REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE & POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR & DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Université Ibn Khaldoun- Tiaret
FACULTÉ DES MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUE
DÉPARTEMENT DES MATHEMATIQUES

MEMOIRE MASTER

Présentée par:

Hired kamel

Kasmi khaled

Spécialité : *Mathématiques*

Option : *Analyse fonctionnelle et équation différentielle*

Intitulé

Introduction aux solitons de Ricci par l'étude Des équation différentielles

Soutenue le : 23/06/ 2022 devant le jury composé de :

Président : *Benaouda Hedia* *PR. Univ. Ibn Khaldoun Tiaret*

Examinateurs : *Kada Maazouz* *MCA. Univ. Ibn Khaldoun Tiaret*

Encadreur : *Sidhoumi Noura* *MCA. Ecole Nationale polytechnique Oran*

2021-2022

Remerciements

*Avant tout, on remercie **ALLAH**.Le Tout Puissant de nous avoir donné le courage et la volonté d'accomplir ce travail.*
*Nous tenons à exprimer toute notre reconnaissance à notre Encadreur **Mme. N.Sidhoumi**, pour avoir dirigé ce travail avec obnégation et disponibilité.*
Ses conseils nous ont été d'un grand apport pour accomplir de ce travail.
*Nous adressons nos plus vifs remerciements à :**Mr. B.Hedia**, professeur dans la Faculté de mathématiques , pour nous avoir fait l'honneur de présider le jury de soutenance de notre mémoire.*
*Sincères remerciements vont également à **Mr. K.Maazouz**, qui a en l'honneur de participer au jury de soutenance de notre mémoire en tant qu'examinateur.*
Nous ne pouvons oublier de remercier les parents pour leur soutien, leur aide et patience, tout au long de nos études.
Enfin, nous adressons nos remerciements à tous nos professeurs, collègues et tous ceux qui nous ont encouragés, à faire ce travail.

Dédicaces

je dédie ce travail :

À

Mes chèrs parents pour leur soutien, leur patience
et leurs encouragements durant mon parcours universitaire.

À

Mes fréres, ainsi ma famille HIRED et GAHAR.

À

Mes Amis : sofiane, marwa, miri, tayeb.

À

Tous professeurs
qu'il soient du primaire, du secondaire ou du supérieur.

KAMEL

Dédicaces

C'est avec grand plaisir que je dédie ce modeste travail :

À

Plus chére de ma vie, ma Mère.

À

Celui qui m'a fait de moi un homme, mon Père.

À

Mes chers frére TAHAR et soeurs.

À

Tous les membres de ma famille et toute personne qui porte le nom KASMI et BOUSSID .

À

mes meilleurs ami :sofiane,kholoud,adel,nasser

À

Tous Les professeurs

qu'il soient du primaire, du secondaire ou du supérieur.

KHALED

Table des matières

1 Variétés différentiables **8**
1.1 Variété topologique . . . 8
1.2 Variétés différentiables . . . 9
1.3 Sous variétés . . . 11
1.4 Coordonnées locales . . . 11
1.5 Espace tangent . . . 11
1.6 Applications différentiables entre variétés . . . 13
1.7 Application linéaire tangente . . . 14
1.8 Champs de vecteurs . . . 14
1.9 Dérivations et champs de vecteurs . . . 15

2 Complément sur la géométrie pseudo-Riemannienne **17**
2.1 Variétés pseudo-Riemanniennes . . . 17
2.2 Dérivée de Lie . . . 18
2.3 Connexion linéaire . . . 19
2.4 Torsion d'une connexion . . . 19
2.5 Connexion de Levi-Civita . . . 19
2.6 Tenseur de courbure . . . 21
2.7 Tenseur de Ricci . . . 22

3 Ricci soliton de dimonsion 3 **23**
3.1 Géométrie Lorentzienne de (M, g_f) . . . 24
3.2 Champs de Killing sur (M, g_f) . . . 25

3.2.1 Champs de Killing sur une variété pseudo-riemannienne (M, g) 25
3.2.2 Champs de Killing sur (M, g_f) 26
3.3 Ricci soliton sur les variétés de Walker de dimension 3 29
3.3.1 Ricci soliton sur une variété pseudo-Riemannienne (M, g) 29
3.3.2 Ricci soliton sur (M, g_f) 29

4 Ricci soliton sur le groupe $\mathbb{H}_2 \times \mathbb{R}$ de dimension 3 **32**
4.1 Connexion et tenseur de courbure de $\mathbb{H}_2 \times \mathbb{R}$ 32
4.2 Ricci soliton de $\mathbb{H}_2 \times \mathbb{R}$ de dimension 3 33

Bibliographie **38**

Introduction

En mathématique, la géométrie différentielle est l'application des outils du calcul différentiel à l'étude de la géométrie. Les objets d'étude de base sont les variétés différentielles, ensembles ayant une régularité suffisante pour envisager la notion de dérivation, et les fonctions définies sur ces variétés.
La géométrie différentielle trouve sa principale application physique dans la théorie de la relativité générale où elle permet une modélisation d'une courbure de l'espace-temps.

En mathématiques, les variétés différentiables sont les objets de base de la topologie différentielle et de la géométrie différentielle. Il s'agit de variétés sur les quelles il est possible d'effectuer les opérations du calcul différentielle et intégral.

Une variété différentiable de dimension n se définit d'abord par la donnée d'une variété topologique, espace topologique localement homéomorphe à l'espace $\mathbb{R}^n$. Les homéomorphismes locaux sont appelés cartes et définissent des systémes de coordonnées locales. La structure différentielle est définie en exigeant certaines propriétés de régularité des applications de transition entre les cartes.
Cette structure permet par exemple de donner une définition globale de la notion d'application différentiable.
La géométrie Riemannienne est une branche de la géométrie différentielle nommée en l'honneur du mathématicien **Bernhard Riemann**, qui a introduit le concept fondateur de variété géométrique.

Elle étend les méthodes de la géométrie analytique en utilisant des coordonnées locales pour effectuer l'étude d'espaces courbes sur lesquels existent des notions d'angle et de longueur. Plus généralement, la géométrie Riemannienne a pour but l'étude locale et globale des variétés Riemanniennes.
En mathématiques, et plus précisément en géométrie, une variété Riemannienne est une variété différentiable ayant une structure supplémentaire (une métrique Riemannienne) permettant de définir la longueur d'un chemin entre deux points de la variété c'est-à-dire les variétés différentiables munies d'une métrique Riemannienne. Un changement notable par rapport au cas Riemannien réside dans l'existence des champs de vecteurs isotropes (i.e de type lumiére) sur les variétés pseudo-Riemanniennes. Chaichi et ses collaborateurs [2] se sont intéréssés aux variétés Lorentziennes (M, g_f), de dimension trois, admettant des champs de vecteurs prallèles isotropes. Ces variétés,

appelées variétés de Walker, ont des propriétés géométriques qui n'ont pas d'analogues dans le cas Riemannien. Elles sont décrites en fonction d'un système adéquat de coordonnées locales (t, x, y) et forment une classe assez grande, et ce, selon la nature d'une fonction arbitraire à deux variables $f(x, y)$. Toute fois, plusieures conséquences géométriques sont déduites [11].
Le travail présenté ici est consacré à l'étude de géométrie Lorentzienne sur les variétés admettant un champ de vecteurs isotrope parallèle, connues aussi sous le nom de variétés de Walker.

Le plan de ce mémoire est le suivant :
Dans le premier chapitre, on rappelle la notion de variétés différentiable qui est par définition un espace topologique séparé M muni d'une structure différentiable, c'est la donnée d'un atlas sur M , ie : il existe un recouvremenr ouvert $\{U_i\}_{i\in I}$ de M et des homéomorphismes de transitions $\{\phi_i\}_{i\in I}$ définis de U_i dans $\phi_i(U_i)$ ouverts de $\mathbb{R}^n$, telle que l'application $\phi_j \circ \phi_i : \phi_i(U_i \cap U_j) \to \phi_j(U_i \cap U_j)$ soit un C^k-difféomorphisme.

Ensuite, dans le deuxiéme chapitre, on donne des définitions et des propriétés de base des variétés pseudo-Riemanniennes.

