

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE

UNIVERSITÉ IBN-KHALDOUN DE TIARET

FACULTÉ DES SCIENCES APPLIQUEES
DÉPARTEMENT DE GENIE MECANIQUE

MEMOIRE DE FIN D'ETUDES

Pour l'obtention du diplôme de Master

Domaine : Sciences et Technologies

Filière : Génie Mécanique

Spécialité: Construction mécanique

THÈME

**Etude du comportement mécanique des structures poreuses
en matériaux fonctionnellement gradués FGM**

Préparé par: **Mr. LEBIB Sofiane**

Devant le Jury :

Nom et prénoms	Grade	Lieu d'exercice	Qualité
Mr. GUEMMOUR Mohamed	Maitre de conférences B	UIK Tiaret	Président
Mr. SASSI Ahmed	Maitre de conférences A	UIK Tiaret	Examineur
Mr HADJI Lazreg	Maitre de conférences B	UIK Tiaret	Encadreur

PROMOTION 2018 /2019

Remerciements

Je remercie Dieu pour avoir guidé mes pas.

Ma plus grande gratitude revient à Mr. Hadji Lazreg d'avoir dirigé ce projet. Sa disponibilité et sa bonne humeur ont permis le bon déroulement de ce travail.

Mes remerciements s'adressent également au Chef de département de génie mécanique Mr. Guemmour Mohamed pour son aide et support.

Mes remerciements vont aux membres de jury d'avoir honoré ma soutenance et tout l'effort fourni afin de juger ce modeste travail.

Dédicaces

A mes chers parents.

A mon adorable petite famille... mes enfants Asma, Anas et Ayoub.

A la mémoire de ceux qu'on aime et qui sont partis...

Sofiane

SOMMAIRE

Remerciements.....	I
Dédicaces	II
Sommaire	III
Liste des figures.....	VI
Liste des tableaux.....	VII
Liste des symboles	VIII
Introduction générale	1

CHAPITRE I : Généralités sur les matériaux à gradients de propriétés

I.1. Introduction	4
I.2. Définition	5
I.3. Histoire de la gradation fonctionnelle des matériaux	5
I.4. Méthodes d'élaboration des FGM	6
I.4.1 Coulage en Bande (Tape Casting ou Doctor-Blade)	7
I.4.2. Coulage Séquentiel en Barbotine (Slip Casting)	8
I.4.3. Compaction Sèche des Poudres	9
I.4.4. Dépôt par Electrophorèse	9
I.4.5. Projection Plasma	9
I.4.6. C. V. D. et P. V. D.	10
I.4.7. Frittage et Infiltration.....	10
I.4.8. Frittage Laser Différentiel	10
I.4.9. Implantation Ionique (Sputtering).....	11
I.4.10. Dépôt par Centrifugation.....	11
I.5. Domaines d'application des matériaux à gradients évalués FGM.....	11
I.6. Concept des matériaux FGM	12

I.7. Propriétés effectives des matériaux fonctionnellement gradués	14
I.8. Les différentes lois qui régissent la variation des propriétés matérielles suivant l'épaisseur d'une poutre FGM.....	15
I.8.1. Propriétés matérielles de jnjn poutre P-FGM.....	15
I.8.2. Propriétés matérielles de la poutre S-FGM	16
I.8.3. Les propriétés matérielles de la poutre E-FGM	17
I.9. Conclusion	18

CHAPITRE II : Les différentes théories des poutres FGM

II.1. Introduction	20
II.2. Historique	20
II.3. Le comportement des poutres composites Elomari 2011».....	21
II.4. les différents types de poutres	21
Poutre simple	21
Poutre console	21
Poutre avec porte-à-faux	21
Poutre continue	22
Poutre à double encastrement	22
Poutre supportée à double encastrement	22
II.5. Les différentes théories des poutres « Sallai 2011 »	22
II.6. Méthodes de discrétisation adaptées aux modèles de poutre	28
II.6.1. Procédure de Navier	28
II.6.2. Méthode de Rayleigh-Ritz	29
II.6.3. Méthode des éléments finis.....	29
II.7 Conclusion	29

CHAPITRE III : Etude analytique de la réponse mécanique des poutres poreuse en FGM

III.1. Introduction	31
III.2. Formulation du problème	33
III.2.1. Equations de mouvement	33

III.3 Solution de Navier pour les poutres simplement appuyées	35
---	----

CHAPITRE IV : RESULTATS ET DISCUSSIONS

IV.1. Résultats et discussions	41
IV.1.1. Résultats d'analyse de flexion	41
IV.1.2. Résultats d'analyse de vibration libre	46
IV.1.3. Conclusion	50
Conclusion générale et perspectives	53
Références Bibliographiques	58
Résumé	61
Abstract	62
ملخص	63

Liste des figures

Figure.I.1 : Principe de la méthode coulage en bande.....	8
Figure.I.2 : Disposition du procédé frittage laser différentiel.....	11
Figure.I.3 : Géométrie d'une poutre FGM.....	13
Figure.I.4 : Modèle analytique pour une couche d'un matériau à gradient de propriétés.....	15
Figure.I.5 : La variation du module de Young dans une poutre P-FGM.....	16
Figure.I.6 : Variation de la fraction volumique dans une poutre S-FGM.....	17
Figure.I.7 : Variation du module de Young dans une poutre E-FGM.....	18
Figure.II.1 : Cinématique d'Euler Bernoulli.....	23
Figure.II.2 : Cinématique de Timoshenko.....	25
Figure.II.3 : Cinématique de la Théorie d'Ordre Elevé.....	26
Figure.III.1 : Géométrie et coordonnées de la poutre FGM.....	33
Figure.IV.1 : Variation de la contrainte normale adimensionnelle $\bar{\sigma}_x(l/2, z)$ à travers l'épaisseur de poutre FGM en Al/Al ₂ O ₃ pour différentes valeurs de la fraction volumique de porosité.....	44
Figure.IV.2 : Variation de la contrainte de cisaillement adimensionnel $\bar{\tau}_{xz}(0, z)$ à travers l'épaisseur de poutre FGM en Al/Al ₂ O ₃ pour différentes valeurs de la fraction volumique de porosité.....	45
Figure.IV.3 : Variation du déplacement transversal adimensionnel \bar{w} de la poutre FGM pour différente valeur d'indice de puissance p et de la fraction volumique de porosité α avec $L/h = 5$	46
Figure.IV.4 : Variation de la fréquence fondamentale $\bar{\omega}$ en fonction de l'indice de puissance p et de la fraction volumique de porosité α d'une poutre FGM en Al/Al ₂ O ₃ avec $L/h = 5$	49
Figure.IV.5 : Variation de la fréquence fondamentale $\bar{\omega}$ en fonction de l'indice de puissance p et de la fraction volumique de porosité α d'une poutre FGM en Al/Al ₂ O ₃ avec $L/h = 10$	49
Figure.IV.6 : Variation de la fréquence fondamentale $\bar{\omega}$ en fonction de l'indice de puissance p et de la fraction volumique de porosité α d'une poutre FGM en Al/Al ₂ O ₃ avec $L/h = 20$	50

Liste des tableaux

Tableau.I.1 : Comparaison entre les propriétés de la céramique et du métal.	14
Tableau.IV.1 : Comparaison des déplacements et des contraintes adimensionnelles d'une poutre FGM soumise à une charge uniforme.	42
Tableau.IV.2 : Etude comparative de la fréquence fondamentale $\bar{\omega}$ d'une poutre en Al/Al ₂ O ₃ pour différentes valeur de l'indice de puissance p , et de la fraction volumique de porosité α ($L/h = 5$)	47
Tableau.IV.3 : Etude comparative de la fréquence fondamentale $\bar{\omega}$ d'une poutre en Al/Al ₂ O ₃ pour différentes valeur de l'indice de puissance p , et de la fraction volumique de porosité α ($L/h = 20$)	48

Liste des symboles

E_c	Module de Young de la céramique
E_m	Module de Young de métal
E_1	Module de Young de la face supérieure
E_2	Module de Young de la face inférieure
$E(z)$	Module de Young en fonction de « z »
ν	Coefficient de Poisson
$\nu(z)$	Coefficient de Poisson en fonction de « z »
ρ_c, ρ_m	Densités de masse de la céramique et du métal respectivement
$V(z)$	Fraction volumique
V_c	Fraction volumique de la céramique
V_m	Fraction volumique du métal
p	l'indice de loi de puissance ou l'indice matérielle
α	La fraction volumique de porosité
L, b, h	Dimensions de la poutre
u, w	Les déplacements suivant les directions x et z
w_α	rotation due à la flexion (sans cisaillement)
u_0, w_0	Les composantes du champ de déplacement sur le plan moyen de la poutre
ϕ_x, ϕ_z	Les rotations autour des axes x et z
$\psi(z)$	Fonction de gauchissement (fonction de cisaillement transverse)
$f(z)$	Fonction de gauchissement (fonction de cisaillement transverse)
$f'(z)$	La première dérivée de la fonction de gauchissement par rapport à z
σ_x, σ_z	Contraintes normales
τ_{xy}, τ_{yz}	Contraintes de cisaillement
ϵ_x	Déformation dans les directions x

γ_{xz}	Déformation de distorsion
$\delta u, \delta v, \delta w_b, \delta w_s$	Champ virtuel de déplacement
w_b	Composante de la flèche due à la flexion
w_s	Composante de la flèche due au cisaillement
N	Effort normal
M^b	Moments de flexion pure
M^s	Moments de flexion supplémentaire due au cisaillement transverse
S	Effort de cisaillement pur
m	Nombre de mode
A_{ij}	Termes de rigidité en membrane de la poutre
B_{ij}	Termes de rigidité de couplage de la poutre
D_{ij}	Termes de rigidité de flexion de la plaque
A_{ij}^s	Termes de rigidité de la plaque en cisaillement
B_{ij}^s	Termes de rigidité de la plaque en cisaillement
D_{ij}^s	Termes de rigidité de la plaque en cisaillement
H_{ij}^s	Termes de rigidité de la plaque en cisaillement
Q_{ij}	Coefficients de rigidité
∂	Dérivée partielle
$q(x)$	La charge extérieure
$[K]$	Matrice symétrique des valeurs propres
$\{\Delta\}$	Le vecteur des déplacements
$\{F\}$	Le vecteur des charges
\bar{u}, \bar{w}	Les déplacements adimensionnels
$\bar{\sigma}_x$	La contrainte normale adimensionnelle
$\bar{\tau}_{xz}$	La contrainte de cisaillement adimensionnel

Introduction générale

INTRODUCTION GENERALE

Les matériaux à gradient évalués (FGM : Functionally Graded Materials) sont une nouvelle gamme des structures composites qui ont un grand intérêt pour la conception et la fabrication d'ingénierie. Ces types de matériaux possèdent des propriétés souhaitables pour des applications spécifiques, en particulier les avions, les véhicules spatiaux, l'optique, le biomécanique, l'électronique, la chimie, la mécanique, la construction navale et autres ouvrages de génie civil, soumise à des concentrations des contraintes et des contraintes thermiques et résiduelles élevées. Généralement, les FGM sont des composites avancés, macroscopiquement et microscopiquement hétérogènes qui sont réalisés par exemple à partir d'un mélange de céramique et de métal avec une gradation continue de composition à travers l'épaisseur. Ceci est réalisé par une variation graduelle de la fraction volumique des matériaux constitutifs.

Le concept de " Matériaux à Gradient de Propriétés" a été développé dans le laboratoire national d'aérospatial du Japon en 1984 par M. Niino et ses collègues à Sendai. L'idée est de réaliser des matériaux utilisés comme barrière thermique dans les structures spatiales et les réacteurs à fusion.

Actuellement, la recherche en FGM est activement conduite dans le monde entier. Plusieurs programmes de recherche ont été lancés en 1995 en Allemagne et en 1996 au Japon. Dans le programme allemand 41 matériaux sont étudiés aux universités et aux instituts nationaux concernant le traitement et la modélisation pour développer des applications en FGM pendant le 21ème siècle. Le programme Japonais a été pris en charge par les universités et qui traite 67 topiques qui ont une relation avec la chimie et la physique des FGM.

Cependant, la continuité et la communication entre les chercheurs et la recherche en groupe s'avère d'une grande importance pour développer l'architecture des FGM. Une nouvelle technologie des matériaux gradués non homogènes est née comme conséquence du développement des applications pratiques et des recherches pendant le 21ème siècle.

Suite à l'importance de ces matériaux ainsi que leur large application, des analyses statiques, vibratoires, thermomécaniques et de flambement des structures en FGM ont été exposées par de nombreux chercheurs.

L'objectif principal de notre travail est l'étude de la réponse mécanique des structures en matériau fonctionnellement gradués FGM. La structure FGM considérée est une poutre poreuse simplement appuyée soumise à une charge uniformément répartie. Pour l'analyse de comportement des poutres FGM en considérant les porosités qui peuvent se produire à l'intérieur des matériaux à gradient de propriétés (FGM) au cours de leur fabrication, on a développé un nouveau champ de déplacement avec une nouvelle théorie de cisaillement à trois variables. Cette théorie de cisaillement satisfait la nullité des contraintes aux surfaces supérieures et inférieures de

la poutre sans utiliser le facteur de correction de cisaillement. La loi du mélange modifiée couvrant les phases de porosité est utilisée pour décrire approximativement les propriétés des poutres FGM avec porosité. Sur la base de la présente théorie de la poutre, les équations de mouvement sont dérivées du principe des travaux virtuels et le principe d'Hamilton. Les solutions sont obtenues en utilisant les équations de Navier, et les résultats de la flexion et de la vibration des poutres FGM poreuse sont trouvées en résolvant le problème aux valeurs propres.

Le présent travail de mémoire s'articule autour de deux aspects essentiels qui reflètent toute notre démarche, à savoir :

L'aspect théorique comprend deux chapitres :

Le premier chapitre est consacré à la présentation des matériaux à gradients de propriétés FGM tous en définissant leur concept et leurs caractéristiques puis nous définissons les lois qui régissent ce matériau.

Dans le deuxième chapitre, les différentes théories applicables aux poutres FGM ont été étudiées et analysées.

L'aspect analytique en son rôle est scindé en deux chapitres :

Au troisième chapitre, une analyse du comportement des poutres poreuse simplement appuyées soumises à une charge uniformément répartie en tenant compte de l'effet de cisaillement transverse. Dans cette partie, on suppose que les propriétés matérielles varient selon l'épaisseur de la poutre FGM seulement selon une distribution de puissance (P-FGM).

Le quatrième chapitre s'intéresse à l'étude de la réponse statique et dynamique des poutres poreuses en matériau FGM en s'appuyant sur des études précédentes telles que celle de Thai et al. [Thai, 2012] dont le but est de déterminer la flèche, les contraintes normales de cisaillement et les fréquences de vibration de la poutre FGM. Afin de valider notre développement, des études comparatives détaillées sont présentés en comparaison avec des études précédentes de Thai et al. [Thai. 2012], Simsek et al. [Simsek et al. 2010], Hadji et al. [Hadji. 2018], et Li et al. [Li et al. 2010].

Le présent travail se termine par une conclusion générale de l'ensemble des résultats et la proposition de quelques perspectives pour continuer ce travail.

CHAPITRE I

Généralités sur les matériaux à gradients de propriétés

I.1. Introduction

Un matériau composite est une combinaison de deux matériaux distincts que l'on appelle généralement la matrice et le renfort. Les propriétés physiques d'un matériau composite sont complètement différentes de celles de leurs composantes.

La matrice a Généralement pour rôle mécanique de fournir une certaine cohésion entre les différents éléments de renfort, elle joue le rôle de « ciment » en assurant un minimum d'homogénéité à l'ensemble. Mais l'optimisation locale des propriétés de ce mélange, par association d'un matériau de haute dureté à la surface d'un matériau tenace par exemple, pose alors le problème de l'interface.

Depuis le début du vingtième siècle, l'usage des matériaux composites sous la forme de plaques et de poutres s'est considérablement développé. Que ce soit dans l'industrie automobile, la construction, et plus récemment en aéronautique. Les matériaux composites disposent d'atouts importants par rapport aux matériaux traditionnels. Ils apportent de nombreux avantages fonctionnels : légèreté, résistance mécanique et chimique, maintenance réduite, liberté de forme et durée de vie prolongée [Bessaim2013].

Le développement des matériaux composites a permis d'associer des propriétés spécifiques à différents matériaux au sein d'une même pièce. L'optimisation locale de ces propriétés par association d'un matériau de haute dureté à la surface d'un même matériau tenace pose le problème de l'interface, par exemple une couche d'un matériau céramique peut coller à la surface d'une structure métallique pour former un revêtement barrière thermique dans les applications à haute température. La transition brusque dans les propriétés des matériaux à travers l'interface entre les matériaux discrets peut entraîner une grande contrainte inter laminaire ou une forte concentration de contraintes conduisant à la déformation plastique ou de fissuration. Une technique pour surmonter ces effets nuisibles et d'utiliser un matériau à gradient évalué (de l'anglicisme FUNCTIONALLY GRADED MATERIALS (FGM)).

Ces dernières années, les matériaux à gradient évalués ont été développés pour leurs excellentes propriétés mécaniques. Ces matériaux ont de grandes performances et sont capables de résister aux températures les plus chaudes.

Au début les FGM ont été conçus en tant que matériaux de barrière dans les applications et les réacteurs, c'est par suite que les FGM ont été développés dans le domaine militaire, automobile, biomédicale l'industrie des semi-conducteurs et toutes utilisations dans un environnement à haute température.

Récemment, une nouvelle classe de matériaux composites connue sous le nom de matériau fonctionnellement gradués (FGM), ou matériaux à gradient de propriétés, a attiré une attention particulière.

