REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE & POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR & DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Université Ibn Khaldoun- Tiaret
FACULTÉ DES MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUE
DÉPARTEMENT DES MATHEMATIQUES

MEMOIRE MASTER

Présentée par:

BELARBI Sofiane

BElAID KHelifa

Spécialité : *Mathématiques*

Option : *Analyse fonctionnelle et équation différentielle*

Intitulé

Introduction aux équations différentielles dans les espaces de Banach

Soutenue le : 23/06/ 2022 devant le jury composé de :

Président : *LARABI Abderrahmane* *MCA. Univ. Ibn Khaldoun Tiaret*

Examinateurs : *OUARDANI Abderrahmane* *MCB. Univ. Ibn Khaldoun Tiaret*

Encadreur : *GUEDA Lahcen* *Pr. Ecole Nationale polytechnique Oran*

2021-2022

★ Remerciement ★

Nous devond remercie tout d'abord "Allah" de nous avoir donné
le courage d'entamer et de finir ce mémoire dans de bonnes conditions.
Nous adressons nos vifs remerciements à notre encadreur Mr L. GUEDA qui par
ses conseils, ses recommandations, sa patience nous a permis de réaliser ce mémoire avec un très grand plaisir.
Nos remerciements les plus chaleureux vont
à Mr A. Larabi, doyen de la Faculté de mathématiques et informatique, pour nous avoir honoré de présider le jury de notre mémoire. Nous également remercions beaucoup Mr A. Ouardani, professeur au Département de Mathématiques de l'Université Ibn Khaldoune de Tiaret, pour l'honneur qu'il nous a fait en acceptant d'examiner ce mémoire.
À tous les enseignants qui ont participés à notre formation tout au long de notre cycle universitaire.
Enfin, nous ne voulons pas oublier tous les professeurs que nous avons rencontrés tout au long de ces années de licence et tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce travail, merci.

★ ★ ★

Dédicace

Je dédie ce modeste travail :

À mes chers parents

Je vous remercie pour tout le soutien que vous me portez depuis mon enfance .

Que ce modeste travail soit l'exaucement de vos voeux tant formulés, le fruit de vos innombrables sacrifices, bien que je ne vous en acquitte jamais assez.

Puisse Dieu, le très haut,vous accorde santé, bonheur et longue vie.

À mes frères (Marouane et Maroua) qui sont présents dans tous mes moments d'examens par leur soutien moral et leurs belles surprises sucrées

Je vous souhaite un avenir plein de joie, de bonheur, de réussite et de sérénité.

À tous mes adorables amis et collègues toutes ces années.

Belarbi Sofiane

Dédicace

Je dédie ce modeste travail :

À mes chers parents

Je vous remercie pour tout le soutien que vous me portez depuis mon enfance .

Que ce modeste travail soit l'exaucement de vos voeux tant formulés, le fruit de vos innombrables sacrifices, bien que je ne vous en acquitte jamais assez.

Puisse Dieu, le très haut,vous accorde santé, bonheur et longue vie.

À mes frères qui sont présents dans tous mes moments d'examens par leur soutien moral et leurs belles surprises sucrées

Je vous souhaite un avenir plein de joie, de bonheur, de réussite et de sérénité.

À tous mes adorables amis.

Belaid Khelifa

Table des matières

Introduction

On sait que l'étude des EDP peut etre mennée à travers les méthodes du calcul variationnelle(principe du maximum), ou à travers les méthodes topologiques(degré topologique, point fixe).

Pour étudier une EDP à travers les méthodes topologiques, on transforme cette dernière à une équation différentielle abstraite dans un éspace de Banach. La solution serait une fonction à valeurs dans un éspaces de Banach.

Dans le cas d'une étude via les méthodes topologiques, il est naturel de poser les questions suivantes :

Pour une fonction à valeurs dans un éspace de Banach :

- que veut dire la mesurabilité ? ;

- que veut dire l'intégrabilité et dans quel sens ? ;

-qu'elles sont les règles de calcul ?.

Et c'est exactement l'objectif de notre mémoire.

Chapitre 1

Théorie de la mesure et intégrale de Lebesgue

Dans cette section, nous introduisons les principaux outils qui seront utiles dans toute la suite de ce travail.

Définition 1.0.1 *Une **topologie** sur X est une fammille τ de parties de X telles que :*

1) $\varnothing \in \tau,\ X \in \tau$

2) *Si* $O_1.......O_n \in \tau$, *alors* $\bigcap\limits_{i=1}^{n} O_i \in \tau$

3) *Si* $(O_i)_{i\in I}$ *est une famille quelconque d'éléments de* τ *alors* $\bigcup\limits_{i\in I} O_i \in \tau$

Les éléments de τ s'appellent les ouverts de X. On dit que (X, τ) est un espace topologique

Définition 1.0.2 *Soit X un ensemble. On appelle **tribu** ou **σ-algèbre** sur X une famille $\mathcal{M}$ de parties de X possédant les Propriétés suivantes :*

1) $X \in \mathcal{M}$

2) *si* $A \in \mathcal{M}$, *alors* $A^c \in \mathcal{M}$ *(ou* $A^c = X \backslash A$ *est le complémentaire de A dans X)*

3) *si* $A_n \in \mathcal{M}\ \forall n \in \mathbb{N}$, *alors* $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{M}$

*Les élements de $\mathcal{M}$ sont appelés **les parties mesurables** de X. On dit que $(X, \mathcal{M})$ est **un espace mesurable**.*

Conséquence.

1) $\varnothing\ \in \mathcal{M}$ *car* $X \in \mathcal{M}$

2) *Si* $A_n \in \mathcal{M},\ \forall n \in \mathbb{N}$ *alors* $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{M}$ *(car* $(\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n)^C = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n^C$*)*

3) $\mathcal{M}$ *est stable par intersection ou union finie.*

4) *Si* A *et* B *sont mésurables, alors la différence non symétrique* $A \backslash B = A \cap B^C \in \mathcal{M}$.

Evidemment, tout ensemble X *possède des tribus, par exemple :*

$\mathcal{M} = \varnothing, X$ *la plus petite.*

$\mathcal{M} = P(X)$ *la plu grande.*

Pour construire des tribus "intéréssantes" sur X, *on utilise souvent le résulta suivant :*

Lemme 1.0.1 *Soit* $(\mathcal{M}_i)_{i\in I}$ *une famille quelconque de tribus sur* X, *Alors* $\mathcal{M} = \bigcap\limits_{i\in I} \mathcal{M}_i$ *est encore une tribu sue* X.

Définition 1.0.3 *Soit* F *une famille de partie de* X. *On note*

$$\sigma(F) = \bigcap_{\mathcal{M}\, tribu\, sur\, X, \mathcal{M} \supset F} \mathcal{M}$$

Alors, $\sigma(F)$ *est une tribu sur* X *appelée* ***tribu engendrée par*** F.

Tribu borélienne.

Définition 1.0.4 *Soit E un espace métrique (plus généralement topologique) et O la famille des ouverts de E, On appelle tribu de borel ou tribu borelienne et on la note* $\mathcal{B}(E)$ *la tribu engendrée par la famille O.*

Autrement dit, $\mathcal{B}(E) = \sigma_E(O)$.

Considérons plus en détail le cas de la tribu de borel sur $\mathbb{R}$ *notée* $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

$\mathcal{B}(\mathbb{R})$ *contient tous les ouverts et tous les fermées de* $\mathbb{R}$.

$\mathcal{B}(\mathbb{R})$ *contient les union dénombrables de fermées (ensemble* F_σ*).*

$\mathcal{B}(\mathbb{R})$ *contient les inersections dénomrable d'ouverts (ensembles* G_σ*).*

On peut montrer que la tribu $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ *a la puissance du continu. En conséquence,* $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \neq P(\mathbb{R})$.

Proposition 1.0.1 *la tribu* $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ *est engendrée par les intervalles* $]a, +\infty[$ *pour* $a \in \mathbb{R}$.

Preuve : *Soit* $\mathcal{M}$ *la tribu engendrée par les intervalle* $]a, +\infty[$ *où* $a \in \mathbb{R}$, *Par constriction*

$\mathcal{M} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

D'autre part $\forall a \in \mathbb{R}$ on a $[a,+\infty[= \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}}]a-\frac{1}{n},+\infty[\in \mathcal{M}$. Par complémentaire, $]-\infty,a[= [a,+\infty[^c \in \mathcal{M}$. Par intersection, si $a<b$,

$$]a,b[=]-\infty,b[\bigcap]a,+\infty[\in \mathcal{M}$$

On sait que tout ouvert de $\mathbb{R}$ est une réunion au plus dénombrable d'intervalles de la formes $]-\infty,a[,]a,b[,]a,+\infty[$, donc $\mathcal{M}$ contient tous les ouverts de $\mathbb{R}$ et $\mathcal{M} \supset \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Remarque 1.0.1 *$\mathcal{B}(\mathbb{R})$ est engendrée par les intervalle $]a,+\infty[$, $a \in \mathbb{Q}$. En effet, pour tout $a \in \mathbb{R}$, il existe une suite de rationels $(a_n)_{n\in N}$ décroissante vers a et $]a,+\infty[= \bigcup_{n=1}^{\infty}]a_n,+\infty[$*

1.1 Définitions et exemples de mesures

Définition 1.1.1 *Soit $(X,\mathcal{M})$ un espace mesurable. on appelle **mesure positive sur** X une application $\mu : \mathcal{M} \to [0,+\infty]$ vérifiant*

1) *$\mu(\varnothing) = 0$;*
2) ***Additivité dénombrable** : si $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille dénombrable d'ensembles mesurable deux à deux disjoints alors,*

$$\mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$$

*et on dit que $(X,\mathcal{M},\mu)$ est **un espace mesuré**.*

Commentaires.

-On dira souvent "mesure" au lieu de "mesure positive".

-La condition $\mu(\varnothing) = 0$ est nécessaire pour éviter des situations triviales.

En effet $\forall\, A \in \mathcal{M}$,on a $A = A \cup \varnothing \cup \varnothing \cup ...$,donc $\mu(A) = \mu(A) + \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \mu(\varnothing)$.

Proposition 1.1.1 ***(propriétés élémentaires d'une mesure positive)***

1) ***Monotonie*** *:Si $A, B \in \mathcal{M}$ et $A \subset B$, alor $\mu(A) \leqslant \mu(B)$*

2) ***sous-additivité*** *:Si $A_n \in \mathcal{M}\, \forall\, n \in \mathbb{N}$ alors ;*

$$\mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) \leqslant \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$$

3) *Si $A_n \in \mathcal{M}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ et si $A_n \subset A_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, alors*

$$\mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \lim_{n\to+\infty} \mu(A_n)$$

4) *Si $A_n \in \mathcal{M}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ et si $A_n \supset A_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$, avec $\mu(A_0) < \infty$ alors*

$$\mu(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \lim_{n\to+\infty} \mu(A_n)$$

Démonstration :

1) On a $B = A \cup (B \backslash A)$, union disjointe d'éléments de $\mathcal{M}$ donc
$\mu(B) = \mu(A) + \mu(B\backslash A) \geqslant \mu(A)$. Si $\mu(A) < \infty$, on déduit que
$\mu(B\backslash A) = \mu(B) - \mu(A)$

2) Posons $B_0 = A_0$ et $\forall\, n \geqslant 1$, $B_n = A_n \backslash \bigcup_{k=0}^{n-1} A_k$.

3) Posons $B_0 = A_0$ et $\forall n \geqslant 1$, $B_n = A_n \backslash A_{n-1}$. Alors les B_n sont deux à deux disjoints et $\forall\ n \in \mathbb{N}\, A_n = \bigcup_{k=0}^{n} B_k$.

4) Posons $B_n = A_0 \backslash A_n \forall n \in \mathbb{N}$. Alors la suite $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est croissant avec $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} B_n = A_0 \backslash \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$. En outre, $\mu(B_n) = \mu(A_0) - \mu(A_n)$ car $\mu(A_0) < \infty$. (par 3), on a donc

$$\mu(A_0) - \mu(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n)$$

Exemples(Exemple élémentaires de mesures).

1) **Mesure de comptage** sur un ensemble X sur $(X, P(X))$, on définit la mesure de comptage $\mu(A)$, $A \subset X$ par

$$\mu(A) = \begin{cases} card(A) & , si\ A\ fini \\ \\ \infty & , si\ non \end{cases}$$

cette mesure est surtout utilisée sur des ensembles "discrets" $(\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Z}^d, ...)$.

2) **Mesure de Dirac** en un point.

Soit $(X, \mathcal{M})$ un ensemble mesurable, avec $X \neq \varnothing$ et soit $x \in X$. On définit $\mu : \mathcal{M} \to [0, +\infty]$ par

$$\mu(A) = 1_A = \begin{cases} 1 \quad si\ x \in A, \quad A \in \mathcal{M} \\ \\ 0 \quad si\ \ non \end{cases}$$

On note souvent $\mu = \delta_x$

Remarque : La condition $\mu(A_0) < \infty$ du 4 de la proposition (1.2.1) est nécessaire. En effet, considérons $(\mathbb{N}, P(\mathbb{N}))$ muni de la mesure de compatage et considérons$A_n = \{n, n+1, n+2, ...\}$, alors $A_n \supset A_{n+1}$ et $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n = \varnothing$, mais $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mu(A_n) = +\infty$.

Théorème 1.1.1 (***Mesure de Lebesgue sur*** $\mathbb{R}$) : *Il existe une unique mesure positive sur* $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})$*, notée* λ*, telle que*

$$\lambda([a, b]) = b - a, \forall\, a, b \in \mathbb{R}, a < b$$

Remarque :

La mesure de Lebesgue est **diffuse** :$\lambda(\{x\}) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$

En effet, $x = \bigcap_{n=1}^{\infty}]x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}[$, donc par la propositoin (1.2.1), on a :

$$\lambda(\{x\}) = \lim_{n\to+\infty} \lambda(]x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}[) = \lim_{n\to+\infty} \frac{2}{n} = 0$$

On dit aussi qu'elle ne charge pas les points(au contraire de la mesure de Dirac).

Conséquences :

$\lambda(]a,b[) = \lambda([a,b[) = \lambda(]a,b]) = \lambda([a,b]) = b-a$ si $a \leqslant b$

Les ensemble dénombrables sont de mesure nulle.

1.2 Complétion des mesures

Définition 1.2.1 *Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré.*

1) *On dit que $A \subset X$ est* ***négligeable*** *(pour la mesure μ) si $A \in \mathcal{M}$ et $\mu(A) = 0$.*
2) *On dit que la mesure μ est complète si tout sous-ensemble d'un ensemble négligeable est encore négligeable.*

Proposition 1.2.1 (complétion des mesures) *Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré. Soit $\mathcal{M}^*$ l'ensemble de toutes les parties E de X telles qu'il existe $A, B \in \mathcal{M}$ avec $A \subset E \subset B$ et $\mu(B \backslash A) = 0$.*

On définit alors $\mu^*(E) = \mu(A)$. Ainsi, $\mathcal{M}^*$ est une tribu sur X et μ^* une mesure complète sur $\mathcal{M}$ qui prolonge μ.

