REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEURE ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE IBN KHALDOUN - TIARET

MEMOIRE

Présenté à :

FACULTÉ DES MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUE
DÉPARTEMENT DES MATHEMATIQUES

Pour l'obtention du diplôme de :

MASTER

Spécialité :[AFA]

Par :

**[Larachi fatima zohra
Lazdek affaf]**

Sur le thème

INTRODUCTION À L'OPTIMISATION CONVEXE

Soutenu publiquement le 11 / 06 /2022 à Tiaret devant le jury composé de :

Mr OUARDANI Abderrahmane	Université Tiaret	Président
Mr AISSANI Mouloud	Université Tiaret	Encadreur
Mr HALOUZ Ahmed	Université Tiaret	Examinateur

2021-2022

REMERCIEMENT

Tout d'abord, nous remercions à Allah, notre créateur de nous avoir donné la force, la volonté et le courage afin d'accomplir ce modeste travail.

Comme guise de reconnaissance, j'adresse nos sincères remerciements, nos grand respect et nos noble gratitude à nos encadreur Dr.AISSANI Mouloud son aide, ses encouragements et à l'aide précieuse qu'il nos apportés en faisant profiter largement des ses connaissances. nous ne serons oublier sa constante disponibilité.

Nous vifs remerciements aux membres de jury et à son président avec qui nous allons soutenir ce mémoire et juger de sa qualité.
Toute notre gratitude va à tous les enseignants de l'université IBN KHALDOUN qui ont contribué à notre formation, en particulier du département de mathématique.
Au terme de cette recherche, nous est très agréables d'exprimer toute nos gratitudes, nos reconnaissances et nos très vifs remerciements à tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à l'élaboration de ce travail .

Enfin, nous tiens à remercier tous ceux qui, d'une manière ou d'autre, ont participé à ma formation et à la réalisation de ce travail.

Dédicace

Nous dédions ce mémoire
A nos chers parents nos père et nos mère, pour tous leurs sacrifices, leur amour, leur tendresse, leur soutien et leur prières tous au long de nos études,
A notre Encadreur Dr.AISSANI Mouloud,
A nos frères, pour leur appui et leur encouragement, A nos sœurs, pour leurs encouragements permanents et leur soutien moral,
A toute notre famille pour leur soutien tout au long de notre parcours universitaire,
Que ce travail soit l'accomplissement de vos vœux tant allégués, et le fuit de votre soutien infaillible,
Merci d'être toujours là pour notre.

Introduction La notion de la convexité constitue un cadre idéal pour les problèmes de minimisations, elle a ainsi acquis une grande importance dans de nombreuses applications, allant de la physique à l'économie en passant par toutes les sciences.

Dans ce mémoire, nous aborderons la convexité pour les ensembles et pour les fonctions, en établissant un lien entre elles via la notion de l'épigraphe et la notion de la semi continuité inférieure.

Comme résultats essentiels, nous présenterons le long de l'exposé quelques résultats fondamentaux liés à cette notion de convexité en dimension finie, tout en restons au niveau élémentaire comme le théorème de Carathéodory, le théorème de Krein-Milman, et le théorème de l'existence et l'unicité de la solution optimale pour un problème d'optimisation avec contrainte comme application.

Table des matières

Chapitre 1

Préliminaires

1.1 Quelques définitions d' analyse convexe

Soit E un espace vectoriel réel .

1.1.1 Sous-espace affine

Définition 1.1.1. *Si x et y sont deux vecteurs distincts de $\mathbb{R}^d$, la droite passant par x et y est l'ensemble $(1-\lambda)x+\lambda y|\lambda \in \mathbb{R}$. Un sous-ensemble A de $\mathbb{R}^d$ est appelé un sous-espace affine lorsqu'il satisfait :*

$$\forall x, y \in A, \forall \lambda \in \mathbb{R}, (1-\lambda)x+\lambda y \in A.$$

Par exemple, $\emptyset$ et $\mathbb{R}^d$ sont des sous-espaces affines. De même, les singletons $\{x\}$, les sous-espaces vectoriels, les droites, sont des sous-espaces affines. On note $A(\mathbb{R}^d)$ l'ensemble de tous les sous-espaces affines de $\mathbb{R}^d$.

1.1.2 Forme linéaire

Définition 1.1.2. *Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ (le cas réel est similaire). Un forme linéaire sur E est un opérateur linéaire $f : E \longrightarrow \mathbb{C}$. De manière équivalente, une fonction $f : E \longrightarrow \mathbb{C}$ est une forme linéaire si*

$$f(\alpha x+\beta y) = \alpha f(x)+\beta f(y) \text{ pour tout } x, y \in E \text{ et } \alpha, \beta \in \mathbb{C} .$$

1.1.3 Demi-espace

Définition 1.1.3. *Soit H un hyperplan affine ; soient f une forme linéaire non nulle sur E et a un réel tels que $H = \{x \in E \setminus f(x) = a\}$. On appelle demi-espaces associés à l'hyperplan H les ensembles $D_+ = \{x \in E \setminus f(x) \leq a\}$ et*

$D_- = \{x \in E \setminus f(x) \geq a\}$. *Les demi-espaces stricts associés à l'hyperplan H sont les ensembles* $D'_+ = \{x \in E \setminus f(x) < a\}$ *et* $D'_- = \{x \in E \setminus f(x) > a\}$.

Ces ensembles sont convexes. Les paires $\{D_+; D_-\}et\{D'_+; D'_-\}$ *ne dépendent pas du couple* $(f; a)$ *tel que* $H = \{x \in E \setminus f(x) = a\}$, *à permutation près : ceci résulte de la (voir référence [4] page 14 Remarque 1.3.15). On a évidemment* $D'_+ = D_+ \setminus H$ *et* $D'_- = D_- \setminus H$.

1.1.4 Espace de Hilbert

Définition 1.1.4. *Soit H un espace de Hilbert réel, c'est à dire un espace vectoriel muni d'un produit scalaire* $(x; y) \mapsto \langle x; y\rangle$, *complet pour la norme hilbertienne associée* $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$. *Comme dans le cas de la dimension finie, si* $x; y \in H$, *on pose* $d(x; y) = \|x - y\|$ *et pour toute partie* $A \subset H, d(x; A) = \inf\{d(x; y) \setminus y \in A\}$.

1.1.5 Espace dual topologie

Définition 1.1.5. *Soit* $\{X, \|.\|\}$ *un espace vectoriel normé sur* $\mathbb{K}(\mathbb{R} ou \mathbb{C})$.

Le dual (topologique) de X est l'espace $\mathcal{L}(X, \mathbb{K})$ *des formes linéaires continues sur X. On le note par* X^* *ou* X'. *On définit sur* X^* *la norme subordonnée à la norme de X. On notera souvent, par* x^* *un élément de* X^* *et* $\langle x^*, x\rangle$ *l'action de la forme* x^* *sur le vecteur x i.e.*

$$x^* : X \longrightarrow \mathbb{K}$$
$$x \mapsto \langle x^*, x\rangle := x^*(x) \ .$$

1.1.6 Espace dual

Définition 1.1.6. *Soit X un espace vectoriel normé. L'espace dual est un espace vectoriel normé, muni de la norme subordonnée à la norme de X, définie par :*

$$\|f\| = \sup_{x \neq 0} \frac{f(x)}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} |f(x)|, f \in X^* \ .$$

1.1.7 Domaine effective

Définition 1.1.7. *Le domaine effectif d'une fonction* $f : E \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *est l'ensemble*

$$dom f = \{x \in E \setminus f(x) < +\infty\} \ .$$

1.1.8 Cône

Définition 1.1.8. 1. *Une partie* Γ *de* E *est un cône de sommet* x_0 *si elle est stable par les homothéties de centre* x_i, *de rapport* $\lambda > 0$. *Si on ne précise pas le sommet* x_0, *ce sera* 0 .

2. Γ *est un cône convexe de sommet* x_0 *si de plus* Γ *est un convexe.*

3. *Un cône est pointé s'il contient son sommet, épointé sinon.*

Autrement dit, Γ *est un cône de sommet* x_0 *si et seulement si quelque soit* $x \in \Gamma$ *et* > 0 *alors,* $x_0 + \lambda(x - x_0) \in \Gamma$. *Dans le cas où* $x_0 = 0 : \Gamma$ *est un cône si et seulement si* $\lambda\mathit{\Gamma} \subset \mathit{\Gamma}$, *pour tout* $\lambda > 0$. *On va maintenant donner une caractérisation des cônes convexes (de sommet* 0 *) .*

1.2 Dimension d'un convexe

Définition 1.2.1. *On appelle dimension d'un convexe* C *la dimension de aff(C) , c'est aussi le nombre* p *maximal tel que* C *contient* $p + 1$ *points affinement indépendants .*

Chapitre 2

CONVEXITÉ , ENSEMBLE CONVEXE

2.1 ENSEMBLE CONVEXE

Soit E un espace vectoriel .

2.1.1 Ensemble convexe

Définition 2.1.1. *Une partie C de E est dite convexe si et seulement si*

$$\forall x, y \in C, \forall t \in [0,1] : tx + (1-t)y \in C$$

Géométriquement le vecteur ,$z(t) = tx + (1-t)y$ est le barycentre des points x et y affectés des coefficients (ou poids) respectifs t et $1-t$.
Lorsque t décrit l'intervalle $[0,1], z(t)$ décrit le segment fermé d'extrémités x et y que l'on notera $[x, y]$.
Ainsi, dire que C est convexe, c'est donc dire que C contient un segment dès qu'elle contient ses extrémités. En fait un convexe contient toute combinaison convexe de ses points .

