REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

**UNIVERSITE IBN KHALDOUN - TIARET**

# MEMOIRE

Présenté à :

FACULTÉ MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUE
DÉPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

Pour l'obtention du diplôme de :

MASTER

Spécialité : Analyse fonctionnelle et équations différentielles

Par :

**Hattabi abd elkader**
**Kadari mohamed**
**Khaoui M'hamed**

Sur le thème

---

# Méthode des sur et sous solutions appliquée aux équations différentielles fractionnaires conformes

---

Soutenu publiquement le 22 /06 / 2022 à Tiaret devant le jury composé de :

| | | | |
|---|---|---|---|
| Mr MAHROUZ Tayeb | M.C.B | Université Ibn Khaldoun Tiaret | Président |
| Mr BENDOUMA Bouharket | M.C.B | Université Ibn Khaldoun Tiaret | Encadreur |
| Mr BENHABI Mohamed | M.A.A | Université Ibn Khaldoun Tiaret | Examinateur |

2021-2022

# Remerciements

*C'est avec un grand plaisir que nous réservons cette page en signe de gratitude et de profonde reconnaissance à tous ceux qui nous ont aidés de prés ou de loin pour ca réalisation de ce modeste travail.*

*Aux membres de notre jury, nous adressons nos vifs remerciements à notre encadreur* Mr **B. BENDOUMA** *qui par ses conseils, ses recommandations, sa patience nous a permis de réaliser ce mémoire avec un très grand plaisir.*

*Nos remerciements les plus chaleureux vont à Mr* ***T. MAHROUZ****, pour nous avoir honoré de présider le jury de notre mémoire.*

*Nous également remercions beaucoup Mr* ***M. BENHABI****, enseignant au l'Université Ibn Khaldoune de Tiaret, pour l'honneur qu'il nous a fait en acceptant d'examiner ce mémoire.*

*À tous les enseignants qui ont participés à notre formation tout au long de notre cycle universitaire.*

*Enfin, nous ne voulons pas oublier tous les professeurs que nous avons rencontrés tout au long de ces années de licence et tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce travail, merci.*

# Dédicaces

*Je dédie ce travail :*

*À ma chère maman , source de vie, d'amour et d'affection.*

*À mon cher frère , source de joie et de bonheur.*

*À l'âme de mon cher père.*

*À l'âme de mon cher oncle.*
*À toute ma famille , source d'espoir et motivation.*

*À tous mes amis.*
*À vous chers lecteurs.*

*Je vous dédie ce travail avec tous mes vœux de bonheur, de santé et de réussite.*

**Hattabi Abdelkader**

*Je dédie ce travail :*

*A ma chère mère et à mon cher père qui n'ont jamais cessé de me supporter, me soutenir et m'encourager durant mes années d'études. Qu ils trouvent ici le témoignage de ma profonde gratitude et Teconnaissance.*

*A mes frères, ma petite soeur "Ilham" et tous ma famille qui me donnent de l'amour et de la vivacité.*

*A tous ceur qui m'ont aidé - de près ou de loin - et ceur qui ont partagé avec moi les moments d'émotion lors de la réalisation de ce travail et qui m'ont chaleureusement supporté et encouragé tout au long de mon parcours.*

*A tous mes amis qui m'ont toujours encouragé, et à qui je souhaite plus de succès.* `Merci.`

**Kadari Mohamed**

*Je dédie ce travail :*

*A mes chers parents, pour tous leurs sacrifices, leur amour, leur tendresse, leur soutien et leurs prières tout au long de mes études .*

*A mes chères sœurs pour leurs encouragements permanents, et leur soutien moral.*

*A mes chers frères, pour leur appui et leur encouragement.*

*A toute la famille de " Khaoui " pour leur soutien tout au long de mon parcours universitaire.*
*Que ce travail soit l'accomplissement de vos vœux tant allégués, et le fuit de votre soutien infaillible.*

*A tous mes amis qui m'ont toujours encouragé, et à qui je souhaite plus de succès.*

*Merci d'être toujours là pour moi.*

***Khaoui M'hamed***

# Résumé

Nous présentons dans ce mémoire, des résultats d'existence de solutions pour des équations différentielles non-linéaires du premier ordre et des équations différentielles fractionnaires conformes non-linéaires d'ordre $\alpha \in ]0, 1]$ avec des conditions de bord (condition de Cauchy ou condition périodique). Ces résultats ont été obtenus grâce a la méthode des sous et sur solutions et le théorème de point fixe de Schauder.

**Mots Clés** : Calcul fractionnaire, équation différentielle fractionnaire conforme non-linéaire, conditions aux limites, méthode des sous et sur solutions, théorème du point fixe de Schauder.

# Table des matières

# Introduction

La théorie des équations différentielles fractionnaires a émergé comme un domaine intéressant à explorer ces dernières années. Notons que cette théorie a de nombreuses applications dans la description de nombreux évènements dans le monde réel. Par exemple, les équations différentielles fractionnaires sont souvent applicables dans l'ingénierie, la physique, la chimie, la biologie, ...etc (voir[2, 9, 10, 11]).

Dans la littérature, on attribue souvent le nom de la dérivation fractionnaire à la généralisation de la dérivation à un ordre quelconque, entier ou non entier, réel ou complexe. Les concepts de dérivation et d'intégration fractionnaire sont souvent associés aux noms de Riemann-Liouville (1832; 1837), alors que l'interrogation sur la généralisation de la notion de dérivée à des ordres fractionnaires est plus ancienne.

Récemment, Khalil et al. [8] ont présenté une nouvelle définition de la dérivée fractionnaire dénommée la dérivée fractionnaire conforme. Résultats d'existence pour des équations différentielles fractionnaires conformes on été étudiées par plusieurs auteurs en utilisant les théorémes du points fixes, la méhode des sous et sur solutions,...etc.

La méthode des sous et sur solutions a été largement utilisée pour obtenir des résultats d'existence, voir par exemple [3, 4, 6, 14, 15, 17] et leurs références. Cette méthode donne une localisation d'une solution $x$ d'équation différentielle non-linéaire avec des conditions aux limites en présence d'un couple de fonctions, appelées sous-solution et sur-solution, alors, l'existence de la solution $x$ est localisée entre la sous-solution $\gamma$ et la sur-solution $\delta$ tel que $\gamma \leq \delta$ (bien ordonné), c'est à dire : $\gamma \leq x \leq \delta$.

Dans ce mémoire, nous présentons des résultats d'existence de solutions pour des équations différentielles non-linéaires du premier ordre et des équations différentielles fractionnaires conformes non-linéaires d'ordre $\alpha \in ]0, 1]$

avec des conditions de bord (condition de Cauchy ou condition périodique). Nos démonstrations sont basées sur la théorie des sous et sur solutions et sur le théorème de point fixe de Schauder.

Ce mémoire il se présente sous forme de trois chapitres.

Dans le **Chapitre 1**, nous présentons quelques définitions et résultats utilisés dans ce mémoire.

Dans le **Chapitre 2**, nous étudierons l'existence de solutions pour d'équation différentielle non-linéaire du premier ordre :

$$x^{'}(t) = f(t, x(t)), \qquad \text{pour tout } t \in I = [a, b],\ 0 < a < b, \tag{1}$$

sataisfont l'une des conditions de bord suivantes (condition de Cauchy ou condition périodique sur I) :

$$x(a) = x_0, \tag{2}$$

$$x(a) = x(b). \tag{3}$$

Où $f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue et $x_0 \in \mathbb{R}$.

Dans le **Chapitre 3**, nous étudierons l'existence de solutions pour d'équation différentielle fractionnaire conforme non-linéaire :

$$x^{\alpha}(t) = f(t, x(t)), \qquad \text{pour tout } t \in I = [a, b],\ 0 < a < b, \tag{4}$$

sataisfont l'une des conditions de bord suivantes (condition de Cauchy ou condition périodique sur I) :

$$x(a) = x_0, \tag{5}$$

$$x(a) = x(b). \tag{6}$$

Où $0 < \alpha \leq 1$, $x_0 \in \mathbb{R}$, $x^{(\alpha)}(t)$ désigne la dérivée fractionnaire conforme de $x$ d'ordre $\alpha$ en $t$ et $f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue.

# Chapitre 1

# Préliminaires

Dans ce chapitre, nous rappelons quelques définitions, notions et résultats qui seront utile pour la suite de ce travail.

## 1.1 Eléments d'analyse fonctionnelle

**Définition 1.1** *(Espace vectoriel normé) Un espace vectoriel $X$ muni d'une norme $\|.\|$ noté $(X, \|.\|)$ sera appelé un espace vectoriel normé.*

**Exemple 1.1.1** *On définit une norme sur l'espace vectoriel $C([a,b], \mathbb{R})$ de la maniére suivante*

$$\|f\|_{\infty} = \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|.$$

**Définition 1.2** *(Espace de Banach) On appelle espace de Banach tout espace vectoriel normé complet sur les corps $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$.*

Soit $I := [a, b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$. $C(I, \mathbb{R})$ est l'espace de Banach des fonctions $y$ continues définie de $I$ dans $\mathbb{R}$ avec la norme

$$\|y\|_{\infty} = \sup_{t \in I} |y(t)|.$$

$L^1(I, \mathbb{R})$ désigne l'espace de Banach des fonctions $y$ mesurables et qui sont Lebesgue intégrable sur $I$ muni de la norme

$$\|y\|_{L^1} = \int_a^b |y(t)| dt \quad \textit{pour tout } y \in L^1(I, \mathbb{R}).$$

**Définition 1.3** *Le sous ensemble* $\boldsymbol{S}$ *de l'espace normé* $X$ *est dit borné si il existe* $M$ *tel que*
$$\|y\| \leq M \quad \text{pour tout } y \in \boldsymbol{S}.$$

**Définition 1.4** *Soit* $\mathcal{N} : (X, \|.\|_X) \to (Y, \|.\|_Y)$ *une application. On dit que* $\mathcal{N}$ *est bornée si elle envoie les parties bornées de* $X$ *sur des parties bornées de* $Y$ *i.e.* $\mathcal{N}\,(\text{bornée})$ *est bornée.*

**Remarque 1.1** *Soit* $\mathcal{N} : (X, \|.\|_X) \to (Y, \|.\|_Y)$ *une application bornée, i.e, pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe* $\delta > 0$, *tel que*

$$\text{pour tout } x \in X : \|x\|_X \leq \varepsilon \qquad \text{implique} \qquad \|\mathcal{N}\,(x)\|_Y \leq \delta.$$

**Définition 1.5** *Soient* $a \in X$ *et* $\mathcal{F} : (X, \|.\|_X) \to (Y, \|.\|_Y)$. *On dit que* $\mathcal{F}$ *est continue au point* $a$ *si et seulement si, pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe* $\delta > 0$, *pour* $x \in X$, *on a*

$$\|x - a\|_X < \delta \qquad \text{implique} \qquad \|\mathcal{F}\,(x) - \mathcal{F}\,(a)\|_Y < \varepsilon.$$

*Alors l'opérateur* $\mathcal{F}$ *est dit continu sur* $X$, *ou simplement continu si il est continu en tout point de* $X$.

