$$

$$\begin{aligned} \delta \phi : & -\frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} F_{11} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} H_{11} - \frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial y^2} F_{12} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} H_{12} + \frac{\partial \xi}{\partial x} H_{s_{13}} - 2 \frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial y^2} F_{66} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} H_{66} \\ & + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} H_{66} - \frac{\partial \xi}{\partial x} D_{s_{55}} - \phi D_{s_{55}} = 0 \end{aligned} \quad (\text{III.20b})$$

$$\begin{aligned} \delta\psi : & -\frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2 \partial y} F_{12} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} H_{12} - \frac{\partial^3 w_0}{\partial y^3} F_{22} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} H_{22} + \frac{\partial \xi}{\partial y} H_{s_{23}} - 2 \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2 \partial y} F_{66} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} H_{66} \\ & + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} H_{66} - \frac{\partial \xi}{\partial y} D_{s_{44}} - \psi D_{s_{44}} = 0 \end{aligned} \quad (\text{III.20c})$$

$$\begin{aligned} \delta\xi : & \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} D_{s_{55}} + \frac{\partial \phi}{\partial x} D_{s_{55}} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} D_{s_{44}} + \frac{\partial \psi}{\partial y} D_{s_{44}} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} B_{s_{13}} - \frac{\partial \phi}{\partial x} H_{s_{13}} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} B_{s_{23}} \\ & - \frac{\partial \psi}{\partial y} H_{s_{23}} - \xi F_{s_{33}} = 0 \end{aligned} \quad (\text{III.20d})$$

Et les composantes de rigidité sont définie par :

$$(D_{ij}, F_{ij}, H_{ij}, D_{s_{ij}}) = \int_{-h/2}^{h/2} \bar{Q}_{ij}(z^2, zf(z), f^2(z), g^2(z)) dz \quad (\text{III.21a})$$

$$(B_{s_{ij}}, H_{s_{ij}}, F_{s_{ij}}) = \int_{-h/2}^{h/2} g'(z) \bar{Q}_{ij}(z, f(z), g'(z)) dz \quad (\text{III.21b})$$

### III.8 Solution analytique

Les équations différentielles de mouvement associées à la flexion statique de la plaque admettent les solutions type Navier pour déterminer les solutions analytiques pour lesquelles les fonctions de déplacement  $w_0(x, y)$ ,  $\phi(x, y)$ ,  $\psi(x, y)$  et  $\xi(x, y)$  sont exprimées en tant que produit de paramètres arbitraires et de fonctions trigonométriques connues pour respecter les équations de mouvement et les conditions aux limites.

$$\begin{Bmatrix} w_0 \\ \phi \\ \psi \\ \xi \end{Bmatrix} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \begin{Bmatrix} W_{mn} \sin(\alpha x) \sin(\beta y) \\ \Phi_{mn} \cos(\alpha x) \sin(\beta y) \\ \Psi_{mn} \sin(\alpha x) \cos(\beta y) \\ \xi_{mn} \sin(\alpha x) \sin(\beta y) \end{Bmatrix} \quad (\text{III.22a})$$

Où  $W_{mn}$ ,  $\Phi_{mn}$ ,  $\Psi_{mn}$  et  $\xi_{mn}$  sont des coefficients arbitraires à déterminer. Les paramètres  $\alpha$  et  $\beta$  sont exprimés comme :

$$\alpha = m\pi/a, \quad \beta = n\pi/b \quad (\text{III.22b})$$

La charge transversale  $q$  est également développée en double série de Fourier comme :

$$q(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} q_{mn} \sin(\alpha x) \sin(\beta y) \quad (\text{III.23})$$

Où les valeurs du coefficient  $q_{mn}$  sont données ci-dessous pour différents types de chargement en utilisant l'équation (III.24) :

$$q_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b q(x, y) \sin(\alpha x) \sin(\beta y) dx dy \quad (\text{III.24})$$

Les coefficients  $q_{mn}$  sont exprimés pour certaines charges comme suit :

- Cas d'une charge sinusoïdale transversale :

$$q_{mn} = q_0, \quad m = n = 1 \quad (\text{III.25a})$$

- Cas d'une charge transversale uniformément répartie :

$$q_{mn} = \frac{16q_0}{mn\pi^2}, \quad m = n = 1, 3, 5, \dots \quad (\text{III.25b})$$

- Cas d'une charge transversale linéairement variable :

$$q_{mn} = \frac{8q_0}{mn\pi^2} \cos(m\pi), \quad m = n = 1, 3, 5, \dots \quad (\text{III.25c})$$

- Cas d'une charge transversale centrale linéaire :

$$q_{mn} = \frac{2P}{b} \sin(m\pi\zeta/a), \quad m = n = 1, 3, 5, \dots \quad (\text{III.25d})$$

En remplaçant les équations (III.22) et (III.23) dans les équations (III.20), les solutions analytiques peuvent être déterminées par :

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} \\ K_{12} & K_{22} & K_{23} & K_{24} \\ K_{13} & K_{23} & K_{33} & K_{34} \\ K_{14} & K_{24} & K_{34} & K_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} W_{mn} \\ \Phi_{mn} \\ \Psi_{mn} \\ \xi_{mn} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -q_{mn} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{III.26})$$

Où  $[K_{ij}]$  représente la matrice de rigidité symétrique, les éléments de la matrice sont exprimés par les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} K_{11} &= -\alpha^4 D_{11} - 2\alpha^2 \beta^2 D_{12} - \beta^4 D_{22} - 4\alpha^2 \beta^2 D_{66} \\ K_{12} &= \alpha^3 F_{11} + \alpha\beta^2 F_{12} + 2\alpha\beta^2 F_{66} \\ K_{13} &= \alpha^2 \beta F_{12} + \beta^3 F_{22} + 2\alpha^2 \beta F_{66}, \\ K_{14} &= -\alpha^2 B s_{13} - \beta^2 B s_{23}, \quad K_{22} = -\alpha^2 H_{11} - \beta^2 H_{66} - D s_{55} \\ K_{23} &= -\alpha\beta H_{12} - \alpha\beta H_{66}, \quad K_{24} = \alpha H s_{13} - \alpha D s_{55} \\ K_{33} &= -\beta^2 H_{22} - \alpha^2 H_{66} - D s_{44}, \quad K_{34} = \beta H s_{23} - \beta D s_{44} \\ K_{44} &= -\alpha^2 D s_{55} - \beta^2 D s_{44} - F s_{33} \end{aligned} \quad (\text{III.27})$$

### **III.9 Conclusion**

Dans ce chapitre, nous avons proposé une solution générale du comportement mécanique en flexion des plaques orthotropes en utilisant la théorie d'ordre élevé (**quasi-3D HSDT**). La théorie proposée n'exige pas de facteur de correction de cisaillement, montre l'effet d'étirement de l'épaisseur et donne une description hyperbolique de la contrainte de cisaillement à travers l'épaisseur tout en remplissant la condition de contrainte de cisaillement nulle sur les bords libres. Les équations du mouvement pour la plaque orthotrope sont obtenues en appliquant le principe des travaux virtuels. Ensuite, les solutions sont obtenues en utilisant la technique de Navier. Les résultats présentés dans les chapitres suivants permettent d'apprécier clairement l'apport de cette théorie en les comparant avec les solutions analytiques des autres théories.

## *Chapitre IV*

### *Résultats et discussions*

## IV Résultats et discussions

### IV.1 Introduction

L'objectif de ce chapitre est de présenter les résultats numériques de l'analyse du comportement statique des plaques orthotropes simplement appuyées sous différentes conditions de chargement mécanique, en utilisant les formulations mathématiques développées dans le chapitre précédent sur la proposition d'une théorie de déformation en cisaillement hyperbolique (**quasi-3D HSDT**) et en comparant les résultats numériques obtenus avec les autres théories connus dans la littérature scientifique, tel que la théorie classique des plaques (**CPT**), la théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (**FSDT**), la théorie de la déformation en cisaillement d'ordre élevé (**HSDT**) et la théorie de déformation en cisaillement trigonométrique (**TSDT**), ainsi qu'une étude paramétrique pour déterminer les différents paramètres qui influent sur la réponse statique des plaques rectangulaires en matériaux orthotropes simplement appuyées soumise aux différentes conditions de chargement.

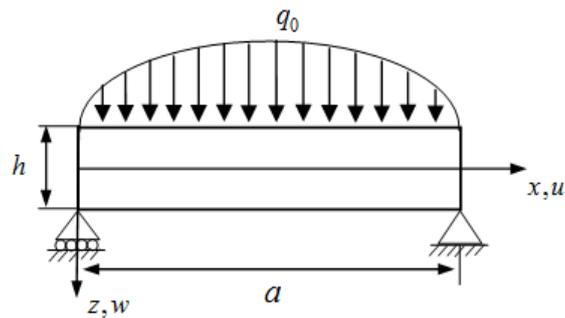
En général, on a essayé de varier différents facteurs, tels que le rapport géométrique  $a/b$ , le rapport d'élancement  $a/h$  et les valeurs du coefficient  $q_{mn}$  et observer l'influence de ces derniers sur le comportement statique des plaques orthotropes, d'où on va voir les résultats obtenus dans ce qui suit.