Exemple 2.1 (Exemples et propriétés immédiates)**.** *Soit E, E_1, E_2, F des espaces vectoriels.*

1. *La partie de $\mathbb{R}^n$ définie par $\mathbb{R}^n_+ := \{x \in \mathbb{R}^n : x \geqslant 0\}$ est un convexe appelé orthant positif. La notation $x \geqslant 0$,veut dire que $x_i \geqslant 0$ pour tout indice $i \in \{1, \cdots, n\}$.*

2. *La somme* $C_1 + C_2 := x_1 + x_2 : x_1 \in C_1; x_2 \in C_2$ *de deux convexes* C_1 *et* C_2 *de* E *est un ensemble convexe.*
   Le produit $\alpha C := \{\alpha x : x \in C\}$ *d'un scalaire* $\alpha \in \mathbb{R}$ *par un convexe* C *est un convexe.*

3. *Soit* $A : E \longrightarrow F$ *une application linéaire. L'image directe* $A(C)$ *(resp. l'image réciproque*$A^{-1}(C)$*) d'un convexe* C *de* E *(resp. de* F *) par* A *est un convexe.*

4. *Soient* $C_1 \subset E_1$ *et* $C_2 \subset E_2$ *deux perties non vides. Alors le produit cartésien* $C_1 \times C_2$ *est convexe dans* $E_1 \times E_2$ *si et seulement si* C_1*et* C_2 *sont convexes.*

5. *On appelle polyèdre convexe de E tout ensemble de la forme* $\{x \in E : Ax \leqslant b\}$, *où'* $A : E \longrightarrow \mathbb{R}^m$ *est une application linéaire,* $b \in \mathbb{R}^m$ *et l'inégalité* $Ax \leqslant b$ *se comprend composante par composante, c'est-à-dire la composante* $(Ax)_i \leqslant b_i$, *pour tout* $i \in 1, \cdots, m$.
   C'est donc l'intersection d'un nombre fini de demi-espaces. D'après ce qui précède, c'est un convexe.

6. *On appelle simplexe unité de* $\mathbb{R}^n$ *l'ensemble défini par*
   $$\triangle_n = \{x \in \mathbb{R}^n : e^\intercal x = 1; x \geqslant 0\} .$$
   où $e = (1, \cdots, 1) \in \mathbb{R}^n$ *. C'est un convexe (intersection de deux convexes : un sous espace affine et l'orthant positif).*

7. *On note* $\mathbb{S}^n$ *l'espace vectoriel des matrices symétriques d'ordre* n *. Il est de dimension* $\frac{n(n+1)}{2}$*. Les ensembles*
   $$\mathbb{S}^n_+ := \{ A \in \mathbb{S}^n : A \text{ est semi-définie positive}\} .$$
   $$\mathbb{S}^n_{++} := \{ A \in \mathbb{S}^n : A \text{ est définie positive } \}.$$
   sont convexes. En effet, si A *et* $B \in \mathbb{S}^n_+$ *, alors pour tout* $t \in [0; 1]$ *et tout vecteur* $v \in \mathbb{R}^n$ *, ona*
   $$v^\intercal((1-t)A + tB)v = (1-t)v^\intercal Av + tv^\intercal Bv \geqslant 0,$$

ce qui montre que (1-t)A + tB $\in \mathbb{S}^n_+$*. On raisonne de même pour* $\mathbb{S}^n_{++}$.

2.1.2 Combinaison convexe

Définition 2.1.2. *Pour toute famille finie* $x_1, \cdots, x_n$ *de points de E et tout système* $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ *de réels positifs ou nuls avec* $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ *, le point* $\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$ *s'appelle une combinaison convexe des points* $x_1, \cdots, x_n$.

Proposition 2.1. *Soit C un convexe de E. Pour toute famille finie $x_1, \cdots, x_n$ de points de C et tout système $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ de réels positifs ou nuls avec $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i$, le vecteur $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$ appartient à C.*

Démonstration. On procède par récurrence sur le nombre de vecteurs n. il est claire que L'assertion est évidente pour $n = 1$.
Supposons maintenant que c'est vrai jusqu'à l'ordre n-1 et considérons le point $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$, où les x_i sont dans C. Si $\lambda_1 = 1$, les autres coefficients sont nuls et il n'y a rien à montrer.
Si $\lambda_1 < 1$ alors $\sum_{i=2}^{n} \lambda_i = 1 - \lambda_1 > 0$. Posons $\upsilon_i = \dfrac{\lambda_i}{1 - \lambda_1}$. Alors, on a $\sum_{i=2}^{n} \upsilon_i = 1$.
L'hypothèse de récurrence entraine le vecteur $y = \sum_{i=2}^{n} \upsilon_i x_i$ appartient à C ; ainsi

$x = \lambda_1 x_1 + (1 - \lambda_1) y \in C$

. □

Proposition 2.2. *Si $(C_i)_{i \in I}$ est une famille quelconque de parties convexes, alors leur intersection $\bigcap_{i \in I} C_i$ est une partie convexe.*

2.1.3 Enveloppe convexe

Définition 2.1.3. *Soit A une partie d'un espace vectoriel réel E l'enveloppe convexe de A est l'intersection de toute les parties convexes de E qui contiennent A , elle est notée conv(A) .*

On peut regarder l'enveloppe convexe d'une partie comme étant le plus petit convexe obtenu après ajout de points pour le convexifier.
On rassemble dans la proposition suivante les différentes propriétés de l'enveloppe convexe d'un ensemble.

Proposition 2.3. *L'enveloppe convexe d'une partie A de E est la plus petite partie convexe de E qui contient A .*

Développée de façon plus détaillée ce résultat caractérise l'enveloppe convexe con(A) comme étant l'unique sous-ensemble de E qui vérifie les trois conditions suivantes :

1. *conv(A) est convexe .*
2. *A est inclus dans conv(A)*
3. *Si C est un sous-ensemble convexe de E contenant A alors $con(A)$ est inclus dans C .*

Exemple 2.2. $conv(\emptyset) = \emptyset$

Proposition 2.4. *L'enveloppe convexe de A est l'ensemble de toutes les combinaisons convexes (finies) d'éléments de A :*

$$conv(A) = \{\textstyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i : \quad n \geq 1, \quad x_i \in A, \lambda_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1\} \ .$$

Démonstration. Comme $conv(A)$ est convexe, cet ensemble contient toutes les combinaisons convexes finies de ses éléments (voir référence [4] Proposition 1.1.3 page 7), donc en particulier celles des éléments de A.

Inversement, il est facile de voir que l'ensemble

$$C = \{\textstyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i : \quad n \geq 1, \quad x_i \in A, \quad \lambda_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1\}$$

est convexe ; et il contient A, donc aussi $conv(A)$
. □

Proposition 2.5. 1. *Si A est fini, soit $A = a_1, \cdots, a_p$, alors l'enveloppe convexe de A est*

$$conv(A) = \{\textstyle\sum_{i=1}^{p} \lambda_i a_i \quad \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 1\};$$

2. *Plus généralement, si $A_1, \cdots, A_p$ sont des parties convexes de E, alors*

$$conv(A_1 \cup A_2 \cup, \cdots, \cup A_p) = \{\textstyle\sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i / x_i \in A_i, \lambda_i \geq 0 \sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 1\} \ .$$

Démonstration. L'assertion 1) est évidente.
Montrons l'assertion 2). L'inclusion

$$\{\textstyle\sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i : \quad x_i \in A_i, \quad \lambda_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 1\} \subset conv(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_p)$$

est évidente. Montrons l'autre inclusion dans le cas où $p = 2$ pour simplifier les notations :
Si $x \in conv(A_1 \cup A_2)$, alors x s'écrit sous la forme

$$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \quad \text{avec } \lambda_i \geq 0; \quad i = 1, \cdots, n \text{ et } \sum_{i=1}^{n} \lambda_1 = 1.$$

Les vecteurs x_i sont dans réunion $A_1 \cup A_2$; soit $I = \{i \in \{1, \cdots n\}, x_i \in A_1\}$, et $J = \{i \in \{1, \cdots n\}, x_i \in A_2\}$. posons $\lambda = \sum_{i \in I} \lambda_i$.
Alors, $0 \leq \lambda \leq 1$ et $1 - \lambda = \sum_{i \in J} \lambda_i$. Si $\lambda = 0$ ou 1, x est alors dans $conv(A_1)$ ou dans $conv(A_2)$ et par suite dans $conv(A_1 \cup A_2)$.
Sinon, on écrit :

$$\begin{aligned} \text{x} &= \lambda \sum_{i \in I} \frac{\lambda_i}{\lambda} x_i + (1 - \lambda) \sum_{i \in J} \frac{\lambda_i}{1 - \lambda} x_i \\ &= \lambda y_1 + (1 - \lambda) y_2, y_1 \in A_1, y_2 \in A_2 \end{aligned}$$

On en déduit bien que $x \in conv(A_1 \cup A_2)$, d'où l'inclusion

$$conv(A_1 \cup A_2) \subset \{\sum_{i=1}^{2} \lambda_i x_i \quad x_i \in A_i \quad \lambda_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{2} \lambda_i = 1\}.$$

□

2.1.4 Notion de Point extrême

Définition 2.1.4. *Soit X un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$.*
Pour tout $p, x, y \in X$, dire que p se situe entre x et , y si $x \neq y$ et il existe un $0 < t < 1$ tel que $p = tx + (1 - t)y$.

Si K est un sous-ensemble de X et $p \in K$ on dit que p est point extrême de K s'il ne se situe pas entre deux points distincts de K. Autrement dit , s'il n'existe pas d'éléments $x, y \in K$ et $0 < t < 1$ tels que $x \neq y$ et $p = tx + (1 - t)y$.

L'ensemble de tous les points extrêmes de K est désigné par $Ext(A)$.

Théoreme 2.1.1. *Soit K un sous-ensemble convexe non vide d'un espace vectoriel X et $p \in K$; alors les affirmations suivantes sont équivalentes :*

1. *p est un point extrême de K .*
2. *$K \setminus \{p\}$ est convexe .*
3. *pour tout $x, y \in K$ si $p \in [x, y]$ alors $x = p$ ou $y = p$*

2.2 Topologiques sur les espaces vectoriel normée

Soit $(E; \|.\|)$ un espace vectoriel normé sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, en bref un espace vectoriel normé. E est donc un cas particulier d'espace métrique où la distance est donnée par

$$d(x, y) = \|x - y\| \ .$$

2.2.1 Ensemble ouvert

Définition 2.2.1. *Une partie $A \subset E$ d'un espace vectoriel normé est dite ouverte si ou bien $A = \emptyset$ ou bien*

$$\forall x_0 \in A, \quad \exists r > 0 \text{ tel que } \quad B(x_0, r) \subset A$$

On remarquera que l'espace E lui-même est ouvert.