**Proposition 1.1** *Une application* $\mathcal{N} : (E, \|.\|_E) \to (F, \|.\|_F)$ *est continue au point* $x$, *si et seulement si pour tout suite* $(x_n)_n$ *converge vers* $x$ *dans* $E$, *alors* $(\mathcal{N}\,(x_n))_n$ *converge vers* $\mathcal{N}\,(x)$ *dans* $F$.

**Définition 1.6** *Un sous ensemble* $S$ *de l'espace normé* $B$ *est dit compact si pour toute suite d'éléments de* $S$ *on peut extraire une sous suite convergente vers un élément de* $S$.

***Remarque*** *Un ensemble compact est un ensemble fermé borné ; la réciproque n'est pas toujours vraie.*

**Définition 1.7** *Un ensemble* $M$ *est relativement compact si* $\overline{M}$ *est compact.*

**Définition 1.8** *Soient* $E$ *et* $F$ *deux espaces de Banach et* $\mathcal{N} : E \longrightarrow F$ *est une fonction continue. On dit que* $\mathcal{N}$ *est compacte si* $\overline{\mathcal{N}(E)}$ *est compact. On dit que* $\mathcal{N}$ *est complètement continue si* $\overline{\mathcal{N}(B)}$ *est compact pour tout sous-ensemble borné* $B \subset E$.

**Définition 1.9** *(Ensemble équicontinue) Un ensemble $\mathcal{A}$ de $C([a,b],\mathbb{R})$ est dit équicontinu, si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$, tel que, pour tout $t_1, t_2 \in [a,b]$, $|t_2 - t_1| \leq \delta$ on a :*

$$\|f(t_2) - f(t_1)\| \leq \varepsilon, \quad \textit{pour tout} \quad f \in \mathcal{A}.$$

**Définition 1.10** *(Ensemble uniformément borné) $\mathcal{A}$ est dit uniformément borné dans $C([a,b],\mathbb{R})$ s'il existe un nombre réel $M > 0$ tel que $\|y\|_\infty \leq M$ pour tout $y \in \mathcal{A}$.*

**Lemme 1.1** *Une application continue sur un ensemble compact est uniformément borné.*

**Théorème 1.1** *(Arzela-Ascoli) Soit $B \subset C([a,b],\mathbb{R})$, $B$ est relativement compact dans $C([a,b],\mathbb{R})$ si et seulement si :*

**(a)** *$B$ est uniformément borné.*

**(b)** *$B$ est équicontinu.*

**Théorème 1.2** *(Théorème du point fixe de Schauder) Soit $C$ un sous-ensemble convexe, fermé, borné, non vide d'un espace de Banach $E$ et $\mathcal{A} : C \to C$ une application compact i.e ($\overline{\mathcal{A}(C)}$ est compact). Alors $\mathcal{A}$ admet au moins un point fixe (i.e il existe un point $x_0$ dans $C$ tel que $f(x_0) = x_0$).*

## 1.2 Dérivées fractionnaires

Dans cette section, nous donnons quelques définitions et résultas concernant la dérivée fractionnaire : conforme, de Riemann-Liouville et de Caputo (voir[1, 3, 5, 7, 8, 9, 12, 13, 16]).

### 1.2.1 Dérivée fractionnaire conforme

**Définition 1.11** *Soit $\varphi : [0,\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction et soit $\alpha \in ]0,1]$. La dérivée fractionnaire conforme d'ordre $\alpha$ de $\varphi$ est définie par :*

$$\varphi^{(\alpha)}(t) := \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\varphi(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - \varphi(t)}{\varepsilon} \tag{1.1}$$

*pour tout $t > 0$. Si $\varphi^{(\alpha)}(t)$ existe et est finie, on dit que $\varphi$ est $\alpha$-différentiable en $t$.*

*Si $\varphi$ est $\alpha$-différentiable dans un intervalle $]0, a[,\ a > 0$, et $\lim_{t\to 0^+} \varphi^{(\alpha)}(t)$ existe, alors la dérivé fractionnaire conforme de $\varphi$ d'ordre $\alpha$ en $t = 0$ est défini comme*

$$\varphi^{(\alpha)}(0) = \lim_{t\to 0^+} \varphi^{(\alpha)}(t).$$

**Théorème 1.3** *[16] Soit $\varphi : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ une fonction et soit $\alpha \in ]0, 1]$. Si $\varphi$ est $\alpha$-différentiable en $t_0 > 0$, alors $\varphi$ est continue en $t_0$.*

**Théorème 1.4** *[16] Soit $\alpha \in ]0, 1]$. Si $\varphi, \phi : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ sont $\alpha$-différentiables en $t > 0$. Alors :*

*(i)* $(a\varphi + b\phi)^{(\alpha)} = a\varphi^{(\alpha)} + b\phi^{(\alpha)}$, *pour tout $a, b \in \mathbb{R}$ ;*

*(ii)* $(\varphi\phi)^{(\alpha)} = \varphi\phi^{(\alpha)} + \phi\varphi^{(\alpha)}$ *;*

*(iii)* $(\varphi/\phi)^{(\alpha)} = \dfrac{\phi\varphi^{(\alpha)} - \varphi\phi^{(\alpha)}}{\phi^2}$.

*(iv) Si, en plus $\varphi$ est différentiable en $t > 0$, alors*

$$\varphi^{(\alpha)}(t) = t^{1-\alpha}\varphi'(t).$$

**Exemple 1.2.1** *Soit $\alpha \in ]0, 1]$. On a :*

1. $(t^p)^{(\alpha)} = p\, t^{p-\alpha}, \quad p \in \mathbb{R}$,
2. $(\lambda)^{(\alpha)} = 0, \quad \lambda \in \mathbb{R}$,
3. $(e^{kt})^{(\alpha)} = k\, t^{1-\alpha}e^{kt}, \quad k \in \mathbb{R}$.

**Remarque 1.2** *Il est facile de vérifier que :*

*(i) La fonction $x : t \mapsto e^{\frac{p}{\alpha}t^\alpha}$, $p \in \mathbb{R}$, est une solution du problèeme à valeur initiale :*

$$x^{(\alpha)}(t) = p\, x(t),\ t \in [0, \infty),\ x(0) = 1. \tag{1.2}$$

*(ii) Si $\varphi$ est différentiable en $t$, alors $\varphi$ est $\alpha$-différentiable en $t$.*

Nous introduisons l'espace suivant : Soit $I = [a, b],\ a > 0$.

$$C^\alpha(I, \mathbb{R}) = \{\varphi : I \to \mathbb{R},\ \text{est } \alpha\text{-différentiable sur } I \ \text{ et } \ \varphi^{(\alpha)} \in C(I, \mathbb{R})\}.$$

**Proposition 1.2** *Soit $\alpha \in ]0, 1[$ et $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ est $\alpha$-différentiable.*

*(a) Si $\varphi^{(\alpha)}$ est bornèe sur $[a, b]$ où $a > 0$, alors $\varphi$ est uniformèment continue et bornèe sur $[a, b]$.*

*(b) Si $\varphi^{(\alpha)}$ est bornèe sur $[a,b]$ et continue en $a$, alors $\varphi$ est uniformèment continue et bornèe sur $[a,b]$*

**Théorème 1.5** *Soit $\alpha \in ]0,1[, a > 0$ et $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction telle que :*
*(i) $\varphi$ est continue sur $[a,b]$.*

*(ii) $\varphi$ est $\alpha$-différentiable sur $[a,b[$.*
*Alors,*
*(i) Si $\varphi^{(\alpha)}(t) \geq 0$ pour tout $t \in ]a,b[$, alors $\varphi$ est croissante sur $[a,b]$.*

*(ii) Si $\varphi^{(\alpha)}(t) \leq 0$ pour tout $t \in ]a,b[$, alors $\varphi$ est décroissante sur $[a,b]$.*

*(iii) Si $\varphi^{(\alpha)}(t) = 0$ pour tout $t \in ]a,b[$, alors $\varphi$ est une fonction constante sur $[a,b]$.*

**Définition 1.12** *[8] Soit $\alpha \in ]0,1]$, $0 \leq a$ et $\varphi : [a,\infty[ \to \mathbb{R}$. L'intégral fractionnaire conforme de $\varphi$ d'ordre $\alpha$ de $a$ à $t$, notée par $I_\alpha^a(\varphi)(t)$, est définie par :*

$$I_\alpha^a(\varphi)(t) := I_1^a(t^{\alpha-1}\varphi)(t) = \int_a^t \varphi(s)d_\alpha s := \int_a^t \varphi(s)s^{\alpha-1}ds.$$

