

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE & POPULAIRE  
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR & DE LA RECHERCHE  
SCIENTIFIQUE



Université Ibn Khaldoun- Tiaret  
FACULTÉ DES MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE  
DÉPARTEMENT DES MATHÉMATIQUES

# MEMOIRE DE MASTER

*Présentée par :*

**BOUZID Oukacha  
SAIBI Hakim**

*Spécialité : Mathématiques*

*Option : Analyse fonctionnelle et équations différentielles*

***Intitulé***

**Le problème de Sturm-Liouville:  
une approche numérique**

*Soutenue le : 23/06/2022*

*Devant le jury composé de :*

***Président : Mr. ZIANE MOHAMED***

*MCA. Univ. Ibn Khaldoun Tiaret*

***Examineurs : Mr. ZANTAR Walid***

*MAA. Univ. Ibn Khaldoun Tiaret*

***Encadreur : Mr. DIFI SID AHMED***

*MCB. Univ. Ibn Khaldoun Tiaret*

2021-2022

# Contents

red0.1	Introduction aux éléments finis . . . . .	2
red0.1.1	Un exemple de calcul des variations . . . . .	2
red0.2	Formulation variationnelle . . . . .	6
red0.2.1	Exemple de formulation variationnelle . . . . .	6
red0.2.2	Espace de Sobolev $H^1(\Omega)$ . . . . .	7
red0.2.3	Existence et unicité de la solution faible du problème (EDv) . . . . .	11
red0.3	Théorème de Lax-Milgram . . . . .	12
red0.4	Quel espace de Sobolev choisir . . . . .	16
red0.4.1	Problème de Sturm-Liouville avec (CL) de Neumann	18
red0.4.2	Conditions mixtes . . . . .	20
red0.5	Approximation la méthode de Galerkin . . . . .	21
red0.5.1	La méthode de Galerkin . . . . .	22
red0.5.2	Convergence de la méthode de Galerkin . . . . .	23
red0.5.3	Construction d'un sous-espace $V_n$ de $H_0^1(\Omega)$ . Fonction-chapeau $\Lambda$ . . . . .	25
red0.6	La méthode des éléments finis . . . . .	30
red0.7	Mise en œuvre de la méthode des éléments finis en dimension 1 . . . . .	35
red0.7.1	Matrice de rigidité locale relative à l'élément fini k	35
red0.7.2	Assemblage de la matrice de rigidité globale . . . . .	37
red0.8	Estimation d'erreur . . . . .	40

## *Remerciement*

---

*Tout d'abord, nous remercions Dieu qui nous a guidés sur le chemin  
Connaissances et nous donner du bon sens et des connaissances abondantes pour  
parvenir Humble travail.*

*Nous tenons à remercier notre superviseur, Difi Sid Ahmed, qui Il a supervisé  
notre travail et nous a laissé une grande marge de liberté  
Merci pour ses directives qu'il nous a données et ses instructions qui nous ont  
guidés.*

*Nous remercions également le président du jury, Ziane Mohamed , et  
Examineur Zantar Walid pour avoir accepté l'évaluation de ce travail. Nous  
voudrions, à cette occasion, avec grand honneur, remercier Cordialement tous  
nos professeurs. Enfin, nous voudrions exprimer notre sincérité Merci aux  
personnes qui ont vraiment contribué à ce que cela se produise  
De cette mémoire.*

*Nous espérons que ce travail aura la valeur souhaitée.*

***Merci à tous !***

\* \_\_\_\_\_ *Dédië à* \_\_\_\_\_ \*

*Avec un grand honneur, je tiens à dédier ce modeste travail à : Mes très chers  
parents Que dieu les gardes.*

*Mes frères et mes sœurs et mes amis Ainsi que toute ma promotion.*

***B.Oukacha. . .***

\*————— *Je dédie ce travail à* —————\*

Tous d'abord Je dédie ce modeste travail à : Mon exemple éternel, mon soutien moral et source de joie et de bonheur, celui qui s'est toujours sacrifié pour me voir réussir, que Dieu te garde dans son vaste paradis, à toi mon père.

*La lumière de mes jours, la source de mes efforts, la flamme de mon cœur, ma vie et mon bonheur ; maman que j'adore.*

*Mes frères.*

*Mes chères et adorables sœurs.*

*Toute ma famille de loin ou de près.*

*Tout mes amies*

*Merci d'être toujours là pour moi*

*Tous mes amis .*

*Tous mes collègues de ma promotion.*

*Tous les enseignants qui ont contribué à ma formation durant mes études.*

***S.hakim...***

# Introduction

Le problème de Sturm-Liouville apparaît naturellement lors de la recherche de solutions d'équations aux dérivées partielles classiques (avec conditions aux bords). Par exemple dans le cas d'une équation des ondes, sa résolution passe par définir un produit scalaire adapté et les solutions recherchées sont exprimées à l'aide de série de fonctions orthogonales. Considérons le problème de la corde vibrante de longueur  $\ell$ , attachée en ses extrémités, modélisé par une équation aux dérivées partielles (EDP qui décrit la propagation des ondes)

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \quad (1)$$

avec des conditions aux limites (les extrémités de la corde attachée ne vibrent pas)

$$\forall t, \quad y(0, t) = y(\ell, t) = 0 \quad (2)$$

et satisfait les conditions initiales (position et vitesse des points de la corde connus à l'instant  $t = 0$ )

$$y(x, 0) = f(x), \quad \frac{\partial y}{\partial t}(x, 0) = g(x). \quad (3)$$

On peut chercher les solutions de la forme suivante<sup>1</sup>

$$y(x, t) = X(x)T(t),$$

l'équation (1) implique  $X(x)T''(t) = c^2 X''(x)T(t)$ , soit en séparant les variables

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{c^2} \frac{T''(t)}{T(t)}.$$

Posons  $k(x) = \frac{X''(x)}{X(x)}$ . Comme on a aussi  $k(x) = \frac{1}{c^2} \frac{T''(t)}{T(t)}$  ne dépend pas de  $x$  est donc une constante  $k$ .

On a alors à résoudre deux équations différentielles associées

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = k \quad \text{et} \quad \frac{1}{c^2} \frac{T''(t)}{T(t)} = k.$$

---

1. séparation de variables

Les conditions aux limites (2) se traduisent par

$$X(0) = 0 \quad \text{et} \quad X(\ell) = 0. \quad (4)$$

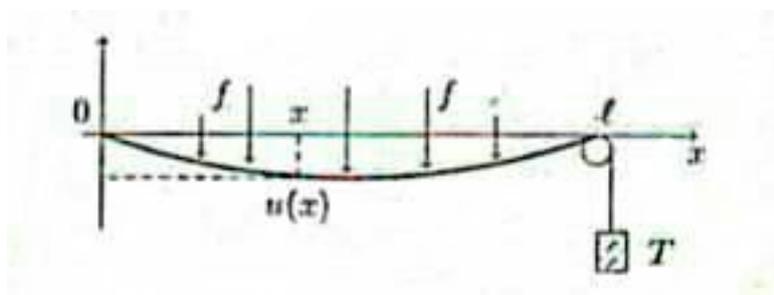
Dans ce mémoire, on s'intéresse à la résolution numérique d'un problème de type Sturm-Liouville en dimension un. Après avoir fixé le cadre fonctionnel sur lequel on travaille, on rappelle quelques résultats concernant la méthode des éléments finis ainsi que le théorème de Lax-Milgram. La dernière partie est pour une application détaillée de ce qui précède.

## 0.1 Introduction aux éléments finis

### 0.1.1 Un exemple de calcul des variations

Le principe de Maupertuis (ou de moindre action) permet, en mécanique statique par exemple, de déterminer globalement la position d'un système matériel soumis à un champ de forces. Il consiste à minimiser une fonctionnelle définie sur un ensemble de positions voisines, compatibles avec les liaisons.

Prenons un problème modèle, celui de la déformation transversale d'une corde de longueur  $\ell$ , d'extrémités fixes, raidie par une tension constante  $T$ , corde sur laquelle s'exerce un champ de forces  $f$ .



**Fig 1.1** corde en équilibre statique

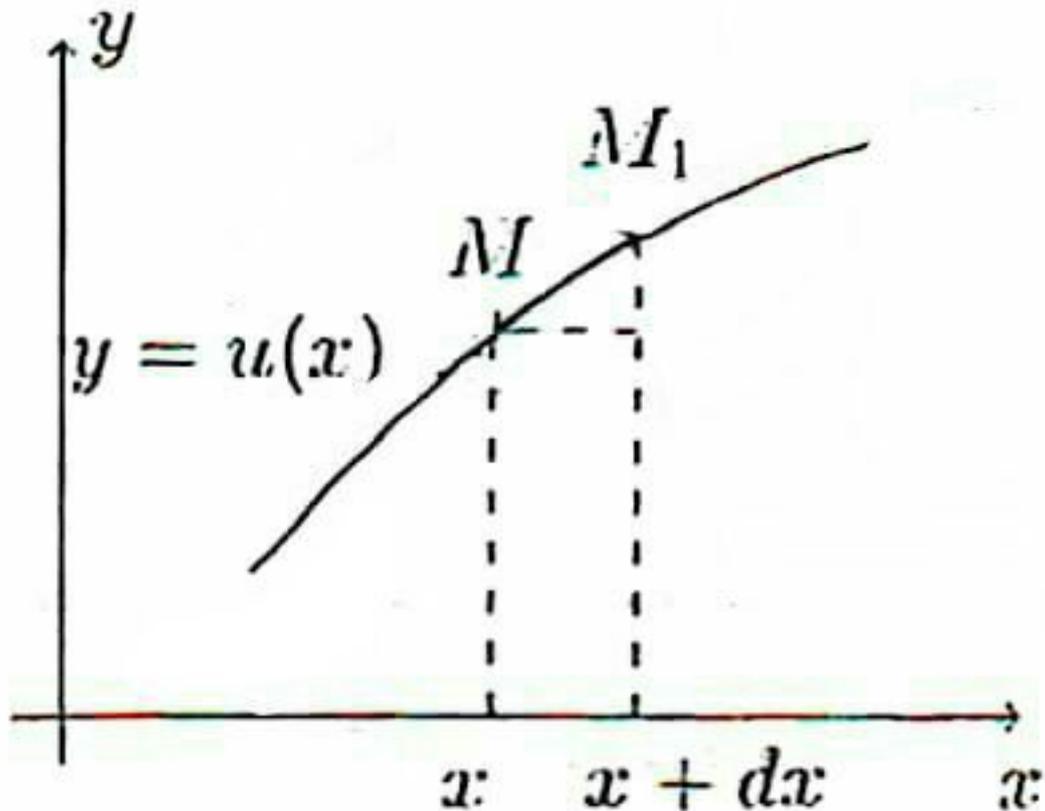
On supposera que, pour tout  $x \in ]0, \ell[ = \Omega$ , le déplacement  $u(x)$  de la corde reste petit ainsi que la pente  $u'(x)$  de la corde (par rapport à sa position d'équilibre horizontale en l'absence de  $f$ ).

La solution  $\bar{u}$  du système rend minimale l'énergie du système ; c'est le principe de moindre action. Évaluons cette énergie  $E$ .  $E$  est constituée d'une part de l'énergie  $E_f$  égale, au signe près, au travail du champ des forces  $f$ , qui a déplacé la corde de  $u(x)$  à partir de sa position d'équilibre,

$$E_f = - \int_0^\ell f(x) \cdot u(x) dx.$$

d'autre part de l'énergie interne  $E_i$  du système, correspondant au travail virtuel de la tension  $T$  qui ramènerait la longueur  $s(u)$  de la corde à sa longueur initiale. L'énergie interne vaut  $E_i = T \cdot \Delta s$  avec  $\Delta s = s(u) - \ell$ . Or,

$$\|MM_1\| = \sqrt{1 + u'^2(x)} dx \text{ et } s(u) = \int_0^\ell \sqrt{1 + u'^2(x)} dx$$



**Fig 1.2** élément de corde déformée

Comme  $\sqrt{1 + u'^2(x)} = 1 + \frac{1}{2}u'^2(x)$  au 1<sup>er</sup> ordre, on en déduit

$$E_i \cong T \int_0^\ell \frac{1}{2} u'^2(x) dx$$

d'où

$$E(u) = E_f + E_i = \int_0^\ell \left[ \frac{T}{2} u'^2(x) - f(x)u(x) \right] dx$$

qui est du type  $J(u) = \int_{\Omega} L(u, u', x) dx$ .

On peut calculer  $J(v)$  pour toute fonction  $v$  pouvant représenter la position de la corde. On définit ainsi  $J$  comme fonctionnelle sur un espace  $\mathcal{A}$  de fonctions  $v$ . On supposera ici que  $v$  est de classe  $C^1$  et que  $v$  s'annule en  $x = 0$  et  $x = \ell$ . On dit que  $v \in \mathcal{A}$  est un déplacement admissible.

Considérons plus généralement une fonctionnelle  $J$  définie sur  $\mathcal{A}$  par

$$J(v) = \int_{\Omega} L(v(x), v'(x), x) dx$$

( $J$  étant l'énergie  $E$  dans le problème modèle.)

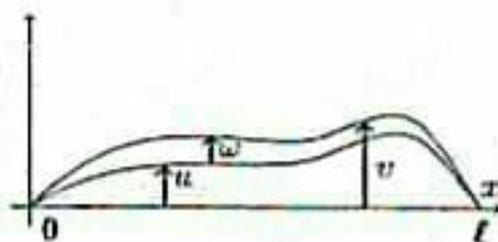


Fig 1.3 Déplacements admissibles voisins

On dit que  $u$  est solution du problème variationnel correspondant à la fonction  $L$  si  $u$  rend localement minimale  $J$  sur  $\mathcal{A}$ , c'est-à-dire si  $J(v) \geq J(u)$  pour tout  $v \in \mathcal{A}$ ,  $v$  proche de  $u$ . Pour donner un sens à  $v$  proche de  $u$ , on définit une norme sur  $\mathcal{A}$ . Dans notre exemple, si les fonctions  $v$  sont de classe  $C^1$ , la norme donnée par :

$$\|v\|_1 = \sup_{x \in \Omega} |v(x)| + \sup_{x \in \Omega} |v'(x)|$$

paraît naturelle. Dans d'autres cas moins réguliers, on prendra (voir espace  $H^1(S)$ )

$$\|v\|_1 = \|v\|_{L^2(\Omega)} + \|v'\|_{L^2(\Omega)}$$

Il s'agit maintenant de chercher  $u$  rendant  $J$  minimale. Pour cela, on développe la fonctionnelle  $J$  par la formule de Taylor au voisinage du point  $u$  (on suppose que  $L$  est au moins de classe  $C^1$  de l'espace normé  $\mathcal{A}$  dans  $\mathbb{R}$ ).

On introduit ainsi, avec Lagrange, une variation  $\omega \in \mathcal{A}$  en posant  $v = u + \omega$ . On a alors

$$L(u + \omega, u' + \omega', x) = L(u, u', x) + \frac{\partial L}{\partial u}(u, u', x) \cdot \omega + \frac{\partial L}{\partial u'}(u, u', x) \cdot \omega' + o(\|\omega\|_1)$$

( $\omega$  et  $\omega'$  sont de petits accroissements).

Pour avoir  $J(v) \geq J(u)$  on doit annuler les termes du 1<sup>er</sup> ordre en  $(\omega, \omega')$  (comme dans le cas d'une fonction de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}$ ), ce qui donne

$$\int_{\Omega} \left( \frac{\partial L}{\partial u}(u, u', x) \cdot \omega(x) + \frac{\partial L}{\partial u'}(u, u', x) \cdot \omega'(x) \right) dx = 0$$

Dans le cas d : problème modèle, cela donne

$$E'(u) = \int_0^{\ell} [T \cdot u'(x) \cdot \omega'(x) - f(x) \cdot \omega(x)] dx = 0$$

pour tout déplacement admissible  $\omega$ . On obtient ainsi une formulation dite variationnelle ou faible du problème :

$$T \int_0^{\ell} u'(x)\omega'(x)dx = \int_0^{\ell} f(x)\omega(x), \ell \quad \forall \omega \in \mathcal{A} \quad (FV)$$

Ensuite il resterait à examiner si  $J(v) \geq J(u)$  pour les points  $u$  vérifiant (FV), par un développement de  $E$  au 2<sup>e</sup> ordre par exemple.