Proposition 2.6. *Toute réunion quelconque d'ouverts et toute intersection finie d'ouverts est ouverte.*

Démonstration. voir référence[4] page 23 . □

2.2.2 Ensemble fermé

Définition 2.2.2. *Une partie A d'un espace vectoriel normé E est dite fermée si son complémentaire est ouvert.*

Proposition 2.7. *Toute intersection quelconque et toute réunion finie de fermés est fermée.*

Démonstration. voir référence[4] page 23 . □

2.2.3 Convergence

Définition 2.2.3. *Une suite de vecteurs $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'un espace vectoriel normé E converge vers un vecteur $x \in E$ si et seulement si $\|x_n - x\| \longrightarrow 0$ quand $n \longrightarrow \infty$.*

Proposition 2.8. *Dans un EVN E, une partie A est fermée si et seulement si pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$, convergeant vers $x \in E$, alors $x \in A$.*

Démonstration. voir référence[4] page 23 . □

2.2.4 Adhérence

Définition 2.2.4. 1. *Un point x est dit adhérent à un sous-ensemble A d'un EVN E s'il est limite d'une suite de points de A.*

2. *on appelle l'adhérence ou fermeture $\overline{A}$ de A l'ensemble des points adhérents à A .*

Proposition 2.9. *L'ensemble A est fermé si et seulement s'il contient tous ses points adhérents, c'est à dire $A = \overline{A}$.*

Démonstration. voir référence[4] page 24 . □

2.2.5 Point Intérieur

Définition 2.2.5. 1. *Un point x est intérieur à une partie A d'un espace vectoriel normé E s'il existe une boule $B(x, r)$ de centre x , de rayon $r > 0$ incluse dans A.*

2. *On appelle l'intérieur $\mathring{A}$ de A l'ensemble des ses points intérieurs.*

Proposition 2.10. *L'ensemble A est ouvert si et seulement s'il est égal à son intérieur .*

Démonstration. voir référence[4] page 24 . □

2.2.6 Compacité

Définition 2.2.6. *Une partie K d'un espace vectoriel normé est dite compacte si de toute suite de points de K on peut extraire une sous-suite convergeant dans K.*

Proposition 2.11. 1. *Toute partie fermé d'un compact est compacte.*

2. *L'image d'un compact par une application continue est compacte.*
3. *Si K est un compact et si $f : K \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue alors f est bornée et atteint ses bornes.*
4. *Tout compact d'un espace vectoriel normé est fermé et borné.*

Démonstration. voir référence[4] page 25 . □

2.2.7 Distance à un ensemble

Définition 2.2.7. *Soit A une partie d'un espace vectoriel normé E et x un point de E. La distance de x à A est définie comme étant*

$$d(x, A) = \inf\{\|x - y\|, y \in A\}$$

Proposition 2.12. *1.* $\overline{A} = \{x \in E, d(x, A) = 0\}$.

2. A est fermé si et seulement si $\forall x \notin A, d(x, A) > 0$

Démonstration. voir référence[4] page 24 . □

2.3 Théorème de carathéodory

Soit S une partie de $\mathbb{R}^N$, alors tout point de l'enveloppe convexe $conv(S)$ est une combinaison convexe d'au plus $N+1$ points de S, i.e.

$$conv(S) = \{x \in E, \exists \alpha \in \Delta_{N+1}, \exists (x_1, \cdots, x_{N+1}) \in S^{N+1}, x = \sum_{i=1}^{N+1} \alpha_i x_i\}$$

.

Démonstration. Posons $C_{N+1} = \{x \in E, \exists \alpha \in \Delta_{N+1}, \exists (x_1, \cdots, x_{N+1}) \in S^{N+1}, x = \sum_{i=1}^{N+1} \alpha_i x_i\}$. Pour établir le théorème, il suffit de montrer l'inclusion $conv(S) \subset C_{N+1}$.

Soit donc $x \in conv(S)$ et soit $k \geq 1, \alpha \in \Delta_k$, tels que $x = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i$. Si $k \leq N+1$, alors on a bien $x \in C_{N+1}$. Supposons maintenant $k > N+1$, et $\alpha_1, \cdots, \alpha_k > 0$. Puisque $x_1, \cdots, x_k$ sont dans un espace affine de dimension N, et $k > N+1$, alors les points sont affinement dépendants, i.e. les vecteurs $x_2 - x_1, \cdots, x_k - x_1$ sont linéairement dépendants. par conséquent, il existe des scalaires $\lambda_2, \cdots, \lambda_k$ non tous nuls tels que

$$\sum_{i=2}^{k} \lambda_i (x_i - x_1) = 0.$$

En posant $\lambda_1 = -\sum_{i=1}^{k} \lambda_i$, on a,

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i = 0; \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 0$$

De cette propriété, on déduit que x peut se réécrire comme combinaison des vecteurs x_i sous la forme

$$x = \sum_{i=1}^{k} (\alpha_i - t\lambda_i) x_i \text{ , avec } \sum_{i=1}^{k} (\alpha_i - t\lambda_i) = 1, \forall t \in \mathbb{R}.$$

L'idée maintenant est de jouer sur la valeur du paramètre t de sorte que les $\alpha_i - t\lambda_i$ soient tous positifs ou nuls, et que l'un d'eux soit nul. Ainsi, on se sera ramené à une combinaison convexe avec un nombre de $k1$ éléments.

Nécessairement l'un des λ_i au moins est strictement positif. Notons alors

$$t = \min\{\frac{\alpha_i}{\lambda_i}, i = 1, \cdots, k, \lambda_i > 0\}$$

et $\alpha_i^{'} = \alpha_i - t\lambda_i$. Alors par construction, $(\alpha_1^{'}, \cdots, \alpha_k^{'}) \in \Delta_k$, et l'un des coefficients $\alpha_i^{'}$ est nul (celui qui réalise le minimum) définissant t.

On vérifie alors que x est combinaison convexe de k_1 éléments de S. En effet, on a :

$$x = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i^{'} x_i.$$

On peut réitérer ce procédé tant que la famille $(x_1, \cdots, x_k)$ est affinement dépendante, donc tant que $k > N+1$. On se ramène donc finalement à une combinaison convexe de $N+1$ points de S.

$\square$

2.4 Propriétés topologiques des ensembles convexes

Soit $(E; \|\|)$ est un espace vectoriel normé .

Proposition 2.13. *L'adhérence d'un ensemble convexe (resp., d'un sous espace affine, convexe, sous espace vectoriel) est un ensemble convexe (resp., un sous espace affine, convexe, un sous espace vectoriel).*

Démonstration. Si C est un convexe, x et y sont des points adhérents à C alors, il existe deux suites $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ dans C convergeant respectivement vers x et y. Par suite, pour tout $t \in [0, 1]$, la suite $(tx_n + (1-t)y_n)_n$ est dans C , par convexité et converge vers la limite $tx + (1 - t)y$, qui est donc adhérent à C.
Ainsi,C est convexe. Même preuve pour un sous espace affine, convexe ou sous espace vectoriel .

□

Lemme 1. *Soit C un ensemble convexe ayant un point intérieur x_0. Pour tout point x adhérent à C, les points y du segment semi-ouvert $[x_0, x[$ sont intérieurs à C.*

Démonstration.

1. Supposons d'abord que $x \in C$. Soit $B(x_0, r)$ une boule de centre x_0, de rayon $r > 0$ incluse dans C. Soit f l'homothétie de centre x, de rapport λ, amenant x_0 sur y.
   On a :
   $$\forall t \in E; f(t) = x + \lambda(t - x) = (1 - \lambda)x + \lambda t$$
   où λ est un réel tel que $y = f(x_0) = (1 - \lambda)x + \lambda x_0$. Donc, $0 < \lambda \leq 1$. On a $f(C) \subset C$ par convexité de C, et $f(B(x_0, r)) = B(y, \lambda r)$ car $f(t) - y = f(t) - f(x_0) = \lambda(x - x_0)$.
   Donc $B(y, \lambda r) \subset C$ et y est intérieur à C.
2. Soit maintenant x un élément de $\overline{C}$ et y un vecteur appartenant à $]x_0, x[$. et g l'homothétie de centre y amenant x_0 sur x. On a
   $g(t) = y + \lambda(t - y)$; et la condition $g(x_0) = x$ s'écrit
   $$x - y = \lambda(x_0 - y)$$
   d'où $\lambda < 0$.Ainsi , $g(B(x_0, r)) = B(x, |\lambda|r)$.
   Comme x est adhérent à C, il existe $z \in C \cap B(x, |\lambda|r)$.
   Soit $u = g^{-1}(z)$. Alors $u \in B(x_0, r)$ est lui aussi intérieur à C, et $z - y =$

$\lambda(u-y), \lambda < 0$
Ce qui montre que y est situé sur le segment $]u, z[$. D'après le i) ci-dessus, on voit que y est intérieur à C
.

□

Proposition 2.14. *Si C est un convexe d'intérieur non vide, alors son intérieur $\mathring{C}$ est convexe ; on a de plus : $\overline{\mathring{C}} = \overline{C}$ et $\mathring{\overline{C}} = \mathring{C}$.*

Démonstration. i) Si $x; y \in \mathring{C}$, tout le segment $[x, y]$ est inclus dans $\mathring{C}$ d'après le Lemme précédent. Donc $\mathring{C}$ est convexe.

ii) L'inclusion $\overline{\mathring{A}} \subset \overline{A}$ est vraie pour toute partie A de E ; inversement si $x \in \overline{C}$, alors x est extrémité d'un segment ouvert inclus dans $\mathring{C}$, d'après le Lemme précédent, donc $x \in \overline{\mathring{C}}$. On notera que l'adhérence d'un segment ouvert non vide $]x_0, x[$ est le segment fermé $[x_0, x]$.

iii) L'inclusion $\mathring{\overline{A}} \subset \mathring{A}$ est vraie pour toute partie A de E.
Inversement soit x un point intérieur à $\overline{C}$; soit $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset \overline{C}$.
Comme $\overline{C} = \overline{\mathring{C}}$, d'après ii), il existe $y \in \mathring{C} \cap B(x, r)$.
Soit $z \in E$ tel que x soit milieu du segment $[z, y]$; on a encore $z \in B(x, r)$, donc $z \in \overline{C}$; d'après le Lemme précédent, le segment $]z, y]$ est inclus dans $\mathring{C}$, en particulier x est intérieur à C

. □

Proposition 2.15. *Si $H = \{x \in E/f(x) = a\}$ où f est une forme linéaire non nulle sur E et $a \in \mathbb{R}$, alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *f est continue, c'est à dire $f \in E'$.*
2. *D'_+ est ouvert.*
3. *D_+ est fermé.*
4. *H est fermé.*
5. *D_+ est d'intérieur non vide.*

Les propriétés analogues à 2), 3) et 5) avec D_- et D'_- sont également équivalentes aux précédentes.