*où l'intégrale à droite est l'intégrale usuelle de Riemann.*

**Lemme 1.2** *[8, 13] Soit $0 < \alpha \leq 1$ et $\varphi : [a,\infty[ \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors pour tout $t \geq a$ on a*

$$(I_\alpha^a(\varphi))^{(\alpha)}(t) = \varphi(t). \tag{1.3}$$

**Lemme 1.3** *[1, 16] Soit $0 < \alpha \leq 1$. Si $\varphi : ]a,b[ \to \mathbb{R}$ est différentiable, alors, pour tout $t > a$ on a*

$$I_\alpha^a(\varphi^{(\alpha)})(t) = \varphi(t) - \varphi(a). \tag{1.4}$$

**Théorème 1.6** *[7] Soit $\alpha \in ]0,1[$, $a > 0$ et $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors, pour tout $t \in [a,b]$ nous avons,*

$$|I_\alpha^a(\varphi)(t)| \leq I_\alpha^a|\varphi|(t).$$

### 1.2.2 Dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville

**Définition 1.13** (*Fonction Gamma*) *On appelle fonction Gamma d'Euler noté* $\Gamma(z)$ *avec* $z$ *est un nombre complexe, la fonction*

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1}e^{-t}dt, \qquad Re(z) > 0.$$

**Définition 1.14** (*Fonction Béta*) *La fonction Béta ou fonction de Bessel du second espèce est définie par :*

$$\beta(z,w) = \int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{w-1}dt, \quad z,w \in \mathbb{C} \quad avec\ Re(z) > 0,\ Re(w) > 0.$$

**Proposition 1.3** *On a les propriétés suivantes :*

1. *Pour tout* $z \in \mathbb{C}$ *tel que* $Re(z) > 0 : \Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$.
2. *Pour tout* $n \in \mathbb{N}^* : \Gamma(n) = (n-1)!$.
3. *Pour tout* $z, w \in \mathbb{C}$, *tel que* $Re(z) > 0, Re(w) > 0 : \beta(z,w) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}$.
4. *Pour tout* $z, w \in \mathbb{C}$, *tel que* $Re(z) > 0, Re(w) > 0 : \beta(z,w) = \beta(w,z)$.
5. *Pour tout* $z, w \in \mathbb{C}$, *tel que* $Re(z) > 0, Re(w) > 0$, *on a :*

$$\beta(z,w) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}.$$

**Définition 1.15** *On appelle intègrale fractionnaire de* $f$ *d'ordre* $\alpha$, *et on la note* $I_a^{\alpha}$, *la fonction dèfinie par*

$$I_a^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)\, dt,$$

*où* $\Gamma$ *est la fonction Gamma.*

**Proposition 1.4** *Soient* $f$ *une fonction intégrable et bornée,et* $\alpha$ *et* $\beta$ *deux nombres réels strictement positif. Alors on a*

$$I_a^{\beta}\left[I_a^{\alpha} f(x)\right] = I_a^{\alpha+\beta} f(x), \qquad pour\ tout\ x \geq a.$$

**Définition 1.16** *Soit $f$ une fonction intégrable sur $[a,b]$, on appelle dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville de $f$ d'ordre $\alpha \in \mathbb{R}^+$, et on la note ${}^{RL}D_a^\alpha$ la fonction définie par*

$$ {}^{RL}D_a^\alpha f(x) = \left(I_a^{n-\alpha} f(x)\right)^{(n)}, \qquad \text{pour tout } x \geq a. $$

*Avec $n$ entier naturel supérieure strictement à $\alpha$. i.e $n = [\alpha] + 1$.*

**Proposition 1.5** *Soient $f$ une fonction intégrable, bornée, $\alpha$ et $\beta$ deux nombres réels strictement positif. Alors on a*

$$ \left({}^{RL}D_a^\alpha \circ I_a^\beta\right) f(x) = I_a^{\beta-\alpha} f(x), \qquad \text{pour tout } x \geq a. \tag{1.5} $$

*Avec $\beta \geq \alpha$.*

### 1.2.3 Dérivée fractionnaire de Caputo

**Définition 1.17** *La dérivée fractionnaire d'ordre $\alpha \in \mathbb{R}^+$ de Caputo d'une fonction $f$ définie sur $[a,b]$, est donnée par :*

$$ ({}^C D^\alpha f)(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(s) ds, $$

*où $n = [\alpha] + 1$ et $[\alpha]$ désignent la partie entière de $\alpha$.*

**Lemme 1.4** *Soit $\alpha > 0$ et $n = [\alpha] + 1$. Alors*

$$ I_a^\alpha ({}^C D_a^\alpha f)(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^k(a)}{k!}(t-a)^k. $$

**Lemme 1.5** *Soit $\alpha > 0$ et $f \in L^\infty([a,b], \mathbb{R})$. Alors*

$$ ({}^C D_a^\alpha I_a^\alpha f)(t) = f(t). $$

**Lemme 1.6** *Soit $\alpha > 0$ et $n - 1 < \alpha < n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $f$ est une fonction telle que $({}^C D_a^\alpha f)(t)$ et $({}^{RL}D_a^\alpha f)(t)$ existent, alors*

$$ ({}^{RL}D_a^\alpha f)(t) = ({}^C D_a^\alpha f)(t) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(t-a)^{k-\alpha}}{\Gamma(K-\alpha+1)k!} f^k(a). $$

*Nous avons $({}^{RL}D_a^\alpha f)(t) = ({}^C D_a^\alpha f)(t)$, si $f^k(a) = 0$, pour $k = 0, 1, 2, ..., n-1$.*

**Remarque 1.3** *1. La derivée de Riemann-liouville* ${}^{RL}D_a^\alpha$ *ne vérifie pas (ne satisfait pas)* ${}^{RL}D_a^\alpha(1) = 0$, *si* $\alpha$ *n'est pas entier naturel.* (${}^{C}D_a^\alpha(1) = 0$ *pour la dérivée de Caputo*).

*2. Toutes les dérivées fractionnaires ne satisfont pas la règle du produit connue :* $D_a^\alpha(fg) = fD_a^\alpha(g) + gD_a^\alpha(f)$.

*3. Toutes les dérivées fractionnaires ne satisfont pas à la règle du quotient :* $D_a^\alpha(f/g) = \dfrac{gD_a^\alpha(f) - fD_a^\alpha(g)}{g^2}$.

*4. Toutes les dérivées fractionnaires ne satisfont pas à la règle de la chaîne (Dérivée de fonctions composées) :* $D_a^\alpha(fog) = f^\alpha(g)g^\alpha$.

*5. Toutes les dérivées fractionnaires ne satisfont pas :* $D^\alpha D^\beta f = D^{\alpha+\beta}f$ *en général.*

*6. La définition de Caputo suppose que la fonction* $f$ *est différentiable.*

# Chapitre 2

# Existence de solutions pour des équations différentielles non-linéaires du premier ordre

Dans ce chapitre, nous étudions l'existence de solutions pour d'équation différentielle non-linéaire du premier ordre :

$$x^{'}(t) = f(t, x(t)), \qquad \text{pour tout } t \in I = [a, b],\ 0 < a < b, \tag{2.1}$$

sataisfont l'une des conditions de bord suivantes (condition de Cauchy ou condition périodique sur I) :

$$x(a) = x_0, \tag{2.2}$$

$$x(a) = x(b). \tag{2.3}$$

Où $f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue et $x_0 \in \mathbb{R}$.
Pour cela, nous utilisons la méthode de sous et sur solutions avec le théorème de point fixe de Schauder.

## 2.1 Existence de solutions pour le problème (2.1)(2.2)

Dans cette partie nous étudierons l'existence de solutions pour le problème (2.1)(2.2) avec l'existence des sous et sur-solutions.

**Définition 2.1** *Une fonction $x \in C^1(I, \mathbb{R})$ est dite une solution de (2.1)(2.2) si elle satisfait l'équation (2.1) sur $I$ et la condition (2.2).*

Nous citons maintenant la défnition de sous et sur-solution de (2.1),(2.2) introduite par B. Bendouma et al. [3].

**Définition 2.2** *On dit qu'une fonction* $\delta \in C^1(I, \mathbb{R})$ *est une sur-solution de* $(2.1), (2.2)$, *si*

*(i)* $\delta'(t) \geq f(t, \delta(t))$, *pour tout* $t \in I$ *;*

*(ii)* $\delta(a) \geq x_0$.

*De même, on dit qu'une fonction* $\gamma \in C^1(I, \mathbb{R})$ *est une sous-solution de* $(2.1), (2.2)$ *si*

*(i)* $\gamma'(t) \leq f(t, \gamma(t))$, *pour tout* $t \in I$ *;*

*(ii)* $\gamma(a) \leq x_0$.

Nous définissons l'ensemble (le secteur) :

$$[\gamma, \delta] = \{x \in C(I) : \gamma(t) \leq x(t) \leq \delta(t), \text{ pour tout } t \in I\}.$$

**Lemme 2.1** *Le problème de Cauchy ( à valeur initiale)*

$$\begin{cases} x'(t) + x(t) = g(t), & \textit{pour tout } t \in I, \\ x(a) = x_0, \end{cases} \tag{2.4}$$

*avec* $x_0 \in \mathbb{R}$, $g \in C(I, \mathbb{R})$, *admet une solution unique* $x \in C^1(I, \mathbb{R})$, *donnée par*

$$x(t) := \int_a^t e^{(s-t)} g(s) ds + x_0 e^{(a-t)}. \tag{2.5}$$

***Preuve.***

Soit $x$ est solution du problème (2.4), on a :

$$\begin{aligned} \left[x(t)e^t\right]' &= x'(t)e^t + e^t x(t), \\ &= e^t g(t), \end{aligned}$$

On intégré les deux cotés de cette égalité sur $[a, t]$ et on obtient

$$x(t)e^t - x(a)e^a = \int_a^t e^s g(s) ds.$$

Donc,

$$x(t) = e^{-t}\left(e^a x(a) + \int_a^t e^s g(s) ds\right) = \int_a^t e^{(s-t)} g(s) ds + x_0 e^{(a-t)}.$$

Afin de démontrer le théorème d'existence, nous aurons recours au problème modifié suivant :

$$\begin{cases} x^{'}(t) + \ x(t) = f(t, \overline{x}(t)) + \overline{x}(t), \quad t \in I, \\ x(a) = x_0, \end{cases} \tag{2.6}$$

où

$$\overline{x}(t) = \max\Big\{\gamma(t),\ \min\{x(t), \delta(t)\}\Big\}, \quad \text{pour tout } t \in I. \tag{2.7}$$

Il est clair qu'une solution $x$ de (2.6) telle que $\gamma(t) \leq x(t) \leq \delta(t)$ pour tout $t \in I$ (c-à-d. $x \in [\gamma, \delta]$) est une solution de (2.1)(2.2).