Remarque 1.2.1 *Si $E \in \mathcal{M}$, et comme $E \subset E \subset E$, alors $E \in \mathcal{M}^*$ et $\mu^*(E) = \mu(E)$*

Définition 1.2.2 *. On appelle* ***tribu de Lebesgue*** *sur $\mathbb{R}$, et on note $\mathcal{L}(\mathbb{R})$, la tribu qui compléte la tribu de Borel $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ pour la mesure de Lebesgue λ.*

On appelle encore ***mesure de Lebesgue*** *la mesure complétée*

$$\lambda : \mathcal{L}(\mathbb{R}) \longrightarrow [0, \infty]$$

Théorème 1.2.1 (Mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$.) *Il existe une unique mesure positive sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, notée λ, telle que pour tout pavé*

$P = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times ... \times [a_d, b_d] \subset \mathbb{R}$, on ait :

$$\lambda(P) = \prod_{i=0}^{d} (b_i - a_i)$$

1.3 Théorie générale de l'inégration :

Maintenant que l'on a étudié la théorie générale de la mesure, et on admettant l'existence et l'unicité de la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$, On va pouvoir définire, comme conséquence, une théorie de l'intégration, On construira donc une intégrale à valeure dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, puis on comparera avec l'intégrale de Riemann. Enfin, On donnera des théorèmes de continuité et dérivabilité sur les intégrales dépendant d'un paramètre avant d'étudier la fonction Γ d'Euler.

Définition 1.3.1 *:Soit $(X, \mathcal{M})$ et $(Y, \mathcal{N})$ deux espace mesurable .On dit qu' une application $f : X \to Y$ est **mesurable** (pour les tribus $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$) si*

$$f^{-1}(B) \in \mathcal{M}, \ \forall B \in \mathcal{N}$$

Cela rappelle la notion de fonction continue dans les espaces topologique .

Définition 1.3.2 *.Soit $(X, \mathcal{M})$et $(Y, \mathcal{S})$ deux espace topologique On dit qu' une application $f : X \to Y$ est **continue** si*

$$f^{-1}(B) \in \mathcal{M}, \ \forall \ B \in \mathcal{S}$$

Les fonctions mesurables sont aux espace mesurables ce que les fonctions continues sont aux espace topologique.

Remarques :

1) Si $(X, \mathcal{M})$ est un espace mesurable, si Y est un ensemble quelconque et $f : X \to Y$, alors on peut toujours munir Y d'une tribu $\mathcal{N}$ telle que f soit mesurable.

   Evidemment, on peut prendre $\mathcal{N} = \{\varnothing, Y\}$ (et c'est la plus petite tribu possible). Un meilleur choix est de poser $\mathcal{N} = \{B \subset Y \mid f^{-1}(B) \in \mathcal{M}\}$. Alors $\mathcal{N}$est une tribu et c'est la plus grande tribu sur Y qui rend f mesurable. On dit que $\mathcal{N}$ est la **tribu image** de $\mathcal{M}$ par f.

2) Si X est un ensemble quelconque, si $(Y, \mathcal{N})$ est un espace mesurable, et $f : X \to Y$, alors on peut toujours munir X d'une tribu $\mathcal{M}$ telle que f soit mesurable. Evidemment,

on peut prendre $\mathcal{M} = \mathcal{P}(X)$(et c'est la plus grande tribu possible).Un meilleur tribu sur X qui rend f mesurable. On dit que $\mathcal{M}$ est **la tribu engendrée** par$f$.

Lemme 1.3.1 .

Soient $(X, \mathcal{M})$ et $(Y, \mathcal{N})$ deux espace mesurables et $f : X \to Y$. On suppose que $\mathcal{N}$ est engendrée par une famille $\mathcal{F}$ de parties de Y, $\mathcal{N} = \sigma(\mathcal{F})$. Alors f est mesurable si et seulement si $f^{-1}(B) \in \mathcal{M}, \ \forall B \in \mathcal{F}$.

Preuve. *La condition est evidemment nécessaire. Supposons donc que $f^{-1}(B) \in \mathcal{M}, \forall B \in \mathcal{F}$,et considérons la tribu image de $\mathcal{M}$ par$f$:*

$$\tilde{\mathcal{N}} = \{B \subset Y \mid f^{-1}(B) \in \mathcal{M}\}$$

Alors $\tilde{\mathcal{N}}$ contient $\sigma(\mathcal{F}) = \mathcal{N}$,et en particulier, f est mesurable.

Cas particulier. *Si X et Y sont deux espaces topologiques munis de leurs tribus boréliennes, une application $f : X \to Y$ mesurable est appelée **borélienne**. Par le lemme, $f : X \to Y$ est borélienne si et seulement si, pour tout ouvert $V \subset Y, f^{-1}(V)$ est borélien. Si $Y = \mathbb{R}$ muni de la tribu de Borel $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, alors $f : X \to Y$ est borélienne. Si et seulement si $f^{-1}(]a, +\infty[)$ est borélienne pour tout $a \in \mathbb{R}$.*

Exemple 1.3.1 *Soit $(X, \mathcal{M})$ un espace mesurable, et soit $A \subset X$. On définit la fonction indicatrice de A par*

$$1_A : X \to \mathbb{R}$$

$$1_A(x) = \begin{cases} 1 \ \ si \ x \in A \\ 0 \ \ si \ non \end{cases}$$

alors

$$\forall a \in \mathbb{R}, (1_A^{-1})(\,]a,+\infty[\,) = \begin{cases} \varnothing \ si\ a \geq 1 \\ A \ si\ 0 \leq a < 1 \\ X \ si \ \ a<0 \end{cases}$$

Ainsi, 1_A *est mesurable si et seulement si* A *est mesurable* $(A \in \mathcal{M})$

Stabilite de classe des fonctions mesurables

Lemme 1.3.2 *Si* f *:*$(X_1, \mathcal{M}_1) \to (X_2, \mathcal{M}_2)$ *et* $g : (X_2, \mathcal{M}_2) \to (X_3, \mathcal{M}_3)$ *sont mesurables, alors* $g \circ f : (X_1, \mathcal{M}_1) \to (X_3, \mathcal{M}_3)$ *est mesurable.*

Démonstration. Evident car $(g \circ f)^{-1}(A) = f^{-1}(g^{-1}(A)),\ \forall A \subset X_3$

Proposition 1.3.1 *Soit* $(X, \mathcal{M})$ *un espace mesurable* (Y, τ) *un espace topologique* $f_1, f_2 : X \to \mathbb{R}$ *des applications mesurables, et* $\Phi : \mathbb{R}^2 \to Y$ *une application continue.*
Pour tout $x \in X$*, on note* $h(x) = \Phi(f_1(x), f_2(x))$*. Alors* $h : X \to Y$ *est mesurable.*
On pourrait formuler cela comme : " Une combinaison continue de deux applications mesurables est mesurable"

Démonstration. Notons $F(x) = (f_1(x), f_2(x))$ de sorte que $F : X \to \mathbb{R}^2$ Alors $h = \Phi \circ F$. comme est borélienne (car continue), il suffit de vérifier que F est mesurable . Soient $I_1, I_2 \subset \mathbb{R}$ deux intervalles, et soit R=$I_1 \times I_2 \subset \mathbb{R}_2$. Alors $F^{-1}(R) = f_1^{-1}(I_1) \bigcap f_2^{-1}(I_2) \in \mathcal{M}$.
comme la tribu de Borel sur $\mathbb{R}^2$est engendrée par les rectangles de la forme ci-dessus, on a que F est mesurable.

Corollaire 1.3.1 *Soient* $f, g : X \to \mathbb{R}$ *deux fonction mesurables ,Alors* f+$g, fg, min(f, g)$ *et* $max(f, g)$ *sont mesurables.*

Démonstration. il suffit d'appliquer la proposition avec $Y = \mathbb{R}$ et $(x, y) = x$+y , $xy\ min(x, y)$, $max(x, y)$.

Corollaire 1.3.2 *Si* $f : X \to \mathbb{R}$ *est mesurable, alors* $f_+ = max(f, 0), f_- = max(-f, 0)$ *et* $|f| = f_+ + f_-$ *sont mesurables.*

Corollaire 1.3.3 *Si $f : X \to \mathbb{R}$ est mesurable, et si $f(x) \neq 0, \forall x \in X$, alors g définie par $g(x) = \dfrac{1}{f(x)}$ est mesurable*

Démonstration. Soit $Y = \mathbb{R}\backslash\{0\}$ muni de la tribu Borélienne, et soit $\varphi : Y \to Y$ définie par $\varphi(y) = 1/y$. Comme $f : X \to Y$ est mesurable et φ est continue alors $g = \varphi \circ f : X \to Y(ou\ \mathbb{R})$ est mesurable.

Corollaire 1.3.4 .

1. *Une fonction $f : X \to \mathbb{C}$ est mesurable, si et seulment si $\Re(f) : X \to \mathbb{R}$ et $\Im(f) : X \to \mathbb{R}$ sont mesurables.*
2. *Si $f, g : X \to \mathcal{C}$ sont mesurables, il en va de même de $f + g, fg$ et$|f|$*
3. *Si $f : X \to \mathcal{C}$ est mesurable, il existe une fonction $\alpha : X \to \mathbb{C}$ mesurable telle que $\forall x, |\alpha(x)| = 1\, et\, f = \alpha|f|$*

Démonstration (du 3)Soit $A = \{x \in X \mid f(x) = 0\} = f^{-1}(\{0\}) \in \mathcal{M}$. Soit $Y = \mathbb{C}\backslash\{0\}$ et $\varphi(z) = z/|z|,\ \forall z \in Y$. On pose $\alpha : X \to \mathbb{C}$ une application mesurable (comme composition de deux fonction mesurable) définie par

$$\alpha(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x \in A \\ \dfrac{f(x)}{|f(x)|} & si \quad x \notin A \end{cases}$$

La fonction α ainsi définie convient.

Rappels sur $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \bigcup \{-\infty, +\infty\}$

1.relation d'ordre : On munit $\mathbb{R}$ de la relation d'ordre sur $\mathbb{R}$, complétée de

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, -\infty < a < +\infty$$

$\overline{\mathbb{R}}$ est donc totalement borné.

Proposition 1.3.2 ***(Stabilité des fonctions mesurables par limite poctuelle)****.Soit* $(X, \mathcal{M})$

un espace mesurable et $f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$ *une suite de fonction mesurable , alors*

$$\underset{n}{sup}\, f_n, \underset{n}{inf}\, f_n, \lim_{n\to\infty} sup\, f_n, \lim_{n\to\infty} inf\, f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$$

sont mesurable. En particulier, si $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ *existe* $\forall x \in X$, *alors* $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ *est mesurable.*

Plus généralement, l'ensemble $\{x \in X \mid \lim_{n\to\infty} f_n(x)\ \ existe\}$ *est mesurable.*

Définition 1.3.3 *:Soit* $(X, \mathcal{M})$ *un espace mesurable .On dit qu'une application mésurable* f : $X \to R$ *est **étagée** si* f *ne prend qu'un nombre fini de valeurs.*

En notant $\alpha_1, ..., \alpha_n$ *les valeurs de* f *et* $A_i = f^{-1}(\alpha_i)$ *pour* $i = 1, ..., n$, *on a donc*

$$f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i 1_{A_i} \tag{1.1}$$

Exemple 1.3.2 *la fonction indicatrice des rationnel* $1_{\mathbb{Q}}$ *est une fonction étagée .*

L'écriture (2.1) est unique aux renumérotation prés. Les $\alpha_1, ...\alpha_n$ sont deux à deux distincts et les $A_1, ...A_n$ sont deux à deux disjoints. Si f prent la valeur 0, on peux omettre le terme correspondant dans la somme (2.1) Les fonctions (mesurables) étagées sont exactement les combinaisons linéaires finies de fonctions indicatrices d'ensembles mesurables. Si

$$f = \sum_{k=1}^{N} \beta_k 1_{B_k}$$

avec $\beta_1, ...\beta_{\mathcal{N}} \in \mathbb{R}$ non nécessairement distincts et $B_1, ..., B_{\mathcal{N}} \in \mathcal{M}$ non nécessairement disjoints, alors f ne pas prend qu'un nombre fini de valeurs et possède donc aussi une écriture canonique de la forme (2.1).

Proposition 1.3.3 *Soit* $f : (X, \mathcal{M}) \to [0, +\infty]$ *une fonction mesurable, Alors il existe une suite croissante de fonctions (mesurable) étagée qui converge ponctuellement vers* f.

Démonstration. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on défini $\varphi_n : [0, +\infty[\to [0. + \infty[$ par

$$\varphi_n(t) = \begin{cases} 2^{-n}E(2^n t) & si \quad 0 \leqslant t < n \\ n & si \qquad t \geqslant n \end{cases}$$

ou $E(x)$désigne la partie entière de x. il est claire que φ_n est étagée telle que $0 \leqslant \varphi_n(t) \leqslant \varphi_{n+1}(t), \forall t \in [0, +\infty]$. On pose $f_n = \varphi_n \circ f$, $n \in \mathbb{N}$, alors f_n est étagée, $\forall n \in \mathbb{N}, f_n \leqslant f_{n+1}$ et $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(x)$, $\forall x \in X$. En effet, si $f(x) = +\infty$, on a $\forall n$, $f_n(x) = n$. D'autre part, si $f(x) < \infty$ et $n \geqslant f(x)$ alors $f(x) - 2^{-n} \leqslant f_n(x) \leqslant f(x)$.

Soient $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré

Définition 1.3.4 *Soit $f : (X, \mathcal{M}, \mu) \to [0, +\infty[$ une fonction (mesurables) étagée. On appelle **intégrale de** f (pour la mesure positive μ) la quantité*

$$\int f d\mu = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(A_i)}_{\in[0,+\infty]}$$

où $f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i 1_{A_i}$ est l'écriture canonique de f

Lemme 1.3.3 *Si $\beta_1, ..., \beta_N \in [0, +\infty[$ et $B_1, ..., B_N \in \mathcal{M}$, et si*

$$f = \sum_{k=1}^{N} \beta_k 1_{B_K}$$

alors

$$\int f d\mu = \sum_{k=1}^{N} \beta_k \mu(B_k)$$

Démonstration : On suppose $\alpha_1, ..., \alpha_n, \beta_1, ..., \beta_N \neq 0$.