I.2. Définition

Les matériaux FGM sont des matériaux fonctionnellement gradué, microscopiquement non homogènes. Ils sont fabriqués généralement à partir d'un mélange de métal et de céramique. On les considère comme le produit des matériaux composites en changeant sans interruption, les fractions de volume dans la direction de l'épaisseur. Ce changement allège les zones les plus chargées et conduit à trouver des solutions optimales d'un point de vue économique et mécanique.

Ce type de matériaux, a suscité beaucoup d'attention récemment en raison des avantages de diminuer la différence dans les propriétés matérielles et de réduire les contraintes thermiques résiduelles. Ils sont considérés comme l'un des plus prometteurs pour l'avenir des composites dans de nombreux secteurs tels que l'aérospatiale, la défense, et plus récemment, le secteur médical et le domaine de génie civil.

I.3. Histoire de la gradation fonctionnelle des matériaux

Au environ de 1984-1985, dans une université Japonaise, deux chercheurs l'un dans le domaine de l'aéronautique et l'autre dans le domaine des sciences des matériaux rêvent de concevoir un engin spatial dont le revêtement pourrait résister à un environnement thermique très sévère. Il n'existe alors pas de matériau métallique ni de matériau composite capable de répondre à la fois aux exigences environnementales telles que décrites tout en gardant d'excellentes propriétés mécaniques. Ils échangent alors l'idée du concept FGM, autrement dit d'un matériau avec une gradation continue dans la direction de l'épaisseur, passant d'une face totalement métallique vers une face totalement céramique.

En 1987, le programme national de recherche et de développement sur les FGM a vu le jour au Japon. Beaucoup de chercheurs des institutions publiques et de l'industrie ont uni leurs efforts pour créer un nouveau type de matériau, principalement pour permettre de construire l'enveloppe extérieure d'une navette intercontinentale commerciale. Le problème principal à résoudre étant le flux de chaleur énorme frappant la majorité des surfaces qui sont exposées à la friction par l'air lors de la période de rentrée de la navette dans l'atmosphère terrestre et en même temps, de protéger l'intérieur contre un surchauffement. Certes, un revêtement céramique aurait pu protéger le fuselage contre les températures qui se développent à la

surface, mais on a dû craindre l'action des très grandes contraintes thermo élastiques aux interfaces entre fuselage métallique et sa protection céramique, se rendant compte des différences entre les modules de Young et les conductivités thermiques des deux matériaux.

L'idée fût alors de produire une transition douce, donc graduelle entre métal pur et céramique pure appelée matériau à gradient fonctionnel (functionally graded material FGM).

En 1990 a eu lieu la première conférence internationale sur les FGM à Sendai-city au Japon. En 1992, les matériaux à gradient fonctionnel ont été sélectionnés parmi les dix premières technologies de pointe au Japon et actuellement dans le monde entier.

La réussite dans le domaine des matériaux intelligents ne sera possible que par une forte synergie entre les différents secteurs industriels et scientifiques. Certes, le concept FGM a été proposé à l'origine pour répondre aux exigences du domaine de l'aéronautique et de l'aérospatial mais ces matériaux sont utilisés dans la fabrication des outils industriels qui exigent une grande rigidité, une grande dureté et une résistance thermique importante. Ils ont également des applications en optoélectronique, particulièrement dans la fabrication des fibres optiques capables de transmettre l'information à de très grandes vitesses. Leur application dans les systèmes de conversion de l'énergie solaire en énergie électrique sera probablement effective dans un futur proche dans notre pays qui a un potentiel énorme dans ce domaine. Les FGM sont également les biomatériaux idéaux pour réparer ou combler les déficiences osseuses éventuelles de notre squelette. Cette technologie est aussi applicable dans les centrales nucléaires où la température peut atteindre des valeurs considérables.

Actuellement, des lanceurs en FGM sont testés et les résultats sont prometteurs. Outre les applications citées précédemment, les FGM trouvent aussi leurs applications dans les semi-conducteurs et en génie civil.

I.4. Méthodes d'élaboration des FGM

L'obtention des qualités désirées nécessite de plus l'intervention de techniques sophistiquées et subtiles comme l'utilisation de lasers, de plasmas, l'implantation ionique, de dépôts en phase vapeurs, etc.

Les procédés de fabrication d'un matériau à gradient évalués peuvent habituellement être divisés en construisant la structure dans un espace hétérogène (mélange graduel) et la transformation de cette structure en matériau en bloc (solidification).

Les processus de mélange graduel peuvent être classés suivant ses constituants, l'homogénéisation et la ségrégation. Les procédés élémentaires sont basés sur la fabrication par étape de structure en matériaux graduels précurseurs ou poudres. Les avancés en technologie

d'automatisation durant les dernières décennies ont rendu des processus élémentaires de progression technologiquement et économiquement durables. Dans la procédure d'homogénéisation qui traite une interface pointue entre deux matériaux est convertie dans un gradient par transport matériel. Les procédés d'homogénéisation et de ségrégation produisent un gradient continu, mais ont des limitations au sujet des types de gradients qui peuvent être produits.

Habituellement, le séchage et la solidification suivent les étapes du mélange graduel. Le besoin de ces processus de consolidation doit adapter aux FGM :

- Des conditions de procédure choisie pour ne pas altérer ou détruire le gradient en mode non contrôlé.
- Prêter attention à tout rétrécissement inégal du FGM pendant la consolidation.

Ces dernières années, les travaux menés au laboratoire ont permis de développer une méthode originale pour élaborer des composites à gradient continu de composition. Cette méthode est basée sur une technique de Co-sédimentation de poudres en milieu proportionnelle à la densité du matériau et au carré du diamètre de particule. En contrôlant et en adaptant les répartitions granulométriques de chaque poudre, il est possible d'obtenir différents gradient de concentration dans le dépôt formé à l'issue de sédimentation.

Il existe de nombreuses méthodes d'élaboration des matériaux a gradient de propriétés, les techniques les plus employées sont brièvement expliquées ci-dessous :

I.4.1 Coulage en Bande (Tape Casting ou Doctor-Blade)

Le coulage en bande consiste à couler une barbotine de poudres fines en suspension aqueuse ou non-aqueuse (la plupart des travaux commerciaux utilisent le procédé non-aqueux) sur un support plan en couches minces et régulières. Selon les cas, c'est soit la lame (doctor-Blade) qui est animée d'un mouvement de translation, soit le support qui se déplace sous la lame (figure. I.3). Les produits obtenus sont des feuillets avec des épaisseurs contrôlées (25-1000 μ m). Après un raffermissement de la pâte, les feuillets sont démoulés et ensuite découpés.

Le solvant doit avoir un point d'ébullition très bas et une viscosité faible. Il doit être soluble avec le liant le plastifiant et les autres ajouts, mais ne doit être ni soluble ni réactif avec la poudre céramique. Le liant donne une grande résistance mécanique au produit cru en permettant son maniement. Généralement un plastifiant est ajouté au liant pour baisser sa viscosité .Les liants (Plastifiants et dé flocculant) doivent être totalement dégagés pendant le délainage.

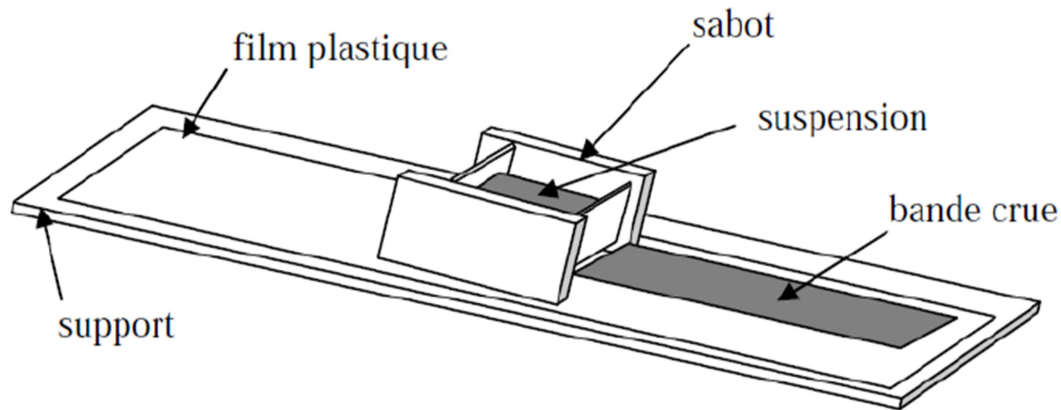


Figure. I.1 : Principe de la méthode coulage en bande.

L'un des plus anciens travaux sur l'étude de cette technique a été publié par Howatt. En 1947, et depuis d'autres travaux ont été réalisés (Reddy.1984). Ce procédé est devenu une technique économique pour la production des substrats céramiques de type Al_2O_3 et surtout pour les condensateurs à base de $BaTiO_3$. On peut d'ailleurs remarquer qu'il s'agit déjà de F.G.M puisqu'il faut empiler des couches conductrices (métaux rares) avec des couches diélectriques ($BaTiO_3$ principalement).

Le procédé de coulage en bande est largement utilisé pour réaliser des matériaux composites laminaires suivant deux méthodes :

- Réalisation directe de bandes multicouches grâce à un système de lames multiples c'est le cas des tri-couches élaborées par (MISTLER.1973).
- Empilement des couches élaborées séparément dont la cohésion est ensuite assurée par une étape de thermo-compression (Reddy.1984).

I.4.2 Coulage Séquentiel en Barbotine (Slip Casting)

Le coulage en Barbotine (Slip Casting) consiste à couler une suspension dans un moule poreux qui va drainer le liquide grâce aux forces capillaires, laissant un tessou (couche de poudre compacte) sur la surface du moule. Après séchage, on obtient le corps en cru. Donc le coulage s'effectue en deux étapes essentielles :

- Formation du tesson ou « prise ».
- Consolidation du tesson « raffermissement ».

La filtration, c'est à dire la formation du tesson lors du coulage, peut être considéré comme un processus d'élimination d'une partie de l'eau de la barbotine; Cette eau migre à travers la couche de tesson déjà formée, sous l'effet :

- Du pouvoir de succion du plâtre (coulage classique) ;ou d'une pression appliquée sur la barbotine (coulage sous pression).

Dans le cas de la fabrication de multicouches, après la formation du premier tesson, le dépôt de la deuxième couche s'effectue de manière telle que la barbotine ne pénètre pas dans le tesson formé. Ce procédé est successivement reproduit pour les autres couches.

I.4.3. Compaction Sèche des Poudres

Cette technique consiste à verser successivement dans un moule en acier les poudres, et à chaque fois qu'une poudre est versée une faible compression est exercée. Ensuite la compaction de l'ensemble des couches sera effectuée. Ce procédé est suivi généralement par une pression isostatique et un délainage. La densification sera enfin l'étape finale (Bishop.1993). Ce procédé peut être envisagé pour la fabrication de pièces de formes complexes. En effet il s'applique aussi avec la technique du pressage isostatique, et de façon industrielle.

I.4.4. Dépôt par Electrophorèse

Le dépôt par électrophorèse est un procédé dans lequel une suspension colloïdale stable est placée dans une cellule contenant deux électrodes, le dépôt se fait par le mouvement des particules chargées au sein de la solution vers la cathode ou l'anode selon le signe de la charge des particules due à un champ électrique. L'élaboration des F.G.M peut se faire donc par le dépôt séquentiel des matériaux (Abdizadeh H.1997).

I.4.5. Projection Plasma

Un gaz soumis à une forte température (par exemple celle d'un arc électrique), se transforme en un état ionisé (plasma). Cette transformation est accompagnée d'un dégagement de chaleur important. Si une particule de céramique se trouve dans cet environnement, elle se fond totalement ou superficiellement, ce qui permet de la situer sur un substrat. La projection plasma des particules

des divers matériaux est devenue une méthode très utilisée pour fabriquer des FGM. L'équipement relativement simple, le rendement élevé du dépôt des particules sur des substrats à géométrie compliquée, les performances des surfaces en fonctionnement et la compatibilité des céramiques avec les métaux sont les avantages essentiels de cette technique (Steffes.H.D.1990).

I.4.6. C. V. D. et P. V. D.

Les dépôts chimique ou physique en phase vapeur sont des techniques dans lesquelles les atomes du matériau sont déposés sur la surface du substrat. Les techniques de C.V.D. et P. V. D. peuvent être utilisées pour façonner un F.G.M sur des substrats de formes compliquées.

I.4.7. Frittage et Infiltration

Cette technique est constituée de deux étapes et convient à la fabrication d'un composite à gradient de fonction composé de deux matériaux dont les températures de fusion sont très différentes :

- La première étape est de fabriquer une matrice frittée du matériau à haute température de fusion avec un gradient de porosité.
- La seconde étape est de remplir ces porosités avec le deuxième matériau fondu par infiltration.
- Le résultat est excellent pour la diminution de la contrainte thermique.

Cette technique peut être généralement appliquée pour plusieurs combinaisons de matériaux qui sont chimiquement inertes et qui ont des points de fusion bien différents les uns par rapport aux autres.

I.4.8. Frittage Laser Différentiel

Le rayonnement thermique du laser permet le contrôle de la température et la focalisation du point à chauffer. La différence de l'intensité de l'irradiation sur différents points du matériau, provoque un frittage différentiel le long de la pièce, ce qui résulte en des microstructures différentes, dépendant de la position du point irradié. Cette technique a été utilisée pour élaborer un F.G.M de PSZ/Mo. La figure. I.4 montre schématiquement la disposition du procédé utilisé par ces auteurs.

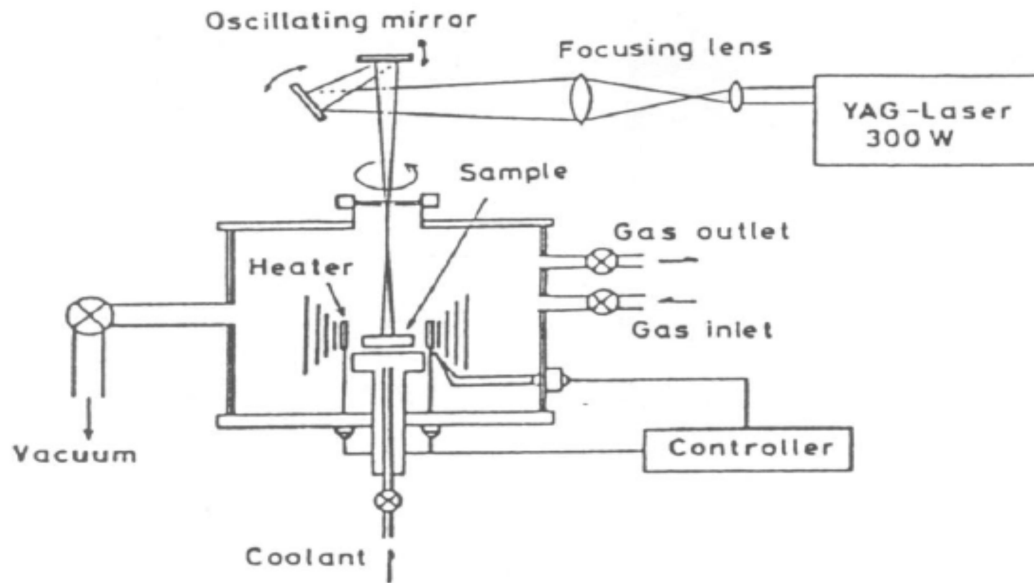


Figure.I.2 : Disposition du procédé frittage laser différentiel.

I.4.9. Implantation Ionique (Sputtering)

C'est une technique avancée pour la fabrication des F.G.M permettant de réaliser seulement des épaisseurs fines ($<1\mu\text{m}$) sur différents substrats (plastiques, céramiques, et métaux). Le traitement s'effectue par les faisceaux énergétiques d'ions ou via des gaz réactifs. Les couches fabriquées présenteront un gradient de composition qui peut être très finement contrôlé (Abdizadeh H.1997).

I.4.10. Dépôt par Centrifugation

La technique consiste à verser une suspension colloïdale relativement diluée dans des flacons cylindriques, le tout est soumis à une centrifugation. La sédimentation s'opère et le liquide surnageant est retiré. Ce procédé est répété pour obtenir des multicouches (Abdizadeh H.1997).

I.5. Domaines d'application des matériaux à gradients évalués FGM

Le concept des matériaux à gradient évalués FGM est applicable dans des nombreux et larges intervalles de domaines tels que les matériaux de construction, matériaux de conversion d'énergie, aéronautique, aérospatiale, nucléaire et semi-conducteurs. Ainsi, ces matériaux ont deux propriétés contradictoires : la conductivité thermique et l'isolation thermique. Actuellement, ils permettent la production des matériaux légers, résistants et durables.

Les principaux domaines d'application des FGM sont :

- **Génie civil** : ponts à poutre en caisson, les cheminées, les fondations élastiques (ces structures de plaques peuvent être trouvées dans différents types d'applications industrielles telles que radiers), réservoirs de stockage, les piscines.
- **Ingénierie** : outils de coupe, éléments de moteur.
- **Aéronautique** : composants de moteur-fusée, corps des avions spatiaux.
- **Chimique** : l'échangeur de chaleur, tube de chaleur, récipient de réaction.
- **L'énergie nucléaire** : composante des réacteurs nucléaires, pastilles de combustible.
- **Électronique** : semi-conducteur à bande graduée, capteurs.
- **Optique** : fibres optiques, lentilles.
- **Conversion d'énergie** : générateur thermoélectrique, convertisseur thermoïonique, pile à combustible.
- **Matières biologiques** : implants, peau artificielle,
- **Produits en générale** : matériaux de constructions, corps de voiture, verres de fenêtre.

I.6. Concept des matériaux FGM

Le matériau à gradient propriétés a été introduit la première fois dans le laboratoire national d'aérospatial du Japon en 1984 par M. Nino et ses collègues à Sendai. L'idée est de réaliser des matériaux utilisés comme barrière thermique dans les structures spatiales et les réacteurs à fusion. Les FGM peuvent être utilisés pour différentes applications, telles que les enduits des barrières thermiques pour les moteurs en céramique, turbines à gaz, couches minces optiques, etc.