### IV.2 Flexion des plaques orthotropes simplement appuyées

Dans cette section, divers exemples numériques sont présentés et discutés afin de vérifier l'exactitude et l'efficacité de la théorie proposée dans la prédiction de la flexion des plaques orthotropes carrées et rectangulaires simplement appuyées pour quatre types de chargement mécanique. Les résultats obtenus sont comparés à ceux rapportés dans la littérature.

#### Exemple 1 : Plaque orthotrope simplement appuyée soumise à une charge sinusoïdale

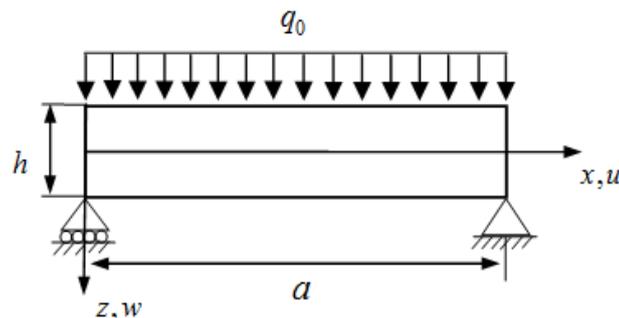
Une plaque orthotrope simplement appuyée le long de tous les bords est soumise à une charge sinusoïdale transversale (**Figure IV.1**, équation **(III.25a)**), agissant sur la surface supérieure de la plaque ( $z = -h/2$ ), où  $q_0$  indique l'intensité de la charge sinusoïdale au centre de la plaque.



**Figure IV.1 :** Plaque orthotrope simplement appuyée sous une charge sinusoïdale.

**Exemple 2 : Plaque orthotrope simplement appuyée soumise à une charge uniformément répartie**

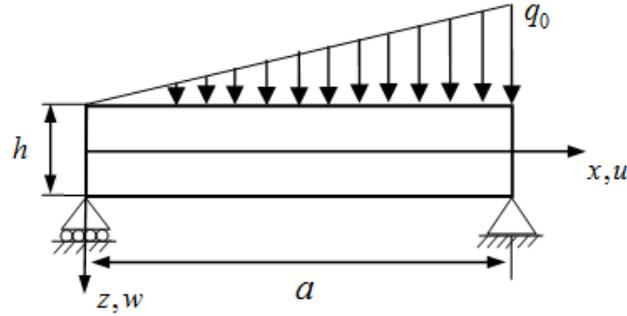
Une plaque orthotrope simplement appuyée est soumise à une charge transversale uniformément répartie (**Figure IV.2**), agissant sur la surface supérieure de la plaque ( $z = -h/2$ ), où le coefficient de l'expansion de la charge  $q_{mn}$  pour la charge uniformément répartie est donné par la relation de Fourier (équation **(III.25b)**).



**Figure IV.2 :** Plaque orthotrope simplement appuyée sous une charge uniformément répartie.

**Exemple 3 : Plaque orthotrope simplement appuyée soumise à une charge linéairement variable**

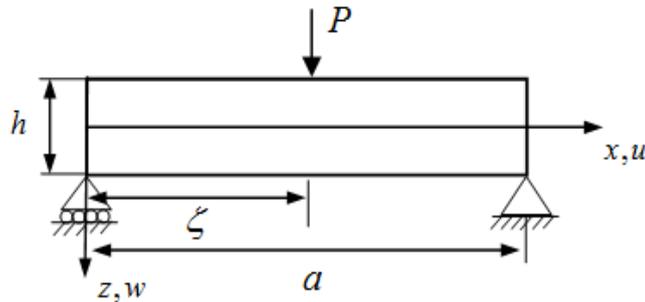
Pour montrer la validité de notre modèle analytique, le troisième exemple est illustré dans la **Figure IV.3**, pour le cas d'une plaque orthotrope simplement appuyée soumise à une charge transversale linéairement variable. Le coefficient  $q_{mn}$  pour ce type de chargement est donné par la relation de Fourier (équation **(III.25c)**).



**Figure IV.3 :** Plaque orthotrope simplement appuyée sous une charge linéairement variable.

#### Exemple 4 : Plaque orthotrope simplement appuyée soumise à une charge centrale linéaire

Le quatrième exemple est illustré dans la **Figure IV.4** ci-dessous, pour le cas d'une plaque orthotrope simplement appuyée soumise à une charge transversale centrale linéaire à  $(x = a/2)$ . Le coefficient  $q_{mn}$  pour cette charge est donné par l'équation (III.25d), où  $\zeta$  est la distance de la charge distribuée en ligne par rapport à l'axe de coordonné  $y$ .



**Figure IV.4 :** Plaque orthotrope simplement appuyée sous une charge centrale linéaire.

Les propriétés matérielles de la plaque orthotrope utilisées dans les exemples ci-dessus sont :

**Matériau 1 :** les propriétés des matériaux orthotropes utilisées sont données par Pagano [39].

$$\frac{E_1}{E_2} = 25, \quad \frac{E_3}{E_2} = 1, \quad \frac{G_{12}}{E_2} = \frac{G_{13}}{E_2} = 0.5, \quad \frac{G_{23}}{E_2} = 0.2, \quad \nu_{12} = \nu_{13} = \nu_{23} = 0.25 \quad (\text{IV.1})$$

**Matériau 2 :** les propriétés orthotropes utilisées sont données par Srinivas et Rao [40].

$$\begin{aligned} \bar{Q}_{11} &= 23.2 \cdot 10^6 \text{ psi}, & \bar{Q}_{22} &= 12.6 \cdot 10^6 \text{ psi}, & \bar{Q}_{11} &= 12.3 \cdot 10^6 \text{ psi} \\ \bar{Q}_{12} &= 5.41 \cdot 10^6 \text{ psi}, & \bar{Q}_{13} &= 0.25 \cdot 10^6 \text{ psi}, & \bar{Q}_{23} &= 2.28 \cdot 10^6 \text{ psi} \\ \bar{Q}_{44} &= 6.19 \cdot 10^6 \text{ psi}, & \bar{Q}_{55} &= 3.71 \cdot 10^6 \text{ psi}, & \bar{Q}_{66} &= 6.10 \cdot 10^6 \text{ psi} \end{aligned} \quad (\text{IV.2})$$

IV.3 Résultats numériques et discussion

Les résultats sont obtenus pour différents rapports d'élanement  $a/h$  de la plaque et pour les rapports géométriques  $a/b = 0.5, 1$ . Les résultats obtenus sont présentés dans les Tableaux IV.1 à IV.7. Les résultats de la théorie de l'élasticité exacte [39, 40] disponibles dans la littérature sont utilisés comme une base de comparaison des résultats obtenus par rapport aux différentes théories des plaques.

Les résultats calculés pour les déplacements transversaux et les contraintes (cas du matériau 1) sont présentés sous la forme adimensionnelle suivante :

$$\bar{w} = \frac{w100h^2E_2}{qa^2}; \quad (\bar{\sigma}_x, \bar{\sigma}_y) = \frac{\sigma_x, \sigma_y}{qs^2}; \quad (\bar{\tau}_{xy}, \bar{\tau}_{xz}, \bar{\tau}_{yz}) = \frac{(\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz})}{qs}; \quad s = a/h \quad (IV.3)$$

Et pour le cas du matériau 2, les formes adimensionnelles suivantes sont utilisées :

$$\bar{w} = \frac{w\bar{Q}_{11}}{qh}; \quad (\bar{\sigma}_x, \bar{\sigma}_y) = \frac{\sigma_x, \sigma_y}{q}; \quad (\bar{\tau}_{xy}, \bar{\tau}_{xz}, \bar{\tau}_{yz}) = \frac{(\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz})}{q} \quad (IV.4)$$

$$\text{Erreur(\%)} = \frac{(\text{valeur du présent modèle}) - (\text{valeur de la solution d'élasticité exacte})}{\text{valeur de la solution d'élasticité exacte}} \times 100$$

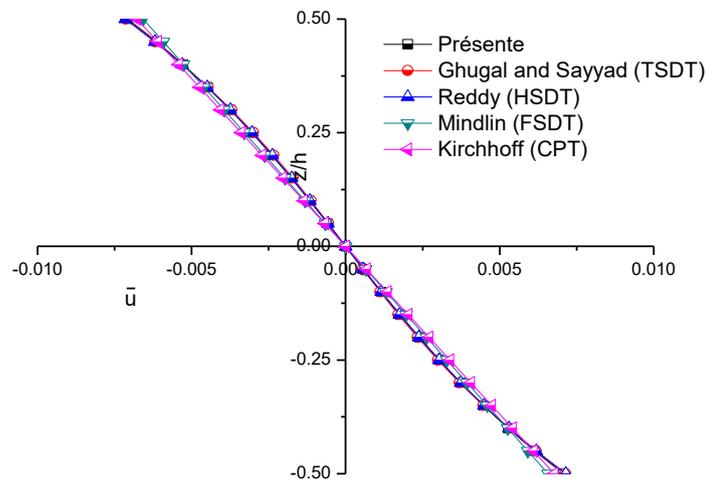
**Tableau IV.1 :** Comparaison des déplacements transversaux  $\bar{w}$ , les contraintes axiales  $\bar{\sigma}_x, \bar{\sigma}_y$  et les contraintes de cisaillement adimensionnelles  $\bar{\tau}_{xy}$  dans les plaques orthotropes carrées simplement appuyées soumises à une charge sinusoïdale, matériau 1.