Définissons pour finir la formulation forte correspondant au problème (FV). On a supposé ici  $\omega$  de classe  $C^1$  et  $\omega(0) = \omega(\ell) = 0$ ; donc on peut écrire  $\omega(x) = \int_0^x \omega'(t)dt$  avec  $\omega(\ell) = 0$ .

Si les fonctions de  $\mathcal{A}$  sont de classe  $C^2$ , alors on peut intégrer par parties le 1<sup>er</sup> membre de (FV). On obtient

$$T [u'(x)\omega(x)]_0^{\ell} - T \int_0^{\ell} u''(x)\omega(x)dx = \int_0^{\ell} f(x)\omega(x)dx$$

et la partie intégrée est nulle puisque  $\omega(0) = \omega(\ell) = 0$ . On trouve donc, pour tout  $\omega \in \mathcal{A}$

$$\int_0^{\ell} -Tu''(x)\omega(x)dx = \int_0^{\ell} f(x)\omega(x)dx$$

ce qui conduit à la formulation dite forte du problème

$$-Tu'' = f \quad \text{avec} \quad u(0) = u(\ell) = 0 \quad (FF)$$

(dans ce cas, l'existence de solutions  $u$  de classe  $C^2$  nécessite  $f$  continue.)

Dans le problème modèle de la corde tendue, décrit ci-dessus, nous avons ainsi défini les formulations faible et forte. La formulation forte renvoie à un problème de Sturm-Liouville déjà traité. Dans le cas de la formulation faible, il nous reste à montrer l'existence d'une solution et à la construire. C'est l'objet de ce qui suit.

L'étude, plus théorique, fait appel à la dualité et à l'analyse hilbertienne et comprend deux parties :

1. la première concerne l'existence et l'unicité de la solution faible ; elle fait intervenir des espaces spécifiques comme l'espace de Sobolev  $H^1$  et le théorème de Lax-Milgram,
2. la seconde est dévolue à la construction effective de solutions ou de solutions approchées, par la méthode des éléments finis, notamment due à Galerkin et va jusqu'au stade numérique avec le calcul de la matrice de rigidité.

## 0.2 Formulation variationnelle

La formulation variationnelle permet de traduire, par dualité, un problème d'équation différentielle ou d'e.d.p. (équation aux dérivées partielles) avec conditions aux bords (ou aux limites) en un problème de représentation de forme linéaire dans un espace de Hilbert adapté. Cette formulation permet de montrer sous des hypothèses plus faibles, l'existence et l'unicité de la solution du problème puis d'en construire des solutions approchées. Elle transforme aussi le problème initial en celui de la recherche des extremums d'une fonctionnelle sur l'espace de Hilbert, à l'exemple de la mécanique où les équations différentielles sont une traduction du principe de moindre action comme on l'a vu dans l'exemple introductif.

Ce chapitre constituant une initiation, on se limitera, dans ce qui suit, au cheminement tôt qu'à une présentation complète. Et pour plus de simplicité, on travaillera dans des espaces (de Hilbert) réels de fonctions à une variable, de même qu'on a défini les distributions comme agissant sur des fonctions-tests d'une seule variable réelle.

### 0.2.1 Exemple de formulation variationnelle

Prenons le problème de Sturm-Liouville très simple consistant à résoudre pour  $x \in ]0, 1[ = \Omega$ , le problème :

$$-u''(x) + u(x) = f(x) \quad (ED)$$

avec les conditions aux limites de type Dirichlet :

$$u(0) = u(1) = 0 \quad (CL)$$

Si  $f$  est continue sur  $[0, 1]$ , une résolution classique consiste à chercher  $u$  de classe  $C^2$  vérifiant (ED) et (CL). Une telle solution, facile à obtenir dans cet exemple par des procédés élémentaires, est dite solution forte de (ED), (CL).

Considérons maintenant  $\mathcal{D}(\Omega)$ , espace des fonctions-tests  $\varphi$ , indéfiniment dérivables, à support inclus dans l'ouvert  $\Omega$ . Les distributions régulières, associées à

$-u'' + u$  et à  $f$  vérifient :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \quad \int_0^1 (-u''(x) + u(x)) \varphi(x) dx = \int_0^1 f(x) \varphi(x) dx.$$

En intégrant par parties on obtient :

$$[-u'(x)\varphi(x)]_0^1 + \int_0^1 (u'(x)\varphi'(x) + u(x)\varphi(x)) dx = \int_0^1 f(x)\varphi(x) dx$$

et en tenant compte de  $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$  ( $\text{Supp}(\varphi) \subset \Omega$ ), on trouve la formulation dite variationnelle de (ED), (CL). Appelons provisoirement solution faible une fonction  $u$  de classe  $C^1$  solution de

$$\int_0^1 (u'(x)\varphi'(x) + u(x)\varphi(x)) dx = \int_0^1 f(x)\varphi(x) dx \quad (EDv)$$

**Remarque 0.2.1.** *On voit que le nouvel énoncé a un sens pour  $u$  de classe  $C^1$ . (et non plus nécessairement de classe  $C^2$ ) et que les dérivations peuvent être comprises au sens des distributions puisque  $-\langle u'', \varphi \rangle = \langle u', \varphi' \rangle$ . D'autre part les conditions de régularité de  $f$  donnée peuvent être réduites à l'existence de  $\langle f, \varphi \rangle$ . Ainsi  $f$  fonction intégrable sur  $[0, 1]$  suffit. On pourra même, dans (EDv) substituer à  $[f]$  distribution régulière associée à  $f$ , une distribution singulière comme un Dirac.*

## 0.2.2 Espace de Sobolev $H^1(\Omega)$

Pour donner généralité et précision à la notion de solution faible, Sobolev construit, pour chaque système (ED), (CL), un espace fonctionnel adapté, dans lequel toute la résolution est effectuée.

Nous avons vu, dans l'exemple préliminaire, l'intérêt d'introduire un espace où la norme faisait intervenir  $u$  et  $u'$ . Définissons l'espace-  $H^1(\Omega)$  comme suit :

$$H^1(\Omega) = \left\{ v \in L^2(\Omega); \quad \exists w \in L^2(\Omega) \quad [w] = [v]' \text{ dérivée-distribution} \right\}$$

$H^1(\Omega)$  est l'espace des fonctions de carré intégrable, fonctions dont la dérivée au sens des distributions est associée à une fonction de carré intégrable.

**Remarque 0.2.2.** *Soit  $\text{ech}$  la fonction-échelon Heaviside ( $\text{ech}(x) = 0$  pour  $x < 0$ ,  $\text{ech}(x) = 1$  pour  $x \geq 0$ ).  $H^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$  mais  $H^1(\Omega) \neq L^2(\Omega)$ . En effet, sur  $\Omega = ]0, 1[$ , la fonction échelon  $\tau_{1/2} \text{ ech} : x \mapsto \text{ech}\left(x - \frac{1}{2}\right)$  est bien de carré intégrable,  $\tau_{1/2} \text{ ech} \in L^2(\Omega)$  mais étant discontinue en  $x = \frac{1}{2}$ ,*

$$\left[ \tau_{1/2} \text{ ech} \left( x - \frac{1}{2} \right) \right]' = \delta_{1/2},$$

la dérivée au sens des distributions n'est pas associée à une fonction de  $L^2(\Omega)$  et donc  $\tau_{1/2} \notin H^1(\Omega)$ .



Sergueï Sobolev (1908–1989), mathématicien et physicien russe. Spécialiste des équations différentielles liées aux sciences physiques, il introduisit dès 1934 les notions de fonction et de dérivée généralisées et les espaces fonctionnels dits depuis de Sobolev. On lui doit une théorie complète des ondes de surface de Rayleigh. Vers 1960, Sobolev orienta une partie de sa recherche vers les méthodes numériques.

### Produit scalaire (réel) sur $H^1(\Omega)$

On définit un produit scalaire sur  $H^1(\Omega)$  par :

$$(v, w)_{H^1} \in (H^1(\Omega))^2 \quad (v | w)_{H^1} = \int_{\Omega} (vw + v'w')$$

et la norme associée par  $\|v\|_{H^1}^2 = (v | v)_{H^1}$ . Comme  $L^2(\Omega)$  est complet et  $\|v\|_{H^1}^2 = \|v\|_{L^2}^2 + \|v'\|_{L^2}^2$ , on a la proposition suivante :

**Proposition 0.1.** *L'espace  $H^1(\Omega)$ , muni du produit scalaire  $p$  précédent, est un espace de Hilbert.*

Détalions la preuve en exercice.

**$H^1(\Omega)$  est complet.**

Soit  $\Omega$  un intervalle ouvert borné de  $\mathbb{R}$ . On suppose établie la propriété :

$L^2(\Omega)$ , espace des (classes de) fonctions de carré intégrable sur  $\Omega$  est complet. Il

s'agit de montrer que.

$$H^1(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega); \exists w \in L^2(\Omega) \quad [w] = [v]'\}$$

muni du produit scalaire  $(v | w)_{H^1} = (v | w)_{L^2} + (v' | w')_{L^2}$  est complet.

Notons  $Dv$  une fonction  $w$  de  $L^2$  telle que  $[Dv] = [v]'$ .

1. Soit une suite  $(v_n)$  de Cauchy dans  $H^1(\Omega)$ . Alors pour tout  $\epsilon > 0$ ; on a  $\|v_m - v_n\|_{H^1}^2 < \epsilon$  pour  $m$  et  $n$  supérieurs à un  $N_\epsilon$ .  
Comme  $\|v_m - v_n\|_{H^1}^2 = \|v_m - v_n\|_{L^2}^2 + \|Dv_m - Dv_n\|_{L^2}^2$  chacune des suites est de Cauchy dans  $L^2(\Omega)$ .  $L^2(\Omega)$  étant complet, elles convergent dans  $L^2(\Omega)$  :  $v_n$  vers une fonction notée  $v$  et  $Dv_n$  vers une fonction notée  $w$ .
2. Montrons que l'injection  $j : L^2(\Omega) \rightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$  - est continue. Il suffit de prouver que si  $v_n \rightarrow v$  dans  $L^2(\Omega)$  alors

$$[v_n] \rightarrow [v] \text{ dans } \mathcal{D}' \text{ soit } \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \langle v_n - v, \varphi \rangle \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$$

Or, cela résulte de l'inégalité de Schwarz

$$\left| \int_{\Omega} (v_n - v) \varphi \right| \leq \|v_n - v\|_{L^2} \cdot \|\varphi\|_{L^2} \text{ et } \|v_n - v\|_{L^2} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$$

On a ainsi  $[v_n]^- \rightarrow [v]$  et  $[v_n]' \equiv [Dv_n] \rightarrow [w]$  (au sens des distributions). On a aussi  $[v_n]' \rightarrow [v]'$  car la dérivation est continue dans  $\mathcal{D}(\Omega)$ . De l'unicité de la limite dans  $\mathcal{D}'(\Omega)$  on en déduit  $[w] = [v]'$  donc  $v \in H^1(\Omega)$ .

Enfin l'égalité  $\|v_n - v\|_{H^1}^2 = \|v_n - v\|_{L^2}^2 + \|Dv_n - w\|_{L^2}^2$  montre que  $v_n \rightarrow v$  dans  $H^1$  puisque  $v_n \rightarrow v$  dans  $L^2$  et que  $Dv_n \rightarrow w$  dans  $L^2$ .

**$H^1(\Omega)$  est un exemple d'espace de Sobolev.**

$H^1(\Omega)$  admet comme  $L^2(\Omega)$  des bases hilbertiennes. Cet espace est plus adapté aux problèmes de résolution d'équations différentielles que  $L^2$  ou que les espaces  $\mathcal{C}^p, p \in \mathbb{N}^*$ .

**Représentant continu de  $v \in H^1(\Omega)$**

**Propriété 0.1.**  $v \in H^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$  désigne en fait une classe de fonctions égales presque partout. Dans la cas où  $\Omega$  est comme ici un intervalle de  $\mathbb{R}$ , il existe un représentant unique de la classe  $v$  qui est continu sur  $\bar{\Omega}$ . Cela permet de donner un sens aux conditions aux limites  $(v(0) = v(1) = 0)$  dans l'exemple (ED)-'CL) du 0.2.1).

**Preuve :** Prenons  $\Omega = ]0, 1[$ . Soit  $v \in H^1(\Omega)$  et  $w \in L^2(\Omega)$  tel que  $[v]' = [w]'$ . Notons  $\tilde{v}$  la fonction définie par  $\tilde{v}(x) = \int_0^x w(t)dt$ . La fonction  $\tilde{v}$  ne dépend pas du représentant  $w$  et  $\tilde{v}$  est continue, car

$$|\tilde{v}(x_2) - \tilde{v}(x_1)| = \left| \int_{x_1}^{x_2} w(t)dt \right| \leq \sqrt{|x_2 - x_1|} \cdot \sqrt{\left| \int_{x_1}^{x_2} w^2(t)dt \right|}$$

d'après l'inégalité de Schwarz dans  $L^2(\Omega)$ , d'où

$$|\tilde{v}(x_2) - \tilde{v}(x_1)| \leq \sqrt{|x_2 - x_1|} \cdot \|w\|_{L^2}$$

D'autre part  $[\tilde{v}]' = [w]$  au sens des distributions. En effet,

$$\langle [\tilde{v}]', \varphi \rangle = - \langle [\tilde{v}], \varphi' \rangle = - \int_0^1 \left( \int_0^x w(t)dt \right) \varphi'(x) dx$$

$w \cdot \varphi'$  est intégrable sur le domaine de  $\mathbb{R}^2$   $\begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq t \leq x \end{cases}$

et par Fubini  $- \langle [\tilde{v}], \varphi' \rangle = - \int_0^1 w(t) \left( \int_t^1 \varphi'(x) dx \right) dt \equiv \int_0^1 w(t) \varphi(t) dt$  car  $\varphi(1) = 0$

Ainsi  $\forall \varphi \in H^1(\Omega)$   $\langle [\tilde{v}]', \varphi \rangle = \langle [w], \varphi \rangle$ .

D'autre part on a vu (« primitive d'une distribution nulle ») que si  $T \in D'(\Omega)$  est une distribution à dérivée nulle ( $T' = 0$ ), alors  $T$  est une constante. Il en résulte  $[\tilde{v}] = [\tilde{v}] + [c]$  et  $\tilde{v} + c$  est un représentant continu, valant  $c$  en  $x = 0$ . Il y a unicité du représentant continu  $\tilde{v}$ , car deux fonctions continues, égales p.p. sont égales partout. ■

Il est naturel de vouloir inclure les conditions aux limites homogènes  $v(0) = v(1) = 0$  dans l'espace où l'on cherche les solutions. Pour cela, on définit l'espace de Sobolev  $H_0^1(\Omega)$  par

$$H_0^1(\Omega) = \{w \in H^1(\Omega); \quad w(0) = w(1) = 0\}$$

(on, choisit le représentant  $w$ , continu sur  $[0, 1]$ ).

$H_0^1(\Omega)$  est un sous-espace fermé de  $H^1(\Omega)$  et, muni du produit scalaire de  $H^1(\Omega)$ , est un espace de Hilbert.

On peut maintenant définir plus précisément une solution faible de ((ED), (CT)) en choisissant  $L^2(\Omega)$  pour  $f$  et  $H_0^1(\Omega)$  pour les fonctions-tests et pour la solution  $v$ .