— 1 **er cas :** Les $B_1, ..., B_N$ sont deux à deux disjoints. Dans ce cas là, les $\beta_1, ..., \beta_N$ parcourent $\{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$,

et on a $A_i = \bigcup\limits_{k/B_k \subset A_i} B_k$ et $B_k \subset A_i \Longleftrightarrow \beta_k = \alpha_i$. Ainsi,

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(A_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (\sum_{k/B_k \subset A_i} \mu(B_k))$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{k/B_k \subset A_i} \beta_k \mu(B_k)$$

$$= \sum_{k=1}^{N} \beta_k \mu(B_k)$$

— 2 **eme cas (cas général) :** La σ-algébre engendrée par les $B_1, ..., B_N$ est également engendrée par les ensembles $C_1, ..., C_m$ deux à deux disjoint. On définit

$$\gamma_j = \sum_{k/B_k \supset C_j} \beta_k, j = 1, ..., m$$

alors $f = \sum_{j=1}^{m} \gamma_j I_{C_j}$ avec $C_1, ..., C_m$ deux à deux disjoint . En outre,

$$\sum_{k=1}^{N} \beta_k \mu(B_k) = \sum_{k=1}^{N} \beta_k (\sum_{j/B_k \supset C_j} \mu(C_j))$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \mu(C_j) (\sum_{k/B_k \supset C_j} \beta_k)$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \gamma_j \mu(C_j)$$

Notons ε_+ l'ensemble des fonctions (mesurables) étagées sur X à valeurs dans $[0, +\infty[$. L'application

$$i : \varepsilon_+ \to [0, +\infty]$$

$$f \mapsto \int f d\mu$$

possède les propriétés suivantes:

— $i)$ **Additivité :**

$$\int (f+g)d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu \,\forall\, f, g \in \varepsilon_+$$

— $ii)$ **Homogénéité :**

$$\int \lambda f d\mu = \lambda \int f d\mu \,\forall f \in \varepsilon_+ \,\forall \lambda \in \mathbb{R}_+$$

— $iii)$ **Monotonie :** Si f et $g \in \varepsilon_+$ et si $f \leqslant g$, alors

$$\int f d\mu \leqslant \int g d\mu$$

En effet,

— $i)$ si $f = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i I_{A_i}$ et $g = \sum\limits_{j=1}^{m} \beta_j I_{B_j}$, alors $f + g = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i I_{A_i} + \sum\limits_{j=1}^{m} \beta_j I_{B_j}$, et donc

$$\int (f+g)d\mu = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(A_i) + \sum_{j=1}^{m} \beta_j \mu(B_j)$$

$$= \int f d\mu + \int g d\mu$$

— $ii)$ C'est évident par définition de l'intégrale .

— $iii)$ suit de $i)$ car

$$\int g d\mu = \int f d\mu + \underbrace{\int (g-f)d\mu}_{\geqslant 0} \geqslant \int f d\mu$$

1.4 Intégration des fonctions mesurables positives

Dans toute la suite $(X, \mathcal{M}, \mu)$ désigne un espace mesuré.

1.4.1 Définitions et théoréme de convergence monotone

Définition 1.4.1 *Soit $f : X \to [0, +\infty]$ une fonction mesurable. On appelle* ***intégrale de*** f *(sur X , pour la mesure μ) , la quantité*:

$$\int f d\mu = sup \left\{ \int h d\mu \mid h \in \varepsilon_+, h \leq f \right\} \in [0, +\infty]$$

si $E \subset X$ est une partie mesurable , on note aussi

$$\int_E f d\mu = \int f 1_E d\mu$$

si $f \in \varepsilon_+$, on retrouve bien la définition précédente de l'intégrale. Cette intégrale possède de la monotonie : $\int f d\mu \leqslant \int g d\mu$ si $f \leqslant g$.

Théorème 1.4.1 ***(de la convergence monotone - Beppo-levi)***

Soit $f_n : X \to [0, +\infty]$ une suite croissante de fonction mesurables positives, et soit $f = \lim\limits_{n\to\infty} f_n d\mu$ la limite ponctuelle des f_n. Alors, f est mesurable et

$$\int f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu$$

Démonstration:

Comme $\int f_n d\mu \leqslant \int f_{n+1} d\mu$ du fait de la croissance de (f_n), la limite $\alpha = \lim\limits_{n\to\infty} \int f_n d\mu \in [0, +\infty]$ existe. Soit $f = \lim\limits_{n\to\infty} f_n$, alors f est mesurable, et comme $\forall n$, $f_n \leqslant f$, on a

$$\int f_n d\mu \leqslant \int f d\mu, \forall\, n \Longrightarrow \alpha \leqslant \int f d\mu$$

par ailleurs, soit $h \in \varepsilon_+$ telle que $h \leqslant f$ et soit $c \in]0, 1[$. On définit :

$$A_n = \{x \in X | f_n \geqslant ch(x)\}$$

alors $A_n \in \mathcal{M}$ (comme image inverse de $[0, +\infty]$ par $f_n - ch$ mesurable), et d'autre part

$A_n \subset A_{n+1}$ et $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = X$. Or,

$$\int f d\mu \geqslant \int_{A_n} f_n d\mu \geqslant \int_{A_n} chd\mu = c\int_{A_n} hd\mu$$

De plus, si $h = \sum\limits_{j=1}^{m} \beta_j I_{\beta_j}$, on a

$$\int_{A_n} hd\mu = \sum_{j=1}^{m} \beta_j \mu(B_j \cap A_n)$$

Comme on a une somme finie, on peut passer à la limite quand n tend vers $+\infty$ et on a

$$\int_{A_n} hd\mu \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \sum_{j=1}^{m} \beta_j \mu(B_j) = \int hd\mu$$

Ainsi, $\alpha \geqslant c\int hd\mu$ et ce $\forall c \in]0,1[, \forall h \in \varepsilon_+$ telle que $h \leqslant f$. On prend d'abord le sup sur $c \in]0,1[$, puis le sup sur $h \in \varepsilon_+, h \leqslant f$ et on trouve $\alpha \geqslant \int f d\mu$.

Remarques:

— 1) Si f_n est une suite **décroissante** de fonction mesurables positives, et si $\int f_0 d\mu < \infty$, alors on a

$$\int f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu$$

où $f = \lim\limits_{n\to\infty} f_n$

Preuve, appliquer le théorème de Beppo-levi à la suit $g_n = f_0 - f_n$.

— 2) On rappelle que si $f : X \to [0, +\infty]$ est mesurable, il existe une suite croissante $f_n \leqslant f_{n+1} \in \varepsilon_+$ telle que $f_n(x) \to_{n\to\infty} f(x), \forall x \in X$. Alors,

$$\int f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu$$

L'intégrale des fonction mesurable positive vérifie :

— $i)$**Additivité :**

$$\int (f+g)d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu,\ \forall f, g \in \varepsilon_+.$$

En effet, soient (f_n) et (g_n) deux suite croissante dans ε_+ telle que $f_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f$ et $g_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} g$. Alors $f_n + g_n \in \varepsilon_+$ et $f_n + g_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f + g$. Or, $\forall n,\ \int (f_n + g_n)d\mu = \int f_n d\mu + \int g_n d\mu$, on obtient donc le résultat en passant à la limite grâce au théoréme de convergence monotone.

— $ii)$**Monotonie :**Si $f \leqslant g$, alors

$$\int f d\mu \leqslant \int g d\mu$$

Corollaire 1.4.1 *Soit (f_n) une suite de fonction mesurables positive et soit $f = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n,\ f : X \to [0, +\infty]$. Alors f est mesurable et*

$$\int f d\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int f_n d\mu$$

c'est la propriété "d'additivité dénombrable".

Démonstration Soit $F_N = \sum_{n=0}^{N} f_n$, alors $(F_N)_N$ est une suite croissante de fonction mesurable positive, et $\forall N \in \mathbb{N}$, on a

$$\int F_N d\mu = \sum_{n=0}^{N} \int f_n d\mu$$

En prenant la limite quand $N \longrightarrow \infty$, et en utilisant le théorème de convergence monotone, on obtient le résultat.

1.4.2 Propriétes de l'intégrale

Définition 1.4.2 ***(Terminologie)*** *:Dans un espace mesuré $(X, \mathcal{M}, \mu)$, on dit qu'une propriété $P(x)(x \in X)$ est vraie* ***presque partout****(ou μ-presque par tout) si elle est vraie en* *dehors d'un ensemble négligeable.*

Exemple Si $f, g :\to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ sont mesurable, alors $\{x|f(x) \neq g(x)\} \in \mathcal{M}$ et donc

$$f = g \text{ presque partout } \iff \mu(\{x \in X|f(x) \neq g(x)\}) = 0$$

Remarque μ n'est pas nécessairement compléte dans l'exemple précédent. Ainsi , si μ est compléte ou si f, g sont mesurable , alors

$$f = g \text{ presque partout } \iff \mu(\{x \in X|f(x) \neq g(x)\}) = 0$$

Proposition 1.4.1 *Soit $f : X \to [0, +\infty]$ une fonction mesurable.*

— 1) $\forall \alpha > 0, \mu(\{x \in X|f(x) \geqslant a\}) \leqslant 1/a \int f d\mu$.

— 2) $\int f d\mu = 0 \iff f = 0$ *presque partout.*

— 3) *Si $\int f d\mu < \infty$, alors $f < \infty$ presque partout.*

— 4) *Si f et $g : X \to [0, +\infty]$ sont mesurables , alors*

$$f = g \text{ presque partout} \Longrightarrow \int f d\mu = \int g d\mu$$

démonstration :

1) Soit A=$\{x \in X \mid f(x) \geq a\} = f^{-1}([a, +\infty]) \in \mathcal{M}$.On a $f \geq a1_A$ et ainsi,

$$\int f d\mu \geq a\mu(A)$$

2) Si $f = 0$ presque partout, alors si $h \in \mathcal{E}_+$ tel que $h \leq f$, on a $h = 0$ presque partout. En utilisant la définition de l'intégral dans $\mathcal{E}_+$, on en déduit que $\int h d\mu = 0$ d'où $\int f d\mu = 0$. Inversement, supposons que $\int f d\mu = 0$. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on note

$$A_n = \{x \in X \mid f(x) \geq \tfrac{1}{n}\}$$

Alors A_n est mesurable (image réciproque de $[\frac{1}{n}, +\infty]$ par f),$A_n \subset A_{n+1}$ et $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}^*} A_n = \{x \in$

$X \mid f(x) > 0\}$. Par ailleurs,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \mu(A_n) \leq n \int f d\mu = 0 \text{ par 1)}$$

Ainsi, on en déduit que

$$\mu(\{x \in X \mid f(x) > 0\} = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = 0)$$

3) Supposons que $f(x) = +\infty$,$\forall x \in A$,avec $A \in \mathcal{M}$ et $\mu(A) > 0$. $\forall n \in \mathbb{N}$, $f \geq n1_A$ et donc

$$\int f d\mu \geq n\mu(A), \forall n \in \mathbb{N}$$

donc $\int f d\mu = +\infty$.

4) Supposons que $f = g$ presque partout, et notons $h_+ = max(f, g)$ et $h_- = min(f, g)$ (point par point) alors $h_+ = h_-$ sont mesurable,$h_+ = h_-$ presque partout et $h_- \leq f, g \leq h_+$. Or,

$$\int h_+ d\mu = \int h_- d\mu + \underbrace{\int h_+ - h_- d\mu}_{=0 \ avec \ 2)} = \int h_- d\mu$$

Par monotionie,

$$\int f d\mu = \int g d\mu = \int h_+ d\mu = \int h_- d\mu$$

Lemme 1.4.1 . ***(de fatou-Corollaire du théorème de convergence monotone).*** *Soit $(f_n)_{n'}, f_n : X \to)[0, +\infty]$ une suite de fonctions mesurables. Alors*

$$\int (\liminf_{n\to\infty} f_n) d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int f_n d\mu$$

1.5 Fonctions intégrables á valeures dans $\mathbb{R}$

Dans toute cette partie, $(X, (\mathcal{M}), \mu)$ est un espace mesuré quelconque.

Définition 1.5.1 . *Soitf $: X \to \mathbb{R}$ une foction mesurable. On dit que f* ***est intégrable*** *(ou* ***sommable****)par rapport à μ si*

$$\int |f| d\mu < \infty$$

Dans ce cas, on pose

$$\int f d\mu = \int f_+ d\mu - \int f_- d\mu \tag{1.2}$$

où $f_+ = max(f, 0)$ et $f_- = max(-f, 0)$. On note $\mathcal{L}^1(X, \mathcal{M}, \mu)$ l'espace des fonction intégrables sur X.

Remarques.

1) *Si $f \geq 0$, on retrouve la définition précédent.*
2) *Si $\int |f| d\mu < \infty$, alors comme $f_+, f_- \leq |f|$, on a aussi les intégrales de f_+ et f_- qui sont finies, et la définition $(1, 2)$ fait sens.*

Proposition 1.5.1 .

a) *$\mathcal{L}^1(X, \mathcal{M}, \mu)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, et l'application $f \mapsto \int f d\mu$ est linéaire.*

b) *$|\int f d\mu| \leq \int |f| d\mu, \forall f \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{M}, \mu)$.*

c) *Si $f, g \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{M}, \mu)$ et $f \leq g$ alors $\int f d\mu \leq \int g d\mu$.*

d) *Si $f, g \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{M}, \mu)$ et si $f = g$ presque partout, alors $\int f d\mu = \int g d\mu$.*

Démonstration.

a) *Si $f, g \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{M}, \mu)$, alors $f + g$ est mesurable et $|f + g| \leq |f| + |g|$ donc $f + g \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{M}, \mu)$. En outre,*

$$(f + g)_+ - (f + g)_- = f + g = f_+ - f_- + g_+ - g_-$$

donc

$$(f + g)_+ + f_- + g_- = (f + g)_- + f_+ + g_+$$

Ainsi,

$$\int (f + g)_+ d\mu + \int f_- d\mu + \int g_- = \int (f + g)_- d\mu + \int f_+ d\mu + \int g_+ d\mu$$

ce sont des inégrales finies donc

$$\int (f + g) d\mu = \int (f + g)_+ d\mu - \int (f + g)_- d\mu$$

ce sont des inégrales finies donc

$$\begin{aligned}\int (f+g)d\mu &= \int (f+g)_+ d\mu - \int (f+g)_- d\mu \\ &= (\int f_+ d\mu - \int f_- d\mu) + (\int g_+ d\mu - \int g_- d\mu) \\ &= \int f d\mu + \int g d\mu.\end{aligned}$$

D'autre part, si$f \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{M}, \mu)$ *et* $\lambda \in \mathbb{R}$, *alors* λf *est mesurable et* $\int |\lambda f| d\mu < +\infty$ *donc* $\lambda f \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{M}, \mu)$.

- *si* $\lambda \geq 0$,

$$\begin{aligned}\int (\lambda f) d\mu &= \int (\lambda f)_+ d\mu + \int (\lambda f)_- d\mu \\ &= \lambda \int f_+ d\mu + \lambda \int f_- d\mu \\ &= \lambda \int f d\mu\end{aligned}$$

- *si* $\lambda \leq 0$,

$$\begin{aligned}\int (\lambda f) d\mu &= \int (\lambda f)_+ d\mu + \int (\lambda f)_- d\mu \\ &= (-\lambda) \int f_- d\mu - (-\lambda) \int f_+ d\mu \\ &= \lambda \int f d\mu\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}|\int f d\mu| &= |\int f_+ d\mu - \int f_- d\mu| \\ &\leq |\int f_+ d\mu| + |\int f_- d\mu| \\ &\leq \int |f| d\mu\end{aligned}$$

$car|f| = f_+ + f_-$

c) *Comme pour les fonctions mesurables positives.*

d) *Si* $f = g$ *presque partout, alors* $f_+ = g_+$ *presque partout, donc* $\int f d\mu = \int g d\mu$

Chapitre 2

Fonctions vectorielles d'une variable réelle

2.1 Fonctions intégrables.

Soit (S, B, μ) un espace mesuré ; soit X un espace de Banach de norme $\|.\|$ et de dual X'. On appelle fonction étagée une application f de S dans X ne prenant qu'un nombre fini de valeurs ; cette fonction est dite mesurable si $f^{-1}(\{x\}) \in B$, pour tout x $\in$ X et intégrable si de plus $\mu\left(f^{-l}(\{x\})\right) < +\infty$. On définit alors $\int f d\mu = \sum\limits_{x \in X} \mu\left(f^{-l}(\{x\})\right) x$, cette somme étant finie par hypothèse.