$a/b$	$a/h$	Théories	Modèle	$\bar{w}$	$\bar{\sigma}_x$	$\bar{\sigma}_y$	$\bar{\tau}_{xy}$
				(0)	( $h/2$ )	( $h/2$ )	( $-h/2$ )
1	4	Présente	Quasi-3D	1.598	0.725	0.072	0.041
		Ghugal et Sayyad [37]	TSDT	1.581	0.751	0.071	0.042
		Reddy [25]	HSDT	1.620	0.738	0.064	0.043
		Mindlin [5]	FSDT	1.662	0.477	0.058	0.036
		Kirchhoff [1, 2]	CPT	0.431	0.538	0.026	0.021
		Pagano [39]	Elasticité	1.598	0.728	0.073	---
	10	Présente	Quasi-3D	0.634	0.566	0.036	0.026
		Ghugal et Sayyad [37]	TSDT	0.634	0.572	0.036	0.026
		Reddy [22]	HSDT	0.637	0.570	0.035	0.026
		Mindlin [5]	FSDT	0.638	0.522	0.034	0.025
		Kirchhoff [1, 2]	CPT	0.431	0.538	0.026	0.021
		Pagano [39]	Elasticité	0.634	0.568	0.036	---
	100	Présente	Quasi-3D	0.433	0.538	0.026	0.021
		Ghugal et Sayyad [37]	TSDT	0.433	0.538	0.026	0.021
		Reddy [25]	HSDT	0.433	0.539	0.027	0.021
		Mindlin [5]	FSDT	0.433	0.534	0.027	0.021
		Kirchhoff [1, 2]	CPT	0.431	0.538	0.026	0.021
		Pagano [39]	Elasticité	0.433	0.538	0.026	---

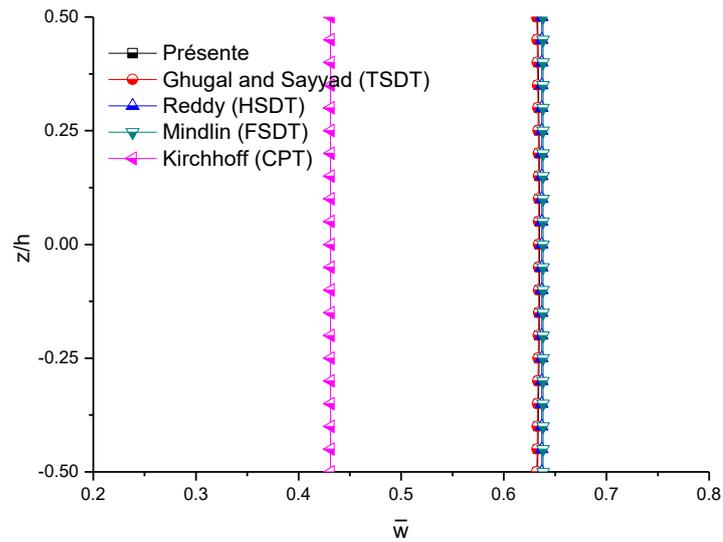
Le Tableau **IV.1** montre la comparaison des déplacements transversaux et des contraintes pour une plaque orthotrope soumise à une charge transversale sinusoïdale pour les différentes valeurs du rapport d'épaisseur ( $a/h = 4, 10, 100$ ). La présente théorie **quasi-3D** à quatre variables donne des excellents résultats avec la solution exacte **3D** pour les valeurs de déplacement transversal et les contraintes normales. **HSDT** et **FSDT** donne la valeur la plus élevée pour de la flèche pour  $a/b = 4$  et  $10$ . **CPT** donne la valeur plus faible pour du déplacement pour  $a/h = 4$  et  $10$ . Pour  $a/h = 4$ , **TSDT** surestime la valeur du déplacement de  $-1,06\%$ .

La variation du déplacement axial adimensionnel  $\bar{u}$  et les contraintes normales  $\bar{\sigma}_x$  et  $\bar{\sigma}_y$  à travers l'épaisseur d'une plaque orthotrope simplement appuyée soumise à une charge sinusoïdale est également représentée sur les Figures **IV.5**, **IV.7** et **IV.8** en utilisant les différents modèles de théories. Généralement on remarque que la présente théorie de déformation en cisaillement à quatre variables et les autres théories proposées par Ghugal et Sayyad [37], Reddy [25], Mindlin [5] et Kirchhoff [1, 2] sont identiques.

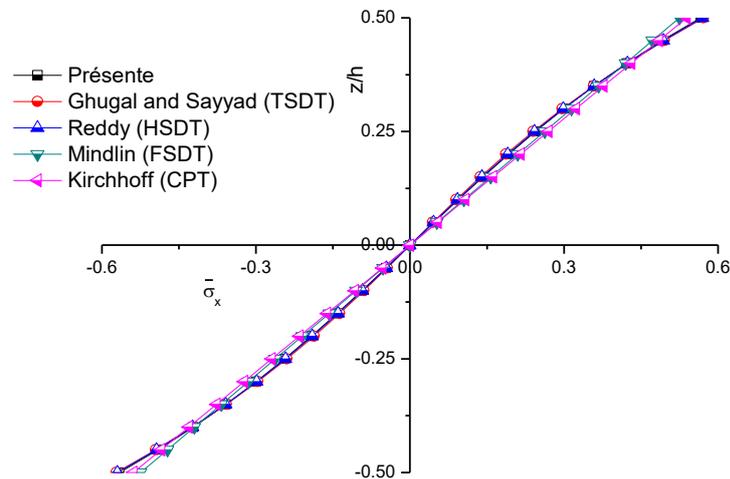
La Figure **IV.6** représente la variation du déplacement transversal adimensionnel  $\bar{w}$  à travers l'épaisseur d'une plaque orthotrope simplement appuyée soumise à une charge sinusoïdale, nous remarquons que la théorie classique de Kirchhoff [1, 2] donne une valeur plus faible que les autres théories.



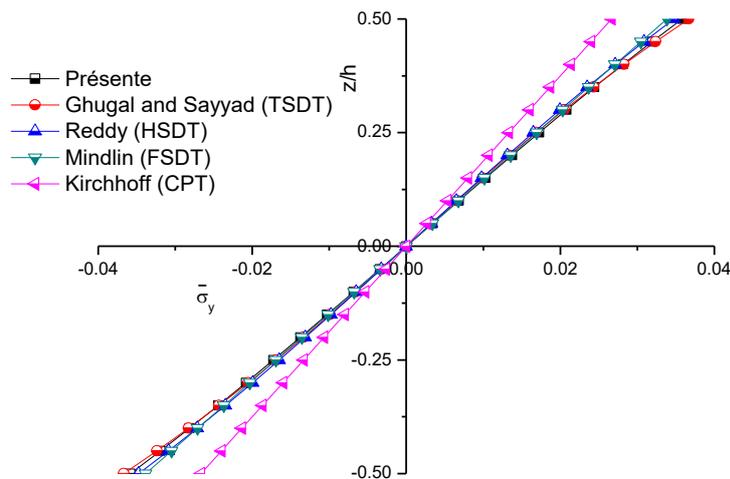
**Figure IV.5 :** Variation du déplacement axial adimensionnel  $\bar{u}$  à travers l'épaisseur d'une plaque orthotrope simplement appuyée soumise à une charge sinusoïdale,  $a=b$ ,  $a/h=10$ , matériau 1.



**Figure IV.6 :** Variation du déplacement transversal adimensionnel  $\bar{w}$  à travers l'épaisseur d'une plaque orthotrope simplement appuyée soumise à une charge sinusoïdale,  $a=b$ ,  $a/h=10$ , matériau 1.



**Figure IV.7 :** Variation des contraintes axiales adimensionnelles  $\bar{\sigma}_x$  à travers l'épaisseur d'une plaque orthotrope simplement appuyée soumise à une charge sinusoïdale,  $a=b$ ,  $a/h=10$ , matériau 1.



**Figure IV.8 :** Variation des contraintes axiales adimensionnelles  $\bar{\sigma}_x$  à travers l'épaisseur d'une plaque orthotrope simplement appuyée soumise à une charge sinusoïdale,  $a=b$ ,  $a/h=10$ , matériau 1.

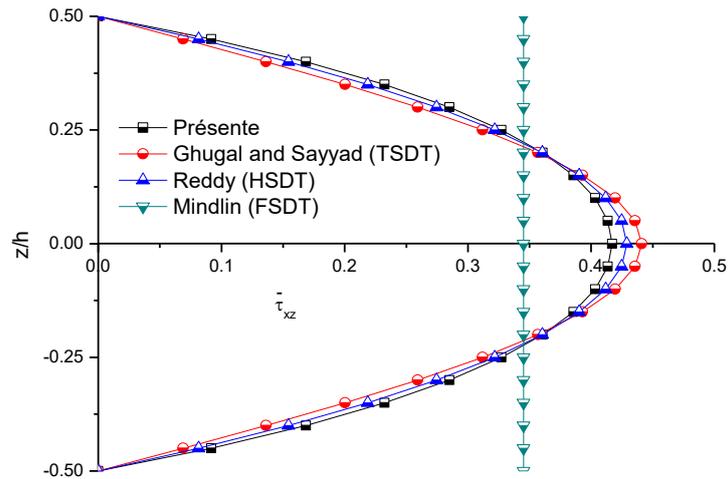
**Tableau IV.2 :** Comparaison des contraintes de cisaillement transversales adimensionnelles  $\bar{\tau}_{xz}, \bar{\tau}_{yz}$  dans les plaques orthotropes carrées simplement appuyées soumises à une charge sinusoïdale, matériau 1.