**Définition 0.2.1.** Une solution faible (ou au sens des distributions) de (ED), (CL) est une fonction  $u \in H_0^1(\Omega)$  vérifiant :

$$\forall \varphi \in H_0^1(\Omega) \quad (u | \varphi)_{H_1} = \int_{\Omega} f \cdot \varphi \text{ avec } f \in L^2(\Omega) \quad (EDv)$$

### 0.2.3 Existence et unicité de la solution faible du problème (EDv)

La forme linéaire  $\ell_f H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $\ell_f(\varphi) = \int_{\Omega} f \cdot \varphi$  est continue sur  $H_0^1(\Omega)$ , car

$$|\ell_f(\varphi)| = \left| \int_{\Omega} f \varphi \right| \leq \|f\|_{L^2} \|\varphi\|_{H^1} \quad \text{pour tout } \varphi \in H_0^1(\Omega)$$

d'où  $\|\ell_f\| \leq \|f\|_{L^2}$ .

La formulation variationnelle transforme ainsi le problème initial, donné en exemple en :

Trouver  $u$  dans l'espace de Hilbert  $H_0^1(\Omega)$  vérifiant :

$$\forall \varphi \in H_0^1(\Omega) \quad (u | \varphi)_{H^1} = \ell_f(\varphi) \quad (EDv)$$

$\ell_f$  étant une forme linéaire continue sur  $H_0^1(\Omega)$ .

D'après le théorème de Riesz, toute forme linéaire continue sur un espace de Hilbert, ici  $H_0^1(\Omega)$ , peut se mettre sous la forme d'un produit scalaire avec un élément  $u$  de  $H_0^1(\Omega)$ . Cet élément  $u$  est la solution faible unique de (EDv). On dit, dans ce cas, que le problème est bien posé.

D'autre part  $u$  est solution du problème de minimisation suivant :

**Proposition 0.2.** *La solution  $u$  du problème (EDv) est aussi l'unique fonction de  $H_0^1(\Omega)$  minimisant la fonctionnelle  $J$  définie sur  $H_0^1(\Omega)$  par*

$$J(v) = \frac{1}{2}(v | v)_{H^1} - \ell_f(v)$$

**Preuve :** Soit  $u$  la solution faible et  $\omega \in H_0^1(\Omega)$ , nous avons

$$\begin{aligned} J(u + \omega) &= \frac{1}{2}(u + \omega | u + \omega)_{H^1} - \ell_f(u + \omega) \\ &= \frac{1}{2}(u | u) + (u | \omega) + \frac{1}{2}(\omega | \omega) - \ell_f(u) - \ell_f(\omega) \\ &= J(u) + \frac{1}{2}(\omega | \omega)_{H^1} \equiv J(u) + \frac{1}{2}\|\omega\|_{H^1}^2 \end{aligned}$$

puisque  $u$  vérifie  $(u | \omega) = \ell_f(\omega)$ . Donc  $J(u + \omega) \geq J(u)$ , l'égalité étant obtenue pour  $\omega = 0$  uniquement. ■

**Remarque 0.2.3.** *Si  $f$  donnée est continue sur  $\bar{\Omega} = [0, 1]$ , la solution forte existe et donne une solution faible. De l'existence et de l'unicité de la solution faible, on voit donc que, dans ce cas, la solution faible fournit en fait la solution classique de (ED). (CL).*

### 0.3 Théorème de Lax-Milgram

L'exemple étudié précédemment est un cas particulier d'équation de Sturm-Liouville avec conditions de Dirichlet. On peut conclure, en utilisant le théorème de représentation de Riesz, à l'existence et à l'unicité de la solution du problème plus général, d'inconnue  $u$  à résoudre dans  $\Omega = ]0, 1[$ , suivant :

$$\begin{aligned} -(pu')' + qu &= f & (ED) \\ u(0) = u(1) &= 0 & (CL) \end{aligned}$$

Quand on fait les hypothèses suivantes

$$\begin{cases} p \in C^1(\bar{\Omega}); & \exists \alpha > 0 \quad p \geq \alpha \quad \text{sur} \quad \bar{\Omega} = [0, 1] \\ q \in C(\bar{\Omega}); & q \geq 0 \quad \text{sur} \quad \bar{\Omega}; \quad f \in L^2(\Omega) \end{cases} \quad (H)$$

**Preuve :** On cherche  $u$  dans l'espace de Sobolev  $H_0^1(\Omega)$  grâce à la formulation variationnelle du problème (ED)-(CL) qu'on peut obtenir comme suit :

$$\forall \varphi \in H_0^1(\Omega) \quad \int_{\Omega} (-(pu')' + qu) \varphi = \int_{\Omega} f \varphi$$

En intégrant par parties et en tenant compte de  $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$ , on obtient la formulation faible :

$$\int_{\Omega} pu' \varphi' + \int_{\Omega} qu \varphi = \int_{\Omega} f \varphi.$$

On considère alors la forme bilinéaire  $\mathcal{B}$  définie par

$$\mathcal{B}(u, \varphi) = \int_{\Omega} (pu' \varphi' + qu \varphi)$$

$\mathcal{B}$  est évidemment bilinéaire et symétrique. Elle est définie et positive à cause des conditions imposées à  $p$  et  $q$ .  $\mathcal{B}$  est ainsi un produit scalaire et  $H_0^1(\Omega)$  muni de  $\mathcal{B}$  est un espace de Hilbert. Le théorème de Riesz, appliqué à cet espace, justifie l'existence et l'unicité de la solution  $u \in H_0^1(\Omega)$  de

$$\forall \varphi \in H_0^1(\Omega) \quad \mathcal{B}(u, \varphi) = \ell_f(\varphi) \quad \text{avec} \quad \ell_f(\varphi) = \int_{\Omega} f \varphi$$

■

On peut aussi garder  $H_0^1(\Omega)$  et son produit scalaire  $(\cdot, \cdot)_{H^1}$  et utiliser le théorème suivant, dit de Lax-Milgram, qui généralise le théorème de représentation de Riesz.

**Théorème 0.3.1. (de Lax-Milgram)** Soit  $H$  espace-de Hilbert (réel) et  $\mathcal{B} : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$  une forme bilinéaire. On suppose  $\mathcal{B}$  continue et coercive :

1.  $\mathcal{B}$  est continue si  $\exists c \geq 0 \quad \forall u \in H \quad \forall v \in H \quad |\mathcal{B}(u, v)| \leq c \|u\| \cdot \|v\|$
2.  $\mathcal{B}$  est coercive si  $\exists \gamma > 0 \quad \forall v \in H \quad \mathcal{B}(v, v) \geq \gamma \|v\|^2$ .

Alors pour tout  $E \in H'$ , dual de  $H$ , il existe  $u_1 \in H$  unique vérifiant

$$\forall v \in H \quad \mathcal{B}(u_1, v) = \langle L, v \rangle$$

Si, de plus,  $\mathcal{B}$  est symétrique, alors la fonctionnelle  $J$  définie sur  $H^1$  par

$$J(v) = \frac{1}{2} \mathcal{B}(v, v) - \langle L, v \rangle$$

admet un minimum et un seul en  $v = u_1$ .

**Preuve :**

1. Montrons qu'on peut définir, pour tout  $u \in H$  fixé, un élément  $A_u \in H$  par  $\mathcal{B}(u, v) = (A_u | v)$ . Pour tout  $u \in H$  fixé, l'application  $\beta_u : v \mapsto \mathcal{B}(u, v)$  est une forme linéaire continue sur  $H$ . En effet, nous avons, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\forall v \in H \quad |\beta_u(v)| = |\mathcal{B}(u, v)| \leq c \|u\| \cdot \|v\| \quad \text{d'où } \|\beta_u\| \leq c \|u\|.$$

D'après le théorème de Riesz,  $\beta_u$  est représentée par un unique élément de  $H$ , que l'on notera  $A_u$ , ce qui signifie  $\forall v \in H \quad \langle \beta_u, v \rangle = (A_u | v)$  soit  $\forall v \in H \quad \mathcal{B}(u, v) = (A_u | v)$ . L'application  $A : u \mapsto A_u$  de  $H$  dans  $H$  est évidemment linéaire. Elle est continue puisque

$$\|A_u\|^2 = (A_u | A_u) = \mathcal{B}(u, A_u) \leq c \|u\| \cdot \|A_u\|$$

d'où  $A_u = 0$  ou  $\|A_u\| \leq c \|u\|$ , soit  $\|A\| \leq c$ .

2. On a  $\langle L, v \rangle = (\ell | v)$  avec  $\ell \in H$ . En effet, d'après le théorème de Riesz, la forme linéaire continue  $L$  est représentée par  $\ell \in H$  soit

$$\forall v \in H \quad \langle L, v \rangle = (\ell | v)$$

Alors la résolution ( en  $u$  ) de :  $\forall v \in H \quad \mathcal{B}(u, v) = \langle L, v \rangle$  devient celle de :  $\forall v \in H \quad (A_u | v) = (\ell | v)$  soit  $A_u = \ell$

3. Montrons que l'application  $A : u \mapsto A_u$  est inversible. Résoudre en  $u$  :  $\forall v \quad (A_u | v) = (\ell | v)$  revient à résoudre  $Au = \ell$ , c'est-à-dire à montrer que l'opérateur  $A$  est inversible. D'une part, d'après la coercivité de  $\mathcal{B}$ ,  $A$  est injectif. En effet,  $-\gamma \|u\|^2 \leq \mathcal{B}(u, u) = (A_u | u) \leq \|A_u\| \cdot \|u\|$  donc pour est injectif. En effet,  $-\gamma \|u\|^2 - \mathcal{B}(u, u) = (A_u | u) \leq \|A_u\| \cdot \|u\|$  donc pour tout  $u \in H \quad \|A_u\| \geq \gamma \|u\|$  d'où  $A_u \equiv 0 \Rightarrow u = 0$ . D'autre part  $A$  est surjectif Pour le montrer, on va vérifier que  $\text{Im } A$  est, fermé et que  $\text{Im } A$  est dense (d'où  $\text{Im } A = H$  ) ou de façon équivalente (dans un espace complet)

$$\text{Im } A \text{ complet et } (\text{Im } A)^\perp \text{ rduit } \{0\}.$$

- (a) Montrons que  $\text{Im } A$  est complet. Soit  $(Au_n)$  une suite de Cauchy de  $\text{Im } A$ . On a donc  $\|Au_m - Au_n\| < \epsilon$  pour  $m$  et  $n > N_\epsilon$ . Comme  $\|Au_m - Au_n\| = \|A(u_m - u_n)\| \geq \gamma \|u_m - u_n\|$  la suite  $(u_n)$  est de Cauchy dans  $H$  et converge donc vers un élément  $u \in H$ .  $A$  étant un opérateur continu  $Au_n$  converge vers  $Au \in \text{Im } A$ .
- (b) Montrons que  $(\text{Im } A)^\perp$  est réduit à  $\{0\}$ . Soit  $v \in (\text{Im } A)^\perp$ ; alors on a pour tout  $u \in H$ ,  $(Au | v) = 0$ , c'est-à-dire  $\forall u \in H \quad \mathcal{B}(u, v) = 0$ . En particulier pour  $u = v$ , on a  $\mathcal{B}(v, v) = 0$  et, comme  $\mathcal{B}(v, v) \geq \gamma \|v\|^2$ , on en conclut  $v = 0$ .
- L'opérateur continu  $A$  est donc inversible et  $Au = \ell \Leftrightarrow u = A^{-1}\ell$ . D'autre part l'inégalité, vue plus haut,  $\|Au\| \geq \gamma \|u\|$  donne  $\forall \ell \quad \|\ell\| \geq \gamma \|A^{-1}\ell\|$  d'où  $\|A^{-1}\| \leq \frac{1}{\gamma}$ .
4. Pour montrer que la fonctionnelle  $J : v \mapsto J(v)$  est minimale pour  $v = u_1$  posons  $v = u_1 + \omega$  et calculons  $J(u_1 + \omega)$ .

$$\begin{aligned} J(u_1 + \omega) &= \frac{1}{2} \mathcal{B}(u_1 + \omega, u_1 + \omega) - \langle L, u_1 + \omega \rangle \\ &= \frac{1}{2} \mathcal{B}(u_1, u_1) + \mathcal{B}(u_1, \omega) + \frac{1}{2} \mathcal{B}(\omega, \omega) - \langle L, u_1 \rangle - \langle L, \omega \rangle \end{aligned}$$

( $\mathcal{B}$  étant symétrique.)

$$J(u_1 + \omega) = J(u_1) + (\mathcal{B}(u_1, \omega) - \langle L, \omega \rangle) + \frac{1}{2} \mathcal{B}(\omega, \omega)$$

Comme  $u_1$  vérifie  $\mathcal{B}(u_1, \omega) - \langle L, \omega \rangle = 0$ , on en déduit

$$J(u_1 + \omega) = J(u_1) + \frac{1}{2} \mathcal{B}(\omega, \omega)$$

Enfin,  $\mathcal{B}$  étant coercive  $\mathcal{B}(\omega, \omega) \geq \gamma \|\omega\|^2$  ce qui prouve  $J(u_1 + \omega) \geq J(u_1)$ ; l'égalité étant obtenue seulement pour  $\omega = 0$ . ■

### Retour sur le problème de Sturm-Liouville (condition de Dirichlet)

Montrons que  $\mathcal{B}$  définie par  $\mathcal{B}(v, w) = \int_\Omega (pv'w' + qvw)$  est continue et coercive. Le théorème de Lax-Milgram sera alors applicable. La continuité de  $\mathcal{B}$  découle de ce qui suit.

$$|\mathcal{B}(v, w)| \leq P \|v'\|_{L^2} \cdot \|w'\|_{L^2} + Q \|v\|_{L^2} \|w\|_{L^2}$$

en notant par  $P$  (resp.  $Q$ ) la borne supérieure de  $p(x)$  (resp. de  $q(x)$ ) sur  $\Omega$ . Donc  $|\mathcal{B}(v, w)| \leq (P + Q) \cdot \|v\|_{H^1} \|w\|_{H^1}$ . D'autre part  $\mathcal{B}$  est coercive. En effet, d'après les conditions (H), on a :

$$\mathcal{B}(v, \bar{v}) = \int (pv'^2 + qv^2) \geq 0 \quad \text{et} \quad -\bar{B}(v, \bar{v}) \geq \alpha \|\bar{v}'\|_{L^2}^2 \quad \text{car } p \geq \alpha$$

Or, pour  $v \in H_0^1(\Omega)$

$$|v(x)| = \left| \int_0^x v'(t) dt \right| \leq \int_{\Omega_-} 1 \cdot |v'(t)| dt \leq \|v'\|_{L^2 \text{ A}} \quad (\text{par Schwarz}).$$

Donc  $\int_{S_B} |v(x)|^2 d\tau \leq \|v'\|_{L^2}^2 \int_{\Omega} dx$  soit  $\|v\|_{L^2}^2 \leq \|v'\|_{L^2}^2$  et donc  $\mathcal{B}(v, z) \geq \frac{\alpha}{2} (\|v\|_{L^2}^2 + \|v'\|_{L^2}^2) = \frac{\alpha}{2} \|v\|_{H^1}^2$ . On a ainsi établi  $\frac{\alpha}{2} \|v\|_{H^1}^2 \leq \mathcal{B}(v, v) \leq (P + Q) \|v\|_{TH_1}^2$ , ce qui trouve que la norme définie par  $\mathcal{B}$  est équivalente sur  $H_0^1(\Omega)$  à la norme de  $H^1$ .

