Ministère De L'enseignement Supérieur Et De La Rechreche Scientifique

Université Ibn Khaldoun - Tiaret

Préparée au Département des Mathématiques

présenté par

BENELHADJ DJELLOUL Sara **RIANE Senia**

Spécialité : Mathématiques

Option : Analyse Fonctionnelle et Applications

sujet de Mémoire

Introduction sur quelques types des inégalités intégrales à paramètre négatif

Mémoire de fin d'études pour obtenir

le diplôme de Master

présenter et soutenue publiquement le 07/06/2022

devant le jury composé de

BENGUESSOUM Aissa	**MCA**	**Président**
BENDAOUD Abed Sid Ahmed	**MCB**	**Examinateur**
BENAISSA Bouharket	**MCB**	**Encadreur**

Remerciement

✓ Nous remercions ALLAH d'abord et avant tout de nous donner la force et la volonté d'accomplir cette œuvre.

✓ Nous tenons à remercier sincèrement **Dr BENAISSA Bouharket** non seulement pour avoir accepté de nous encadrer et aussi nous faire profiter de ses connaissances mais aussi pour sa patience et pour la totale confiance qu'il nous a accordée.

✓ Nous tenons à remercier chaleureusement **Dr BENGUESSOUM Aissa** pour l'honneur qu'il nous fait en tant que président de ce jury.

✓ Nous tenons également à remercier **Dr BENDAOUD Abed Sid-Ahmed** pour l'honneur d'avoir accepté la révision du présent document.

✓ Enfin, nous remercions tous ceux qui ont participé par leurs orientations ou leurs encouragements à la réalisation de ce travail : nos familles, nos amis, nos enseignants.

Table des matières

INTRODUCTION

L'objectif de ce travail est de présenter quelques résultats d'articles scientifiques internationaux sur les inégalités intégrales de paramètre négatif. Toutes les inégalités intégrales étudiées sont considérées dans l'espace de Lebesgue L^p, où $p < 0$. Les techniques utilisées sont les propriétés du calcul intégral, le Théorème de Fubuni, l'inégalité inverse de Hölder et les fonctions monotones.
Ce mémoire est composée d'un préliminaire et de trois chapitres.

Dans la saction **préliminaire**, des notations et des définitions sont données concernant :

1. **Théorème de Fubuni :** on donne une définition et une remarque dans le cas d'une intégrale à borne non constante.

2. **Fonction définie par une intégrale :** nous présentons les trois types de la dérivée d'une fonction définie par une intégrale et le cas général (Règle de Leibniz).

3. **L'inégalité classique :** on donne les expressions des inégalités classiques de Young, Hölder inverse et Minkowski intégrale pour un paramètre négatif.

Le premier chapitre est composé de deux articles scientifiques sur les inégalités intégrales de type Hardy pour un paramètre négatif, nous donnons une version de Bechang Young cité dans l'article [21] et une généralisation des résultats de Bechang Young citée dans l'article [3].

Dans **le deuxième chapitre** nous présentons une nouvelle forme sur les inégalités intégrales de type Hardy pour un paramètre négatif, cité dans un article scientifique [2].

Dans **le troisième chapitre** nous étudions des résultats sur les inégalités intégrales connues par les inégalités de Copson, citées dans l'article [4].

Chapitre 1

Préliminaire

1.1 Théorème de Fubuni

Théorème 1.1. *Soit $f(x, y)$ une fonction mesurable sur Ω et $\Omega = (a, b) \times (c, d) \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ telle que $a < b$ et $c < d$. Alors pour presque tous les $x \in (a, b)$, $f(x, y)$ est intégrable sur (c, d) et pour presque tous les $y \in (c, d)$, $f(x, y)$ est intégrable sur (a, b) et :*

$$\int\limits_{\Omega} |f(x, y)| dxdy = \int\limits_{a}^{b} \left(\int\limits_{c}^{d} |f(x, y)| dy \right) dx = \int\limits_{c}^{d} \left(\int\limits_{a}^{b} |f(x, y)| dx \right) dy,$$

si $f(x, y)$ est une fonction mesurable sur $(a, b) \times (c, d)$ et des intégrales est finie, alors toutes les intégrales existent et de plus cette dernière égalité est vérifiée.

Remarque 1.1. *On appliquant le Théorème de Fubuni on a le cas particulier où l'intégrale à borne non constante.*

$$\int_0^\infty \int_0^x \Phi(t, x) dtdx = \int_0^\infty \int_t^\infty \Phi(t, x) dxdt.$$

1.2 Fonction définie par une intégrale

1.2.1 Fonction : $x \longmapsto F(x) = \int_a^x f(t)dt$.

Soit f une fonction intégrable (l'intégrale converge) sur tout segment $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$. L'intégrale $\int_a^x f(t)dt$ a un sens et définit une fonction

$$\begin{aligned} F : I &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto F(x) = \int_a^x f(t)dt, \end{aligned}$$

I) la fonction F est continue sur I et $F(a) = 0$.

II) F est dérivable en tout $x \in I$ et

$$F'(x) = f(x). \tag{1.1}$$

L'intégrale $\int_x^b f(t)dt$ a un sens (l'intégrale converge) et définit une fonction

$$\begin{aligned} H : I &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto H(x) = \int_x^b f(t)dt, \end{aligned}$$

I) la fonction H est continue sur I et $H(b) = 0$.

II) H est dérivable en tout $x \in I$ et

$$H'(x) = -f(x). \tag{1.2}$$

1.2.2 Fonction : $x \longmapsto \varphi(x) = \int_a^b f(x,t)dt$.

La fonction φ est défini si f est une application de $I \times [a, b]$ où I étant un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$, telle que pour tout $x \in I$, l'application partielle $t \longmapsto f(x, t)$ intégrable sur $[a, b]$.

Théorème 1.2. *Si la fonction*

$$\begin{aligned} f : I \times [a,b] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,t) &\longmapsto f(x,t) \end{aligned}$$

est continue sur $I \times [a,b]$ *et admet une fonction dérivée partielle* $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ *également continue sur* $I \times [a,b]$, *alors la fonction*

$$\begin{aligned} \varphi : I &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \int_a^b f(x,t)dt \end{aligned}$$

est dérivable sur I, *sa dérivée* φ' *vérifiant*

$$\forall x \in I : \varphi'(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt. \tag{1.3}$$

Cette dernière relation peut aussi s'écrire :

$$\forall x \in I : \frac{d}{dx}\left(\int_a^b f(x,t)dt\right) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt. \tag{1.4}$$

Pour détail, voir [5].

1.2.3 Règle de Leibniz

On présente maintemant le cas général des formules précédentes. Soient h, g deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1(I)$ et

$$F(x) = \int_{g(x)}^{h(x)} f(x,t)dt,$$

alors la fonction dérivée de $F(x)$ existe et elle est donnée par

$$F'(x) = h'(x)f(x, h(x)) - g'(x)f(x, g(x)) + \int_{g(x)}^{h(x)} \frac{\partial f(x,t)}{\partial x} dt. \qquad (1.5)$$

Pour détail, voir [10].

1.3 les propriétés des conjuguées

Soient $p \in \mathbb{R}^*$ et $p, p^{'}$ deux conjuguées (c' est à dire $\frac{1}{p} + \frac{1}{p^{'}} = 1$), alors on a

1. $\frac{1}{p^{'}} = \frac{p-1}{p}$, $\frac{1}{p} = \frac{p^{'}-1}{p^{'}}$.
2. $\frac{p^{'}}{p} = p^{'} - 1$, $\frac{p}{p^{'}} = p - 1$.
3. $p = \frac{p^{'}}{p^{'}-1}$, $p^{'} = \frac{p}{p-1}$.
4. $p.p^{'} = p^{'} + p$.

1.4 L'inégalité classique de Young

Soient $a, b > 0$ et $p, p^{'}$ sont conjugués, alors

I) Pour $p \geq 1$, $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p^{'}}}{p^{'}}$.

II) Pour $0 < p < 1$, $ab \geq \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p^{'}}}{p^{'}}$.

III) Pour $p < 0$,

$$ab \geq \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p^{'}}}{p^{'}}. \qquad (1.6)$$

Démonstration de l'inégalité (1.6).
Soit $\frac{1}{p} + \frac{1}{p^{'}} = 1$, ce qui donne

$$\frac{p^{'}-1}{p^{'}}=\frac{1}{p} \quad \text{et} \quad (p-1)(p^{'}-1)=1.$$

On a

$$ab \geq \frac{a^p}{p}+\frac{b^{p^{'}}}{p^{'}} \Leftrightarrow \qquad \frac{a^{p-1}}{bp}+\frac{b^{p^{'}-1}}{ap^{'}} \leq 1,$$

par un changement de variable, on pose

$$t=\frac{a^{p-1}}{b},$$

on déduit que

$$\frac{b^{p'-1}}{ap'}=\frac{a^{(p-1)(p'-1)}}{t^{(p'-1)}ap'}=\frac{1}{t^{(p'-1)}p'}=\frac{t^{-(p'-1)}}{p'},$$

ensuite

$$\frac{a^{p-1}}{bp}+\frac{b^{p'-1}}{ap'}=\frac{t}{p}+\frac{t^{-(p'-1)}}{p'}=f(t), \quad t>0,$$

alors pour tout $t>0$, on a

$$f'(t)=\frac{1}{p}-\frac{p'-1}{p'}t^{-p'}=\frac{1}{p}-\frac{1}{p}t^{-p'}=\frac{1}{p}\left(1-t^{-p'}\right).$$

Pour $p<0$ et $0<p'<1$, on trouve

$$f'(t)=0 \Leftrightarrow 1-t^{-p'}=0 \Leftrightarrow t=1$$
$$f'(t)>0 \Leftrightarrow 1-t^{-p'}<0 \Leftrightarrow 0<t<1,$$

donc la fonction f est majorée par $f(1)=1$ pour tout $t \in (0,\infty)$.
On obtient

$$\forall t \in (0,\infty) : f(t) \leq 1,$$

on résulte que pour tout $p < 0$

$$\frac{a^{p-1}}{bp} + \frac{b^{p'-1}}{ap'} \leq 1 \Leftrightarrow ab \geq \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'}.$$

1.5 Les inégalités de Hölder

Soient Ω un ensemble mesurable non vide de $\mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}^\star$) et f, g deux fonctions mesurables sur Ω telle que $f \in L_p(\Omega)$ et $g \in L_{p'}(\Omega)$ où $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'} = 1$, on a

I) Pour $p \geq 1$

$$\begin{aligned}\int_\Omega \big|f(x)g(x)\big|dx &\leq \big\|f\big\|_{L^p(\Omega)}\big\|g\big\|_{L^{p'}(\Omega)} \\ &= \Big(\int_\Omega \big|f(x)\big|^p dx\Big)^{1/p}\Big(\int_\Omega \big|g(x)\big|^{p'} dx\Big)^{1/p'}.\end{aligned}$$

II) Pour $0 < p < 1$ (quasi-norme)

$$\begin{aligned}\int_\Omega \big|f(x)g(x)\big|dx &\geq \big\|f\big\|_{L^p(\Omega)}\big\|g\big\|_{L^{p'}(\Omega)} \\ &= \Big(\int_\Omega \big|f(x)\big|^p dx\Big)^{1/p}\Big(\int_\Omega \big|g(x)\big|^{p'} dx\Big)^{1/p'}.\end{aligned}$$

III) Pour $p < 0$

$$\int_\Omega \big|f(x)g(x)\big|dx \geq \Big(\int_\Omega \big|f(x)\big|^p dx\Big)^{1/p}\Big(\int_\Omega \big|g(x)\big|^{p'} dx\Big)^{1/p'}. \quad (1.7)$$

Démonstration de l'inégalité (1.7). On pose

$$a = \frac{|f(x)|}{\|f\|_{L^p(\Omega)}}\ , \quad b = \frac{|g(x)|}{\|g\|_{L^q(\Omega)}}$$

d'après l'inégalité de Young (1.6), on résulte

$$\frac{|f(x)g(x)|}{\|f\|_{L^p(\Omega)}\|g\|_{L^{p'}(\Omega)}} \geq \frac{|f(x)|^p}{p\|f\|^p_{L^p(\Omega)}} + \frac{|g(x)|^{p'}}{p'\|g\|^{p'}_{L^{p'}(\Omega)}},$$

puis en intégrant par rapport à x sur Ω, on obtient

$$\int\limits_{\Omega} \frac{|f(x)g(x)|}{\|f\|_{L^p(\Omega)}\|g\|_{L^{p'}(\Omega)}}\, dx$$

$$\geq \int\limits_{\Omega} \frac{|f(x)|^p}{p\|f\|^p_{L^p(\Omega)}}\, dx + \int\limits_{\Omega} \frac{|g(x)|^{p'}}{p'\|g\|^{p'}_{L^{p'}(\Omega)}}\, dx$$

$$= \frac{1}{p\|f\|^p_{L^p(\Omega)}} \int\limits_{\Omega} |f(x)|^p dx + \frac{1}{p'\|g\|^{p'}_{L^{p'}(\Omega)}} \int\limits_{\Omega} |g(x)|^{p'} dx$$

$$= \frac{1}{p\|f\|^p_{L^p(\Omega)}} \|f\|^p_{L^p(\Omega)} + \frac{1}{p'\|g\|^{p'}_{L^{p'}(\Omega)}} \|g\|^{p'}_{L^{p'}(\Omega)}$$

$$= \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1,$$

ce qui donne

$$\int\limits_{\Omega} \frac{|f(x)g(x)|}{\|f\|_{L^p(\Omega)}\|g\|_{L^{p'}(\Omega)}}\, dx \geq 1,$$

d'où

$$\int\limits_{\Omega} |f(x)g(x)|\, dx \geq \|f\|_{L^p(\Omega)} \times \|g\|_{L^{p'}(\Omega)}.$$