Le troisième chapitre consiste à classifier les métriques Ricci soliton sur les variétés Lorentziennes de dimension trois, admettant un champ de vecteurs isotrope parallèle. Plus précisément, nous déterminons les métriques, qui admettent un champ de vecteurs X , pour lequel on ait

$$L_X g + \varrho = \alpha g,$$

$\alpha \in \mathbb{R}$ et ϱ désigne le tenseur de Ricci sur cette variété. Les résultats de ce chapitre ont été démontré par Calvaruso and De Leo [7]. Notons que, dans une base de coordonnées locales, l'équation de Ricci soliton se traduit par un système d'équations différentielles partielles, qui en général n'est pas évident à résoudre.

Dans le dernier chapitre, on a décortiquer le travail de Belarbi [3] où il a étudier l'exixtence des Champs de vecteurs qui sont Ricci soliton dans l'espace $\mathbb{H}_2 \times \mathbb{R}$.

Chapitre 1

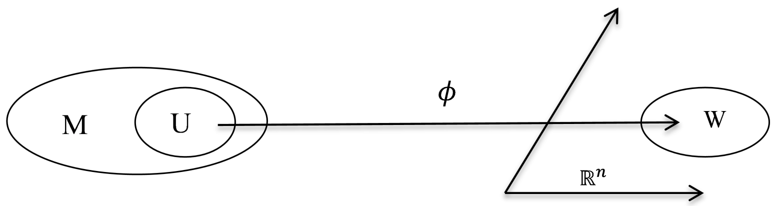
Variétés différentiables

la notion de variété différentiable essaie de généraliser le calcul différentiel qu'on sait définir sur $\mathbb{R}^n$. pour cela ,nous allons introduire des objets mathématiques qui ressemble localement à $\mathbb{R}^n$,afin d'y transférer ce qui nous savons déjà y faire (i.e,continuité ,dérivabilité ,vecteurs...) mais qui globalement ne seront pas topologiquement identiques à $\mathbb{R}^n$, de tels objets nous sont familiers dans $\mathbb{R}^3$: une sphère , un tore ,un cylindre ,... .Nous voyons toujours ces objets comme sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ .Nous voulons en donner une définition intrinsèque , que nous appellerons variétés, sans faire référence à un espace plus grand . Cependant , nous n'aurons pas nécessairement $\mathbb{R}^n$, mais localement ,nous aurons à notre disposition tout ce que nous savons faire sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

1.1 Variété topologique

Définition 1.1.1. *M est dit variété topologique si :*

- *M est un espace topologique séparé ;*
- *pour tout $P \in M$,il existe un ouvert U de M contenant P, et un homéomorphisme définie par : $\phi : U \to W \subset \mathbb{R}^n$ et de classe $\mathbb{C}^k$. Ou W est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.*



La dirons que n est la dimension de M . le couple (U, ϕ) est une carte locale de M . une ensemble de cartes locale $\{U_i, \phi_i\}_{i \in I}$ tel que la réunion des U_i soit M tout entier est apppelé atlas de la variété. On dira alors que $\{U_i\}_{i \in I}$ est un recouvrement d'ouvert de M . A priori,cet atlas n' est pas unique. En particulier ,la réunion de deux atlas est encore un atlas.

Remarque 1.1.1. *M étant un espace topologique, on a alors accés sur M à la notion de continuité . Ainsi il possible de considérer des fonctions continues $f : M \to \mathbb{R}$*
. M ressemble localement à $\mathbb{R}^n$ .En effet , autour de chaque point de M ,nous identifons un ouvert U de M à un ouvert $W = \phi(U)$ de $\mathbb{R}^n$ grâce à l'homéomorphisme ϕ.

Définition 1.1.2. *Nous rappelons qu'un espace topologique M est connexe s'il ne peut pas s'écrire $M = U_1 \bigcup U_2$ où U_1, U_2 sont deus ouverts disjoint de cet espace topologique.*

Une variété connexe est une variété topologique connexe , elle est donc constituée d'un seul morceau.

1.2 Variétés différentiables

La dérivabilité sur $\mathbb{R}^n$ fait explicitement appel à la structure d'espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, puisqu'on forme la rapport

$$\frac{[f(x + hy) - f(x)]}{h} \tag{1.1}$$

Sur un espace quelconque ,nous constatons que cette relation n'a aucun sens.

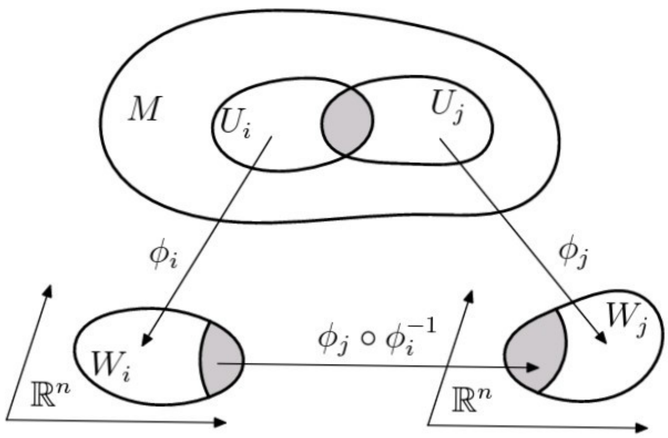
La solution consiste à transférer la dérivabilité connue sur les ouverts de $\mathbb{R}^n$ vers les ouverts de M qui leurs sont homéomorphes. Nous définissons donc :

Définition 1.2.1. *M est dite variété différentiable de classe $C^r(r \geq 1)$ si :*

- *M est une variété topologique.*
- *Il existe un atlas $\{(U_i, \phi_i)\}_{i\in I}$ de M tel que :*
  pour tous i,j tels que $U_i \cap U_j$, non vide

$$\phi_j \circ \phi_i^{-1} : \phi_i (U_i \cap U_j) \to \phi_j (U_i \cap U_j)$$

est un diffeomorphisme de classe C^r. Nous dirons alors que l'atlas $\{(U_i, \phi_i)\}_{i\in I}$ est de classe C^r.



Nous voyons ainsi que la notion de dérivabilité sur la variété n'est acquise qu'à travers la composition avec les ϕ , afin de retrouver des applications de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{R}^n$).

Remarque 1.2.1. *Une variété topologique peut admettre plusieurs atlas de classe C^r. Deux tels atlas ne sont pas toujours compatibles (leur réunion n'est pas nécessairement un atlas de classe C^r). Cela signifie qu'une varité topologique peut admettre plusieurs structures différentiables.*

On a le résultat suivant :

Proposition 1.2.1. *Soient M une variété différentiable de dimension n , U un ouvert de M. Alors , U est une variété différentiable de dimension n.*

1.3 Sous variétés

Un sous ensemnble N d'une variété est une sous-variété s'il existe un entier $K \leq n$ tel que pour tout $P \in N$, il existe une carte locale (U, ϕ) de M autour de p telle que :

$$\phi(U \cap N) = \phi(U) \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\}) \tag{1.2}$$

où $\mathbb{R}^k \times \{0\}_{n-k}$ est le sous ensemble de $\mathbb{R}^n$ des éléments de la forme

$$(x^1, ..., x^k, 0, ..., 0) \tag{1.3}$$

Alors N est une variété de dimension k dont les cartes locales ont pour ouverts les $U \cap N$ et pour homéomorphismes associés les applications $\phi_N = \phi / U \cap N$ que l'on considère comme allant de $U \cap N$ dans un ouvert de $\mathbb{R}^k$.
Nous avons la notion de sous -variété différentiable, où la structure différentiable est héritée de celle de la variété ambiante.

1.4 Coordonnées locales

Soit (U, ϕ) une carte locale de la variêté différentiable M. pour $p \in U, \phi(p) \in \mathbb{R}^n$ peut s'écrire $\phi(p) = (x^1(p), ..., x^n(p))$. Nous dirons que $(x^1(p), ..., x^n(p))$ sont les coordonnées de p dans la carte (U, ϕ). Nous dirons alors que les n applications (X.$(x^1, ..., x^n)$ sont les n applications coordonnées associées à cette carte, que nous noterons (x^i).