Donc  $\int_{S_B} |v(x)|^2 d\tau \leq \|v'\|_{L^2}^2 \int_{\Omega} dx$  soit  $\|v\|_{L^2}^2 \leq \|v'\|_{L^2}^2$  et donc  $\mathcal{B}(v, z) \geq \frac{\alpha}{2} (\|v\|_{L^2}^2 + \|v'\|_{L^2}^2) = \frac{\alpha}{2} \|v\|_{H^1}^2$ . On a ainsi établi  $\frac{\alpha}{2} \|v\|_{H^1}^2 \leq \mathcal{B}(v, v) \leq (P + Q) \|v\|_{TH_1}^2$ , ce qui trouve que la norme définie par  $\mathcal{B}$  est équivalente sur  $H_0^1(\Omega)$  à la norme de  $H^1$ .

**Remarque 0.3.1.** *Certaines équations différentielles conduisent, par la formulation variationnelle, à des formes bilinéaires non symétriques. Mais si elles sont continues et coercives, le théorème de Lax-Milgram est applicable. Donnons-en un exemple. Soit à résoudre sur  $\Omega = ]0, 1[$  et pour  $f \in L^2(\Omega)$  donné*

$$-u''(x) + u'(x) + u(x) = f(x) \quad (ED)$$

avec les conditions aux limites

$$u(0) = u(1) = 0 \quad (CL)$$

La formulation variationnelle

$$\forall \varphi \in H_0^1(\Omega) \quad \int_{\Omega} u' \varphi' + \int_{\Omega} u' \varphi + \int_{\Omega} u \varphi = \int_{\Omega} f \varphi$$

conduit à définir la forme bilinéaire  $\mathcal{B}$  par

$$\mathcal{B}(v, \varphi) = \int_{\Omega} (v' \varphi' + v' \varphi + v \varphi)$$

$\mathcal{B}$  n'est pas symétrique mais  $\mathcal{B}$  est continue et coercive. En effet,

$$|\mathcal{B}(v, \varphi)| \leq 3 \|v\|_{H^1} \cdot \|\varphi\|_{H^1} \quad (\text{continuité}).$$

D'autre part,  $\mathcal{B}(u, u) = \int_{\Omega} (u'^2 + uu' + u^2)$ . Or,  $\int_{\Omega} uu' = \frac{1}{2} [u^2(x)]_0^1 = 0$  puisque  $u \in H_0^1(\Omega)$ . Donc

$$\mathcal{B}(u, u) = \|u\|_{H^1}^2 \quad (\text{coercivité}).$$

**Notation 0.3.1.** *Dans cet exemple, on aurait pu aussi chercher la forme autoadjointe et se ramener à une forme bilinéaire symétrique. On a*

$$- [e^{-x} u'(x)]' + e^{-x} \cdot u(x) = e^{-x} \cdot f(x)$$

Le problème devient : chercher  $u$  vérifiant  $\forall \varphi \in H_0^1(\Omega) \mathcal{B}_s(u, -\varphi) = \ell_f(\varphi)$  avec  $\mathcal{B}_s(u, \varphi) = \int \int_{\Omega} e^{-x} (u'(x)\varphi'(x) + u(x)\varphi(x)) dx$  et  $\ell_f(\varphi) = \int_{\Omega} e^{-x} f(x) \cdot \varphi(x) dx$ . Comme  $p_s = q_s = e^{-x} \geq \frac{1}{e}$  sur  $[0, 1]$ , le théorème de Lax-Milgram est applicable et  $\mathcal{B}_s(u, \varphi) = \ell_f(\varphi)$  admet une solution unique. De plus, la fonctionnelle  $J$  est minimale au point  $u$  solution :

$$J(u) = \min_{v \in H_0^1(\Omega)} J(v) \text{ avec } J(v) = \frac{1}{2} \mathcal{B}_s(v, v) - \ell_f(v)$$

## 0.4 Quel espace de Sobolev choisir

Limitons-nous au problème de Sturm-Liouville différant seulement par les conditions aux limites. Ce sont ces conditions qui vont, si possible, être intégrées dans la définition de l'espace fonctionnel de Sobolev  $H$ . Le problème se reformulera alors en

$$\forall \varphi \in \mathcal{B}(u, \varphi) = (\ell | \varphi)$$

et des hypothèses convenables sur  $\mathcal{B}$  permettront la résolution grâce au théorème de Lax-Milgram.

Nous avons déjà défini  $H^1(\Omega)$  et  $H_0^1(\Omega)$  (avec  $\Omega = ]0, 1[$ ). Définissons plus généralement  $H^m(\Omega)$  et  $H_0^m(\Omega)$  pour  $m \in \mathbb{N}^*$ .

$$H^m(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega) ; \text{les distributions } v', v'', \dots, v^{(m)} \text{ sont dans } L^2(\Omega)\}$$

$$H_0^m(\Omega) = \{v \in H^m(\Omega) ; v, v', v'', \dots, v^{(m-1)} \text{ sont nulles en } 0 \text{ et } 1\}$$

Munis du produit scalaire  $(v, w) \mapsto (v | w)_{H^m} = \sum_{p \leq m} \int_{\Omega} v^{(p)} \cdot w^{(p)}$ ,  $H^m(\Omega)$  et  $H_0^m(\Omega)$  sont des espaces de Hilbert.

Nous utiliserons en particulier  $H^2(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega) ; v', v'' \text{ dans } L^2(\Omega)\}$

**Remarque 0.4.1.** On a vu qu'il existait un représentant  $\tilde{v}$ , continu sur  $\bar{\Omega}$ , de  $v \in H^1(\Omega)$ . Il en résulte que, si  $v \in H^2(\Omega)$ , il existe un représentant continu de  $v' \in H^1(\Omega)$  d'où un représentant  $v$  de classe  $C^1$  sur  $\bar{\Omega}$ .

**Proposition 0.3.** La solution faible  $u \in H_0^1(\Omega)$  du problème

$$\begin{cases} -u'' + u = f & \text{avec } f \in L^2(\Omega) \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

c'est-à-dire solution du problème variationnel

$$\forall \varphi \in H_0^1(\Omega) \quad \int_0^1 (u' \varphi' + u \varphi) = \int_0^1 f \cdot \varphi$$

appartient à  $\overline{H^2(\Omega)}$ .

**Preuve :** Le problème variationnel est

$$\forall \varphi \in H_0^1(\Omega) \quad \int_0^1 (u'\varphi' + u\varphi) = \int_0^1 f \cdot \varphi$$

Comme  $\mathcal{D}(\Omega) \subset H_0^1(\Omega)$ , on peut écrire, au sens des distributions =

$$\therefore \forall \varphi \in \bar{D}(\Omega) \quad \langle u', \varphi' \rangle + \langle u, \varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle$$

Dans  $\mathcal{D}'(\Omega)$  on a  $\langle u', \varphi' \rangle = -\langle u'', \varphi \rangle$ , d'où  $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \langle u'', \varphi \rangle = \langle u - f, \varphi \rangle$ . Les distributions  $u''$  et  $u - f$  sont identiques et comme  $u$  et  $f$  sont dans  $L^2(\Omega)$ ,  $u''$  est régulière et appartient à  $L^2(\Omega)$ . Donc  $u \in H^2(\Omega)$ . ■

### Formule d'intégration par parties dans $H^1(\Omega)$

Dans ce qui suit, on va utiliser des intégrations par parties avec ces fonctions de  $H^1$  ou de  $H^2$ . Il s'agit de justifier cette opération. Soit  $\Omega = ]0, 1[$ ,  $f$  et  $g$  deux (classes de) fonctions de  $H^1(\Omega)$ . on choisit les représentants continus sur  $\bar{\Omega}$  notés encore  $f$  et  $g$ . Alors  $\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a)$ , de même pour  $g$ . En appliquant le théorème de Fubini à la fonction :  $(x, y) \mapsto f'(x)g'(y)$  sur le domaine  $T$  décrit

$$\text{par } \begin{cases} a \leq x \leq b \\ a \leq y \leq x \end{cases} \text{ avec } 0 \leq a \leq b \leq 1$$

on peut exprimer de deux façons  $I = \iint_T f'(x)g'(y)dx dy$ .

On en déduit la formule d'intégration par parties

$$\forall f, g \in H^1(\Omega) \quad \int_a^b f'(x)g(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dx.$$

**Preuve :**  $f' \in L^2(\Omega) \subset L^1(\Omega)$  car  $\int_{\Omega} |f'(x)| dx \leq \|f'\|_{L^2(\Omega)} \cdot \|1\|_{L^2(\Omega)}$ . Chacune des fonctions  $f'$  et  $g'$  étant intégrable sur  $\Omega$ , ( $f', g' \in L^2(\Omega) \subset L^1(\Omega)$ ), la fonction  $(x, y) \mapsto f'(x)g'(y)$  est intégrable sur  $\Omega^2$ . En intégrant successivement, on obtient

$$I = \int_a^b dx \int_a^x f'(x)g'(y)dy \equiv \int_a^b (g(x) - g(a))f'(x)dx; (g \text{ continue})$$

di où

$$I = \int_a^b g(x)f'(x)dx - g(a)[f(b) - f(a)]; (f \text{ continue})$$

En intégrant sur  $T$ , également décrit par  $a \leq y \leq b, y \leq x \leq b$  on obtient

$$I = \int_a^b dy \int_y^b f'(x)g'(y)dx \equiv \int_a^b g'(y)[f(b) - f(y)]dy$$

d'où  $I = f(b)[g(b) - g(a)] - \int_a^{b-} g'(y)f(y)dy$

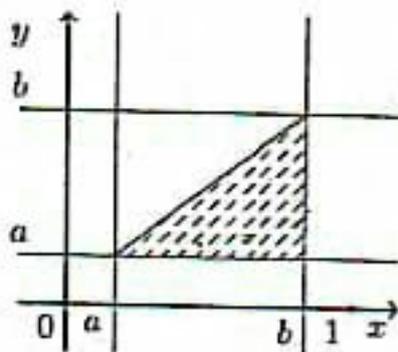


Fig 1.5 Domaine d'intégration T

En égalant les deux expressions, on obtient

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx = g(a)[f(b) - f(a)] + f(b)[g(b) - g(a)] - \int_a^b g'(y)f(y)dy$$

d'où le résultat

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dx$$

■

### 0.4.1 Problème de Sturm-Liouville avec (CL) de Neumann

Soit à résoudre sur  $\Omega = ]0, 1[$

$$\begin{cases} -u'' + u = f \text{ avec } f \in L^2(\Omega) \\ u'(0) = u'(1) = 0 \end{cases} \quad (S)$$

En se référant au cas des conditions de Dirichlet ( $u(0) = u(1) = 0$ ), on pense qu'il existe une solution faible  $u \in H^2(\Omega)$ . Les conditions aux limites ont alors un sens, puisque  $u' \in H^1(\Omega)$  et donc il existe un représentant de  $u'$  continu sur  $\bar{\Omega}$ . On cherche ainsi une solution faible  $u \in F$  avec

$$F = \{w \in H_j^2(\Omega); w'(0) = w'(1) = 0\}$$

La solution  $u$  n'étant pas nulle en 0 et 1, on va choisir  $H^1(\Omega)$  comme espace de fonctions-tests. En multipliant l'équation différentielle de (S) par une fonction est  $\varphi \in H^1(\Omega)$ , on obtient :

$$\int_0^1 (-u'' + u) \varphi = \int_0^1 f \varphi$$

On peut intégrer  $-\int_0^1 u''\varphi$  par parties ( $\varphi \in H^1(\Omega)$ ), d'où

$$[-u'(x)\varphi(x)]_0^1 + \int_0^1 u'\varphi' + \int_0^1 u\varphi = \int_0^1 f\varphi$$

et l'expression entre crochets est nulle pour  $u \in F$ .

Donc si  $u \in F$  est solution,  $u$  est solution du problème variationnel

$$\forall \varphi \in H^1(\Omega) \quad (u | \varphi)_{H^1} = \langle f, \varphi \rangle \quad (EDVar H^1)$$

Établissons la réciproque. (La solution faible de (EDVar  $H^1$ ) est en fait une solution forte.) L'équation (EDVar  $H^1$ ) admet dans l'espace de Sobolev  $H^1(\Omega)$  une unique solution  $u \in H^1(\Omega)$ , d'après le théorème de Lax-Milgram (ou ici d'après le théorème de Riesz). Il reste à montrer que cette solution  $u$  appartient à  $F$ . Comme  $\mathcal{D}(\Omega) \subset H^1(\Omega)$  on a

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \quad \int_0^1 (u'\varphi' + u\varphi) = \int_0^1 f\varphi$$

soit

$$\int_0^1 (-u'' + u)\varphi = \int_0^1 f\varphi \quad \text{car} \quad \langle u', \varphi' \rangle = \langle -u'', \varphi \rangle$$

d'où  $-u'' + u = f$  dans  $\mathcal{D}'(\Omega)$ . Comme  $u$  et  $f$  sont dans  $L^2(\Omega)$ , on a  $u'' \doteq u - f \in L^2(\Omega)$ , donc  $u \in H^2(\Omega)$ .

D'autre part, intégrons par parties  $\int_0^1 u'\varphi'$  dans l'expression

$$\int_0^1 (u'\varphi' + u\varphi) = \int_0^1 f\varphi$$

(on le peut puisque  $u'$  et  $\varphi \in H^1$ ). On obtient :

$$\forall \varphi \in H^1(\Omega) \quad [u'(x)\varphi(x)]_0^1 + \int_0^1 (-u'' + u)\varphi = \int_0^1 f\varphi$$

On sait qu'on a :  $-u'' + u = f$  au sens de  $L^2$  donc  $-u'' + u - f = 0$  p.p. Il en résulte  $[u'(x)\varphi(x)]_0^1 = 0$ , soit  $\forall \varphi \in H^1(\Omega) \quad u'(1)\varphi(1) - u'(0)\varphi(0) = 0$ . Prenons  $\varphi_1(x) = x$  cela donne  $u'(1) = 0$ . Prenons  $\varphi_2(x) = 1 - x$  cela donne  $u'(0) = 0$ ; donc  $u$  vérifie les conditions aux limites. Finalement  $u \in F$ .

### 0.4.2 Conditions mixtes

On va maintenant traiter le problème suivant :  
soit à résoudre sur  $\Omega = ]0, 1[$

$$\begin{aligned} -u'' + u &= f & \text{avec } f &\in L^2(\Omega) & (ED) \\ u(0) = 0, u'(1) &= 0 & (CL) \end{aligned}$$

On cherche une solution faible  $u \in G$  avec

$$G = \left\{ w \in H^2(\Omega); w(\vec{0}) = w'(1) = 0 \right\}$$

Comme la solution est nulle en 0 mais non nulle en 1, on prend pour espace de fonctions-tests  $H$ , le sous-espace de  $H^1(\Omega)$  donné par

$$H = \left\{ \varphi \in H^1(\Omega); \varphi(0) = 0 \right\}$$

Pour trouver la formulation variationnelle du problème vérifié par  $u \in G$ , on multiplie (ED) par  $\varphi \in H$  et on intègre.

$$\forall \varphi \in H \quad - \int_0^1 u'' \varphi + \int_0^1 u \varphi = \int_0^1 f \varphi$$

Si  $u \in G$  vérifie cette équation,  $u$  vérifie

$$[-u'(x)\varphi(x)]_0^1 + \int_0^1 u' \varphi' + \int_0^1 u \varphi = \int_0^1 f \varphi$$

L'expression  $[-u'(x)\varphi(x)]_0^1$  est nulle puisque  $u'(1) = 0$  et  $\varphi(0) = 0$ . Donc  $u \in G$  vérifie la formulation variationnelle (EDVar) suivante :

$$(EDVar) \quad \forall \varphi \in H \quad (u | \varphi)_{H^1} = \langle f, \varphi \rangle$$

Montrons que la solution du problème variationnel (EDVar) existe dans  $H$  et est unique.  $H$  - muni du produit scalaire de  $H^1$  est fermé donc complet dans  $H^1(\Omega)$ . On peut appliquer le théorème de Lax-Milgram à (EDVar)-dans  $H$ , espace de Hilbert. Donc (EDVar) admet une unique solution  $u \in H$ .