Remarque 1.2. *On peut récrire l'inégalité (1.7) sous la forme suivante : pour tout $p < 0$*

$$\left(\int\limits_{\Omega} \big|f(x)g(x)\big|dx\right)^p \leq \left(\int\limits_{\Omega} \big|f(x)\big|^p dx\right)\left(\int\limits_{\Omega} \big|g(x)\big|^{p'} dx\right)^{p-1}. \quad (1.8)$$

1.6 Inégalité de Minkowski forme intégrale

Soient Ω_1, Ω_2 deux ensembles mesurables non vides de $\mathbb{R}$ et $f : \Omega_1 \times \Omega_2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable positive, alors pour $p \geq 1$

$$\left\|\int_{\Omega_2} f(x,y)\, dy\right\|_{L^p(\Omega_1),x} \leq \int_{\Omega_2} \|f(x,y)\|_{L^p(\Omega_1),x}\ dy.$$

$$\left(\int_{\Omega_1}\left(\int_{\Omega_2} |f(x,y)|dy\right)^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq \int_{\Omega_2}\left(\int_{\Omega_1} |f(x,y)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} dy.$$

Pour $0 < p < 1$

$$\left\|\int_{\Omega_2} f(x,y)\, dy\right\|_{L^p(\Omega_1),x} \geq \int_{\Omega_2} \|f(x,y)\|_{L^p(\Omega_1),x}\ dy.$$

$$\left(\int_{\Omega_1}\left(\int_{\Omega_2} |f(x,y)|dy\right)^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \geq \int_{\Omega_2}\left(\int_{\Omega_1} |f(x,y)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} dy.$$

Pour $p < 0$

$$\left\| \int_{\Omega_2} f(x,y)\, dy \right\|_{L^p(\Omega_1)\,,x} \geq \int_{\Omega_2} \|f(x,y)\|_{L^p(\Omega_1)\,x}\, dy. \tag{1.9}$$

Démonstration de l'inégalité (1.9).

On a pour $(x,y) \in \Omega_1 \times \Omega_2$

$$0 \neq \left| \int_{\Omega_2} f(x,y)dy \right| \leq \int_{\Omega_2} |f(x,y)|dy,$$

ensuite

$$\left| \int_{\Omega_2} f(x,y)dy \right|^p \geq \left(\int_{\Omega_2} |f(x,y)|dy \right)^P, \text{ pour } p < 0,$$

en intégrant par rapport à x sur Ω_1, on déduit

$$\int_{\Omega_1} \left| \int_{\Omega_2} f(x,y)dy \right|^p dx$$

$$\geq \int_{\Omega_1} \left(\int_{\Omega_2} |f(x,y)|dy \right)^p dx$$

$$= \int_{\Omega_1} \left[\left(\int_{\Omega_2} |f(x,y)|dy \right)^{p-1} \left(\int_{\Omega_2} |f(x,y)|dy \right) \right] dx$$

$$= \int_{\Omega_1} \left[\left(\int_{\Omega_2} |f(x,t)|dt \right)^{p-1} \left(\int_{\Omega_2} |f(x,y)|dy \right) \right] dx$$

$$= \int_{\Omega_1} \left[\int_{\Omega_2} \left(\int_{\Omega_2} |f(x,t)|dt \right)^{p-1} |f(x,y)|dy \right] dx,$$

en appliqant le Théorème de Fubini, on obtient

$$\int_{\Omega_1}\left|\int_{\Omega_2} f(x,y)dy\right|^p dx \geq \int_{\Omega_2}\underbrace{\left\{\int_{\Omega_1}\left(\int_{\Omega_2}|f(x,t)|dt\right)^{p-1}|f(x,y)|dx\right\}}_{R_1}dy. \tag{1.10}$$

Maintenant, en utilisant l'inégalité inverse de Hölder (1.7), on a

$$\begin{aligned} R_1 &= \int_{\Omega_1}\left(\int_{\Omega_2}|f(x,t)|dt\right)^{p-1}|f(x,y)|dx, \\ &= \int_{\Omega_1}\left|\int_{\Omega_2}|f(x,t)|dt\right|^{p-1}|f(x,y)|dx, \\ &\geq \left(\int_{\Omega_1}\left|\int_{\Omega_2}|f(x,t)|dt\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p'}}\left(\int_{\Omega_1}|f(x,y)^p dx\right)^{\frac{1}{p}} = R_2, \end{aligned}$$

ensuite, par l'intégration par rapport à y sur Ω_2, on résulte que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_2} R_1 dy &\geq \int_{\Omega_2} R_2 dy \\ &= \int_{\Omega_2}\left(\int_{\Omega_1}\left|\int_{\Omega_2}|f(x,t)|dt\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p'}}\left(\int_{\Omega_1}|f(x,y)|dx\right)^{\frac{1}{p}} dy \\ &= \left(\int_{\Omega_1}\left|\int_{\Omega_2}|f(x,t)|dt\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p'}}\int_{\Omega_2}\left(\int_{\Omega_1}|f(x,y)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} dy. \end{aligned}$$

Vu l'inégalité (1.10), on a

$$\int_{\Omega_1}\left|\int_{\Omega_2} f(x,y)dy\right|^p dx \geq \int_{\Omega_2} R_1 dy,$$

alors

$$\left(\int_{\Omega_1}\left|\int_{\Omega_2} f(x,y)dy\right|^p dx\right) \geq$$

$$\left(\int_{\Omega_1}\left|\int_{\Omega_2} |f(x,t)|dt\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p'}} \int_{\Omega_2}\left(\int_{\Omega_1} |f(x,y)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} dy,$$

c'est équivalant de

$$\left(\int_{\Omega_1}\left|\int_{\Omega_2} f(x,y)dy\right|^{\mathrm{p}} dx\right)\left(\int_{\Omega_1}\left|\int_{\Omega_2} |f(x,y)|dy\right|^p dx\right)^{-\frac{1}{p'}} \geq$$

$$\int_{\Omega_2}\left(\int_{\Omega_1} |f(x,y)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} dy.$$

Pour toute fonction f mesurable de même signe, on a

$$\left|\int_{\Omega_2} f(x,y)dy\right| = \left|\int_{\Omega_2} |f(x,y)|dy\right|,$$

par conséquent

$$\left[\int_{\Omega_1}\left|\int_{\Omega_2} f(x,y)dy\right|^p dx\right]^{\frac{1}{p}} \geq \int_{\Omega_2}\left(\int_{\Omega_1} |f(x,y)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} dy,$$

c'est-à-dire

$$\left\|\int_{\Omega_2} f(x,y)dy\right\|_{L^p(\Omega_1),x} \geq \int_{\Omega_2} \|f(x,y)\|_{L^p(\Omega_1),x} dy. \qquad \diamond$$

Chapitre 2

Inégalités intégrales de type Hardy pour un paramétre négatif

2.1 Inégalités intégrales de type Hardy pour $p < 0$, (Bechang Young)

Le premier article scientifique sur les inégalités intégrales de type Hardy pour un paramétre négatif c'est un article de Bechang Young en 2007 (voir[21]).

Lemme 2.1. *Soient $p < 0$, $r < 1$ et $f > 0$ une fonction positive mesurable sur $(0, \infty)$ telle que, $0 < \int_0^\infty t^{-r}(tf(t))^p dt < \infty$, alors*

$$\int_0^\infty x^{-r} \left(\int_0^x f(t)dt \right)^p dx < \left(\frac{p}{r-1} \right)^P \int_0^\infty t^{-r}(tf(t))^p dt. \tag{2.1}$$

Démonstration : pour tout $r < 1$ et $p < 0$ tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, on a

$$f(t) = \left(t^{\frac{1+p-r}{pp'}} f(t) \right) \left(t^{-\frac{1+p-r}{pp'}} \right),$$

en appliquant l'inégalité inverse de Hölder (1.7), on déduit

$$\begin{aligned}\int_0^x f(t)dt &= \int_0^x \left(t^{\frac{1+p-r}{pp'}} f(t)\right)\left(t^{-\frac{1+p-r}{pp'}}\right)dt \\ &\geq \left(\int_0^x \left(t^{\frac{1+p-r}{pp'}} f(t)\right)^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^x \left(t^{-\frac{1+p-r}{pp'}}\right)^{p'} dt\right)^{\frac{1}{p'}},\end{aligned}$$

pour $p<0$, on obtient

$$\begin{aligned}\left(\int_0^x f(t)dt\right)^p &\leq \left[\left(\int_0^x \left(t^{\frac{1+p-r}{pp'}} f(t)\right)^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\right]^p \left[\left(\int_0^x \left(t^{-\frac{1+p-r}{pp'}}\right)^{p'} dt\right)^{\frac{1}{p'}}\right]^p \\ &= \int_0^x t^{\frac{1+p-r}{p'}} f^p(t)dt \left(\int_0^x t^{-\frac{1+p-r}{p}} dt\right)^{p-1}.\end{aligned}$$

On intègre par rapport à t sur $(0,x)$, on résulte que

$$\begin{aligned}\int_0^x t^{-\frac{1+p-r}{p}} dt &= \left[\frac{t^{-\frac{1+p-r}{p}+1}}{\frac{r-1}{p}}\right]_0^x \\ &= \left(\frac{p}{r-1}\right) x^{\frac{r-1}{p}},\end{aligned}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned}\left(\int_0^x f(t)dt\right)^p &\leq \int_0^x t^{\frac{1+p-r}{p'}} f^p(t)dt \left(\frac{p}{r-1}\right)^{p-1} x^{\frac{r-1}{p}(p-1)} \\ &= \left(\frac{p}{r-1}\right)^{p-1} x^{\frac{1-r}{p}+r-1} \int_0^x t^{\frac{1+p-r}{p'}} f^p(t)dt.\end{aligned}$$

Appliquant le Théorème de Fubuni, on obtient

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty x^{-r} \left(\int_0^x f(t)dt\right)^p dx \\ &\leq \left(\frac{p}{r-1}\right)^{p-1} \int_0^\infty x^{\frac{1-r}{p}-1} \int_0^x t^{\frac{1+p-r}{p'}} f^p(t)dtdx \\ &= \left(\frac{p}{r-1}\right)^{p-1} \int_0^\infty \int_0^x x^{\frac{1-r}{p}-1} t^{\frac{1+p-r}{p'}} f^p(t)dtdx \\ &= \left(\frac{p}{r-1}\right)^{p-1} \int_0^\infty \int_t^\infty x^{\frac{1-r}{p}-1} t^{\frac{1+p-r}{p'}} f^p(t)dxdt \\ &= \left(\frac{p}{r-1}\right)^{p-1} \int_0^\infty \left(\int_t^\infty x^{\frac{1-r}{p}-1}dx\right) t^{\frac{1+p-r}{p'}} f^p(t)dt.\end{aligned}$$

Vu que $\dfrac{1-r}{p} < 0$, on trouve

$$\int_t^\infty x^{\frac{1-r}{p}-1}dx = \left[\left(\frac{p}{1-r}\right) x^{\frac{1-r}{p}}\right]_t^\infty = \left(\frac{p}{r-1}\right) t^{\frac{1-r}{p}},$$

par conséquent

$$\begin{aligned}\int_0^\infty x^{-r}\left(\int_0^x f(t)dt\right)^p dx &\leq \left(\frac{p}{r-1}\right)^p \int_0^\infty t^{\frac{1-r}{p}} t^{\frac{1+p-r}{p'}} f^p(t)dt \\ &= \left(\frac{p}{r-1}\right)^p \int_0^\infty t^{1-r+\frac{p}{p'}} f^p(t)dt \\ &= \left(\frac{p}{r-1}\right)^p \int_0^\infty t^{1-r+p-1} f^p(t)dt \\ &= \left(\frac{p}{r-1}\right)^p \int_0^\infty t^{-r}(tf(t))^p dt. \qquad \diamond\end{aligned}$$

Les cas particuliers :

I) Pour $r=0$, on trouve

$$\int_0^\infty \left(\int_0^x f(t)dt\right)^p dx \leq (-p)^p \int_0^\infty (tf(t))^p dt.$$

II) Pour $r=p$, on obtient

$$\int_0^\infty \mathbb{H}^p f(x)dx \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \int_0^\infty f^p(t)dt.$$

III) Pour $r=1+p$, on a

$$\int_0^\infty x^{-1}\mathbb{H}^p f(x)dx \leq \int_0^\infty t^{-1} f^p(t)dt.$$

Où $\mathbb{H}f(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)dt$ est l'opérateur de Hardy.