Définissons l'opérateur $\mathcal{A}_1 : C(I, \mathbb{R}) \to C(I, \mathbb{R})$ par

$$\mathcal{A}_1(x)(t) = \int_a^t e^{(s-t)}\Big(f(s, \overline{x}(s)) + \overline{x}(s)\Big)ds + x_0 e^{(a-t)}, \tag{2.8}$$

.

D'après le Lemme 2.1, les points fixes de l'opérateur $\mathcal{A}_1$ sont les solutions du problème (2.6).

**Proposition 2.1** *Soit $f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Si $\gamma, \delta \in C^1(I, \mathbb{R})$ sont respectivement sous et sur solutions de (2.1), tel que $\gamma \leq \delta$ sur $I$, alors l'opérateur $\mathcal{A}_1$ est compact.*

**Preuve :**La preuve est donnée en plusieures étapes.
**Etape 1 :** Montrons tout d'abord la continuité de l'opérateur $\mathcal{A}_1$.
Soit $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de $C(I, \mathbb{R})$ convergeant vers $x \in C(I, \mathbb{R})$. Alors pour tout $t \in I$, on a :

$$\begin{aligned} \Big|\mathcal{A}_1(x_n(t)) - \mathcal{A}_1(x(t))\Big| &\leq \int_a^t e^{(s-t)}\Big|\Big(f(s, \overline{x_n}(s)) + \overline{x_n}(s)\Big) \\ &\qquad\qquad - \Big(f(s, \overline{x}(s)) + \overline{x}(s)\Big)\Big|ds \\ &\leq M\int_a^t \Big|\Big(f(s, \overline{x_n}(s)) - f(s, \overline{x}(s))\Big) \\ &\qquad\qquad + \Big(\overline{x_n}(s) - \overline{x}(s)\Big)\Big|ds \\ &\leq M\int_a^t \Big(\Big|f(s, \overline{x_n}(s)) - f(s, \overline{x}(s))\Big| \\ &\qquad\qquad + \Big|\overline{x_n}(s) - \overline{x}(s)\Big|\Big)ds. \end{aligned}$$

où $M := \max_{s,t\in I} e^{(s-t)} = e^{(b-a)}$. Puisqu'il existe une constante $R > 0$ tel que $\|\overline{x}\|_{C(I,\mathbb{R})} < R$, il existe un indice $N$ tell que $\|\overline{x_n}\|_{C(I,\mathbb{R})} \leq R$ pour tout $n > N$. Ainsi, $f$ uniformément continue sur $I \times B_R(0)$. Alors pour $\varepsilon > 0$ donné, il existe un $\eta > 0$ tel que $x, y \in \mathbb{R}$ où

$$|y - x| < \eta < \frac{\epsilon}{2M(b-a)}, |f(s,y) - f(s,x)| < \frac{\epsilon}{2M(b-a)},$$

pour tout $s \in I$. Par hypothèse, il est possible de trouver un indice $\hat{N} > N$ tel que $\|\overline{x_n} - \overline{x}\|_{C(I,\mathbb{R})} < \eta$ pour $n > \hat{N}$. Dans ce cas,

$$\begin{aligned}
&\Big|\mathcal{A}_1(x_n(t)) - \mathcal{A}_1(x(t))\Big| \\
&\qquad \leq M \int_a^t \Big(\frac{\epsilon}{2M(b-a)} + \frac{\epsilon}{2M(b-a)}\Big) ds \\
&\qquad \leq \epsilon,
\end{aligned}$$

ce qui nous convainc de la continuité de $\mathcal{A}_1$.
**Etape 2 :**Montrons maintenant que l'ensemble $\mathcal{A}_1(C(I,\mathbb{R}))$ est relativement compact. Considérons une suite $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{A}_1(C(I,\mathbb{R}))$ pour tout $n \in N$ il existe une suite $(x_n)_{n\in N} \in C(I,\mathbb{R})$ tell que $y_n = \mathcal{A}_1(x_n(t))$ pour tout $n \in N$. Nous avons

$$\begin{aligned}
\Big|\mathcal{A}_1(x_n)(t)\Big| &\leq \int_a^t e^{(s-t)}\Big(|f(s,\overline{x_n}(s))| + |\overline{x_n}(s)|\Big) ds + |x_0 e^{(a-t)}| \\
&\leq M \int_a^t \Big(|f(s,\overline{x_n}(s))| + |\overline{x_n}(s)|\Big) ds + |x_0|.
\end{aligned}$$

Puisque $|\overline{x}_n(s)| \leq R$, pour tout $s \in I$ et tout $n \in \mathbb{N}$. Comme $I \times \overline{B}\,(0,R)$ est un ensemble sur $I \times \mathbb{R}$ et $f$ étant continue sur $I \times \overline{B}\,(0,R)$, nous pouvons déduire l'existance d'une constante $A > 0$, telle que

$$|f(s,\overline{x}_n(s)| \leq A, \qquad \text{pour tout } s \in I \quad \text{et} \quad \text{tout } n \in \mathbb{N}.$$

Donc,

$$|y_n(t)| = |\mathcal{A}_1(x_n)(t)| \leq M(A+R)(b-a) + |x_0| < +\infty.$$

Ainsi, la suite $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est uniformément bornée sur $\mathcal{C}(I,\mathbb{R})$.
D'autre part, pour tout $t_1 < t_2 \in I$, on a

$$\begin{aligned}
&\Big|\mathcal{A}_1(x)(t_2) - \mathcal{A}_1(x)(t_1)\Big| \\
&= \Big| \int_a^{t_1} e^{(s-t_2)}\Big(f(s,\overline{x}(s)) + \overline{x}(s)\Big)ds + \int_{t_1}^{t_2} e^{(s-t_2)}\Big(f(s,\overline{x}(s)) + \overline{x}(s)\Big)ds \\
&\qquad - \int_a^{t_1} e^{(s-t_1)}\Big(f(s,\overline{x}(s)) + \overline{x}(s)\Big)ds + x_0 e^a(e^{-t_2} - e^{-t_1})\Big| \\
&\leq |e^{-t_2} - e^{-t_1}|\Big(\int_a^{t_1} e^s\Big|f(s,\overline{x}(s)) + \overline{x}(s)\Big|ds + |x_0|e^a\Big) \\
&\qquad + \int_{t_1}^{t_2} e^{(s-t_2)}\Big|f(s,\overline{x}(s)) + \overline{x}(s)\Big|ds \\
&\leq e^b|e^{-t_2} - e^{-t_1}|\Big(\int_a^b (A+R)ds + |x_0|\Big) + M\int_{t_1}^{t_2}(A+R)ds \\
&\leq e^b|e^{-t_2} - e^{-t_1}|\Big((A+R)(b-a) + |x_0|\Big) + M(A+R)(t_2 - t_1).
\end{aligned}$$

Donc, la suite $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est équicontinue. Par le théorème d'Arzelà-Ascoli, on obtient que l'ensemble $\mathcal{A}_1(C(I,\mathbb{R}))$ est relativement compacte dans $C(I,\mathbb{R})$.
Ainsi, $\mathcal{A}_1$ est compact.
Nous pouvons maintenant démontrer le résultat d'existence suivant.

**Théorème 2.1** *Soit $f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue.*
*Si $\gamma, \delta \in C^1(I,\mathbb{R})$ sont respectivement sous et sur solutions de* (2.1)(2.2), *tel que $\gamma \leq \delta$ sur $I$, alors le problème* (2.1)(2.2) *admet une solution $x \in C^1(I,\mathbb{R})$, telle que $\gamma(t) \leq x(t) \leq \delta(t)$ pour tout $t \in I$.*

**Preuve**.
Par la Proposition 2.1, l'opérateur $\mathcal{A}_1$ est compact. Ainsi, par le Théorème du point fixe de Schauder, $\mathcal{A}_1$ admet un point fixe. Le Lemme 2.1 nous assure que ce point fixe est une solution du problème (2.6). Il suffit donc de démontrer que pour toute solution $x$ de (2.6), $x \in [\gamma, \delta]$, c'est-à-dire $\gamma(t) \leq x(t) \leq \delta(t)$ pour tout $t \in I$.
Soit $x \in C^1(I,\mathbb{R})$ la solution de (2.6), prouvons d'abord que :

$$\gamma(t) \leq x(t), \quad \textit{pour tout } t \in I.$$

Procédons par l'absurde, il existe $t_1, t_2 \in I$, $t_1 < t_2$ tel que $\gamma(t_1) = x(t_1)$ et

$$x(t) \leq \gamma(t) \text{ pour tout } t \in ]t_1, t_2[.$$

D'aprés la définition de $\bar{x}$ on a

$$x^{'}(t) = f(t, \gamma(t)) + \gamma(t) - x(t).$$

Donc

$$x(t) - x(t_1) = \int_{t_1}^{t} \Big[ f(s, \gamma(s)) + (\gamma(s) - x(s)) \Big] ds.$$

En utilusant le fait que $\gamma$ est une sous solution de (2.1)(2.2), l'inégalité ci-dessus nous donne :

$$\begin{aligned} \gamma(t) - \gamma(t_1) &\leq \int_{t_1}^{t} f(s, \gamma(s)) ds \\ &< \int_{t_1}^{t} \Big[ f(s, \gamma(s)) + (\gamma(s) - x(s)) \Big] ds \\ &= x(t) - x(t_1) < \gamma(t) - \gamma(t_1). \end{aligned}$$