Enfin vérifions que l'unique solution  $u \in H$  de (EDVar) appartient à  $G$ . Comme  $\mathcal{D}(\Omega) \subset H$  on a

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \quad \int_0^1 u' \varphi' + \int_0^1 u \varphi = \int_0^1 f \varphi$$

Au sens des distributions

$$\int_0^1 -u'' \varphi = \int_0^1 u' \varphi'_-$$

d'où

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \quad \int_0^1 (-u'' + u) \varphi = \int_0^1 f \varphi$$

On a ainsi l'égalité  $-u'' + u = f$  dans  $\mathcal{D}'(\Omega)$  et comme  $u$  et  $f$  sont dans  $L^2(\Omega)$ ,  $u'' = u - f$  est dans  $L^2(\Omega)$ , d'où  $u \in H^2(\Omega)$ . D'autre part, en intégrant  $\int_0^1 u' \varphi'$  par parties dans (EDVar), on obtient

$$\forall \varphi \in H \quad [u'(x)\varphi(x)]_0^1 - \int_0^1 u'' \varphi + \int_0^1 u \varphi = \int_0^1 f \varphi$$

En tenant compte de  $u'' = u - f$  p.p. il reste

$$\forall \varphi \in H \quad [u'(x)\varphi(x)]_0^1 = 0$$

ou encore,  $\forall \varphi \in H \quad u'(1) \cdot \varphi(1) = 0$  puisque  $\varphi(0) = 0$ .

Comme pour  $\varphi(x) = x$  ( $\varphi \in H$ ) on a  $u'(1) = 0$ , on en déduit  $u \in G$ .

**Remarque 0.4.2.** *On voit que chaque système de conditions aux limites se traduit, au niveau de l'équation variationnelle, par un espace de Hilbert spécifique, auquel appartiennent fonctions-tests et solution. D'autres exemples d'équations différentielles associées à des conditions aux limites, conduisant à une formulation variationnelle dans un espace de Hilbert  $\bar{p}$  particulier sont donnés dans les exercices de fin de chapitre.*

## 0.5 Approximation la méthode de Galerkin

le théorème de Lax-Milgram permet de montrer l'existence et l'unicité de  $u \in H$  (espace de Hilbert) solution de

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in H \text{ tel que :} \\ \mathcal{B}(u, \varphi) = \ell(\varphi), \quad \forall \varphi \in H \end{cases} \quad (FV)$$

lorsque  $\mathcal{B}$  est une forme bilinéaire, continue et coercive, et  $\ell$  une forme linéaire et continue sur  $H$ , il ne donne pas de solution explicite.

### 0.5.1 La méthode de Galerkin



Boris Grigorievich Galerkin (1871-1945), Russe, ingénieur spécialiste de mécanique des structures et de la théorie de l'élasticité. Il a généralisé avec G. Bubnov (1872-1919) la méthode de Riesz au moyen d'opérateurs autoadjoints.

Pour trouver une solution approchée du problème (FV), l'idée de Galerkin est de résoudre le même type de problème sur un sous-espace  $V_n$  de  $H$  de dimension finie  $n$ . La méthode de Galerkin est fondée sur la formulation variationnelle (FV), contrairement à la méthode des différences finies qui est basée sur la formulation forte correspondante. La méthode de Galerkin est le point de départ de la méthode des éléments finis. Soit  $(\varphi_i)_{1 \leq i \leq n}$  une base de  $V_n \subset H$ . Tout élément  $u_n$  de  $V_n$  s'écrit

$$u_n = \sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi_i$$

On pense approcher la solution  $u$  de (FV) par  $u_n$  solution du problème discrétisé suivant :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u_n \in V_n \text{ tel que} \\ \mathcal{B}(u_n, v_n) = \ell(v_n), \quad \forall v_n \in V_n \end{cases} \quad (P_n)$$

Le théorème de Lax-Milgram assure l'existence et l'unicité de  $u_n$ . Cela est dû au fait que  $V_n$  est complet et que les restrictions  $\mathcal{B}|_{V_n}$  et  $\ell|_{V_n}$  possèdent les mêmes propriétés sur  $V_n$  que  $\mathcal{B}$  et  $\ell$  sur  $H$ . En décomposant  $u_n$  sur la base  $(\varphi_i)$  dans  $(P_n)$ ; on obtient

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \mathcal{B}(\varphi_i, v) = \ell(v), \quad \forall v \in V_n$$

En particulier,

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \mathcal{B}(\varphi_i, \varphi_j) = \ell(\varphi_j), \quad j = 1, 2, \dots, n$$

ce qui s'écrit matriciellement

$$A\alpha = b \quad (5)$$

avec

$$A = \begin{pmatrix} \mathcal{B}(\varphi_1, \varphi_1) & \mathcal{B}(\varphi_2, \varphi_1) & \dots & \mathcal{B}(\varphi_n, \varphi_1) \\ \mathcal{B}(\varphi_1, \varphi_2) & \mathcal{B}(\varphi_2, \varphi_2) & \dots & \mathcal{B}(\varphi_n, \varphi_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathcal{B}(\varphi_1, \varphi_n) & \mathcal{B}(\varphi_2, \varphi_n) & \dots & \mathcal{B}(\varphi_n, \varphi_n) \end{pmatrix}, \quad \alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} \ell(\varphi_1) \\ \ell(\varphi_2) \\ \vdots \\ \ell(\varphi_n) \end{pmatrix}$$

De la coercivité de  $\mathcal{B}$  et de l'indépendance linéaire des  $\varphi_i$  de la base, on déduit que la matrice  $A$  est inversible. ( $A\alpha = 0 \Rightarrow {}^t\alpha^t A\alpha = 0$  et en notant  $a = \sum \alpha_i \varphi_i$  on obtient  ${}^t\alpha^t A\alpha \equiv \mathcal{B}(a, a) = 0$ . Comme  $\mathcal{B}$  est coercive  $\mathcal{B}(a, a) \geq \gamma \|a\|^2$  d'où  $a = 0$ .)

Par la suite, on peut résoudre le système (5.1) pour obtenir  $\alpha$  et donc déterminer  $u_n$  solution de  $(P_n)$ . C'est la méthode de Galerkin et comme  $V_n \subset H$ , on parle d'approximation de Galerkin interne.

## 0.5.2 Convergence de la méthode de Galerkin

Pour qu' on puisse parler de solution approchée donnée par  $u_n$  il faut que dans  $H$  la suite  $(u_n)$  converge vers la solution  $u$ . Pour obtenir cela, on opère par densité et projection. Donnons une construction d'une suite possible d'espaces  $T_n$ . dits espaces d'approximation, à partir de l'existence d'une base hilbertienne dénombrable de  $H$  (dans tous les cas usuels  $H$  est séparable).

Soit donc  $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$  - une telle base hilbertienne. L'espace vectoriel  $V$  engendré par les combinaisons linéaires (finies) des  $e_k$  est dense dans  $H$ . Construisons alors

la suite des espaces  $(V_n)$ , croissante par inclusion ;  $V_n$  engendré par les  $e_k, k \leq n$ .  
On a

$$V_1 \subset V_2 \subset \dots \subset V_n \subset \dots \subset \cup V_n = V \quad \text{et } V = H$$

Alors si  $u$  est la solution exacte de (FV), la convergence de  $u_n$  solution de  $(P_n)$  vers  $u$  est assurée par le lemme qui suit :

**Lemme 0.5.1. (de Céa)** Soit  $c$  une-constante de continuité de  $\mathcal{B}$  :

$$|\mathcal{B}(\psi, \varphi)| \leq c \|\psi\| \|\varphi\|, \forall \psi, \varphi \in H$$

et  $\gamma > 0$  une constante de coercivité de  $\mathcal{B}$  :

$$\mathcal{B}(\psi, \psi) \geq \gamma \|\psi\|^2, \forall \psi \in H$$

Soit  $u$  la solution de (FV) et  $u_n^2$  la solution du problème discrétisé  $(P_n)$ .  
On a l'estimation

$$\|u - u_n\|_H \leq \frac{c}{\gamma} \inf_{\psi \in V_n} \|u - \psi\|_H$$

et si  $\mathcal{B}$  est symétrique

$$\|u - u_n\|_H \leq \sqrt{\frac{c}{\gamma}} \inf_{\psi \in V_n} \|u - \psi\|_H$$

**Preuve :** Nous avons, puisque  $V_n \subset V$ ,

$$\forall w_n \in V_n, \mathcal{B}(u, w_n) = \ell(w_n),$$

et aussi, par définition de  $u_n, \forall w_n \in V_n \mathcal{B}(u_n, w_n) = \ell(w_n)$ .

Alors  $\forall w_n \in V_n, \mathcal{B}(u - u_n, w_n) = 0$ , donc  $\forall w_n \in V_n$  et  $\forall v_n \in V_n$ , on a

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(u - u_n, u - u_n) &= \mathcal{B}(u - u_n, u - u_n + w_n), \\ &= \mathcal{B}(u - u_n, u - v_n). \end{aligned}$$

De la continuité et de la coercivité de  $\mathcal{B}$ , nous déduisons

$$\gamma \|u - u_n\|^2 \leq \mathcal{B}(u - u_n, u - u_n) = \mathcal{B}(u - u_n, u - v_n) \leq c \|u - u_n\| \|u - v_n\|$$

soit  $\gamma \|u - u_n\|^2 \leq c \|u - u_n\| \cdot \|u - v_n\|, \forall v_n \in V_n$ , ce qui donne l'estimation cherchée.

Maintenant, si  $\mathcal{B}$  est en plus symétrique, nous avons aussi

$$\mathcal{B}(u - u_n, u - u_n) = \mathcal{B}(u - v_n, u - u_n) \quad \forall v_n \in V_n$$

Par la suite, nous avons pour tout  $v_n \in V_n$

$$\mathcal{B}(u - u_n, u - u_n) = \mathcal{B}(u - v_n, u - v_n) + B(u - u_n, v_n - u_n)$$

et on sait que  $\mathcal{B}(u - v_n, w_n) = 0 \quad \forall w_n \in V_n$ ,

d'où  $\mathcal{B}(u - u_n, u - u_n) = \mathcal{B}(u - v_n, -u - v_n) \quad \forall v_n \in V_n$ . On déduit alors de la coercivité et de la continuité de  $\mathcal{B}$

$$\gamma \|u - u_n\|^2 \leq \mathcal{B}(u - u_n, u - \bar{u}_n) = \mathcal{B}(u - v_n, u - v_n) \leq c \|u - v_n\|^2$$

D'où  $\|u - u_n\| \leq \sqrt{\frac{c}{\gamma}} \|u - v_n\|$ , ce qui donne la deuxième estimation.  $\blacksquare$

**Remarque 0.5.1.** :

1. Si le lemme de Céa permet d'établir la convergence du procédé d'approximation, il ne donne pas, a priori de majoration de l'erreur puisque la solution  $u$  n'est pas supposée connue.
2. Lorsque  $\mathcal{B}$  est de plus symétrique,  $\mathcal{B}$  est un produit scalaire sur  $H$ . Dans ce cas  $u_n$  est exactement la projection, au sens du produit scalaire  $\mathcal{B}$ , de  $u$  sur  $V_n$ .

**Conséquence 0.5.1.** :

Comme  $V_n$  de dimension finie est fermé dans  $H$ ,  $\inf_{\psi \in V_n} \|u - \psi\|_H$  est atteint pour  $\psi_n = pr_n u$ ;  $pr_n u$  étant la projection orthogonale de  $u$  sur l'espace  $V_n$  (au sens du produit scalaire de  $H$ ).  $u \in H$ , s'exprime sur la base hilbertienne  $(e_k)$  par  $u = \sum_1^\infty c^k e_k$  avec  $\Gamma_1 (c^k)^2 < \infty$  et  $pr_n u = \sum_1^n c^k e_k$

Soit  $R_n = u - pr_n u \equiv \sum_{k=n+1}^\infty c^k e_k$ . Alors  $\|R_n\|^2 = \sum_{k=n+1}^\infty (c^k)^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$  (reste de la série de  $u$ ) et d'après le lemme de Céa,  $\|u - u_n\| \leq \frac{c}{\gamma} \|R_n\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ . Précisément  $\epsilon > 0$  étant donné, il existe un espace  $V_n$  de la suite, tel que,  $\|u - pr_n u\| < \epsilon$  d'où on a, pour  $u_n$  solution du problème dans  $V_n$ ,  $\|u - u_n\| \leq \frac{c}{\gamma} \epsilon$ .

### 0.5.3 Construction d'un sous-espace $V_n$ de $H_0^1(\Omega)$ .

#### Fonction-chapeau $\Lambda$

Soit une subdivision de  $\Omega = ]0, 1$  [en  $n + 1$  intervalles égaux, de pas  $h = \frac{1}{n+1}$  :

$$0 = x_0 < x_1 = h < x_2 = 2h < \dots < x_k = kh < \dots < x_{n+1} = 1$$

Pour  $1 \leq k \leq n$  on définit la fonction-chapeau  $\Lambda_k$  par

$$\Lambda_k(x) = \begin{cases} \frac{(x - x_{k-1})}{h} & \text{si } x_{k-1} \leq x \leq x_k \\ \frac{(x_{k+1} - x)}{h_{k+1} - h_k} & \text{si } x_k \leq x \leq x_{k+1} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On définit' aussi les deux fonctions

$$\Lambda_0(x) = \begin{cases} \frac{x_1-x}{h} & \text{si } x_0 \leq x \leq x_1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}, \Lambda_{n+1}(x) = \begin{cases} \frac{x-x_n}{h} & \text{si } x_n \leq x \leq x_{n+1} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

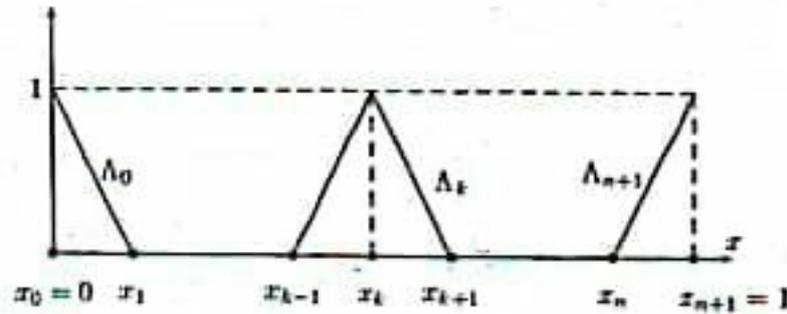


Fig 1.7 Fonctions chapeaux

La fonction  $\Lambda_k$  est continue sur  $\Omega$  et affine par morceaux, de support  $[x_{k-1}, x_{k+1}]$  pour  $1 \leq k \leq n$ .

Soit  $V_n$  l'espace vectoriel des fonctions  $\varphi_n$  continues sur  $[0, 1]$ , affines sur chaque intervalle  $[x_i, x_{i+1}]$  et vérifiant  $\varphi_n(0) = \varphi_n(1) = 0$ . Il est facile de - montrer que les fonctions-chapeaux  $\Lambda_k, k = 1$  à  $n$ , forment une-base de  $V_n$ , espace de dimension  $n$  et que  $\varphi_n \in V_n$  se décompose sur cette base en  $\varphi_n = \sum_{k=1}^n \varphi_n(x_k) \Lambda_k$ .