$a/b$	$a/h$	Théories	Modèle	$\bar{\tau}_{xz}^{CR}$	$\bar{\tau}_{xz}^{EE}$	$\bar{\tau}_{yz}^{CR}$	$\bar{\tau}_{yz}^{EE}$
				(0)	(0)	(0)	(0)
1	4	Présente	Quasi-3D	0.3782	0.3539	0.0733	0.0732
		Ghugal et Sayyad [37]	TSDT	0.3956	0.3430	0.0770	0.0723
		Reddy [25]	HSDT	0.3903	0.3532	0.0714	0.0694
		Mindlin [5]	FSDT	0.2692	0.4039	0.0491	0.0736
		Kirchhoff [1, 2]	CPT	---	0.4397	---	0.0377
		Pagano [39]	Elasticité	0.3620	---	0.0738	---
	10	Présente	Quasi-3D	0.4170	0.4226	0.0454	0.0465
		Ghugal et Sayyad [37]	TSDT	0.4411	0.4203	0.0481	0.0460
		Reddy [25]	HSDT	0.4290	0.4225	0.0458	0.0455
		Mindlin [5]	FSDT	0.2877	0.4315	0.0306	0.0459
		Kirchhoff [1, 2]	CPT	---	0.4397	---	0.0377
		Pagano [39]	Elasticité	0.4220	---	0.0460	---
100	Présente	Quasi-3D	0.4278	0.4397	0.0368	0.0379	
	Ghugal et Sayyad [37]	TSDT	0.4537	0.4394	0.0389	0.0376	
	Reddy [25]	HSDT	0.4397	0.4396	0.0377	0.0377	
	Mindlin [5]	FSDT	0.3517	0.4397	0.0302	0.0377	
	Kirchhoff [1, 2]	CPT	---	0.4398	---	0.0376	
	Pagano [39]	Elasticité	---	---	---	---	

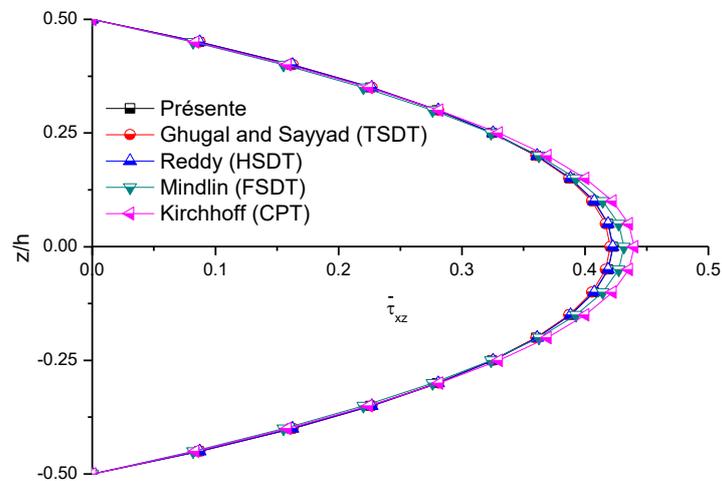
La comparaison des contraintes de cisaillement transversales adimensionnelles d'une plaque orthotrope carrée soumise à une charge sinusoïdale pour  $a/h = 4, 10$  et  $100$  est présentée dans le Tableau **IV.2**. Pour les plaques épaisses  $a/h = 4$ , La présente théorie surestime la valeur de la contrainte de cisaillement transverse maximale de  $4,47\%$  lorsqu'elle est obtenue en utilisant la relation constitutive  $\bar{\tau}_{xz}^{CR}$  et la sous-estime de  $-2,24\%$  lorsqu'elle est obtenue en utilisant les équations d'équilibre  $\bar{\tau}_{xz}^{EE}$ .

Toutefois, **HSDT** et **TSDT** donnent la valeur la plus élevée pour des contraintes de cisaillement transversales adimensionnelles  $\bar{\tau}_{xz}^{CR}$  pour les plaques épaisses et moyennement épaisses ( $a/h = 4$  et  $10$ ). La présente théorie donne des valeurs de contraintes de cisaillement transverse maximales  $\bar{\tau}_{yz}^{CR}$  et  $\bar{\tau}_{yz}^{EE}$  plus proche que la valeur exacte de la solution d'élasticité pour  $a/h = 4$  et  $a/h = 10$ . **FSDT** donne des valeurs plus faibles pour des contraintes de cisaillement transverse maximale  $\bar{\tau}_{xz}^{CR}$  pour  $a/h = 4$  et  $10$ .

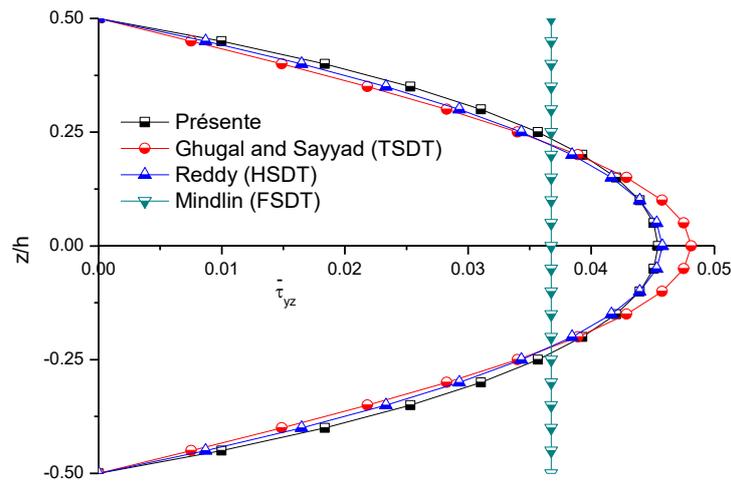
Les Figures **IV.9** à **IV.12** ci-dessous représentent les variations des contraintes de cisaillement transversal à travers l'épaisseur d'une plaque orthotrope simplement appuyée soumise à une charge sinusoïdale, à partir de ces figures on remarque que les variations des contraintes de cisaillement transversal  $\bar{\tau}_{xz}^{CR}$  et  $\bar{\tau}_{yz}^{CR}$  calculées en utilisant les relations constitutives du présent modèle d'ordre élevé sont identiques, en particulier avec ceux rapportées par Ghugal et Sayyad [37] basé sur la théorie trigonométrique de déformation en cisaillement et la théorie de Reddy [25] sur la base de la théorie **HSDT**. La théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (**FSDT**) de Mindlin [5] donne une variation droite, pour cela nous comprenons que les contraintes de cisaillements sont différentes à zéro dans les bords supérieur et inférieur de la plaque carrée orthotrope. Et pour les Figures **IV.10** et **IV.12** on remarque que les variations de contraintes de cisaillement transversal  $\bar{\tau}_{xz}^{EE}$  et  $\bar{\tau}_{yz}^{EE}$  calculées à l'aide des équations d'équilibre sont presque identiques pour toutes les théories utilisées, à l'exception de la théorie classique.



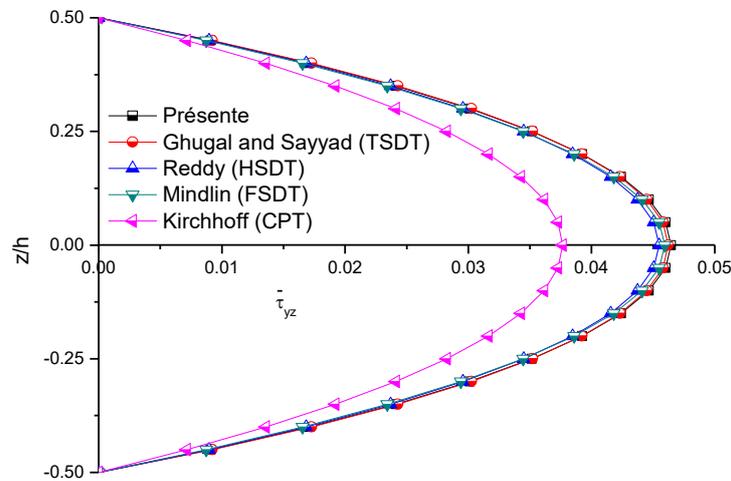
**Figure IV.9 :** Variation des contraintes de cisaillement transversal  $\bar{\tau}_{xz}^{CR}$  à travers l'épaisseur d'une plaque orthotrope simplement appuyée soumise à une charge sinusoïdale (calculées à l'aide des relations constitutives),  $a=b$ ,  $a/h=10$ , matériau 1.



**Figure IV.10 :** Variation des contraintes de cisaillement transversal  $\bar{\tau}_{xz}^{EE}$  à travers l'épaisseur d'une plaque orthotrope simplement appuyée soumise à une charge sinusoïdale (calculées à l'aide des équations d'équilibre),  $a=b$ ,  $a/h=10$ , matériau 1.