C'est une contradiction. Donc $\gamma(t) \leq x(t)$ *pour tout* $t \in I$.
En suivant un raisonnement similaire à la partie précédente, nous montrons maintenant que :

$$x(t) \leq \delta(t) \text{ pour tout } t \in I.$$

Supposons qu'il existe $t_1, t_2 \in I, t_1 < t_2$ tel que $\delta(t_1) = x(t_1)$ et

$$x(t) \geq \delta(t) \text{ pour tout } t \in ]t_1, t_2[.$$

En utilusant la définition de $\bar{x}$ on a

$$x^{'}(t) = f(t, \delta(t)) + (\delta(t) - x(t)).$$

Donc

$$x(t) - x(t_1) = \int_{t_1}^{t} \Big[ f(s, \delta(s)) - (x(s) - \delta(s)) \Big] ds.$$

En utilusant le fait que $\delta$ est une sur solution de (2.1)(2.2). On obtient donc

$$\begin{aligned} \delta(t) - \delta(t_1) &\geq \int_{t_1}^{t} f(s, \delta(s)) ds \\ &> \int_{t_1}^{t} \Big[ f(s, \delta(s)) - (x(s) - \delta(s)) \Big] ds \\ &= x(t) - x(t_1) > \delta(t) - \delta(t_1). \end{aligned}$$

C'est une contradiction, donc : $\delta(t) \geq x(t)$ *pour tout* $t \in I$.
Ceci montre que le problème (2.6) à une solution dans l'intervalle $[\gamma, \delta]$ qui est la solution de (2.1)(2.2).

## 2.2 Existence de solutions pour le problème (2.1)(2.3)

Dans cette partie nous étudierons l'existence de solutions pour le problème (2.1)(2.3) avec l'existence de sous et sur-solutions. Introduisons la définition de sous et sur-solution de ce problème.

**Définition 2.3** *On dit qu'une fonction* $\delta \in C^1(I, \mathbb{R})$ *est une sur-solution de* (2.1)(2.3)*, si*
*(i)* $\delta^{'}(t) \geq f(t, \delta(t))$, *pour tout* $t \in I$ *;*
*(ii)* $\delta(a) \geq \delta(b)$.
*De même, on dit qu'une fonction* $\gamma \in C^1(I, \mathbb{R})$ *est une sous-solution de* (2.1)(2.3) *si*
*(i)* $\gamma^{'}(t) \leq f(t, \gamma(t))$, *pour tout* $t \in I$ *;*
*(ii)* $\gamma(a) \leq \gamma(b)$.

**Lemme 2.2** *Le problème périodique*

$$\begin{cases} x^{'}(t) + x(t) = g(t), & \text{pour tout } t \in I, \\ x(a) = x(b), \end{cases} \tag{2.9}$$

*avec* $g \in C(I, \mathbb{R})$*, admet une solution unique* $x \in C^1(I, \mathbb{R})$*, donnée par*

$$x(t) := e^{-t} \left( \frac{1}{e^{b-a} - 1} \int_a^b e^s g(s) ds + \int_a^t e^s g(s) ds \right). \tag{2.10}$$

***Preuve***.
Soit $x$ est solution du problème (2.9), on a :

$$x(t) = e^{-t} \left( e^a x(a) + \int_a^t e^s g(s) ds \right). \tag{2.11}$$

Par (2.9) et(2.11), on obtient

$$x(b) = x(a) = \frac{e^{-a}}{e^{b-a} - 1} \int_a^b e^s g(s) ds. \tag{2.12}$$

En substituant (2.12) à (2.11), on obtient

$$x(t) := e^{-t}\left(\frac{1}{e^{b-a}-1}\int_a^b e^s g(s)ds + \int_a^t e^s g(s)ds\right).$$

En suivant un raisonnement similaire à la section précédente, nous pouvons obtenir le théorème d'existence suivant.

**Théorème 2.2** *Soit $f : I\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Si $\gamma, \delta \in C^1(I,\mathbb{R})$ sont respectivement sous et sur solutions de (2.1)(2.3) tel que $\gamma \leq \delta$ sur $I$, alors le problème (2.1)(2.3) admet une solution $x \in C^1(I,\mathbb{R})$, telle que $\gamma(t) \leq x(t) \leq \delta(t)$ pour tout $t \in I$.*

Pour y arriver, il suffit d'utiliser le problème modifié suivant :

$$\begin{cases} x'(t) + \ x(t) = f(t, \overline{x}(t)) + \overline{x}(t), \quad t \in I, \\ x(a) = x(b), \end{cases} \tag{2.13}$$

où

$$\overline{x}(t) = \max\Big\{\gamma(t),\ \min\{x(t), \delta(t)\}\Big\}, \quad \text{pour tout } t \in I. \tag{2.14}$$

Il est clair qu'une solution $x$ de (2.13) telle que $\gamma(t) \leq x(t) \leq \delta(t)$ pour tout $t \in I$ (c-à-d. $x \in [\gamma, \delta]$) est une solution de (2.1)(2.3).
Ensuite, on démontre que l'opérateur $\mathcal{A}_2 : C(I,\mathbb{R}) \to C(I,\mathbb{R})$ tel que

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_2(x)(t) = e^{-t}\Bigg(\frac{1}{e^{b-a}-1}\int_a^b e^{s^\alpha}\Big(f(s,\bar{x}(s)) + \bar{x}(s)\Big)ds \\ + \int_a^t e^s\Big(f(s,\bar{x}(s)) + \bar{x}(s)\Big)ds\Bigg),\end{aligned}$$

est compact. Finalement, on démontre que toute solution du problème 2.13 est élément de $[\delta, \gamma]$.

## 2.3 Exemples

Dans cette partie nous donnons quelques exemples d'applications.

**Exemple 2.3.1** *On considère le problème à valeur initiale suivant :*

$$\begin{cases} x^{'}(t) = -\dfrac{x^2(t)}{2} + \sin(\frac{\pi}{2}x(t)) + t(2-t), \text{ pour tout } t \in I = [1,2]\,, \\ x(1) = \sqrt{\pi}. \end{cases} \tag{2.15}$$

*Ici* $f(t,x(t)) = -\dfrac{x^2(t)}{2} + \sin(\frac{\pi}{2}x(t)) + t(2-t)$. *Il est clair que* $f$ *est une fonction continue sur* $[1,2]\times\mathbb{R}$ *et* $\gamma(t)=0$, $\delta(t)=2$, *sont respectivement sous et sur-solutions de* (2.15), *avec* $\gamma(t)\le\delta(t)$ *pour* $t\in[1,2]$. *En effet,*

$$\begin{cases} \gamma^{'}(t) = 0 \le f(t,\gamma(t)) = t(2-t), \quad \text{pour tout } t \in I \quad \text{et } \gamma(1) = 0 \le \sqrt{\pi}, \\ \delta^{'}(t) = 0 \ge f(t,\delta(t)) = -2 + t(2-t) \quad \text{pour tout } t \in I \quad \text{et } \delta(1) = 2 \ge \sqrt{\pi}. \end{cases}$$

*Le Theoreme* 2.1 *implique que le problème (2.15) admet une solution* $x \in C^1([1,2],\mathbb{R})$ *telle que*

$$0 \le x(t) \le 2 \text{ pour tout } t \in [1,2].$$

**Exemple 2.3.2** *On considère le problème périodique suivant :*

$$\begin{cases} x^{'}(t) = \dfrac{-x(t)}{1+\cos^2(\pi x(t))}, \text{ pour tout } t \in I = \left[\frac{1}{4},2\right], \\ x(\frac{1}{4}) = x(2). \end{cases} \tag{2.16}$$

*Ici* $f(t,x(t)) = \dfrac{-x(t)}{1+\cos^2(\pi x(t)}$. *Il est clair que* $f$ *est une fonction continue sur* $[\frac{1}{4},2]\times\mathbb{R}$ *et* $\gamma(t)=-1$, $\delta(t)=1$, *sont respectivement sous et sur-solutions de* (2.16), *avec* $\gamma(t)\le\delta(t)$ *pour* $t\in\left[\frac{1}{4},2\right]$. *En effet,*

$$\begin{cases} \gamma^{'}(t) = 0 \le f(t,\gamma(t)) = \frac{1}{2}, \quad \text{pour tout } t \in I \quad \text{et } \gamma(\frac{1}{4}) \le \gamma(2), \\ \delta^{'}(t) = 0 \ge f(t,\delta(t)) = -\frac{1}{2} \quad \text{pour tout } t \in I \quad \text{et } \delta(\frac{1}{4}) = 1 \ge \delta(2). \end{cases}$$

*Le Theoreme* 2.2 *implique que le problème (2.16) admet une solution* $x \in C^1([\frac{1}{4},2],\mathbb{R})$ *telle que*

$$-1 \le x(t) \le 1 \text{ pour tout } t \in [\frac{1}{4},2].$$

# Chapitre 3

# Existence de solutions pour des équations différentielles fractionnaires conformes non-linéaires

Dans ce chapitre, nous étudions l'existence de solutions pour d'équation différentielle fractionnaire conforme non-linéaire :

$$x^{(\alpha)}(t) = f(t, x(t)), \qquad \text{pour tout } t \in I = [a, b],\ 0 < a < b, \tag{3.1}$$

sataisfont l'une des conditions de bord suivantes (condition de Cauchy ou condition périodique sur I) :

$$x(a) = x_0, \tag{3.2}$$

$$x(a) = x(b). \tag{3.3}$$

Où $0 < \alpha \leq 1$, $x_0 \in \mathbb{R}$, $x^{(\alpha)}(t)$ désigne la dérivée fractionnaire conforme de $x$ d'ordre $\alpha$ en $t$ et $f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue.

À l'aide de la méthode des sous et sur-solutions et le théorème de point fixe de Schauder, on établit des résultats d'existence pour les deux problèmes (3.1)(3.2) et (3.1)(3.3).