Lemme 2.2. *Soient $p<0$, $r>1$ et $f>0$ une fonction positive mesurable* *sur* $(0,\infty)$ *telle que,* $0<\int_0^\infty t^{-r}(tf(t))^p dt<\infty$, *alors*

$$\int_0^\infty x^{-r}\left(\int_x^\infty f(t)dt\right)^p dx<\left(\frac{p}{1-r}\right)^p\int_0^\infty t^{-r}(tf(t))^p dt. \tag{2.2}$$

Démonstration : Pour tout $r>1$ et $p<0$ tel que $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$, on a

$$f(t)=\left(t^{\frac{1+p-r}{pp'}}f(t)\right)\left(t^{-\frac{1+p-r}{pp'}}\right),$$

d'après l'inégalité inverse de Hölder (1.7), on trouve

$$\begin{aligned}\int_x^\infty f(t)dt &= \int_x^\infty\left(t^{\frac{1+p-r}{pp'}}f(t)\right)\left(t^{-\frac{1+p-r}{pp'}}\right)dt\\ &\geq\left(\int_x^\infty\left(t^{\frac{1+p-r}{pp'}}f(t)\right)^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_x^\infty\left(t^{-\frac{1+p-r}{pp'}}\right)^{p'}dt\right)^{\frac{1}{p'}},\end{aligned}$$

pour tout $p<0$, ainsi

$$\begin{aligned}\left(\int_x^\infty f(t)dt\right)^p &\leq\left[\left(\int_x^\infty\left(t^{\frac{1+p-r}{pp'}}f(t)\right)^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\right]^p\left[\left(\int_x^\infty\left(t^{-\frac{1+p-r}{pp'}}\right)^{p'}dt\right)^{\frac{1}{p'}}\right]^p\\ &=\int_x^\infty t^{\frac{1+p-r}{p'}}f^p(t)dt\left(\int_x^\infty t^{-\frac{1+p-r}{p}}dt\right)^{p-1}.\end{aligned}$$

En intégrant par rapport à t sur (x,∞), on obtient

$$\begin{aligned}\int_x^\infty t^{-\frac{1+p-r}{p}}dt &= \left[\frac{t^{-\frac{1+p-r}{p}+1}}{-\frac{1-r}{p}}\right]_x^\infty \\ &= \left(\frac{p}{1-r}\right)x^{\frac{r-1}{p}}.\end{aligned}$$

Ce qui donne

$$\begin{aligned}\left(\int_x^\infty f(t)dt\right)^p &\leq \int_x^\infty t^{\frac{1+p-r}{p'}}f^p(t)dt\left(\frac{p}{1-r}\right)^{p-1}x^{\frac{r-1}{p}(p-1)} \\ &= \left(\frac{p}{1-r}\right)^{p-1}x^{\frac{1-r}{p}+r-1}\int_x^\infty t^{\frac{1+p-r}{p'}}f^p(t)dt.\end{aligned}$$

D'après le Théorème de Fubuni, on a

$$\int_0^\infty x^{-r}\left(\int_x^\infty f(t)dt\right)^p dx$$

$$\leq \left(\frac{p}{1-r}\right)^{p-1}\int_0^\infty x^{\frac{1-r}{p}-1}\int_x^\infty t^{\frac{1+p-r}{p'}}f^p(t)dtdx$$

$$= \left(\frac{p}{1-r}\right)^{p-1}\int_0^\infty\int_x^\infty x^{\frac{1-r}{p}-1}t^{\frac{1+p-r}{p'}}f^p(t)dtdx$$

$$= \left(\frac{p}{1-r}\right)^{p-1}\int_0^\infty\int_0^t x^{\frac{1-r}{p}-1}t^{\frac{1+p-r}{p'}}f^p(t)dxdt$$

$$= \left(\frac{p}{1-r}\right)^{p-1}\int_0^\infty\left(\int_0^t x^{\frac{1-r}{p}-1}dx\right)t^{\frac{1+p-r}{p'}}f^p(t)dt.$$

Vu que $\dfrac{1-r}{p}>0$, on résulte que

$$\int_0^t x^{\frac{1-r}{p}-1}dx = \left[\left(\frac{p}{1-r}\right)x^{\frac{1-r}{p}}\right]_0^t = \left(\frac{p}{1-r}\right)t^{\frac{1-r}{p}},$$

on conclut que

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty x^{-r}\left(\int_x^\infty f(t)dt\right)^p dx &\leq \left(\frac{p}{1-r}\right)^p \int_0^\infty t^{\frac{1-r}{p}} t^{\frac{1+p-r}{p'}} f^p(t)dt \\
&= \left(\frac{p}{1-r}\right)^p \int_0^\infty t^{1-r+\frac{p}{p'}} f^p(t)dt \\
&= \left(\frac{p}{1-r}\right)^p \int_0^\infty t^{1-r+p-1} f^p(t)dt \\
&= \left(\frac{p}{1-r}\right)^p \int_0^\infty t^{-r}(tf(t))^p dt. \qquad \diamond
\end{aligned}$$

Des cas particuliers :

I) Pour $r = 2$, on résulte que

$$\int_0^\infty x^{-2}\left(\int_x^\infty f(t)dt\right)^p dx \leq (-p)^p \int_0^\infty t^{p-2} f^p(t)dt.$$

I) Pour $r = 1 - p$, ce qui donne

$$\int_0^\infty x^{p-1}\left(\int_x^\infty f(t)dt\right)^p dx \leq \int_0^\infty t^{2p-1} f^p(t)dt.$$

Théorème 2.1. *Soient $p < 0$, $r \neq 1$ et $f > 0$ une fonction positive mesurable sur $(0, \infty)$ telle que, $0 < \int_0^\infty t^{-r}(tf(t))^p dt < \infty$, on définit*

$$\begin{cases} F(x) = \int_0^x f(t)dt, & pour\ r < 1, \\ \\ F(x) = \int_x^\infty f(t)dt, & pour\ r > 1. \end{cases}$$

Alors

$$\int_0^\infty x^{-r} F^p(x)dx \le \left(\frac{-p}{|r-1|}\right)^p \int_0^\infty t^{-r}(tf(t))^p dt. \tag{2.3}$$

Démonstration :

On applique le Lemme 2.1 et le Lemme2.2 pour $r < 1$ et $r > 1$ respectivement, on obtient l'inégalité (2.3). $\diamond$

2.2 Une généralisation de l'inégalité de type Hardy pour $p < 0$

Dans cette section, on présente un détail d'une généralisation sur les résultats précédents, obtenus par Bichang Young [21], en remplaçant x par une fonction g avec des conditions sur la monotonie. Cette partie est composée de trois Théorèmes principaux et des applications.

2.2.1 Résultats principaux

Théorème 2.2. *Soient $f, g > 0$ deux fonctions positives mesurables sur $(0,\infty)$, $p < 0, r > 1$ et $\tilde{F}(x) = \int_x^\infty f(t)dt$. Si la fonction $\frac{x}{g(x)}$ est non-décroissante, alors*

$$\int_0^\infty g^{-r}(x)\tilde{F}^p(x)dx \leq \left(\frac{p}{1-r}\right)^p \int_0^\infty g^{-r}(x)(xf(x))^p dx. \tag{2.4}$$

Démonstration : Pour tout $r > 1$ et $p < 0$ tel que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$, on a

$$f(t) = \left(t^{\frac{1+p-r}{pp'}} f(t)\right)\left(t^{-\frac{1+p-r}{pp'}}\right),$$

en appliquant l'inégalité inverse de Hölder (1.7), on trouve

$$\begin{aligned}\int_x^\infty f(t)dt \ &\geq \left(\int_x^\infty (t^{\frac{1+p-r}{pp'}} f(t))^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_x^\infty (t^{-\frac{1+p-r}{pp'}})^{p'} dt\right)^{\frac{1}{p'}} \\ &= \left(\int_x^\infty t^{\frac{1+p-r}{p'}} f^p(t)dt\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_x^\infty t^{-\frac{1+p-r}{p}} dt\right)^{\frac{1}{p'}}.\end{aligned}$$

On intègre par rapport à t sur $[x,\infty)$, on résulte que

$$\int_x^\infty t^{-\frac{1+p-r}{p}}dt \;=\left[\frac{t^{-\frac{1+p-r}{p}+1}}{\frac{r-1}{p}}\right]_x^\infty \;=\left(\frac{p}{1-r}\right)x^{\frac{r-1}{p}},$$

on obtient

$$\int_x^\infty f(t)dt \geq \left(\frac{p}{1-r}\right)^{\frac{1}{p'}} x^{\frac{r-1}{pp'}} \left(\int_x^\infty t^{\frac{1+p-r}{p'}} f^p(t)dt\right)^{\frac{1}{p}},$$

vu que $p < 0$, on a

$$\begin{aligned}\tilde{F}^p(x) \;&\leq \left(\frac{p}{1-r}\right)^{\frac{p}{p'}} x^{\frac{r-1}{p'}} \int_x^\infty t^{\frac{1+p-r}{p'}} f^p(t)dt \\ &= \left(\frac{p}{1-r}\right)^{p-1} x^{\frac{1-r}{p}+r-1} \int_x^\infty t^{\frac{1+p-r}{p'}} f^p(t)dt,\end{aligned}$$

par conséquent

$$\int_0^\infty g^{-r}(x)\tilde{F}^p(x)dx \leq \left(\frac{p}{1-r}\right)^{p-1} \int_0^\infty \int_x^\infty g^{-r}(x)x^{\frac{1-r}{p}+r-1}t^{\frac{1+p-r}{p'}} f^p(t)dtdx.$$

D'après le Théorème de Fubuni, on a

$$\int_0^\infty g^{-r}(x)\tilde{F}^p(x)dx$$

$$\leq \left(\frac{p}{1-r}\right)^{p-1} \int_0^\infty t^{\frac{1+p-r}{p'}} f^p(t) \left(\int_0^t g^{-r}(x) x^{\frac{1-r}{p}+r-1} dx\right) dt$$

$$= \left(\frac{p}{1-r}\right)^{p-1} \int_0^\infty t^{\frac{1+p-r}{p'}} f^p(t) \left(\int_0^t g^{-r}(x) x^r x^{\frac{1-r}{p}-1} dx\right) dt$$

$$= \left(\frac{p}{1-r}\right)^{p-1} \int_0^\infty t^{\frac{1+p-r}{p'}} f^p(t) \left(\int_0^t \left(\frac{x}{g(x)}\right)^r x^{\frac{1-r}{p}-1} dx\right) dt,$$

puisque $\dfrac{x}{g(x)}$ est non-décroissante sur $(0, t]$, alors

$$\forall x \in (0, t], \qquad x \leq t \Rightarrow \frac{x}{g(x)} \leq \frac{t}{g(t)},$$

pour $r > 1$,

$$\left(\frac{x}{g(x)}\right)^r \leq \left(\frac{t}{g(t)}\right)^r,$$

ensuite

$$\int_0^\infty g^{-r}(x)\tilde{F}^p(x)dx$$

$$\leq \left(\frac{p}{1-r}\right)^{p-1} \int_0^\infty t^{\frac{1+p-r}{p'}} f^p(t) \left(\int_0^t \left(\frac{x}{g(x)}\right)^r x^{\frac{1-r}{p}-1} dx\right) dt$$

$$\leq \left(\frac{p}{1-r}\right)^{p-1} \int_0^\infty t^{\frac{1+p-r}{p'}} f^p(t) \left(\frac{t}{g(t)}\right)^r \left(\int_0^t x^{\frac{1-r}{p}-1} dx\right) dt.$$

En intégrant sur $(0, t]$, on a

$$\int_0^t x^{\frac{1-r}{p}-1} dx \ = \left[\frac{x^{\frac{1-r}{p}}}{\frac{1-r}{p}} \right]_0^t \ = \left(\frac{p}{1-r} \right) t^{\frac{1-r}{p}},$$

ce qui donne

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty g^{-r}(x) \tilde{F}^p(x) dx \\
&\leq \left(\frac{p}{1-r} \right)^{p-1} \int_0^\infty t^{\frac{1+p-r}{p'}} f^p(t) \left(\frac{t}{g(t)} \right)^r \left(\frac{p}{1-r} \right) t^{\frac{1-r}{p}} dt \\
&= \left(\frac{p}{1-r} \right)^p \int_0^\infty t^{\frac{1+p-r}{p'} + \frac{1-r}{p}} f^p(t) \left(\frac{t}{g(t)} \right)^r dt \\
&= \left(\frac{p}{1-r} \right)^p \int_0^\infty t^{p-r} f^p(t) \left(\frac{t}{g(t)} \right)^r dt \\
&= \left(\frac{p}{1-r} \right)^p \int_0^\infty g^{-r}(t) (t f(t))^p dt,
\end{aligned}$$

d'où, on obtient le résultat voulu ci-dessous

$$\int_0^\infty g^{-r}(x) \tilde{F}^p(x) dx \leq \left(\frac{p}{1-r} \right)^p \int_0^\infty g^{-r}(x) (x f(x))^p dx. \qquad \diamond$$