On dit qu'une fonction f de S dans X est mesurable s'il existe une suite f_n de fonctions étagées mesurables telles que $f_n(s) \to f(s)$ $\mu - p \cdot p \cdot$ s $\in S$. D'sprès le théorème de Pettis (cf. par exemple Yosida [1] p.131) une fonction f de S dans X est mesurable si et seulement si elle vérifie les deux propriétás suivantes :

a) f est $\mu - p \cdot p \cdot$ à valeurs séparables i.e. il existe une partie négligeable N de S telle que $f(S \backslash K)$ soit séparable ;

b) f est faiblement mesurable, i.e. pour tout $w \in X'$ la fonction $s \longrightarrow \langle w, f(s)\rangle$ est mesurable.

On dit qu'une fonction f de S dans X est intégrable s'il existe une suite de fonctione étagées intégrables f_n telle que pour tout n la fonction $s \to \|f_n(s) - f(s)\|$ soit intégrable et que $\lim\limits_{n\to+\infty} \int \|f_n(s) - f(s)\| \, du(s) = 0.$

Alors $\int f_n \, d\mu$ converge dans X et sa limite est indépendante 1imite $\int f d\mu$.

Rappelons divers résultats importants :

Théorème 2.1.1 (Théorème de Bochner) *(cf. par exemple Yosida [1] p.133) :une fonction f de S dans X est intégrable si et seulement si f est mesurable et $\|f(s)\|$ est intégrable.*

Théorème 2.1.2 (Théorème de Lebesgue) *(convergence dominée) soit f_n une suite de fonctions intégrables telle que $f_n(s) \to f(s) \ \mu - p \cdot p \cdot \ s \in S$; de fonctions intégrables telle que $f_n(s) \to f(s), \mu - p \cdot p.$ on suppose qu'il existe une fonction integrable ϕ de S dan $\mathbb{R}$ telle que $\|f_n(s)\| \leq \phi(s)$ pour tout $n, \mu - p \cdot p \cdot \ s \in S$.*

Alors f est intégrable et $\int \|f_n - f\| \, d\mu \to 0$ (donc en particulier $\int f_n \, d\mu \to \int f du$)

Lemme 2.1.1 (Lemne de Fatou) *soit f_n une suite de fonctions intágrables telle que $f_n(s) \to f(s)$ faiblement $u - p \cdot p \cdot \ s \in S$; on suppose qu'il existe une constante c telle que $\int \|f_n\| \, d\mu \leqslant c$ pour tout n.*

Alors f est integrable et $\int \|f\| d\mu \leqslant \liminf \int \|f_n\| \, d\mu$.

Etant donné $1 \leqslant \mathrm{p} \leqslant +\infty$, on désigne par $\mathrm{L}^{\mathrm{p}}(S; X)$ lespace des (classes de) fonctions mesurables f telles que $\|f(s)\|$ appartienne à $\mathrm{L}^{\mathrm{p}}(S; X)$. L'espace$\mathrm{L}^{\mathrm{p}}(S; X)$ muni de la norme $\|f\|_{L^p} = \left[\int \|f(s)\|^p d\mu(s)\right]^{1/p}, \|f\|_{L^\infty} = sup \ ess \ \|f(s)\|$, est un espace de Banach.

Lorsque X est réflexif, $\mu \ \sigma - finie$ et $1 < p < +\infty$, le dual de$\mathrm{L}^{\mathrm{p}}(S; X)$ peut être identifié à

$\mathrm{L}'(\mathrm{s};\mathrm{X}')$ *avec* $\frac{1}{\mathrm{p}}+\frac{1}{\mathrm{p}'}=1$ (*Phillips [1])*.

Si X *est un espace de Hilbert, l'espace* $L^2(S;X)$ *est un espace de Hilbert pour le produit scalaire* $\int(f(s),g(s))$ *du(s))*.

Dans toute la suite S *sera l'intervalle* $]0,T[,T<+\infty$ *muni de la mesure de Lebesgue.*

Notons d'abord le

Lemme 2.1.2 *Soit* $F\subset X$ *fermé et soit* $f\in \mathrm{L}^1(0,\ \mathrm{T};\mathrm{X})$ *tel que* $f(\mathrm{t})\in \mathrm{F}$ *p.p.* $t\in\,]0,T[$ *Alors pour tout* $\varepsilon>0$, *il existe* g *en escaliera valeurs dans* F *tel que* $\|g^{-}f\|_L^1\,(0,T;X)$.

Démenstration 2.1.1 *La fonction* f *étant p.p. à valeurs séparables, on peut toujours supposer* X *séparable ; donc* F *admet un systàme dénombrable* $\{\mathrm{y_k}\}_{\mathrm{k}\geqslant 1}$ *partout dense. On peut toujours supposer par translation* $0\in F$ *et* $f(t)\in F$ *pour tout* $t\in]0,\ \mathrm{T}\,[$.

Soit $S_k=\{t\in]0,\ \mathrm{T}\,[;\|f(t)-y_k\|\leqslant\varepsilon$ *et* $\|f(t)-y_r\|>\varepsilon$ *pour r=1,...,* $k-1\}$ *; c'est une partition mesurable de]0, T[; considérant la fonction* $h=y_k$ *sur* S_k *on a* $\|f-h\|_{L\infty}(0,T;X)\leqslant\varepsilon$.

Puisque f *est intégrable, il en est de même de* h *et il existe donc* k_0 *tel que*

$$\sum_{k=k_0+1}^{+\infty}\int_{S_k}\|y_k\|\,dt\leqslant\varepsilon.$$

Posons $M=\sup\{\|y_k\|;k=1,\ldots,k_0\}$.

La mesure de Lebesgue étant régulière pour tout $k=1,\ldots,k_0$, *il existe un ouvert* Ω_k *et un compact* K_k *tels que*

$$\Omega_k\supset S_k\supset K_K et\int_{\Omega_k\backslash S_k}dt\leqslant\frac{\varepsilon}{Mk_0}.$$

Considérons alors Ω'_1 *réunion finie d'intervalles ouverts telle que*

$$\Omega_1 \backslash \cup_{r=2}^{k_0} K_r \supset \overline{\Omega'_1} \supset \Omega'_1 \supset K_1$$

puis Ω'_2 *réunion finie d'intervalles ouverts telle que*

$$\Omega_2 \backslash \left[\overline{\Omega'_1} \cup (\cup_{r=3}^{k_0} K_r)\right] \supset \overline{\Omega'_2} \supset \Omega'_2 \supset K_2$$

jusqu'a Ω'_{k_0} *réunion finie d'intervalles ouverts telle que*

$$\Omega_{K_0} \backslash \cup_{r=1}^{k_0-1} \overline{\Omega'_r} \supset \overline{\Omega'_{K_0}} \supset \Omega'_{K_0} \supset K_{K_0}$$

Définissons alor g *par* $g = y_k$ *sur et g=0 sur* Ω'_k *et* $g = 0$ *sur* $]0, T[\backslash \cup_{r=1}^{k_0} \overline{\Omega'_r}$.

La fonction g *est en escalier et* $g = h$ *sur* $\cup_{r=1}^{k_0} K_r$. *on a donc*

$$\begin{aligned}
\|g-h\|_{L^1(0;T;X)} &= \sum_{r=1}^{k_o} \int_{S_r \backslash K_r} \|g(t) - y_r\| \, dt + \sum_{r > k_0} \int_{S_r} \|g(t) - y_r\| \, dt \\
&\leqslant \sum_{r=1}^{k_0} \int_{S_r \backslash K_r} 2M dt + \sum_{r > k_o} \int_{S_r} \|y_r\| \, dt + \sum_{r=1}^{k_0} \int_{\Omega_r \backslash S_r} M dt \leqslant 4\varepsilon.
\end{aligned}$$

Etant donné $f \subset L^1(0, T; X)$, *la fonction* $F(t) = \int_0^t f(s) ds$ *est derivable p.p. sur* $]0, T[$ *et l'on a* $\frac{dF}{dt} = f$ *p.p sur* $]0, T[$.

Plus précisément, on dit qu'un point $t \in]0, T[$ *(resp.* $t \in [0, T[$*) est* <u>*point de Lebesgue*</u> *(resp. point de Lebesgue à droite) de* f, *s'il existe* $x \in X$ *tel que*

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \|f(s) - x\| ds = 0$$

(resp. $\lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \|f(s) - x\| ds = 0$*)*

L'élement x *ainsi defini est slors unique, et on a*

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \frac{1}{h}\int_t^{t+h} \|f(s)-x\|ds = x$$

(resp. $\lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{1}{h}\int_t^{t+h} \|f(s)-x\|ds = x$)

L'enscrole des points de Lebesgue d'une fonction intégrable est de complétientaire négligeable (cf. par exemple Dunford-Schwartz [l] p.213) et on a

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \frac{1}{h}\int_t^{t+h} f(s)\mathrm{d}s = f(t) \quad \mathrm{p}\cdot\mathrm{p}\cdot t \in]0,T[$$

Définition 2.1.1 *On dit qu'une fonction f de $[0,T]$ dans X appartient a $W^{1,p}(0,T;X)$ s'il existe une fonction $g \in \mathrm{L^p(0,\ T;X)}$ telle que $f(t) = f(0) + \int_0^t g(s)ds$ pour tout $t \in [0,T]$.*

Lorsque $X = \mathbb{R}$, il est bien connu que'l'on peut caractérises les fonctions de $W^{1,p}(0,T)$ de deux manières :

a) f est absolument continue et $\frac{df}{dt} \in L^P(0,T)$;

b) f est continue et sa dérivée au sens des distributions appartient à $L^P(0,T)$.

Nous présentons maintenant la généralisation de ce résultat aux fonctions a valeurs vectorielles.

2.2 Fonctions a variation bornée et fonctions absolument continues.

Définition 2.2.1 *Etant donnée une fonction f de $[0,\ \mathrm{T}]$ dans x, on appelle variation totale de f sur $[0,\ \mathrm{T}]$ lexpression $\mathrm{Var}(f;[0,T]) = \sup\{\sum_{k=1}^n \|f(a_k) - f(a_{k-1}))$ pour toutes les subdivisions $0 = a_0 < a_1 \ldots < a_n = T$. Si $\mathrm{Var}(f;[0,T]) < +\infty$, on dit que f est à variation bornée ;*

on désigne par$VB(0,T;X)$ *l'espace des fonctions a variation bornée de* $[0,T]$ *dans* X.

pour simplifier les notations, on pose $V_f(t) = \mathrm{Var}(f;[0,t])$.

Lemme 2.2.1 *Soit* $f \in \mathrm{VB}(0,m;X)$, *alors* $f \in L^\infty(0,T;X)$,*et* f *admet en tout points une limite à droite et une limite à gauche(l'ensemble des points de discontinuité étant au plus dénombrable). De plus on a*

$$\int_0^{T-h} \|f(t+h)-f(t)\|dt \leqslant h\,\mathrm{Var(f;}[0,T]) \text{ pour tout } h \in]0,\ \mathrm{T}[.$$

En effet, on a $\|f(t)-f(s)\| \leqslant V_f(t)-V_f(s)$ *pour* $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$.

La fonction $t \mapsto V_f(t)$ *est croissante ; elle admet donc en tout point une limite à droite et une limite à gauche et l'ensemble des points de discontinuité est au plus dénombrable. Il en est de même pour* f. *Il en résulte en particulier que* f *est p.p. à valeurs séparables. D'autre part, pour tout* $w \in X'$ *la fonction* $t \longmapsto \langle w, f(t)\rangle$ *est à variation bornée (donc mesurable). On déduiz alors du théorème de Pettis que* f *est mesurable. Comme* $\|f(t)\| \leqslant \|f(0)\| + v_f(T)$ *pour* $t \in [0,T]$, *on a* $f \in L^\infty(0,T;X)$.

Pour $t \in [0,T-h]$ *on a*

$$\|f(t+h)-f(t)\| \leqslant v_f(t+h)-v_f(t)$$

et donc

$$\begin{aligned}\int_0^{T-h} \|f(t+h)-f(t)\| &\leqslant \int_0^{T-h} v_f(t+h)-v_f(t)\\ &\leqslant \int_0^{T-h} v_f(t+h)-v_f(t)dt\\ &\leqslant \int_{T-h}^{T} v_f(t)dt\\ &\leqslant hv_f(T)\end{aligned}$$

Il est bien connu que toute fonction fe VB $(0, T; \mathbb{R})$ *est dérivable* p · p· *sur*]0, T[; *on a un résultat analogue lorsque* X *est réflexif.*

Proposition 2.2.1 *On suppose que* X *est réflexif et soit* $f \in VB(0,T;X)$ *Alors* f *est faiblement dérivable p.p. sur* $]0,T[$, $\frac{df}{dt} \in L^1(0,T;X)$ *et* $\int_0^T \left\|\frac{df}{dt}\right\| dt \leqslant \mathrm{Var}(f;[0,T])$. *De plus*

$$\left\|\frac{df}{dt}(t)\right\| \leqslant \frac{d}{dt}V_f(t) \textit{ p.p. sur }]0,T[.$$

En effet, il est clair que

$$\limsup_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \left\|\frac{f(t+h)-f(t)}{h}\right\| \leqslant \frac{d}{dt}V_f(t) \text{ p.p. sur }]0,T[.$$

En particulier l'ensemble $N_0 = \left\{ t \in]0,T[, \lim \left\|\frac{f(t+h)-f(t)}{h}\right\| = +\infty \right\}$ est négligeaible.

D'autre part f est à valeurs séparables ; soit X_0 l'espace fermé engendré par $f([0,T])$ et soit $\{w_n\}_{n\geqslant 1}$ une suite dense de X_0' (qui est séparable puisque X_0 est réflexlf et séparable).

Pour n fixé, l'application $t \longmapsto \langle w, f(t)\rangle$ est à variation bornée et donc dérivable en tout point n'appartenant pas à un ensemble négligeable N_n. Posons $N = \bigcup_{n\geqslant 0} N_n$ est négligeable. En tout $t \in]0,T[\backslash N.$, d'une part $\dfrac{f(t+h)-f(t)}{h}$ est borné lorsque $h \to 0$,

D'autre part pour tout $n, < w, \frac{f(t+h)-f(t)}{h} >$ converge lorsque $h \to 0$, On en déduit que pour tout $t \in]0,T[\backslash N$, $\dfrac{f(t+h)-f(t)}{h}$ convorge faiblement vers une limite que l'on désigne par $\dfrac{df}{dt}(t)$.