1.5 Espace tangent

Soit M une variété différentiable de classe $C^\propto$, p un point de M. On note ℓ l'ensemble des courbes $\gamma : [-1, 1] \to M$ telles que $\gamma(0) = p$. Il existe alors $\varepsilon > 0$ suffisamment petit tel que $\gamma([-\varepsilon, \varepsilon]) \subset U$ pour un ouvert U d'une carte locale (U, ϕ). Sur ℓ, nous définissions la relation suivante :

$$\gamma \sim \gamma' \Leftrightarrow \frac{d}{dt}(\phi o \gamma)]_{t=0} = \frac{d}{dt}(\phi o \gamma')]_{t=0} \tag{1.4}$$

Il est facile de vérifier que $\sim$ est une relation d'équivalence est indépendante du choix du système de coordonnées sur U. Cette relation signifie que nous considérons deux courbes γ et γ' comme équivalentes si elles ont même « vecteur tangent en 0 dans $\mathbb{R}^n$ » . Nous avons la définition suivante :

Définition 1.5.1. *L'espace tangent en p à M, que l'on note T_pM , est l'ensemble des classes d'équivalences dans ℓ pour cette relation .*

Maintenant , nous allons munir l'espace tangent T_pM d'une structure d'espace vectoriel . Nous avons recours au lemme suivant

Lemme 1.5.1. (U, ϕ) *étant une carte autour de p . L'application*

$$\begin{array}{llll} \tilde{\phi}_p & : T_pM & \rightarrow & \mathbb{R}^n \\ & [\gamma] & \mapsto & \frac{d}{dt}(\phi \circ \gamma)]_{t=0} \end{array}$$

est bijective.

preuve. Soient alors $[\gamma], [\gamma']$ deux classes d'équivalence de T_pM telles que :

$$\frac{d}{dt}(\phi \circ \gamma)]_{t=0} = \frac{d}{dt}(\phi \circ \gamma')]_{t=0} \tag{1.5}$$

cela signifie que les deux courbes γ, γ' sont équivalentes, ainsi $[\gamma] = [\gamma']$,$\tilde{\phi}_p$ est alors bien définie (ne dépend pas du choix de représentants) et injective. Montrons la surjection, soit ξ un élément de $\mathbb{R}^n$. Considérons la courbe γ définie par

$$t \rightarrow \phi^{-1}(\xi t + \phi(p))$$

on a alors $\xi = \tilde{\phi}_p([\gamma])$. D'où la bijection de $\tilde{\phi}_p$.

A présent, définissons une structure de $\mathbb{R}$- espace vectoriel sur T_pM. C'est la structure qui rend $\tilde{\phi}_p$, linéaire. $\tilde{\phi}_p$, est alors un isomorphisme appelé isomorphisme de carte. Ainsi T_pM devient un $\mathbb{R}$- espace vectoriel de dimension n.

Dans toute la suite les éléments de T_pM seront notés $X_p, Y_p, ...$, nous dirons que $X_p, Y_p, ...,$, sont des vecteurs tangents à M au point p.

Puisque nous avons un espace vectoriel, il est utile d'entrouver une base. La dimension de T_pM entant qu'espace vectoriel est la dimension de M entant que variéte Soit $\{e_i\}_{i=1,...,n}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$, $\tilde{\phi}_p$ étant un isomorphisme alors la famille $\{\tilde{\phi}_p^{-1}(e_i)\}_{i=1,...,n}$ forme une base de T_pM . Posons

$$\frac{\partial}{\partial x_i}|_p = \tilde{\phi}_p^{-1}(e_i)$$

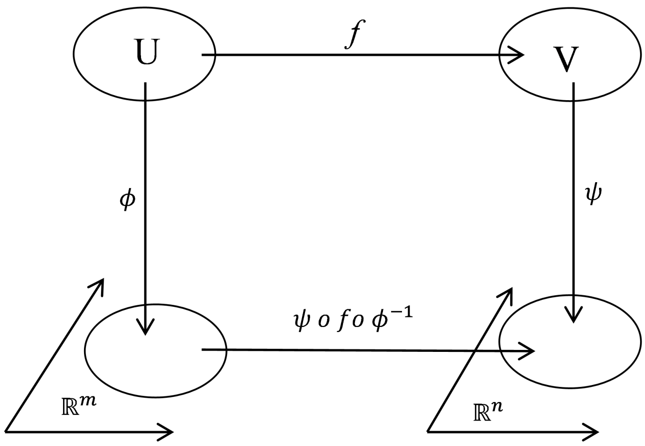
pour tout $i = 1, .., n$.

$\square$

Remarque 1.5.1. *L'espace tangent d'un espace vectoriel en un point, est lui-même.*

1.6 Applications différentiables entre variétés

Définition 1.6.1. *Soient deux variétés différentiables M et N de dimension m, n respectivement. Une application $f : M \to N$ est dite différentiable de classe C^r, si pour tout $p \in M$, il existe une carte locale (U, ϕ) de M autour de p, et une carte locale (V, ψ) de N, telles que $f(U) \subset V$ et $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$ soit de classe C^r.*



Ainsi l'applicatioi f est différentiable si $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$ est différentiable entant qu'application entre ouverts de $\mathbb{R}^m$ et $\mathbb{R}^n$.

1.7 Application linéaire tangente

Soient à présent $f : M \to N$ une application C^r-différentiable, (U, ϕ) une carte locale de M autour d'un point $p \in M$. Définissons l'application

$$\begin{array}{rcl} d_p f : T_p M & \to & T_{f(p)} N \\ X_p = [\gamma] & \to & (d_p f)([\gamma]) = [f \circ \gamma] \end{array}$$

Cette application est linéaire, appelée l'application linéaire tangente au point $p = \gamma(0)$.

Proposition 1.7.1. *Soient $f : N \to P$, $g : M \to N$ deux applications différentiables où M,N et P sont des variétés différentiables, alors*

$$d_p(f \circ g) = d_{g(p)} f \circ d_p g$$

en tout $p \in M$.

preuve. $f \circ g$ étant une application de M dans N, on a alors,

$$d_p(f \circ g) : T_p M \to T_{f(g(p))} N$$

soit alors $[\gamma]$ une classe d'équivalence de $T_p M$ telle que $p = \gamma(0)$, nous avons

$$\begin{aligned} d_p(f \circ g)[\gamma] &= [(f \circ g) \circ \gamma] \\ &= [f \circ (g \circ \gamma)] \\ &= (d_{g(p)} f)[g \circ \gamma] \\ &= [(d_{g(p)} f)((d_{pg})[\gamma]) \\ &= ((d_{g(p)} f) \circ (d_{pg}))[\gamma] \end{aligned}$$

□

1.8 Champs de vecteurs

En chaque point p de M, nous venons de définir l'espace tangent, nous avons alors la possibilité de considérer une application qui associe à tout point

p de M un vecteur dans T_pM. C'est la notion de champ de vecteurs.

Définition 1.8.1. *Nous posons tout d'abord*

$$TM = \bigcup_{p \in M} T_pM$$

Alors TM est une variété différentiable, appelée fibré tangent à M.

Un élément de TM est an couple $(p, X(p))$ avec $p \in M$ et $X(p) \in T_pM$. Cherchons les coordonnées sur TM. Soit (U, ϕ) une carte locale sur M, de coordonnées (x^i). Pour $P \in U$ et $X(p) \in T_pM$, nous pouvons prendre comme coordonnées du couple $(p, X(p))$ les réels $(x^1(p), ..., x^n(p), x^1(p, x), ..., x^n(p, x)$ où nous décomposons $X(p)$ selon

$X(p) = \sum\limits_{i=1}^{n} X^i(p, x) \frac{\partial}{\partial_{xi}}(p) \in T_pM$.

Nous avons donc $2n$ coordonnées pour caractériser un élément de TM. Cette variété topologique est de dimension $2n$, n étant la dimension de M. De plus, grâce à ces coordonnées, TM est une variété différentiable.

Définition 1.8.2. *Une section de TM est une application $X : M \to TM$ telle que $\pi \circ X$ soit l'identité sur M, et $\pi : TM \to M$ est la surjection définie par $\pi(p, x) = p$.*

Ainsi nour tout $p \in M$, nous associons un $x(p) \in T_pM$. Une telle section X de classe $C^\propto$, sera appelée champ de vecteurs sur M. Un champ de vecteurs est done une application qui à tout point de la variété M associe un vecteur au dessus de ce point (dans l'espace tangent à ce point sur la variété), de façon $C^\propto$ ie, si $X(p) = \sum\limits_{i=1}^{n} X^i(p) \frac{\partial}{\partial_{xi}}(p)$.
les fonctions $X^i : M \to \mathbb{R}$ soient $C^\propto$ sur l'ouvert de la carte locale. Nous notons $\chi(M)$ l'espace vectoriel des champs de vecteurs sur M et par X_p, au lieu de $X(p)$.