Théorème 2.3. *Soient $f, g > 0$ deux fonctions positives mesurables sur $(0, \infty)$, $p < 0$, $0 \leq r < 1$ et $F(x) = \int_0^x f(t) dt$. Si la fonction $\frac{x}{g(x)}$ est non-croissante, alors*

$$\int_0^\infty g^{-r}(x) F^p(x) dx \leq \left(\frac{p}{r-1} \right)^p \int_0^\infty g^{-r}(x) (x f(x))^p dx. \tag{2.5}$$

Démonstration : Pour tout $p < 0$ et $0 \leq r < 1$, on obtient

$$f(t) = \left(t^{\frac{1+p-r}{pp'}} f(t)\right)\left(t^{-\frac{1+p-r}{pp'}}\right),$$

d'après l'inégalité inverse de Hölder, on a

$$\begin{aligned}\int_0^x f(t)dt \ &\geq \left(\int_0^x (t^{\frac{1+p-r}{pp'}} f(t))^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^x (t^{-\frac{1+p-r}{pp'}})^{p'} dt\right)^{\frac{1}{p'}} \\ &= \left(\int_0^x t^{\frac{1+p-r}{p'}} f^p(t)dt\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^x t^{-\frac{1+p-r}{p}} dt\right)^{\frac{1}{p'}},\end{aligned}$$

en intégrant par rapport à t sur $(0, x]$, on trouve

$$\int_0^x t^{-\frac{1+p-r}{p}} dt \ = \left[\frac{t^{-\frac{1+p-r}{p}+1}}{\frac{r-1}{p}}\right]_0^x \ = \left(\frac{p}{r-1}\right) x^{\frac{r-1}{p}},$$

ce qui donne

$$\int_0^x f(t)dt \geq \left(\frac{p}{r-1}\right)^{\frac{1}{p'}} x^{\frac{r-1}{pp'}} \left(\int_0^x t^{\frac{1+p-r}{p'}} f^p(t)dt\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Pour tout $p < 0$, on a

$$\begin{aligned}F^p(x) \ &\leq \left(\frac{p}{r-1}\right)^{\frac{p}{p'}} x^{\frac{r-1}{p'}} \int_0^x t^{\frac{1+p-r}{p'}} f^p(t)dt \\ &= \left(\frac{p}{r-1}\right)^{p-1} x^{\frac{1-r}{p}+r-1} \int_0^x t^{\frac{1+p-r}{p'}} f^p(t)dt,\end{aligned}$$

en appliquant le Théorème de Fubuni, on a

$$\int_0^\infty g^{-r}(x)F^p(x)dx$$

$$\leq \left(\frac{p}{r-1}\right)^{p-1} \int_0^\infty \int_0^x g^{-r}(x)x^{\frac{1-r}{p}+r-1}t^{\frac{1+p-r}{p'}}f^p(t)dtdx$$

$$= \left(\frac{p}{r-1}\right)^{p-1} \int_0^\infty t^{\frac{1+p-r}{p'}}f^p(t)\left(\int_t^\infty g^{-r}(x)x^{\frac{1-r}{p}+r-1}dx\right)dt$$

$$= \left(\frac{p}{r-1}\right)^{p-1} \int_0^\infty t^{\frac{1+p-r}{p'}}f^p(t)\left(\int_t^\infty g^{-r}(x)x^r x^{\frac{1-r}{p}-1}dx\right)dt$$

$$= \left(\frac{p}{r-1}\right)^{p-1} \int_0^\infty t^{\frac{1+p-r}{p'}}f^p(t)\left(\int_t^\infty \left(\frac{x}{g(x)}\right)^r x^{\frac{1-r}{p}-1}dx\right)dt,$$

puisque $\dfrac{x}{g(x)}$ est non-croissante sur $[t, \infty)$, alors

$$\forall x \in [t,\infty), \qquad x \geq t \Rightarrow \frac{x}{g(x)} \leq \frac{t}{g(t)},$$

et pour $0 \leq r < 1$, on a

$$\left(\frac{x}{g(x)}\right)^r \leq \left(\frac{t}{g(t)}\right)^r,$$

ensuite

$$\int_0^\infty g^{-r}(x)F^p(x)dx$$

$$\leq \left(\frac{p}{r-1}\right)^{p-1} \int_0^\infty t^{\frac{1+p-r}{p'}} f^p(t) \left(\int_t^\infty \left(\frac{x}{g(x)}\right)^r x^{\frac{1-r}{p}-1}dx\right) dt$$

$$\leq \left(\frac{p}{r-1}\right)^{p-1} \int_0^\infty t^{\frac{1+p-r}{p'}} f^p(t) \left(\frac{t}{g(t)}\right)^r \left(\int_t^\infty x^{\frac{1-r}{p}-1}dx\right) dt.$$

Vu que $\frac{1-r}{p} < 0$ et par l'intégration par rapport à x sur $[t, \infty)$, on trouve

$$\int_t^\infty x^{\frac{1-r}{p}-1}dx = \left[\frac{x^{\frac{1-r}{p}}}{\frac{1-r}{p}}\right]_t^\infty = \left(\frac{p}{r-1}\right) t^{\frac{1-r}{p}},$$

par conséquent

$$\int_0^\infty g^{-r}(x)F^p(x)dx$$

$$\leq \left(\frac{p}{r-1}\right)^{p-1} \int_0^\infty t^{\frac{1+p-r}{p'}} f^p(t) \left(\frac{t}{g(t)}\right)^r \left(\frac{p}{r-1}\right) t^{\frac{1-r}{p}} dt$$

$$= \left(\frac{p}{r-1}\right)^p \int_0^\infty t^{\frac{1+p-r}{p'}+\frac{1-r}{p}} f^p(t) \left(\frac{t}{g(t)}\right)^r dt$$

$$= \left(\frac{p}{r-1}\right)^p \int_0^\infty t^{p-r} f^p(t) \left(\frac{t}{g(t)}\right)^r dt$$

$$= \left(\frac{p}{r-1}\right)^p \int_0^\infty g^{-r}(t)(tf(t))^p dt,$$

on conclut que

$$\int_0^\infty g^{-r}(x)F^p(x)dx \leq \left(\frac{p}{r-1}\right)^p \int_0^\infty g^{-r}(x)(xf(x))^p dx. \qquad \diamond$$

Théorème 2.4. *Soient $f, g > 0$ deux fonctions positives mesurables sur $(0, \infty)$, $p < 0$, $r < 0$ et $F(x) = \int_0^x f(t)dt$. Si $\frac{x}{g(x)}$ est non-décroissante, alors*

$$\int_0^\infty g^{-r}(x)F^p(x)dx \leq \left(\frac{p}{r-1}\right)^p \int_0^\infty g^{-r}(x)(xf(x))^p dx. \tag{2.6}$$

Démonstration : Pour tout $p < 0$ et $r < 0$, on a

$$f(t) = \left(t^{\frac{1+p-r}{pp'}} f(t)\right)\left(t^{-\frac{1+p-r}{pp'}}\right),$$

on applique l'inégalité inverse de Hölder, on obtient

$$\begin{aligned}\int_0^x f(t)dt &\geq \left(\int_0^x (t^{\frac{1+p-r}{pp'}} f(t))^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^x (t^{-\frac{1+p-r}{pp'}})^{p'} dt\right)^{\frac{1}{p'}} \\ &= \left(\int_0^x t^{\frac{1+p-r}{p'}} f^p(t)dt\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^x t^{-\frac{1+p-r}{p}} dt\right)^{\frac{1}{p'}},\end{aligned}$$

en intégrant par rapport à t sur $(0, x]$, on trouve

$$\begin{aligned}\int_0^x t^{-\frac{1+p-r}{p}} dt &= \left[\frac{t^{-\frac{1+p-r}{p}+1}}{\frac{r-1}{p}}\right]_0^x \\ &= \left(\frac{p}{r-1}\right) x^{\frac{r-1}{p}},\end{aligned}$$

on déduit que

$$\int_0^x f(t)dt \geq \left(\frac{p}{r-1}\right)^{\frac{1}{p'}} x^{\frac{r-1}{pp'}} \left(\int_0^x t^{\frac{1+p-r}{p'}} f^p(t)dt\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Pour tout $p<0$, on a

$$\begin{aligned} F^p(x) &\leq \left(\frac{p}{r-1}\right)^{\frac{p}{p'}} x^{\frac{r-1}{p'}} \int_0^x t^{\frac{1+p-r}{p'}} f^p(t)dt \\ &= \left(\frac{p}{r-1}\right)^{p-1} x^{\frac{1-r}{p}+r-1} \int_0^x t^{\frac{1+p-r}{p'}} f^p(t)dt, \end{aligned}$$

on applique le Théorème de Fubuni, on trouve

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty g^{-r}(x)F^p(x)dx \\ &\leq \left(\frac{p}{r-1}\right)^{p-1} \int_0^\infty \int_0^x g^{-r}(x)x^{\frac{1-r}{p}+r-1} t^{\frac{1+p-r}{p'}} f^p(t)dtdx \\ &= \left(\frac{p}{r-1}\right)^{p-1} \int_0^\infty t^{\frac{1+p-r}{p'}} f^p(t) \left(\int_t^\infty g^{-r}(x)x^{\frac{1-r}{p}+r-1}dx\right) dt \\ &= \left(\frac{p}{r-1}\right)^{p-1} \int_0^\infty t^{\frac{1+p-r}{p'}} f^p(t) \left(\int_t^\infty g^{-r}(x)x^r x^{\frac{1-r}{p}-1}dx\right) dt \\ &= \left(\frac{p}{r-1}\right)^{p-1} \int_0^\infty t^{\frac{1+p-r}{p'}} f^p(t) \left(\int_t^\infty \left(\frac{x}{g(x)}\right)^r x^{\frac{1-r}{p}-1}dx\right) dt, \end{aligned}$$

puisque $\dfrac{x}{g(x)}$ est non-décroissante sur $[t,\infty)$, alors

$$\forall x \in [t,\infty), \qquad x \geq t \Rightarrow \frac{x}{g(x)} \geq \frac{t}{g(t)},$$

pour $r < 0$, on résulte

$$\left(\frac{x}{g(x)}\right)^r \leq \left(\frac{t}{g(t)}\right)^r,$$

ce qui donne

$$\int_0^\infty g^{-r}(x)F^p(x)dx$$

$$\leq \left(\frac{p}{r-1}\right)^{p-1} \int_0^\infty t^{\frac{1+p-r}{p'}} f^p(t) \left(\int_t^\infty \left(\frac{x}{g(x)}\right)^r x^{\frac{1-r}{p}-1}dx\right) dt$$

$$\leq \left(\frac{p}{r-1}\right)^{p-1} \int_0^\infty t^{\frac{1+p-r}{p'}} f^p(t) \left(\frac{t}{g(t)}\right)^r \left(\int_t^\infty x^{\frac{1-r}{p}-1}dx\right) dt,$$

vu que $\frac{1-r}{p} < 0$ et par l'intégration par rapport à x sur $[t, \infty)$, on trouve

$$\int_t^\infty x^{\frac{1-r}{p}-1}dx = \left[\frac{x^{\frac{1-r}{p}}}{\frac{1-r}{p}}\right]_t^\infty = \left(\frac{p}{r-1}\right) t^{\frac{1-r}{p}},$$

ensuite

$$\int_0^\infty g^{-r}(x)F^p(x)dx$$

$$\leq \left(\frac{p}{r-1}\right)^{p-1} \int_0^\infty t^{\frac{1+p-r}{p'}} f^p(t) \left(\frac{t}{g(t)}\right)^r \left(\frac{p}{r-1}\right) t^{\frac{1-r}{p}} dt$$

$$= \left(\frac{p}{r-1}\right)^p \int_0^\infty t^{\frac{1+p-r}{p'}+\frac{1-r}{p}} f^p(t) \left(\frac{t}{g(t)}\right)^r dt,$$

ce qui donne

$$\int_0^\infty g^{-r}(x)F^p(x)dx$$

$$\leq \left(\frac{p}{r-1}\right)^p \int_0^\infty t^{p-r} f^p(t) \left(\frac{t}{g(t)}\right)^r dt$$

$$= \left(\frac{p}{r-1}\right)^p \int_0^\infty g^{-r}(t)(tf(t))^p dt.$$

On obtient

$$\int_0^\infty g^{-r}(x)F^p(x)dx \leq \left(\frac{p}{r-1}\right)^p \int_0^\infty g^{-r}(x)(xf(x))^p dx. \qquad \diamond$$

2.2.2 Applications

Les trois Théorèmes ci-dessus ont de nombreuses applications, en particulier dans la théorie des fonctions de poids et en particulier le cas des fonctions de puissance sur $(0, \infty)$.