Démonstration. Montrons d'abord que 1) $\Longrightarrow$ 2)
. Si f est continue,D'_+ est évidemment ouvert.

Montrons que 2) $\Longrightarrow$ 3).
Si D'_+ est ouvert, son complémentaire D_- est fermé et D_+ également car c'est limage de D_- par n'importe quelle symétrie par rapport à H, centrée en un point de H.
Montrons que 3) $\Longrightarrow$ 4).
Si D_+ est fermé, par l'argument précédent, D_+ l'est aussi et comme $H = D_+ \cap D_-$, il est aussi fermé.
Montons que 4) $\Longrightarrow$ 5).
Supposons que H est fermé et soit $x_0 \notin H$. Alors $f(x_0) \neq a$, par exemple $f(x_0) < a$. Comme le complémentaire $H^{\complement}$ de H est ouvert, il existe $r > 0$ tel que $B(x_0, r) \subset H^{\complement}$. Il est alors clair que $f(B(x_0, r)) < a$ car si $x_1 \in B(x_0, r)$ vérifie $f(x_1) \geq a$, la fonction $g(t) = f((1-t)x_0 + tx_1)$ prend les valeurs $f(x_0) < a$ en $t = 0$ et $f(x_1) \geq a$ en $t = 1$. Comme g est une fonction affine sur $\mathbb{R}$, elle prend la valeur a en un $t \in [0, 1]$. Le point $u = (1-t)x_0 + tx_1$ appartient alors à H, ce qui est contradictoire. Donc $B(x_0, r) \in D_+$ et D_+ est ouvert.

Montrons que 5) $\Longrightarrow$ 1).
Soit $x \in \mathring{D}_+$ et $B(x, r) \subset D_+$. On a donc : $\forall z \in B(0, 1), f(x + rz) \geq a$, soit $-f(z) \leq \dfrac{f(x) - a}{r}$. Par linéarité, ceci implique aussi en changeant z en -z, $\forall z \in B(0, 1); f(z) \leq \dfrac{f(x) - a}{r}$. Par suite, nécessairement $\dfrac{f(x) - a}{r} \geq 0$ et
$\forall z \in B(0, 1), |f(z)| \leq \dfrac{f(x) - a}{r}$.
Donc f est continue de norme inférieure à $\dfrac{f(x) - a}{r}$, ce qui implique bien 1).

□

2.4.1 Enveloppe convexe fermée

Définition 2.4.1. *Soit P une partie de E. L'intersection quelconque de convexes fermés étant un convexe fermé, on peut parler du plus petit convexe fermé contenant P , qui est donc l'intersection de tous les convexes fermés contenant P . C'est ce que l'on appelle l'enveloppe convexe fermée de P . On la note*

$$\overline{conv} P := \bigcap \{C : C \text{ est un convexe fermé contenant } P\}.$$

Évidemment, si C est un convexe fermé, $\overline{conv} C = C$. La proposition suivante donne, en particulier, une autre manière de définir l'enveloppe convexe fermée : c'est aussi l'adhérence de l'enveloppe convexe.

Proposition 2.16. *Soient P, P_1, P_2 des parties de E, on a*

$$P_1 \subset P_2 \Longrightarrow \overline{conv}P_1 \subset \overline{conv}P_2 \,;$$

$$P \subset convP \subset conv\overline{P} \subset \overline{conv}P = \overline{conv}\overline{P} = \overline{convP}$$

.

Démonstration. 1) Évidemment, $SiP_1 \subset P_2$ alors $P_1 \subset P_2 \subset \overline{conv}P_2$.
Donc, $\overline{conv}P_2$ est un convexe fermé contenant P_1, si bien que $\overline{conv}P_1 \subset \overline{conv}P_2$.
2) Les deux premières inclusions sont claires. En notant que $\bar{P}$ est contenu dans tout convexe fermé contenant P, on a $\bar{P} \subset \overline{conv}P$ (par définition de $\overline{conv}P$) et donc aussi $conv\bar{P} \subset \overline{conv}P$ (car $\overline{conv}P$ est convexe).
L'égalité $\overline{conv}P = \overline{conv}\bar{P}$ se déduit des observations suivantes :$P \subset \bar{P}$ implique $\overline{conv}P \subset \overline{conv}\bar{P}$ (première partie de la proposition). Inversement $\bar{P} \subset \overline{conv}P$ ($\overline{conv}P$ est fermé), donc $\overline{conv}\bar{P} \subset \overline{conv}P$.
Pour montrer $\overline{conv}P = \overline{convP}$, on observe d'abord que $\overline{conv}P \subset \overline{convP}$, parce que ce dernier ensemble est un convexe fermé contenant P . Inversement, $convP \subset \overline{conv}P$ et comme ce dernier ensemble est fermé, on a $\overline{convP} \subset \overline{conv}P$.
Voici encore une autre manière de définir l'enveloppe convexe fermée. Un demi-espace fermé de E est un ensemble de la forme

$$H^-(\xi, \alpha) = \{x \in E : \langle \xi, x\rangle \leq\} \ .$$

ou $\xi \in E$ n'est pas nul et $\alpha \in \mathbb{R}$
. □

Proposition 2.17. *L'enveloppe convexe fermée d'une partie $P \subset E$ est l'intersection de tous les demi-espaces fermés contenant P.*

Démonstration. Soit K l'intersection de tous les demi-espaces fermés contenant P. Comme K est un convexe fermé, on a certainement $\overline{conv}(P) \subset K$.
Inversement, si $x_0 \notin \overline{conv}(P)$, on peut séparer strictement le convexe compact x_0 et le convexe fermé $\overline{conv}(P)$.
Il existe alors un vecteur $\xi \in E$ et un réel$\alpha \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall x \in \overline{conv}(P), \langle \xi, x\rangle \leq \alpha < \langle \xi, x_0\rangle.$$

Donc $P \subset H^-(\xi, \alpha)$, i.e., $H^-(\xi, \alpha)$ est un demi-espace fermé contenant P, mais $x_0 \notin H^-(\xi, \alpha)$. Donc $x_0 \notin K$. On a démontré que $K \subset \overline{conv}(P)$. □

Corollaire 2.4.1. *Soit C un ensemble convexe. L'intersection de tous les demi-espaces fermés contenant C est $\bar{C}$.*

Corollaire 2.4.2. *Un ensemble C est un convexe fermé si et seulement si il est l'intersection de tous les demi-espaces fermés contenant C.*

Proposition 2.18. *L'enveloppe convexe d'une partie compacte d'un espace vectoriel de dimension finie est compacte.*

Démonstration. Il est clair que conv P est borné ; il reste donc a' montrer qu'il est fermé. Soit $x_k \subset convP$, avec $x_k \longrightarrow x$ et montrons que $x \in convP$. D'après le théorème de Carathéodory,

$$x_k = \sum_{i=1}^{n+1} t_{k,i}x_{k,i}$$

avec $(t_{k,1}, \cdots, t_{k,n+1}) \in \Delta_{n+1}$ et $x_{k,i} \in P$. Comme Δ_{n+1} et P sont compacts, on peut extraire de $\{t_{k,i}\}_k$ et de $\{x_{k,i}\}_k$ des sous-suites convergentes, dont les limites sont dans Δ_{n+1} et P respectivement. En passant ' a la limite , on voit que $x \in convP$. □

2.4.2 Notion de face

Définition 2.4.2. 1. *Une face d'un convexe C est un convexe non vide $F \subset C$ tel que :*

$$x \in F, y, z \in C; x = \frac{x+y}{2} \Longrightarrow y \text{ et } z \in F$$

2. *Une face de dimension 1 est appelée une arête. Si $dimF = dimC - 1$, on dit que F est une facette de C.*

Proposition 2.19. *F est une face d'un convexe C si et seulement si F est convexe et que si $x \in F$ appartient à un segment ouvert dont les extrémités sont dans C, ces extrémités sont en fait dans F.*

Démonstration. voir référence[4] page 16 . □

Proposition 2.20. *Toute intersection non vide de faces de C est une face de C.*

Exemple 2.3. 1. *Un exemple trivial de face de C est le convexe C lui même.*

2. *Un point $x_0 \in C$ est extrémal pour C si et seulement si $\{x_0\}$ est une face de C.*

2.5 Hyperplan affine

Définition 2.5.1. *Un hyperplan affine est un sous-espace affin propre maximal. Autrement dit M est un hyperplan affin si et seulement si*

1. *$M \neq E$.*
2. *E est le seul Sous espace affin contenant strictement M.*

Proposition 2.21. *Les hyperplans affines de E sont exactement les ensembles de la forme $\{x \in E \setminus f(x) = a\}$, où f est une forme linéaire non nulle sur E et a un réel quelconque.*

2.6 Hyperplan d'appui

Définition 2.6.1. *On dit qu'un hyperplan affin H est un hyperplan d'appui du convexe C si C est inclus dans l'un des deux demi-espaces définis par H et rencontre H.*

Lemme 2. *Si H est un hyperplan d'appui du convexe C alors $F = H \cap C$ est une face de C.*

Démonstration. En effet, soit $f(x) = a$ l' équation de H, f étant une forme linéaire et $a \in \mathbb{R}$. On a (par exemple) $f(x) \leq a$ pour tout $x \in C$. Si $x = \dfrac{y+z}{2}$, avec $x \in F, y, z \in C$, on a :

$$f(y) \leq a, f(z) \leq a \ (*)$$

et

$$\frac{f(y) + f(z)}{2} = f(x) = a$$

d'où $0 = 2a - (f(y) + f(z)) = (a - f(y)) + (af(z))$
. Or, une somme de nombres réels positifs n'est nulle que si chacun de ces deux réels est nul, donc les inégalités $(*)$ sont des égalités et par suite $y, z \in F$.
Il est clair que si $C_1 \subset C$ et $x \in C_1 \cap ExtC$, alors $x \in ExtC_1$. L'inverse n'est pas toujours vrai mais on a le résultat suivant, qui est une application immédiate des définitions.