La variation continue des propriétés trouve son application lorsque, par exemple, la face supérieure est exposée à une haute température alors que la face inférieure est exposée à une basse température. Dans ce cas, la face supérieure est à 100% céramique et la face inférieure est à 100% métal, avec une transition graduelle entre les deux.

L'utilisation de la céramique n'est pas fortuite. Ce matériau est choisi grâce à ses caractéristiques exceptionnelles qui sont énumérées comme suit :

- faible réactivité chimique, bonne tenue à la corrosion ;
- haute température de fusion ou de décomposition ;
- haut module d'élasticité et haute dureté ;

- charge à la rupture élevée ;
- bas coefficient de frottement, bonne résistance à l'usure ;
- conservation des propriétés à haute température ;
- faible coefficient de dilatation thermique (donc bonne résistance aux chocs Thermiques) ;
- faible conductivité thermique (donc bonne résistance à la température).

Cependant, les céramiques sont réputées être fragiles et très vulnérables aux défauts de petites tailles.

Les caractéristiques du métal sont données comme suit :

- Bonne résistance mécanique ;
- Conductivité thermique élevée,
- Très bonne ténacité.

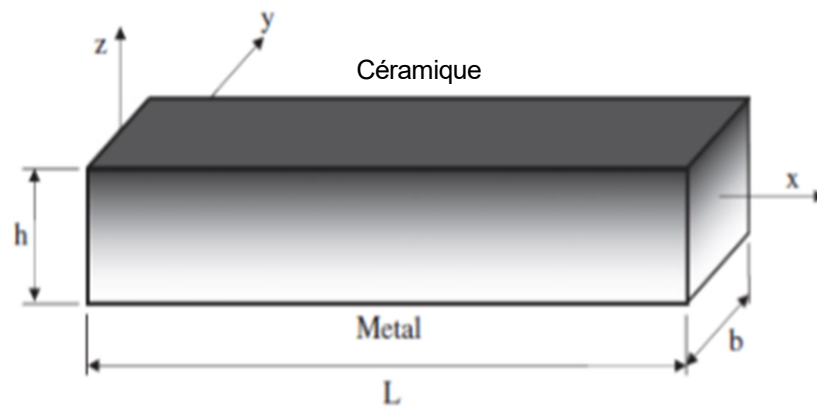


Figure I.3 : Géométrie d'une poutre FGM.

Tableau I.1 : Comparaison entre les propriétés de la céramique et du métal.

Phase	Caractéristiques mécaniques
Céramique La face à haute température	-Bonne résistance thermique ‘ - Bonne résistance à l’oxydation, .Faible conductivité thermique -
Céramique-métal Continuité du matériau d’un point à l’autre « couches intermédiaires »	- Élimination des problèmes de l’interface‘ -Relaxer les contraintes thermiques.
Métal La face à basse température	-Bonne résistance mécanique‘ -Conductivité thermique élevée -Très bonne ténacité.

En conséquence, les FGM possèdent un certain nombre d'avantages excédant que les composés stratifiés :

- compris une réduction potentielle de contraintes membranaires et transversales à travers l'épaisseur,
- tendance d'efforts,
- absente ou sévèrement réduite de décollement,
- un effort résiduel amélioré,
- propriétés thermiques augmentées,
- une dureté plus élevée de rupture,
- réduit facteurs d'intensité d'effort.

I.7. Propriétés effectives des matériaux fonctionnellement gradués

Généralement les FGM sont fabriqués par deux phases de matériaux avec différents propriétés classés par leur microstructure variable dans l'espace ; conçue pour optimiser l'exécution des éléments de structures par la distribution de propriétés correspondantes.

Une description détaillée d'une microstructure graduée réelle et généralement non disponible, sauf peut-être pour des informations sur la distribution de la fraction volumique.

Tandis que la fraction volumique de chaque phase varie graduellement dans la direction de gradation, les propriétés effectives des FGM changent le long de cette direction.

Par conséquent, nous avons deux approches possibles pour les modèles FGM :

1. Une variation par morceaux de la fraction volumique de la céramique ou du métal est assumée, et le FGM est pris pour être posé avec la même fraction volumique dans chaque région, c- à-d couche quasi-homogène de céramique-métal (figure 1.2 a) ;
2. Une variation continue de la fraction volumique de la céramique ou du métal est assumé (figure 1.2 b), et la fraction volumique du métal peut être représentée comme une fonction de coordonnées suivant l'épaisseur (z).

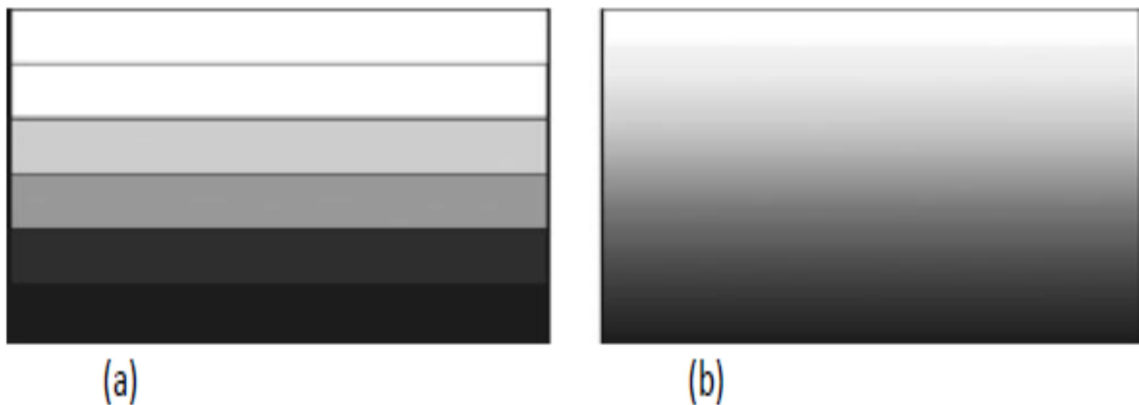


Figure I.4 : Modèle analytique pour une couche d'un matériau à gradient de propriétés.

I.8. Les différentes lois qui régissent la variation des propriétés matérielles suivant l'épaisseur d'une poutre FGM

I.8.1 Propriétés matérielles de la poutre P-FGM

La fraction volumique dans les P-FGM est assurée par une loi de puissance sous la forme :

$$g(z) = \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^p \quad (\text{I.1})$$

Où p est un paramètre du matériau et h est l'épaisseur de la poutre. Une fois que la fraction de volume local $g(z)$ est définie, les propriétés matérielles d'une poutre P-FGM peuvent être déterminées par la loi des mélanges :

$$E(z) = g(z)E_1 + [1 - g(z)]E_2 \quad (\text{I.2})$$

Où E_2 et E_1 sont respectivement les propriétés matérielles (modules de Young ou densité) de la surface inférieure ($z = -h/2$) et de la surface supérieure ($z = h/2$) de la poutre FGM. La variation de ces propriétés dans la direction de l'épaisseur de la poutre P-FGM est représentée dans (Figure I.5), il apparaît clairement que le module de Young par exemple change rapidement près de la surface inférieure pour $p > 1$, et augmente rapidement près de la surface supérieure pour $p < 1$.

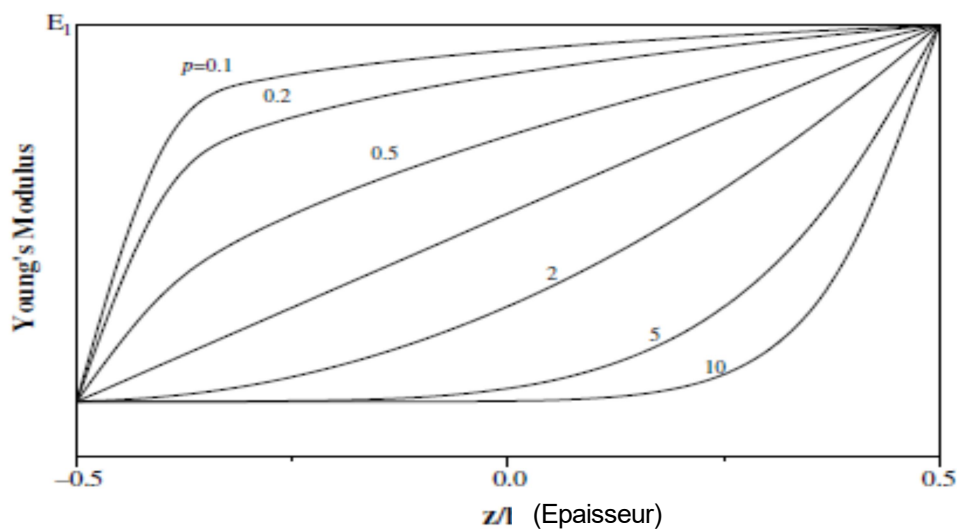


Figure I.5 : La variation du module de Young dans une poutre P-FGM.

I.8.2 Propriétés matérielles de la poutre S-FGM

Dans le cas d'ajouter une poutre P-FGM d'une simple fonction de loi de puissance à une poutre composite multicouche, les concentrations des contraintes apparaissent sur l'interfaces où le matériau est continu mais change rapidement. Par conséquent, Chung et chi ont défini la fraction de volume de la poutre FGM en utilisant deux fonctions de loi de puissance pour assurer une bonne distribution des contraintes parmi toutes les interfaces.

En utilisant la loi des mélanges, le module de Young de la poutre S-FGM peut être calculé par :

$$E(z) = v_1(z)E_1 + [1 - v_1(z)]E_2 \quad \text{pour } 0 \leq z \leq h/2 \quad (\text{I.3})$$

$$E(z) = v_2(z)E_1 + [1 - v_2(z)]E_2 \quad \text{pour } -h/2 \leq z \leq 0 \quad (\text{I.4})$$

La figure I.6 montre que la variation de la fraction volumique dans les équations (I.3) et (I.4) représente les distributions sigmoïdes, et cette poutre FGM est appelée (Poutre S-FGM).

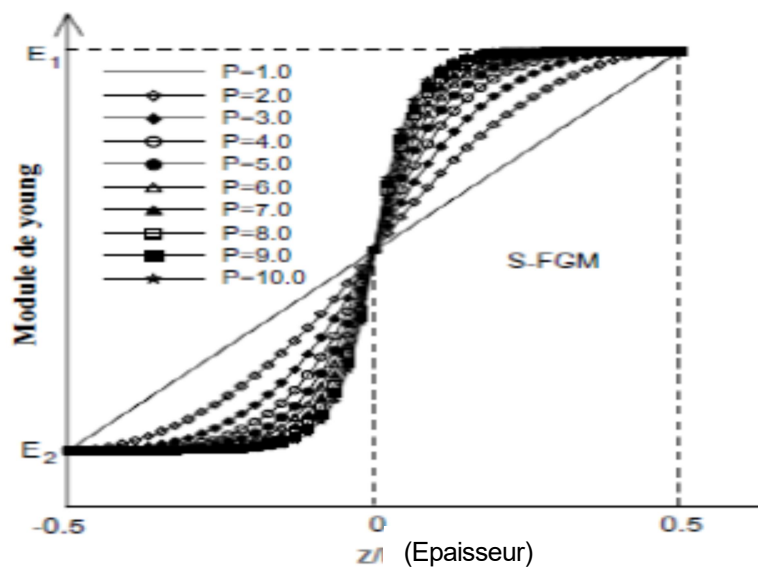


Figure I.6 : Variation de la fraction volumique dans une poutre S-FGM.

I.8.3 Les propriétés matérielles de la poutre E-FGM

Pour décrire les propriétés matérielles des matériaux FGM, la plupart des chercheurs utilisent la fonction exponentielle qui s'écrit sous la forme :

$$E(z) = A \cdot e^{B(z + \frac{h}{2})} \quad (I.5)$$

Avec

$$A = E_2 \text{ et } B = (1/h) \cdot \ln(E_1/E_2) \quad (I.6)$$

La variation du module de Young à travers l'épaisseur de la poutre E-FGM est représentée dans (Figure I.7).

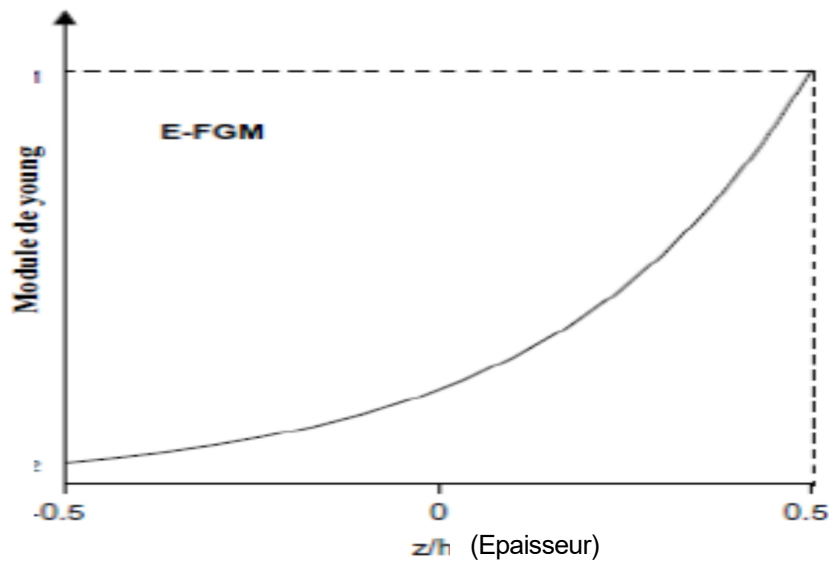


Figure I.7 : Variation du module de Young dans une poutre E-FGM.

I.9. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté un aperçu sur les matériaux à gradients évalués «FGM»: leur développement, leur concept, leurs propriétés, leurs principales étapes de fabrication ainsi que les différentes lois qui servent à décrire la variation des propriétés matérielles (Module de Young).

Les avancées significatives dans les techniques de fabrication et de transformation au cours de la dernière décennie ont permis de produire les FGM en utilisant des procédés qui permettent d'offrir une grande latitude dans la confection de la microscopique et la composition matérielle.

Dans l'avenir, les FGM avec des formes et des propriétés complexes, y compris deux et trois dimensions de gradient, seront produits à l'aide de la fabrication avec une technique

qui nécessite l'ordinateur. Ce potentiel signifie que le concepteur ne se limite plus à une palette de matériaux homogènes existants, bien que beaucoup de recherches se soient intéressées à l'analyse de ce matériau, les ingénieurs et autres professionnels sont engagés dans le processus de conception des FGM.

Le chapitre suivant présente une investigation concernant les différentes théories de la poutre FGM.

CHAPITRE II

Les différentes théories des poutres FGM

II.1. Introduction

Les poutres est des éléments structuraux très répandus dans le domaine de l'ingénierie et est un structure utilisé pour la construction dans les bâtiments. Les navires et autres véhicules, et dans la fabrication de machines. Cependant, le modèle des poutres peut être utilisé pour des pièces très diverses à condition qu'elles respectent certaines conditions.

L'utilisation croissante des matériaux composites, entre autre dans le domaine des transports pour réduire le poids, a stimulé beaucoup de recherches sur les vibrations des poutres en composite à sections pleines, à sections creuses,

La théorie des poutres est un outil supplémentaire pour déterminer des solutions analytiques en considérant de l'hypothèse additionnelle. L'avantage des solutions analytiques sur les prévisions obtenues par des méthodes numériques est de permettre de visualiser l'influence de différents paramètres (de forme, de taille, de comportement du matériau, d'hétérogénéité). Ceci permet de mieux comprendre un système mécanique ou de mieux optimiser son architecture, dans le cadre d'une première approche d'un problème de mécanique.

II.2. Historique

La paternité de la théorie des poutres est attribuée à Galilée, mais des études récentes indiquent que Léonard de Vinci l'aurait précédé. Ce dernier avait supposé que la déformation variait de manière linéaire en s'éloignant de la surface neutre, le coefficient de proportionnalité étant la courbure, mais il ne put finaliser ses calculs car il n'avait pas imaginé la loi de Hooke. De son côté, Galilée était parti sur une hypothèse incorrecte (il supposait que la contrainte était répartie uniformément en flexion), et c'est Antoine Parent qui obtint la distribution correcte.

Ce sont Leonhard Euler et Jacques Bernoulli qui émirent la première théorie utile vers 1750, tandis que Daniel Bernoulli, le neveu du précédent, écrivit l'équation différentielle pour l'analyse vibratoire. À cette époque, le génie mécanique n'était pas considéré comme une science, et l'on ne considérait pas que les travaux d'une académie des mathématiques puissent avoir des applications pratiques, et l'on continua à bâtir les ponts et les bâtiments de manière empirique. Ce n'est qu'au XIX^e siècle, avec la Tour Eiffel et les grandes roues, que l'on démontra la validité de la théorie à grande échelle.

II.3. Le comportement des poutres composites « Elomari 2011»

L'analyse d'une structure composite est plus complexe que celle d'une structure en matériaux traditionnels, métallique par exemple. Cela est dû au caractère hautement anisotrope des propriétés mécaniques du matériau de base. Tant sur les plans de rigidité que de résistance, les propriétés sont concentrées dans la direction de fibres. L'importance de développer une analyse sur le comportement des poutres est liée d'une part à l'utilisation des poutres comme élément de base dans la réalisation des structures, d'autre part à la caractérisation des propriétés mécaniques des matériaux composites et ceci à partir des différents essais réalisés sur des éprouvettes en forme de poutre.

II.4. les différents types de poutres

La poutre est l'élément structural le plus répandu, puisqu'elle fait partie intégrante de la plupart des ouvrages de construction ou des pièces de machine. En réaction aux charges appliquées, des forces et des moments internes se développent dans la poutre pour maintenir l'équilibre, des forces et des moments internes se développent dans la poutre pour maintenir l'équilibre, elle a pour rôle de reprendre les charges du mobilier, du poids propre des matériaux.