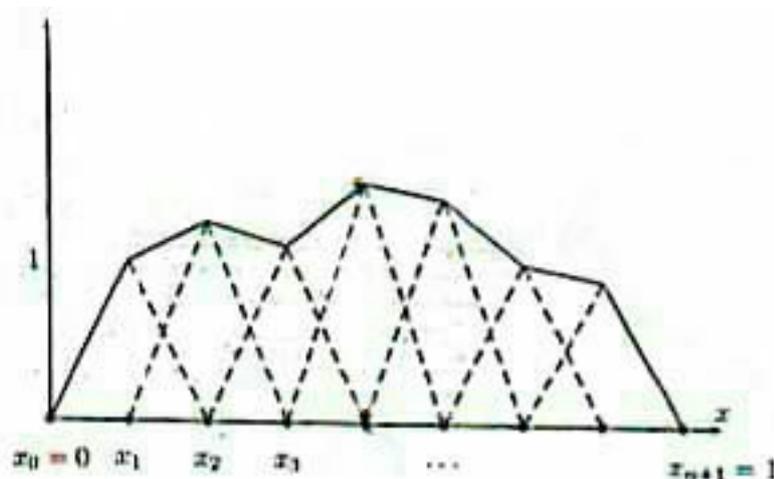


Fig 1.8 Approximation affine par morceaux

$V_n \subset H_0^1(\Omega)$ . En effet,  $\varphi_n$  est continue et dérivable par morceaux donc,  $\varphi_n \in L^2(\Omega)$ ,  $[\varphi_n]' = [\varphi_n']$  et  $\varphi_n'$  est constante par morceaux d'où  $\varphi_n' \in L^2(\Omega)$ . Enfin  $\varphi_n(0) = \varphi_n(1) = 0$ .

Soit  $u_n = \sum \alpha_i \Lambda_i$ , la solution du problème approché  $(P_n)$ . La matrice  $A$  du système linéaire, permettant l'obtention des coordonnées  $\alpha_i$  de  $u_n$  dans la base  $(\Lambda_i)$  de  $V_n$ , s'écrit sous la forme

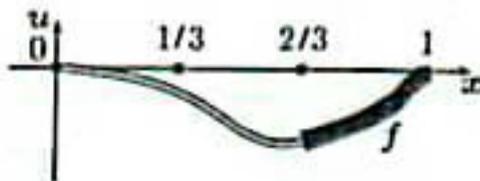
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{pmatrix}$$

avec  $a_{ij} = \mathcal{B}(\Lambda_i, \Lambda_j)$ .

On remarque que la matrice est très creuse, on elle est tridiagonale, car si  $|i-j| > 1$  les supports de  $\Lambda_i$  et  $\Lambda_j$  ont au plus un point commun.  $A$  est appelée matrice de rigidité.

**Exemple 0.1.** Reprenons le problème de Sturm-Liouville initial

$$\begin{cases} -u'' + u = f \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$



**Fig 1.9** Corde chargée, attachée

qui modélise la position à l'équilibre d'une corde tendue, attachée en ses extrémités et chargée par  $f$ . Ici on choisit un chargement uniforme sur le dernier tiers de la corde :  $f(x) = \text{ech}(x - \frac{2}{3})$  avec  $\text{ech}$  la fonction échelon. La solution faible  $u \in H_0^1(\Omega)$  vérifie l'équation variationnelle :

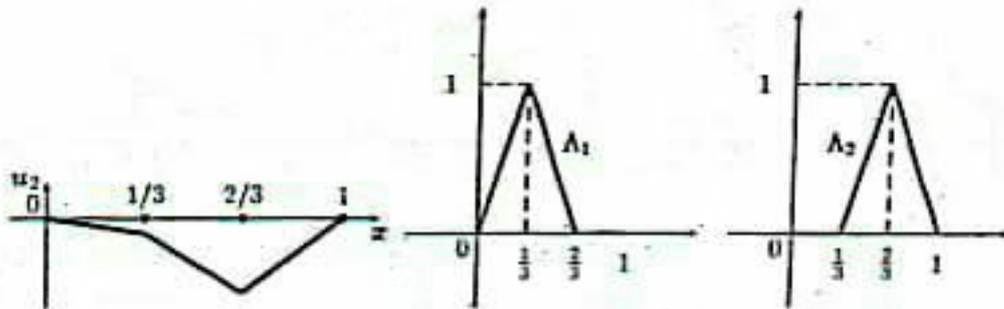
$$\forall \varphi \in H_0^1(\Omega) \quad (u | \varphi) = \int_{\Omega} f \varphi$$

On sait aussi, que pour  $f \in L^2(\Omega)$ ,  $u$  appartient à  $H^2(\Omega)$ , d'où l'existence d'un représentant de  $u$  de classe  $C^1$  sur  $\bar{\Omega}$ .

Cherchons la solution approchée  $u_2$ , obtenue pour une subdivision régulière de  $\{0, 1\}$  :

$$x_0 = 0 < x_1 = \frac{1}{3} < x_2 = \frac{2}{3} < x_3 = 1$$

On cherche ainsi  $u_2$  sous la forme :  $u_2 = \alpha_1 \Lambda_1 + \alpha_2 \Lambda_2$



**Fig 1.10** Solution avec trois éléments

avec :

$$\Lambda_1(x) = \begin{cases} 3x; & x \leq \frac{1}{3} \\ 2 - 3x; & \frac{1}{3} \leq x \leq \frac{2}{3} \end{cases}, \Lambda_2(x) = \begin{cases} 3x - 1; & \frac{1}{3} \leq x \leq \frac{2}{3} \\ 3 - 3x; & x \geq \frac{2}{3} \end{cases}$$

**Calcul de la matrice de rigidité  $A$  :**

$$a_{11} = (\Lambda_1 | \Lambda_1)_{H^1} = \int_0^{2/3} (\Lambda_1^2 + \Lambda_1'^2)(x) dx$$

$$a_{11} = \int_0^{1/3} (9x^2 + 9) dx + \int_{1/3}^{2/3} [(2 - 3x)^2 + 9] dx = 6 + \frac{2}{9}$$

$$a_{22} = a_{11} = 6 + \frac{2}{9}$$

$$a_{12} = a_{21} = (\Lambda_1 | \Lambda_2)_{H^1} = \int_{1/3}^{2/3} (\Lambda_1 \Lambda_2 + \Lambda_1' \Lambda_2')(x) dx$$

$$a_{12} = \int_{1/3}^{2/3} [(2 - 3x)(3x - 1) - 9] dx = \int_{1/3}^{2/3} [(3x - 1) - (3x - 1)^2 - 9] dx$$

$$a_{12} = a_{21} = -3 + \frac{1}{18}$$

$$\text{D'autre part } \ell_f(\Lambda_1) = 0 \quad \ell_f(\Lambda_2) = \int_{2/3}^1 = 1 \cdot (3 - 3x) dx$$

$$\ell_f(\Lambda_2) = \left[ \frac{3}{2}(x-1)^2 \right]_{2/3}^1 = -\frac{1}{6}$$

Le système à résoudre est

$$\begin{pmatrix} 6 + \frac{2}{9} & -3 + \frac{1}{18} \\ -3 + \frac{1}{18} & 6 + \frac{2}{9} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

d'où  $\alpha_1 \simeq -0,0163$ ;  $\alpha_2 \simeq -0,0345$

### Erreur commise

En particulier les valeurs aux nœuds sont  $u_2\left(\frac{1}{3}\right) = \alpha_1$  et  $u_2\left(\frac{2}{3}\right) = \alpha_2$ . Calculons la valeur de  $u_2 \cdot \frac{5}{3}x = \frac{5}{2}$  et en  $x = \frac{5}{6}$  :

$$\begin{aligned} u_2\left(\frac{1}{2}\right) &= -0,0163 \left(2 - \frac{3}{2}\right) - 0,0345 \left(\frac{3}{2} - 1\right) \simeq -0,0254 \\ u_2\left(\frac{5}{6}\right) &= -0,0345 \left(3 - 3 \cdot \frac{5}{6} - 1\right) \simeq -0,0172 \end{aligned}$$

### Solution exacte

On sait qu'il existe une solution faible  $u$  de classe  $C^1$  sur  $\Omega$  ( $u \in H^2(\Omega)$ ). On peut chercher la solution générale classique sur chaque intervalle  $\left[0, \frac{2}{3}\right[$  et  $\left] \frac{2}{3}, 1\right]$  puis déterminer un prolongement de classe  $C^1$  sur  $[0, 1]$  tout entier :

1. sur  $\left[0, \frac{2}{3}\right[$  la solution générale de classe  $C^2$  de :  $-y'' + y = 0$  est  $y = a \operatorname{ch} x + b \operatorname{sh} x$ . Celle qui vaut 0 en  $x = 0$  est  $y = a \operatorname{sh} x$ ,
2. sur  $\left] \frac{2}{3}, 1\right]$  la solution générale de classe  $C^2$  de :  $-y'' + y = 1$  peut s'écrire  $y = c \operatorname{ch}(1-x) + d \operatorname{sh}(1-x) - 1$ . Elle vérifie  $u(1) = 0$  pour  $c = 1$ , d'où la solution.

$$u(x) = d \operatorname{sh}(1-x) + \operatorname{ch}(1-x) - 1$$

On cherche  $u$  de classe  $C^1$  sur  $[0, 1]$  d'où

$$\begin{cases} u\left(\frac{2}{3}^-\right) = u\left(\frac{2}{3}^+\right) & \text{soit } a \operatorname{sh}\left(\frac{2}{3}\right) = d \operatorname{sh}\left(\frac{1}{3}\right) + \operatorname{ch}\left(\frac{1}{3}\right) \\ u'\left(\frac{2}{3}^-\right) = u'\left(\frac{2}{3}^+\right) & \text{soit } a \operatorname{ch}\left(\frac{2}{3}\right) = -d \operatorname{ch}\left(\frac{1}{3}\right) - \operatorname{sh}\left(\frac{1}{3}\right) \end{cases}$$

soit  $a = \frac{1 - \operatorname{ch}\left(\frac{1}{3}\right)}{\operatorname{sh} 1}$  et  $d = \frac{\operatorname{ch}\left(\frac{2}{3}\right) - \operatorname{ch} 1}{\operatorname{sh} 1}$ , d'où la solution cherchée

$$\begin{cases} \text{Sur } \left[0, \frac{2}{3}\right] : u(x) = \frac{1 - \operatorname{ch}\left(\frac{1}{3}\right)}{\operatorname{sh} 1} \operatorname{sh} x \\ \text{Sur } \left[\frac{2}{3}, 1\right] : u(x) = \frac{\operatorname{ch}\left(\frac{2}{3}\right) - \operatorname{ch} 1}{\operatorname{sh} 1} \cdot \operatorname{sh}(1-x) + \operatorname{ch}(1-x) - 1 \end{cases}$$

d'où

$$u\left(\frac{1}{3}\right) \simeq -0.01620, u\left(\frac{2}{3}\right) \simeq -0.0342, u\left(\frac{1}{2}\right) \simeq -0.0248, u\left(\frac{5}{6}\right) \simeq -0.0172$$

Ici on peut comparer valeurs exactes et valeurs approchées pour évaluer l'erreur commise.

## 0.6 La méthode des éléments finis

Nous allons présenter le cheminement de la méthode des éléments finis sur le problème modèle de Sturm-Liouville mais avec des conditions aux limites non nécessairement homogènes. Soit à résoudre

$$\begin{cases} -u''(x) + u(x) = f & 0 < x < 1 \\ u'(0) - \beta u(0) = 0, u(1) = 1 \end{cases} \quad (SLS).$$

où  $\beta$  est une constante positive donnée et  $f \in L^2(\Omega)$ .

### Etape 1 : La formulation variationnelle

Le point de départ de la méthode des éléments finis consiste à trouver une formulation variationnelle du problème (SLS).

Tout d'abord utilisons un changement de variable pour rendre la conditions en  $x = 1$  homogène.

On pose  $\hat{u} = u - x$  et  $\hat{f}(x) = f(x) - x$ . On obtient ainsi un nouveau problème vérifiés par la nouvelle inconnue  $\hat{u}$  :

$$\begin{cases} -u''(x) + u(x) = f & 0 < x < 1 \\ u'(0) - \beta u(0) = -1, u(1) = 0 \end{cases} \quad (SLS2)$$

Supposons  $\hat{u} \in H^2(\Omega)$ . Dans ce cas, les conditions aux limites ont sens  $\hat{u} \in H^2(\Omega)$ . Dans ce cas, puisque  $n' \in H^1(\Omega)$ . En multipliant l'équation différentielle de (SLS2) puisque

fonction-test  $\varphi \in H^1(\Omega)$  et en intégrant, on obtient au sens des distributions  $\int_0^1 (-\hat{u}'' + \hat{u}) \varphi = \int_0^1 \hat{f} \varphi$ . En utilisant la formule d'intégration par parties étendue aux fonctions de  $H^1$ , on a

$$-[\hat{u}'\varphi]_0^1 + \int_0^1 (\hat{u}'\varphi' + \hat{u}\varphi) = \int_0^1 \hat{f}\varphi$$

Comme on connaît la valeur de la solution en  $x = 1$  mais pas en  $x = 0$ , on prendra comme espace de fonctions-tests

$$F = \{\varphi \in H^1(\Omega) : \varphi(1) = 0\}$$

et dans ce cas  $-\hat{u}'\varphi|_0^1 = \hat{u}'(0)\varphi(0) \equiv (\beta\hat{u}(0) - 1)\varphi(0) \quad \forall \varphi \in F$

On obtient ainsi la formulation variationnelle

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \hat{u} \in F \text{ tel que} \\ \int_0^1 \hat{u}'(\bar{x})\varphi'(x)dx + \int_0^1 \hat{u}(x)\varphi(x)dx + \beta\hat{u}(0)\varphi(0) \\ = \int_0^1 \hat{f}(x)\varphi(x)dx + \varphi(0) \forall \varphi \in F \end{array} \right. \quad (VSLS2)$$

Pour montrer l'existence et l'unicité d'une solution du problème (VSLS2), il suffit de vérifier les hypothèses du théorème de Lax-Milgram avec la forme bilinéaire donnée par

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(\hat{u}, \varphi) &= \int_0^1 \hat{u}'(x)\varphi'(x)dx + \int_0^1 \hat{u}(x)\varphi(x)dx + \beta\hat{u}(0)\varphi(0) \\ \ell(\varphi) &= \int_0^1 \hat{f}(x)\varphi(x)dx + \varphi(0) \end{aligned}$$

sur l'espace de Hilbert  $F$  muni de la norme  $\|\cdot\|_* : v \mapsto \left[ \int_0^1 v'^2(x)dx \right]^{\frac{1}{2}}$

1. **Continuité de  $\mathcal{B}$**  : On a, pour  $v \in F, v(x) = -\int_x^1 v'(t)dt$ , d'où

$$\forall x \in \Omega, \quad |v(x)| \leq \|v'\|_{L^2} = \|v\|_* \quad (6)$$

ce qui entraîne  $\|v\|_{L^2} \leq \|v\|_*$  (on se sert de cette inégalité pour montrer que  $\|\cdot\|_*$  est une norme équivalente à la norme  $\|\cdot\|_{H^1}$ ) et par Schwarz

$$\forall v, w \in F, |\mathcal{B}(v, w)| \leq (2 + \beta)\|v\|_*\|w\|_*$$

2. **Coercivité de  $\mathcal{B}$**  :  $\forall v \in F, \quad \mathcal{B}(v, v) = \int_0^1 (v'^2 + v^2) + \beta v(0)^2 \geq \|v\|_*^2$

3. **Continuité de  $\ell$**  : De l'inégalité de Schwarz et de 6, on obtient

$$|\ell(\varphi)| \leq (\|\hat{f}\|_{L^2} + 1) \|\varphi\|_*$$

### Étape 2 : Discrétisation du domaine (Maillage)

On commence par une discrétisation du domaine  $\Omega = ]0, 1[$ . On définit  $N + 2$  nœuds  $x_k$  dans l'intervalle  $[0, 1]$  par

$$x_0 = 0 < x_1 < x_2 < \dots < x_N < x_{N+1} = 1$$

Pour la suite, nous considérons une subdivision régulière de pas constant

$h = x_{i+1} - x_i$  pour  $i = 0, 1, \dots, N$ .