Une fonction $x \in C^{\alpha}(I, \mathbb{R})$ est dite solution de (3.1)(3.2) (resp., (3.1)(3.3)) si elle satisfait l'équation (3.1) sur $I$, et la condition (3.2) (resp., (3.3)).

- L'existence de solutions pour l'équation différentielle fractionnaire conforme (3.1) avec $\alpha = 1$ a été obtenue dans le Chapitre 2 :

$$x^{'}(t) = f(t, x(t)), \qquad \text{pour tout } t \in [a, b], \quad 0 < a < b,$$

avec des conditions aux bords (condition de Cauchy ou condition périodique).

Les résultats de ce travail se trouvent dans [3]

## 3.1 Existence de solutions pour le problème (3.1)(3.3)

Nous citons maintenant la défnition des sous et sur-solutions du problème (3.1)(3.3).

**Définition 3.1** *On dit qu'une fonction $w \in C^{\alpha}(I, \mathbb{R})$ est une sur-solution de* (3.1)(3.3)*, si*
*(i)* $w^{(\alpha)}(t) \geq f(t, w(t))$, *pour tout* $t \in I$ *;*
*(ii)* $w(a) \geq w(b)$.
*De même, on dit qu'une fonction $v \in C^{\alpha}(I, \mathbb{R})$ est une sous-solution de* (3.1)(3.3) *si*
*(i)* $v^{(\alpha)}(t) \leq f(t, v(t))$, *pour tout* $t \in I$ *;*
*(ii)* $v(a) \leq v(b)$.

Nous définissons l'ensemble (le secteur) :

$$[v, w] = \{x \in C(I) : v(t) \leq x(t) \leq w(t), \text{ pour tout } t \in I\}.$$

**Lemme 3.1** *Le problème périodique*

$$\begin{cases} x^{(\alpha)}(t) + \alpha x(t) = g(t), & \textit{pour tout } t \in I, \\ x(a) = x(b), \end{cases} \tag{3.4}$$

*avec $g \in C^{\alpha}(I, \mathbb{R})$, admet une solution unique $x \in C^{\alpha}(I, \mathbb{R})$, donnée par*

$$x(t) := e^{-t^{\alpha}} \left( \frac{1}{e^{b^{\alpha} - a^{\alpha}} - 1} \int_a^b s^{\alpha - 1} e^{s^{\alpha}} g(s) ds + \int_a^t s^{\alpha - 1} e^{s^{\alpha}} g(s) ds \right) \tag{3.5}$$

***Preuve***.
Soit $x$ est solution du problème (3.4), on a :

$$\begin{aligned}\left[x(t)e^{t^\alpha}\right]^{(\alpha)} &= x^{(\alpha)}(t)e^{t^\alpha} + \alpha t^{1-\alpha}t^{\alpha-1}e^{t^\alpha}x(t),\\ &= e^{t^\alpha}g(t),\end{aligned}$$

On intégré les deux cotés de cette égalité sur $[a,t]$ et on obtient

$$x(t)e^{t^\alpha} - x(a)e^{a^\alpha} = \int_a^t e^{s^\alpha}g(s)d_\alpha s. \tag{3.6}$$

Donc,

$$x(t) = e^{-t^\alpha}\left(e^{a^\alpha}x(a) + \int_a^t s^{\alpha-1}\ e^{s^\alpha}g(s)ds\right). \tag{3.7}$$

Par (3.4) et(3.7), on obtient

$$x(b) = x(a) = \frac{e^{-a^\alpha}}{e^{(b^\alpha-a^\alpha)}-1}\int_a^b s^{\alpha-1}\ e^{s^\alpha}g(s)ds. \tag{3.8}$$

En substituant (3.8) à (3.7), on obtient

$$\begin{aligned}x(t) &= \frac{e^{-t^\alpha}}{e^{(b^\alpha-a^\alpha)}-1}\int_a^b s^{\alpha-1}e^{s^\alpha}g(s)ds + \int_a^t s^{\alpha-1}e^{(s^\alpha-t^\alpha)}g(s)ds\\ &= e^{-t^\alpha}\left(\frac{1}{e^{b^\alpha-a^\alpha}-1}\int_a^b s^{\alpha-1}e^{s^\alpha}g(s)ds + \int_a^t s^{\alpha-1}e^{s^\alpha}g(s)ds\right).\end{aligned}$$

Pour, l'étude de ce problème nous considérons le problème modifié suivant :

$$\begin{cases} x^{(\alpha)}(t) + \alpha x(t) = f(t,\overline{x}(t)) + \alpha\overline{x}(t), \quad t \in I,\\ x(a) = x(b), \end{cases} \tag{3.9}$$

où

$$\overline{x}(t) = \begin{cases} v(t), & \text{si } x(t) < v(t),\\ x(t), & \text{si } v(t) \leq x(t) \leq w(t),\\ w(t), & \text{si } x(t) > w(t), \end{cases} \tag{3.10}$$

avec $v(t) \leq w(t)$ pour tout $t \in I$.
Il est clair qu'une solution $x$ de (3.9) telle que $v(t) \leq x(t) \leq w(t)$ pour tout

$t \in I$ (c-à-d. $x \in [v, w]$) est une solution de (3.1)(3.3).

Définissons l'opérateur $\mathcal{N}_1 : C(J, \mathbb{R}) \to C(J, \mathbb{R})$ par

$$\mathcal{N}_1(x)(t) = e^{-t^\alpha}\left(\frac{1}{e^{b^\alpha - a^\alpha} - 1}\int_a^b s^{\alpha-1}e^{s^\alpha}\Big(f(s, \bar{x}(s)) + \alpha\bar{x}(s)\Big)ds \right.$$
$$\left. + \int_a^t s^{\alpha-1}e^{s^\alpha}\Big(f(s, \bar{x}(s)) + \alpha\bar{x}(s)\Big)ds\right).$$

.

D'après le Lemme 3.1, les points fixes de l'opérateur $\mathcal{N}_1$ sont les solutions du problème (3.9).

**Proposition 3.1** *Soit $f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Si $v, w \in C^\alpha(I, \mathbb{R})$ sont respectivement sous et sur solutions de (3.1)(3.3), tel que $v \le w$ sur $I$, alors l'opérateur $\mathcal{N}_1$ est compact.*

**Preuve :**La preuve est donnée en plusieures étapes.
**Etape 1 :** Montrons tout d'abord la continuité de l'opérateur $\mathcal{N}_1$.
Soit $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $C(I, \mathbb{R})$ convergeant vers $x \in C(I, \mathbb{R})$. Alors pour tout $t \in I$, on a :

$$\begin{aligned}
&\Big|\mathcal{N}_1(x_n(t)) - \mathcal{N}_1(x(t))\Big| \\
&\le e^{-t^\alpha}\Big[\frac{1}{e^{b^\alpha - a^\alpha} - 1}\int_a^b s^{\alpha-1}e^{s^\alpha}\Big(\Big|f(s, \bar{x_n}(s)) - f(s, \bar{x}(s))\Big| + \alpha\Big|\bar{x_n}(s) - \bar{x}(s)\Big|\Big)ds \\
&\qquad + \int_a^t s^{\alpha-1}e^{s^\alpha}\Big(\Big|f(s, \bar{x_n}(s)) - f(s, \bar{x}(s))\Big| + \alpha\Big|\bar{x_n}(s) - \bar{x}(s)\Big|\Big)ds\Big] \\
&\le e^{b^\alpha - a^\alpha}\Big[K\int_a^b s^{\alpha-1}\Big(\Big|f(s, \bar{x_n}(s)) - f(s, \bar{x}(s))\Big| + \Big|\bar{x_n}(s) - \bar{x}(s)\Big|\Big)ds \\
&\qquad + \int_a^t s^{\alpha-1}\Big(\Big|f(s, \bar{x_n}(s)) - f(s, \bar{x}(s))\Big| + \Big|\bar{x_n}(s) - \bar{x}(s)\Big|\Big)\Big]ds.
\end{aligned}$$

où $K = \dfrac{1}{e^{b^\alpha - a^\alpha} - 1}$, $\max_{a\le s\le b}\{e^{-s^\alpha}\} = e^{-a^\alpha}$ *et* $\max_{a\le s\le b}\{e^{s^\alpha}\} = e^{b^\alpha}$. Puisqu'il existe une constante $R > 0$ tel que $\|\overline{x}\|_{C(I,\mathbb{R})} < R$, il existe un indice $N$ tell que $\|\overline{x_n}\|_{C(I,\mathbb{R})} \le R$ pour tout $n > N$. Ainsi, $f$ uniformément continue sur $I \times B_R(0)$. Alors pour $\varepsilon > 0$ donné, il existe un $\delta > 0$ tel que $x, y \in \mathbb{R}$ où

$$|y - x| \le \delta < \frac{\epsilon\alpha}{2(K+1)(b^\alpha - a^\alpha)e^{b^\alpha - a^\alpha}}$$

on a
$$|f(s,y)-f(s,x)| < \frac{\epsilon\alpha}{2(K+1)(b^\alpha-a^\alpha)e^{b^\alpha-a^\alpha}},$$
pour tout $s\in I$. Par hypothèse, il est possible de trouver un indice $\hat{N}>N$ tel que $\|\overline{x_n}-\overline{x}\|_{C(I,\mathbb{R})}<\delta$ pour $n>\hat{N}$. Dans ce cas,

$$\begin{aligned}\Big|\mathcal{N}_1(x_n(t))-\mathcal{N}_1(x(t))\Big| &\leq \frac{2\epsilon\alpha e^{b^\alpha-a^\alpha}}{2(K+1)(b^\alpha-a^\alpha)e^{b^\alpha-a^\alpha}}\Big(K\int_a^b s^{\alpha-1}ds+\int_a^t s^{\alpha-1}ds\Big)\\ &= \frac{2\epsilon\alpha e^{b^\alpha-a^\alpha}}{2(K+1)(b^\alpha-a^\alpha)e^{b^\alpha-a^\alpha}}\Big(K\frac{b^\alpha-a^\alpha}{\alpha}+\frac{t^\alpha-a^\alpha}{\alpha}\Big)\\ &\leq \epsilon\end{aligned}$$