Il résulte enfin de (l) et du lemme de Fatou que $\frac{df}{dt} \in L^1(0,T-h;X)$ pour tout $h > 0$ et que

$$\int_0^{T-h} \|\frac{df}{dt}(t)\| dt \leqslant Var(f;[0,T]).$$

Remarque 2.2.1 *La conclusion de la proposition (2.2.1) n'est pas valable lorsque* X *n'est pas* *réflexif. Considerons par exemple dans* $X = C_0$ *(espace des suites de* $\mathbb{C}$ *qui tendent vers 0 la fonction* $f(t)$ *définie par* $f_n(t)=\dfrac{e^{int}}{n}$; $f(t)$ *est lipschitzienne et nulle part dérivable. On pourrait aussi considérer dans* $x = L^1(0,1,\mathbb{R})$ *la fonction* $f(t)$ *definie par* $f(t)(x) = \begin{cases} 0 & si \quad 0 \leqslant x \leqslant t \\ 1 & si \quad t \leqslant x \leqslant 1 \end{cases}$

Même lorsque $X = \mathbb{R}$ *une fonction à varíation bornée n'est pas en général une primitive de sa dérivée ; il faut et il suffit qu'elle soit absolument continue.*

Définition 2.2.2 *On dit qu'une fonction* f *de* $[0,\ \mathrm{T}]$ *dans* X *est absolunent continue si pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe* $n > 0$ *tel que pour toute suite d'intervalle* $I_n =]\,\alpha_n, \beta_n[$ *deux deux disjoints verifiant* $\sum_n |\beta_n - \alpha_n| \leqslant n$, *on ait* $\sum_n \|f(\beta_n) - f(\alpha_n)\| \leqslant \varepsilon$.

On vérifie facilement, comme dans le cas scalsire, que toute fonction f absolument continue est à variation bornée ; de plus la fonction $t \longmapsto v_f(t)$ est absolument continue et donc

$$V_f(t) = \int_0^t \frac{d}{dt} V_f(s) ds.$$

Par suite on a

$$\|f(t) - f(s)\| \leqslant \int_s^t \frac{d}{dt} V_f(\tau) d\tau \text{ pour tout } 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T.$$

Inversement s'il existe $\phi \in L^1(0,T;\mathbb{R})$ tel que

$$\|f(t) - f(s)\| \leqslant \int_s^t \phi(\tau) d\tau \text{ pour } 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T,$$

alors f est évidemaent absolument continue et

$$\frac{d}{dt} V_f(t) \leqslant \phi(t) \text{ p.p. sur }]0,T[.$$

Définition 2.2.3 *On désigne par* $\widetilde{W}^{1,p}(0,T;X)$ *l'espace des fonctions absolunent continues de* $[0,T]$ *dans* X *telles que* $\dfrac{d}{dt} f$ *appartienne à* $L^p(0,T;\mathbb{R})$.

Il est clair que $f \in \widetilde{W}^{1,P}(0,T;X)$ *si et seulement s'il existe* $\phi \in L^p(0,T;R)$ *tel que*

$$\|f(t)-f(s)\| \leqslant \int_s^t \phi(\tau)d\tau \quad \textit{pour tout } 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T.$$

Par suite on a $W^{1,P}(0,T;X) \subset \widetilde{W}^{1,P}(0,T;X)$ *et l'inclusion est stricte en général (cf. remarque A.I).*

Notons que $\widetilde{W}^{1,1}(0,T;X)$ *cotuncide avec l'espace des fonctions absolument continues de* $[0,T]$ *dans* X*.Si* $f \in \widetilde{W}^{1,P}(0,T;X)$ *avec* $1 < p < +\infty$*, alors il existe une constante c telle que* $\|f(t)-f(s)\| \leqslant c|t-s|^{1-1/p}$ *pour tout* $t,s \in [0,T]$.

Enfin $\widetilde{W}^{1,\infty}(0,T;X)$ *coincide avec l'espace des fonctions lipschitziennes de* $[0,T]$ *dans* X*.*

Proposition 2.2.2 *Soit* $f \in \widetilde{W}^{1,p}(0,T;X)$ *avec* $1 \leqslant p < +\infty$*. Alors on a*

$$\lim_{h\to 0}\left\|\frac{f(t+h)-f(t)}{h}\right\| = \frac{d}{dt}V_f(t) \quad \textit{p.p. sur }]0,T[\tag{2.1}$$

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \int_0^{t-h}\left|\frac{\|f(t+h)-f(t)\|}{h} - \frac{d}{dt}V_f(t)\right|^p dt = 0 \tag{2.2}$$

Pour toute fonction $f \in VB(0,T;X)$ *on a*

$$\limsup_{h\to 0}\left\|\frac{f(t+h)-f(t)}{h}\right\| \leqslant \frac{d}{dt}v_f(t) \quad \textit{p.p. sur }]0,T[.$$

Posons $\psi(t) = \underset{h\to 0}{1im}\inf\left\|\dfrac{f(t+h)-f(t)}{h}\right\|$*; on a* $\psi \in L^1(0,T)$*.*
Pour $x \in X$ *fixé, la fonction* $w(t) = \|f(t)-x\|$ *est absolument continue et* $\left|\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\omega(t)\right| \leqslant \psi(t)$ *p.p. sur* $]0,T[$*. Donc* $\omega(t) \leqslant \omega(\mathrm{s}) + \int_{\mathrm{s}}^t \psi(\tau)d\tau$ *pour* $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$ *; prenant en partieulier* $x = f(s)$*, on obtient* $\|f(t)-f(s)\| \leqslant \int_s^t \psi(\tau)d\tau$*. Par suite* $v_f(t) - v_f(s) \leqslant \int_s^t \psi(\tau)d\tau$ *et* $\dfrac{d}{dt}V_f \leqslant \psi$ *p.p. sur* $]0,T[$*, ce qui établit (3.2).*

Pour prouver (2.2), raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe $a > 0$ et une suite $\mathrm{h_k} \rightarrow 0,\ \mathrm{h_k} > 0$ *tels que*

$$\int_0^{T-h_k} \left| \frac{\|f\,(t+h_k) - f(t)\|}{h_k} - \frac{d}{dt} v_f(t) \right|^p dt \geqslant \alpha$$

Comme $f \in \widetilde{W}^{1,P}(0,T;X)$ *il existe* $\phi \in L^P(0,+\infty;R)$ *tel que*

$$\|f(t) - f(s)\| \leqslant \int_s^t \phi(\tau) d\tau \text{ pour } 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T.$$

Donc

$$\frac{\|f\,(t+h_k) - f(t)\|}{h_k} \leqslant \frac{1}{h_k} \int_t^{t+h_k} \phi(\tau) d\tau;$$

or d'après Bourbaki (chap. IV, \$.3, Théorème 3, p.131) il existe une suite extraite h_ℓ *de la suite* h_k *et il existe* $g \in L^p(0,+\infty;\mathbb{R})$ *tels que*

$$\frac{1}{h_\ell} \int_t^{t+h_\ell} \phi(\tau) d\tau \leqslant g(t)$$

pour tout ℓ *et tout* t *(on utilise ici le fait bien connu que*

$$\frac{1}{h} \int_t^{t+h} \phi(\tau) d\tau \rightarrow \phi(t)$$

dans $L^p(0,+\infty;\mathbb{R})$*).*

On conclut à l'aide du théorème de Lebesgue que

$$\lim_{h_\ell \rightarrow 0} \int_0^{T-h_\ell} \left| \frac{\|f(t+h_\ell) - f(t)\|}{h_\ell} - \frac{d}{dt} V_f(t) \right|^P dt = 0$$

on aboutit ainsi à une contradiction.

Proposition 2.2.3 *Soit* f *une fonction de* $[0,T]$ *dans* X *et soit* $1 \leqslant P \leqslant +\infty$*. Les prodrietés suivantes sont equivalentes :*

i) $f \in W^{1,P}(0,T;x)$

ii) $f \in \widetilde{W}^{1,P}(0,T;X)$ *et* f *est dérivable p.p. sur* $]0,T[$;

iii) f *est faiblement absolument continue (i,e, pour tout* $W \in X'$, $t \longmapsto \langle w, f(t)\rangle$ *est absolument continuec,* f *est faiblement dérivable p.p. sur* $]0,T[$ *et* $\dfrac{df}{dt} \in L^p(0,T;X)$.

Comme les implications i) $\Rightarrow$ ii) et ii) $\Rightarrow$ iii) sont immédiate, il suffit détablir que iii) $\Rightarrow$ i). Posons $g(t) = f(0) + \int_0^t \dfrac{df}{dt}(s)\ ds$.

pour tout $w \in X'$, la fonction $t \longmapsto \langle w, f(t)\rangle$ est p.p. dérivable et

$$\frac{d}{dt}\langle w, f(t)\rangle = \langle w, \frac{df}{dt}(t)\rangle \text{ p.p. sur }]0,T[.$$

Donc

$$\langle w, f(t)\rangle = \langle w, f(0)\rangle + \int_0^t \frac{df}{dt}(s)\ ds$$

et par suite

$$\langle w, f(t)\rangle = \langle w, g(t)\rangle \text{ pour tout } w \in X' \text{ et tout } t \in [0,T].$$

Il en résulte que $f = g$ et par conséquent $f \subset W^{1,P}(0,T;X)$.

Corollaire 2.2.1 *Soit* $f \in W^{1,1}(0,T;X)$ *Alors*

$$\left\|\frac{df}{dt}(t)\right\| = \frac{d}{dt}v_f(t) \ \textit{p.p. sur }]0,T[$$

et

$$\int_0^T \left\|\frac{df}{dt}(t)\right\| dt = \mathrm{Var}(f;[0,T])$$

En effet il résulte de 3.2 que

$$\left\|\frac{df}{dt}(t)\right\| = \frac{d}{dt}V_f(t) \ \textit{p.p. sur }]0,T[.$$

Intégrant cette êgté sur $]0,T[$ *on en déduit que*

$$\int_0^T \left\| \frac{d}{dt}(t) \right\| dt = \mathrm{Var}(f;[0,T])$$

puisque la fonction $v_f(t)$ *est absolument continue.*

Corollaire 2.2.2 *on suppose que* X *est reflexif. Alors* $W^{1,P}(0,T,X) = \widetilde{W}^{1,P}(0,T,X)$ *pour tout* $1 \leqslant P \leqslant +\infty$.

Autrement dit toute fonction absolument continue est dérivable p.p. et

$$f(t) = f(0) + \int_0^t \frac{df}{dt}(s)ds.$$

Le corollaire (2.2.2) résulte directement de la proposition (2.2.1) et de l'implication iii) $\Rightarrow$ i) de la proposition (2.2.3)

Corollaire 2.2.3 *On suppose que* X *est réflexif et soit* $f \in VB(0,T;X)$ *Alors* $f \in W^{1,1}(0,T;X)$ *si et seulenent si* $\int_0^T \left\| \frac{df}{dt}(t) \right\| dt = \mathrm{Var}(f;[0,T])$

On sait deja d'aprés le corollaire (2.2.1) que si $f \in W^{1,1}(0,T;X)$, alors

$$\int_0^T \left\| \frac{df}{dt}(t) \right\| dt = \mathrm{Var}(f;[0,T]).$$

Inversement on sait d'après la proposition (2.2.1) que

$$\int_0^t \left\| \frac{df}{dt}(s) \right\| ds \leqslant V_f(t) \text{ pour tout } t \in [0,T].$$

Supposons qu'il existe t_0 tel que

$$\int_0^{t_0} \left\| \frac{df}{dt}(s) \right\| ds < V_f t_0.$$

On aurait alors

$$\int_0^T \left\|\frac{df}{dt}(s)\right\| ds = \int_0^{t_0} \left\|\frac{df}{dt}(s)\right\| ds + \int_{t_0}^T \left\|\frac{df}{dt}(s)\right\| ds \, \mathrm{Var}(f;[0,t_0]) + \mathrm{Var}(f;[t_0,T])$$
$$= \mathrm{Var}(f;[0,T])$$

et on aboutirait à une contradiction. Donc on a

$$\int_0^t \left\|\frac{df}{dt}(s)\right\| ds = V_f(t)$$

et par suite la fonction V_f est absolument continue. Il en résulte que

$$f \in W^{1,1}(0,T;X) = W^{1,1}(0,T;X)$$

.

Corollaire 2.2.4 *Soient X, Y et Z des espaces de Banach et soit g une anplication bilinéaire et continue de $X \times Y$ dans Soient $f \in W^{1,1}(0,T;X)$ et $g \in W^{2,1}(0,T;Y)$. Alors $B(f,g) \in$ $, W^{1,1}(0,T,Z)$.*

Proposition 2.2.4 *f une fonction continue de $[0,T]$ dans X vérrifiant les deux conditions :*

i) f est faiblement dérivable a droite p.p. sur $]0,T[$ et $\frac{d^+f}{dt} \in L^p(0,T;X)$ avec $1 \leqslant p \leqslant +\infty$

ii) $\limsup\limits_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{\|f(t+h)-f(t)\|}{h} < +\infty$ pour tout $t \in [0,T[$ sauf au plus un encemble dénombrable.

Alor $f \in W^{1,P}(0,T,X)$

La démonstration de la proposition (2.2.4)est basée sur le lemme suivant.

Lemme 2.2.2 *Soit f une fonction de $[0,T]$ dang $\mathbb{R}$; on pose $\delta(t) = \limsup\limits_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{f(t+h)-f(t)}{h}$.*

Alors on a les implications suivantes :

a) il existe $y \in L^1(0,T;\mathbb{R})$ tel zue $f(t) - f(s) \leqslant \int_s^t y(\tau)d\tau$ pour tout $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant$ T ;

$\Rightarrow$ b) f est j variation bornée et $f(t) - f(s) \leqslant \int_s^t \frac{df}{dt}(\tau)d\tau$ pour tout $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$;

$\Rightarrow$ c) $\delta \in L^1(0,T,\mathbb{R})$

$\Rightarrow$ d) il existe $\tilde{\delta} \in L^1(0,T;\mathbb{R})$ tel que $\delta(t) \leqslant \tilde{\delta}(t)$ p.p. sur $]0,T[$.

Si de plus f est continue et si $\delta(t) < +\infty$ pour tout $t \in [0,T[$ sauf au plus un ensemble dénombrable, alors d) $\Rightarrow$ a).

Montrons que a) $\Rightarrow$ b) ; la fonction $g(t) = f(t) - \int_0^t y(s)ds$ est dácroissante et tonc g est à variation bornée. Il en résulte que $f(t) = g(t) + \int_0^t y(s)$ ds est aussi à variation bornée. Notons que g Etant décroissante, on a $\int_s^t \frac{dg}{dt}(\tau)d\tau \geqslant g(t) - g(s)$ pour $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$ i.e.$\int_s^t \left[\frac{df}{dt}(\tau) - y(\tau)\right] d\tau \geqslant f(t) - f(s) - \int_s^t y(\tau)d\tau$.

L'implication b) $\Rightarrow$ c) est bien connue puisque $\delta = \frac{df}{dt}$ p.p. sur $]0,T[$ et limplication c) $\Rightarrow$ d) est immediate.