$I_k = [x_k, x_{k+1}]$  est appelé  $k^e$  élément fini. On a  $\bar{\Omega} = \bigcup_{k=0}^N I_k$

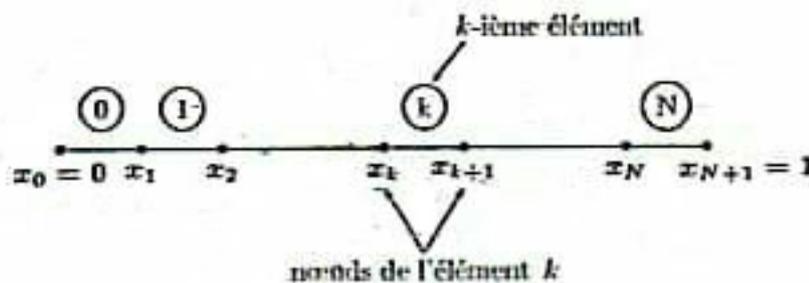


Fig 1.11 Subdivision et nœuds

### Étape 3 : Choix du type d'élément fini

L'inconnue du problème est  $\hat{u} \in F$ . Nous cherchons une approximation de  $\hat{u}$ , notée  $\hat{u}_h$  dans un sous-espace de  $F$  de-dimension finie noté  $V_h$ . Pour cela, nous utilisons la méthode de Galerkin vue au paragraphe 0.5 avec un choix judicieux des fonctions  $(\varphi_i)$  formant la base de  $V_h$ .

Il y a énormément de choix possibles des fonctions  $\varphi_i$ . Citons - en deux exemples usuels.

#### 1. Élément fini de type Lagrange linéaire

L'approximation élément fini la plus utilisée en ingénierie pour la résolution de problèmes aux limites d'ordre 2 est l'élément fini de type Lagrange linéaire qui vérifie :

- Les valeurs représentatives particulières de  $\hat{u}_h(x)$  sont les valeurs de  $\hat{u}_h$  aux nœuds  $x_i$  :  $\hat{u}_h(x_i)$  notée  $\hat{u}_h^i$ .
- $\hat{u}_h$  est affine sur chaque élément  $I_k, k = 0, 1 \dots N$ .

Considérons les fonctions, dites de formes,  $\varphi_i, i = 0, 1, \dots N + 1$  définies par :

- $\varphi_i$  est affine sur chaque élément fini ;
- $\varphi_i(x_j) = \delta_{ij}$  (le symbole de Kronecker  $\delta_{ij} = 1$  si  $i = j$  et 0 sinon) ;
- $\varphi_i \in H^1(0, 1)$ .

En fait, ces fonctions sont exactement les fonctions-chapeaux,  $\Lambda_i$ , définies dans le paragraphe 0.5.3.

Dans le cas (SLS2) traité en exemple, on prend  $V_h = \langle \Lambda_k, k = 0 \text{ à } N \rangle$ . espace engendré par les  $\Lambda_k$  et  $\hat{u}_h$  s'écrit sous la forme

$$\hat{u}_h(x) = \sum_{i=0}^N \hat{u}_h^i \Lambda_i(x)$$

**Remarque 0.6.1.**

- Dans la définition de  $V_h$  l'indice  $k$  va de 0 à  $N$ , car la solution du problème (SLS) est connue en  $x = 1$  et inconnue en  $x = 0$ . On a dans ce cas  $N + 1$  inconnues et la matrice du système linéaire, permettant la résolution de  $\hat{u}_h$ , est d'ordre  $N + 1$ .
- Dans le cas d'éléments finis Lagrange linéaire, les nœuds  $x_i, i = 0$  à  $N + 1$  sont appelés degrés de liberté et chaque élément  $I_k$  admet deux degrés de liberté.

**2. Élément fini de type Lagrange quadratique**

Ici  $\hat{u}_h$  est continue sur  $\bar{\Omega}$  et, sur chaque élément  $I_k$ , elle est supposée quadratique, c'est-à-dire de la forme

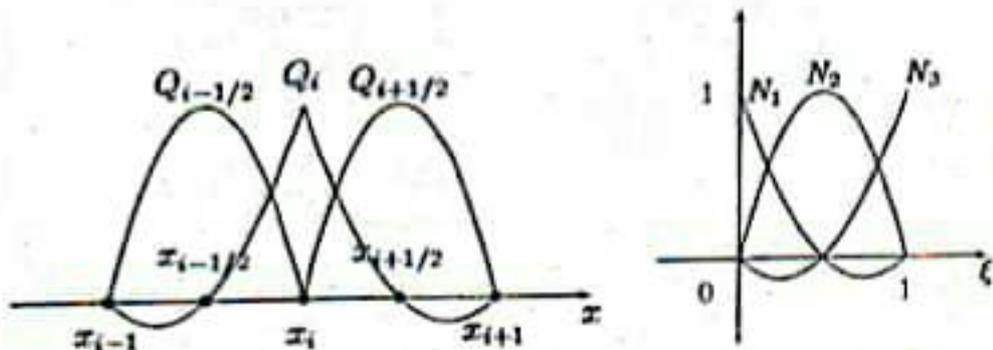
$$\hat{u}_h(x) = a + bx + cx^2 \quad \text{sur chaque } I_k.$$

Pour déterminer de façon unique  $\hat{u}_h$  il ne suffit pas de connaître  $\hat{u}_h$  aux noeuds  $x_i$ , il faut ajouter des nœuds supplémentaires, par exemple au milieu des intervalles  $I_i$  soit  $x_{i+\frac{1}{2}}$ . Les fonctions de formes  $Q_i$ , de type parabolique, correspondant à cette approximation seront définies par :

$$Q_i(x_i) = 1, Q_i(x_j) = 0 \text{ pour } j \neq i, \left( j = \frac{1}{2}, \dots, i - \frac{1}{2}, i + \frac{1}{2}, \dots, N + \frac{1}{2} \right)$$

$$Q_{i+\frac{1}{2}}(x_{i+\frac{1}{2}}) = 1, \quad Q_{i+\frac{1}{2}}(x_j) = 0 \quad \text{pour } j \neq i, j \neq i + \frac{1}{2}$$

Bien entendu, la forme de  $Q_i$  sera différente suivant que l'indice  $i$  correspond à une extrémité d'un élément ou au milieu de celui-ci.



**Fig 1.12** Fonctions de formes Lagrange quadratiques

Les inconnues seront donc les valeurs de  $\hat{u}_h$  aux extrémités et au milieu de chaque intervalle. Ces fonctions formes pourront donc être définies localement à partir des 3 fonctions de formes  $N_i(\xi)$ ,  $i = 1, 2, 3$ , définies sur l'élément de référence  $[0, 1]$  par

$$N_1(\xi) = 2 \left( \xi - \frac{1}{2} \right) (\xi - 1), N_2(\xi) = -4\xi(\xi - 1), N_3(\xi) = 2\xi \left( \xi - \frac{1}{2} \right)$$

#### Étape 4 : Le problème approché

Écrivons le problème approché dans le cas des éléments finis Lagrange linéaire. Le problème approché de (SLS2) est

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \hat{u}_h = \sum_{i=0}^N \hat{u}_h^i \Lambda_i(x) \text{ tel que } \mathcal{B}(\hat{u}_h, v_h) = \ell(v_h) \quad \forall v_h \in V_h \quad \text{avec} \\ \mathcal{B}(\hat{u}_h, v_h^-) = \int_0^1 \hat{u}_h'(x) v_h'(x) dx + \int_0^1 \hat{u}_h(x) v_h(x) dx + \beta \hat{u}_h(0) v_h(0) \\ \ell(v_h) = \int_0^1 \hat{f}(x) v_h(x) dx + v_h(0) \end{array} \right.$$

En prenant respectivement  $v_h = \Lambda_0, \Lambda_1, \dots, \Lambda_N$ , on obtient le système linéaire suivant

$$AU = b$$

$$\text{Avec } U = \begin{pmatrix} \hat{u}_h^0 \\ \vdots \\ \hat{u}_h^N \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} - \int_0^1 \hat{f}(x) \Lambda_0(x) dx + 1 \\ \int_0^1 \hat{f}(x) \Lambda_1(x) dx \\ \vdots \\ \int_0^1 \hat{f}(x) \Lambda_N(x) dx \end{pmatrix}$$

En utilisant la définition des fonctions formes  $\Lambda_i$ , on obtient

$$\mathcal{B}(\Lambda_0, \Lambda_0) = \int_0^h \Lambda_0'^2 dx + \int_0^h \Lambda_0^2 dx + \beta = \frac{1}{h} + \frac{h}{3} + \beta$$

$$\mathcal{B}(\Lambda_0, \Lambda_1) = \int_0^h \Lambda_0' \Lambda_1' dx + \int_0^h \Lambda_0 \Lambda_1 dx = -\frac{1}{h} + \frac{h}{6}$$

et pour  $i = 1$  à  $N$

$$B(\Lambda_i, \Lambda_i) = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \Lambda_i'^2 dx + \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \Lambda_i^2 dx = \frac{2}{h} + \frac{2h}{3}$$

$$\mathcal{B}(\Lambda_i, \Lambda_{i+1}) = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \Lambda_i' \Lambda_{i+1}' dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \Lambda_i \Lambda_{i+1} dx = -\frac{1}{h} + \frac{h}{6}$$

$$\mathcal{B}(\Lambda_{i-1}, \Lambda_i) = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \Lambda_{i-1}' \Lambda_i' dx + \int_{x_{i-1}}^{x_i} \Lambda_{i-1} \Lambda_i dx = -\frac{1}{h} + \frac{h}{6}$$

On vérifie bien que la matrice,  $A$  est symétrique.

Enfin  $\mathcal{B}(\Lambda_i, \lambda_j) = 0 \neq i - 1, i, i + 1$

d'où

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{h} + \frac{h}{3} + \beta - \frac{1}{h} + \frac{h}{6} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -\frac{1}{h} + \frac{h}{6} & \frac{2}{h} + \frac{2h}{3} - \frac{1}{h} + \frac{h}{6} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\frac{1}{h} + \frac{h}{6} + \frac{2h}{3} \end{pmatrix}$$

## 0.7 Mise en œuvre de la méthode des éléments finis en dimension 1

Dans l'étape 0.6 de la section précédente, la matrice de rigidité  $A$  a été calculée analytiquement. On va maintenant la construire par assemblage de matrices locales attachées chacune à un élément fini. On considère toujours l'exemple

$$\begin{cases} -\hat{u}''(x) + \hat{u}(x) = \hat{f} \\ \bar{u}'(0) - \beta\hat{u}(0) = -1, \hat{u}(1) = 0 \end{cases} \quad 0 < x < \bar{1} \quad (SLS \ 2)$$

Pour raison de simplicité, on prendra dans la suite  $\beta = 0$ . Le cas  $\beta \neq 0$  ne jouera que sur le coefficient de  $\hat{u}_h^0$  où on ajoute  $\beta$  comme on peut le voir dans la matrice finale de l'étape 0.6

La formulation variationnelle associée du problème exact est alors : et celle du problème approché est donnée par

$$\begin{cases} \text{Trouver } \hat{u} \in F \text{ telle que} \\ \int_0^1 \hat{u}'(x)\varphi'(x)dx + \int_0^1 \hat{u}(x)\varphi(x)dx \\ = \int_0^1 \hat{f}(x)\varphi(x)dx + \varphi(0) \quad \forall \varphi \in F \end{cases} \quad (PM)$$

et celle du problème approché est donnée par

$$\begin{cases} \text{Trouver } \hat{u}_h = \sum_{i=0}^N \hat{u}_h^i \Lambda_i(x) \text{ telle que} \\ \mathcal{B}(\hat{u}_h, v_h) = \int_0^1 \hat{u}_h'(x)v_h'(x)dx + \int_0^1 \hat{u}_h(x)v_h(x)dx \\ = L(v_h) = \int_0^1 \hat{f}(x)v_h(x)dx + v_h(0) \quad \forall v_h \in V_h \end{cases} \quad (PMh)$$

### 0.7.1 Matrice de rigidité locale relative à l'élément fini $k$

Pour la construction de la matrice de rigidité globale on ne tient pas compte, dans un premier temps, des conditions aux limites. On décompose les intégrales intervenant dans la formulation faible, élément par élément, comme suit

$$\sum_{k=0}^N \int_{\mathbb{K}} (\hat{u}'_h(x)v'(x) + \hat{u}_h(x)v(x)) dx = \sum_{k=0}^N \int_{\mathbb{K}} \hat{f}(x)v(x) dx + v(0) \quad (7)$$

Les fonctions  $\hat{u}_h$  et  $v$  s'expriment, sur l'élément (k), c'est-à-dire sur  $I_k = [x_k, x_{k+1}]$ , uniquement à partir des fonctions formes associés aux degrés de liberté de l'élément (k). On a donc sur l'élément (k) :

$$\begin{cases} \hat{u}_h(x) = \hat{u}_h^k \Lambda_k(x) + \hat{u}_h^{k+1} \Lambda_{k+1}(x) \\ v(x) = v_k \Lambda_k(x) + v_{k+1} \Lambda_{k+1}(x) \end{cases}$$

On peut réécrire l'équation 7 sous la-forme (k)

$$\sum_{k=0}^N \begin{bmatrix} v_k & v_{k+1} \end{bmatrix} K^k \begin{bmatrix} \hat{u}_h^k \\ \hat{u}_h^{k+1} \end{bmatrix} = \sum_{k=0}^N \begin{bmatrix} v_k & v_{k+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \int_{(\tau)} \hat{f} \Lambda_k dx \\ \int_{(\tau)} \hat{f} \Lambda_{k+1} dx \end{bmatrix} + v_0 \quad (8)$$

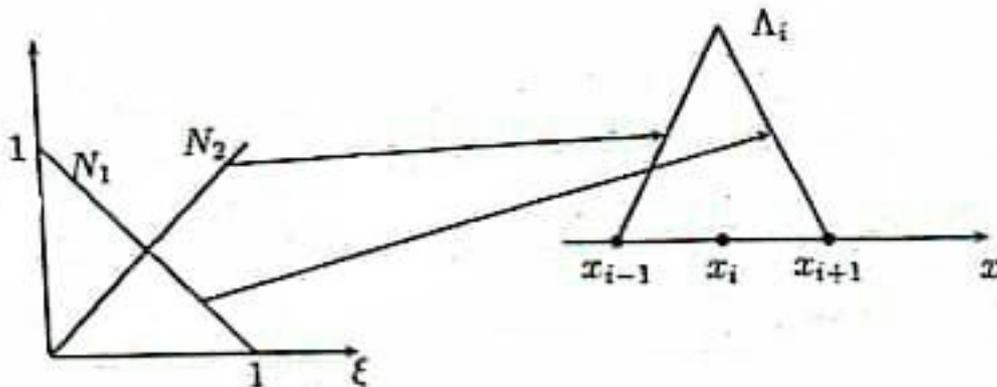
avec

$$K^k = \begin{bmatrix} \int_{(k)} (\Lambda'_k \Lambda'_k + \Lambda_k \Lambda_k) dx & \int_{(k)} (\Lambda'_k \Lambda'_{k+1} + \Lambda_k \Lambda_{k+1}) dx \\ \int_{(K)} (\Lambda'_{k+1} \Lambda'_k + \Lambda_{k+1} \Lambda_k) dx & \int_{(K)} (\Lambda'_{k+1} \Lambda'_{k+1} + \Lambda_{k+1} \Lambda_{k+1}) dx \end{bmatrix},$$

qui est appelée matrice de rigidité locale relative à l'élément (K).

Au lieu de calculer toutes les matrices de rigidité locale,  $N + 1$  matrices z dans l'exemple, on calcule une seule matrice relative à l'élément de référence  $[0, 1]$  et on déduit, par un simple changement de variable, toutes les matrices de rigidité locale.

Sur l'élément de référence, on définit deux fonctions  $N_1$  et  $N_2$  représentant respectivement la partie droite et la partie gauche de la fonction de forme réelle. Ainsi, on a pour  $\xi \in [0, 1]$ ,  $N_1(\xi) = 1 - \xi$  et  $N_2(\xi) = \xi$ .