ce qui nous convainc de la continuité de $\mathcal{N}_1$.
**Etape 2 :**Montrons maintenant que l'ensemble $\mathcal{N}_1(C(I,\mathbb{R}))$ est relativement compact. Considérons une suite $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{N}_1(C(I,\mathbb{R}))$ pour tout $n\in N$ il existe une suite $(x_n)_{n\in N}\in C(I,\mathbb{R})$ tell que $y_n=\mathcal{N}_1(x_n(t))$ pour tout $n\in N$. Par définition, il existe une constante $R>0$ tel que $|\overline{x}_n(s)|\leq R$, pour tout $s\in I$ et tout $n\in\mathbb{N}$. La fonction $f$ étant compacte sur $I\times\overline{B}(0,R)$, nous pouvons déduire l'existance d'une constante $A>0$, telle que
$$|f(s,\overline{x}_n(s)|\leq A, \qquad \text{pour tout } s\in I \quad \text{et} \quad \text{tout } n\in\mathbb{N}.$$
Nous avons
$$\begin{aligned}\Big|\mathcal{N}_1(x_n(t))\Big| &\leq e^{-t^\alpha}\Big[\frac{1}{e^{b^\alpha-a^\alpha}-1}\int_a^b s^{\alpha-1}e^{s^\alpha}\Big(\Big|f(s,\bar{x_n}(s))\Big|+\alpha\Big|\bar{x_n}(s)\Big|\Big)ds\\ &\qquad\qquad+\int_a^t s^{\alpha-1}e^{s^\alpha}\Big(\Big|f(s,\bar{x_n}(s))\Big|+\alpha\Big|\bar{x_n}(s)\Big|\Big)ds\Big]\\ &\leq e^{b^\alpha-a^\alpha}(A+R)\Big(K\int_a^b s^{\alpha-1}ds+\int_a^t s^{\alpha-1}ds\Big)\\ &\leq e^{b^\alpha-a^\alpha}(A+R)(K+1)\frac{(b^\alpha-a^\alpha)}{\alpha}=L.\end{aligned}$$

Ainsi, la suite $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est uniformément bornée sur $\mathcal{C}(I,\mathbb{R})$.
D'autre part, pour tout $t_1 < t_2 \in I$, on a

$$\begin{aligned}
&\Big|\mathcal{N}_1(x_n(t_2)) - \mathcal{N}_1(x_n(t_1))\Big| \\
&\qquad \leq |e^{-t_2^\alpha} - e^{-t_1^\alpha}|\Big[\frac{1}{e^{b^\alpha - a^\alpha} - 1}\int_a^b s^{\alpha-1}e^{s^\alpha}\Big(|f(s,\bar{x_n}(s))| + |\bar{x_n}(s)|\Big)ds \\
&\qquad\qquad + \int_a^{t_1} s^{\alpha-1}e^{s^\alpha}\Big(|f(s,\bar{x_n}(s))| + |\bar{x_n}(s)|\Big)ds\Big] \\
&\qquad + e^{-t_2^\alpha}\int_{t_1}^{t_2} s^{\alpha-1}e^{s^\alpha}\Big(|f(s,\bar{x_n}(s))| + |\bar{x_n}(s)|\Big)ds \\
&\qquad \leq (e^{-t_1^\alpha} - e^{-t_2^\alpha})(K+1)e^{b^\alpha}(A+R)\frac{b^\alpha - a^\alpha}{\alpha} + e^{b^\alpha - a^\alpha}(A+R)\frac{t_2^\alpha - t_1^\alpha}{\alpha}.
\end{aligned}$$

Donc, la suite $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est équicontinue. Par le théorème d'Arzelà-Ascoli, on obtient que l'ensemble $\mathcal{N}_1\,(C(I,\mathbb{R}))$ est relativement compacte dans $C(I,\mathbb{R})$. Ainsi, $\mathcal{N}_1$ est compact.

Nous pouvons maintenant démontrer le résultat d'existence suivant.

**Théorème 3.1** *Soit $f : I\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Si $v, w \in C^\alpha(I,\mathbb{R})$ sont respectivement sous et sur solutions de (3.1)(3.3), tel que $v \leq w$ sur $I$, alors le problème (3.1)(3.3) admet une solution $x \in C^\alpha(I,\mathbb{R})$, telle que $v(t) \leq x(t) \leq w(t)$ pour tout $t \in I$.*

**Preuve**.
Par la Proposition 3.1, l'opérateur $\mathcal{N}_1$ est compact. Ainsi, par le Théorème du point fixe de Schauder, $\mathcal{N}_1$ admet un point fixe. Le Lemme 3.1 nous assure que ce point fixe est une solution du problème (3.9). Il suffit donc de démontrer que pour toute solution $x$ de (3.9), $x \in [v,w]$.
Soit $x \in C^\alpha(I,\mathbb{R})$ la solution de (3.9), prouvons d'abord que :

$$v(t) \leq x(t), \quad \textit{pour tout } t \in I.$$

Procédons par l'absurde, il existe $t_1, t_2 \in I$, $t_1 < t_2$ tel que $v(t_1) = x(t_1)$ et

$$x(t) \leq v(t) \textit{ pour tout } t \in ]t_1, t_2[.$$

D'aprés la définition de $\bar{x}$ on a

$$x^{(\alpha)}(t) = f(t, v(t)) + \alpha v(t) - \alpha x(t).$$

Donc
$$x(t) - x(t_1) = \int_{t_1}^{t} s^{\alpha-1}\Big[f(s, v\,(s)) + \alpha(v(s) - x(s))\Big]ds.$$
En utilusant le fait que $v$ est une sous solution de (3.1)(3.3), l'inégalité ci-dessus nous donne :

$$\begin{aligned} v(t) - v(t_1) &\leq \int_{t_1}^{t} s^{\alpha-1} f(s, v(s))ds \\ &< \int_{t_1}^{t} s^{\alpha-1}\Big[f(s, v(s)) + \alpha(v(s) - x(s))\Big]ds \\ &= x(t) - x(t_1) < v(t) - v(t_1). \end{aligned}$$

C'est une contradiction. Donc $v(t) \leq x(t)$ *pour tout* $t \in I$.
En suivant un raisonnement similaire à la partie précédente, nous montrons maintenant que :
$$x(t) \leq w(t) \text{ pour tout } t \in I.$$

Supposons qu'il existe $t_1, t_2 \in I, t_1 < t_2$ tel que $w(t_1) = x(t_1)$ et

$$x(t) \geq w(t) \text{ pour tout } t \in ]t_1, t_2[.$$

En utilusant la définition de $\bar{x}$ on a

$$x^{(\alpha)}(t) = f(t, w(t)) + \alpha(w(t) - x(t)).$$

Donc
$$x(t) - x(t_1) = \int_{t_1}^{t} s^{\alpha-1}\Big[f(s, w(s)) - \alpha(x(s) - w(s))\Big]ds.$$
En utilusant le fait que $w$ est une sur solution de (3.1)(3.3). On obtient donc

$$\begin{aligned} w(t) - w(t_1) &\geq \int_{t_1}^{t} s^{\alpha-1} f(s, w(s))ds \\ &> \int_{t_1}^{t} s^{\alpha-1}\Big[f(s, w(s)) - \alpha(x(s) - w(s))\Big]ds \\ &= x(t) - x(t_1) > w(t) - w(t_1). \end{aligned}$$

C'est une contradiction, donc : $w(t) \geq x(t)$ *pour tout* $t \in I$.
Ceci montre que le problème (3.9) à une solution dans l'intervalle $[v, w]$ qui est la solution de (3.1)(3.3).

## 3.2 Existence de solutions pour le problème (3.1)(3.2)

Nous citons maintenant la défnition des sous et sur-solutions du problème (3.1)(3.2).

**Définition 3.2** *On dit qu'une fonction* $w \in C^{\alpha}(I, \mathbb{R})$ *est une sur-solution de* (3.1)(3.2), *si*

*(i)* $w^{(\alpha)}(t) \geq f(t, w(t)), \quad$ *pour tout* $t \in I$ *;*

*(ii)* $w(a) \geq x_0$.

*De même, on dit qu'une fonction* $v \in C^{\alpha}(I, \mathbb{R})$ *est une sous-solution de* (3.1)(3.2) *si*

*(i)* $v^{(\alpha)}(t) \leq f(t, v(t)), \quad$ *pour tout* $t \in I$ *;*

*(ii)* $v(a) \leq x_0$.

Nous définissons l'ensemble (le secteur) :

$$[v, w] = \{x \in C(I) : v(t) \leq x(t) \leq w(t), \text{ pour tout } t \in I\}.$$

**Lemme 3.2** *Le problème à valeur initiale*

$$\begin{cases} x^{(\alpha)}(t) + \alpha x(t) = g(t), \quad \textit{pour tout } t \in I, \\ x(a) = x_0, \end{cases} \tag{3.11}$$

*avec* $g \in C^{\alpha}(I, \mathbb{R})$, *admet une solution unique* $x \in C^{\alpha}(I, \mathbb{R})$, *donnée par*

$$x(t) := \int_a^t s^{\alpha-1} e^{s^{\alpha}-t^{\alpha}} g(s) ds + x_0 e^{a^{\alpha}-t^{\alpha}}. \tag{3.12}$$

Pour, l'étude de ce problème nous considérons le problème modifié suivant :

$$\begin{cases} x^{(\alpha)}(t) + \alpha x(t) = f(t, \overline{x}(t)) + \alpha \overline{x}(t), \quad t \in I, \\ x(a) = x_0, \end{cases} \tag{3.13}$$

où

$$\overline{x}(t) = \begin{cases} v(t), & \text{si } x(t) < v(t), \\ x(t), & \text{si } v(t) \leq x(t) \leq w(t), \\ w(t), & \text{si } x(t) > w(t), \end{cases} \tag{3.14}$$

avec $v(t) \leq w(t)$ pour tout $t \in I$.
Il est clair qu'une solution $x$ de (3.13) telle que $v(t) \leq x(t) \leq w(t)$ pour tout $t \in I$ (c-à-d. $x \in [v, w]$) est une solution de (3.1)(3.2).