1.9 Dérivations et champs de vecteurs

Soit M une variété différentiable, notons par $C^\propto(M)$ l'ensemble des fonctions $C^\propto$-différentiables sur M. Nous appellerons dérivation sur $C^\propto(M)$ toute application linéaire $D : C^\propto(M) \to C^\propto(M)$ qui vérifie la relation de Leibniz :

$$D(fg) = d(f)g + fD(g)$$

f , g étant deux fonctions $C^\propto$-différentiables sur M. Alors tout champ de vecteur X sur M définit une dérivation $\partial_X : C^\propto(M) \to C^\propto(M)$ Par la relation. suivante :
pour tout $p \in M$; et $f \in C^\propto(M)$:

$$(\partial_X f)(p) = \frac{d}{dt}(f \circ \gamma)|_{t=0}$$

où $X_p = [\gamma]$ et $\gamma(0) = p$. Localement, cete formule s'écrit :

$$(\partial_x p)(p) = \sum_i X^i(p) \frac{\partial f}{\partial x^i}(p).$$

Réciproquement, toute dérivation de $C^\propto(M)$ đefinit un champ de vecteurs sur M. donc nous identifions $\chi(M)$ aux dérivations de $C^\propto(M)$.

Définition 1.9.1. *Nous pouvons munir $\chi(M)$ d'une structure supplémentaire. Soient $X, Y \in \chi(M)$ et $f \in C^\propto(M)$. Puisque $\partial_X f \in C^\propto(M)$, nous pouvons lui appliquer Y. Nous obtenons ainsi une application linéaire*

$YX : C^\propto(M) \to C^\propto(M)$, cette application n'est pas une dérvation. Cependant, il est possible de construire une dérivation à partir de X et Y, en posant

$$[X, Y] = XY - YX$$

Ainsi $[X.Y]$ appartient à $\chi(M)$.

Définition 1.9.2. *Nous appellerons crochet de lie de X et Y le champ de vecteur :$[X, Y]$.*

Le crochet de Lie est antisymétrique en X et Y et vérifie l'identité de Jacobi

$$[[X,Y],Z] + [[Y,Z],X] + [[Z,X],Y] = 0$$

Chapitre 2

Complément sur la géométrie pseudo-Riemannienne

2.1 Variétés pseudo-Riemanniennes

La géométrie pseudo-Riemannienne est une extension de la géométrie Riemannienne ; au méme titre que, en algèbre bilinéaire, l'étude des formes bilinéaires symétriques généralisent les considérations sur les métriques euclidiennes. Cependant, cette géométrie présente des aspects non intuitifs des plus surprenants.

Une métrique pseudo-Riemannienne sur une variété différentiable M de dimension n est une famille $g = \{g_x\}_{x \in M}$ de formes bilinéaires symétriques non dégénérées sur les espaces tangents T_xM de signature constante (p, q). La donnée (M, g) est appelée variété pseudo-Riemannienne. La géométrie pseudo-Riemannienne est l'étude de ces structures, de leurs particularités et des relations qu'elles entretiennent entre elles.

Les variétés pseudo-Riemanniennes représentent une classe importante de variétés différentiables, regroupant en particulier les variétés Riemanniennes et les variétés Lorentziennes :

- Une métrique pseudo-Riemannienne est dite Riemannienne lorsque la signature est $(n, 0)$ ou $(0, n)$.
- Une métrique pseudo-Riemannienne est dite Lorentzienne lorsque la signature est $(n-1, 1)$ (ou parfois $(1, n-1)$, selon la convention de signes).

Dans un système de coordonnées locales $(x_1, .., x_n)$. Les composantes d'une métrique pseudo-Riemannienne g sont

$$g_{ij} = g(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}).$$

Exemple 2.1.1. ***Espace Euclidieu.***

Considérons l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire est une variété Riemanniennes. En effet, rappelons que pour tout $p \in \mathbb{R}^n$ on a $T_p\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n$. Ainsi, le produit scalaire noté $\langle \ , \rangle$, définie par :

$$\begin{aligned} \langle \ , \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longrightarrow \langle x \ , y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i, \end{aligned}$$

où x_i et y_i désigement les composantes de x et y dans la base canonique, est une forme bilinéaire symétrique et définie positive (et donc non dégénéreé) sur $\mathbb{R}^n = T_p\mathbb{R}^n$. $(\mathbb{R}^n, \langle \ , \rangle)$ est appelé Espace Euchlidien.

Exemple 2.1.2. ***Espace pseudo-Euchlidien.***

Soit p et q deux entiers naturals tels que $p + q = n$. Considérons

$$g^{p,q} : (x, y) \longmapsto -\sum_{i=1}^{p} x_i y_i + \sum_{i=p+1}^{p+q} x_i y_i,$$

la forme bilinéaire symétrique non dégénérée de signature (p, q) sur $\mathbb{R}^n$, où $x = (x_1, ..., x_n)$ et $y = (y_1, ..., y_n)$. $(\mathbb{R}^n, g^{p,q})$ est une variété pseudo-Riemannienne appelée espace pseudo-euchlidien et notée $\mathbb{R}^{p,q}$.

2.2 Dérivée de Lie

Définition 2.2.1. *Etant donnée M une variété differentiable de dimension n et X un champ de vecteur sur M.*

$L_X Y$ est appelleé la dérivée de Lie dans la direction de X (que l'on note par L_X) appliqué au champs de vecteurs Y et es définie comme suit :

$$L_X Y = [X, Y] \textit{ pour tout } \quad Y \in \chi(M).$$

2.3 Connexion linéaire

Définition 2.3.1. *Une connexion linéaire sur une variété différentiable M est une application*

$$\nabla : \chi(M) \times \chi(M) \longrightarrow \chi(M)$$

telle que pour tout $X, X', Y, Y' \in \chi(M)$ et $f, g \in C^\infty(M)$ on a ait

1. $\nabla_{fX+gX'}Y = f\nabla_X Y + g\nabla_{X'}Y$.
2. $\nabla_X(Y + Y') = \nabla_X Y + \nabla_X Y'$.
3. $\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y$.

On dit que $\nabla_X Y$ est la dérivée covariante de Y dans la direction de X.

2.4 Torsion d'une connexion

Définition 2.4.1. *Soit M une variété différentiable munie d'une connexion linéaire ∇. La torsion de la connexion ∇ est le tenseur de type $(1, 2)$ défini par l'expressioné*

$$T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y],$$

$T(X, Y)$ est alors un champ de vecteurs. De la définition, on remarque que $T(X, Y) = -T(Y, X)$.

Définition 2.4.2. *Une connexion linéaire ∇ sur une variété M est dite sans torsion si $T = 0$.*

2.5 Connexion de Levi-Civita

Théorème 2.5.1. *([Boo], [O]) Soit (M, g) une variété pseudo-Riemannienne. Il existe une et une seule connexion sans torsion ∇ sur M pour laquelle g est parallèle, c'est à dire, $\nabla g = 0$. Cette connexion s'appelle la connexion de Levi-Civita de (M, g).*

Sauf mention explicite du contraire, toute variété pseudo-Riemannienne sera munie de sa connexion de Levi-Civita. Dire qu'elle est sans torsion signifie que

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y],$$

pour tout $X, Y \in \chi(M)$. Dire que la métrique g est parallèle signifie que

$$X(g(Y, Z)) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z),$$

pour tous les $X, Y, Z \in \chi(M)$. Cette condition est aussi appelée la condition de compatibilité de ∇ avec g.