Montrons que d) $\Rightarrow$ a) si f est continue et si $\delta(t) < +\infty$ pour tout $t \in [0,T[$ sauf au plus un ensemble dénombrable. On peut toujours supposer (après modification de $\tilde{\delta}$) que $\delta(t) \leqslant \widetilde{\delta}(t)$ pour tout $t \in [0,T[$ et que $\tilde{\delta}(t) \geqslant 0$ pour tout $t \in [0,T]$.
On sait qu'il existe une fonction y s.c.i. de $[0,T]$ dans $\mathbb{R}$ telle que $Y \in L^2(0,T;\mathbb{R})$ et $\tilde{\delta}(t) \leqslant y(t)$ pour tout $\in [0,T]$ (cf. par exemple Bourbaki [1] chap. IV, 5.4, n^o 4 Théoreme 3, p .147) Considérons la fonction $g(t) = f(t) - \int_0^t y(s)\ ds$ on a

$$\limsup_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{g(t+h)-g(t)}{h} \leqslant \delta(t) - \liminf_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{1}{h}\int_t^{t+h} y(s)ds = \delta(t) - y(t) \leqslant 0$$

pour tout $t \in [0,T[$ tel que $\delta(t) < +\infty$; c'est-a-dire pour tout $t \in [0,T[$ sauf au plus un ensemble dénombrable. On en déduit (cf. par exemple Lelong [l]. Proposition 5, p.22) que g est décroisante i.e. $f(t) - f(s) \leqslant \int_s^t y(\tau)d\tau$ pour $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$.

Démenstration 2.2.1 (de la proposition (2.2.4)**)**

Corollaire 2.2.5 *On supnose que x est réflexif. Soit f une fonction continue de $[0, T]$ dans X. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

i) $f \in W^{1,1}(0, T; X)$

ii) $f \in VB(0, T; X)$ *et il existe* $y \in L^1(0, T; \mathbb{R}), y \geqslant 0$ *tel que pour tout* $t \in]0, T[$. *sauf au plus un ensamblc dénombrable, il existe* $\delta_t > 0$ *et* $M_t < +\infty$ *vérifiant* $\|f(t + h) - f(t)\| \leqslant \int_t^{t+h} y(\tau)d\tau + M_t h$ *(resp.*$\|f(t) - f(t - h)\| \leqslant \int_{t-h}^t y(\tau)d\tau + M_t h$*) pour* $h \in [0, \delta_t[$.

En effet, il est immédiat que i) $\Rightarrow$ ii) avec $M_t = 0$ et $y = \left\|\frac{df}{dt}\right\|$.

Inversement, il suffit d'apràs la proposition (2.2.3) de montrer que f est faiblement absolument continue. Soit donc $w \in X'$ avec $\|w\| = 1$.

La fonction $\phi(t) = \langle t, f(t)\rangle - \int_0^t y(\tau)d\tau$ est continue et $\delta(t) = \limsup\limits_{h\to 0} \frac{\phi(t+h)-\phi(t)}{h} \leqslant M_t < +\infty$ pour tout $t \in]0, T[$ sauf un ensemble dénombrable.
$\delta \in L^1(0, T; \mathbb{R})$ puisque ϕ est a variastion bornée. On déduit que lemme 2.2.2 ($d \Rightarrow a$) qu'il existe $y_1 \in L^1(0, T; \mathbb{R})$ tel que $\phi(t) - \phi(s) \leqslant \int_s^t y_1(\tau)d\tau$ pour $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$ i.e. $\langle w, f(t)\rangle - \langle w, f(s)\rangle \leqslant \int_s^t \{y(\tau) + y1(\tau)\}\, d\tau$ pour $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$.

Appliquant ce résultat avec $-w$, on voit qu'il existe $y_2 \in L^1(0, T; \mathbb{R})$ tel que

$$| < w, f(t) > - < w, f(s) > | \leqslant \int_g^t y_2(\tau)d\tau \text{ pour } 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T.$$

2.3 lien avec les dérivées au sens des distributions.

On désigne par $D(]0,T[;X)$ l'espace des fonctions indéfiniment dérivables de $]0,T[$ dans X à support compact contenu dans $]0,T[$.

Une suite régularisante est une suite e_n de fonctions de $D(\mathbb{R};\mathbb{R})$ telles que $e_n \geqslant 0$, $\int_{\mathbb{R}} e_n(t)dt = 1$, supp $e_n \subset]-\frac{1}{n},+\frac{1}{n}[$,$e_n$ décroît sur $[0,+\infty[$ et $e_n(-s) = e_n(s)$ pour tout $s \geqslant 0$.

Etant donné $f \in L^P(0,T;X) \quad (1 \leqslant p \leqslant +\infty)$ on pose
$f_n(t) = \int_0^T e_n(t-s)f(s)ds$; il est bien connu (cf. par exemple DunfordSchwartz [I] p .220) que $f_n(t) \to f(t)$ p.p. sur $]0,T[$ et si $1 \leqslant p < +\infty$ on a $f_n \to f$ dans $L^p(0,T;X)$; de plus

$$\|f_n\|_L^p(0,T;X) \leqslant \|f\|_L^p(0,T;x).$$

Proposition 2.3.1 *Soient $f \subset L^l(0,T;X)$ et C une constante. Les proprietés suivantes sont équivalentes :*

i) Il existe $f_1 = \mathrm{VB}(0,T;x)$ tel que $\mathrm{Var}\,(f_1;[0,T]) \leqslant C$ et $f(t) = f_1(t)$ p.p. sur $]0,T[$.
ii) $\int_0^{T-h} \|f(t+h) - f(t)\|dt \leqslant Ch$ pour tout $h \in]0,T[$
iii) $\left|\int_0^T \langle f(t), \frac{d\phi}{dt}(t)\rangle dt\right| \leqslant C\,\|_\phi\|_L^\infty(0,T;X')$ pour tout $\phi \in D(]0,T[;X'$.

On utillsera dans la démonstration le lemme suivant :

Lemme 2.3.1 *Soit $f \in L^p(0,T;X), 1 \leqslant p \leqslant +\infty, \frac{1}{p}+\frac{1}{p'} = 1$ Alors*

$$\begin{aligned}
\|f\|_{L^p}(0,T;X) &= \sup_{\substack{\phi \in D(0,T;X') \\ \|\phi\|_{L^{p'}(0,T;X')} \leqslant 1}} \int_0^T \langle f(t), \phi(t)\rangle dt \\
&= \sup_{\substack{\phi \in L^{p'}(0,T;X') \\ \|\phi\|_{L^{p'}(0,T;X')} \leqslant 1}} \int_0^T \langle f(t), \phi(t)\rangle dt
\end{aligned}$$

Nous aurons à distinguer trois cas :

• $p = +\infty$.

Comme l'ensemble $\{\phi \in D(]0,T[;X'); \|\phi\|_{L^1(0,T;X')} \leqslant 1\}$ est dense dans $\{\phi \in L^1(0,T,X'); \|\phi\|_{L^1(0,T;X')} \leqslant 1\}$. il suffait d'établir que

$$\|f\|_{L^\infty(0,T;X)} = \sup_{\substack{\phi \in L^1(0,T;X') \\ \|\phi\|_{L^1(0,T;X')} \leqslant 1}} \int_0^T \langle f(t), \phi(t)\rangle dt$$

Commencons par supposer f continu et soit $t_0 \in [0,\ \mathrm{T}]$ tel que $\|f(t_0)\| = \|f\|_{L^\infty(0,\ \mathrm{T};\mathrm{X})}$; pour tout $c > 0$ il existe un voisinage ouvert U de t_0 tel que pour $t \in U$, $\|f(t) - f(t_0)\| < \epsilon$.
Il existe alors d'aprés Hahn-Banach $w \in X'$ tel que $< w, f(t_0) >= \|f(t_0)\|$ et $\|w\|_{X'} = 1$.

$$\text{Posons } \phi(t) = \begin{cases} \frac{1}{mes \quad U} w & \text{si } t \in U \\ 0 & \text{si } t \notin U \end{cases}$$

On a

$$\|\phi\|_{\mathrm{L}^1}\,(0,\ \mathrm{T}; X') = 1$$

et

$$\begin{aligned} \int_0^T \langle f(t), \phi(t)\rangle dt &= \int_0^T < f(t) - f\,(t_0)\,, \phi(t) > dt + \int_0^{\mathrm{T}} \langle \mathrm{f}\,(t_0)\,, \phi(t)\rangle\,\mathrm{dt} \\ &\geq \|f(t_0)\| - \varepsilon \\ &= \|f\|_{\mathrm{L}^\infty(0,\ \mathrm{T};\mathrm{X})} - \varepsilon. \end{aligned}$$

Dans le cas gênéral, soit f_n la suite rágularisante de f ; comme $f_n \to f$ p.p. sur $]0, T[$., on a

$$\|f_n\|_{L^\infty(0,T;X)} \to \|f\|_{L^\infty(0,T;X)}.$$

Soit $\varepsilon > 0$, et soit n tel que

$$\|f_n\|_{L^\infty(0,T;X)} \geqslant \|f\|_{L^\infty(0,T;X)} - \varepsilon.$$

D'aprés ce qui précède, il existe $\phi \in L^1(0, T; X')$ tel que

$$\int_0^T < f_n(t), \phi(t) > dt \geqslant \|f_n\|_{L^\infty(0,T;x)} - \varepsilon.$$

Or, grace à Fubini, on a

$$\int_0^T < f(t), \phi_n(t) > dt = \int_0^T < f_n(t), \phi(t) > dt.$$

Par consesquent, on a trouvé $\phi_n \in L^1(0, T; X)$ tel que

$$\|\phi_n\|_{L^1}(0, T; X) \leqslant \|_L\|_L(0, T; X) \leqslant 1,$$

et

$$\int_0^T < f(t), \phi_n(t) > \text{ dt } \geqslant \|f\|_{L^\infty(0,T;x)} - 2\varepsilon.$$

$\bullet 1 < p < +\infty$.

II suffit de prouver que

$$\|f\|_{L^P(0,T;X)} = \sup_{\substack{\phi \in L^{P'}(0,T;X') \\ \|\phi\|_{L^{P'}(0,T;X')\leqslant 1}}} \int_0^T \langle f(t), \phi(t) \rangle dt.$$

Commençons par supposer que f est átagáe et soith $(B_i)_{i\in I}$ une partition finie mesurable de

$]0,T[$ telle que $f(t)=v_i$ pour $t\in B_i$.

Soit $w_i\in X'$ tel que $\langle w_i,v_i\rangle=\|v_i\|^P$ et $\|v_i\|_{X'}=\|v_i\|^{p-1}$ (w_i existe d'aprés Hanh-Banach). Posons $\phi(t)=\dfrac{1}{\|f\|^{P-1}_{L^p(0,T,X)}}w_i$

pour $t\in B_i$ on vérifie aisément que

$$\|\phi\|_{L^{P'}(0,T;X)}\leqslant 1$$

et

$$\int_0^T\langle f(t),\phi(t)\rangle dt=\|f\|_{L^P(0,T;X)}$$

Dans le cas cénerral, soit $\varepsilon>0$ et soit $\tilde f$ une fonction étagée telle que $\|f-\tilde f\|_{L^P(0,T;X)}<\varepsilon$. D'aprés ce qui précède,

il existe $\tilde\phi\in \mathrm{L}^P(0,T;X')$ tel que

$$\|\tilde\phi\|_{L^P(0,T;X')}\leqslant 1$$

et

$$\int_0^T\langle\tilde f(t),\tilde\phi(t)\rangle dt=\|\tilde f\|_{L^p(0,T;X)}.$$

On a alors

$$\int_0^T<f(t),\tilde\phi(t)\Big\rangle\, dt=\int_0^T\langle f(t)-\tilde f(t),\tilde\phi(t)\rangle dt+\int_0^T\langle\tilde f(t),\tilde\phi(t)\rangle dt\geqslant\|f\|_{L^P(0,T;X)}-2\varepsilon.$$

$\bullet p=1.$

Commensons par supposer que f est étagée ; comme au cas précédent on voit qu'il existe

$\phi \in L^\infty(0,T;X')$ tel que

$$\|\phi\|_L^\infty(0,T;X') \leqslant 1$$

et

$$\int_0^T \langle f(t), \phi(t)\rangle dt = \|f\|_{L^1(0,T;X)}$$

Enfin si θ_n désigne une suite telle que

$$\theta_n \in \mathcal{D}(]0,T[;IR) \quad 0 \leqslant \theta_n \leqslant 1, \theta_n \to 1 \text{ p.p. sur }]0,T[$$

, on a grâce au théorème de Lebesgue

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^T \langle f(t), \theta_n(t)\phi_n(t)\rangle \, dt = \int_0^T \langle f(t), \phi(t)\rangle dt = \|f\|_{L^1(0,T;X)}.$$

Dans le cas général, soit $\varepsilon > 0$ fixé et soit $\tilde{f}$ une fonction étagée telle que

$$\|f - \tilde{f}\|_{L^1(0,T;X)} < \varepsilon.$$

D'après ce qui précède, il existe $\tilde{\phi} \in D(]0,T[;X')$ tel que

$$\|\tilde{\phi}\|_{L^\infty(0,T;X')} \leqslant 1 \,\text{et}\, \int_0^T \langle \tilde{f}(t), \tilde{\phi}(t)\rangle dt \geqslant \|\tilde{f}\|_{L^1(0,T;X)} - \varepsilon.$$

On a alors

$$\int_0^T \langle f(t), \tilde{\phi}(t)\rangle dt \geqslant \|f\|_{L^l(0,T;X)} - 3\varepsilon.$$

Démenstration 2.3.1 (de la proposition (2.3.1)**)** *L'implication i) $\Rightarrow$ ii) résulte du lemme (3.0.1).*

Démontrons que ii) $\Rightarrow$ iii) :

Soient $\phi \in D(]0,T[;X')$ et $h \in]0,T[$; on a

$$\frac{l}{h}\int_0^T \langle f(t), \phi(t)-\phi(t-h)\rangle dt =$$

$$\frac{l}{h}\int_0^{T-h} \langle f(t)-f(t+h), \phi(t)\rangle dt + \frac{1}{h}\int_{T-h}^{T}\langle f(t), \phi(t)\rangle dt - \frac{1}{h}\int_0^h \langle f(t), \phi(t-h)\rangle dt.$$

Par suite pour h assez petit, on a grace à ii)

$$|\frac{1}{h}\int_0^T \langle f(t), \phi(t)-\phi(t-h)\rangle dt| \leqslant \|\phi\|_{L^1(0,T,X')}$$

Passant à la limite (à l'aide du théorème de lebesgue) on obtient iii).

prouvons que iii) $\Rightarrow$ i).