- **Poutre simple**

C'est une poutre reposant sur deux supports, l'appui double et l'appui simple. Les points d'appui sont articulés de façon à ce que les extrémités puissent se mouvoir librement pendant la flexion.

- **Poutre console**

C'est une poutre encastrée dans un mur à une extrémité. L'extrémité encastrée ne bouge pas pendant la flexion, tandis que l'autre extrémité est entièrement libre.

- **Poutre avec porte-à-faux**

C'est une poutre sur deux appuis (un simple et l'autre double), elle a une ou deux extrémités qui dépassent de façon appréciable les appuis (porte-à-faux). Les poutres sont classées suivant leurs appuis. Ces trois précédents types de poutres entrent dans la catégorie des poutres statiquement déterminées (poutre isostatique), parce qu'elles possèdent trois inconnues reliées aux trois degrés de liberté et par le fait même des équations d'équilibre.

- **Poutre continue**

C'est une poutre supportée par l'un des deux supports, c'est donc une poutre en équilibre hyperstatique.

- **Poutre à double encastrement**

C'est une poutre supportée par deux encastresments, elle est donc une poutre en équilibre hyperstatique.

- **Poutre supportée à double encastrement**

C'est une poutre supportée par deux encastresments ayant un ou plusieurs supports. C'est donc une poutre en équilibre hyperstatique. Elle a plus de fixation ou support que nécessaire.

Cependant, ces supports augmentent la capacité portante de la poutre mais l'équation de la statique ne suffit à analyser ces poutres. On aura donc recours à différents méthodes.

II.5. Les différentes théories des poutres « Sallai 2011 »

Les théories de poutres impliquent essentiellement la réduction d'un problème en trois dimensions de la théorie de l'élasticité à un problème unidimensionnel. Elles s'appliquent sur des solides élancés [les prismes dont la longueur vaut 10 fois la plus grande dimension transversale]. Là où la détermination de la solution exacte pour les champs de contrainte et déformation n'est pas possible, elle permet d'obtenir une solution approchée, qui donne une bonne idée sur les efforts et les déplacements.

- **Modèle d'Euler Bernoulli (Classical Beam Theory- CBT)**

Il est bien connu que la théorie d'Euler-Bernoulli est basée sur la théorie élémentaire de flexion des poutres qui ne tient pas compte des effets de la déformation de cisaillement. Il est également connu qu'elle n'est applicable qu'aux poutres fines.

Dans cette approche, le nombre d'équations ne dépend pas du nombre de couches puisque la poutre multicouche est homogénéisée, donc considérée comme une seule couche.

Comme hypothèse de cette théorie, les déformations dues au cisaillement transversal sont négligées (pas de cisaillement sur la hauteur de la poutre), la section reste perpendiculaire à la ligne moyenne de la poutre et la section reste plane.

La fonction qui décrit la répartition de déplacement suivant l'épaisseur de la poutre est :

$$\vartheta(z) = \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad (\text{II.1})$$

Pour le cas des poutres élancées et d'après la théorie classique des poutres, le déplacement d'un point M est donné par les deux composantes suivantes :

$$u(m) = \begin{cases} u(x, z) = u^0 - zu^0, x(x) \\ w(x, z) = w^0 \end{cases} \quad (\text{II.2})$$

$$w^0, x(x) = \frac{\partial w^0}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial x} = 0$$

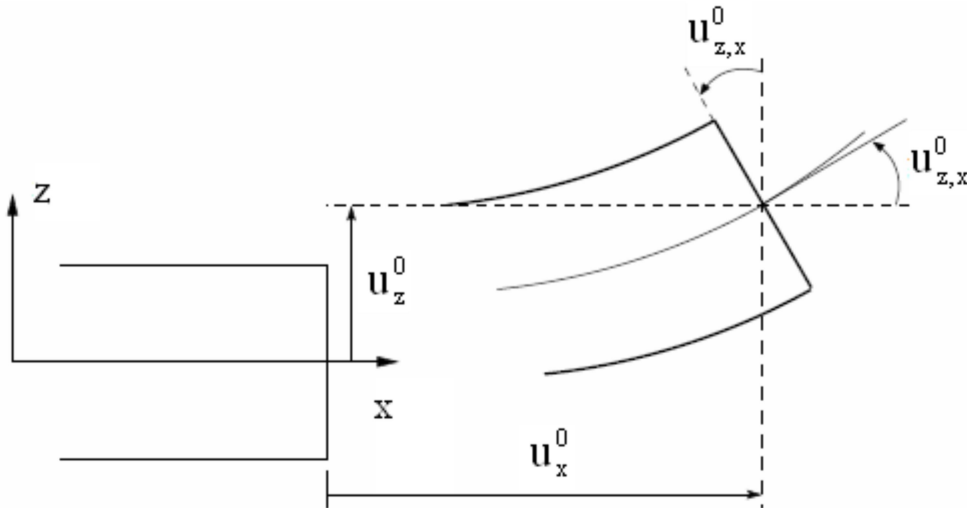


Figure II.1 : Cinématique d'Euler Bernoulli.

$U(x, z)$: C'est le déplacement suivant X et $w(x, z)$ est le déplacement dans la direction de Z ou bien la flèche.

La rotation autour de l'axe Y, provoquée par la flexion est tel que :

$$w^0, x(x) = \frac{\partial w^0}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad (\text{II.3})$$

$u^0(x)$ et $w^0(x)$ sont les composantes de déplacement au milieu de la section et sur la ligne moyenne de la poutre, respectivement le long des axes X et Z.

Lorsque cette théorie est utilisée pour l'analyse des fréquences naturelles des poutres, les flèches sont sous-estimées. Ceci est la conséquence de négliger la déformation de transversal.

• Modèle de Timoshenko

La théorie de Timoshenko est plus riche et plus générale que la théorie élémentaire des poutres au prix d'une fonction supplémentaire. Cette solution permet d'affiner les solutions analytiques issues de la théorie classique. Toutefois ces solutions sont entachées d'erreurs au voisinage des appuis et de la zone indentation où nous pouvons avoir des concentrations de contrainte et des champs de déplacement non homogènes.

Elle s'applique sur des poutres courtes, elle est basée sur le principe ; qu'après déformation, la section plane reste plane mais elle perd sa perpendicularité par rapport à la ligne moyenne de la poutre (Figure II.2). Ceci est dû au cisaillement transversal, découvert par Timoshenko, sur l'épaisseur de la poutre. Cette théorie est analogue à la théorie de "Reissner-Mindlin" dans le cas des poutres épaisses. [Timoshenko et al, 1972]. Dans le cas où nous avons un élancement faible, l'effet du cisaillement devient plus important sur la déformée.

Dans ce cas, la fonction $\theta(x)$ est égale à Z . Il existe un cisaillement uniforme et les déformations dues au cisaillement transversal ne sont pas négligées. C'est la théorie de premier ordre (FSDBT).

Le déplacement d'après Timoshenko s'écrit comme suit :

$$u(x) = \begin{cases} u(x, z) = u^0 - zw^0, x(x) + z\gamma^0(x) \\ w(x, z) = w^0(x) \end{cases} \quad (\text{II.4})$$

γ^0_{xz} C'est la distorsion ou la déformation angulaire mesurée sur la ligne moyenne de la Poutre.

Tel que :

$$\gamma^0_{xz}(x) = w, x^0(x) - \theta^0(x) \quad (\text{II.5})$$

$\theta^0(x)$ Etant la rotation totale de la section mesurée sur la ligne moyenne de la poutre.

$$\gamma_{xz}(x) = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = -w^0, x(x) + \gamma^0_{xz}(x) + w^0, x(x) \quad (\text{II.6})$$

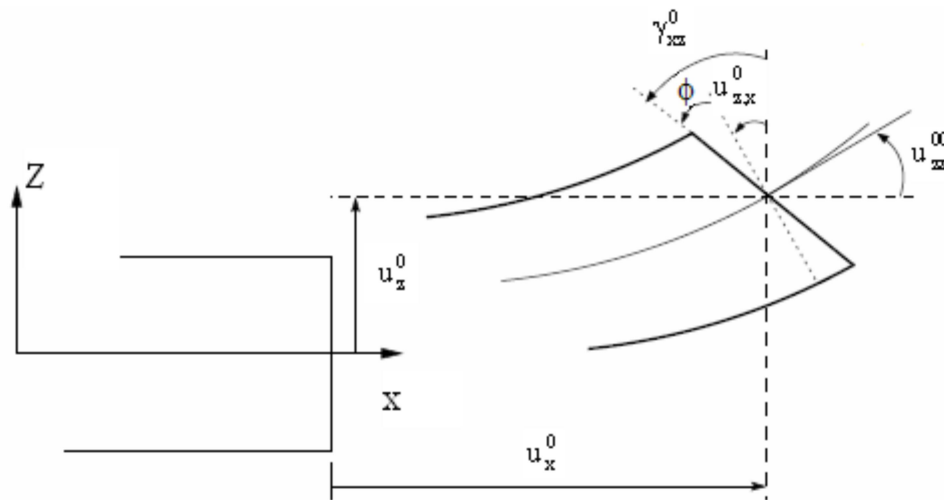


Figure II.2 : Cinématique de Timoshenko.

Par définition, la distorsion est donnée par la relation suivante :

$$\gamma_{xz}(x) = \frac{\partial y}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = -w^0 x(x) + \gamma_{xz}^0(x) + w^0 x(x) \quad (\text{II.7})$$

$$\gamma_{xz}(x) = \gamma_{xz}^0(x) \quad (\text{II.8})$$

Sachant que la contrainte de cisaillement est égale :

$$\tau_{xz} = G_{xz} \gamma_{xz} = G_{xz} \gamma_{xz}^0 \quad (\text{II.9})$$

G_{xz} est le module de cisaillement transversal qui est supposé constant.

Avec cette théorie, les contraintes tangentielles de cisaillement sont constantes et uniformes sur toute l'épaisseur de la poutre ; cela veut dire qu'elles existent même sur les bords supérieurs et inférieurs de la poutre et pourtant il n'ya aucun chargement qui induit le cisaillement.

Cette contradiction mène à introduire des coefficients pour corriger et maintenir les contraintes et les déformations du cisaillement transversales constantes à travers l'épaisseur de la poutre. Ce facteur a été calculé pour la variété de sections de poutres par [Mandin Et Deresiewicz]. Cowper et Murty ont donné de nouvelles expressions de ce coefficient pour différentes sections de la poutre.

Les non nullité des contraintes tangentielles sur les bords extrêmes de la poutre et l'introduction des coefficients de correction de cisaillement ont menés d'autres chercheurs à essayer de trouver une autre théorie pouvant tenir compte de ces facteurs ; c'est "la théorie d'ordre élevé".

• Théorie d'Ordre Elevé

Dans cette théorie la distribution des champs de déplacement est non linéaire selon l'épaisseur de la poutre. Elle est plus précise que la théorie du premier ordre puisqu'elle introduit une fonction qui tient compte du phénomène de "gauchissement". Ce Phénomène apparaît lorsque la section transversale de la poutre perd sa planéité (figure III.3).

La fonction $\varphi^0(x)$ représente le gauchissement et sa dérivée $\varphi'^0(x)$ représente le Cisaillement.

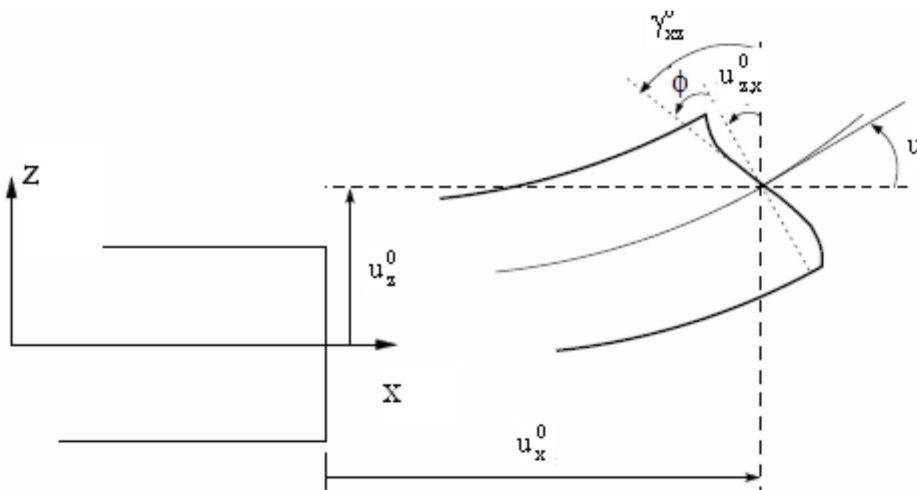


Figure II.3 : Cinématique de la Théorie d'Ordre Elevé.

Dans ce cas, le champ de déplacement devient :

$$u(m) = \begin{cases} u(x, z) = u^0(x) - zw^0, x(x) + \varphi(z)\gamma_{xz}^0(x) \\ u(x, z) = w^0(x) \end{cases} \quad (\text{II.10})$$

$$\gamma_{xz}(x) = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial x} = w^x(x)\varphi'(z)\gamma_{xz}^0(x) + w^0, x(x) \quad (\text{II.11})$$

$$\gamma_{xz}(x) = \varphi'(z)\gamma_{xz}^0(x) \quad (\text{II.12})$$

Pour que les contraintes tangentielles soient nulles sur les bords extrêmes de la poutre,

On doit avoir :

$$\varphi'(z)|_{Z = \pm h/2} = 0 \quad (\text{II.13})$$

C'est la condition qui nous permet d'avoir une répartition parabolique des contraintes de cisaillement sur l'épaisseur de la poutre d'une part et de choisir correctement des fonctions cubiques qui répondent à la condition (II.12).

Selon l'expression de la fonction de gauchissement $\varphi(z)$, quelques modèles sont présentés dans la littérature des poutres en FGM :

1-) Le modèle Euler-Bernoulli (la théorie des poutres classiques) (CBT) :

$$\Psi(z) = 0 \quad (\text{II.14})$$

2-) Le modèle de Timoshenko ou bien la théorie du premier ordre (FSDBT) :

$$\Psi(z) = z \quad (\text{II.15})$$

3-) Le modèle de puissance avec l'approche de (PSDBT) [Levinson, 1980], [Murthy, 1981] et [Reddy, 1984] :

$$\Psi(z) = z \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right) \quad (\text{II.16})$$

4-) Le modèle exponentiel proposé par (ESDBT) [Afaq et al, 2003] :

$$\Psi(z) = ze^{-2\left(\frac{z}{h}\right)^2} \quad (\text{II.17})$$

5-) Le modèle trigonométrique :

$$\Psi(z) = \frac{h}{\pi} \sin \frac{\pi z}{h} \quad (\text{II.18})$$

Avec, h : étant l'épaisseur de la poutre.

II.6. Méthodes de discrétisation adaptées aux modèles de poutre

Bien qu'indépendante du modèle en lui-même, la méthode de discrétisation choisie pour la simulation d'une structure ne reste pas moins essentielle. Les résultats obtenus sont issus d'un couple modèle cinématique-méthode de discrétisation. La qualité des résultats obtenus peut aussi être étroitement liée à la méthode de discrétisation choisie. En effet, certaines méthodes (comme par exemple la procédure de Navier) sont capables de fournir un champ cinématique proche de la solution. Ceci permet alors d'obtenir des résultats de très bonne qualité avec un système de taille réduite. Par ailleurs, le choix de la méthode de discrétisation est généralement étroitement lié au cas étudié. Par exemple, dans sa version classique, la méthode de Rayleigh-Ritz pour les modèles de poutre n'est pas adaptée aux structures non rectangulaires. Par opposition, la méthode des éléments finis, avec un choix judicieux de formulation de l'élément permet de modéliser des structures bien plus complexes. La méthode de discrétisation est donc un élément essentiel de la simulation. Nous proposons ici trois méthodes de discrétisation adaptées à notre modèle de poutre permettant de répondre à différents problèmes.

II.6.1. Procédure de Navier

Il convient dans un premier temps de mentionner l'existence d'une méthode de discrétisation qui, sous certaines conditions, est exacte. Cette méthode est similaire à celle utilisée dans la plupart des solutions exactes. Nous choisissons ici de nous référer à cette méthode par le terme générique de procédure de Navier. Cette méthode est adaptée à des cas de chargement particuliers : c'est à dire que chaque variable est projetée sur une fonction d'une base trigonométrique adaptée. Dans sa version la plus classique, cette méthode est utilisée pour simuler une poutre simplement appuyée chargée avec une charge de forme sinusoïdale ou uniformément répartie ; la déflexion associée est alors supposée sinusoïdale.

Les autres degrés de liberté sont exprimés sur une base trigonométrique correspondante. Cette méthode est très utilisée puisque la qualité des résultats obtenus est uniquement liée à la qualité du modèle cinématique et non à la méthode de discrétisation.

Tout comme pour les solutions exactes, ces méthodes, bien que très utiles pour évaluer la qualité d'un modèle, ne permettent en aucun cas le calcul de cas pratiques. En effet, le fait d'imposer une condition aux limites simplement appuyée sur tout le pourtour de la poutre revient à imposer un déplacement sinusoïdal sur la flèche. Elles sont donc réservées à l'étude de cas académiques.

II.6.2. Méthode de Rayleigh-Ritz

La méthode de Rayleigh-Ritz permet, en projetant les déplacements sur une base donnée, d'implémenter un modèle pour la simulation de poutres soumises à des conditions aux limites et des chargements variés. Le principal avantage de cette méthode réside dans le fait que, avec un choix de base de projection adapté, les dérivées – successives – des fonctions de la base sont simples à obtenir, et par conséquent, cette méthode est tout à fait adaptée aux modèles nécessitant le calcul des dérivées multiples de la base. La qualité des résultats obtenus est souvent relative au choix de la base. Cette méthode est particulièrement adaptée aux calculs de vibration pour diverses conditions aux limites.