**Fig 1.13** Transformation de l'élément de référence en une fonctions chapeau

La matrice de rigidité locale de l'élément de référence est

$$K^r = \begin{bmatrix} \int_0^1 (N'_1 N'_1 + N_1 N_1) d\xi & \int_0^1 (N'_1 N'_2 + N_1 N_2) dx \\ \int_0^1 (N'_2 N'_1 + N_2 N_1) d\xi & \int_0^1 (N'_2 N'_2 + N_2 N_2) d\xi \end{bmatrix}$$

La fonction de forme  $\Lambda_i$  relative au nœud  $x_i$  s'exprime alors en fonction de  $N_1$  et  $N_2$  par :

$$\Lambda_i(x) = \begin{cases} N_2 \left( \frac{x-x_{i-1}}{h} \right) & x_{i-1} \leq x \leq x_i \\ N_1 \left( \frac{x-x_i}{h} \right) & x_i \leq x \leq x_{i+1} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Dans les intégrales intervenant dans la matrice  $K^k$ , on effectue le changement de variable  $\xi = \frac{x-x_i}{h}$ , et on obtient

$$K^r = \begin{bmatrix} \frac{1}{h} + \frac{h}{3} & -\frac{1}{h} + \frac{h}{6} \\ -\frac{1}{h} + \frac{h}{6} & \frac{1}{h} + \frac{h}{3} \end{bmatrix}$$

## 0.7.2 Assemblage de la matrice de rigidité globale

L'équation (5.4) peut s'écrire sous la forme

$$\sum_{k=0}^N [v_0 v_1 \dots v_k v_{k+1} \dots v_{N+1}] \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_k & \beta_k & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \beta_k & \gamma_k & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{u}_0 \\ \hat{u}_1 \\ \vdots \\ \hat{u}_k \\ \hat{u}_{k+1} \\ \vdots \\ \hat{u}_{N+1} \end{bmatrix}$$

$$\sum_{k=0}^N [v_0 v_1 \dots v_k v_{k+1} \dots v_{N+1}] \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ F_1^k \\ F_k^2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

où  $\begin{bmatrix} \alpha_k & \beta_k \\ \beta_k & \tau_k \end{bmatrix}$  est la matrice de rigidité locale  $K^k$  et  $\begin{bmatrix} F_k^1 \\ F_k^2 \end{bmatrix}$  le deuxième membre local.

On initialise à 0 la matrice  $K$ , de dimension le nombre total de degrés de liberté au carré (ici  $(N + 1)^2$ ). On calcule successivement les matrices locales de chaque élément et on les met à leur place dans la matrice  $K$  (ligne et colonne  $k$  et  $k + 1$  pour la matrice locale  $K^k$ ) et on ajoute les termes là où les matrices locales se chevauchent. A la fin, on obtient une matrice  $K$  et un vecteur  $F$  tels que

$$[v_0 \ v_1 \ \dots \ v_{N+1}] K \begin{bmatrix} \hat{u}_0 \\ \hat{u}_1 \\ \vdots \\ \hat{u}_{N+1} \end{bmatrix} = [v_0 \ v_1 \ \dots \ v_{N+1}]$$

égalité valable pour tout  $v = [v_0 v_1 \dots v_{N+1}]$  donc

$$K \begin{bmatrix} \hat{u}_0 \\ \hat{u}_1 \\ \vdots \\ \hat{u}_{N+1} \end{bmatrix} = F$$

On peut voir sur la figure ci-dessous la technique d'assemblage dans le cas de 4 éléments.

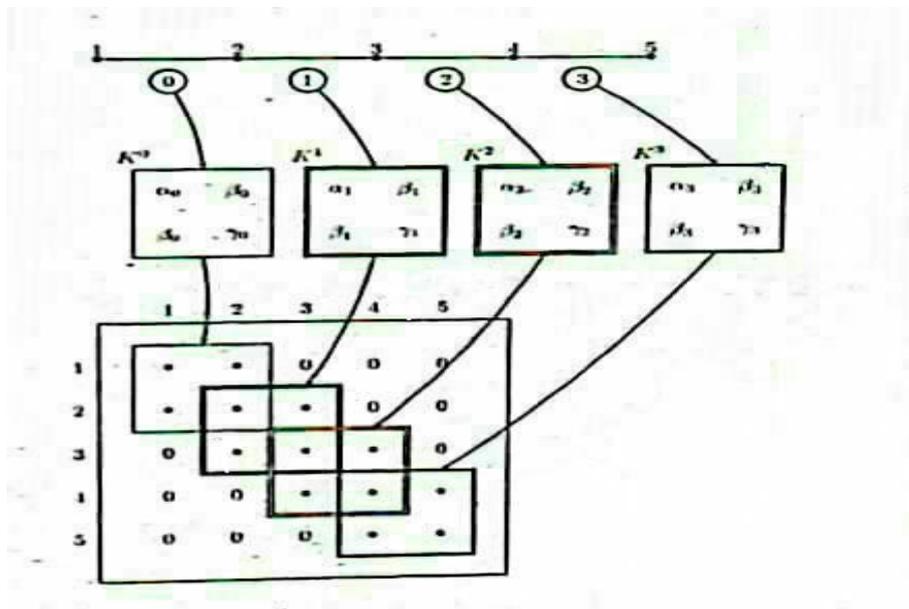


Fig 1.14 Fonctions de formes Lagrange quadratiques

Dans l'exemple modèle

Les itérations pour le calcul de la matrice de rigidité et du second membre sont

$$K = \begin{bmatrix} \frac{1}{h} + \frac{h}{3} & -\frac{1}{h} + \frac{h}{6} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{h} + \frac{h}{6} & \frac{1}{h} + \frac{h}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & - & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{h} + \frac{h}{3} & -\frac{1}{h} + \frac{h}{6} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{h} + \frac{h}{6} & \frac{1}{h} + \frac{h}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{h} + \frac{h}{3} & \frac{1}{h} + \frac{h}{6} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{h} + \frac{h}{6} & \frac{1}{h} + \frac{h}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{h} + \frac{h}{3} & -\frac{1}{h} + \frac{h}{6} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{h} + \frac{h}{6} & \frac{1}{h} + \frac{h}{3} \end{bmatrix}.$$

D'où

$$K = \begin{bmatrix} -\frac{1}{h} + \frac{h}{6} - \frac{2h}{3} + \frac{2h}{3} & -\frac{1}{h} + \frac{h}{6} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{h} + \frac{h}{6} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{h} + \frac{2h}{3} & -\frac{1}{h} + \frac{h}{6} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{h} + \frac{h}{6} & \frac{2}{h} + \frac{2h}{3} & -\frac{1}{h} + \frac{h}{6} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{h} + \frac{h}{6} & \frac{1}{h} + \frac{h}{3} \end{bmatrix}$$

On retrouve ainsi la matrice de rigidité  $A$  calculée terme à terme dans le cas  $N = 4$  et  $\beta = 0$ , mais avec une ligne en plus (la dernière de  $K$ ) et une colonne de plus (la dernière de  $K$ ). Comme on connaît la solution en  $x = 1$ , on enlève la ligne et la colonne supplémentaires de la matrice  $K$  pour retrouver exactement la matrice  $A$ .

On fait de même pour l'assemblage du second membre.

$$F = \begin{bmatrix} \int_0^h \hat{f} \Lambda_0 + 1 \\ \int_0^h \hat{f} \Lambda_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \int_h^{2h} \hat{f} \Lambda_1 \\ \int_h^{2h} \hat{f} \Lambda_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \int_{2h}^{3h} \hat{f} \Lambda_2 \\ \int_{2h}^{3h} \hat{f} \Lambda_3 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \int_{3h}^{4h=1} \hat{f} \Lambda_3 \\ \int_{3h}^{4h=1} \hat{f} \Lambda_4 \end{bmatrix} \\
 = \begin{bmatrix} \int_0^h \hat{f} \Lambda_0 + 1 \\ \int_0^{2h} \hat{f} \Lambda_1 \\ \int_h^{3h} \hat{f} \Lambda_2 \\ \int_{2h}^{4h} \hat{f} \Lambda_3 \\ \int_{3h}^{4h=1} \hat{f} \Lambda_4 \end{bmatrix}$$

## 0.8 Estimation d'erreur

Considérons le problème variationnel :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in H_0^1(\Omega) \text{ telle que} \\ \forall \varphi \in H_0^1(\Omega) \quad \mathcal{B}(u, \varphi) = \ell(\varphi) \end{cases} \quad (P)$$

On suppose que la forme bilinéaire  $\mathcal{B}$  est continue sur  $H_0^1(\Omega)$  avec  $c > 0$  comme constante de continuité et coercive avec  $\gamma > 0$  comme constante de coercivité. On suppose aussi que  $\ell$  est une forme linéaire continue sur  $H_0^1(\Omega)$ . Sous ces hypothèses, le problème précédent admet une solution unique d'après le théorème de Lax-Milgram.

Pour obtenir une solution approchée, on se donne un partage de  $\Omega = ]0, 1[$  de pas régulier  $h = \frac{1}{N+1}$  et on utilise les éléments finis Lagrange linéaires. Dans ce cas le sous-espace de dimension finie de  $H_0^1$ , noté  $V_h$ , est l'espace vectoriel engendré par les fonctions-chapeaux  $\Lambda_k, k = 1$  à  $N$ .

Soit  $u_h$  la solution du problème approche

$$\begin{cases} \text{Trouver } u_h \in V_h \text{ telle que} \\ \forall \varphi_h \in V_h \quad B(u_h, \varphi_h) = \ell(\varphi_h) \end{cases}$$

Le théorème suivant donne l'estimation de l'erreur commise par l'utilisation des éléments finis Lagrange linéaires.

**Théorème 0.8.1.** *Soit  $u$  la solution du problème faible  $(\mathcal{P})$ , supposée dans  $H^2$ , et  $u_h$  la solution du problème discrétisé  $(\mathcal{P}_h)$ . Nous avons l'estimation d'erreur suivante :*

$$\|u - u_h\|_{H^1} \leq Kh \|u''\|_{L^2}$$

où  $K$  est une constante indépendante de  $h$ .

Pour montrer ce théorème, on va établir deux lemmes préliminaires puis utiliser l'inégalité donnée par le lemme de Céa

$$\|u - u_h\|_{H^1} \leq \frac{c}{\gamma} \inf_{\varphi_h \in V_h} \|u - \varphi_h\|_{L^2}$$

L'intervalle  $I$  est supposé partagé en intervalles  $I_k$ . On va établir des majorations avec différentes normes sur  $I_k$ . Pour cela, on adopte les notations suivantes (classiques en analyse numérique) :

$$\begin{aligned} \|v\|_{0,I_k}^2 &= \int_{I_k} v^2(x) dx \quad \left( = \|v\|_{L^2(I_k)}^2 \right), \quad |v|_{1,I_k} = \|v'\|_{0,I_k} \quad \left( = \|v'\|_{L^2(I_k)}^2 \right) \\ \|v\|_{1,I_k}^2 &= \|v\|_{0,I_k}^2 + \|v'\|_{0,I_k}^2 \quad \left( = \|v\|_{H^1(I_k)}^2 \right), \quad |v|_{2,I_k} = \|v''\|_{0,I_k} \quad \left( = \|v''\|_{L^2(I_k)}^2 \right) \end{aligned}$$

**Lemme 0.8.1.** Soit  $I_k = [x_k, x_{k+1}]$  et  $w \in H^1(I_k)$  tels que  $w$  s'annule en un point  $\xi$  de  $I_k$ . Alors

$$\|w\|_{0,I_k} \leq h|w|_{1,I_k}$$

**Preuve :**

$$w(x) = \int_{\xi}^x w'(t) dt \quad \text{avec } \xi \text{ et } x \in I_k$$

donne, par Schwarz,

$$|w(x)|^2 \leq \left( \int_{I_k} |w'(t)| dt \right)^2 \leq \int_{I_k} w'^2(t) dt \cdot \int_{I_k} dt = h|w|_{1,I_k}^2$$

En intégrant sur  $I_k$  on obtient  $\|w\|_{0,I_k}^2 \leq h^2|w|_{1,I_k}^2$  d'où le résultat.  $\blacksquare$

Dans le lemme de Céa, on va prendre une fonction  $\varphi_h$  particulière, notée  $\pi_h u$ , continue, affine par morceaux valant  $u(x_k)$  en  $x_k$  (c'est l'interpolée de Lagrange de  $u$ -dans  $V_h$ ).

Sur  $I_k$  on a  $\pi_h u(x) = u(x_k) \Lambda_k(x) + u(x_{k+1}) \Lambda_{k+1}(x)$ .

**Lemme 0.8.2.** Supposons  $u \in H^2(\Omega)$ . Alors

$$|u - \pi_h u|_{1,\Omega} \leq h|u|_{2,\Omega}$$

**Preuve :** Posons  $\epsilon_k = (u - \pi_h u)|_{I_k}$  la fonction-écart.  $\epsilon_k$  élément de  $H^2$  de  $(I_k)$  admet un représentant de classe  $C^1$  sur  $I_k$ . D'après le théorème de Rolle, il existe  $\xi \in I_k$  tel que  $\epsilon'_k(\xi) = 0$ . On pose  $w_k = \epsilon'_k$  et le premier lemme nous donne

$$|w_k|_{1,I_k} = \|w'_k\|_{0,I_k} = \|u'' - (\pi_h u)''\|_{0,I_k} = \|u''\|_{0,I_k} = |u|_{2,I_k}$$

$$\|w_k\|_{0,I_k} = |u - \pi_h u|_{1,I_k}$$

Donc  $|u - \pi_h u|_{1,I_k} \leq h|u|_{2,I_k}$ . Finalement

$$\begin{aligned} |u - \pi_h u|_{1,\Omega}^2 &= \sum_{k=0}^N |u - \pi_h u|_{1,I_k}^2 \\ &\leq h^2 \sum_{k=0}^N |u|_{2,I_k}^2 \\ &= h^2 |u|_{2,\Omega}^2 \end{aligned}$$

Ce qui donne le résultat du deuxième lemme. ■

**Preuve : du théorème**

- Pour prouver le théorème, on utilise le lemme 5.9 (avec  $w = u - \pi_h u$ ), et on obtient

$$\|u - \pi_h u\|_{0,I_k} \leq h |u - \pi_h u|_{1,I_k}$$

et comme, d'après le lemme 5.10 :  $|u - \pi_h u|_{1,I_k} \leq h |u|_{2,I_k}$ , on trouve

$$\|u - \pi_h u\|_{0,I_k} \leq h^2 |u|_{2,I_k}$$

En sommant ( $k = 0$  à  $N$ ) on obtient  $\|u - \pi_h u\|_{0,\Omega} \leq h^2 |u|_{2,\Omega}$ . Enfin, en prenant dans l'estimation de Céa,  $\varphi_h = \pi_h u$ , on a

$$\|u - u_h\|_{H^1} \leq \frac{c}{\gamma} \|u - \pi_h u\|_{H^1}$$

$$\left( \|\epsilon\|_{H^1}^2 = \|\epsilon\|_{L^2}^2 + \|\epsilon'\|_{L^2}^2 \leq \left( \|\epsilon\|_{L^2} + \|\epsilon'\|_{L^2} \right)^2 \right)$$

et  $\|u - \pi_h u\|_{H^1} \leq \|u - \pi_h u\|_{0,\Omega} + |u - \pi_h u|_{1,\Omega}$ .

Le théorème découle des majorations des lemmes 0.8.1 et 0.8.2

$$\|u - u_h\|_{H^1} \leq \frac{c}{\gamma} [h^2 |u|_{2,\Omega} + h |u|_{2,\Omega}] \leq Kh |u|_{2,\Omega} = Kh \|u''\|_{L^2(\Omega)}$$

■