Corollaire 2.1. *Soient $f > 0$ une fonction positive mesurable sur $(0, \infty)$, $p < 0, r > 1, m \leq 1$ et $\tilde{F}(x) = \int_x^\infty f(t)dt$, alors*

$$\int_0^\infty x^{-mr}\tilde{F}^p(x)dx \leq \left(\frac{p}{1-r}\right)^p \int_0^\infty x^{-mr}(xf(x))^p dx \tag{2.7}$$

Démonstration : *Cela découle du Théorème 2.2 où $g(x) = x^m$.* $\diamond$

Remarque 2.1. *On peut obtenir les cas particuliers suivants*

I) Pour $m = 1$, on trouve

$$\int_0^\infty x^{-r}\left(\int_x^\infty f(t)dt\right)^p dx \leq \left(\frac{p}{1-r}\right)^p \int_0^\infty x^{-r}(xf(x))^p dx. \tag{2.8}$$

II) Pour $r = 2$, on a

$$\int_0^\infty x^{-2m}\left(\int_x^\infty f(t)dt\right)^p dx \leq (-p)^p \int_0^\infty x^{p-2m} f^p(x)dx. \quad (2.9)$$

III) Pour $r = 1-p$, on obtient

$$\int_0^\infty x^{-m(1-p)}\left(\int_x^\infty f(t)dt\right)^p dx \leq \int_0^\infty x^{m(p-1)+p} f^p(x)dx. \quad (2.10)$$

Remarque 2.2. *Si $m = 1$ alors le constant $\left(\dfrac{p}{1-r}\right)^p$ est le plus petit possible dans l'inégalité (2.7).*

Démonstration : Pour $0 < \theta < mr - 1$, on pose

$$f_\theta(x) = \begin{cases} x^{\frac{mr-1-\theta}{p}-1}, & x \in [1,\infty), \\ 0, & x \in (0,1). \end{cases}$$

En calculant le côté gauche de l'inégalité (2.7), on a

$$\begin{aligned} \int_0^\infty x^{-mr}\left(\int_x^\infty f_\theta(t)dt\right)^p dx &= \int_1^\infty x^{-mr}\left(\int_x^\infty t^{\frac{mr-1-\theta}{p}-1}dt\right)^p dx \\ &= \left(\frac{p}{1-mr+\theta}\right)^p \int_1^\infty x^{-\theta-1}dx \\ &= \left(\frac{p}{1-mr+\theta}\right)^p \frac{1}{\theta}, \end{aligned}$$

d'autre part, du côté droit de l'inégalité (2.7), on obtient

$$\int_0^\infty x^{-mr}\left(xf_\theta(x)\right)^p dx = \int_1^\infty x^{-\theta-1}dx = \frac{1}{\theta}.$$

On a $0 < mr - 1$, $r > 1$ alors $0 < m \leq 1$ et pour $\theta \longrightarrow 0$, si $1 - mr < 0$

donc le constant $\left(\dfrac{p}{1-mr}\right)^p$ est positive, on obtient $r > \dfrac{1}{m}$ d'où $m = 1$ et on a l'égalité

$$\int_0^\infty x^{-r}\left(\int_x^\infty f_\theta(t)dt\right)^p dx = \left(\frac{p}{1-r}\right)^p \int_0^\infty x^{-r}\left(xf_\theta(x)\right)^p dx.$$

On conclut que pour $m = 1$, le constant $\left(\dfrac{p}{1-r}\right)^p$ est le meilleur possible. $\diamond$

Remarque 2.3. *Si $m = 1$, le constant donc les inégalités (2.8), (2.9) et (2.10) est le meilleur possible.*

Corollaire 2.2. *Soient $f > 0$ une fonction positive mesurable sur $(0, \infty)$, $p < 0, r < 0, m \leq 1$ et $F(x) = \int_0^x f(t)dt$, alors*

$$\int_0^\infty x^{-mr}F^p(x)dx \leq \left(\frac{p}{r-1}\right)^p \int_0^\infty x^{-mr}(xf(x))^p dx, \tag{2.11}$$

Démonstration : *cela découle du Théorème 2.4 où $g(x) = x^m$.* $\diamond$

Remarque 2.4. *On peut obtenir les cas particuliers suivants à partir du Corollaire ci-dessus.*

I) Pour $r = p$, on a

$$\int_0^\infty x^{-mp}\left(\int_0^x f(t)dt\right)^p dx \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \int_0^\infty x^{p(1-m)}f^p(x)dx. \tag{2.12}$$

II) Pour $r = p+1$ et $p < -1$, on déduit que

$$\int_0^\infty x^{-mp-m}\left(\int_0^x f(t)dt\right)^p dx \leq \int_0^\infty x^{p(1-m)-m}f^p(x)dx. \tag{2.13}$$

Corollaire 2.3. *Soient $f > 0$ une fonction positive mesurable sur $(0, \infty)$, $p < 0, 0 \leq r < 1, m \geq 1$ et $F(x) = \int_0^x f(t)dt$, alors*

$$\int_0^\infty x^{-mr} F^p(x)dx \leq \left(\frac{p}{r-1}\right)^p \int_0^\infty x^{-mr}(xf(x))^p dx, \qquad (2.14)$$

Démonstration : *Cela découle du Théorème 2.3 pour $g(x) = x^m$.* ◇

Remarque 2.5. *On donne quelque cas particuliers de l'inégalité (2.14).*

I) Pour $r = 0$, on trouve

$$\int_0^\infty \left(\int_0^x f(t)dt\right)^p dx \leq (-p)^{\mathrm{p}} \int_0^\infty (xf(x))^p dx. \qquad (2.15)$$

II) Pour $r = \dfrac{1}{m}$ et $m \neq 1$, on a

$$\int_0^\infty x^{-1} \left(\int_0^x f(t)dt\right)^p dx \leq \left(\frac{mp}{1-m}\right)^p \int_0^\infty x^{p-1} f^p(x)dx. \qquad (2.16)$$

Remarque 2.6. *Si on prend $m = 1$ dans le Corollaire 2.2 et le Corollaire 2.3, on déduit que, pour tout $r < 1$*

$$\int_0^\infty x^{-r} \left(\int_0^x f(t)dt\right)^p dx \leq \left(\frac{p}{r-1}\right)^p \int_0^\infty x^{-r}(xf(x))^p dx, \qquad (2.17)$$

le constant $\left(\dfrac{p}{1-r}\right)^p$ est le plus petit possible.

Démonstration : Pour $0 < \theta < 1 - r$, on pose

$$f_\theta(x) = \begin{cases} x^{\frac{r-1+\theta}{\mathrm{p}}-1}, & x \in (0, 1], \\ 0, & x \in (1, \infty). \end{cases}$$

En calculant le côté gauche de l'inégalité (2.17),

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty x^{-r}\left(\int_0^x f_\theta(t)dt\right)^p dx &= \int_0^1 x^{-r}\left(\int_0^x t^{\frac{r-1+\theta}{p}-1}dt\right)^p dx \\
&= \left(\frac{p}{r-1+\theta}\right)^p \int_0^1 x^{\theta-1}dx \\
&= \left(\frac{p}{r-1+\theta}\right)^p \frac{1}{\theta}.
\end{aligned}$$

d'autre part, du côté droit de l'inégalité (2.17), on obtient

$$\int_0^\infty x^{-r}\left(xf_\theta(x)\right)^p dx = \int_0^1 x^{\theta-1}dx = \frac{1}{\theta}.$$

Pour $\theta \longrightarrow 0$, le constant $\left(\dfrac{p}{1-r}\right)^p$ est le meilleur possible. $\diamond$

Chapitre 3

Deuxième forme d'inégalité de type Hardy pour $p < 0$

Dans ce chapitre, on présente un détail d'une nouvelle forme sur les inégalités intégrales de type Hardy pour un paramétre négative. Cette partie est composée de deux Théorèmes principaux et des applications.

3.1 Introduction

En 2007, Bicheng Yang [21] a fait une généralisation directe d'inégalité de Hardy suivante à paramétre négatif.

Théorème 3.1. *Soient $p < 0$, $r \neq 0$ et $f > 0$ une fonction positive mesurable sur $(0, +\infty)$ telle que, $0 < \int_0^\infty t^{-r}(tf(t))^p dt < \infty$, et on définit*

$$\begin{cases} F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)dt \ , & r < 1, \\ \\ F(x) = \displaystyle\int_x^\infty f(t)dt \ , & r > 1. \end{cases}$$

Alors

$$\int_0^\infty x^{-r}F^p(x)dx \leq \left(\frac{-p}{|r-1|}\right)^p \int_0^\infty t^{-r}(tf(t))^p dt, \tag{3.1}$$

où le constant $\left(\frac{-p}{|r-1|}\right)^p$ *est le meilleur possible.*

D'autre part, en 2014, Banyat Sroysang [20] a fait une généralisation directe des inégalités de Hardy suivantes.

Théorème 3.2. *Soient* $0 < r < 1$, $p > 1$, $q > p - r(p-1)$, $f \geq 0$, $g > 0$ *deux fonctions mesurables sur* $(0, +\infty)$ *et* $F(x) = \int_0^x f(t)dt$. *Si la fonction* $\frac{x}{g(x)}$ *est non-croissante, alors*

$$\int_0^\infty \frac{F^p(x)}{g^q(x)}dx \leq \frac{1}{((r-1)(1-p)+q-1)(1-r)^{p-1}} \int_0^\infty \frac{(xf(x))^p}{g^q(x)}dx. \tag{3.2}$$

Théorème 3.3. *Soient* $r > 0$, $0 < p < 1$, $q > p + r(p-1)$, $f \geq 0$, $g > 0$ *deux fonctions mesurables sur* $(0, +\infty)$ *et* $F(x) = \int_0^x f(t)dt$. *Si* $\frac{x}{g(x)}$ *la fonction est non-décroissante, alors*

$$\int_0^\infty \frac{F^p(x)}{g^q(x)}dx \geq \frac{1}{((1+r)(1-p)+q-1)(1+r)^{p-1}} \int_0^\infty \frac{(xf(x))^p}{g^q(x)}dx. \tag{3.3}$$

Le but de cet article est de donner des nouvelles inégalités intégrales de type Hardy qui est une extension des inégalités citées dans les Théorèmes ci-dessus dans le cas d'un paramétre négative. La structure de cette étude prend la forme de deux sections avec une introduction. Dans la seconde section on donne les preuves des principaux résultats pour les paramètres négatifs $p, q < 0$, dans la troisième section on présent quelques applications aux Théorèmes précédents.

Le Corollaire suivant est utile dans les preuves des Théorèmes principaux.

Corollaire 3.1. *(Inégalités inverse de Hölder (1.7)).*
Soient $\varepsilon \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble mesurable, $p < 0$ et on suppose que u, v deux fonctions mesurables sur ε telle que $u \in L_p(\varepsilon)$, $v \in L_{p'}(\varepsilon)$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, alors

$$\int_c |u(x)v(x)|dx \geq \left(\int_\varepsilon |u(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_\varepsilon |v(x)|^{p'} dx\right)^{\frac{1}{p'}}. \tag{3.4}$$

3.2 Résultats principaux

Dans cette section, on est en présant d'un détail de la preuve de Théorème 3.4 et de Théorème 3.5.

Théorème 3.4. *Soient $r, p, q < 0$, $1 - (1-r)(1-p) - q < 0$, $f, g > 0$ deux fonctions positives mesurables sur $(0, +\infty)$ et*

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt.$$

Si la fonction $\frac{x}{g(x)}$ est non-décroissante sur $(0, +\infty)$, alors

$$\int_0^\infty \frac{F^p(x)}{g^q(x)}dx \leq \frac{1}{((1-r)(1-p)+q-1)(1-r)^{p-1}} \int_0^\infty \frac{(xf(x))^p}{g^q(x)}dx. \tag{3.5}$$

Démonstrasion : Pour tout $r, p, q < 0$ tel que $1-(1-r)(1-p)-q < 0$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, on a

$$f(t) = \left(t^{\frac{-r}{p'}}\right)\left(t^{\frac{r}{p'}} f(t)\right),$$

D'après l'inégalité inverse de Hölder (1.7), on trouve

$$\int_0^x f(t)dt \geq \left(\int_0^x (t^{\frac{-r}{p'}})^{p'} dt\right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_0^x (t^{\frac{r}{p'}} f(t))^p dt\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \left(\int_0^x t^{-r} dt\right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_0^x t^{\frac{rp}{p'}} f^p(t) dt\right)^{\frac{1}{p}},$$

pour tout $p < 0$, on conclut

$$F^p(x) \leq \left(\int_0^x t^{-r} dt\right)^{\frac{p}{p'}} \int_0^x t^{\frac{rp}{p'}} f^p(t) dt$$

$$= \left(\int_0^x t^{-r} dt\right)^{p-1} \int_0^x t^{r(p-1)} f^p(t) dt,$$

on intègre par rapport à t sur $(0, x]$, on obtient

$$\int_0^x t^{-r} dt = \left[\frac{t^{-r+1}}{-r+1}\right]_0^x = \left(\frac{1}{1-r}\right) x^{1-r},$$

on résulte

$$F^p(x) \leq \frac{1}{(1-r)^{p-1}} x^{(1-r)(p-1)} \int_0^x t^{r(p-1)} f^p(t) dt.$$