II.6.3. Méthode des éléments finis

La méthode des éléments finis a progressivement fait son apparition depuis les années 1950. C'est une méthode qui permet la résolution numérique des équations aux dérivées partielles. Couplée à des modèles physiques, elle est couramment utilisée comme méthode de discrétisation afin de simuler le comportement de structures complexes proches de cas pratiques. Les principes généraux de la méthode ainsi qu'un certain nombre de raffinements sont regroupés dans le livre de Zienkiewicz, 2000.

L'utilisation de cette méthode, très répandue dans le milieu industriel, a cependant certaines limites pour des modèles faisant intervenir des dérivées successives des variables.

En effet, au contraire de la méthode de Navier ou de Rayleigh-Ritz, l'utilisation des dérivés multiples des fonctions de formes nécessitent l'implémentation d'éléments dont les dérivées des fonctions de forme sont continuées entre les éléments. Ce type d'élément, est beaucoup plus complexe à implémenter et reste assez peu utilisé.

II.7. Conclusion

Dans ce chapitre, nous nous sommes attachés à présenter l'historique des théories des Poutres. Dans un premier temps, nous avons présenté les différents des théories des poutres telles que la théorie classique (CBT), la théorie de cisaillement de premier ordre (FSDBT) et les théories d'ordre élevé. Le chapitre suivant portera sur la présentation de l'analyse du comportement statique et dynamique des poutres FGM.

CHAPITRE III

Etude analytique de la réponse mécanique des poutres poreuses en FGM

III.1. Introduction

Les matériaux fonctionnellement gradués (FGM) présentent de nombreux avantages pour les composants structurels d'ingénierie. Contrairement aux composites stratifiés à matrice-fibres, les FGM n'ont pas de problèmes de décollement ou de délaminage qui résultent de la grande concentration des contraintes inter-lamellaires. Le concept de "Matériaux à Gradient de propriétés" a été développé dans le laboratoire national d'aérospatial en 1984 par un groupe de scientifiques au Japon (M. Niino et ses collègues à Sendai). Les FGM sont macroscopiquement inhomogènes (hétérogènes) et des matériaux composites spatiaux qui sont généralement composés de deux matériaux différents tels que la céramique et du métal ou de céramique-polymère. La composition du matériau change progressivement dans toute la direction de l'épaisseur. En conséquence, on suppose que les propriétés mécaniques varient d'une façon continue de la surface supérieure vers la surface inférieure. En raison des bonnes caractéristiques de la céramique à la chaleur et des résistances aux corrosions combinées à la dureté des métaux, la combinaison de la céramique et des métaux ou des polymères peut conduire à d'excellents matériaux. Les FGM sont largement utilisés dans les domaines de l'ingénierie mécanique, aérospatiale, nucléaire et civile. Par conséquent, des études consacrées à la compréhension des comportements statiques et dynamiques des poutres et poutres FGM ont été accordées de plus en plus d'attention ces dernières années. Tai *et al.* [Tai. 2011] ont utilisé une solution de Levy pour l'analyse du flambement des plaques orthotropes basé sur la théorie des plaques raffinée. Farahani *et al.* [Farahani. 2015] a étudié la vibration de l'enveloppe cylindrique fonctionnellement gradués basé sur la théorie de déformation de cisaillement de premier ordre en utilisant la méthode de propagation des ondes. Al-Basyouni *et al.* [Al-Basyouni. 2015] a étudié l'analyse de dépendante de la taille de flexion et de la vibration des micro-poutres fonctionnellement gradués basé sur la théorie du couple des contraintes modifiée et de la position de la surface neutre. Benferhat *et al.* [Benferhat. 2016a] a étudié l'effet de la porosité sur l'analyse statique des plaque FGM. Benferhat *et al.* [Benferhat. 2016b] a étudié l'effet de la porosité sur la flexion et la vibration des plaques fonctionnellement gradués reposant sur reposant sur une fondation élastique de type Winkler-Pasternak. Ait Yahia *et al.* [Ait Yahia. 2015] ont étudié la propagation des ondes dans les plaques à fonctionnellement gradués avec porosités en utilisant diverses théories de déformation du cisaillement d'ordre élevé. Bellifa *et al.* [Bellifa. 2016] analysent la vibration libre des plaques fonctionnellement graduées en utilisant une simple théorie de la déformation du cisaillement et le concept de la position de la surface neutre. Bounouara *et al.* [Bounouara. 2016] ont utilisé une théorie de déformation de cisaillement non local d'ordre zéro pour la vibration libre des plaques nanométriques à fonctionnellement gradués reposant sur une fondation élastique. Ahouel *et al.* [Ahouel. 2016] ont étudié le comportement mécanique

dépendant de la taille des nanobeams de déformation de cisaillement trigonométrique fonctionnellement gradués avec le concept de position de la surface neutre. Zemri *et al.* [Zemri. 2015] a étudié la réponse mécanique des poutres fonctionnellement gradués à échelle. Nedri *et al.* [Nedri. 2014] analysent les vibrations libre des plaques composite stratifiées reposant sur des fondations élastiques en utilisant une théorie de déformation de cisaillement hyperbolique raffinée. Ait Amar Meziane *et al.* [Ait Amar Meziane. 2014] a proposé une théorie raffinée et simple pour le flambement et la vibration libre des plaques sandwichs en gradient exponentiel avec diverses conditions aux limites. Tlidji *et al.* [Tlidji. 2014] utilisent la solution d'élasticité pour la réponse en flexion des plaques sandwichs à fonctionnellement gradués sous chargement thermomécanique. Hadji *et al.* [Hadji. 2014] ont étudié la flexion et la vibration libre des poutres FGM en utilisant une théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé. Bourada *et al.* [Bourada. 2015] ont utilisé une simple nouvelle théorie de cisaillement et de déformation normale pour les poutres fonctionnelle gradués. Mahi *et al.* [Mahi. 2015] a étudié une nouvelle théorie de déformation de cisaillement hyperbolique pour l'analyse de la flexion et de la vibration libre des plaques composites isotropes, sandwiches et stratifiées fonctionnellement graduées. Belabed *et al.* [Belabed. 2014] ont utilisé une théorie efficace et simple de cisaillement de déformation normale pour les plaques en matériau fonctionnellement gradués (FGM). Bennai *et al.* [Bennai. 2015] ont utilisé une nouvelle théorie de déformation de cisaillement et de déformation normale pour les poutres sandwiches fonctionnellement gradués. Récemment Tai *et al.* [Tai. 2014] utilisé la solution de Levy pour l'analyse de la vibration des plaques fonctionnellement graduées basé sur la théorie raffinée des plaques. Hadji *et al.* [Hadji. 2015] a étudié l'influence de la porosité sur la vibration libre des poutres FGM. Ait Atmane *et al.* [Ait Atmane. 2015] ont utilisé un modèle de déplacement de cisaillement pour l'analyse vibratoire des poutres fonctionnellement gradués avec porosités. Mouaïci *et al.* [Mouaïci. 2016] a étudié l'effet de la porosité sur les caractéristiques vibratoires des plaques non homogènes utilisant la théorie de la déformation de cisaillement hyperbolique. Néanmoins, dans la fabrication des FGM, des microporosités ou des vides peuvent se produire dans les matériaux au cours du processus de frittage. Ceci est dû à la grande différence de températures de solidification entre les constituants des matériaux [Zhu. 2001].

Ce travail vise à développer une nouvelle simple théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé pour l'analyse de flexion et la vibration libre des poutres FGM en considérant les porosités qui peuvent se produire l'intérieur des matériaux à gradient de propriétés (FGM) au cours de leur fabrication. La théorie proposée contient trois inconnues et trois équations gouvernantes, mais elle vérifie les conditions limites sans contraintes sur les surfaces supérieure et inférieure de la poutre sans l'aide de facteur de correction de cisaillement. Des solutions analytiques sont obtenues

pour la poutre FGM par la présente théorie et sa précision est vérifiée en comparant les résultats obtenus avec ceux rapportés dans la littérature. Les effets de divers paramètres, tels que le rapport d'épaisseur, l'indice de gradient et la fraction volumique de la porosité sur la flexion et la vibration libre des poutres FGM sont tous discutés.

III.2. Formulation du problème

Considérons une poutre rectangulaire en FGM de longueur l et de section rectangulaire $b \times h$ avec b et h représentant la largeur et la hauteur de la poutre respectivement comme il est montré dans la figure IV.1.

La poutre est réalisée en matériau isotrope avec les propriétés matérielles qui varient sans interruption dans la direction de l'épaisseur.

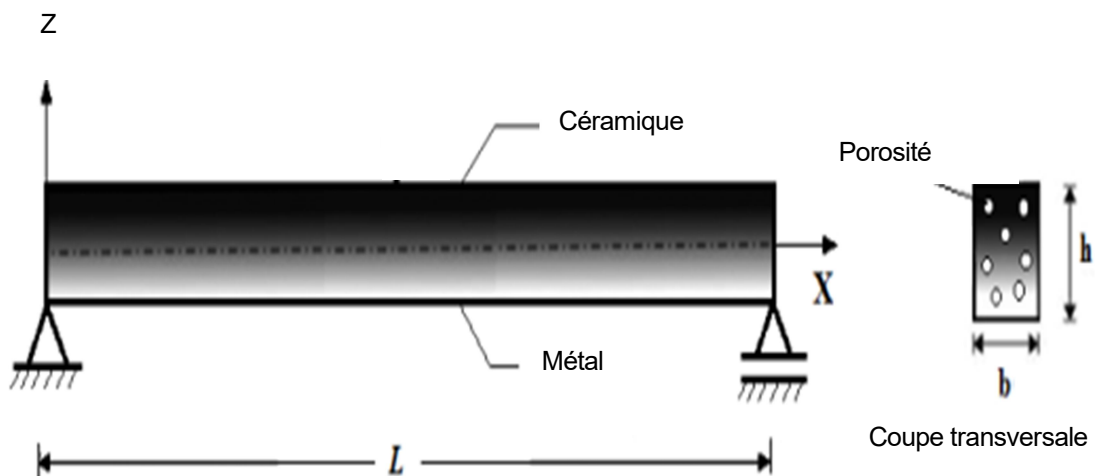


Figure III.1 : Géométrie et coordonnées de la poutre FGM.

III.2.1. Propriétés des matériaux efficaces d'une poutre en céramique-métal à gradient de propriétés

Les propriétés du FGM varient continuellement en raison de la fraction volumique progressive des constitutifs des matériaux (céramique et métal), généralement dans la direction de l'épaisseur. La fonction de la loi de puissance P-FGM est couramment utilisée pour décrire ces variations des propriétés des matériaux. L'expression donnée ci-dessous représente le profil de la fraction volumique.

Une poutre FGM fabriquée à partir d'un mélange de deux matériaux, par exemple, le métal et la céramique. Les propriétés du matériau de la poutre FGM sont supposées variées de manière continue à travers l'épaisseur de la poutre. Dans cette étude, la poutre imparfaite est supposée avoir

des porosités réparties dans l'épaisseur en raison de défaut pendant la production. Considérons un FGM imparfait avec une fraction volumique de porosité, α $\alpha \ll 1$ répartie uniformément entre le métal et la céramique, la loi du mélange modifiée proposée par Wattanasakulpong et Ungbhakorn [Wattanasakulpong, 2014] est utilisée comme

$$P = P_m \left(V_m - \frac{\alpha}{2} \right) + P_c \left(V_c - \frac{\alpha}{2} \right) \quad (\text{III.1})$$

Maintenant, la fraction du volume total du métal et de la céramique est : $V_m + V_c = 1$ et la loi de puissance de la fraction volumique de la céramique est décrite comme :

$$V_c = \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^k \quad (\text{III.2})$$

Par conséquent, toutes les propriétés d'un FGM imparfait peuvent être écrites comme [Hadji, 2015a]

$$P = (P_c - P_m) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^k + P_m - (P_c + P_m) \frac{\alpha}{2} \quad (\text{III.3})$$

Il est à noter que le nombre réel positif k ($0 \leq k \leq \infty$) est l'indice de loi de puissance ou d'une fraction de volume, et z est la distance à partir du plan médian de la poutre à gradient de propriétés. La poutre FGM est une poutre entièrement en céramique lorsque k est mis à zéro et entièrement métallique pour une valeur de k égal à l'infini.

Ainsi, les équations du module de Young (E) et la densité du matériau (ρ) de la poutre FGM avec porosité peut être exprimée comme [Ait Atmane, 2015, Ait Yahia, 2015, Hadji, 2015a]

$$E(z) = (E_c - E_m) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^k + E_m - (E_c + E_m) \frac{\alpha}{2} \quad (\text{III.4})$$

$$\rho(z) = (\rho_c - \rho_m) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^k + \rho_m - (\rho_c + \rho_m) \frac{\alpha}{2} \quad (\text{III.5})$$

Cependant, le coefficient de Poisson (ν) est supposé être constant. Les propriétés matérielles d'une poutre FGM parfaite peuvent être obtenues lorsque α est égale à zéro.

III.2.2. Cinématique et équations constitutive

Basant sur la théorie d'ordre élevée, le champ du déplacement est obtenu comme suit :

$$u(x, z, t) = u_0(x, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + k_1 f(z) \int \theta(x, t) dx \quad (\text{III.6a})$$

$$w(x, z, t) = w_0(x, t) \quad (\text{III.6b})$$

Dans ce travail, la fonction du cisaillement proposée est donnée comme suit :

$$f(z) = h \sinh\left(\frac{z}{h}\right) - z \cosh\left(\frac{1}{2}\right) \quad (\text{III.7})$$

Les déformations linéaires associées avec le champ de déplacement de l'équation (III.7) sont:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_x^0 + z k_x^b + f(z) k_x^s \quad (\text{III.8a})$$

$$\gamma_{xz} = g(z) \gamma_{xz}^0 \quad (\text{III.8b})$$

Ou

$$\varepsilon_x^0 = \frac{\partial u_0}{\partial x}, k_x^b = -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}, k_x^s = k_1 \theta, \quad \gamma_{xz}^0 = k_1 \int \theta dx \quad (\text{III.8c})$$

Et

$$g(z) = \frac{df(z)}{dz} \quad (\text{III.8d})$$

L'intégral définie dans les équations ci-dessus devrait être résolue par la méthode de Navier et peut être écrit comme suit :

$$\int \theta dx = A' \frac{\partial \theta}{\partial x} \quad (\text{III.9})$$

Où le coefficient A' est exprimé selon le type de la solution utilisé, dans ce cas selon Navier. Donc les coefficients A' et k_1 sont exprimés comme suit :

$$A' = -\frac{1}{\alpha^2}, \quad k_1 = \alpha^2 \quad (\text{III.10})$$

L'état de contrainte dans la poutre est donné par la loi de Hooke généralisée comme suit :

$$\sigma_x = Q_{11}(z) \varepsilon_x \quad \text{Et} \quad \tau_{xz} = Q_{55}(z) \gamma_{xz} \quad (\text{III.11a})$$

Où Q_{ij} sont les coefficients de rigidité, peuvent être exprimés comme :

$$Q_{11}(z) = E(z) \quad \text{Et} \quad Q_{55}(z) = \frac{E(z)}{2(1+\nu)} \quad (\text{III.11b})$$

III.2.3. Equations de mouvement

Les équations de mouvement pour la poutre FGM sont obtenues en utilisant le principe d'Hamilton, qui peut être écrit pour la poutre FGM comme suit :

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (U + V - T) dt = 0 \quad (\text{III.12})$$

Où t est le temps ; t_1 et t_2 sont les temps initial et final, respectivement ; δU est la variation virtuel de l'énergie de déformation ; δV est la variation virtuel de l'énergie potentiel ; et δT est la variation virtuel de l'énergie cinétique de la poutre FGM. La variation de l'énergie de déformation de la poutre est définie comme suit :

$$\begin{aligned} \delta U &= \int_0^L \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz}) dz dx \\ &= \int_0^L \left(N \frac{d\delta u_0}{dx} - M_b \frac{d^2 \delta w_b}{dx^2} - M_s \frac{d^2 \delta w_s}{dx^2} + Q \frac{d\delta w_s}{dx} \right) dx \end{aligned} \quad (\text{III.13})$$

Ou N, M_b, M_s et Q sont les forces et moments résultants et sont donnés comme :

$$(N, M_b, M_s) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (1, z, f) \sigma_x dz \quad \text{Et} \quad Q = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} g \tau_{xz} dz \quad (\text{III.14})$$

La variation de l'énergie de potentiel par la charge transversale appliquée peut être écrite comme :

$$\delta V = - \int_0^L q \delta w_0 dx \quad (\text{III.15})$$

La variation de l'énergie cinétique peut être exprimée comme :

$$\begin{aligned} \delta T &= \int_0^L \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho(z) [\dot{u} \delta \dot{u} + \dot{w} \delta \dot{w}] dz dx \\ &= \int_0^L \left\{ I_0 [\dot{u}_0 \delta \dot{u}_0 + \dot{w}_0 \delta \dot{w}_0] - I_1 \left(\dot{u}_0 \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial x} \delta \dot{u}_0 \right) \right. \\ &\quad \left. + J_1 \left((k_1 A') \left(\dot{u}_0 \frac{\partial \delta \dot{\theta}}{\partial x} + \frac{d\dot{\theta}}{dx} \delta \dot{u}_0 \right) \right) + I_2 \left(\frac{\partial \dot{w}_0}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial x} \right) \right. \\ &\quad \left. + K_2 (k_1 A')^2 \left(\frac{d\dot{\theta}}{dx} \frac{\partial \delta \dot{\theta}}{\partial x} \right) - J_2 \left((k_1 A') \left(\frac{\partial \dot{w}_0}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{\theta}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial x} \right) \right) \right\} dx \end{aligned} \quad (\text{III.16})$$