**Figure IV.11 :** Variation des contraintes de cisaillement transversal  $\bar{\tau}_{yz}^{CR}$  à travers l'épaisseur d'une plaque orthotrope simplement appuyée soumise à une charge sinusoïdale (calculées à l'aide des relations constitutives),  $a=b$ ,  $a/h=10$ , matériau 1.



**Figure IV.12 :** Variation des contraintes de cisaillement transversal  $\bar{\tau}_{yz}^{EE}$  à travers l'épaisseur d'une plaque orthotrope simplement appuyée soumise à une charge sinusoïdale (calculées à l'aide des équations d'équilibre),  $a=b$ ,  $a/h=10$ , matériau 1.

**Tableau IV.3** : Comparaison des déplacements transversaux  $\bar{w}_{yz}^{EE}$ , les contraintes axiales  $\bar{\sigma}_x, \bar{\sigma}_y$  et les de cisaillement transversales adimensionnelles  $\bar{\tau}_{xz}^{CR}, \bar{\tau}_{xz}^{EE}$  dans les plaques orthotropes carrées simplement appuyées soumises à une charge uniformément répartie, matériau 1.

$a/b$	$a/h$	Théories	Modèle	$\bar{w}_{yz}^{EE}$	$\bar{\sigma}_x$	$\bar{\sigma}_y$	$\bar{\tau}_{xz}^{CR}$	$\bar{\tau}_{xz}^{EE}$
				(0)	( $h/2$ )	( $h/2$ )	(0)	(0)
1	4	Présente	Quasi-3D	2.3634	0.9898	0.0838	0.6306	0.6184
		Ghugal et Sayyad [37]	TSDT	2.3412	1.0262	0.0830	0.6511	0.6171
		Reddy [25]	HSDT	2.3886	1.0188	0.0746	0.6567	0.6166
		Mindlin [5]	FSDT	2.4375	0.7041	0.0727	0.4906	0.7359
		Kirchhoff [1, 2]	CPT	0.6497	0.7867	0.0245	---	0.7806
		Pagano [39]	Elasticité	2.3590	0.9640	0.0780	0.6160	---
	10	Présente	Quasi-3D	0.9477	0.8192	0.0366	0.7249	0.7250
		Ghugal et Sayyad [37]	TSDT	0.9470	0.8266	0.0377	0.7615	0.6500
		Reddy [25]	HSDT	0.9506	0.8246	0.0355	0.7469	0.6813
		Mindlin [5]	FSDT	0.9520	0.7707	0.0353	0.5154	0.7731
		Kirchhoff [1, 2]	CPT	0.6497	0.7867	0.0245	---	0.7806
		Pagano [39]	Elasticité	0.9470	0.8210	0.0360	0.7310	---

Le Tableau IV.3 montre la comparaison des déplacements transversaux et des contraintes dans les plaques orthotropes carrées soumises à une charge uniformément répartie. Le déplacement prédit par la présente théorie pour les plaques épaisses et moyennement épaisses ( $a/h = 4$  et 10) est en bon accord avec la solution d'élasticité exacte, tandis que les résultats présentés par Ghugal et Sayyad [37] sont en étroit accord avec la solution exacte seulement pour les plaques moyennement épaisses ( $a/h = 10$ ). La présente théorie surestime la contrainte normale axiale  $\bar{\sigma}_x$  obtenue par une valeur de 2,67% et surestime la contrainte normale axiale  $\bar{\sigma}_y$  par une valeur de 7,43% pour  $a/h = 4$ . La théorie classique (CPT) donne des valeurs plus faibles pour des déplacements pour  $a/h = 4$  et 10.

**Tableau IV.4 :** Comparaison des déplacements transversaux  $\bar{\tau}_{yz}^{EE}$ , les contraintes axiales  $\bar{\sigma}_x, \bar{\sigma}_y$  et les de cisaillement transversales adimensionnelles  $\bar{\tau}_{xz}^{CR}, \bar{\tau}_{xz}^{EE}$  dans les plaques orthotropes simplement appuyées soumises à une charge uniformément répartie, matériau 2.

a/h	a/b	Théories	Modèle	$\bar{\tau}_{yz}^{EE}$	$\bar{\sigma}_x$	$\bar{\sigma}_y$	$\bar{\tau}_{xz}^{CR}$	$\bar{\tau}_{xz}^{EE}$
				(0)	(h/2)	(h/2)	(0)	(0)
10	1	Présente	Quasi-3D	688.49	35.958	22.14	5.264	5.256
		Ghugal et Sayyad [37]	TSDT	688.50	35.940	22.33	5.546	5.191
		Reddy [25]	HSDT	689.50	36.010	22.08	5.382	5.320
		Mindlin [5]	FSDT	688.37	35.578	22.04	5.426	5.461
		Kirchhoff [1, 2]	CPT	640.39	36.098	21.62	---	5.564
		Srinivas et Rao [40]	Elasticité	688.57	36.021	22.21	5.341	5.191
	0.5	Présente	Quasi-3D	1408.4	65.93	20.13	6.808	6.835
		Ghugal et Sayyad [37]	TSDT	1408.4	65.90	21.22	7.187	6.800
		Reddy [25]	HSDT	1408.5	65.95	19.93	6.958	7.163
		Mindlin [5]	FSDT	1408.4	65.38	20.00	7.061	7.048
		Kirchhoff [1, 2]	CPT	1326.0	65.55	19.78	7.133	7.133
		Srinivas et Rao [40]	Elasticité	1408.5	65.97	20.20	6.927	---

Les résultats pour la plaque orthotrope rectangulaire lorsqu'elle est soumise à une charge uniformément répartie sont présentés dans le Tableau IV.4, qui montre que les résultats des déplacements et des contraintes obtenus par la présente théorie **quasi-3D** et les autres théories **TSDT**, **HSDT** et **FSDT** donnent des valeurs plus proches que les valeurs de la solution d'élasticité **3D**.

**Tableau IV.5 :** Comparaison des déplacements transversaux  $\bar{\tau}_{yz}^{EE}$ , les contraintes axiales  $\bar{\sigma}_x, \bar{\sigma}_y$  et les de cisaillement transversales adimensionnelles  $\bar{\tau}_{xz}^{CR}, \bar{\tau}_{xz}^{EE}$  dans les plaques orthotropes carrées simplement appuyées soumises à une charge linéairement variable, matériau 1.

a/b	a/h	Théories	Modèle	$\bar{\tau}_{yz}^{EE}$	$\bar{\sigma}_x$	$\bar{\sigma}_y$	$\bar{\tau}_{xz}^{CR}$	$\bar{\tau}_{xz}^{EE}$
				(0)	(h/2)	(h/2)	(0)	(0)
1	4	Présente	Quasi-3D	1.1817	0.4949	0.0419	0.3153	0.3142
		Ghugal et Sayyad [37]	TSDT	1.1706	0.5131	0.0415	0.3255	0.3117
		Reddy [25]	HSDT	1.1943	0.5094	0.0373	0.3283	0.3083
		Mindlin [5]	FSDT	1.2187	0.3520	0.0363	0.2453	0.3679
		Kirchhoff [1, 2]	CPT	0.3248	0.3933	0.0122	---	0.3903
		Pagano [39]	Elasticité	1.1795	0.4820	0.0390	0.3080	---
	10	Présente	Quasi-3D	0.4738	0.4096	0.0183	0.3625	0.3277
		Ghugal et Sayyad [37]	TSDT	0.4735	0.4133	0.0188	0.3807	0.3250
		Reddy [25]	HSDT	0.4753	0.4123	0.0177	0.3735	0.3406
		Mindlin [5]	FSDT	0.4760	0.3853	0.0176	0.2577	0.3865
		Kirchhoff [1, 2]	CPT	0.3248	0.3933	0.0122	---	0.3903
		Pagano [39]	Elasticité	0.4735	0.4105	0.0180	0.3655	---

Tableau IV.5 montre la comparaison des déplacements et des contraintes des plaques orthotropes épaisses et moyennement épaisses soumises à une charge linéairement variable. Le déplacement obtenu par la présente théorie surestime la valeur de 0,18% pour  $a/h = 4$  et donne la valeur plus proche que la valeur exacte de la solution d'élasticité pour  $a/h = 10$ , tandis que la théorie de Ghugal et Sayyad donne la valeur exacte pour  $a/h = 10$ . La présente théorie surestime la contrainte normale axiale  $\bar{\sigma}_x$  par une valeur de 2,67% et surestime la contrainte normale axiale  $\bar{\sigma}_y$  de 7,43% pour les plaques orthotropes épaisses ( $a/h = 4$ ). La contrainte de cisaillement transversal obtenue par Reddy surestime la valeur de 6,59% lorsqu'elle est obtenue en utilisant les relations constitutives et donne la valeur plus proche lorsqu'elle est obtenue en utilisant les équations d'équilibre pour  $a/h = 4$ .

**Tableau IV.6 :** Comparaison des déplacements transversaux  $\bar{w}_{xz}^{EE}$ , les contraintes axiales  $\bar{\sigma}_x, \bar{\sigma}_y$  et les de cisaillement transversales adimensionnelles  $\bar{\tau}_{xz}^{CR}, \bar{\tau}_{xz}^{EE}$  dans les plaques orthotropes simplement appuyées soumises à une charge linéairement variable, matériau 2.