□

Lemme 3. *Si F est une face de C alors $ExtF \subset ExtC$; et plus généralement toute face de F est une face de C. Il faut souligner qu'il existent des faces des convexes qui ne sont pas de la forme donnée par (voir référence [4] Lemme 1.4.10) (voir référence [4] Exemple 1.4.13 ci-dessous), qui justifie la définition suivante.*

Proposition 2.22. *Soit C un convexe fermé borné d'un espace de Hilbert. Pour tout hyperplan vectoriel fermé V de H il existe un hyperplan d'appui fermé de C parallèle à V .*

Démonstration. La preuve est analogue à celle de la Proposition (voir référence [4] 3.4.3) et du (voir référence [4] corollaire 3.4.2). On invoque (voir référence [4] le Théorème 6.1.1) au lieu de la compacité pour assurer qu'une forme linéaire continue f atteint son minimum sur C. En fait, comme $-f$ est aussi linéaire et $\inf_c(-f) = -\sup_c f$, cette forme linéaire atteint aussi son maximum sur C. Le reste de la preuve est inchangé. □

Proposition 2.23. *Dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}$, tout convexe fermé borné C possède au moins un point extrémal.*

Démonstration. Donnons la preuve dans le cas où $\mathcal{H}$ est séparable, c'est à dire où il contient une suite partout dense $(u_n)_{n\geq 1}$.
On construit par récurrence une suite décroissante de convexes fermés $(F_n)_{n\geq 0}$ de la manière suivante :

$$F_0 = C \ ,$$
et
$$F_{n+1} = \{x \in F_n \setminus \langle u_n, x\rangle = \inf_{y\in F_n}\langle u_n, y\rangle\}$$

Alors F_{n+1} est non vide et l'hyperplan $H_n = \{x \in H \setminus \langle u_n, x\rangle = \inf_{y\in F_n}\langle u_n, y\rangle\}$ est un hyperplan d'appui de F_n.
Donc F_{n+1} est une face fermée de F_n. (voir référence [4] lemme 1.4.11), on voit par récurrence que F_n est une face de C lui-même. (voir référence [4] Théorème 6.1.4), l'intersection des F_n est non vide ; c'est une face F de C.
Il reste à remarquer que cette face n'a qu'un seul élément, qui est donc un point extrémal de C. Or si on suppose que $x_1, x_2 \in F$, En particulier $x_1, x_1 \in F_{n+1}$ pour tout n. Par conséquent, $\langle u_n, x_1\rangle = \langle u_n, x_2\rangle = \inf_{y\in F_n}\langle u_n, y\rangle)$. On conclut que $x_1 - x_2$ est orthogonal à tous les u_n et par densité, à H tout entier.
Ceci entraîne $x_1 - x_2 = 0$.

□

2.7 Théorème de séparation

Définition 2.7.1 (Séparation de large)**.** *Soit $H = H_{f,\alpha}$ un hyperplan affine fermé de E. On dit que H sépare deux sous-ensembles A et B au sens large si, quitte à remplacer (f, α) par $(-f, -\alpha)$, on a*

$$\forall (a, b) \in A \times B, f(a) \leq \alpha \leq f(b) \ .$$

ou, de manière équivalente,

$$\sup_{a\in A} f(a) \leq \alpha \leq \inf_{b\in B} f(b) \ .$$

Définition 2.7.2 (Séparation de stricte). *Soit H un hyperplan affine fermé de E. On dit que Hséparе deux sous-ensembles A et B au sens strict si, quitte 'a remplacer $(f;\alpha)$ par $(-f,-\alpha)$, on a :*

$$\exists\epsilon > 0, \forall(a,b) \in A \times B, f(a) \leq -\epsilon < +\epsilon \leq f(b).$$

ou, de manière équivalente,

$$\sup_{a\in A} f(a) < \alpha < \inf_{b\in B} f(b).$$

2.8 Séparation en dimension finie

2.8.1 Séparation d'un point et d'un convexe fermé

Théoreme 2.8.1. *Soit C un convexe fermé non vide d'un espace E de dimension finie et x_0 un point de E n'appartenant pas à C. Alors, il existe un hyperplan affin H séparant strictement x_0 de C ; c'est à dire que C et x_0 sont inclus chacun dans un demi-espace ouvert différent défini par H. En particulier C est inclus dans l'un des demi-espaces affines associés à H.*

Démonstration. Soient x_0 et C comme dans l'énoncé. La distance

$$d(x_0, C) = \inf\{\|y - x_0\|: y \in C\}$$

de x_0 à C est strictement positive, puisque $x_0 \notin C$ et C est fermé.
Le théorème de projection sur un convexe fermé d'un espace euclidien assure qu'il existe un unique point y_0 de C réalisant cette distance, c'est à dire

$$\|y_0 - x_0\|= d(x_0, C)$$

,
et caractérisé par les inéquations :

$$\forall y \in C, \langle y - y_0; x_0 - y_0\rangle \leq 0.$$

Posons $f(y) = \langle y, x_0 - y_0\rangle$, la fonction f est une forme linéaire non nulle sur E. L'inégalité de la caractérisation peut être reformulée comme :

$$\forall y \in C, f(y) \leq f(y_0).$$

Par ailleurs, on a

$$f(x_0) = f(y_0) + f(x_0 - y_0) = f(y_0) + \|x_0y_0)\|^2 > f(y_0)$$

Soit H l'hyperplan défini par :

$$y \in H \Longrightarrow f(y) = c\ ,$$

où $c = \dfrac{f(x_0) + f(y_0)}{2} = f(\dfrac{x_0 + y_0}{2})$. (Notons que H est l'hyperplan médiateur du segment $[x_0, y_0]$.) On voit que

$$f(x_0) > c \text{ et } \forall y \in C, f(y) < c \; .$$

Autrement dit, x_0 et C sont inclus dans les demi-espaces ouverts différents définis par H. □

2.8.2 Séparation d'un point et d'un convexe ouvert

Théoreme 2.8.2. *Soit E espace vectoriel de dimension finie, C un convexe ouvert de E. Par tout point x_0 n'appartenant pas à C il passe un hyperplan disjoint de C.*

Démonstration. On peut supposer $x_0 = 0$.
Soit $\Gamma = \cup_{\lambda>0}\lambda C$, c'est un cône convexe , il est ouvert comme réunion de convexes ouverts λC pour $\lambda > 0$ et ne contient pas 0 puisque $C \notin 0$.
Autrement dit $\Gamma = cone(C) \setminus \{0\}$ (voir référence [4]Proposition 1.2.7), en particulier $\gamma \neq E$. Donc, son adhérence $\overline{\gamma}$ est aussi distincte de E, car $\overline{\gamma}$ a même intérieur que γ , c'est à dire γ.
Soit y_0 un point de E n'appartenant pas à $\overline{\gamma}$, selon le théorème de séparation d'un point et d'un convexe fermé, (voir référence [4] Théorème 3.2.2) on a l'existence d'une forme linéaire non nulle f telle que $f(y_0) < \inf_{z\in\Gamma} f(z)$.
Si $z \in \gamma$, il en est de même pour tz quel que soit $t > 0$, donc $f(y_0) < f(tz) = tf(z)$ pour tous $t > 0; z \in \gamma$.
En divisant les deux membres par t et faisant tendre $t \to +\infty$, on obtient $0 \leq f(z)$ pour tout $z \in \gamma$.
Donc est inclus dans le demi-espace fermé $D = \{x \setminus f(x) \geq 0\}$ défini par l'hyperplan $H = Kerf$ qui passe bien par 0.
Comme γ est ouvert, il est en fait inclus dans l'intérieur de D, c'est-à-dire le demi-espace ouvert $\{x \setminus f(x) > 0\}$. Il en est a fortiori de même pour C. □

2.8.3 Théorème de séparation strict

Théoreme 2.8.3. *Si A est fermé et B compact, alors il existe un hyperplan fermé qui sépare A et B au sens strict.*

2.8.4 Théorème de Krein

Théoreme 2.8.4. *Tout convexe compact K de dimension finie est l'enveloppe convexe de ses points extrémaux*

Démonstration. L'inclusion $conv(ExtK) \subset K$ est vraie pour tout convexe (même non-compact). Pour l'autre inclusion, on raisonne par récurrence sur la dimension de l'espace vectoriel. Si $dimE = 0$, c'est trivial.
Soit $n > 0$, et supposons le théorème démontré pour $dimE < n$. Soit K un convexe compact de E de dimension n. On peut supposer Aff(K) = E sinon on remplace E par Aff(K) . Alors $\overset{\circ}{k} \neq \emptyset$; (voir référence [] page 45, Proposition 3.1.1).
Soit $x \in K$, il s'agit de montrer que $x \in conv(ExtK)$.
Si $x \in K \setminus \overset{\circ}{K}$, il existe un hyperplan d'appui H contenant x (Théorème 2.8.2), et on a $H \cap K \neq \emptyset$.
Mais alors $F = H \cap K$ est une face de K, de sorte que $ExtF \subset ExtK$.
D'autre part $Aff(F) \subset H$ est un SEA de dimension strictement inférieure à n, par conséquent l'hypothèse de récurrence s'applique à F.
On a donc $x \in conv(ExtF) \subset conv(ExtK)$.
• Si au contraire $x \in \overset{\circ}{K}$, soit D une droite affine quelconque contenant x.