Soit $\phi \in D(0,T;X')$ on a

$$\int_0^T \left\langle \frac{df_n}{dt}(t), \phi(t)\right\rangle dt = -\int_0^T \left\langle f_n(t), \frac{d\phi}{dt}(t)\right\rangle dt = -\int_0^T \left\langle f(t), \frac{d\phi_n}{dt}(t)\right\rangle dt.$$

Si de plus supp$\phi =]\frac{l}{n}, T-\frac{1}{n}[$, on a

$$supp\phi_n \subset]\,0, T[$$

et donc

$$\phi_n \in D(]0, T\,[; X')$$

Il résulte alors de iii) que

$$|\int_0^T \left\langle \frac{df_n}{dt}(t), \phi(t)\right\rangle dt| \leqslant c\|\phi_n\|_{L^\infty(0,T,X')}.c\|\phi\|_{L^\infty(0,T,X')}.$$

On déduit du lemme (2.3.1) (appliqué sur l'intarvalle $]\frac{1}{n}, T-\frac{1}{n}[$ au lieu de $]0,T[$) que

$$\int_{\frac{1}{n}}^{T-\frac{1}{n}} \|\frac{df_n}{dt}(t)\|dt \leqslant c.$$

l'ensemble $A = t \in]0,T[; f_n(t) \to f(t)$ est de complémentatre négligeable. Etant donnée une *subdivision* $0 < a_0 < a_1 \ldots < a_k < T$ *de* A *on a*

$$\sum_{i=1}^{k} \|f_n(a_i) - f_n(a_{i-1})\| \leqslant c$$

pour vu que

$$n > \frac{1}{a_0} \text{ et } n > \frac{1}{T - a_k}.$$

Donc à la limite quand $n \to +\infty$, *on obtient*

$$\sum_{i=1}^{k} \|f(a_i) - f(a_{i-1})\| \leqslant C$$

pour toute subdivision de A.

Posons pour $0 < t \leqslant T$:
$V(t) = \sup \left\{ \sum_{i=1}^{k} \|f(a_i) - f(a_{i-1})\| \right\}$ *pour toutes les subdivisions de* $A \cap [0, t]$
La fonction V *est croissante de* $]0, T]$ *dans* $[0, C]$ *et pour* $s, t \in A$ *avec* $s \leqslant t$ *on a*

$$\|f(t) - f(s)\| \leqslant v(t) - v(s)$$

donc pour tout $t \in]0, T[$, $\lim\limits_{\substack{s \to t \\ s < t \\ s \in A}} f(s) = f_1(t)$ *existe et* $\lim\limits_{\substack{s \to 0 \\ s \in A}} f(s) = f_1(0)$ *existe.*
On a ainsi définit une fonction f_1 *de* $[0, T]$ *dans* X *vérifie les propriétés :*

$\|f(t) - f_1(t)\| \leqslant V(t) - V(t - 0)$ *pour* $t \in A$

$\|f_1(t) - f_1(s)\| \leqslant V(t - 0) - V(s - 0)$ *pour* $0 < s \leqslant t \leqslant T$

$\|f_1(t) - f_1(0)\| \leqslant V(t - 0) - V(0 + 0)$ *pour* $0 < t \leqslant T$

Il en résulte que, pour toute subdivision de $[0, T]$ *on a*

$$\sum_{i=1}^{k} \|f_1(a_i) - f_1(a_{i-2})\| \leqslant v(T - 0) - v(0 + 0) \leqslant c$$

et par conséquent $\mathrm{Var}\,(f_1 : [0,T]) \leqslant C$.

D'autre part $f(t) = f_1(t)$ *en tout* $t \in A$ *où* $v(t)$ *est continu ; par suite* $f(t) = f_1(t)$ *p.p. sur* $]0,T[$.

Proposition 2.3.2 *Soit* $f \in L^P(0,T;X)$ *avec* $1 \leqslant p \leqslant +\infty$. *Les propriétés suivantes sont éouivalentes :*

i) il existe $f_1 \in W^{1,p}(0,T;X)$ *tel que* $f(t) = f_1(t)$ *p.p. sur* $]0,T[$

ii) il existe $g \in L^P(0,T;X)$ *tel que*

$$\lim_{h\to 0}\int_0^{T-h}\left\|\frac{f(t+h)-f(t)}{h} - g(t)\right\| dt = 0$$
$$(resp. \lim_{h\to 0}\int_0^{T-h}\left\|\frac{f(t+h)-f(t)}{h} - g(t)\right\|^P dt = 0 \quad si \quad p < +\infty)$$

iii) il existe $k \in L^P(0,T;X)$ *tel que*

$$\int_0^T f(t)\frac{d\alpha}{dt}(t)dt = -\int_0^T k(t)\,\alpha(t)\,dt, \ \ pour\ tout\ \alpha = D(]0,T[;R)$$

Dans ce cas on a $\dfrac{df_1}{dt} = g = k$ *p.p. sur* $]0,T[$.

Montrons que i) $\to$ ii) avec $g = \frac{df_1}{dt}$, en effet on a

$$\frac{f(t+h)-f(t)}{h} = \frac{1}{h}\int_t^{t+h} g(s)\,ds$$

et il est bien connu que si l'on prolonge g par

$$\tilde{g} = \begin{cases} g & \text{sur }]0,T[\\ 0 & \text{ailleurs,} \end{cases}$$

alors la fonction $\frac{1}{h}\int_t^{t+h}\tilde{g}(s)ds$ tend vers $\tilde{g}$ dans $L^p(\mathbb{R}, X)$ quand $h \to 0$ si $p < +\infty$.

Prouvons que ii) $\Rightarrow$ iii) avec $k = g$; en effet on a

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{h}\int_0^T f(t)[\alpha(t) - \alpha(t-h)]dt \\
&= \frac{1}{h}\int_0^{T-h}[f(t) - f(t+h)]\alpha(t)dt + \frac{1}{h}\int_{T-h}^T f(t)\alpha(t)dt - \frac{1}{h}\int_0^h f(t)\alpha(t-h)dt.
\end{aligned}$$

Donc si $\alpha \in D(]0,T[,\mathbb{R})$, on a pour h assez petit

$$\frac{1}{h}\int_0^T f(t)[\alpha(t) - \alpha(t-h)]dt = \frac{1}{h}\int_0^{T-h}[f(t) - f(t-h)]\alpha(t)dt$$

Le passage a la limite quand $h \to 0$ est immediat et conduit à iii).

Enfin iii) $\Rightarrow$ i) car pour $\alpha \in D(]0,T[;\mathbb{R})$ on a

$$\int_0^T \frac{df_n}{dt}(t)\alpha(t)dt = -\int_0^T f_n(t)\frac{d\alpha}{dt}(t) = -\int_0^T f(t)\frac{d\alpha_n}{dt}(t)dt$$

Si de plus supp $\alpha \subset]\frac{1}{n}, T - \frac{1}{n}[$, alors supp $a_n \subset]0,T[$ et donc

$$\int_0^T \frac{df_n}{dt}(t)\alpha(t)dt = \int_0^T k(t)\alpha_n(t)dt = \int_0^T k_n(t)\alpha(t)dt.$$

On en déduit que $\frac{df_n}{dt} = k_n$ p.p. sur $]\frac{1}{n}, T - \frac{1}{n}[$.

Soit $A = \{t \in]0,T[; f_n(t)\} \to f(t)\}$; on a alors $f(t) - f(s) = \int_s^t k(\tau)d\tau$ pour tout $s, t \in A$. Il en résulte que $\lim\limits_{\substack{s\to 0\\ s\in A}} f(s) = f_1(0)$ existe et on a

$$f(t) = f_1(0) + \int_0^t K(\tau)d\tau \quad \text{pour tout} \quad t \in A.$$

Proposition 2.3.3 *Soit $f \in L^p(0,T;X)$ avec $1 < p \leqslant +\infty$ et soit C une constante.*

Les proprietes suivantes sont équivalentes :

i) il existe $f_1 \in \widetilde{W}^{1,P}(0,T;X)$ tel que $f = f_1$ p.p. sur $]0,T[$ et $\left\|\frac{d}{dt}V_{f_1}\right\|_{L^p} \leqslant c$

ii) $\left(\int_0^{T-h} \|f(t+h) - f(t)\|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant Ch$ pour tout $h \in]0,T[$

iii) $\left|\int_0^T \langle f(t), \frac{d\phi}{dt}(t)\rangle dt\right| \leqslant c\|\phi\|_{L^{p'}(0,T;X')}$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'}, = 1$ pour tout $\phi \in D(]0,T[;X')$.

Pour simplifier la démonstration de L'implication i) $\Rightarrow$ ii) posons $\gamma = \frac{d}{dt}V_{f_1}$; on a alors p.p. sur $]0,T[$

$\|f(t+h) - f(t)\| \leqslant \int_t^{t+h} \gamma(\tau)d\tau$ et par Hölder

$\|f(t+h) - f(t)\|^p \leqslant h^{p-1} \int_t^{t+h} \gamma^p(\tau)d\tau$ si $p < +\infty$ (le cas $p = +\infty$ étant immédiat).

Donc $\int_0^{T-h} \|f(t+h) - f(t)\|^p dt \leqslant h^{p-1} \int_0^{T-h} W(t+h) - W(t)dt$

où l'on pose $W(t) = \int_0^t \gamma^p(\tau)d\tau$ et par suite

$$\int_0^{T-h} \|f(t+h) - f(t)\|^p dt \leqslant h^{p-1} \int_{T-h}^{T} W(t)dt \leqslant h^p W(T) = h^P \left\|\frac{d}{dt}V_{f_1}\right\|_{L^p}^p.$$

l'implication ii) $\Rightarrow$ iii) se démontre de manière identique à limplication ii) $\Rightarrow$ iii) de la proposition (2.3.1)

Enfin pour prouver que iii) $\Rightarrow$ i) on considere la suite f des résularisés de f. Grâce au lemme (2.3.1), on a comme dans la dêmonstration de la proposition(2.3.1) $\left[\int_{\frac{1}{n}}^{T-\frac{1}{n}} \|\frac{df_n}{dt}(t)\|^p dt\right]^{\frac{l}{p}} \leqslant c.$

Posons

$$\gamma_n(t) = \begin{cases} \left\| \dfrac{df_n}{dt}(t) \right\| & \text{si } \frac{l}{n} < t < T - \frac{1}{n}, \\ 0 \quad \text{ailleurs .} \end{cases}$$

On a alors $\|f_n(t) - f_n(s)\| \leqslant \int_s^t \gamma_n(\tau)d\tau$ pour $\frac{1}{n} \leqslant s \leqslant t \leqslant T - \frac{1}{n}$. Comme γ_n est borné dans L^p, il existe $n_k \to +\infty$ tel que $\gamma_{n_k} \to \gamma$ faiblement pour $\sigma(L^p(0,T,\mathbb{R}), L^{p'}(0,T,\mathbb{R}))$ et $\|\gamma\|_{L^p(0,T,\mathbb{R})} \leqslant C$.

Alors pour $s, t \in A, s < t$ on a

$$\|f(t) - f(s)\| \leqslant \int_s^t \gamma(\tau)d\tau$$

On achève la démonstration en considérant $f_1(t) = \lim\limits_{\substack{s \in A \\ s \to t}} f(s)$.

2.4 Compléments dévers

Lemme 2.4.1 (Gronwall-Bellmen) *Soit $m \in L^1(0,T;\mathbb{R})$ tel que $m \geqslant 0$ p.p. sur $]0,T[$ et soit une constante $\geqslant 0$.*

soit ϕ une fonction continue de $[0,T]$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant $\phi(t) \leqslant a + \int_0^t m(s)\phi(s)ds$ pour tout $t \in [0,T]$. Alors

$$\phi(t) \leqslant ae^{\int_0^t m(s)ds} \quad \textit{pour tout } t \in [0,T]$$

En effet

soit $\psi(t) = a + \int_0^t m(s)\phi(s)ds$; la fonction ψ est absolument continue et on a

$$\frac{d\phi}{dt}(t) = m(t)\phi(t) \leqslant m(t)\psi(t) \text{ p.p. sur }]0,T[$$

. Donc

$$\frac{d}{dt}\left(\psi(t)e^{-\int_0^t m(s)ds}\right) \leqslant 0 \text{ p.p. sur }]0,T[,$$

et comme la fonction $t \longmapsto \psi(t)e^{\int_0^t m(s)ds}$ est absolument continue, elle est décroissante.

Par suite

$$\psi(t)e^{-\int_0^t m(s)ds} \leqslant \psi(0) = a;$$

il en résulte que

$$\phi(t) \leqslant \psi(t) \leqslant ae^{\int_0^t m(s)ds}$$

Lemme 2.4.2 *soit $m \in L^1(O, T, \mathbb{R})$ tel que $m \geqslant 0$ p.p. sur $]0, T[$ et soit a une constante $\geqslant 0$*

Soit ψ une fonction continue de $]0, T[$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant $\frac{1}{2}\phi^2(t) \leqslant \frac{1}{2}a^2 + \int_0^t m(s)\phi(s)ds$ pour tout $t \in]O, T[$

Alors$|\phi(t)| \leqslant a + \int_0^t m(s)ds$ pour tout $t \in [0, T]$.

En effet

soit

$$\psi_\varepsilon(t) = \frac{1}{2}(a + \varepsilon)^2 + \int_0^t m(s)\phi(s)ds, \varepsilon > 0;$$

donc

$$\frac{d\psi_\varepsilon}{dt}(t) = m(t)\phi(t) \text{ p.p. sur } [0, T]$$

et

$$\frac{1}{2}\phi^2(t) \leqslant \psi_0(t) \leqslant \psi_\varepsilon \text{ pour } t \in]0, T[.$$

Il en résulte que

$$\frac{d\psi_\varepsilon}{dt}(t) \leqslant m(t)\sqrt{2}\sqrt{\psi_\varepsilon(t)}$$

. Or

$$\psi_\varepsilon(t) \geqslant \frac{1}{2}\varepsilon^2 \text{ pour tout } t \in [0, T];$$

de sorte que la fonction $t \longmapsto \psi_\varepsilon(t)$ est absolument continue et

$$\frac{d}{dt}\sqrt{\psi_\varepsilon(t)} = \frac{1}{2\sqrt{\psi_\varepsilon(t)}}\frac{d\psi_\varepsilon}{dt}(t) \text{ p.p. sur }]0, T[$$

Par suite

$$\frac{d}{dt}\sqrt{\psi_\varepsilon(t)} \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}} m(t) \text{ p.p sur }]0, T[$$

et

$$\sqrt{\psi_\varepsilon(t)} \leqslant \sqrt{\psi_\varepsilon(0)} + \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^t m(s)ds.$$

On en déduit que

$$|\phi(t)| \leqslant \sqrt{2}\sqrt{\psi_\varepsilon(t)} \leqslant \sqrt{2\psi_\varepsilon(0)} + \int_0^t m(s)ds = a + \varepsilon + \int_0^t m(s)ds$$

pour tout $t \in [0, T]$ et tout $\varepsilon > 0$

Lemme 2.4.3 *Soit u une fonction de $[t_0, T]$ dans un espace de Banach X. On suppose que les fonctions $t \longmapsto u(t)$ et $t \longmapsto \|u(t)\|$ sont dérivables à droite de t_0.*
Alors

$$\frac{d^+}{dt}\|u(t_0)\| + \alpha\|u(t_0)\| \leqslant \|\frac{d^+u}{dt}(t_0) + \alpha u(t_0)\| \quad \textit{pour tout} \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Chapitre 3

Le problemme de Cauchy

Énoncé du problème de Cauchy, correction. Considérons dans un espace de Banach E l'équation différentielle :

$$\frac{dx}{dt} = Ax \tag{3.1}$$

avec un opérateur linéaire ayant un domaine $D(A)$ partout dense dans E.