$a/h$	$a/b$	Théories	Modèle	$\bar{w}_{xz}^{EE}$	$\bar{\sigma}_x$	$\bar{\sigma}_y$	$\bar{\tau}_{xz}^{CR}$	$\bar{\tau}_{xz}^{EE}$
				(0)	( $h/2$ )	( $h/2$ )	(0)	(0)
10	1	Présente	Quasi-3D	344.245	17.979	11.069	2.632	2.62
		Ghugal et Sayyad [37]	TSDT	344.253	17.970	11.165	2.773	2.60
		Reddy [25]	HSDT	344.750	18.005	11.040	2.691	2.66
		Mindlin [5]	FSDT	344.125	17.789	11.024	2.713	2.73
		Kirchhoff [1, 2]	CPT	320.200	18.049	10.811	---	2.78
		Srinivas et Rao [40]	Elasticité	344.285	18.010	11.105	2.6705	---
10	0.5	Présente	Quasi-3D	704.191	32.967	10.06	3.404	3.42
		Ghugal et Sayyad [37]	TSDT	704.175	32.950	10.61	3.594	3.40
		Reddy [25]	HSDT	704.250	32.975	9.966	3.479	3.58
		Mindlin [5]	FSDT	704.200	32.69	10.00	3.531	3.52
		Kirchhoff [1, 2]	CPT	663.000	32.775	9.890	3.566	3.57
		Srinivas et Rao [40]	Elasticité	704.250	32.985	10.10	3.463	---

Le Tableau IV.6 présente les résultats numériques de la réponse statique des plaques orthotropes soumises à une charge linéairement variable. Les résultats sont comparés avec les théories de déformation de cisaillement **TSDT**, **HSDT**, **FSDT** et la théorie d'élasticité **3D** pour les plaques orthotropes carrées et rectangulaires. On observe que les résultats sont en excellent accord avec ceux calculés à l'aide de la théorie de l'élasticité **3D** générés par Srinivas et Rao [40]. Cependant, la théorie classique de Kirchhoff [1, 2] donne des valeurs plus faibles des déplacements pour  $a/h = 4$  et 10.

**Tableau IV.7** : Comparaison des déplacements transversaux  $\bar{w}_{yz}^{EE}$ , les contraintes axiales  $\bar{\sigma}_x, \bar{\sigma}_y$  et les de cisaillement transversales adimensionnelles  $\bar{\tau}_{xz}^{CR}, \bar{\tau}_{xz}^{EE}$  dans les plaques orthotropes simplement appuyées soumises à une charge de ligne centrale, matériau 2.

$a/h$	$a/b$	Théories	Modèle	$\bar{w}$	$\bar{\sigma}_x$	$\bar{\sigma}_y$	$\bar{\tau}_{xz}^{CR}$	$\bar{\tau}_{xz}^{EE}$
				(0)	( $h/2$ )	( $h/2$ )	(0)	(0)
10	1	Présente	Quasi-3D	869.088	58.699	23.223	3.329	3.220
		Ghugal et Sayyad [37]	TSDT	868.665	58.896	23.261	3.527	3.190
		Reddy [25]	HSDT	871.206	58.922	23.329	3.640	3.353
		Mindlin [5]	FSDT	872.002	56.244	23.532	2.339	3.509
		Kirchhoff [1, 2]	CPT	794.148	57.783	24.511	---	3.536
		Srinivas et Rao [40]	Elasticité	868.665	58.896	23.261	3.527	3.190
10	0.5	Présente	Quasi-3D	791.08	41.392	6.933	4.608	4.245
		Ghugal et Sayyad [37]	TSDT	791.47	41.366	6.974	4.686	4.287
		Reddy [25]	HSDT	792.50	41.273	6.869	4.698	4.810
		Mindlin [5]	FSDT	792.50	40.320	6.948	3.097	4.646
		Kirchhoff [1, 2]	CPT	738.72	40.332	7.205	---	4.651
		Srinivas et Rao [40]	Elasticité	791.47	41.366	6.974	4.686	4.287

La comparaison des contraintes de cisaillement transversal adimensionnelles d'une plaque orthotrope soumise à une charge centrale linéaire pour les plaques carrées et rectangulaires moyennement épaisses est présentée dans le Tableau IV.7. On observe que le déplacement obtenu par la présente théorie surestime la valeur de 0.05% pour les plaques carrées  $a/b = 1$ . Néanmoins, La théorie **quasi-3D** donne des valeurs des déplacements et des contraintes plus proches que la valeur de la solution d'élasticité **3D** pour  $a/b = 0.5$ . D'autre part, les résultats numériques des contraintes normales axiales  $\bar{\sigma}_x$  et  $\bar{\sigma}_y$  et les contraintes de cisaillement transversal  $\bar{\tau}_{xz}^{CR}$  et  $\bar{\tau}_{xz}^{EE}$  pour les plaques carrées et rectangulaires, calculées par le présent modèle **quasi-3D** sont en excellent accord avec la solution d'élasticité **3D**. Cependant, les résultats des déplacements et des contraintes obtenus par la théorie trigonométrique **TSDT** donne des valeurs proches de la valeur exacte de la solution d'élasticité.

#### IV.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté les résultats numériques de l'analyse statique du comportement en flexion des plaques orthotropes simplement appuyées sous différents types de chargement mécanique en utilisant la théorie de déformation en cisaillement hyperbolique **quasi-3D** à quatre variables qui tient en considération la composante de déformation normale suivant la direction d'épaisseur de la plaque (effet d'étirement dans l'épaisseur) et qui néglige la présence d'un facteur de correction de cisaillement.

Le champ de déplacement dans le plan a été employé en utilisant une fonction hyperbolique en fonction de coordonnée d'épaisseur afin d'inclure l'effet de la déformation de cisaillement transversal. La cinématique de la présente théorie est plus riche que celles des autres théories de déformation de cisaillement d'ordre supérieur, en faisant intervenir la déformation normale et les contraintes de cisaillement transversal suivant les coordonnées de l'épaisseur ( $z$ ). Les résultats obtenus sont commentés et comparés avec d'autres théories disponibles dans la littérature.

Enfin on peut conclure que la présente théorie est précise et efficace pour analyser le comportement statique des plaques en matériau composite orthotrope.

## *Conclusion générale*

### *Conclusion générale*

Dans notre travail, une théorie **quasi-3D HSDT** est appliquée pour analyser la flexion des plaques orthotropes carrées et rectangulaires simplement appuyées soumises aux différentes conditions de chargement mécanique. La cinématique du présent modèle analytique est développée en considérant d'autres hypothèses simplificatrices pour les théories **HSDT** existantes, pour réduire le nombre des variables inconnues. Les équations du mouvement ont été déterminées par le principe des travaux virtuels. Des séries doubles de Fourier ont été employées pour résoudre les équations aux dérivées partielles. On observe que les résultats des déplacements et des contraintes prévus par la théorie proposée sont en excellent accord avec les résultats de la théorie d'élasticité **3D**, le cas échéant. La théorie proposée est capable de produire des contraintes de cisaillement transversal raisonnablement précis en utilisant les relations constitutives, et de meilleures valeurs de ces contraintes peuvent être obtenues par l'intégration des équations d'équilibre. La théorie proposée est capable de prédire l'effet de la concentration des contraintes de façon plus évidente sur la distribution des contraintes de cisaillement transversal par rapport à d'autres théories d'ordre élevé, et cela est dû à l'inclusion de l'effet d'étirement dans l'épaisseur des plaques orthotropes. En effet, l'efficacité de la théorie proposée a été démontrée par la comparaison des résultats calculés par le présent modèle par rapport aux résultats des autres théories.

En perspectives à ce travail, nous envisagerons d'utiliser cette théorie pour les cas suivants :

- Analyse du comportement statique et la stabilité des plaques orthotropes par la présente théorie pour les différentes conditions d'appuis ;
- Application la présente théorie pour d'autres types de matériaux et/ou structures comme par exemple les plaques, poutres et coques en composites stratifiés, en matériaux sandwichs et en matériaux composites avancés (**FGM**) ;
- Application pour d'autres conditions de chargement (thermomécaniques, hygrothermiques, ...etc.) ;
- Valider le présent modèle analytique avec d'autre solution numérique en utilisant un autre moyen de calcul, tel que la méthode des éléments finis, car la méthode des éléments finis permettra de traiter des problèmes plus complexes comparativement à la méthode analytique.

## *Conclusion générale*

---

Enfin, on peut dire que ce modeste travail s'inscrit dans le cadre de la contribution de notre université dans le domaine du comportement des plaques composites et précisément leurs comportements statiques.