Alors $D \cap K$ est un convexe compact de D, c'est à dire un segment $[x_1, x_2]$. Les points x_1, x_2 ne sont pas dans $\overset{\circ}{K}$, et donc d'après ce qui précède, ils sont dans $conv(ExtK)$. Alors $x \in conv(x_1, x_1) \subset conv(ExtK)$ □

Corollaire 2.8.1. *Soit K un convexe compact d'un espace vectoriel de dimension finie, et $f : K \to \mathbb{R} \setminus \{\infty\}$ une fonction convexe. On a*

$$\sup_{x\in} f(x) = \sup_{x\in ExtK} f(x)$$

En particulier si la fonction f est continue, elle atteint son maximum en un point de $ExtK$.

Démonstration. Soit $M = \sup_{x\in ExtK} f(x) \in \mathbb{R}$. Si $x \in conv(ExtK)$, cet élément est combinaison convexe d'une famille finie de points $x_i \in ExtK$, $i = 1, \cdots, n$. Soit alors, $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$, avec $\lambda_i > 0$ et $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$. il s'ensuit que

$$f(x) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i) \leq M \sum_{i=1}^n \lambda_i = M$$

L'ensemble $\{x \in K : f(x) \leq M\}$ contient donc $conv(ExtK) = K$. Donc M est aussi le sup de f sur K.

Par ailleurs, si f est continue, elle atteint son maximum $M \in \mathbb{R}$ sur le compact K en un point y.
Étant donné que y est une combinaison convexe d'une famille finie de points $x_i \in ExtK$, le même argument montre que $\max_i f(x_i) \geq M$ et alors $\sup_{x\in ExtK} f(x) \geq M$. Il suit que $\sup_{x\in ExtK} f(x) = M$ et le sup est atteint. □

Chapitre 3

CONVEXITÉ DES FONCTIONS

3.1 LES FONCTIONS CONVEXE

Soit E est un espace vectoriel réel.

3.1.1 Fonction convexe

Définition 3.1.1. *Une fonction* $f : E \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *est dite convexe si pour tous* x, y *dans* E *avec* $f(x) < +\infty; f(y) < +\infty$ *et tout* $t \in [0; 1]$ *, on a :*

$$f(tx + (1 - t)y) \leq tf(x) + (1 - t)f(y)$$

3.1.2 Épigraphe d'une fonction

Définition 3.1.2. *Si* f *est une fonction* $E \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$*, son épigraphe est le sous-ensemble de* $E \times \mathbb{R}$ *défini par :*

$$epi(f) = \{(x, t) \in E \times \mathbb{R} = f(x) \leq t\}$$

l'épigraphe strict de f *est*

$$epistf = \{(x, t) \in E \times \mathbb{R} = f(x) < t\} \ .$$

Proposition 3.1. *La fonction* $f : E \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *est convexe si et seulement si son épigraphe est convexe.*

Démonstration. Si f est convexe, alors pour tous $(x, t), (y, u)$ dans $epi(f)$, et tout $\alpha \in [0, 1]$, on a

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y) \leq \alpha t + (1 - \alpha)u.$$

Donc,

$$(\alpha x + (1-\alpha)y, \alpha t + (1-\alpha)u) \in epif$$

qui est donc convexe.
Réciproquement, si $epif$ est convexe, alors pour tous $x, y \in domf$, et $\alpha \in [0,1]$, on a

$$(x; f(x)) \in epif, (y, f(y)) \in epif,$$

donc

$$\alpha(x, f(x)) + (1-)(y, f(y)) \in epif.$$

Alors,

$$(\alpha x + (1-\alpha)y, \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y)) \in epif,$$

ce qui signifie que

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y),$$

et donc f est convexe. □

Proposition 3.2. 1. *Si $(f_i)_{i\in I}$ est une famille quelconque de fonctions convexes, l'enveloppe supérieure des $(f_i)_{i\in I}$, définie par $f = \sup_{i\in I} f_i$, est convexe.*

2. *Si g est limite pour la convergence simple d'une suite de fonctions convexes, alors g est convexe. Dans certaines questions on peut avoir besoin de considérer des fonctions convexes à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$. On prend alors la propriété de convexité de l'épigraphe comme définition .*

3.1.3 Fonction semi continue inférieurement s.c.i

Définition 3.1.3. *On dit que la fonction numérique $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ est semi-continue inférieurement (s.c.i.) si pour tout $a \in \mathbb{R}$, l'ensemble $\{x \in E \setminus f(x) > a\}$ est un ouvert de E.*
Il revient au même de dire que pour tout $a \in \mathbb{R}$, l'ensemble $\{x \in E \setminus f(x) \leq a\}$ est un fermé de E.
En effet, les ensembles $\{x \in E \setminus f(x) > a\}$ et $\{x \in E \setminus f(x) \leq a\}$ sont complémentaires ; le premier est ouvert si et seulement si le second est fermé.

Exemple 3.1. 1. *Un sous-ensemble A de E est fermé si et seulement si sa fonction caractéristique χ_A est s.c.i.*

2. *Toute fonction continue est s.c.i.*
3. *Une fonction $f : E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ est continue si et seulement si f et $-f$ sont s.c.i.*

Démonstration. Pour montrer l'assertion 3), on commence par voir que si f est continue, alors f et $-f$ sont s.c.i.
Pour la réciproque, on écrit $]a;b[=]a,+\infty]\cap[-\infty,b[$ et par suite

$$\begin{aligned} f^{-1}(]a,b[) &= f^{-1}(]a,+\infty])\cap f^{-1}([-\infty,b[) \\ &= f^{-1}(]a,+\infty])\cap(-f)^{-1}(]b,+\infty]) \end{aligned}$$

ce qui prouve bien que si f et $-f$ sont ,s.c.i., f est continue.

□

Proposition 3.3. *La fonction numérique $f:E\longrightarrow\overline{\mathbb{R}}$ est s.c.i. si et seulement si son épigraphe est fermé.*

Démonstration. $i)$ Supposons que f est s.c.i. Soit $(x;t)\in E\times\mathbb{R}$ un point n'appartenant pas à $epif$. On a donc $t<f(x)$. Choisissons $\tau\in\mathbb{R}$ avec $t<\tau<f(x)$.
L'ensemble $U_\tau=\{y\in E\setminus f(y)>\tau\}$ est un ouvert contenant x.
L'ensemble $U_\tau\times]-\infty;\tau[$ est un ouvert de $E\times\mathbb{R}$ contenant $(x;t)$ et disjoint de $epif$.
Donc le complémentaire de $epif$ est ouvert et$epif$ est bien fermé.
$ii)$ Réciproquement si L'épigraphe de f $epif$ est fermé alors , pour tout $a\in\mathbb{R}$, l'ensemble

$$S_a=epif\cap(E\times\{a\});$$

est fermé comme l'intersection de deux fermés de $E\times\mathbb{R}$.
cette ensemble s'écrit aussi sous la forme $S_a=f_a\times\{a\}$, ou l'on a posé $F_a=\{x\in E:\quad f(x)\leq a\}$.

$$(\ S_a=F_a\times\{a\}:F_a=\{x\in E:f(x)\leq a\}\text{ soit }(x,t)\in epif\cap(E\times\{a\})$$

alors

$$(x,t)\in epif\text{ et }(x,t)\in(E\times\{a\})$$

donc

$$f(x)\leq t\text{ et }x\in E\text{ et }t=a\ f(x)\leq a$$

soit

$$(x,t)\in\{x\in E,f(x)\leq a\}\times\{a\}$$

i.e

$$x\in\{x\in E,f(x)\leq a\}\text{ et }t=a$$

$$(x, t) \in epif, t = a$$

donc

$$((x, t) \in F_a \times \{a\})$$

alors pour tout $a \in \mathbb{R}$, l'ensemble $S_a := epif \cap (E \times \{a\})$ est fermé comme intersection de deux fermés de $E \times \mathbb{R}$; cet ensemble s'écrit aussi $S_a = F_a \times \{a\}$, où l'on a posé $Fa = \{x \in E \setminus f(x)a\}$.
Donc F_a est fermé dans E comme image réciproque de S_a par l'application continue $x \mapsto (x; a)$.
Dans le cas spécial où $a = -\infty$, on note que $F_{-\infty} = \cap_{t \in \mathbb{R}} F_t$ est fermé comme intersection d'une famille de fermés.

$\square$

3.1.4 S.c.i en termes de limites inférieures

Définition 3.1.4. *Si f est autoriser à prendre les valeurs ∞ , ce sont les intervalles de la forme $]a,+\infty[$ que l'on considère comme ouvert dans la définition de semi continuité .*
On dit qu'une fonction $f : E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ est s.c.i si $\forall a \in \overline{\mathbb{R}}$ l'ensemble $\{x \in E, f(x) > a\}$ est un ouvert de E .

Proposition 3.4. *1. Si $f : E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$, $x_0 \in E$ et $Y \subset E$, on pose :*

$$\lim_{x\longrightarrow x_0;x\in Y} \inf f(x) = \sup_{r>0} \inf_{d(x,x_0)<r,x\in Y} f(x)$$

Lorsque $Y = E$, on écrit simplement $\lim\limits_{x\longrightarrow x_0} \inf_{d(x,x_0)<r} f$

2. Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de E, on pose :

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \inf x_n = \lim_{n\longrightarrow+\infty} \inf\{x_p, p \geq n\}.$$

Proposition 3.5. *Si $x_0 \in Y$, on a $\lim\limits_{x\longrightarrow x_0;x\in Y} \inf f(x) \leq f(x_0)$.*
La preuve repose sur l'inclusion suivante :

$$A \subset B \Longrightarrow \inf A \geq \inf B$$

Pour toute parties A et B.

$$r_1 \leq r_2 \Longrightarrow \{x \in Y : d(x,x_0) \leq r_1\} \subset \{x \in Y : d(x,x_0 \leq r_2\} \ .$$

$$\Longrightarrow \inf_{d(x,x_0)<r_1,x\in Y} f(x) \geq \inf_{d(x,x_0)>r_2,x\in Y} f(x) \ .$$

Soit $(x_n)_n$ une suite d'éléments ($x_n \in E$).