On applique le Théorème de Fubuni, on trouve

$$\int_0^\infty \frac{F^p(x)}{g^q(x)} dx$$

$$\leq \frac{1}{(1-r)^{p-1}} \int_0^\infty \int_0^x g^{-q}(x) x^{(1-r)(p-1)} t^{r(p-1)} f^p(t) dt dx$$

$$= \frac{1}{(1-r)^{p-1}} \int_0^\infty t^{r(p-1)} f^p(t) \left(\int_t^\infty g^{-q}(x) x^{(1-r)(p-1)} dx\right) dt,$$

donc

$$\int_0^\infty \frac{F^p(x)}{g^q(x)}dx$$

$$\leq \frac{1}{(1-r)^{p-1}} \int_0^\infty t^{r(p-1)} f^p(t) \left(\int_t^\infty x^{(1-r)(p-1)} x^q x^{-q} g(x)^{-q} dx \right) dt$$

$$= \frac{1}{(1-r)^{p-1}} \int_0^\infty t^{r(p-1)} f^p(t) \left(\int_t^\infty \left(\frac{x}{g(x)} \right)^q x^{(1-r)(p-1)-q} dx \right) dt,$$

puisque $\dfrac{x}{g(x)}$ est non-décroissante sur $[t, +\infty)$, on déduit

$$\forall x \in [t, \infty), \qquad x \geq t \Rightarrow \frac{x}{g(x)} \geq \frac{t}{g(t)},$$

et pour tout $q < 0$, on a

$$\left(\frac{x}{g(x)} \right)^q \leq \left(\frac{t}{g(t)} \right)^q,$$

ce qui donne

$$\int_0^\infty \frac{F^p(x)}{g^q(x)}dx$$

$$\leq \frac{1}{(1-r)^{p-1}} \int_0^\infty t^{r(p-1)} f^p(t) \left(\int_t^\infty \left(\frac{x}{g(x)} \right)^q x^{(1-r)(p-1)-q} dx \right) dt$$

$$\leq \frac{1}{(1-r)^{p-1}} \int_0^\infty t^{r(p-1)} f^p(t) \left(\frac{t}{g(t)} \right)^q \left(\int_t^\infty x^{(1-r)(p-1)-q} dx \right) dt.$$

Selon l'hypothèse $(1-r)(p-1) - q + 1 < 0$, En intégrant par rapport à x sur $[t, \infty)$, on a

$$\begin{aligned}\int_t^{\infty} x^{(1-r)(p-1)-q}dx &= \left[\frac{x^{(1-r)(p-1)-q+1}}{(1-r)(p-1)-q+1}\right]_t^{\infty}\\ &= \left(\frac{1}{(1-r)(1-p)+q-1}\right)t^{(r-1)(1-p)-q+1},\end{aligned}$$

vu que $r(p-1)+(r-1)(1-p)+1=p$, on résulte que

$$\int_0^{\infty}\frac{F^p(x)}{g^q(x)}dx \leq \frac{1}{((1-r)(1-p)+q-1)(1-r)^{p-1}}\int_0^{\infty}\frac{t^p f^P(t)}{g^q(t)}dt. \qquad \diamond$$

Théorème 3.5. *Soient* $p,q<0, r>1$, $f,g>0$ *deux fonctions positives mesurables sur* $(0,+\infty)$ *et*

$$\tilde{F}(x)=\int_x^{\infty} f(t)dt.$$

Si la fonction $\dfrac{x}{g(x)}$ *est non-croissante sur* $(0,+\infty)$, *alors*

$$\int_0^{\infty}\frac{\tilde{F}^p(x)}{g^q(x)}dx \leq \frac{1}{((r-1)(1-p)-q+1)(r-1)^{p-1}}\int_0^{\infty}\frac{(xf(x))^p}{g^q(x)}dx. \tag{3.6}$$

Démonstrasion : Pour tout $p,q<0$ et $r>1$, on a

$$f(t)=\left(t^{\frac{-r}{p'}}\right)\left(t^{\frac{r}{p'}}f(t)\right),$$

appliquant l'inégalité inverse de Hölder , on trouve

$$\int_x^\infty f(t)dt \geq \left(\int_x^\infty (t^{\frac{-r}{p'}})^{p'}dt\right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_x^\infty (t^{\frac{r}{p'}}f(t))^p dt\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \left(\int_x^\infty t^{-r}dt\right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_x^\infty t^{\frac{rp}{p'}}f^p(t)dt\right)^{\frac{1}{p}},$$

pour tout $p < 0$, on a

$$\tilde{F}^p(x) \leq \left(\int_x^\infty t^{-r}dt\right)^{\frac{p}{p'}} \int_x^\infty t^{\frac{rp}{p'}}f^p(t)dt$$

$$= \left(\int_x^\infty t^{-r}dt\right)^{p-1} \int_x^\infty t^{r(p-1)}f^p(t)dt,$$

par l'intégration par rapport à t sur $[x, +\infty)$, on déduit que

$$\int_x^\infty t^{-r}dt = \left[\frac{t^{-r+1}}{-r+1}\right]_x^\infty = \frac{1}{r-1}x^{1-r},$$

donc

$$\tilde{F}^p(x) \leq \frac{1}{(r-1)^{p-1}}x^{(r-1)(1-p)} \int_x^\infty t^{r(p-1)}f^p(t)dt.$$

Par conséquent, on applique le Théorème de Fubuni, on résulte que

$$\int_0^\infty \frac{\tilde{F}^p(x)}{g^q(x)}dx$$

$$\leq \frac{1}{(r-1)^{p-1}} \int_0^\infty \int_x^\infty g^{-q}(x)x^{(r-1)(1-p)}t^{r(p-1)}f^p(t)dtdx$$

$$= \frac{1}{(r-1)^{p-1}} \int_0^\infty t^{r(p-1)}f^p(t) \left(\int_0^t g^{-q}(x)x^{(r-1)(1-p)}dx\right) dt,$$

alors

$$\int_0^\infty \frac{\tilde{F}^p(x)}{g^q(x)}dx$$

$$\leq \frac{1}{(r-1)^{p-1}} \int_0^\infty t^{r(p-1)} f^p(t) \left(\int_0^t x^{(r-1)(1-p)} x^q x^{-q} g(x)^{-q} dx \right) dt$$

$$= \frac{1}{(r-1)^{p-1}} \int_0^\infty t^{r(p-1)} f^p(t) \left(\int_0^t \left(\frac{x}{g(x)} \right)^q x^{(r-1)(1-p)-q} dx \right) dt,$$

puisque $\dfrac{x}{g(x)}$ est non-croissante sur $(0, t]$, alors

$$\forall x \in (0, t], \qquad x \leq t \Rightarrow \frac{x}{g(x)} \geq \frac{t}{g(t)},$$

pour $q < 0$, on conclut

$$\left(\frac{x}{g(x)} \right)^q \leq \left(\frac{t}{g(t)} \right)^q,$$

donc

$$\int_0^\infty \frac{\tilde{F}^p(x)}{g^q(x)}dx$$

$$\leq \frac{1}{(r-1)^{p-1}} \int_0^\infty t^{r(p-1)} f^p(t) \left(\int_0^t \left(\frac{x}{g(x)} \right)^q x^{(r-1)(1-p)-q} dx \right) dt$$

$$\leq \frac{1}{(r-1)^{p-1}} \int_0^\infty t^{r(p-1)} f^p(t) \left(\frac{t}{g(t)} \right)^q \left(\int_0^t x^{(r-1)(1-p)-q} dx \right) dt.$$

On intègre par rapport à x sur $(0, t]$

$$\int_0^t x^{(r-1)(1-p)-q}dx = \left[\frac{x^{(r-1)(1-p)-q+1}}{(r-1)(1-p)-q+1}\right]_0^t$$

$$= \left(\frac{1}{(r-1)(1-p)-q+1}\right) t^{(r-1)(1-p)-q+1},$$

sachant que $r(p-1)+(r-1)(1-p)+1 = p$, on résulte

$$\int_0^\infty \frac{\tilde{F}^p(x)}{g^q(x)}dx \leq \frac{1}{((r-1)(1-p)-q+1)(r-1)^{p-1}} \int_0^\infty \frac{t^p f^p(t)}{g^q(t)}dt. \qquad \diamond$$

3.3 Applications

Prenant $q = p$ dans le Théorème 3.4, on obtient le Corollaire suivant.

Corollaire 3.2. *soient $r < 0, p < 0$, $f, g > 0$ deux fonctions positives mesurables et*

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt.$$

Si la fonction $\dfrac{x}{g(x)}$ est non-décroissante, alors

$$\int_0^\infty \left(\frac{F(x)}{g(x)}\right)^p dx \leq \frac{1}{r(p-1)(1-r)^{p-1}} \int_0^\infty \left(\frac{xf(x)}{g(x)}\right)^p dx. \qquad (3.7)$$

On présente des cas particuliers de l'inégalité (3.7) selon la fonction g.

I) Pour $g(x) = x^m, m < 1$, on résulte que

$$\int_0^\infty \left(\frac{F(x)}{x^m}\right)^p dx \leq \frac{1}{r(p-1)(1-r)^{p-1}} \int_0^\infty \left(\frac{f(x)}{x^{m-1}}\right)^p dx. \qquad (3.8)$$

II) Pour $g(x) = x$, on trouve

$$\int_0^\infty \left(\frac{F(x)}{x}\right)^p dx \leq \frac{1}{r(p-1)(1-r)^{p-1}} \int_0^\infty f^p(x)dx. \tag{3.9}$$

Soit $\mathbb{H}(f)$ l'opérateur de Hardy définit par

$$\mathbb{H}f(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt.$$

Remarque 3.1. *On pose $m = 0$ et $r = \frac{1}{p}$ dans l'inégalité(3.8), on obtient*

$$\int_0^\infty (x\mathbb{H}f(x))^p dx \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \int_0^\infty (xf(x))^p dx. \tag{3.10}$$

Posant $r = \frac{1}{p}$ dans l'inégalité (3.9), on obtient

$$\int_0^\infty (\mathbb{H}f(x))^p dx \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \int_0^\infty f^p(x)dx. \tag{3.11}$$

Remarque 3.2. *Si on prend $r = \frac{1}{p}$ et $m = 1 + \frac{1}{p}$ dans l'inégalité (3.8), on obtient*

$$\int_0^\infty x^{-1}(\mathbb{H}f(x))^p dx \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \int_0^\infty x^{-1}f^p(x)dx. \tag{3.12}$$

Mettant $q = p$ dans le Théorème 3.5, on obtient le Corollaire suivant.

Corollaire 3.3. *Soient $p < 0, r > 1$, $f, g > 0$ deux fonctions positives mesurables, et*

$$\tilde{F}(x) = \int_x^\infty f(t)dt.$$

Si la fonction $\dfrac{x}{g(x)}$ *est non-croissante, donc*

$$\int_0^\infty \left(\frac{\tilde{F}(x)}{g(x)}\right)^p dx \leq \frac{1}{r(1-p)(r-1)^{p-1}} \int_0^\infty \left(\frac{xf(x)}{g(x)}\right)^p dx. \tag{3.13}$$

On présente des cas particuliers de l'inégalité (3.13) selon la fonction g.

I) Mettant $g(x) = x^r$, on a

$$\int_0^\infty \left(x^{-r}\tilde{F}(x)\right)^p dx \leq \frac{1}{r(1-p)(r-1)^{p-1}} \int_0^\infty \left(x^{1-r}f(x)\right)^p dx. \tag{3.14}$$

I) Posant $g(x) = x$, on obtient

$$\int_0^\infty \left(\frac{\tilde{F}(x)}{x}\right)^p dx \leq \frac{1}{r(1-p)(r-1)^{p-1}} \int_0^\infty f^p(x)dx. \tag{3.15}$$

Soit $\tilde{\mathbb{H}}(f)$ le dual d'opérateur de Hardy définit par

$$\tilde{\mathbb{H}}f(x) = \frac{1}{x}\int_x^\infty f(t)dt.$$

Remarque 3.3. *Posant* $r = 2$ *dans l'inégalité (3.14) et l'inégalité (3.15), on déduit que*

$$\int_0^\infty \left(x^{-1}\tilde{\mathbb{H}}f(x)\right)^p dx \leq \frac{1}{2(1-p)} \int_0^\infty \left(x^{-1}f(x)\right)^p dx, \tag{3.16}$$

$$\int_0^\infty \left(\tilde{\mathbb{H}}f(x)\right)^p dx \leq \frac{1}{2(1-p)} \int_0^\infty f^p(x)dx. \tag{3.17}$$

Remarque 3.4. *Prenant* $r = 1 - \dfrac{1}{p}$ *dans l'inégalité (3.14) et l'inégalité (3.15), on déduit que*

$$\int_0^\infty x\left(\tilde{\mathbb{H}}f(x)\right)^p dx \leq \frac{1}{(1-p)^2(-p)^{-p}} \int_0^\infty xf^p(x)dx, \tag{3.18}$$

$$\int_0^\infty \left(\tilde{\mathbb{H}}f(x)\right)^p dx \leq \frac{1}{(1-p)^2(-p)^{-p}} \int_0^\infty f^p(x)dx. \tag{3.19}$$