Définissons l'opérateur $\mathcal{N}_2 : C(I, \mathbb{R}) \to C(I, \mathbb{R})$ par

$$\mathcal{N}_2(x)(t) = \int_a^t s^{\alpha-1} e^{s^\alpha - t^\alpha} \Big( f(s, \bar{x}(s)) + \alpha \bar{x}(s) \Big) ds + x_0 e^{a^\alpha - t^\alpha}.$$

D'après le Lemme 3.2, les points fixes de l'opérateur $\mathcal{N}_2$ sont les solutions du problème (3.13).

En utilisant un raisonnement similaire à la preuve du Proposition 3.1, on peut aussi obtenir le résultat suivant.

**Proposition 3.2** *Soit $f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue.
Si $v, w \in C^\alpha(I, \mathbb{R})$ sont respectivement sous et sur solutions de (3.1)(3.2), tel que $v \leq w$ sur $I$, alors l'opérateur $\mathcal{N}_2$ est compact.*

En suivant un raisonnement similaire au Théorème 3.1, nous pouvons obtenir le théorème d'existence suivant.

**Théorème 3.2** *Soit $f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Si $v, w \in C^\alpha(I, \mathbb{R})$ sont respectivement sous et sur solutions de* (3.1)(3.2)*, tel que $v \leq w$ sur $I$, alors le problème* (3.1)(3.2) *admet une solution $x \in C^\alpha(I, \mathbb{R})$, telle que $v(t) \leq x(t) \leq w(t)$ pour tout $t \in I$.*

**Preuve**.
Par la Proposition 3.2, l'opérateur $\mathcal{N}_2$ est compact. Ainsi, par le Théorème du point fixe de Schauder, $\mathcal{N}_2$ admet un point fixe. Le Lemme 3.2 nous assure que ce point fixe est une solution du problème (3.13). Il suffit donc de démontrer que pour toute solution $x$ de (3.13), $x \in [v, w]$.
Soit $x \in C^\alpha(I, \mathbb{R})$ la solution de (3.13), on prouve que :

$$v(t) \leq x(t), \quad \textit{pour tout } t \in I.$$

et

$$x(t) \leq w(t), \quad \textit{pour tout } t \in I.$$

Ceci montre que le problème (3.13) admet une solution $x$ sataisfait $v(t) \leq x(t) \leq w(t)$ pour tout $t \in I$ qui est une solution du problème (3.1)(3.2).

**Remarque 3.1** *Les résultats (Théorèmes* 3.2 *et* 3.1*) de Chapitre 3 généralisent les résultats précédents (Théorèmes* 2.1 *et* 2.2*) donnés dans le Chapitre 2 pour l'équation différentielle non-linéaire du premier ordre :*

$$x^{'}(t) = f(t, x(t)), \qquad \textit{pour tout } t \in I = [a, b], \quad 0 < a < b.$$

## 3.3 Exemples

Dans cette partie nous donnons quelques exemples d'applications.

**Exemple 3.3.1** *On considère le problème périodique suivant :*

$$\begin{cases} x^{(\frac{2}{3})}(t) = \dfrac{2t - 1 - \sin(\frac{\pi}{2}x(t))}{\sqrt{t}} & t \in I = [\frac{1}{3}, 1], \\ x(\frac{1}{3}) = x(1). \end{cases} \tag{3.15}$$

*Ici,* $\alpha = \frac{2}{3}$ *et* $f(t, x) = \dfrac{2t - 1 - \sin(\frac{\pi}{2}x(t))}{\sqrt{t}}$*. Il est clair que* $f$ *est une fonction continue sur* $[\frac{1}{3}, 1] \times \mathbb{R}$*. On peut vérifier que* $v = -1$ *et* $w = 1$ *sont respectivement sous et sur-solutions de* (3.15)*, avec* $v(t) \leq w(t)$ *pour* $t \in \left[\frac{1}{3}, 1\right]$*. En effet,*

$$v^{(\frac{2}{3})}(t) = 0 \leq f(t, v(t)) = 2\sqrt{t}, \ t \in I, \quad v(\frac{1}{3}) \leq v(1),$$

*et*

$$w^{(\frac{2}{3})}(t) = 0 \geq f(t, w(t)) = \frac{2(t-1)}{\sqrt{t}}, \ t \in I, \quad w(\frac{1}{3}) \geq w(1),$$

*Alors, le Theoreme* 3.1 *implique que le problème* (3.15) *admet une solution* $x \in C^{\frac{2}{3}}([\frac{1}{3}, 1], \mathbb{R})$ *telle que*

$$-1 \leq x(t) \leq 1 \ \textit{pour tout} \ t \in [\frac{1}{3}, 1].$$

**Exemple 3.3.2** On considère le problème à valeur initiale suivant :

$$\begin{cases} x^{(\frac{1}{4})}(t) = -\frac{1}{2}\sin^3(\frac{\pi}{4}x(t)) - t + \frac{3}{2} \ \text{ pour tout } \ t \in [1, 2], \\ x(1) = -1. \end{cases} \tag{3.16}$$

Ici, $\alpha = \frac{1}{4}$ et $f(t, x) = -\frac{1}{2}\sin^3(\frac{\pi}{4}x(t)) - t + \frac{3}{2}$. Il est clair que $f$ est une fonction continue sur $[1, 2] \times \mathbb{R}$. On peut vérifier que $v = -2$ et $w = 2$

sont respectivement sous et sur-solutions de (3.16), avec $v(t) \leq w(t)$ pour $t \in [1,2]$. En effet,

$$v^{(\frac{1}{4})}(t) = 0 \leq f(t, v(t)) = 2 - t, \ t \in I, \quad v(1) = -2 \leq -1,$$

et

$$w^{(\frac{1}{4})}(t) = 0 \geq f(t, w(t)) = 1 - t, \ t \in I, \quad w(1) = 2 \geq -1,$$

Alors, le Theoreme 3.2 implique que le problème (3.16) admet une solution $x \in C^{\frac{1}{4}}([1,2], \mathbb{R})$ telle que

$$-2 \leq x(t) \leq 2 \text{ pour tout } t \in [1,2].$$

# Conclusion

Notre but principal, dans ce mémoire, est de présenter des résultats d'existence de solutions pour des équations différentielles non-linéaires du premier ordre et des équations différentielles fractionnaires conformes non-linéaires d'ordre $\alpha \in ]0, 1]$ avec des conditions de bord (condition de Cauchy ou condition périodique). Ces résultats ont été obtenus grâce a la méthode de sous et sur solutions et le théorème de point fixe de Schauder.

# Bibliographie


[1] T. Abdeljawad, *On conformable fractional calculus*, J. Comput. Appl. Math. **279** (2015), 57–66.

[2] D.R. Anderson and D.J. Ulness, *Properties of the Katugampola fractional derivative with potential application in quantum mechanics*, J. Math. Phys. **56** (2015), no. 6, 063502, 18 pp.

[3] B. Bendouma, A. Cabada and A. Hammoudi, *Existence of solutions for conformable fractional problems with nonlinear functional boundary conditions*, Malaya Journal of Mathematik. **7** (2019), no. 4, 700-708.

[4] B. Bendouma, A. Cabada and A. Hammoudi, *Existence results for systems of conformable fractional differential equations,* Archivum Mathematicum (BRNO). **55** (2019), 69-83.

[5] S. Gadoum, N. Maatoug and F. Mennah, *Existence de solutions pour des équations différentielles fractionnaires conformes,* Mémoire soutenu (2019-2020), Universit*é* Ibn Khaldoun de Tiaret.

[6] T. Jankowski, *Boundary problems for fractional differential equations*, Appl. Math. Lett. **28** (2014), 14-19.

[7] O.S. Iyiola and E.R. Nwaeze, *Some new results on the new conformable fractional calculu swith application using D'Alambert approach*, Progr. Fract. Differ. Appl. **2**(2016), (2), 115–122.

[8] R. Khalil, M. Al Horani, A. Yousef and M. Sababheh, *A new definition of fractional derivative*, J. Comput. Appl. Math. **264** (2014), 65–70.

[9] A. Kilbas, M.H. Srivastava and J.J. Trujillo, *Theory and Application of Fractional Differential Equations*, North Holland Mathematics Studies 204, 2006.

[10] R. L. Magin, *Fractional calculus in Bioengineering*, CR in Biomedical Engineering. **32** (2004), no. 1, 1-104.

[11] K. S. Miller and B. Ross. *An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations*, John Wiley and Sons Inc., New York, 1993.

[12] I. Podlubny, *Fractional Differential Equations*, Academic Press : San Diego, 1999.

[13] M. Pospisil and L.P. Skripkova, *Sturm's theorems for conformable fractional differential equations*, Math. Commun. **21**(2016), 273–281.

[14] K. Shugui, C. Huiqing, Y. Yaqing and G. Ying, *Existence and uniqueness of the solutions for the fractional initial value problem*, Electr. J. Shanghai Normal University (Natural Sciences), **45**(20016), no. 3, 313–319.

[15] A. Shi and S. Zhang, *Upper and lower solutions method and a fractional differential equation boundary value problem*, Electr. J. Qual. Theory. Differ. Equ. **30** (2009), 13 pages.

[16] Y. Wang, J. Zhou and Y. Li, *Fractional Sobolev's Spaces on Time Scales via Conformable Fractional Calculus and Their Application to a Fractional Differential Equation on Time Scales*, Adv. Math. Phys. (2016), 1–21.

[17] Z. Wei, Q. Li, and J. Che, *Initial value problems for fractional differential equations involving Riemann-Liouville sequential fractional derivative*, J. Math. Anal. Appl., **367** (2009), no. 1, 260–272.