Définition 3.0.1 *Une solution de l'équation sur le segment $[0, T]$ est une fonction $x(t)$ vérifiant les conditions :*

1) les valeurs de la fonction $x(t)$ sont dans le domaine $D(A)$ de A pour tout $t \in [0, T]$;

2) en chaque point t de $[0, T]$ il existe une dérivée forte $x'(t)$ de $x(t)$;

3) l'équation $x'(t) = Ax(t)$ est satisfaite pour tout $t \in [0, T]$. Évidemment la solution est une fonction continue sur $[0, T]$.

Par le problème de Cauchy sur $[0, T]$ nous entendons de trouver une solution de l'équation sur $[0, T]$, satisfaisant la condition initiale

$$x(0) = x_0 \in D(A). \tag{3.2}$$

Définition 3.0.2 *Le problème de Cauchy se pose correctement sur $[0, T]$ si :*

1) pour tout $x_0 \in D(A)$ il a une solution unique, et

2) cette solution dépend continûment des données initiales tel que $x_n(0) \to 0\,(x_n(0) \in D(A))$, alors $x_n(t) \to 0$ pour la solution correspondante à chaque $t \in [0, T]$.

Remarque 3.0.1 *Il découle de la constance de l'opérateur A que si le problème de Cauchy est correct sur un intervalle $[0, T]$ alors il est correct sur tout intervalle $[0, T_1]$ avec $T_1 > 0$, c'est-à-dire qu'il est correct sur tout le demi-axe $[0, \infty)$.*

En effet, il suffit de considérer l'intervalle $[0, 2T]$.

Supposons que $x_0 \in D(A)$ et que $x(t)$ soit la solution du problème (3.1), (3.2) sur $[0, T]$.

Construire une deuxième solution $y(t)$ de l'équation (3.1) avec des conditions initiales $y(0) = x(T) \in D(A)$.

Définir une fonction $w(t)$ par l'équation

$$w(t) = \begin{cases} x(t) & \text{si } t \in [0, T], \\ y(\tau) & \text{si } t = T + \tau \text{ et } \tau \in [0, T] \end{cases}$$

Évidemment $w(t)$ est une solution du problème (3.1), (3.2) sur $[0, 2T]$. Cette solution est unique.

En effet, supposons que $w_1(t)$ soit une autre solution de ce problème. Alors $w_1(t) = x(t)$ pour $t \in [0, T]$ d'aprés de la correction du problème sur $[0, T]$.

De plus, la fonction $x_1(\tau) = w_1(T + \tau)$ satisfait l'équation (3.1) et la condition initiale

$$x_1(0) = w_1(T) = x(T).$$

Il s'ensuit donc que

$$x_1(\tau) = y(\tau),$$

soit $w_1(t) = w(t)$ pour tout $t \in [T, 2T]$.

De plus, si $x_n(0) \to 0$, alors $x_n(T) \to 0$, ce qui signifie que $x_n(t)$ et $y_n(t)$ tendent vers zéro pour tous les t et $\tau \in [0, T]$. Ainsi, le problème est bien définie sur $[0, 2T]$.

Considérons maintenant un opérateur $U(t)$ qui affecte à l'élément $x_0 \in D(A)$ la valeur de la solution $x(t)$ du problème de Cauchy $(x(0) = x_0)$ à l'instant $t > 0$.

Si le problème de Cauchy est bien définie, alors l'opérateur $U(t)$ est défini sur $D(A)$. d'après de la linéarité de l'équation (3.1) et de la propriété 1), elle est additive et homogène. d'après de la propriété 2) elle est continue. Puisque $D(A)$ est dense dans E, l'opérateur $U(t)$ peut être étendu par continuité à un opérateur linéaire borné défini sur tout l'espace E, qui sera aussi noté $U(t)$.

Définition 3.0.3 *une famille d'opérateurs linéaires bornés dépendant d'un paramètre* $t(0 < t < \infty)$ *est dite un semi-groupe si*

$$U\left(t_1+t_2\right)=U\left(t_1\right) U\left(t_2\right) \quad\left(0<t_1, t_2<\infty\right). \tag{3.3}$$

montrons que les opérateurs engendrés par un problème bien défini (3.1), (3.2) forment un semi-groupe.

Supposons que $x_0 \in D(A)$. Alors la fonction $w(t) = x(t+\tau) = U(t+\tau)x_0$ satisfait relativement à t l'équation (3.1) et la condition initiale $w(0) = x(\ tau) = U(\tau)x_0$.
La fonction $w_1(t) = U(t)U(\tau)x_0$ est aussi une solution de (3.1) avec la valeur initiale $U(\tau)x_0$, étant en $D(A)$. d'après de l'unicité de la solution, nous avons $w_1(t) = w(t)$. Ainsi les opérateurs $U(t + \tau)$ et $U(t)U(\tau)$ coïncident sur tout l'ensemble dense $D(A)$, et puisqu'ils sont bornés ils coïncident partout.

Considérons maintenant la fonction $U(t)x_0$ pour tout $x_0 \in E$ et $t > 0$.

Puisque $D(A)$ est dense dans E, il existe une suite d'éléments $x_0^{(n)} \in D(A)$ telle que

$$x_0^{(n)} \to x_0,$$

et en conséquence, d'après de la délimitation de l'opérateur $U(t), x_n(t) = U(t)x_0^{(n)} \to U(t)x_0$. Ainsi la fonction $U(t)x_0$ est la limite d'une suite de solutions de l'équation (3.1) sur $(0, \infty)$ et peut être appelé une solution généralisée de cette équation. Cependant, nous n'avons aucune propriété de pour cette fonction. Pour le moment, nous pouvons seulement affirmer que $\|U(t)x_0\|$ est mesurable (comme la limite d'une suite de fonctions continues). La propriété de semi-groupe de l'opérateur $U(t)$ permet de renforcer cette assertion.

Lemme 3.0.1 *Si le problème de Cauchy pour l'équation (3.1) est bien défifie, alors toutes les solutions généralisées de cette équation sont continues sur* $(0, \infty)$*.*

Démenstration 3.0.1 *montrons d'abord que les opérateurs* $U(t)$ *sont uniformément bornés sur tout intervalle* $[\delta, 1/\delta](\delta > 0)$*.*
Dans le cas contraire il y aurait une suite $t_n \in [\delta, 1/\delta]$ *telle que* $t_n \to \gamma$ *et* $\|U(t)\| \to \infty$ *comme* $n \to \infty$*. d'après le principe de bornité uniforme, il existe alors un élément* $x_0 \in E$ *tel que* $\|U(t_n) x_0\| \infty$*. On peut supposer que* $\|U(t_n) x_0\| \geqq n$*.*

La fonction $\|U(t)x_0\|$ *est partout finie et mesurable sur* $(0, \infty)$*, de sorte qu'on peut trouver sur l'intervalle* $(0, \gamma)$ *un ensemble* F *de mesure* $m(F) > \gamma/2$ *sur lequel* $\|U(t)x_0\|$ *est borné par un certain nombre* M*.*
Puisque $t_n \to \gamma$*, pour* n *suffisamment grand, la mesure de l'intersection de* F *avec l'intervalle* $(0, t_n)$ *ne sera également pas inférieure à* $\gamma/2$*, puis aussi la mesure de l'ensemble* $G_n = \{t_n - \tau\ ;\ \tau \in F \cap (0, t_n)\}$ *ne sera pas inférieur à* $\gamma/2$*.*

Maintenant, nous utilisons la propriété de semi-groupe. Nous avons

$$n \leqq \|U(t_n)\, x_0\| = \|U(t_n - \tau)\, U(\tau) x_0\| \leqq M \, \|U(t_n - \tau)\|$$

pour que

$$\|U(\sigma)\| \geq n/M \text{ pour tout } \sigma \in B_n.$$

En écrivant $\lim B_n = S$, *on arrive à la déduction que*

$$\|U(\sigma)\| = \infty \text{ pour tout } \sigma \in S \text{ et } m(\zeta) \geqq \gamma/2$$

.

Ceci contredit l'hypothèse que $\|U(\sigma)\|$ *est fini pour tout* $\sigma \in (0, \infty)$.
Il résulte de la bornité uniforme des opérateurs $U(t)$ *sur* $[\delta, 1/\delta]$ *que la solution généralisée* $U(t)x_0\, (x_0 \in E)$ *est sur* $[\delta, 1/\delta]$ *une limite uniforme des solutions pures de l'équation (3.1), et comme ces dernières sont continues, elle est continue également.*

Le lemme (3.0.1) et les arguments qui le précèdent conduisent à l'assertion suivante.

Théorème 3.0.1 *Si le problème de Cauchy pour l'équation (1.1) est correct, alors sa solution est donnée par la formule*

$$x(t) = U(t)x_0 \quad (x_0 \in D(A)) \tag{3.4}$$

où $U(t)$ *est un semi-groupe d'opérateurs fortement continus pour* $t > 0$.

Notons que la question du comportement du semi-groupe lorsque $t \to 0$ reste ouverte.
La limite $U(t)x_0$ pour $x_0 \notin \mathscr{D}(A)$ comme $t \to 0$ peut ne pas exister. De plus, une solution généralisée $U(t)$ peut ne pas être différentiable et ses valeurs peuvent ne pas se trouver dans le domaine $\mathscr{D}(A)$ de l'opérateur A.

Sur $D(A)$ l'opérateur A commute avec le semi-groupe $U(t)$.

En effet, pour $x_0 \in \mathscr{D}(A)$

$$\begin{aligned} AU(t)x_0 = \frac{dU(t)x_0}{dt} &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{U(t+\Delta t)x_0 - U(t)x_0}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \to 0} U(t)\frac{U(\Delta t)x_0 - x_0}{\Delta t} = U(t)Ax_0 \end{aligned}$$

Il s'ensuit notamment que la dérivée de la solution est continue pour $t > 0$. Supposons maintenant que $x_0 \in \mathscr{D}\left(A^2\right)$. Ensuite la fonction

$$\frac{dU(t)x_0}{dt} = AU(t)x_0 = U(t)Ax_0$$

est une solution du problème de Cauchy sous la condition initiale $Ax_0 \in \mathscr{D}(A)$, telle qu'elle est continue pour $t \geqq 0$, et sa dérivée est continue pour $t > 0$. Ainsi la condition que x_0 soit dans le domaine de l'une ou l'autre puissance de l'opérateur A joue le rôle de la condition que les données initiales soient ***** ; il élève la régularité de la solution $U(t)x_0$ en t ; si $x_0 \in \mathscr{D}\left(A^k\right)$ ($k \geqq 1$ un entier), alors la solution $U(t)x_0$ pour $t \geqq 0$ a une $(k-1)$ ième dérivée qui est continue et ak ième dérivée qui est continue pour $t > 0$.

Notons une autre proposition :

Lemme 3.0.2 *Supposons que la fonction $x(t)$ est continue sur $[0, T]$ et continûment dérivable sur $(0, T]$, et que sa dérivée $x'(t)$ a une limite comme $t \to 0$. Si l'opérateur A est fermé et la fonction $x(t)$ satisfait l'équation (3.1) sur $(0, T]$, alors c'est une solution de cette équation.*

En effet ; Il suffit de vérifier que la fonction $x(t)$ satisfait l'équation pour $t = 0$. Il est dérivable à droite pour $t = 0$. En effet, en passant à la limite dans l'équation

$$x(t) - x(\epsilon) = \int_0^t x'(t) rt$$

comme $\epsilon \to 0$, on trouve que

$$x(t) - x(0) = \int_0^t x'(t)dt$$

d'où il résulte que

$$x'(0) = \lim_{t \to +0} x'(t)$$

En utilisant le fait que A est fermé, on peut maintenant passer à la limite comme $t \to +0$ dans l'équation $x'(t) = Ax(t)$, et arriver ainsi à l'équation $x'(0) = Ax(0)$.

Exemple 3.0.1 *Soit $E = c_0$ lesoder the Banach des suites réelles $x = (x_n)\,(n = 1, 2, \cdots)$ telles que $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = 0$. Prenons*

$$x_0 = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots\right) \in c_0$$

et b tel que $0 < b \leq 2$. Considérons $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donné par

$$\varphi(\xi) = \begin{cases} 2 & \xi \geq 4 \\ \sqrt{\xi} & 0 \leq \xi \leq 1 \\ 0 & \xi \leq 0 \end{cases}$$

Soit $f : c_0 \to c_0$ définie par

$$f(x) = (p\,(x_n))\,(x \in c_0)$$

Alors (4.1) devient un système autonome

$$x(0) = x_0, \quad x'(t) = f(x(1))(0 < t \leq 1),$$

et pour une solution éventuelle $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \cdots)$ nous obtenons

$$x_n(0) = \frac{1}{n}, \quad x'_n(t) = \varphi\,(x_n(t))\,(0 \leq t \leq b, n \in \mathbb{N})$$

La solution de ce systeme infini est

$$x_n(t) = \left(\frac{t}{2} + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2 (0 \leq t \leq b, n \in \mathbb{N})$$

d'où $\lim_{u\to a} x_n(t) = \frac{t^2}{4} > 0$ *potr* $0 < 1 \leq b$, *donc*

$$(x_1(t), x_2(t), \cdots) \notin c_0(0 < t \leq l).$$

c'est-à-dire le problème (4.8) n'admet pas de solution. Alors. pour pouvoir appliquer le théorème de Péano taus un espace de Banach quelconque, on doit imposer des conditions de compacité dans le côté droit f *de (4.1). Par exemple, si pour tout* t *et pour tout ensemble* Ω, *la MNC de l'ensemble* $f(t, \Omega)$ *ne dépasse pas trop la* $\mathcal{MNC}^\circ$ *de* Ω. *alors l'opérateur* $J : C([0, b], E) \to C([0, b], E)$ *défini par*

$$(Jx)(t) = x_0 + \int_0^t f(s, x(s))ds$$

est condensé et le problème (4.1) admet une solution. En particulier, si la fonction $f(t, \cdot)$ *transforme tonte boule de* E *en un ensemble relativement compact, alors (4.1) admet une solution locale, comune le cas en dimension finie.*

Bibliographie

[1] K. Yosida, Functional Analysis, 6th ed., Springer-Verlag, Berlin, 1980.

[2] Wheeden, R. L., Zygmund A., Measure and Integral, Marcel Dekker,Inc., New York, 1977.

[3] Mikusinski, J., The Bochner Integral. Birkhäuser, Basel, 1978.

[4] Brezis, H. Analyse Fonctionelle", Massen, Paris, 1983.

[5] Rudin, W, : Real and Camplex Analysis, McGraw-Hill, New York, 1974.

[6] Benadda Asmaa, Tazi Karima, Bensenouci Zoubida, L'intégrale aux sence de Bochner, La bibliothèque universitaire de Tiaret, 2021.