Ou le point (.) représente la dérivé par rapport au temps t ; $\rho(z)$ est la densité de masse, et (I_i, J_i, K_i) sont les inerties définis comme :

$$(I_0, I_1, I_2) = \int_{-h/2}^{h/2} (1, z, z^2) \rho(z) dz \quad (\text{III.17a})$$

$$(J_1, J_2, K_2) = \int_{-h/2}^{h/2} (f, z f, f^2) \rho(z) dz \quad (\text{III.17b})$$

Substituant les équations (III.13), (III.15) et (III.16) dans l'équation (III.12), et en intégrant par parties, en rassemblant les coefficients δu_0 , δw_b et δw_s , les équations du mouvement pour la poutre FGM résultantes sont :

$$\delta u_0 : \frac{dN}{dx} = I_0 \ddot{u}_0 - I_1 \frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial x} + k_1 A' J_1 \frac{\partial \ddot{\theta}}{\partial x} \quad (\text{III.18a})$$

$$\delta w_0 : \frac{d^2 M_b}{dx^2} + q = I_0 \ddot{w}_0 + I_1 \frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} - I_2 \frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial x^2} + J_2 k_1 A' \frac{\partial^2 \ddot{\theta}}{\partial x^2} \quad (\text{III.18b})$$

$$\delta \theta : -k_1 M_x^s + k_1 A' \frac{\partial Q}{\partial x} = -J_1 k_1 A' \frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} - K_2 (k_1 A')^2 \frac{\partial^2 \ddot{\theta}}{\partial x^2} + J_2 k_1 A' \frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial x^2} \quad (\text{III.18c})$$

Introduire l'équation (III.14) dans l'équation (III.18), les équations de mouvement peuvent être exprimées en termes des déplacements (u_0 , w_0 , θ). Pour la poutre FGM, les équations d'équilibre(III.18) prennent la forme :

$$A_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} - B_{11} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} + B_{11}^s k_1 \frac{\partial \theta}{\partial x} = I_0 \ddot{u}_0 - I_1 \frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial x} + J_1 A' k_1 \frac{\partial \ddot{\theta}}{\partial x} \quad (\text{III.19a})$$

$$B_{11} \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} - D_{11} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} + D_{11}^s k_1 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + q = I_0 \ddot{w}_0 + I_1 \frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} - I_2 \frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial x^2} + J_2 k_1 A' \frac{\partial^2 \ddot{\theta}}{\partial x^2} \quad (\text{III.19b})$$

$$\begin{aligned} & -B_{11}^s k_1 \frac{\partial u_0}{\partial x} + D_{11}^s k_1 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} - H_{11}^s k_1^2 \theta + A_{55}^s (k_1 A')^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \\ & = -J_1 k_1 A' \frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} + J_2 k_1 A' \frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial x^2} - K_2 (k_1 A')^2 \frac{\partial^2 \ddot{\theta}}{\partial x^2} \end{aligned} \quad (\text{III.19c})$$

Ou A_{11} , D_{11} , etc., sont les coefficients de rigidités, et sont définis comme :

$$(A_{11}, B_{11}, D_{11}, B_{11}^s, D_{11}^s, H_{11}^s) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{11} (1, z, z^2, f(z), z f(z), f^2(z)) dz \quad (\text{III.20a})$$

Et

$$A_{55}^s = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{55} [g(z)]^2 dz \quad (\text{III.20b})$$

III.3. Solution de Navier pour les poutres simplement appuyées

Pour une solution analytique des équations (III.19), la méthode de Navier est utilisée pour une poutre FGM avec des conditions d'appuis spécifiques (appuyée – appuyée). Les fonctions des déplacements qui satisfont les conditions aux limites peuvent être écrites en supposons les variations suivantes :

$$\begin{Bmatrix} u_0 \\ w_0 \\ \theta \end{Bmatrix} = \sum_{m=1}^{\infty} \begin{Bmatrix} U_m \cos(\alpha x) e^{i\omega t} \\ W_m \sin(\alpha x) e^{i\omega t} \\ X_m \sin(\alpha x) e^{i\omega t} \end{Bmatrix} \quad (\text{III.21})$$

Où U_m, W_m et X_m sont des paramètres à déterminer, ω est la fréquence propre associée au (m) nième mode propre, et $\alpha = m\pi / L$.

Basant sur la solution de Navier, la charge transversale mécanique q est développée en séries de Fourier comme suit :

$$q(x) = \sum_{m=1}^{\infty} Q_m \sin(\alpha x) \quad (\text{III.22a})$$

Où Q_m est l'amplitude de la charge calculée à partir de la relation suivante :

$$Q_m = \frac{2}{L} \int_0^L q(x) \sin(\alpha x) dx \quad (\text{III.22b})$$

Substituant les expansions de u_0, w_0, θ de l'équation (III.21) et q de l'équation (III.22) dans les équations de mouvement (III.19), les solutions analytiques peuvent être obtenues à partir des équations suivantes :

$$\left(\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{12} & m_{22} & m_{23} \\ m_{13} & m_{23} & m_{33} \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} U_m \\ W_m \\ X_m \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ Q_m \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{III.23})$$

On peut réduire les équations (III.23) à la forme algébrique suivante:

Pour l'analyse à la flexion :

$$[K]\{\Delta\} = \{F\} \quad (\text{III.24a})$$

Pour l'analyse dynamique :

$$([K] - \omega^2 [M])\{\Delta\} = \{0\} \quad (\text{III.24b})$$

Avec :

$$\{\Delta\} = \{U_m, W_m, X_m\} \quad (\text{III.25})$$

Où $[K]$ et $[M]$ se réfèrent aux rigidités à la flexion et la matrice de masse et ω est la fréquence correspondante [Hassaine Daouadji.2012].

$$\begin{aligned} S_{11} &= A_{11}\alpha^2, S_{12} = -B_{11}\alpha^3, S_{13} = -B_{11}^s\alpha k_1, \\ S_{22} &= D_{11}\alpha^4, S_{23} = D_{11}^s\alpha^2 k_1, S_{33} = H_{11}^s k_1^2 + A_{55}^s (k_1 A')^2 \alpha^2 \\ m_{11} &= I_0, m_{12} = -I_1\alpha, m_{13} = J_1\alpha k_1 A', \\ m_{22} &= I_0 + I_2\alpha^2, m_{23} = -J_2\alpha^2 k_1 A', \\ m_{33} &= K_2\alpha^2 (k_1 A')^2 \end{aligned} \quad (\text{III.26})$$

CHAPITRE IV

Résultats et discussions

IV.1. Résultats et discussions

Dans cette partie, plusieurs exemples numériques sont présentés et discutés pour vérifier l'exactitude de la présente théorie raffinée de cisaillement de déformation pour l'analyse du comportement statique et dynamique des poutres en FGM sans et avec porosité simplement appuyées. Pour la poutre FGM, les propriétés matérielles utilisées dans la présente étude sont :

- Céramique (P_C : Alumine, Al_2O_3) : $E_c = 380$ GPa ; $\nu = 0.3$; $\rho_c = 3960$ kg/m³.
- Métal (P_M : Aluminium, Al) : $E_m = 70$ GPa ; $\nu = 0.3$; $\rho_m = 2702$ kg/m³.

Les propriétés matérielles de la poutre FGM sont supposés variables suivant l'épaisseur de la poutre selon une simple loi de puissance P-FGM. La partie inférieure de la poutre FGM est riche en Métal (Aluminium, Al), tandis que la surface supérieure est riche en céramique (Alumine, Al_2O_3). Pour plus de commodité, Les paramètres adimensionnels utilisés dans cette étude sont :

$$\bar{w} = 100 \frac{E_m h^3}{q_0 L^4} w \left(\frac{L}{2} \right), \quad \bar{u} = 100 \frac{E_m h^3}{q_0 L^4} u \left(0, -\frac{h}{2} \right), \quad \bar{\sigma}_x = \frac{h}{q_0 L} \sigma_x \left(\frac{L}{2}, \frac{h}{2} \right), \quad \bar{\tau}_{xz} = \frac{h}{q_0 L} \tau_{xz} (0, 0)$$

Pour l'analyse dynamique :

$$\bar{\omega} = \frac{\omega L^2}{h} \sqrt{\frac{\rho_m}{E_m}}$$

IV.1.1. Résultats d'analyse de flexion

Nous testons d'abord la précision de la présente théorie raffinée en comparant les résultats avec ceux prédits par Thait al. [Thai. 2012] qui utilise des solutions basées sur des théories d'ordre élevé pour une poutre FGM parfaite. Dans tous les exemples, aucun facteur de correction transversale de cisaillement n'est utilisé car une représentation correcte de la contrainte de cisaillement transversale est donnée.

Le tableau IV.1 montre la comparaison des déplacements et les contraintes adimensionnelles des poutres FGM en Alumine / Aluminium avec et sans porosité pour différentes valeurs de l'indice de loi de puissance p et du rapport L/h . La poutre FGM est considérée simplement appuyée sous une charge uniformément répartie. Les résultats obtenus par la présente théorie sont comparés avec ceux donnés par Thai et al. [Thai. 2012], Li et al. [Li. 2010], Hadji et al. [Hadji. 2018], Le tableau IV.1 montre un bon accord entre les résultats de cette théorie raffinée avec celles des théories de cisaillement pour les différentes valeurs d'indice de puissance p et du rapport L/h . Il est à noter que les résultats obtenus de la flèche au centre se comparent très bien avec la solution de la théorie

de Reddy (PSDBT) pour une poutre FGM sans porosité et prend des valeurs maximales pour une poutre FGM poreuse ($\alpha = 0.1$ et $\alpha = 0.2$). Ceci est prévu parce que la poutre FGM imparfaite est celle qui a la rigidité la plus basse et la poutre FGM parfaite est celle avec la plus grande rigidité. Les résultats montrent que de la flèche augmentent à mesure que la fraction volumique de porosité (α) augmente car la présence des pores aux niveaux des poutres FGM affaiblie sa rigidité. De plus la théorie classique des poutres CBT qui néglige l'effet de cisaillement sous-estime les résultats de flèche pour les poutres épaisse ($L/h = 5$).

Tableau IV.1 : Comparaison des déplacements et des contraintes adimensionnelles d'une poutre FGM soumise à une charge uniforme.

p	Théories	$L/h = 5$					$L/h = 20$			
		α	\bar{w}	\bar{u}	$\bar{\sigma}_x$	$\bar{\tau}_{xz}$	\bar{w}	\bar{u}	$\bar{\sigma}_x$	$\bar{\tau}_{xz}$
0	CBT*	0	2.8783	0.9211	3.7500	-	2.8783	0.2303	15.0000	-
	PSDBT*	0	3.1654	0.9398	3.8019	0.7330	2.8962	0.2306	15.0129	0.7437
	Li et al. (2010)	0	3.1657	0.9402	3.8020	0.7500	2.8962	0.2306	15.0130	0.7500
	Hadji et al. (2018)	0	3.1654	0.9398	3.8019	0.7330	2.8962	0.2305	15.0128	0.7436
		0.1	3.3646	0.9989	3.8019	0.7330	3.0785	0.2450	15.0128	0.7436
		0.2	3.5906	1.0660	3.8018	0.7330	3.2852	0.2615	15.0128	0.7436
	Présente	0	3.1653	0.9396	3.8015	0.7309	2.8962	0.2305	15.0127	0.7414
0.1		3.3645	0.9988	3.8015	0.7309	3.0785	0.2450	15.0127	0.7414	
0.2		3.5905	1.0658	3.8015	0.7309	3.2852	0.2615	15.0127	0.7414	
1	CBT*	0	5.7746	2.2722	5.7958	-	5.7746	0.5680	23.1834	-
	PSDBT*	0	6.2594	2.3038	5.8835	0.7330	5.8049	0.5686	23.2051	0.7437
	Li et al. (2010)	0	6.2599	2.3045	5.8837	0.7500	5.8049	0.5686	23.2054	0.7500
	Hadji et al. (2018)	0	6.2594	2.3038	5.8834	0.7330	5.8049	0.5685	23.2051	0.7437
		0.1	7.2507	2.7310	6.2195	0.7330	6.7457	0.6745	24.5346	0.7437
		0.2	8.6774	3.3637	6.7061	0.7330	8.1093	0.8316	26.4622	0.7437
	Présente	0	6.2594	2.3036	5.8829	0.7309	5.8049	0.5685	23.2050	0.7414
0.1		7.2508	2.7308	6.2190	0.7309	6.7457	0.6745	24.5345	0.7414	
0.2		8.6774	3.3635	6.7055	0.7309	8.1093	0.8317	26.4621	0.7414	

5	CBT*	0	8.7508	3.6496	7.9428	-	8.7508	0.9124	31.7711	-
	PSDBT*	0	9.8281	3.7100	8.1104	0.5904	8.8182	0.9134	31.8127	0.6013
	Li et al. (2010)	0	9.7802	3.7089	8.1030	0.5790	8.8151	0.9133	31.8112	0.5790
	Hadji et al. (2018)	0	9.8281	3.7100	8.1104	0.5904	8.8182	0.9134	31.8127	0.6013
		0.1	12.9183	5.1357	9.0711	0.5495	11.6160	1.2667	35.5387	0.5601
		0.2	20.0934	8.6894	11.0613	0.4733	18.2672	2.1517	43.2983	0.4831
	Présente	0	9.8270	3.7096	8.1093	0.5881	8.8181	0.9133	31.8124	0.5988
		0.1	12.9168	5.1352	9.0698	0.4568	11.6158	1.2667	35.5383	0.5576
		0.2	20.0904	8.6890	11.0596	0.4714	18.2671	2.1517	342980	0.4807
10	CBT*	0	9.6072	3.8097	9.5228	-	9.6072	0.9524	38.0912	-
	PSDBT*	0	10.9381	3.8864	9.7119	0.6465	9.6905	0.9536	38.1382	0.6586
	Li et al. (2010)	0	10.8979	3.8860	9.7063	0.6436	9.6879	0.9536	38.1372	0.6436
	Hadji et al. (2018)	0	10.9381	3.8863	9.7119	0.6465	9.6905	0.9536	38.1382	0.6586
		0.1	14.5261	5.4151	10.9461	0.6168	12.7847	1.3296	42.8964	0.6290
		0.2	23.1357	9.4017	13.1949	0.5496	20.2308	2.3133	51.4893	0.5617
	Présente	0	11.0024	3.8895	9.7201	0.6753	9.6554	0.9532	38.1182	0.3802
		0.1	12.3842	5.3324	9.8801	0.3038	12.6693	1.3285	42.8567	0.2387
		0.2	12.7626	9.3235	12.9505	1.7018	20.0451	2.3136	51.4658	0.6229

* Résultats de la Réf (Huu-Tai Thai, 2012)

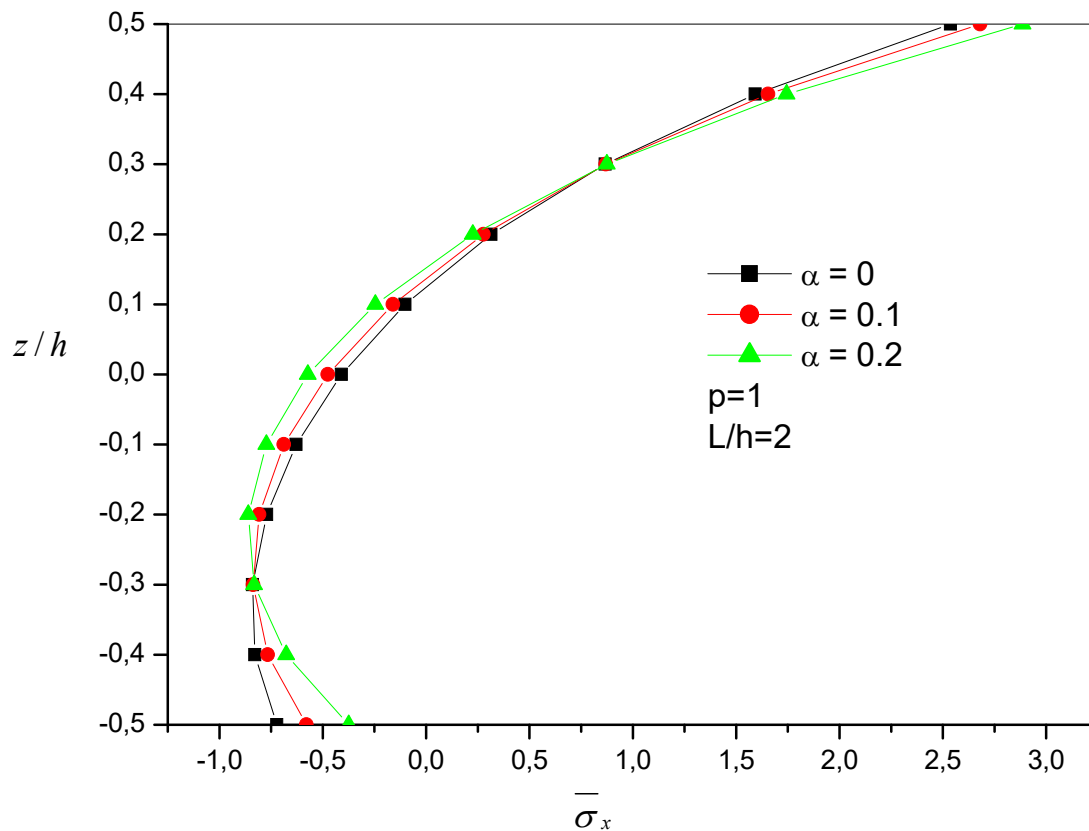


Figure IV.1 : Variation de la contrainte normale adimensionnelle $\bar{\sigma}_x(l/2, z)$ à travers l'épaisseur de poutre FGM en Al/Al₂O₃ pour différentes valeurs de la fraction volumique de porosité.