On pose $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} \inf x_n = \lim\limits_{p\longrightarrow\infty} \inf\{x_p, p \geq n\}$
On effet

$$\forall r > 0, \inf_{d(x,x_0)<r,x\in Y}\{f(x)\} \leq f(x_0)$$

par conséquent

$$\sup_{r>0}\{\inf_{d(x,x_0)<r,x\in Y}\{f(x)\}\} \leq f(x_0) \ .$$

Lemme 4. *Soit $Y \subset E$ et $x \in \overline{Y}$*

1. $\lim\limits_{y\longrightarrow x} \inf_{y\in Y} f(y) = \lim\limits_{r\longrightarrow 0} \inf_{d(x,x_0)<r,y\in Y} f(y)$
2. *Si* $x_n \longrightarrow x, x_n \in Y, \forall n \in \mathbb{N}, \lim\limits_{n\longrightarrow\infty} \inf f(x_n) \geq \lim\limits_{y\longrightarrow x} \inf_{y\in Y} f(y)$

3. Il existe $(x_n)_n \subset Y, f(x_n) \longrightarrow \lim\limits_{y \longrightarrow x} \inf_{y \in Y} f(y)$.

Démonstration. Si pour tout réel $r_1, r_2 \in \mathbb{R}_+^*, r_1 \geq r_2$

alors

$$\inf_{d(x,x_0)<r_1, x \in Y} \{f(x)\} \leq \inf_{d(x,x_0)<r_2, x \in Y} \{f(x)\}$$

Ainsi

$$\text{la fonction } g(r) = \inf_{d(x,x_0)<r, x \in Y} \{f(x)\} \text{ est décroissante .}$$

$$r_1 \geq r_2 \Longrightarrow \{x \in Y : d(x, x_0) < r_2\} \subset \{x \in Y : d(x, x_0) < r_1\}$$

$$\Longrightarrow \inf_{d(x,x_0)<r_2, x \in Y} \{f(x)\} \geq \inf_{d(x,x_0)<r_1, x \in Y} \{f(x)\}$$

$$\sup_{r>0} \inf_{d(x,x_0)<r, x \in Y} \{f(x)\} = \lim_{r \longrightarrow 0} \inf_{d(x,x_0)<r, x \in Y} \{f(x)\}$$

$$(x_n)_n \subset Y \longrightarrow x(x \in \overline{Y})$$

$$\lim_{y \longrightarrow x} \inf_{y \in Y} f(y) \leq \lim_{n \longrightarrow \infty} f(x_n)$$

$$(x_n)_n \subset Y : x_n \longrightarrow x$$

alors

$$\lim_{y \longrightarrow x} \inf_{y \in Y} f(y) \leq \lim_{n \to \infty} f(x_n)$$

or par définition :

$$\lim_{n \to \infty} \inf f(x_n) = \lim_{p \to \infty} \inf\{x_p, p \geq n\}$$

$$\lim_{y \longrightarrow x} \inf_{y \in Y} f(y) = \lim_{r \to 0} \inf_{d(x,y)<r, y \in Y} f(y) = \sup_{r>0} \inf_{d(y,x)<r, y \in Y} \{f(x)\}$$

Soit

$$n_0 \in \mathbb{N} \text{ posons } r_{n_0} = \sup\{d(x, x_n), n \geq n_0\}$$

or

$$x \longrightarrow x_n, d(x, x_n) \longrightarrow 0$$

$$\lim_{n \to \infty} x_n = x \Longleftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists N : n > N \Longrightarrow d(x_n, x) \leq \epsilon$$

$$d(x, x_n), n \geq n_0 \text{ est majoré dans } \sup\{d(x, x_n), n \geq n_0\} \text{ existe}$$

$$n_0 \longrightarrow r_{n_0} = \sup\{d(x, x_n), n \geq n_0\} \Longleftrightarrow d(x, x_n) \geq n_0 \Longrightarrow d(x, x_n) \leq r_{n_0}$$

$$n_0 \longrightarrow r_{n_0} : n \geq n_0 \Longrightarrow x_n \in B(x, r_{n_0})$$

$$\inf_{n\geq n_0} f(x_n) \geq \inf\{f(y), y \in Y \cap B(x, r_{n_0})\}$$

$$\lim_{n_0\to\infty} \inf(x_n) \geq \lim_{n\to\infty} \inf\{f(y), y \in Y \cap B(x, r_{n_0})\}$$

$n_0 \longrightarrow \infty, r_{n_0} \longrightarrow 0$ et par suite :

$$\lim_{n\to\infty} \inf\{f(y), y \in Y \cap B(x, r_{n_0})\} = \lim_{r\to\infty} \inf\{f(y), y \in B(x, r) \cap Y\}$$

Il existe une suite

$$(x_n) \subset Y : f(x_n) \longrightarrow \lim_{y\to x} \inf_{y\in Y} f(y)$$

on choisit

$$x_n \in B(x, \tfrac{1}{n}) \cap Y$$

tel que

$$f(x_n) \leq \inf\{f(y), y \in B(x, \frac{1}{n}) \cap Y\} + \tfrac{1}{n}.$$

□

Proposition 3.6. *Une fonction $f : E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ est semi continue inférieurement si et seulement si pou tout $x_0 \in E$ on a, $\lim_{x\to x_0} \inf f(x) = f(x_0)$.*

Démonstration. Selon la propriété précédente si $x_n \longrightarrow x$ alors

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \inf f(x_n) &\geq \lim_{y\to x} \inf f(y) \\
&= \sup_{r>0} \inf_{d(x,y)<r} f(y) \\
&= \lim_{r\to 0} \inf_{d(y,x)\to 0} f(y),
\end{aligned}$$

car

$$g(r) = \inf_{d(y,x_0)<r, y\in Y} f(y)$$

est décroissante en r.

□

Proposition 3.7. *La fonction numérique $f : E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ est semi continue inférieurement si et seulement si pour tout $x_0 \in X$ on a $\lim_{x\longrightarrow x_0} \inf f(x) = f(x_0)$.*

Démonstration. Si f est s.c.i., et $f(x_0) > -\infty$, alors pour tout $t < f(x_0)$ l'ensemble $\{x \in E : f(x) > t\}$ est un ouvert contenant x_0, donc contenant aussi une boule ouverte $B(x_0; r)$, avec $r > 0$.
Donc $\lim_{x \longrightarrow x_0} \inf f(x) \geq t$ et en faisant $t \longrightarrow f(x_0)$ on obtient $\lim_{x \longrightarrow x_0} \inf f(x) \geq f(x_0)$.
Ceci reste évidemment vrai si $f(x_0) = -\infty$. Or l'inégalité inverse est toujours vraie, donc

$$\lim_{x \longrightarrow x_0} \inf f(x) = f(x_0)$$

.
Réciproquement, supposons que cette égalité est vraie en tout point $x_0 \in E$.
Soit $t \in [-\infty; +\infty[$ et supposons que $f(x_0) > t$. Il existe alors $r > 0$ tel que

$$\inf_{x \in B(x_0, r)} f(x) > t$$

.
Le point x_0 est donc intérieur à l'ensemble $U_t = \{x \in X : f(x) > t\}$. Comme ceci est vrai pour tout $x_0 \in U_t$, cet ensemble est donc ouvert. Le cas $t = +\infty$ est trivial car $U_{+\infty} = \emptyset$.

Remarque :
On traduit familièrement cette propriété en disant que les fonctions semi continues inférieurement ne peuvent sauter que vers le bas .

□

Proposition 3.8.
1. *Si $(f_i)_{i \in I}$ est une famille quelconque de fonctions semi continues inférieurement de $E \longrightarrow \mathbb{R}$, alors l'enveloppe supérieure des $(f_i)_{i \in I}$, $f = \sup_i f_i$, est également semi continues inférieurement.*

2. *Si f et g sont des fonctions semi continues inférieurement de X dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, et α, β des réels positifs, alors la fonction $\alpha f + \beta g$ est semi continues inférieurement.*

Démonstration.
1. On a $epif = \cap_i epif_i$. C'est donc un fermé, comme intersection de fermés.
2. Pour tout sous-ensemble A de E, on a :

$$\inf_{x \in A}(\alpha f(x) + \beta g(x)) \geq \alpha \inf_{x \in A} f(x) + \beta \inf_{x \in A} g(x)$$

Il en résulte que pour tout $x_0 \in X$, on a :

$$\lim_{x \longrightarrow x_0} \inf(\alpha f(x) + \beta g(x)) \geq \alpha \lim_{x \longrightarrow x_0} \inf f(x) + \beta \lim_{x \longrightarrow x_0} \inf g(x)$$

Si f et g sont s.c.i., on en déduit

$$\lim_{x\longrightarrow x_0} \inf(\alpha f(x)+\beta g(x)) \geq \alpha f(x_0)+\beta g(x_0).$$

L'inégalité inverse est triviale.

□

3.1.5 Les fonctions s.c.i définie sur un partie de E

Définition 3.1.5. *On dit que la fonction numérique $f : Y \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ est semi-continue inférieurement (s.c.i.) si pour tout $a \in \overline{\mathbb{R}}$, l'ensemble $\{x \in Y \backslash f(x) > a\}$ est un ouvert de Y , c'est à dire l'intersection d'un ouvert de E avec Y .*

Proposition 3.9 (Prolongement s.c.i). *Si $f : Y \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ est une fonction s.c.i., la fonction $\tilde{f} : E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ définie par :*

$$\tilde{f} = \begin{cases} \lim\limits_{y\longrightarrow x} \inf_{y\in Y} f(x) & si x \in \overline{Y} \\ +\infty & sinon \end{cases}$$

est un prolongement s.c.i. de f, de plus on a $epi\tilde{f} = \overline{(epif)}$

.

Démonstration. Le fait que $\tilde{f}(x) = f(x)$ pour $x \in Y$ résulte de la semi-continuité inférieure de f.
Montrons que $epi\tilde{f} = \overline{(epif)}$, il en résultera que $\tilde{f}$ est semi continue inférieurement.