Remarque 3.5. *Pour $p<0$, on a*

$$\left(1+\frac{p}{p-1}\right)(1-p)\left(\frac{p}{p-1}\right)^{p-1} \geq \frac{p}{p-1}(1-p)\left(\frac{p}{p-1}\right)^{p-1},$$

d'où

$$\left(1+\frac{p}{p-1}\right)(1-p)\left(\frac{p}{p-1}\right)^{p-1} \geq (1-p)\left(\frac{p}{p-1}\right)^{p},$$

d'autre part

$$1-p \geq 1 \Rightarrow (1-p)\left(\frac{p}{p-1}\right)^{p} \geq \left(\frac{p}{p-1}\right)^{p},$$

par conséquent

$$\left(1+\frac{p}{p-1}\right)(1-p)\left(\frac{p}{p-1}\right)^{p-1} \geq (1-p)\left(\frac{p}{p-1}\right)^{p} \geq \left(\frac{p}{p-1}\right)^{p}. \tag{3.20}$$

Si on prend $r = 1+\dfrac{p}{p-1}$ dans l'inégalité (3.14) et l'inégalité (3.15) et suivant la formule (3.20), on obtient

$$\int_0^\infty x^{\frac{p^2}{1-p}} \left(\tilde{\mathbb{H}}f(x)\right)^p dx \leq \left(\frac{p-1}{p}\right)^p \int_0^\infty x^{\frac{p^2}{1-p}} f^p(x)dx, \tag{3.21}$$

$$\int_0^\infty \left(\tilde{\mathbb{H}}f(x)\right)^p dx \leq \left(\frac{p-1}{p}\right)^p \int_0^\infty f^p(x)dx. \tag{3.22}$$

Chapitre 4

Sur certaines inégalités intégrales de type Copson

4.1 Introduction

En 1976, E.T. Copson [8] a prouvé l'inégalité (4.1),voir [Théorème 1, Théorème 2] et l'inégalité (4.2), voir [Théorème 3, Théorème 4].
Soient f, ϕ deux fonctions non-négatives mesurables sur $(0, +\infty)$, telle que

$$\Phi(x) = \int_0^x \phi(t)dt \quad et \quad F(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^x f(t)\phi(t)dt, & \text{pour} \quad c > 1, \\ \\ \displaystyle\int_x^\infty f(t)\phi(t)dt, & \text{pour} \quad c < 1, \end{cases}$$

alors, pour $p \geq 1$

$$\int_0^b F^p(x)\Phi^{-c}(x)\phi(x)dx \leq \left(\frac{p}{|c-1|}\right)^p \int_0^b f^p(x)\Phi^{p-c}(x)\phi(x)dx, \quad (4.1)$$

pour $0 < p < 1$

$$\int_0^b F^p(x)\Phi^{-c}(x)\phi(x)dx \geq \left(\frac{p}{|c-1|}\right)^p \int_0^b f^p(x)\Phi^{p-c}(x)\phi(x)dx. \quad (4.2)$$

Où ϕ est une fonction de poids (mesurable et positive sur $(0, +\infty)$).
Les inégalités (4.1) et (4.2) peuvent être récrites suivant le changement $c = p - \alpha$ sous les formes suivantes :

$$F(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^x f(t)\phi(t)dt, & \text{pour} \quad \alpha < p-1, \\ \\ \displaystyle\int_x^\infty f(t)\phi(t)dt, & \text{pour} \quad \alpha > p-1, \end{cases}$$

pour $p \geq 1$

$$\int_0^b F^p(x)\Phi^{\alpha-p}(x)\phi(x)dx \leq \left(\frac{p}{|p-1-\alpha|}\right)^p \int_0^b f^p(x)\Phi^\alpha(x)\phi(x)dx, \tag{4.3}$$

pour $0 < p < 1$

$$\int_0^b F^p(x)\Phi^{\alpha-p}(x)\phi(x)dx \geq \left(\frac{p}{|p-1-\alpha|}\right)^p \int_0^b f^p(x)\Phi^\alpha(x)\phi(x)dx. \tag{4.4}$$

Les inégalités de type Copson ont été étudiées par de nombreux auteurs au cours du 20^{eme} siècle et a motivé des études importantes qui sont actuellement actives. L'inégalité inverse de Hölder (1.7) ci-dessous est fréquemment utilisée dans la preuve.
Soient $\Omega \subset \mathbb{R}$ un ensemble mesurable non vide, $p < 0$ et f, g deux fonctions mesurables sur Ω. si $f \in L_p(\Omega)$ et $g \in L_{p'}(\Omega)$ et $\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1\right)$, alors

$$\int_\Omega |f.g|dt \geq \|f\|_{L_p}\|g\|_{L_{p'}}. \tag{4.5}$$

Le but de cet article est d'obtenir de nouvelles inégalités intégrales de type Copson. Ces inégalités sont utiles dans des applications où en utilisant des méthodes d'analyse de base avec un paramètre négatif $p < 0$. En adoptant la convention habituelle $\frac{0}{0} = 0$.

4.2 Résultats principaux

Tout au long de l'article, on suppose que $0 < b \leq +\infty$, les fonctions sont mesurables non-négatives et les intégrales sont supposées exister et finie (c'est-à-dire convergentes).

Lemme 4.1. *Soient $p < 0, c < 1$ et $f, \phi > 0$ deux fonctions non-négatives mesurables sur $(0, +\infty)$,on définit*

$$\Phi(x) = \int_0^x \phi(t)dt \quad et \quad F(x) = \int_0^x f(t)\phi(t)dt,$$

alors l'inégalité

$$\int_0^b F^p(x)\Phi^{-c}(x)\phi(x)dx \leq \left(\frac{p}{c-1}\right)^p \int_0^b f^p(x)\Phi^{p-c}(x)\phi(x)dx. \quad (4.6)$$

est vérifiée si le membre de droit est fini.

Démonstration : Pour tout $p < 0$ et $c < 1$ tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, on pose

$$V(x) = F^p(x)\Phi^{1-c}(x),$$

en dérivant d'après la formule (1.1), on obtient

$$\frac{dV}{dx}(x) = pF^{p-1}(x)f(x)\phi(x)\Phi^{1-c}(x) + (1-c)F^p(x)\Phi^{-c}(x)\phi(x),$$

d'où

$$(1-c)F^p(x)\Phi^{-c}(x)\phi(x) = -pF^{p-1}(x)f(x)\phi(x)\Phi^{1-c}(x) + \frac{dV}{dx}(x), \quad (4.7)$$

en intégrant les deux côtés de (4.7) par rapport à x sur $(0,b)$, on résulte

$$(1-c)\int_0^b F^p(x)\Phi^{-c}(x)\phi(x)dx$$

$$= -p\int_0^b F^{p-1}(x)f(x)\Phi^{1-c}(x)\phi(x)dx + \int_0^b \frac{dV}{dx}(x)dx,$$

ce qui donne

$$\begin{aligned}&(1-c)\int_0^b F^p(x)\Phi^{-c}(x)\phi(x)dx\\ &= -p\int_0^b F^{p-1}(x)f(x)\Phi^{1-c}(x)\phi(x)dx + F^p(b)\Phi^{1-c}(b).\end{aligned} \tag{4.8}$$

Puisque f et ϕ sont deux fonctions non-négatives mesurables sur $(0,b)$, on a

$$\int_0^b \phi(t)dt \geq 0 \qquad \text{et} \qquad \int_0^b f(t)\phi(t)dt \geq 0,$$

ce qui donne

$$\Phi^{1-c}(b) \geq 0 \qquad \text{et} \qquad F^p(b) \geq 0 \Rightarrow F^p(b)\Phi^{1-c}(b) \geq 0,$$

d'après l'égalité (4.8), on conclut

$$(1-c)\int_0^b F^p(x)\Phi^{-c}(x)\phi(x)dx \geq -p\int_0^b F^{p-1}(x)f(x)\Phi^{1-c}(x)\phi(x)dx.$$

d'après l'inégalité inverse de Hölder(1.7) et vu que $p^{'}(p-1)=p$, on trouve

$$\int_0^b F^p(x)\Phi^{-c}(x)\phi(x)dx$$

$$\geq \frac{p}{c-1}\int_0^b F^{p-1}(x)f(x)\Phi^{1-c}(x)\phi(x)dx$$

$$= \frac{p}{c-1}\int_0^b \left(f(x)\Phi^{\frac{p-c}{p}}(x)\phi^{\frac{1}{p}}(x)\right)\left(F^{p-1}(x)\Phi^{\frac{-c}{p'}}(x)\phi^{\frac{1}{p'}}(x)\right)dx$$

$$\geq \frac{p}{c-1}\left(\int_0^b f^p(x)\Phi^{p-c}(x)\phi(x)dx\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^b F^p(x)\Phi^{-c}(x)\phi(x)dx\right)^{\frac{1}{p'}},$$

par conséquent

$$\left(\int_0^b F^p(x)\Phi^{-c}(x)\phi(x)dx\right)^{\frac{1}{p}} \geq \frac{p}{c-1}\left(\int_0^b f^p(x)\Phi^{p-c}(x)\phi dx\right)^{\frac{1}{p}},$$

étant donné $p<0$, on obtient

$$\int_0^b F^p(x)\Phi^{-c}(x)\phi(x)dx \leq \left(\frac{p}{c-1}\right)^p\int_0^b f^p(x)\Phi^{p-c}(x)\phi(x)dx. \qquad \diamond$$

Remarque 4.1. *Le constant* $\left(\frac{p}{c-1}\right)^p$ *est le plus petit possible.*

Démonstration : Posant $\phi(x)=1$, $0<\theta<1-c$ et

$$f_\theta(x) = \begin{cases} x^{\frac{c-1+\theta}{p}-1}, & x\in(0,1], \\ 0, & x\in(1,b), \end{cases}$$

en utilisant l'hypothèse sur f_θ dans L_1 le membre gauche de l'inégalité (4.6), on obtient

$$\begin{aligned}
L_1 &= \int_0^b x^{-c}\left(\int_0^x f_\theta(t)dt\right)^p dx \\
&= \int_0^1 x^{-c}\left(\int_0^x t^{\frac{c-1+\theta}{p}-1}dt\right)^p dx \\
&= \left(\frac{p}{c-1+\theta}\right)^p \int_0^1 x^{\theta-1}dx \\
&= \left(\frac{p}{c-1+\theta}\right)^p \frac{1}{\theta}.
\end{aligned}$$

Par contre, en notant R_1 le côté droit de l'inégalité (4.6), on a

$$\begin{aligned}
R_1 &= \left(\frac{p}{c-1}\right)^p \int_0^b x^{-c}\left(xf_\theta(x)\right)^p dx \\
&= \left(\frac{p}{c-1}\right)^p \int_0^1 x^{\theta-1}dx \\
&= \left(\frac{p}{c-1}\right)^p \frac{1}{\theta}.
\end{aligned}$$

Multipliant par θ, ensuite pour $\theta \longrightarrow 0$, on obtient égalité dans l'inégalité (4.6), donc le constant est le meilleur (le plus petit) possible. $\diamond$

Maintenant, on donne quelques cas particuliers du lemme 4.1 précédent.

Corollaire 4.1. *I) Posant $c = p$, on trouve*

$$\int_0^b F^p(x)\varPhi^{-p}(x)\phi(x)dx \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \int_0^b f^p(x)\phi(x)dx. \qquad (4.9)$$

II) Mettant $c = 0$*, on obtient*

$$\int_0^b F^p \phi(x)dx \leq (-p)^p \int_0^b f^p(x)\Phi^p(x)\phi(x)dx. \tag{4.10}$$

Lemme 4.2. *Soient* $p < 0$*,* $c > 1$ *et* $f, \phi > 0$ *deux fonctions mesurables non-négatives sur* $(0, +\infty)$*. Posant*

$$\Phi(x) = \int_0^x \phi(t)dt \qquad , \qquad \tilde{F}(x) = \int_x^\infty f(t)\phi(t)dt,$$

alors l'inégalité

$$\int_0^b \tilde{F}^p(x)\Phi^{-c}(x)\phi(x)dx \leq \left(\frac{p}{1-c}\right)^p \int_0^b f^p(x)\Phi^{p-c}(x)\phi(x)dx, \tag{4.11}$$

est vérifié si le côté droit est fini.