La figure IV.1 montre les tracés de la contrainte normale adimensionnelle $\bar{\sigma}_x$ à travers l'épaisseur de la poutre FGM en Al/Al₂O₃ avec et sans porosité. L'indice de puissance est pris égal $p=1$ et le rapport d'épaisseur $L/h=2$. Les contraintes sont à la traction dans la surface supérieure et compression dans la surface inférieure et prennent les valeurs maximales pour la poutre FGM imparfaite.

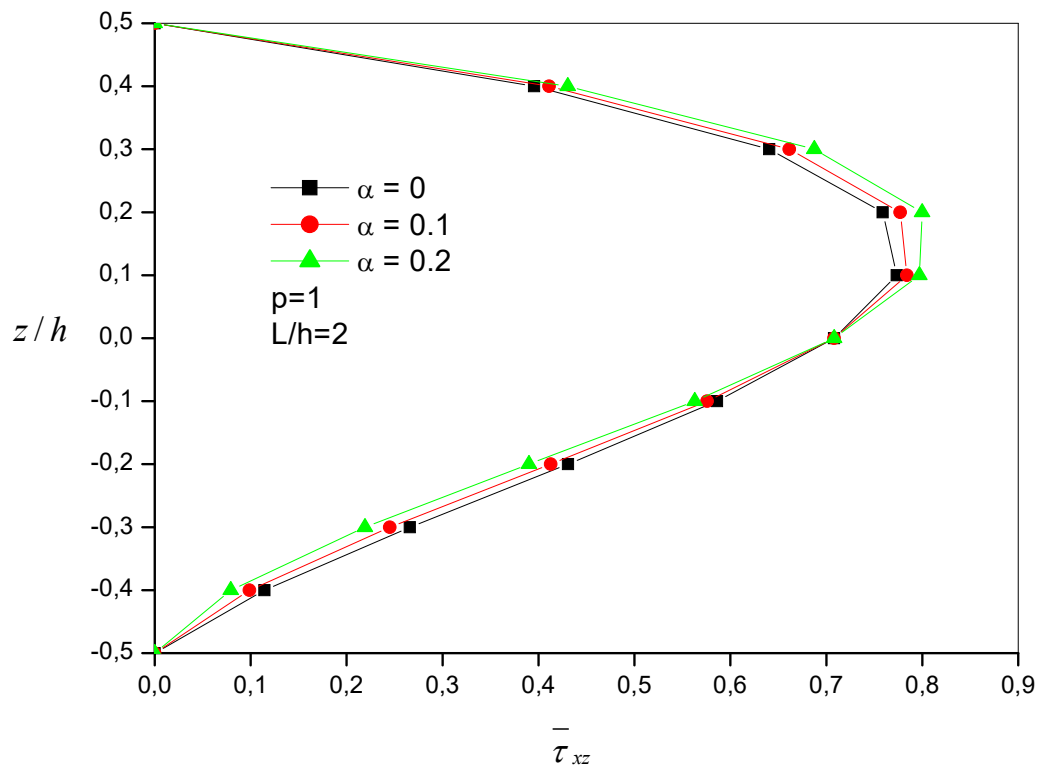


Figure IV.2 : Variation de la contrainte de cisaillement adimensionnel $\bar{\tau}_{xz}(0, z)$ à travers l'épaisseur de poutre FGM en Al/Al₂O₃ pour différentes valeurs de la fraction volumique de porosité.

La figure IV.2, montre la répartition des contraintes de cisaillement $\bar{\tau}_{xz}$ à travers l'épaisseur de la poutre FGM avec et sans porosité. L'exposant de la fraction volumique de la poutre FGM est pris égal $p = 1$. Il est clair que les distributions ne sont pas paraboliques, et les contraintes augmentent pour les poutres FGM imparfaite. Il est clair aussi que la fraction volumique de porosité influe sur la répartition des contraintes de cisaillement.

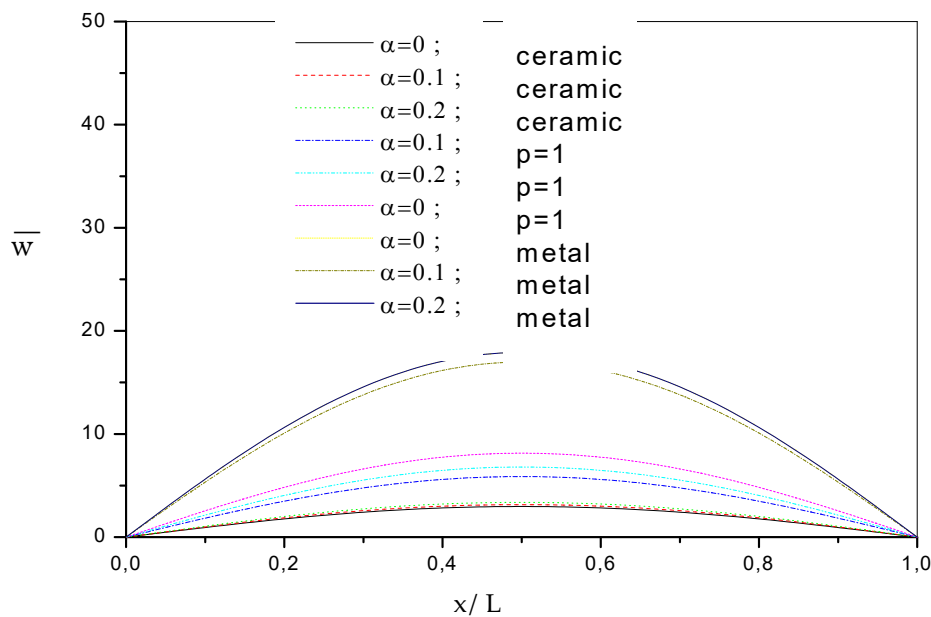


Figure IV.3 : Variation du déplacement transversal adimensionnel \bar{w} de la poutre FGM pour différentes valeurs d'indice de puissance p et de la fraction volumique de porosité α avec $L/h = 5$.

La figure IV.3 illustre la variation du déplacement transversal adimensionnelle \bar{w} des poutres FGM parfaite et imparfaite en fonction du rapport x/L pour différentes valeurs d'indice de loi de puissance p . Les déplacements sont maximales pour les poutres FGM imparfaite ($\alpha = 0.1$ et $\alpha = 0.2$) et minimales pour les poutres FGM parfaite ($\alpha = 0$). En plus les résultats montrent que l'augmentation dans les valeurs de l'indice matériel p conduit à une augmentation dans le déplacement transversal \bar{w} . Aussi on peut conclure que la fraction volumique de porosité α influe sur le comportement de la poutre FGM.

IV.1.2. Résultats d'analyse de vibration libre

L'analyse dynamique des poutres FGM poreuses est également considérée dans cette étude. Les résultats de la présente théorie ont été comparés avec ceux qui sont disponibles dans la littérature obtenus par les différentes théories de cisaillement tels que la théorie de cisaillement de premier ordre de Timoshenko FSDBT, la théorie de cisaillement sinusoïdale de Touratier SSDBT, et la théorie de cisaillement exponentielle de Karama ESDBT, la théorie de cisaillement

parabolique de Reddy PSDBT, la théorie développée par Hadji et al. (2018) et la théorie classique des poutres CBT (Simsek[4]).

Les tableaux IV.2 et IV.3 montrent également l'exactitude de la présente théorie raffinée avec et sans porosité en comparant les résultats de la fréquence fondamentale adimensionnelle des poutres FGM en Al/Al₂O₃ avec celles rapportées dans la littérature obtenus par les théories de cisaillement d'ordre élevés développées par Sismek [4]. Un excellent accord entre les solutions de la présente théorie raffinée et les résultats développés par Simsek[4]. On constate aussi que les fréquences de vibrations diminuent avec l'augmentation de la fraction volumique de la porosité (α) car la présence des pores aux niveaux de la poutre FGM affaiblit sa rigidité. On peut voir que toutes les théories de cisaillement des poutres avec la présente théorie raffinée donnent presque les mêmes fréquences, tandis que la théorie classique des poutres CBT surestime les fréquences de vibration pour tous les cas considérés.

Tableau IV.2 : Etude comparative de la fréquence fondamentale $\bar{\omega}$ d'une poutre en Al/Al₂O₃ pour différentes valeurs de l'indice de puissance p , et de la fraction volumique de porosité α ($L/h = 5$).

Théories	α	$p = 0$	$p = 0.2$	$p = 0.5$	$p = 1$	$p = 5$	$p = 10$	Métal
CBT*	0	5.3953	5.0206	4.5931	4.1484	3.5949	3.4921	2.8034
FSDBT*	0	5.1525	4.8066	4.4083	3.9902	3.4312	3.3134	2.6772
ESDBT*	0	5.1542	4.8105	4.4122	3.9914	3.4014	3.2813	2.6781
PSDBT*	0	5.1527	4.8092	4.4111	3.9904	3.4012	3.2816	2.6773
Hadji et al. (2018)	0	5.1527	4.8081	4.4107	3.9904	3.4012	3.2816	2.6773
	0.1	5.1527	4.8498	4.4042	3.9070	3.1478	3.0292	2.6773
	0.2	5.1527	4.8995	4.3928	3.7865	2.6961	2.5718	2.6773
Présente	0	5.1527	4.8080	4.4107	3.9904	3.4012	3.2816	2.6773
	0.1	5.1527	4.8498	4.4042	3.9070	3.1478	3.0292	2.6773
	0.2	5.1527	4.8995	4.3928	3.7865	2.6961	2.5718	2.6773

* Résultats de la Ref (Simsek, 2010)

Tableau IV.3 : Etude comparative de la fréquence fondamentale $\bar{\omega}$ d'une poutre en Al/Al₂O₃ pour différentes valeurs de l'indice de puissance p , et de la fraction volumique de porosité α ($L/h = 20$).

Théories	α	$p = 0$	$p = 0.2$	$p = 0.5$	$p = 1$	$p = 5$	$p = 10$	Métal
CBT*	0	5.4777	5.0967	4.6641	4.2163	3.6628	3.5546	2.8462
FSDBT*	0	5.4603	5.0827	4.6514	4.2051	3.6509	3.5415	2.8371
ESDBT*	0	5.4604	5.0829	4.6516	4.2051	3.6483	3.5389	2.8372
PSDBT*	0	5.4603	5.0829	4.6516	4.2050	3.6485	3.5389	2.8372
Hadji et al. (2018)	0	5.4603	5.0815	4.6511	4.2050	3.6485	3.5389	2.8371
	0.1	5.4603	5.1244	4.6412	4.1117	3.3767	3.2809	2.8371
	0.2	5.4603	5.1755	4.6254	3.9776	2.8856	2.8021	2.8371
Présente	0	5.4603	5.0815	4.6511	4.2050	3.6484	3.5389	2.8371
	0.1	5.4603	5.1244	4.6412	4.1117	3.3776	3.2809	2.8371
	0.2	5.4603	5.1755	4.6254	3.9776	2.8856	2.8021	2.8371

* Résultats de la Ref (Simsek, 2010)

L'effet de l'indice matérielle p sur les fréquences naturelle fondamentale adimensionnelle $\bar{\omega}$ des poutres FGM parfaite et imparfaite pour trois différentes valeurs du rapport d'épaisseur L/h de la poutre en utilisant la présente théorie de cisaillement d'ordre élevé sont illustrées dans les figures IV.4, IV.5 et IV.6 respectivement.

Il est à noter que la fréquence adimensionnelle diminue avec l'augmentation de la valeur de l'indice de loi de puissance p pour les poutres parfaites et imparfaites et cela pour les trois rapports d'épaisseur L/h . Les fréquences sont supérieures pour les poutres entièrement en céramique ($p = 0$) tandis que les fréquences sont inférieures pour les poutres en métal ($p \rightarrow \infty$).

Cette diminution des fréquences est expliquée par l'influence de la rigidité du matériau c'est-à-dire une augmentation de la valeur de l'indice de puissance p conduit à une diminution du module d'élasticité de la poutre. En d'autres termes, la poutre devient flexible lorsque l'indice de loi de

puissance augmente, et diminuant ainsi les valeurs de la fréquence. De plus, la porosité (α) conduit à une diminution de la fréquence de la poutre. L'effet du rapport d'épaisseur de la poutre sur la fréquence de vibration est très clair dans les trois figures. Une diminution dans le rapport L/h conduit à une diminution dans les fréquences adimensionnelle. On peut également dire que le rapport d'épaisseur L/h à un effet considérable sur la fréquence fondamentale adimensionnelle. Cette dépendance est liée à l'effet de cisaillement sur la fréquence de vibration.

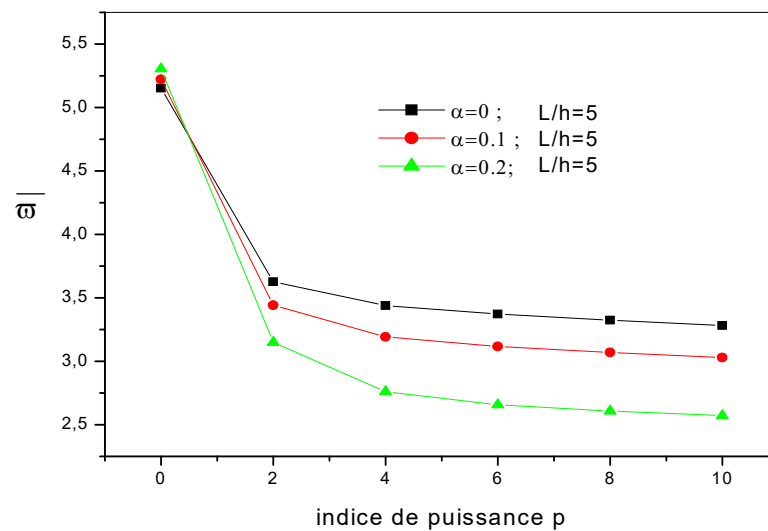


Figure IV.4 : Variation de la fréquence fondamentale $\bar{\omega}$ en fonction de l'indice de puissance p et de la fraction volumique de porosité α d'une poutre FGM en Al/Al₂O₃ avec $L/h = 5$.

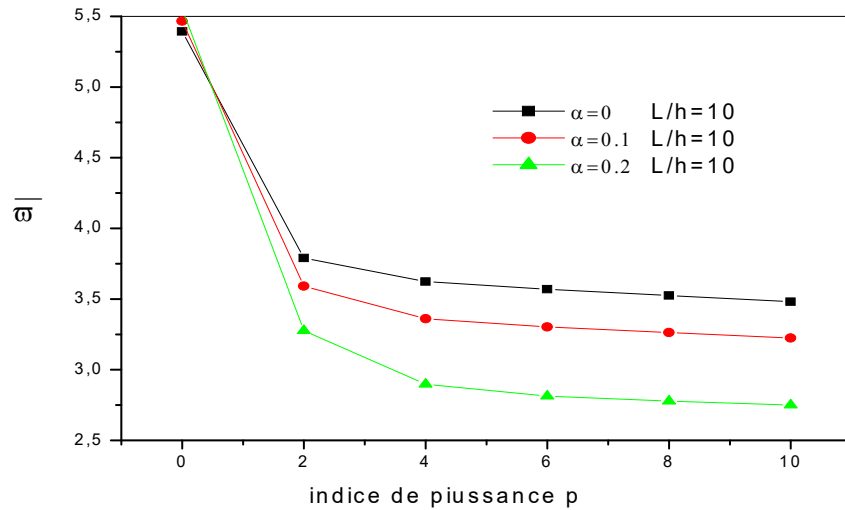


Figure IV.5 : Variation de la fréquence fondamentale $\bar{\omega}$ en fonction de l'indice de puissance p et de la fraction volumique de porosité α d'une poutre FGM en Al/Al₂O₃ avec $L/h = 10$.

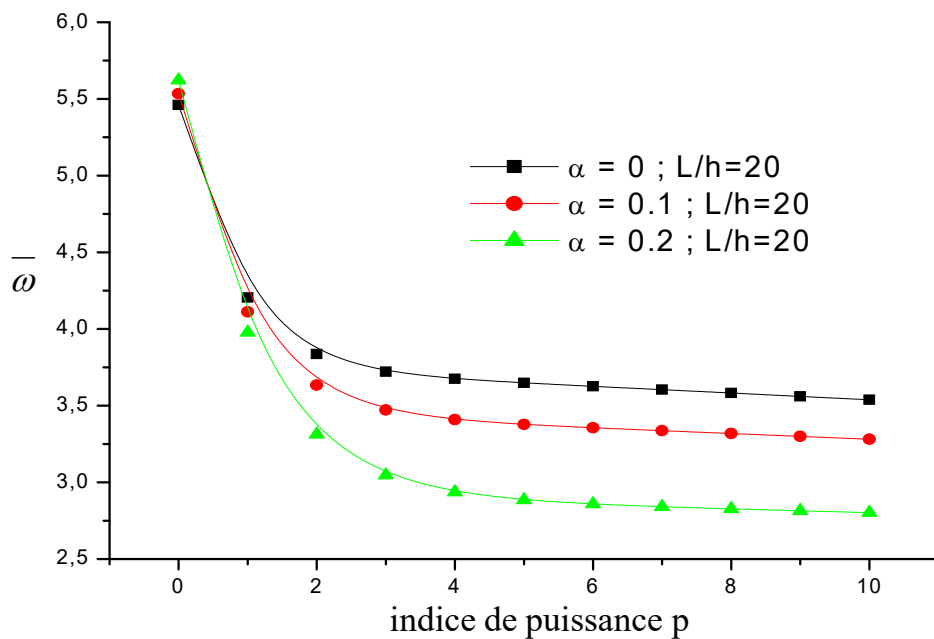


Figure IV.6 : Variation de la fréquence fondamentale $\bar{\omega}$ en fonction de l'indice de puissance p et de la fraction volumique de porosité α d'une poutre FGM en Al/Al₂O₃ avec $L/h = 20$.