## *Références bibliographiques*

*Références bibliographiques*

- [1] Kirchhoff. G. R, “Über das gleichgewicht und die bewegung einer elastischen scheinbe”, *Jl. of Reine Angew. Math. (Crelle)*, Vol. 40, 1850, pp 51–88.
- [2] Kirchhoff. G. R, “Über die schwingungen einer kriesformigen elastischen scheinbe”, *Poggendorffs Annalen*, Vol. 81, pp 258–264.
- [3] Reissner. E, “On the theory of bending of elastic plates”, *Jl. of Mathematics and Physics*, Vol. 23, 1944, pp 184–191.
- [4] Reissner. E, “The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates”, *ASME J. Appl. Mech*, Vol. 12, 1945, pp 69–77.
- [5] Mindlin. R. D, “Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates”, *ASME Jl. Appl. Mech*, Vol. 18, 1951, pp 31–38.
- [6] Naghdi. P. M, “On the theory of thin elastic shell”, *Quarterly of Applied Math*, Vol. 14, 1957, pp 369–380.
- [7] Pister. K. S et Westmann R. A, “Bending of plates on an elastic foundatio”, *ASME Jl. Appl. Mech*, Vol. 29, 1962, pp 369–374.
- [8] Whitney. J. M et Sun. C. T, “A higher order theory for extensional motion of laminated composites”, *J. Sound Vib*, Vol. 30, 1973, pp 85–97.
- [9] Nelson. R. B, et Lorch. D. R, “A refined theory for laminated orthotropic plates”, *ASME J. Appl. Mech*, Vol. 41, 1974, pp 177–183.
- [10] Hildebrand. F. B, Reissner. E et Thomas. G. B, “Notes on the foundation of the theory of small displacements of orthotropic shells”, *NACA TN1833*, Washington, D.C. 1949.
- [11] Basset. A. B, “On the extension and flexure of cylindrical and spherical thin elastic shells”, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, Vol. 181, 1890, pp 433–480.
- [12] Donnell. L. H, “A theory for thick plates”, *Procs. Second U. S. National Congress of Applied Mechanics*, ASME Pub, University of Michigan, Michigan, 1955, pp 369–373.
- [13] Reissner. E, “On the derivation of boundary conditions for plate theory”, *Proce. of Royal Society of London*, Series A, Vol. 276, 1963, pp 178–186.
- [14] Provan. J. W et Koeller. R. C, “On the theory of elastic plates”, *Jl. Solids Structs*, Vol. 6, 1970, pp 933–950.
- [15] Lo. K. H, Christensen. R. M et Wu. E. M, “a high-order theory of plate deformation, part-1 : homogeneous plates”, *ASME Jl. Appl. Mech*, Vol. 44, 1977, pp 663–668.
- [16] Lo. K. H, Christensen R. M et Wu. E. M, “A high-order theory of plate deformation, part-2 : laminated plates”, *ASME Jl. Appl. Mech*, Vol. 44, 1970, pp 669–676.
- [17] Lo. K. H, Christensen. R. M et Wu. E. M, “Stress Solution Determination for Higher Order Plate Theory”, *J. Solids Structs*, Vol. 14, 1978, pp 655–662.
- [18] Levinson. M, “An accurate, simple theory of the statics and dynamics of elastic plates”, *Mechanics: Research Communications*, Vol. 7, 1980, pp 343-350.
- [19] Murthy. M. V. V, “An improved transverse shear deformation theory for laminated anisotropic plates”, *NASA Tech, Paper 1903*, 1981, pp 1–37.
- [20] Reddy. J. N et Phan. N. D, “Stability and vibration of isotropic, orthotropic and laminated plates according to higher order deformation theor”, *J. Sound Vib*, Vol. 98, 1985, pp 157–170.

- [21] Blocki. J, “A higher-order linear theory for isotropic plates-i, theoretical considerations”, *Jl. Solids Structs*, Vol. 29, 1992, pp 825–836.
- [22] Kant. T, “Numerical analysis of thick plates”, *Comp. Methods in Appl. Mech and Engg*, Vol. 31, 1982, pp 1–18.
- [23] Lee. K. H, Senthilnathan. N. R, Lim. S. P et Chaw. S. T, “A simple higher order non-linear shear deformation plate theory”, *Jl. Nonlinear Mech*, Vol. 24, No. 2, 1983, pp 127–137.
- [24] Reddy. J. N, “A refined nonlinear theory of plates with transverse shear deformation”, *J. Solids Struct*, Vol. 20, No. 9/10, 1984, pp 881–896.
- [25] Reddy. J. N, “A simple higher order theory for laminated composite plates”, *ASME Jl. Appl. Mech*, Vol. 51, 1984, pp 745–752.
- [26] Hanna. N. F et Leissa. A. W, “A higher order shear deformation theory for the vibration of thick plates”, *Jl. Sound Vib*, Vol. 170, 1994, pp 545–555.
- [27] Noor. A. K et Burton. W.S, “Assessment of shear deformation theories for multilayered composite plates”, *Appl. Mech. Reviews*, Vol. 42, 1989, pp 1–13.
- [28] Ghugal. Y. M et Shimpi. R. P, “A review of refined shear deformation theories for isotropic and anisotropic laminated plates”, *J. Reinf. Plast. Comp*, Vol. 21, 2002, pp 775–813.
- [29] Levy. M, “Memoire sur la theorie des plaques elastique planes”, *Jl. Des Mathematiques Pures et Appliquees*, Vol. 30, 1877, pp 219–306.
- [30] Stein. M, “Nonlinear theory for plates and shells including effect of shearing”, *AIAA Jl*, Vol. 24, 1986, pp 1537–1544.
- [31] Stein. M et Bains. N.J.C, “Post buckling behavior of longitudinally compressed orthotropic plates with transverse shearing flexibility”, *AIAA Jl*, Vol. 28, 1990, pp 892–895.
- [32] Stein. M et Jegly. D. C, “Effect of transverse shearing on cylindrical bending, vibration and buckling of laminate plates”, *AIAA Jl*, Vol. 25, 1987, pp 123–129.
- [33] Shimpi. R. P et Patel. H. G, “A two variable refined plate theory for orthotropic plate analysis”, *Jl. Solids Structs*, Vol. 43, 2006, pp 6783–6799.
- [34] Shimpi. R. P, “Refined plate theory and its variants”, *AIAA Jl*, Vol. 40, No. 1, 2002, pp 137–146.
- [35] Shimpi. R. P, Arya. H et Naik. N. K, “A higher order displacement model for the plate analysis”, *Jl. Reinf. Plast. Comp*, Vol. 22, 2003, pp 1667–1688.
- [36] Shimpi. R. P, Patel. H. G et Arya. H, “New first order shear deformation plate theories”, *J. Appl. Mech*, Vol. 74, 2007, pp 523–533.
- [37] Ghugal. Y. M et Sayyad. A. S, “Static flexure of thick orthotropic plates using trigonometric shear deformation theory” *J. of Struct. Eng*, Vol. 39, No. 5, December 2012 - January 2013, pp. 512–521.
- [38] Jones. R.M, “Mechanics of Composite Materials”, *McGraw Hill Kogakusha Ltd*, Tokyo, 1975.
- [39] Pagano. N. J, “Exact solutions for bidirectional composites and sandwich plates”, *Jl. Comp. Mat*, Vol. 4, 1970, pp 20–34
- [40] Srinivas. S et Rao. A.K, “Bending and buckling of simply supported thick orthotropic rectangular plates and laminates”, *Jl. Solids Structs*, Vol. 6, 1970, pp 1463–1481.
- [41] Wang. P, “Étude numérique et expérimentale de procédé d’élaboration des matériaux composites par infusion de résine”, *Thèse de doctorat*, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Saint-Etienne, 2010.

- [42] Güneri. Akovali, “Handbook of Composite Fabrication”, *Rapra Technology Ltd*, Ankara,2001, pp 03–14.
- [43] Autar. K. Kaw, “Mechanics of composite materials- second edition”, *Taylor & Francis Group. LLC*, Vol.29, 2006.
- [44] Khaled. Ziane, “Analyse, Evaluation et Réduction des Risques d’un Parc Eolien”, *Thèse de Doctorat*, Sciences de l’ingénieur physiques, Université d’Oran 2 Mohamed Ben Ahmed, 2017.
- [45] Aucher. J, “Etude comparative du comportement de composites à matrice thermoplastique ou thermodurcissable ”, *Thèse de Doctorat*, Institut National des Sciences Appliquées - Rouen, 2009.
- [46] Laurent. Gornet, “Généralités sur les matériaux composites”, *ECN. Ecole Centrale Nantes*, 2008.
- [47] Berthelot. J. M, “Matériaux composites comportement mécanique et analyse des structures”, *Paris. Masson*, 1992,615 p.
- [48] Marzano. Marc, “Les matériaux composites”, *Action Composite Pascal Celle*, ANFA,2014.
- [49] Berthelot. J. M, “Mécanique des Matériaux et Structures Composites”, *ISMANS Institut Supérieur des Matériaux et Mécanique Avancés*, Le Mans, France, 2010.
- [50] Brigante. Domenico, “New Composite Materials Selection, Design, and Application”, *Olympus FRP. Engineering Group Napoli*, Italie,2014.
- [51] Hami. Brahim, “Elaboration et caractérisation physico-mécanique d’une structure sandwich multicouches”, *Sciences et Génie des Matériaux*, Université M’hamed Bougara-Boumerdes,2017
- [52] Elmoossouess. Bouchra, “Étude de la stabilité des plaques en matériaux fonctionnellement gradués En utilisant des théories de déformation de cisaillement d’ordre élevé”, *Thèse de Doctorat*, Université d’Oran de sciences et technologies, 2018.
- [53] Berreur. Louis, “L’industrie française des matériaux composites”, *DiGITIP / SIM*, Ministère de l’Economie des Finances et de l’Industrie,2002.
- [54] Mihaluta. Marius, “Etude de la mise en œuvre industrielle d’un nouveau procédé de mise en forme de produits composites”, Génie des procédés, *Thèse de Doctorat*, Arts et Métiers ParisTech, 2011.
- [55] Daghia. Federica et Gendre. Lionel, “Quelques procédés de mise en forme des composites”, *CNS. CACHAN*, Université Paris-Saclay, 2011.
- [56] Chorfi. S, “Analyse des plaques minces sous l’effet des conditions extérieures ”, *Mémoire de Magister*, université Mantouri Constantine,2010.
- [57] Fekrar. Abdelkader, “Conception des plaques FGM ayant un comportement similaire aux plaques homogènes”, *Mémoire de Magister*, Faculté des sciences de l’ingénieur, Université Djillali Liabes de Sidi Bel Abbes,2010.
- [58] Bourada. Fouad, “Etude de la stabilité des plaques composites épaisses en utilisant des théories de déformation d’ordre élevé”, *Thèse de Doctorat*, Centre Universitaire Belhadj Bouchaib-Ain T’émouchent, 2018.
- [59] Reissner. E et Stavsky. Y, “Bending and stretching of certain type of hetero-geneous aelotropic elastic plate”, *J. Appl. Mech*, Vol.28, 1961, pp 402–408.
- [60] Kirchhoff. G, “Über das gleichgewicht und die bewegung einer elastischen scheinbe”, *Journal fur reine und angewandte Mathematik*, Vol. 40, 1950, pp 51-88.