Démonstration : On pose

$$U(x) = \tilde{F}^p(x)\Phi^{1-c}(x)$$

d'aprés la formule (1.2), on trouve

$$\frac{dU}{dx} = -p\tilde{F}^{p-1}(x)f(x)\phi(x)\Phi^{1-c}(x) + (1-c)\tilde{F}^p(x)\Phi^{-c}(x)\phi(x),$$

vu que

$$U(b) - U(0^+) < 0$$

alors

$$(1-c)\int_0^b \tilde{F}^p(x)\Phi^{-c}(x)\phi(x)dx$$

$$= p\int_0^b \tilde{F}^{p-1}(x)f(x)\Phi^{1-c}(x)\phi(x)dx + U(b) - U(0^+)$$

$$\leq p\int_0^b \tilde{F}^{p-1}(x)f(x)\Phi^{1-c}(x)\phi(x)dx,$$

en appliquant l'inégalité inverse de Hölder, on obtient

$$\int_0^b \tilde{F}^p(x)\Phi^{-c}(x)\phi(x)dx$$

$$\geq \frac{p}{1-c}\int_0^b \tilde{F}^{p-1}(x)f(x)\Phi^{1-c}(x)\phi(x)dx$$

$$= \frac{p}{1-c}\int_0^b \left(f(x)\Phi^{\frac{p-c}{p}}(x)\phi(x)^{\frac{1}{p}}\right)\left(\tilde{F}^{p-1}(x)\Phi^{\frac{-c}{p'}}(x)\phi^{\frac{1}{p'}}(x)\right)dx$$

$$\geq \frac{p}{1-c}\left(\int_0^b f^p(x)\Phi^{p-c}(x)\phi(x)dx\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^b \tilde{F}^p(x)\Phi^{-c}(x)\phi(x)dx\right)^{\frac{1}{p'}},$$

on déduit que

$$\left(\int_0^b \tilde{F}^p(x)\Phi^{-c}(x)\phi(x)dx\right)^{\frac{1}{p}} \geq \frac{p}{1-c}\left(\int_0^b f^p(x)\Phi^{p-c}(x)\phi(x)dx\right)^{\frac{1}{p}},$$

pour $p<0$, on conclut l'inégalité

$$\int_0^b \tilde{F}^p(x)\Phi^{-c}(x)\phi(x)dx \leq \left(\frac{p}{1-c}\right)^p \int_0^b f^p(x)\Phi^{p-c}(x)\phi(x)dx. \quad \diamond$$

Remarque 4.2. *Le constant* $\left(\frac{p}{1-c}\right)^p$ *est le plus petit possible.*
Démonstration :
Pour $\phi(x) = 1$ *et* $0 < \theta < c-1$, *on pose*

$$f_\theta(x) = \begin{cases} x^{\frac{c-1-\theta}{p}-1}, & x \in [1,b), \\ 0, & x \in [0,1), \end{cases}$$

d'après L_2 le côté gauche de l'inégalité (4.11), on a

$$\begin{aligned} L_2 &= \int_0^b x^{-c}\left(\int_x^\infty f_\theta(t)dt\right)^p dx \\ &= \int_0^b x^{-c}\left(\int_x^\infty t^{\frac{c-1-\theta}{p}-1}dt\right)^p dx, \end{aligned}$$

en intégrant et vu que $\dfrac{c-1-\theta}{p} < 0$, on obtient

$$\int_x^\infty t^{\frac{c-1-\theta}{p}-1}dt = \left[\frac{t^{\frac{c-1-\theta}{p}}}{\frac{c-1-\theta}{p}}\right]_x^\infty = \frac{p}{1-c+\theta}x^{\frac{c-1-\theta}{p}},$$

ensuite

$$L_2 = \left(\frac{p}{1-c+\theta}\right)^p \int_1^b x^{-\theta-1}dx.$$

D'autre part, on met R_2 l'intégrale du côté droit de l'inégalité (4.11), on trouve

$$\begin{aligned} R_2 &= \int_0^b x^{-c}\,(xf_\theta(x))^p\,dx \\ &= \int_1^b x^{-c}\left(x^{c-\theta-1}\right)dx \\ &= \int_1^b x^{-\theta-1}dx, \end{aligned}$$

pour $\theta \to 0$, on obtient l'égalité dans l'expression (4.11), donc le constant $\left(\dfrac{p}{1-c}\right)^p$ est le plus petit possible. $\diamond$

Théorème 4.1. *Soient $p < 0$ et f , $\phi > 0$ deux fonctions mesurables non-négatives sur $(0,+\infty)$. On définit*

$$\varPhi(x) = \int_0^x \phi(t)dt \quad et \quad F(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^x f(t)\phi(t)dt, & pour\ c < 1, \\ \displaystyle\int_x^\infty f(t)\phi(t)dt, & pour\ c > 1, \end{cases}$$

alors l'inégalité

$$\int_0^b F^p(x)\varPhi^{-c}(x)\phi(x)dx \le \left(\frac{p}{|c-1|}\right)^p \int_0^b f^p(x)\varPhi^{p-c}(x)\phi(x)dx. \quad (4.12)$$

est vérifié si le côté droit est fini.

Démonstration : En utilisant les inégalités (4.6) et (4.11), on obtient l'inégalité (4.12). $\diamond$

Si on pose le changement $c = p-\alpha$ dans le Théorème précédent, on obtient la version suivante.

Théorème 4.2. *Soient $p < 0$ et $f, \phi > 0$ deux fonctions mesurables non-*

négatives sur $(0, +\infty)$*. Posant*

$$\Phi(x) = \int_0^x \phi(t)dt \quad et, \quad F(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^x f(t)\phi(t)dt, & pour \quad \alpha > p-1, \\ \\ \displaystyle\int_x^\infty f(t)\phi(t)dt, & pour \quad \alpha < p-1, \end{cases}$$

alors

$$\int_0^b F^p(x)\Phi^{\alpha-p}(x)\phi(x)dx \le \left(\frac{p}{|p-1-\alpha|}\right)^p \int_0^b f^p(x)\Phi^\alpha(x)\phi(x)dx. \tag{4.13}$$

Documentation

Edward Thomas Copson

Edward Thomas Copson est né le 21 août 1901 à Coventry, étant le fils aîné de Thomas Charles Copson, ingénieur automobile et inventeur talentueux, et Emily Copson (née Lire). Il a fait ses études à la King Henry VIII School de Coventry, où il a obtenu une bourse d'entrée. En 1919, il fut admis à St John's College, Oxford, en tant que boursier Sir Thomas White. Au cours de sa carrière de premier cycle il a été grandement influencé par le professeur A. E. H. Love (qui a occupé la chaire Sedleian de philosophie naturelle) et le professeur G. H. Hardy (qui devint professeur savilien de Géométrie en 1919). Il a obtenu les honneurs de première classe en modérations mathématiques en 1920 et à la Final School of Mathematics en 1922, obtenant un B.A. tout en restant dans sa 21e année.
Les titres des articles publiés par Copson révèlent l'influence de G. H. Hardy et E. H. Love que ses intérêts allaient de l'analyse classique aux problèmes de physique théorique aux équations différentielles et intégrales. Pour son travail dans ces domaines, il a été élu membre de la Royal Society of Edinburgh en 1924 et a reçu le prix Keith de la société en 1941. Il a également siégé pendant plusieurs années au conseil de la société, en tant que secrétaire des réunions régulières de 1945 à 50 et vice-président de 1950 à 1953.

Godfrey Harold Hardy

Godfrey Harold Hardy (7 février 1877 - 1er décembre 1947, mathématicien britannique), connu pour ses réalisations en théorie des nombres et en analyse mathématique. En biologie, il est connu pour le principe de Hardy-Weinberg, un principe de base de la génétique des populations. G. H. Hardy est généralement connu de ceux qui ne sont pas dans le domaine des mathématiques pour son essai de 1940 A Mathematician's Apology , souvent considéré comme l'un des meilleurs aperçus de l'esprit d'un mathématicien en activité écrit pour le profane. À partir de 1914, Hardy était le mentor du mathématicien indien Srinivasa Ramanujan, une relation devenue célèbre, il a presque immédiatement reconnu l'éclat extraordinaire quoique sans instruction de Ramanujan. L'inégalité de Hardy a été publiée et prouvée pour la premiére fois (du moins la version discréte avec une constante moins précise) en 1920 dans une note de Hardy, la formulation originale était sous une forme intégrale légèrement différente de la précédente.

Otto Hölder

Otto Ludwig Hölder (22 décembre 1859 - 29 août 1937) était un mathématicien allemand né à Stuttgart. Hölder a d'abord étudié au Polytechnikum (qui est aujourd'hui l'Université de Stuttgart) puis, en 1877, il est allé à Berlin où il a été l'élève de Leopold Kronecker, Karl Weierstrass et Ernst Kummer. En analyse mathématique, l'inégalité de Hölder est une inégalité fondamentale dans le calcul en analyse fonctionnelle et un outil indispensable pour l'étude des espaces L^p. L'inégalité inverse de Hölder a été explorée par un certain nombre de scientifiques à travers des articles récents.

Hermann Minkowski

HErmann Minkowski est un mathématicien et physicien germano-russe d'origine juive. Il est né le 22 juin 1864 et mort le 18 janvier 1909. Il a travaillé comme professeur de mathématiques à Königsberg, Zurich et Göttingen. Il a développé la géométrie des nombres et utilisé des méthodes géométriques pour résoudre des problèmes de théorie des nombres, de physique mathématique et de théorie de la relativité. Il est considéré comme l'un des fondateurs de la science de la géométrie convexe. En mathématiques, l'inégalité de Minkowski est l'inégalité triangulaire pour la norme des espaces L^p pour $p > 0$, établissant ainsi que ce sont des espaces vectoriels normés. Elle concerne également la norme des espaces de suites l^p.

Bibliographie

[1] B. Benaissa, *On the Reverse Minkowski's Integral Inequality,* Kragujevac. J. Math. Vol.46 (3) (2022), 407–416.

[2] B. Benaissa, H. Budak, *On Hardy-Type Integral Inequalities with Negative Parameter,* Turkish Journal of Inequalities, 5(2) (2021), 42-47.

[3] B. Benaissa, M.Z. Sarikaya, *Generalization Of Some Hardy-Type Integral Inequality With Negative Parameter,* Bull. Transilv. Univ. Braÿsov Ser. III, 13(62), No. 1 (2020), 69-–76. https ://doi.org/10.31926/but.mif.2020.13.62.1.6

[4] B. Benaissa, *On some Copson-type Integral Inequality ,* Korean J. Math. 29 (2021), No. 3, pp. 467–472 http ://dx.doi.org/10.11568/kjm.2021.29.3.467

[5] B. Benaissa, *Methodes Mathématiques Pour La Physique,* Univ. Tiaret, Faculte. S.M

[6] E. T. Copson, *Note on Series of Positive Terms.*Journal London Math. Soc. . 2 (1927), 9-–12, https ://doi.org/10.1112/jlms/s1-2.1.9

[7] E. T. Copson, *Note on Series of Positive Terms.*Journal London Math. Soc. 3 (1928), 49–51. https ://doi.org/10.1112/jlms/s1-3.1.49

[8] E. T. Copson, *Some Integral Inequalities*. Proceedings of the Royal Society of Edinburgh,75(2) (1976), 157–164. https ://doi.org/10.1017/S0308210500017868

[9] A. Cižmešija, J. Pecaric, *On Bicheng[Yang]-Debnath's generalizations of Hardy's integral inequality*. Int. J. Math. Math. Sci, 25 (2001), 237–250. https ://doi.org/10.1155/S0161171201005816

[10] B. Halim , *Introduction Aux Équations Intégrales Linéaires Méthodes Et Applications*.Univ. Tiaret, Faculte. M.I

[11] G. H. Hardy, *Notes on a theorem of Hilbert*. Math Z 6, 314–317 (1920). https ://doi.org/10.1007/BF01199965

[12] G. H. Hardy, *Note on some point in the integral calculus(LXIV)*. Messenger of Math., 57(1928), 12–16.

[13] G. H. Hardy, J. E. Littlewood and G. Polya, *Inequalities*. Cambridge Univ. Press, London, 1952.

[14] K. Jichang, *Applied inequalities*. Hunan Education Press, Changsha, 1992.

[15] K. Khatri, V.N. Mishra, *Degree of Approximation by the $T : E1$ Means of Conjugate Series of Fourier Series in the Holder Metric*. Iran. J. Sci. Technol. Trans. A Sci. 43 (4) (2019), 1591–1599. https ://doi.org/10.1007/s40995-017-0272-3

[16] D. S. Mitrinovic, J. E. Pecaric and A. M. Fink, *Inequalities involving functions and their integrals and derivatives*. Kluwer Academic Publisher, Dordrecht, 1991.

[17] V.N. Mishra, K. Khatri, *Degree of approximation of functions class by the means in the Holder metric*. Int. J. Math. Math. Sci, (2014), https ://doi.org/10.1155/2014/837408

[18] V.N. Mishra, L.N. Mishra, *Trigonometric Approximation of Signals (Functions) in Lp- norm.* Int. J. Contemp. Math. Sci. 7 (19) (2012), 909–918.

[19] T. L. Nguyen, V. D. l. Nguyen,*The Carleman's inequality for a negative power number.* J. Math. Anal. Appl., 259(2001), 219–225. https ://doi :10.1006/jmaa.2000.7422

[20] B. Sroysang, *More On Some Hardy Type Integral Inequalities,* J. Math. Inequal., 8(3) (2014), 497-–501. dx.doi.org/10.7153/jmi-08-37

[21] B. Yang,*On A New Hardy Type Integral Inequalities.* Int. Math. Forum, Vol. 2, 2007, no. 65-68, 3317–3322 http ://dx.doi.org/10.12988/imf.2007.07305

[22] B.Yang, Z. Zeng, D. Lokenath , *On new generalizations of Hardy's integral inequality.* J. Math. Anal. Appl., 217(1) (1998), 321–327. https ://doi.org/10.1006/jmaa.1998.5758

[23] B. Yang, D. Lokenath, *Generalizations of Hardy's integral inequality.* Internat. J. Math. Math. Sci., 22,3(1999), 535–542.

[24] A. Wedestig, *Some new Hardy type inequalities and their limiting inequalities,* J. Inequal. Pure and Appl. Math. , 4(3) Art. 61, 2003