IV.1.3. Conclusion

Dans ce chapitre, L'analyse de la flexion et de la vibration libre des poutres poreuse en FGM sont examinées par une nouvelle simple théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé. Cette théorie satisfait la nullité des contraintes aux surfaces supérieures et inférieures de la poutre sans utiliser le facteur de correction de cisaillement. La loi du mélange modifiée couvrant les phases de porosité est utilisée pour décrire approximativement les propriétés des poutres FGM avec porosité. Sur la base de la présente théorie de la poutre, les équations de mouvement sont dérivées du principe des travaux virtuels et le principe d'Hamilton.

Les effets de divers paramètres, tels que le rapport d'épaisseur, l'indice de gradient p et la fraction volumique de la porosité α sur la flexion et la vibration libre des poutres FGM sont tous discutés. A partir de cette étude les conclusions suivantes ont été tirées :

- Un excellent accord entre les solutions de la présente théorie raffinée et les résultats développé par les autres théories de déformation de cisaillement.
- La flèche est maximale pour les poutres FGM avec porosité ($\alpha = 0,1$ et $\alpha = 0,2$) et minimale pour les poutres FGM parfaite ($\alpha = 0$).
- La contrainte σ_x est à la traction dans la surface supérieure et de compression à la surface inférieure et prend les valeurs maximales pour la poutre FGM imparfaite.
- Les fréquences de vibrations diminuent avec l'augmentation de la fraction volumique de la porosité (α).
- La fréquence fondamentale est maximale pour une poutre homogène en céramique avec porosité ($\alpha = 0,1$ et $\alpha = 0,2$).
- La fréquence fondamentale augmente avec l'augmentation du rapport d'épaisseur L/h de la poutre.

En conclusion, on peut dire que la présente théorie des poutres proposée est exacte et simple pour la résolution du comportement mécanique des poutres FGM avec porosité.

Conclusion générale et perspectives

Conclusion générale et perspectives

L'utilisation des matériaux composites fonctionnellement gradués apparaît comme une voie prometteuse dans le domaine des nouveaux matériaux composites grâce à leurs propriétés structurales très particulières. La conception et l'élaboration de ces matériaux nécessitent le développement d'outils d'analyse adaptés à leurs spécificités géométriques et matérielles.

L'objectif de ce travail a été d'apporter une contribution à l'analyse de la réponse mécanique des poutres poreuses fonctionnellement graduées type FGM en tenant compte de l'effet de cisaillement transverse. Pour ce faire, nous avons développé notre travail comme suit:

Nous avons proposé un nouveau modèle analytique performant basé sur la théorie de cisaillement d'ordre élevé pour l'analyse de la réponse mécanique des poutres en considérant les porosités qui peuvent se produire à l'intérieur des matériaux à gradient de propriétés (FGM) au cours de leur fabrication.

Les propriétés des matériaux de la structure analysée sont supposées être graduées dans le sens de l'épaisseur selon une distribution simple de loi de puissance P-FGM en termes des fractions de volume des constituants.

Toutes les études comparatives effectuées dans cette étude ont montrées que les résultats obtenus pour l'analyse de comportement des poutres poreuses sont presque identiques à ceux obtenus avec d'autres théories de déformation de cisaillement. L'effet de plusieurs paramètres de la structure est aussi présenté dans cette investigation sous forme numérique et graphique dans plusieurs combinaisons de matériaux FGM.

Pour les poutres FGM poreuses, les conclusions suivantes ont été observées à partir des résultats typiques obtenus :

- La flèche est maximale pour les poutres FGM avec porosité ($\alpha = 0,1$ et $\alpha = 0,2$) et minimale pour les poutres FGM parfaite ($\alpha = 0$).
- La contrainte σ_x est à la traction dans la surface supérieure et la compression à la surface inférieure et prennent les valeurs maximales pour la poutre FGM imparfaite.
- Les fréquences de vibrations diminuent avec l'augmentation de la fraction volumique de la porosité (α).
- La fréquence fondamentale est maximale pour une poutre homogène en céramique avec porosité ($\alpha = 0,1$ et $\alpha = 0,2$).
- La fréquence fondamentale augmente avec l'augmentation du rapport d'épaisseur L/h de la poutre.

Afin de compléter les résultats obtenus et de mieux cerner le comportement mécanique des poutres poreuses en FGM, nous envisageons les perspectives suivantes pour la suite de notre recherche :

- ✓ Utilisation de cette théorie pour étudier le comportement des poutres sandwiches poreuses ;
- ✓ Utilisation de cette théorie pour d'autres types d'appuis ;
- ✓ La prise en compte de l'effet de la température dans l'étude de la vibration ;
- ✓ Utiliser d'autre méthode des éléments finis pour résoudre le problème de la flexion et de la vibration des poutres poreuses en FGM.

Références bibliographiques

[Sallai et al, 2009] B.O. Sallai, A. Tounsi, I. Mechab, B.M. Bachir, M. Meradjah, E.A. AddaBedia, A theoretical analysis of flexional bending of Al/Al₂O₃ S-FGM thick beams, *Computational Materials Science*, 44 (2009) 1344–1350.

[Thai.2012] Thai,H,T. and Vo,TP. Bending and free vibration of functionally graded beams using various higher-order shear deformation beam theories ,*Int .J.Mech.Sci.*,62(1),57-66,2012.

[simsek.2010] Simsek,M., Fundamental frequency analysis of functionally graded beams by using different higher-order beam theories , *Nucl .Eng .Des.*, 240(4),697-705,2010.

[Li.2010] Li,X.F., Wang, B.L. and Han ,j.c., A higher-order theory for static and dynamic analyses of functionally graded beams, *Arch.Appl .Mech.*,80(10), 1197-1212,2010.

[Ould larbi.2013] Ould larbi ,L.,Kachi ,A.,Houari ,M.S.A.and tounsi , A.,An efficient shear deformation beam theory based on neutral surface position for bending and free vibration of functionally graded beams,*Mech .Bas.Des .struct .Mach.*,41,421-433,2013.

[Abdizadeh H.1997] Elaboration et caractérisation de composites « composites laminaires

[Afaq, K.S. Afaq] M. Karama & S. Mistou. Un nouveau modèle raffiné pour les structures multicouches. In *Comptes-rendus des 13^{èmes} Journées Nationales sur les Composites*, pages289-292. Strasbourg, March 2003.

[Ait Atmane2011] Vibration des structures composites en tenant compte de l'effet du cisaillement, Thèse de Doctorat de l'université Djilali Liabes de Sidi Bel Abbas 2011.

[Bessaim 2013] Analyse statique de la flexion des poutres ZrO₂/ Ti-6Al-4V en P-FGM », *Nature & Technologie A- Sciences fondamentales et Engineering*, n° 09, 2013.

[Huu-Tai Thai] Thuc P. Bending and free vibration of functionally graded beams using various higher-order shear deformation beam theories, *International Journal of Mechanical Sciences* 62, 57–66, 2012.

[Tai. 2011] Tai, H. T., and Kim, S. E., (2011), “Levy-type solution for buckling analysis of orthotropic plates based on two variable refined plate theory.” *Composite Structures*, **93**(7), 1738-1746.

[Farahani. 2015] Farahani, H., Barati, F. (2015), “Vibration of sumberged functionally graded cylindrical shell based on first order shear deformation theory using wave propagation method”, *Struct. Eng. Mech.*, **53**(3), 575-587.

[Al-Basyouni. 2015] Al-Basyouni, K.S., Tounsi, A., Mahmoud, S.R., (2015), “Size dependent bending and vibration analysis of functionally graded micro beams based on modified couple stress theory and neutral surface position”, *Composite Structures*, **125**, 621–630.

[Benferhat. 2016a] Benferhat, R., Hassaine Daouadji, T., Hadji, L. and Said Mansour, M. (2016a), “Static analysis of the FGM plate with porosities”, *Composite Structures*, **21**(1), 123–136.

[Benferhat. 2016b] Benferhat, R., Hassaine Daouadji, T., Said Mansour, M., and Hadji, L., (2016b), “ Effect of porosity on the bending and free vibration response of functionally graded

plates resting on Winkler-Pasternak foundations”, *Earthquakes and Structures*, **10**(6) , 1429-1449.

- [**Ait Yahia. 2015**] Ait Yahia, S., Ait Atmane, H., Houari, M.S.A. and Tounsi, A. (2015), “Wave propagation in functionally graded plates with porosities using various higher-order shear deformation plate theories”, *Struct. Eng. Mech.*, **53**(6), 1143-1165.
- [**Bellifa. 2016**] Bellifa, H., Benrahou, K.H., Hadji, L., Houari, M.S.A. and Tounsi, A. (2016), “Bending and free vibration analysis of functionally graded plates using a simple shear deformation theory and the concept the neutral surface position”, *J Braz. Soc. Mech. Sci. Eng.*, **38**, 265-275.
- [**Bounouara. 2016**] Bounouara, F., Benrahou, K.H., Belkorissat, I., Tounsi, A. (2016), “A nonlocal zeroth-order shear deformation theory for free vibration of functionally graded nanoscale plates resting on elastic foundation”, *Steel and Composite Structures*, **20**(2), 227 – 249.
- [**Ahouel. 2016**] Ahouel et al (2016) “Size-dependent mechanical behavior of functionally graded trigonometric shear deformable nanobeams including neutral surface position concept”, *Steel and Composite Structures*, **20**(5), 963-981.
- [**Zemri. 2015**] Zemri, A., Houari, M.S.A., Bousahla, A.A. and Tounsi, A. (2015), “A mechanical response of functionally graded nanoscale beam: an assessment of a refined nonlocal shear deformation theory beam theory”, *Struct. Eng. Mech., Int. J.*, **54**(4), 693-710.
- [**Nedri. 2014**] Nedri, K., El Meiche, N. and Tounsi, A. (2014), “Free vibration analysis of laminated composite plates resting on elastic foundations by using a refined hyperbolic shear deformation theory”, *Mech. Compos. Mater.*, **49**(6), 641-650.
- [**Ait Amar Meziane. 2014**] Ait Amar Meziane, M., Abdelaziz, H.H. and Tounsi, A. (2014), “An efficient and simple refined theory for buckling and free vibration of exponentially graded sandwich plates under various boundary conditions”, *J. Sandw. Struct. Mater.*, **16**(3), 293-318.
- [**Tlidji. 2014**] Tlidji, Y., Hassaine Daouadji, T., Hadji, L., Tounsi, A., and Adda Bedia, E.A. (2014), “Elasticity solution for bending response of functionally graded sandwich plates under thermomechanical loading”, *Journal of Thermal Stresses*, **37**(7), 852–869.
- [**Hadji. 2014**] Hadji, L., Daouadji, T.H., Tounsi, A., Bedia, E.A. (2014), “A higher order shear deformation theory for static and free vibration of FGM beam”, *Steel and Composite Structures*, **16**(5), 507-519.
- [**Bourada. 2015**] Bourada, M., Kaci, A., Houari, M.S.A., Tounsi, A. (2015), “A new simple shear and normal deformations theory for functionally graded beams”, *Steel and Composite Structures*, **18**(2), 409 – 423.
- [**Mahi. 2015**] Mahi, A., Adda Bedia, E.A., Tounsi, A. (2015), "A new hyperbolic shear deformation theory for bending and free vibration analysis of isotropic, functionally graded, sandwich and laminated composite plates”, *Applied Mathematical Modelling*, **39**, 2489–2508.

- [Belabed. 2014]** Belabed, Z., Houari, M.S.A., Tounsi, A., Mahmoud, S.R., Anwar Bég, O. (2014), "An efficient and simple higher order shear and normal deformation theory for functionally graded material (FGM) plates", *Composites: Part B*, **60**, 274–283.
- [Bennai. 2015]** Bennai, R., Ait Atmane, H., Tounsi, A. (2015), "A new higher-order shear and normal deformation theory for functionally graded sandwich beams", *Steel and Composite Structures*, **19**(3), 521 - 546.
- [Tai. 2014]** Tai, H. T. and Choi, D. H., (2014), "Levy Solution for Free Vibration Analysis of Functionally Graded Plates based on a Refined Plate Theory", *KSCE Journal of Civil Engineering*, **18**(6), 1813-1824.
- [Hadji. 2015]** Hadji, L., and Adda Bedia, E.A., (2015) "Influence of the porosities on the free vibration of FGM beams", *Wind and Structures*, **21**(3) 273-287.
- [Ait Atmane. 2015]** Ait Atmane, H., Tounsi, A., Bernard, F., and Mahmoud, S.R., (2015), "A computational shear displacement model for Vibrational analysis of functionally graded beams with porosities", *Steel and Composite Structures, An Int'l Journal*, **19**(2), 369-385.
- [Mouaici. 2016]** Mouaici, F., Benyoucef, S., Ait Atmane, H., and Tounsi, A., (2016), "Effect of porosity on vibrational characteristics of non-homogeneous plates using hyperbolic shear deformation theory", *Wind and Structures*, **22**(4) 429-454.
- [Zhu. 2001]** Zhu, J., Lai, Z., Yin, Z., Jeon, J. and Lee, S. (2001), "Fabrication of ZrO₂-NiCr functionally graded material by powder metallurgy", *Mater. Chem. Phys.*, **68**(1-3), 130-135.
- [Elomari. 2011]** Elomari, Analyse de la vibration libre des poutres en E-FGM à section transversale variable. Thèse de Master 2 de l'université Djillali Liabes de Sidi Bel Abbess 2011.

Résumé

Dans ce travail de mémoire un développement analytique a été effectué, afin d'étudier le comportement mécanique des structures poreuses en tenant compte des effets des déformations de cisaillement transversales. Les matériaux constituant ces structures sont supposés graduellement variables suivant le sens de la hauteur selon une distribution simple de loi de puissance en termes des fractions de volume des constituants ; les deux matériaux avec lesquels on a travaillé sont les métaux et les céramiques. Pour l'analyse de comportement des poutres FGM en considérant les porosités qui peuvent se produire à l'intérieur des matériaux à gradient de propriétés (FGM) au cours de leur fabrication, on a développé un nouveau champ de déplacement avec une nouvelle théorie de cisaillement à trois variables. Cette théorie de cisaillement satisfait la nullité des contraintes aux surfaces supérieures et inférieures de la poutre sans utiliser le facteur de correction de cisaillement. La loi de mélange modifiée couvrant les phases de porosité est utilisée pour décrire approximativement les propriétés des poutres FGM avec porosité. Sur la base de la présente théorie de la poutre poreuse, les équations de mouvement sont dérivées du principe d'Hamilton. Les solutions sont obtenues en utilisant les équations de Navier, et les résultats de la flexion et de la vibration des poutres FGM poreuse sont trouvées en résolvant le problème aux valeurs propres. A la fin, des exemples illustratifs sont donnés pour montrer les effets de la variation des divers paramètres sur le comportement mécanique des structures fonctionnellement gradués FGM.

Mots clés : Matériaux fonctionnellement gradués ; Flexion statique; Vibration libre ; Principe d'Hamilton ; Théorie de déformation de cisaillement.

Abstract

In this work, an analytical development was carried out to study the mechanical behavior of structures taking into account the effects of transverse shear deformations. The materials constituting these structures are assumed to be gradually variable in the thickness direction according to a simple power law distribution in terms of the volume fractions of the constituents; the two materials with which we worked are metals and ceramics. For the behavioral analysis of FGM beams considering the porosities that may possibly occur inside the functionally graded materials (FGMs) during their fabrication, we developed a new field of displacement with a new theory with three variables. This theory satisfies the nullity of the stresses at the upper and lower surfaces of the beam without using the shear correction factor. The modified rule of mixture covering porosity phases is used to describe and approximate material properties of the FGM plates with porosity phases. On the basis of the present theory of the porous beam, the equations of motion are derived from the Hamilton principle. The solutions are obtained using the Navier equations, and the results of the bending and vibration of porous FGM beams are found by solving the eigenvalue problem.

At the end, illustrative examples are given to show the effects of the variation in various parameters on the mechanical behavior of functionally graduated FGM structures.

Key words: Functionally graded material; Static bending; Free vibration; Hamilton's principle; Shear deformation theory.

ملخص

في عمل هذه المذكرة، تطوير تحليلي ثم القيام به من أجل دراسة السلوك الميكانيكي للهياكل بأخذ بعين الاعتبار تشوهات قوى القص العرضية، نوعين من الهياكل ثم النظر فيها، الأولى عبارة عن رافدة مثقبة على مساند بسيطة تحت تأثير قوة موزعة بانتظام، أما الثانية عبارة عن صفيحة ذات حواف مختلفة.

المواد المكونة لهذه الهياكل تعتبر مدرجة بانتظام في اتجاه السمك تحت قانون أسي بسيط من حيث كسور حجم المكونات. المادتان اللتان التي عملنا عليهما هما المعادن والسيراميك. من أجل دراسة سلوك الروافد المتدرجة وظيفيا بأخذ بعين الاعتبار المسامات التي تتشكل داخل مواد المتدرجة وظيفيا عند الصناعة، قمنا بتطوير مجال جديد للانتقال مع استعمال نظرية قص ذات ثلاث متغيرات.

هذه النظرية تحقق شروط انعدام الإجهادات في الجهات العليا و السفلية بدون استعمال معامل تصحيح القص. قانون الخلط المغير الذي يغطي حالات المسامات ثم استعماله من أجل الكتابة التقريبية لخصائص الروافد المتدرجة وظيفيا. باستعمال نظرية القص الحالية للروافد المثقبة، معدلات الحركة تم استخراجها باستعمال مبدأ هاميلتون. الحلول تم الحصول عليها باستعمال حال نافي، والنتائج الالتواء واهتزاز الروافد المثقبة، تحصلنا عليها بحل مشكل القيم المطلقة.

في النهاية، أمثلة برهانية تم إعطاؤها من أجل إظهار تأثير عدة عوامل على السلوك الميكانيكي للهياكل المتدرجة وظيفيا.

الكلمات الدالة: المواد المتدرجة، الانحناء، الاهتزاز الحر، مبدأ هاميلتون، نظرية تشوه القص.