- [61] Yang. J. J et Shen. H. S, “Nonlinear bending analysis of shear deformable functionally graded lates subjected to thermo-mechanical loads under various boundary conditions”, *Composites, Part B*, Vol. 34 (2), 2003, pp 103–115.
- [62] Ghannadpour. SAM, Ovesy.H. R et Nassirnia. M, “Buckling analysis of functionally graded plates under thermal loadings using the finite strip method”, *Comput Struct*,2012, Vol.108–109, pp 93–99.
- [63] Chakraverty. S et Pradhan. K. K, “Free vibration of exponential functionally graded rectangular plates in thermal environment with general boundary conditions”, *Aerosp. Sci. Technol*, Vol.36,2014, pp 132-156.
- [64] Ruan. M et Wang. Z. M, “Transverse vibrations of moving skew plates made of functionally graded material”, *J. Vib. Control*, 2014,
- [65] Loy. C. T, Lam. K. Y et Reddy, J. N, “Vibration of functionally graded cylindrical shells”, *Int. J. Mech. Sci*, Vol.41(3), 1999, pp 309–324.
- [66] Du. C, Li. Y et Jin. X, “Nonlinear forced vibration of functionally graded cylindrical thin shells”, *Thin-Walled Struct*, Vol.78, 2014, pp 26–36.
- [67] Ebrahimi. M. J et Najafizadeh. M. M, “Free vibration analysis of two-dimensional functionally graded cylindrical shells”, *Appl Math Model*, Vol.38(1), 2014, pp 308–324.
- [68] Meksi. Rafik, “Investigation sur les differents comportements mecaniques des structures en materiaux composites avances”, *Thèse de Doctorat*, Faculté de Technologie, Université Djillali Liabes Sidi Bel Abbes, 2018.
- [69] Wang. C. M, Reddy. J. N et Lee. K. H, “Shear deformable beams and plates. relationships with classical solutions”, *Library of Congress Cataloging in Publication Data*, 2000, pp 89–108.
- [70] Ambartsumyan. S.A, “Theory of Anisotropic Plate”, *Economic Publishing Co*,1969.
- [71] Reissner. E, “On Transverse Bending of Plates, Including the Effects of Transverse Shear Deformation”, *Int. J. of Solids and Struct*, Vol.11, 1975, 569–573.
- [72] Reddy. J. N, “Mechanics of Laminated Composites Plates: Theory and Analysis”, *CRC Press, Boca Raton*, 1997.
- [73] Aydogdu. M, “Vibration analysis of cross-ply laminated beams with general boundary conditions by Ritz method”, *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 47,2005, pp 1740–1755.
- [74] Reddy. J. N, “Analysis of functionally graded plates”, *Int J Numer Method Eng*, Vol.47(41–43), 1999, pp 663–684.
- [75] Bachir. B. R, “Contribution à l’Etude de la Stabilité des Plaques Epaissees en Composite sur Fondations Elastiques”, *Thèse de Doctorat*, Université des sciences et de la technologie d’Oran Mohamed Boudiaf, 2014.
- [76] Touratier. M, “An efficient standard plate theory”, *Int. J. Eng. Sc*, Vol.29 (8), 1991, pp 901–916.
- [77] Ait Atmane. H, Tounsi. A, Mechab. I et Adda Bedia. E. A, “Free vibration analysis of functionally graded plates resting on Winkler-Pasternak elastic foundations using a new shear deformation theory”, *Int. J. Mech. Mater. Design*, Vol. 6 (2),2010, pp 113-121.
- [78] El Meiche. N, Tounsi. A, Ziane. N, Mechab, I et Adda. B, “Une nouvelle théorie de déformation de cisaillement hyperbolique pour le flambement et la vibration de plaque sandwich gradation fonctionnelle”, *International Journal of Mechanical Sciences*, 2011, pp 237–247.

- [79] Grover. N, Maiti. D et Singh. B, “A new inverse hyperbolic shear deformation theory for static and buckling analysis of laminated composite and sandwich plates”, *Compos. Struct*, Vol.95, 2013, pp 667 – 675.
- [80] Meksi. A, Benyoucef. S, Houari. M. S. A et Tounsi. A, “A simple shear deformation theory based on neutral surface position for functionally graded plates resting on Pasternak elastic foundations”, *Structural Engineering and Mechanics*, Vol.53(6), 2015, pp 1215-1240.
- [81] Thai. H.T, Vo. T.P, Bui. T.Q et Nguyen. T.K, “A quasi-3D hyperbolic shear deformation theory for functionally graded plates”, *Acta Mech*, 225(3),2014, pp 951–964.
- [82] Meradjah. M, Kaci. A, Houari. M.S.A, Tounsi. A, Mahmoud. S.R, “A new higher order shear and normal deformation theory for functionally graded beams”, *Steel Compos. Struct*,18(3),2015, pp 793–809.
- [83] Hamidi. A, Houari. M.S.A, Mahmoud. S.R et Tounsi. A, “A sinusoidal plate theory with 5-unknowns and stretching effect for thermomechanical bending of functionally graded sandwich plates”, *Steel Compos. Struct. Int. J*, 18(1),2015, pp 235–253.
- [84] Draiche. K, Tounsi. A et Mahmoud. S.R, “A refined theory with stretching effect for the flexure analysis of laminated composite plates”, *Geomechanics and Engineering*, 11(5),2016, pp 671–690.
- [85] Bennoun. M, Houari. M.S.A et Tounsi. A, “A novel five variable refined plate theory for vibration analysis of functionally graded sandwich plates”, *Mech. Adv. Mater. Struct*, 23(4),2016, pp 423–431.
- [86] Zenkour. A. M, “A simple four-unknown refined theory for bending analysis of functionally graded plates”, *Applied Mathematical Modelling*, 37,2013, pp 9041– 9051.
- [87] Mantari. J. L et Soares. C. G, “A quasi-3D tangential shear deformation theory with four unknowns for functionally graded plates”, *Acta Mech*, 226,2014, pp 625–642.
- [88] Reddy. J. N, “Analysis of functionally graded plates”, *Int J Numer Method Eng*, Vol.47(41–43), 1999, pp 663–684.
- [89] Nguyen. V. T, “ Modélisation globale et locale des structures multicouches par éléments finis de plaques ”, *Thèse de doctorat*, L'école nationale des ponts et chaussées ,2004.
- [90] Carrera. E, “Theories and finite elements for multilayered plates and shells: à unified compact formulation with numerical assessment and benchmarking”, *Arch.Comp. Meth. Eng*, Vol.10, 2003, pp 215-296.
- [91] Di Sciuva. M, “An improved shear-deformation theory for moderately thick mul-tilayered anisotropic shells and plates”, *Journal of AppliedMechanics*, vol. 54, 1987, pp 589-596.
- [92] Pagano. N. J, “Stress fields in composite laminates. International Journal of Solids and Structures”, Vol. 14, 1978, pp 385.
- [93] Fredrichs. K. O et Dressler. R. F, “A boundary layer theory for elastic plates. Comm. on Pure Applied Mathematics”, Vol. 14, 1961, pp 1–33.
- [94] Goldenveizer. A. L, “Derivation of an approximate theory of bending of plate by the method of asymptotic integration of the equations of the theory of elasticity”, *Prik. Mat. Mech*, Vol. 26(4), 1961, pp 668–686.
- [95] Ladeveze. P, “ Les modèles classiques et leurs extensions pour le calcul des plaques, volume 2 of Calcul de Structures et Intelligence Artificielle”, 1988.
- [96] Thai. H et Kim. S, “Levy-type solution for buckling analysis of orthotropic plates based on two variable refined plate theory”, *Composite Structures* 93, 2011, pp 1738-1746.