On a la proposition suivante :

Proposition 2.5.1. *La connexion de Levi-Civita sur une variété pseudo Riemannienne (M, g) vérifie la formule suivante :*

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_X Y, Z) &= X(g(Y, Z)) + Y(g(Z, X)) - Z(g(X, Y)) - g(X, [Y, Z]) \\ &\quad + g(Y, [Z, X]) + g(Z, [X, Y]), \end{aligned}$$

pour tous $X, Y, Z \in \chi(M)$. C'est ***la formule de Koszul.***

preuve. Si ∇ est une connexion sans torsion sur M pour laquelle g est parallèle, alors pour tous les $X, Y, Z \in \chi(M)$, on a

$$\begin{aligned} X(g(Y, Z)) &= g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z), \\ Y(g(Z, X)) &= g(\nabla_Y Z, X) + g(Z, \nabla_Y X), \\ Z(g(X, Y)) &= g(\nabla_Z X, Y) + g(X, \nabla_Z Y). \end{aligned}$$

En ajoutant les deux premières équations et en enlevant la troisième, on aura, puisque g est symétrique et ∇ sans torsion,

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_X Y, Z) &= X(g(Y, Z)) + Y(g(Z, X)) - Z(g(X, Y)) - g(X, [Y, Z]) \\ &\quad + g(Y, [Z, X]) + g(Z, [X, Y]). \end{aligned}$$

□

Proposition 2.5.2. *Soit (M, g) une variété pseudo-Riemannienne de dimension n, munie de la connexion de levi-Civita ∇.*

Posons $\Gamma_{ij}^k \in C^\infty(M)$, $i, j, k = 1, .., n$, les coordonnées du champ de vecteurs $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j}$ relativement au repère local $\{\frac{\partial}{\partial x_1}, .., \frac{\partial}{\partial x_n}\}$. On a alors

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} = \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x_k}, \ i, j = 1, .., n.$$

Puisque $[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}] = 0$, *la condition que* ∇ *est sans torsion est équivalente à ce que, pour tous les* $1 \leq i, j, k \leq n$, *nous ayons*

$$\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k.$$

Utilisant la formule de Koszul, un calcul simple nous montre que, dans une carte de coordonnées locales $(x_1, ..., x_n)$, *les fonctions* Γ_{ij}^k *sont données par*

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{km} (\frac{\partial}{\partial x_i} g_{jm} + \frac{\partial}{\partial x_j} g_{im} - \frac{\partial}{\partial x_m} g_{ij}),$$

pour tout $i, j, k \in \{1, ..., n\}$ *où* $g_{ij} = g(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j})$ *et* g^{ij} *désignent les composantes de la matrice inverse de* (g_{ij}).

2.6 Tenseur de courbure

Définition 2.6.1. *Le tenseur de courbure de Riemann* R *d'une variété pseuod-Riemanniennene* (M, g) *munie de la connexion de Levi-Civita* ∇ *est le tenseur, de type* $(1, 3)$, *défini par*

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z.$$

où $[X, Y]$ *désigne le crochet de Lie de champs de vecteurs.*

Proposition 2.6.1. *Le tenseur de courbure de Riemann a les symétries suivantes, pour tous* X, Y, Z *champs de vecteurs sur* M :

1. $R(X, Y) = -R(Y, X)$
2. $g(R(X, Y)Z, W) = -g(R(X, Y)W, Z)$
3. $R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0.$
4. $(\nabla_X R)(Y, Z) + (\nabla_Y R)(Z, X) + (\nabla_Z R)(X, Y) = 0.$

La troisième identité a été découverte par Ricci, mais est souvent nommée **Première identité de Bianchi** ou **identité algébrique de Bianchi.**

La dernière identité souvent appelée **Seconde identité de Bianchi** ou **identité différentielle de Bianchi**.

Remarque 2.6.1. *On peut considérer le tenseur de courbure de Riemann comme un tenseur de type* $(0,4)$ *par*

$$R(X,Y,Z,W) = g(R(Z,W)Y,X), \;\; X,Y,Z,W \in \chi(M).$$

2.7 Tenseur de Ricci

Définition 2.7.1. *Soit* (M,g) *une variété pseudo-Riemanniennes munie de la conxexion de Levi-Civita* ∇*, et soit* R *le tenseur de courbure de Riemann. Le tenseur de Ricci est un tenseur de type* $(0,2)$*, obtenu par la trace du tenseur de courbure*

$$\varrho(X,Y) = \boldsymbol{tr}(Z \longmapsto R(X,Y)Z) = \sum_{i=1}^{n} g(R(e_i,X)Y,e_i)$$

où $X,Y,Z \in \chi(M)$.

Chapitre 3

Ricci soliton sur les variétés Lorentziennes de dimension 3 , admettant un champ de vecteurs parallèle isotrope

Un changement notable par rapport au cas Riemannien réside dans l'existence des champs de vecteurs isotropes (i.e de type lumière) sur les variétés pseudo-Riemanniennes. Chaichi et ses collaborateurs [9] se sont intéréssés aux variétés Lorentziennes (M, g_f), de dimension trois, admettant des champs de vecteurs prallèles isotropes. Ces variétés, appelées variétés de Walker, ont des propriétés géométriques qui n'ont pas d'analogues dans le cas Riemannien. Elles sont décrites en fonction d'un système adéquat de coordonnées locales (t, x, y) et forment une classe assez grande, et ce, selon la nature d'une fonction arbitraire à deux variables $f(x, y)$. Toute fois, plusieures conséquences géométriques sont déduites [9]. En particulier, des exemples de variétés localement symétriques (i.e les variétés pseudo-Riemannienne ayant un tenseur de courbure parallèle), sont classées à l'aide de la fonction f. Il est donc naturel de se poser la question suivante :

QUESTION : Quand est ce (M, g_f) soit est Ricci soliton ?

3.1 Géométrie Lorentzienne de (M, g_f)

Dans [9], Chaichi, García-Río et Vázquez-Abal ont étudié les variétés Lorentziennes de dimension trois qui admettent un champs de vecteurs prallèle de type lumière. Cette classe de variétés, qu'on notera (M, g_f), possède un système de coordonnées locales (t, x, y), de sorte que le champ $\frac{\partial}{\partial_t}$ soit prallèle de type lumière, et il existe une fonction différentiable $f = f(x, y)$, telle que la métrique Lorentzienne g_f soit définie par :

$$g_f = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & \varepsilon & 0 \\ 1 & 0 & f \end{pmatrix}, \tag{3.1}$$

où $\varepsilon = \pm 1$.

Dans tout ce qui suit, notons par (M, g_f) cette variété Lorentzienne, i.e la variété de Walker, et posons

$$\partial_t = \frac{\partial}{\partial_t},\ \partial_x = \frac{\partial}{\partial_x} \text{ et } \partial_y = \frac{\partial}{\partial_y}.$$

Soient ∇ la connexion de Levi Civita de g_f, R le tenseur de courbure et ϱ le tenseur de Ricci.

Les composantes de la connéxion de Levi-Civita, relativementà la base $\{\partial_t, \partial_x, \partial_y\}$, sont déterminées par [9] :

$$\begin{aligned} \nabla_{\partial_x}\partial_y &= \frac{1}{2} f_x \partial_t, \\ \nabla_{\partial_y}\partial_y &= \frac{1}{2} f_y \partial_t - \frac{\varepsilon}{2} f_x \partial_x, \quad \text{et 0 ailleurs,} \end{aligned} \tag{3.2}$$

où f_x désigne la dérivée partielle de f par rapport à x.

Toutes les composantes du tenseur de courbure, qui ne sont pas toujours nulles, sont données par [9]

$$\begin{aligned} R(\partial_x, \partial_y)\partial_x &= -\frac{1}{2} f_{xx} \partial_t, \\ R(\partial_x, \partial_y)\partial_y &= \frac{\varepsilon}{2} f_{xx} \partial_x, \end{aligned} \tag{3.3}$$

où f_{xx} désigne la dérivée seconde de f par rapport à x.

De (3.3), on obtient les composantes, relativement à la base $\{\partial_t, \partial_x, \partial_y\}$, du tenseur de Ricci $\varrho = (\varrho_{ij})$:

$$\varrho = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\varepsilon}{2} f_{xx} \end{pmatrix}. \tag{3.4}$$

En particulier, (3.4) montre que la variété (M, g_f) est plate si et seulement si $f_{xx} = 0$.

3.2 Champs de Killing sur (M, g_f)

3.2.1 Champs de Killing sur une variété pseudo-riemannienne (M, g)

On se propose de déterminer l'algèbre de Lie des champs de Killing des variétés de Walker de dimension trois. Pour cela on rappelle quelques resultats classiques concernant la notion de champs de Killing.

Définition 3.2.1. *Un champ de vecteurs de Killing (ou isométrie infinitésimale) sur une variété pseudo-riemannienne (M, g) est un champ de vecteurs X qui verifie*

$$L_X g = 0,$$

où L_X est la dérivé de Lie associée au champ de vecteurs X de M.