1. Si $(x;t) \in \overline{epif}$, il existe alors une suite d'éléments $(x_n;t_n) \in epif$ convergente vers $(x;t)$.
   En particulier $x_n \mapsto x$ et donc $x \in \overline{y}$.
   Pour tout $\epsilon > 0$, on a $t_n \leq t+\epsilon$, à partir d'un certain rang $n > n_0(\epsilon)$.
   D'où
   $$\tilde{f}(x) \leq \liminf f(x_n) \leq t+\epsilon.$$
   En faisant $\epsilon \longrightarrow 0$, on voit que $\tilde{f}(x) \leq t$, c'est à dire $(x;t) \in epi\tilde{f}$.

2. Réciproquement, si $(x;t) \in epi\tilde{f}$, on a $\tilde{f}(x) < +\infty$, d'où $x \in \overline{Y}$
   et $\tilde{f}(x) = \lim\limits_{y\longrightarrow x} \inf f(y)$. Il existe alors
   $$x_n \to x, x_n \in Y$$
   telle que
   $$f(x_n) \to \tilde{f}(x).$$

Soit $\epsilon > 0$; comme $t + \epsilon > \tilde{f}(x)$, on a $f(x_n) \leq t + \epsilon$ pour $n \geq n_0(\epsilon)$, c'est-à-dire $(x_n; t+\epsilon) \in epif$, et par conséquent $(x; t+\epsilon) \in \overline{epif}$.
En faisant $\epsilon \longrightarrow 0$, on obtient $(x;t) \in \overline{epif}$.
En particulier si Y est un ensemble fermé, toute fonction $f : Y \to \mathbb{R}$ continue se prolonge en une fonction s.c.i. sur E en posant

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) si & x \in Y \\ +\infty & sinon\ . \end{cases}$$

□

3.1.6 Fonction convexe s.c.i sur un EVN

Soit $(E; \|.\|)$ un EVN. En réunissant les résultats sur les fonctions convexes et les fonctions s.c.i. des deux sections précédentes, on obtient immédiatement les résultats suivants

.

Proposition 3.10. *Une fonction $E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ est convexe s.c.i. si et seulement si son épigraphe est convexe fermé.*

Exemple 3.2. *Si $A \subset E$ alors A est convexe fermé si et seulement si χ_A est convexe s.c.i .*

Proposition 3.11. *1. L'enveloppe supérieure d'une famille quelconque de fonctions convexes s.c.i. est convexe s.c.i.*

2. Si f et g sont des fonctions convexes s.c.i. de E dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, et $\alpha; \beta$ des réels positifs, la fonction $\alpha f + \beta g$ est convexe s.c.i.

Soit C un convexe de E.

Proposition 3.12 (Prolongement convexe s .c.i)**.** *Si $f : C \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ est une fonction convexe s.c.i., la fonction $\tilde{f} : E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ définie par :*

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} \lim\limits_{y \longrightarrow x} \inf_{y \in C} f(y) & si x \in C \\ +\infty & sinon \end{cases}$$

est un prolongement convexe s.c.i. de f à E tout entier, et on a $epi\tilde{f} = \overline{(epif)}$.

Démonstration. En effet, d'après (voir référence [4] 2.3.12), $\widetilde{f}$ est s.c.i.
$epi\widetilde{f} = \overline{epif}$ et cet ensemble est un convexe fermé (d'après 2.13)
En particulier si C est un convexe fermé, toute fonction $f : C \longrightarrow \mathbb{R}$ convexe continue se prolonge en une fonction s.c.i. en posant

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & si x \in C \\ +\infty & sinon \ . \end{cases}$$ □

Lemme 5. *Si la fonction convexe $f : E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ prend la valeur $-\infty$ en un point x et si $f(x_1) > -\infty$, alors $f(x) = +\infty$ pour tout x tel que $x_1 \in [x_0; x[$.*

Démonstration. Si $f(x) < +\infty$, l'inégalité de convexité sur le segment $[x_0; x[$ entraîne $f(x_1) = -\infty$, ce qui est une contradiction. □

Corollaire 3.1.1. *Si la fonction convexe $f : E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ prend la valeur $-\infty$ en un point x_0, elle prend la valeur $-\infty$ sur tout l'intérieur de dom f.*

Démonstration. Soit $x_1 \in \overset{\circ}{dom} f$. Alors, il existe $z \in \overset{\circ}{dom} f$ tel que $x_1 \in [x_0; z]$. Si $f(x_1) > -\infty$, on obtient une contradiction avec le lemme. En particulier, en prenant la contra posée de cette proposition, on a . □

Corollaire 3.1.2. *S'il existe $x_0 \in \overset{\circ}{dom} f$ tel que $f(x_0) > -\infty$, f ne prend nulle part la valeur $-\infty$.*

Corollaire 3.1.3. *Si dom f est d'intérieur non vide et si f est finie et s.c.i. en un point $x_0 \in dom f$, f ne prend nulle part la valeur $-\infty$.*

Démonstration. En effet, comme $f(x_0) > -\infty$ et f est s.c.i. en x_0, il existe une boule $B(x_0; r)$ telle que $f(x) > -\infty$ pour tout $x \in B(x_0; r)$. Si $f(x_1) = -\infty$, il existe $z \in B(x_0; r)$ tel que $z \in [x_1; x_0]$. D'après (voir référence [4] le Lemme 2.4.6), puisque $f(x_1) = -\infty$ et $f(z) > -\infty, f(x_0) = +\infty$, ce qui constitue une contradiction. □

Chapitre 4

APPLICATION À L'OPTIMISATION

4.1 Solution optimale

Définition 4.1.1. *Une solution optimale d'un problème de minimisation :*

$$\textit{Minimiser } f(x) \textit{ sous la contrainte } x \in C$$

est un point $x_0 \in C$ tel que $f(x_0) = \inf\{f(x) : x \in C\}$.

Théoreme 4.1.1. *Dans un espace de Hilbert toute suite décroissante de convexes fermés bornés non vides a une intersection non vide .*

Démonstration. Soit $(C_n)_n$ une suite décroissante (pour l'inclusion) de convexes fermés bornés de l'espace de Hilbert H.
La suite numérique $(d(0; C_n))_n$ ou d est la distance induite par la norme ; est croissante, majorée par le rayon R d'une certaine boule de centre 0 contenant C_1. elle est donc convergente.
Soit d sa limite. Pour tout n , soit $x_n \in C_n$ tel que $\|x_n\| \leq d(0; C_n) + \frac{1}{n}$
On appliquant l'égalité du parallélogramme :

$$\forall u, v \in \mathcal{H}; \|u - v\|^2 + \|u + v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2)$$

que l'on applique à $u = x_n$ et $v = x_m$.
On a pour tous entiers $n; m$ avec $m \leq n$:

$$\|x_n - x_m\|^2 = 2(\|x_n\|^2 + \|x_m\|^2) - \|x_n + \|x_m\|^2 \leq 2(\|x_n\|^2 + \|x_m\|^2) - 4d(0; C_m)^2$$

car $\dfrac{x_n + x_m}{2} \geq d(0, C_m)$, puisque C_m contient x_m et x_n, donc aussi leur milieu par convexité.
Comme les réels $\|x_n\|, \|x_m\|$ et $d(0; C_m)$ ont même limite finie d lorsque $n \geq m \longrightarrow$

∞ , on voit que $2(\|x_n\|^2+\|x_m\|^2)-4d(0;C_m) \longrightarrow 0$ lorsque $n \geq m \longrightarrow \infty$, et donc aussi $\|x_n - x_m\|^2 \longrightarrow 0$.
Donc la suite (x_m) est de Cauchy. Soit x sa limite. Comme $x_n \in C_m$ pour tout $n \geq m$, et que C_m est fermé, on a donc $x \in C_m$, et ceci pour tout m. □

Théoreme 4.1.2. *Soit C un convexe fermé de $\mathcal{H}$, et $f : \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe semi-continue inférieurement. On suppose que C est borné. Le problème de minimisation sous contrainte :*

$$\textit{Minimiser } f(x) \textit{ sous la contrainte } x \in C$$

admet une solution optimale au moins.
Si de plus la fonction f est strictement convexe, cette solution optimale est unique .

Démonstration. L'hypothèse entraîne que pour tout $a \in \mathbb{R}$, l'ensemble $\{x \in \mathcal{H} : f(x) \leq a\}$ est borné.
Soit $m = \inf\{f(x) : x \in C\}$, qui a priori peut valoir $-\infty$. Soit (m_n) une suite de réels $m_n > m$, tendant vers m quand $n \longrightarrow \infty$. Pour tout n, posons $C_n = \{x \in C : f(x) \leq m_n\}$: alors chaque C_n est un convexe fermé non vide, et cette suite est décroissante.
De plus ces convexes sont bornés. Il existe donc un point x_0 dans leur intersection. On doit avoir $f(x_0) \leq m_n$ pour tout n, et donc $f(x_0) \leq m$ et par conséquent $f(x_0) = m$. Comme f est à valeur réelles, ceci entraîne $m > -\infty$.
L'ensemble des solutions $\{x \in C : f(x) \leq m\}$ est un convexe fermé non vide. Si f est strictement convexe cet ensemble est réduit à un point en raison de l'inéquation stricte :

$$x_1 \neq x_2 \Longrightarrow f(\frac{x_1 + x_2}{2}) < \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \ .$$

□

Conclusion et perspective Loin de prétendre avoir épuisé l'essentiel de la théorie de l'analyse convexe, ce travail, comme une petite initiative dans ce domaine, mérite une continuité et un approfondissement pour toucher à des résultats plus généraux dans des espaces plus généraux en perspective.

Bibliographie

[1] J.B Hiriart-urruty, optimisation et analyse convexe ,EDP science ,2009

[2] Dinitri L.Bertsebas, convexe analyse and optimisation , Athena scientific ,2003

[3] Stanislaw Szarek, analyse convexe Sorbonne Université,2017-2018 période 2

[4] Rozenn Texier-Picard ,Convexité et applications ENS Rennes,

[5] Pierre Maréchal,Éléments d'analyse convexe Cours de M1 Mathématiques Fondamentales Université Paul Sabatier ,

[6] convexe optimisation Cambridge , university hess , in New-York ,2004