Proposition 3.2.1. *X étant un champ de vecteurs sur (M, g) alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

(1) X est un champ de Killing

(2) $\forall V, W \in \chi(M)$: $Xg(V, W) = g([X, V], W) + g(V, [X, W])$

(3) $\forall V, W \in \chi(M)$: $g(\nabla_V X, W) + g(\nabla_W X, V) = 0$

preuve. X étant un champ de Killing alors pour tous $V, W \in \chi(M)$ on a

$$(L_X g)(V, W) = Xg(V, W) - g([X, V], W) - g(V, [X, W]) = 0,$$

c'est à dire

$$Xg(V, W) = g([X, V], W) + g(V, [X, W]).$$

Il reste à montrer l'équivalence entre les deux dernières propriétés de la proposition. En utilisant la propriété (2) on obtient

$$\begin{aligned} g(X,[W,V]) + g(V,[W,X]) &= Wg(X,V), \\ g(V,[X,W]) + g(W,[X,V]) &= Xg(W,V), \\ g(W,[V,X]) + g(X,[V,W]) &= Vg(X,W), \end{aligned}$$

il en résulte que

$$g(\nabla_V X, W) + g(\nabla_W X, V) = 0,$$

c'est à dire ∇X est anti-adjoint par rapport à g. □

L'ensemble des champs de Killing sur une variété pseudo riemannienne (M,g), noté (M), est une algèbre de Lie. En effet, si X et Y sont des champs de Killing alors

$$L_{[X,Y]}g = L_X \circ L_Y g - L_Y \circ L_X g = 0.$$

3.2.2 Champs de Killing sur (M, g_f)

Soit maintenant $X = h_1\partial_t + h_2\partial_x + h_3\partial y$, $h_i \in C^\infty(M)$, un champ de vecteurs sur les variétés de Walker de dimension 3. Les composantes, relativement à la base des coordonnées locales, de la dérivée de Lie dans la direction de X sont données par :

$$\begin{cases} (L_X g_f)(\partial_t, \partial_x) = \varepsilon\partial_t(h_2) + \partial_x(h_3), \\ (L_X g_f)(\partial_t, \partial_y) \quad = \partial_t(h_1) + f\partial_t(h_3) + \partial_y(h_3), \\ (L_X g_f)(\partial t, \partial t) = 2\partial_t(h_3), \\ (L_X g_f)(\partial_x, \partial_y) \quad = \partial_x(h_1) + f\partial_x(h_3) + \varepsilon\partial_y(h_2), \\ (L_X g_f)(\partial_x, \partial_x) = 2\varepsilon\partial_x(h_2), \\ (L_X g_f)(\partial_y, \partial_y) = X(f) + 2\partial_y(h_1) + 2f\partial_y(h_3). \end{cases}$$

X est un champs de Killing si et seulement si le système suivant est satisfait

$$\begin{cases} \varepsilon\partial_t(h_2) + \partial_x(h_3) = 0, \\ \partial_t(h_1) + f\partial_t(h_3) + \partial_y(h_3) = 0, \\ 2\partial_t(h_3) = 0, \\ \partial_x(h_1) + f\partial_x(h_3) + \varepsilon\partial_y(h_2) = 0, \\ 2\varepsilon\partial_x(h_2) = 0, \\ X(f) + 2\partial_y(h_1) + 2f\partial_y(h_3) = 0. \end{cases} \tag{3.5}$$

On dérive la deuxième équation du système (3.5) par rapport à x, on obtient

$$\partial^2_{xt}(h_1) + \partial^2_{xy}(h_3) = 0. \tag{3.6}$$

On dérive la quatrième et la première équation du système (3.5) par rapport à t et y, respictivement, on aura

$$\partial^2_{tx}(h_1) + \varepsilon\partial^2_{ty}(h_2) = 0. \tag{3.7}$$

et

$$\varepsilon\partial^2_{yt}(h_2) + \partial^2_{yx}(h_3) = 0. \tag{3.8}$$

D'après les équations (3.6), (3.7) et(3.8), on trouve $\partial^2_{xy}(h_3) = 0$. On dérive la sixième équation du système (3.5) par rapport à t, on trouve

$$\partial_x f\partial_t(h_2) + 2\partial^2_{ty}(h_1) = 0. \tag{3.9}$$

On dérive l'équation (3.9) par rapport à x, on aura

$$\partial^2_{xx} f\partial t(h_2) + 2\partial^3_{xty}(h_1) = 0. \tag{3.10}$$

Utilisant les équations (3.6) et (3.10) et puisque $f_{xx} \neq 0$, on montre que $\partial^2_{xt}(h_1) = 0$ et $f_{xx}\partial_t(h_2) = 0$.

D'où $\partial_t(h_2) = 0$, donc $\partial_t(h_2) = \partial_x(h_2) = 0$, ce qui implique $h_2 = f_1(y)$. De la première équation du sytème (3.5), on a $\partial_x(h_3) = 0$, ainsi $h_3 = g(y)$, or de l'équation (3.10), on trouve $\partial^2_{ty}(h_1) = 0$. On dérive la deuxième équation du système (3.5) par rapport à y, on obtient

$$\partial^2_{yt}(h_1) + \partial^2_{yy}(h_3) = 0,$$

ce qui implique $\partial^2_{yy}(h_3) = 0$. On a alors

$$h_3 = c_1 y + c_2,$$

où c_1 et c_2 sont des constantes réelles. De la deuxième équation du système (3.5), on a

$$\partial_t(h_1) = -\partial_y(h_3) = -c_1,$$

ainsi $h_1 = -c_1 t + h(x, y)$. La quatrième équation du système (3.5) montre que

$$\begin{aligned}\partial_x(h_1) &= -\varepsilon \partial_y(h_2) \\ &= -\varepsilon f_1^{'}(y) \\ &= \partial_x h,\end{aligned}$$

d'où $h = -\varepsilon f_1^{'}(y)x + f_2(y)$, et on a

$$h_1 = -c_1 t - \varepsilon f_1^{'}(y)x + f_2(y).$$

Ainsi, (voir [7])

$$X = (-c_1 t - \varepsilon f_1^{'}(y)x + f_2(y))\partial_t + f_1(y)\partial_x + (c_1 y + c_2)\partial_y,$$

où $f_1$et f_2 sont des fonctions vérifiant

$$2c_1 f - 2\varepsilon f_1^{''}(y)x + 2f_2^{'}(y) + f_1(y)f_x + (c_1 y + c_2) = 0.$$

3.3 Ricci soliton sur les variétés de Walker de dimension 3

3.3.1 Ricci soliton sur une variété pseudo-Riemannienne (M, g)

Définition 3.3.1. *Une variété pseudo-Riemannienne (M, g) est dite Ricci soliton, s'il existe un champ de vecteurs X sur M, tel que $L_X g + \varrho = \lambda g$, où L_X désigne la dérivée de Lie associée au champ de vecteurs X et ϱ le tenseur de Ricci de M et λ une constante réelle. On a alors,*

$$(L_X g)(Y, Z) + \varrho(Y, Z) = \lambda g(Y, Z),$$

pour tous champs de vecteurs Y , Z sur M.

3.3.2 Ricci soliton sur (M, g_f)

Soit maintenant

$$X = A\partial_t + B\partial_x + C\partial_y, \quad A, B, C \in C^\infty(M),$$

un champ de vecteurs sur les variétés de Walker de dimension 3.

(M, g_f) est une variété Ricci soliton si et seulement si le système suivant est satisfait [6]

$$\begin{cases} 2\partial_t(C) = 0, \\ \varepsilon\partial_t(B) + \partial_x(C) = 0, \\ \partial_t(A) + f\partial_t(C) + \partial_y(C) = \lambda, \\ 2\varepsilon\partial_x(B) = \lambda\varepsilon, \\ \partial_x(A) + f\partial_x(C) + \varepsilon\partial_y(B) = 0, \\ X(f) + 2(\partial_y(A) + f\partial_y(C)) - \frac{\varepsilon}{2}f_{xx} = \lambda f. \end{cases} \tag{3.11}$$

De la première équation du système (3.11) la fonction C indépendante de t, posons alors $C = C(x, y)$.

On intègré la deuxième et la troixième équation du système (3.11) par rapport à t, on obtient

$$B = -\frac{\partial_x(C)}{\varepsilon}t + H(x,y),$$
$$A = (\lambda - \partial_y(C))t + G(x,y),$$

où H et G sont deux fonctions différentiables qui dépendent de x et y.

Ensuite, on dérive la quatrième équation du système (3.11) par rapport à x, on aura

$$-\frac{\partial^2_{xx}(C)}{\varepsilon}t + H_x = \frac{\lambda}{2}$$

où on pose $H_x = \frac{\partial(H)}{\partial x}$. Par suite

$$-2\partial^2_{xx}(C)t + 2\varepsilon H_x - \lambda\varepsilon = 0,$$

ce qui implique

$$-2\partial^2_{xx}(C) = 2\varepsilon H_x - \lambda\varepsilon = 0.$$

On a alors

$$C = u(y)x + v(y),$$
$$H = \frac{\lambda}{2}x + w(y),$$

où u, v et w sont des fonctions dépendant de y.

Par ailleurs, on a

$$\partial_x(A) = G_x,$$
$$\partial_x(C) = u(y)$$
$$\partial_y B = -\frac{u^{'}(y)}{\varepsilon}t + H_y = -\frac{u^{'}(y)}{\varepsilon}t + w^{'}(y),$$

avec

$$G_x = \frac{\partial(G)}{\partial x} \text{ et } H_y = \frac{\partial(H)}{\partial y}.$$

Utilisant la cinquième et la sixième équation du système (3.11) on obtient

$$G_x - u^{'}(y)t + \varepsilon w^{'}(y) + fu(y) = 0, \tag{3.12}$$

et

$$f_xB + f_yC + 2\partial_y(A) - \frac{\varepsilon}{2}f_{xx} = (\lambda - 2\partial_y(C))f. \tag{3.13}$$

De (3.12) et (3.13) on déduit le système suivante

$$\begin{cases} G_x - u^{'}(y)t + \varepsilon w^{'}(y) + fu(y) = 0, \\ f_xB + f_yC + 2\partial_y(A) - \frac{\varepsilon}{2}f_{xx} = (\lambda - 2\partial_y(C))f. \end{cases} \tag{3.14}$$

On pose $u(y) = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$ on aura

$$\begin{cases} G_x + \varepsilon w^{'}(y) + \alpha f = 0, \\ f_x(-\frac{\partial_x(C)}{\varepsilon}t + \frac{\lambda}{2}x + w(y)) + f_y(u(y)x + v(y)) + 2(-v^{''}(y)t + G(y)) - \frac{\varepsilon}{2}f_{xx} = (\lambda - 2v^{'}(y))f. \end{cases} \tag{3.15}$$

De la deuxième équation du système (3.15) on obtient

$$2v^{'}(y)f - \lambda f + 2G_y + f_xw(y) + f_y(\alpha x + v(y)) + \frac{\lambda}{2}f_xx - (\frac{\alpha}{\varepsilon}f_x + 2v^{''}(y))t = \frac{\varepsilon}{2}f_x, \tag{3.16}$$

et comme l'équation (3.16) est indépendante de t, on aura

$$\frac{\alpha}{\varepsilon}f_x + 2v^{''}(y) = 0,$$

ce qui implique $\frac{\alpha}{\varepsilon}f_{xx} = 0$. Ainsi $\alpha = 0$.

De la première équation du système (3.15), on obtient

$$G(x,y) = -\varepsilon xw^{'}(y) + \delta(y),\ \ \delta \in C^\infty(M).$$

D'où, $v^{''}(y) = 0$ et on a $v(y) = ay + b$, $a, b \in \mathbb{R}$. ainsi donc (voir [bb9])

$$X(t,x,y) = ((\lambda - a)t - \varepsilon xw^{'}(y) + \delta(y))\partial_t + (\frac{\lambda}{2}x + w(y))\partial_x + (ay + b)\partial_y.$$

où δ et w deux fonctions vérifiant l'équation

$$f_x(\frac{\lambda}{2}x + w(y)) + f_y(ay + b) + 2(-\varepsilon xw^{''}(y) + \delta^{'}(y)) - \frac{\varepsilon}{2}f_{xx} = (\lambda - 2a)f.$$

Chapitre 4

Ricci soliton sur le groupe $\mathbb{H}_2\times\mathbb{R}$ de dimension 3

Dans ce chapitre, on considère le groupe de Lie $\mathbb{H}_2\times\mathbb{R}$ de dimension 3 muni de sa métrique invariante à gauche et on reprend le travail de (voir [3]) qui fait l'objet de montrer l'existence des champs de vecteurs qui sont Ricci soliton sur ce groupe

4.1 Connexion et tenseur de courbure de $\mathbb{H}_2\times\mathbb{R}$

Considérons le groupe de $\mathbb{H}_2\times\mathbb{R}$ muni de la métrique définie par

$$g_{\mathbb{H}^2} = \frac{1}{y^2}(dx^2 + dy^2) + dz^2, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R} \tag{4.1}$$

Soit la base orthonoramale suivante défine par g pour les champs de vecteurs sur $\mathbb{H}_2\times\mathbb{R}$:

$$[E_1, E_2] = -E_1, [E_2, E_3] = 0, [E_3, E_1] = 0$$

La connexion Levi - Civita ∇ du groupe de Lie $\mathbb{H}_2\times\mathbb{R}$ dans

$$\begin{cases} \nabla_{E_1}E_1 = E_2, \nabla_{E_1}E_2 = -E_1, \nabla_{E_1}E_3 = 0 \\ \nabla_{E_2}E_1 = 0, \nabla_{E_2}E_2 = 0, \nabla_{E_2}E_3 = 0 \\ \nabla_{E_3}E_1 = 0, \nabla_{E_3}E_2 = 0, \nabla_{E_3}E_3 = 0 \end{cases} \tag{4.2}$$

Le tenseur de courbure de $\mathbb{H}_2\times\mathbb{R}$ défini avec la convention de signe :

$$R_{(X,Y)Z} = \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z$$

, ainsi les composantes non nulles du tenseur de courbure R sont données par

$$R(E_1,E_2)E_1 = E_2, R(E_1,E_2)E_2 = -E_1 \tag{4.3}$$

Par suite les composantes de courbure de Ricci $\{\mathbf{Ric}_{ij}\}$ sont données par

$$Ric_{11} = Ric_{22} = -1, Ric_{12} = Ric_{13} = Ric_{23} = Ric_{33} = 0 \tag{4.4}$$

4.2 Ricci soliton de $\mathbb{H}_2\times\mathbb{R}$ de dimension 3

Soit $X = f_1E_1+f_2E_2+f_3E_3$ un champ de vecteurs arbitraire sur $(\mathbb{H}_2\times\mathbb{R}, g)$, où f_1, f_2, f_3 sont des fonctions de classe $C^\propto$ sur $\mathbb{H}_2\times\mathbb{R}$ des variables x, y, z. Nous noterons la base de coordonnées $\{ \frac{\partial}{\partial_x}, \frac{\partial}{\partial_y}, \frac{\partial}{\partial_z} \}$ par $\{ \partial_x, \partial_y, \partial_z \}$.

La dérivée de Lie de la métrique (4.1) par rapport à X est donnée par :

$$\begin{cases} (L_Xg)(E_1,E_1) = -2(f_2 - \partial_x f_1) \\ (L_Xg)(E_1,E_2) = f_1 + \partial_y f_1 + \partial_x f_2 \\ (L_Xg)(E_1,E_3) = \partial_z f_1 + \partial_x f_3 \\ (L_Xg)(E_2,E_2) = 2\partial_y f_2 \\ (L_Xg)(E_2,E_3) = \partial_z f_2 + \partial_y f_3 \\ (L_Xg)(E_3,E_3) = 2\partial_z f_3 \end{cases} \tag{4.5}$$

Ainsi , en utilisant (4.1) , (4.4) , (4.5) , un calcul standard donne que le groupe de Lie de dimension 3 $(\mathbb{H}_2\times\mathbb{R}, g)$ est Ricci soliton si et seulement si le système suivant est vrai ,

$$\begin{cases} -2(f_2 - \partial_x f_1) - 1 = \lambda \\ (f_1 + \partial_y f_1) + (\partial_x f_2) = 0 \\ \partial_z f_1 + \partial_x f_3 = 0 \\ 2\partial_y f_2 = \lambda \\ \partial_z f_2 + \partial_y f_3 = 0 \\ 2\partial_z f_3 = \lambda \end{cases} \tag{4.6}$$

Nous dérivons la troisième équation en (4.6) par rapport à z , nous obtenons :

$$\partial_x^2 f_1 = 0 \tag{4.7}$$

L'équation (4.7) donne que

$$f_1 = \varphi(x, y)z + \psi(x, y) \tag{4.8}$$

où φ et ψ sont des fonctions de classe $C^\propto$ sur $\mathbb{H}_2 \times \mathbb{R}$

En dérivant la première équation par rapport à y et utilisant la quatrième équation dans (4.6). on trouve :

$$\partial_x \partial_y f_1 = \frac{1}{2}(1 + \lambda) \tag{4.9}$$

Ensuite, la dérivée de la deuxième équation par rapport à y dans (4.6) et l'équation utilisée dans (4.9), nous trouvons :

$$\partial_y f_1 \partial_y^2 f_1 = 0 \tag{4.10}$$

En remplaçant f_1 dans l'équation (4.9),(4.10), on obtient

$$\begin{cases} (\partial_y \varphi + \partial_y^2 \varphi)z + \partial_y \psi + \partial_y^2 \psi = 0 \\ \partial_x \partial_y \varphi z + \partial_x \partial_y \psi = \frac{1}{2}(1 + \lambda) \end{cases} \tag{4.11}$$

Par dérivation des équations (4.11) par rapport à z, nous obtenons

$$\begin{cases} \partial_y\varphi + \partial_y^2\varphi = 0 \\ \partial_y\psi + \partial_y^2\psi = 0 \\ \partial_x\partial_y\varphi = 0 \\ \partial_x\partial_y\psi = \frac{1}{2}(1+\lambda) \end{cases} \tag{4.12}$$

Nous dérivons la seconde équation par rapport à x et utilisé dans la quatrième équation (4.12), on trouve :

$$\lambda = -1 \tag{4.13}$$

Intégration des première et seconde équations (4.12), on trouve

$$\begin{cases} \varphi(x,y) = \alpha_1 e^{-y} + \varphi_1(x) \\ \psi(x,y) = \alpha_2 e^{-y} + \psi_1(x) \end{cases} \tag{4.14}$$

où $\alpha_i \in \mathbb{R}$ et φ_1, ψ_1 sont des fonctions de classe $C^\propto$ sur $\mathbb{H}_2\times\mathbb{R}$ à une seule variable x.
Ainsi

$$f_1 = (\alpha_1 e^{-y} + \varphi_1(x))z + \alpha_2 e^{-y} + \psi_1(x) \tag{4.15}$$

Ensuite, nous remplaçons f_1 dans la deuxième équation de (4.5), nous obtenons :

$$(\varphi_1(x) + \varphi_1''(x))z + \psi_1(x) + \psi_1''(x) = 0 \tag{4.16}$$

Nous dérivons l'équation (4.16) par rapport à z, nous obtenons

$$\begin{cases} \varphi_1(x) + \varphi_1''(x) = 0 \\ \psi_1(x) + \psi_1''(x) = 0 \end{cases} \tag{4.17}$$

Par intégration de (4.17) par rapport à x , on trouve que :

$$\begin{cases} \varphi_1(x) = \alpha_3\cos(x) + \alpha_4\sin(x) \\ \psi_1(x) = \alpha_5\cos(x) + \alpha_6\sin(x) \end{cases} \tag{4.18}$$

où $\alpha_i \in \mathbb{R}$. Ainsi

$$f_1 = (\alpha_1 e^{-y} + \alpha_3 \cos(x) + \alpha_4 \sin(x))z + \alpha_2 e^{-y} + \alpha_5 \cos(x) + \alpha_6 \sin(x). \quad (4.19)$$

À partir de la première équation de (4.5) , donne :

$$f_2 = (-\alpha_3 \sin(x) + \alpha_4 \cos(x))z - \alpha_5 \sin(x) + \alpha_6 \cos(x). \quad (4.20)$$

La dernière équation (4.5) donne :

$$f_3 = -\frac{1}{2}z + \xi(x, y) \quad (4.21)$$

où ξ est une fonction de classe $C^\propto$ sur $\mathbb{H}_2 \times \mathbb{R}$ en fonction de x et de y. Nous remplaçant f_1, f_2, et f_3 dans les équations dans les troisième et cinquième (4.5), on obtient :

$$\begin{cases} \partial_x \xi = \alpha_1 e^{-y} + \alpha_3 \cos(x) + \alpha_4 \sin(x) \\ \partial_y \xi = -\alpha_3 \sin(x) + \alpha_4 \cos(x) \end{cases} \quad (4.22)$$

L'intégration de la première équation en (4.22) par rapport à x, on obtient :

$$\xi(x, y) = -\alpha_1 x e^{-y} - \alpha_3 \sin(x) + \alpha_4 \cos(x) + \alpha_7$$

et remplacer ξ dans la deuxième équation (4.22), on constate que

$$\alpha_1 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$$

enfin, pour des constantes de réèlles arbitraires α_i , on a :

$$\begin{cases} f_1 = \alpha_2 e^{-y} + \alpha_5 \cos(x) + \alpha_6 \sin(x) \\ f_2 = -\alpha_5 \sin(x) + \alpha_6 \cos(x) \\ f_3 = -\frac{1}{2}z + \alpha_7 \end{cases} \quad (4.23)$$

Ainsi, il suit facilement que le champ de vecteurs $X = f_1 E_1 + f_2 E_2 + f_3 E_3$ où f_1, f_2, f_3 sont donnés par (4.23) satisfait (4.5).
Finalement on a le résultat suivant

Théorème 4.2.1. *Soit* $(\mathbb{H}_2 \times \mathbb{R}, g)$ *le groupe de Lie de dimension 3 muni d'une* *métrique invariante à gauche que l'on note par* g *donnée par (4.1). Alors* $(\mathbb{H}_2 \times \mathbb{R}, g)$ *est ricci soliton .*

Bibliographie

[1] M. M. Akbar and E. Woolgar, Ricci solitons and Einstein-scalar field theory, Class. Quantum Grav., 26 (2009), 055015. (14pp)

[2] W. M. Boothby, An introduction to differentiable manifolds and Riemannian geometry, New York : Academic Press, 1975.

[3] L. Belarbi, Ricci solitons de $\mathbb{H}_2 \times \mathbb{R}$ Lie group, (doi :10.3934/era.2020010) (28) Number 1, (2020) 157

[4] Brozos-Vàzquez, E. Garcia-Rio, P. Gilkey, S. Nikcevic, and R. Vàzquez-Lorenzo, The geometry of Walker manifolds, Synthesis Lectures on Mathematics and Statistics 5, Morgan & Claypool Publ., 2009.

[5] M. Brozos-Vazquez, G. Calvaruso, E. Garcıa-Rıo, S. Gavino-Fernandez, Three dimensional Lorentzian homogeneous Ricci solitons, Israel J. Math. (1) 188 (2012), 385–403.

[6] G. Calvaruso, B. De Leo, Ricci solitons on Lorentzian Walker three-manifolds, Acta. Math. Hungarica. 132 (2011), 269–293.

[7] G. Calvaruso, Amirhesam Zaeim, Symmetries of Lorentzian Three-Manifolds with Recurrent Curvature. Symmetry, Integrability and Geometry : Methods and Applications 12 (2016) : 063.M. Chaichi, E.

[8] Y. Choquet-bruhat, Géométrie différentielle et systèmes extérieures, Dunod, Paris (1968)

[9] García-Río, M.E. Vázquez-Abal, Three-dimensional Lorentz manifolds admitting a parallel null vector field, J. Phys. A : Math. Gen. 38 (2005), 841–850.

[10] W. Kühnel, Differential Geometry : Curves - Surfaces - Manifolds, Second Edition, Vol 16, Student Mathematical Library , 2006

[11] B. O'Neill, Semi-Riemannian Geometry, New York : Academic Press, (1983)

[12] K. Sekigawa, On some 3-dimensional Riemannian manifolds, Hokkaido Math. J. 2 (1973), 259-270

[13] M. Spivak, A comprehensive introductionto differential geometry, Boston, (USA) (1970),1-2