REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE & POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR & DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Université Ibn Khaldoun- Tiaret
FACULTÉ DES MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUE
DÉPARTEMENT DES MATHEMATIQUES

MEMOIRE MASTER

Présentée par :

BAGHDAD AHLEM

YOUNES HASSNIA

ZERGOUN FATIMA

Spécialité : *Mathématiques*

Option : *Analyse fonctionnelle et applications / Analyse fonctionnelle et équations différentielles*

Intitulé

Quelques théorèmes du point fixe dans les espaces G-métriques ordonnés et applications

Soutenue le : 13 / 06 / 2022 devant le jury composé de :

Président : SOUID Mohammed Said *Pr.Univ. Ibn Khaldoun Tiaret*

Examinateurs : SOFRANI Mohammed *Pr. Univ. Ibn Khaldoun Tiaret*

Encadreur : MOKHTARI Mokhtar *Pr. Univ. Ibn Khaldoun Tiaret*

2021-2022

Remerciement

Avant toute chose, nous tenons à remercier « **Allah** » le tous puisant, pour nous avoir donné la force et la patience.

✓ Je tiens à exprimer ma gratitude à mon gestionnaire de mémoire **Dr. Mokhtari Mokhtar** . Je la remercie de m'avoir encadré orienté, aidé et conseillé.

✓ Mes remerciement les plus sincères aux membres du jury qui m'ont fait honneur de juger mon travail plus précisément pour examinateur **Sofrani Mohammed** président du jury et pour **Pr.Souid Mohammed Said** .

✓ Sans oublier l'ensemble des enseignants ayant contribué à ma formation durant mes cycles d'études.

✓ Finalement, je remercie tous ceux ou celles qui ont contribué de près ou de loin à l'accomplissement de ce mémoire.

★ *A vous tous, un grand Merci*

Ministère De L'enseignement Supérieur Et De La Rechreche Scientifique

Université Ibn Khaldoun - Tiaret

Préparée au Département des Mathématiques
présenté par

ZERGOUN Fatima
BAGHDAD Ahlem
YOUNES Hassnia

Spécialité : Mathématiques
Option : Analyse Fonctionnelle et Applications

sujet de Mémoire
Quelques théorèmes du point fixe dans les espaces G-métriques ordonnés et applications

Mémoire de fin d'études pour obtenir
le diplôme de Master
présenter et soutenue publiquement le 13/06/2022
devant le jury composé de

SOUID Mohammed Said	**Pr**	**Président**
SOFRANI Mohammed	**MAA**	**Examinateur**
MOKHTARI Mokhtar	**MCA**	**Encadreur**

Dédicace

Je dédie ce modeste travail :

★ *À mes chers parents* ★

Je vous remercie pour tout le soutien que vous me portez depuis mon enfance .

Puisse Dieu, le très haut,vous accorde santé, bonheur et longue vie.

★ À mon frère ★

★ À mes soeurs ★

Je vous souhaite un avenir plein de joie, de bonheur, de réussite .

★À tous mes professeurs ★

★ À tous mes adorables amis★

Younes Hassnia

Dédicace

Je dédie ce modeste travail :

★ *À mes chers parents* ★

Je vous remercie pour tout le soutien que vous me portez depuis mon enfance .

Puisse Dieu, le très haut,vous accorde santé, bonheur et longue vie.

★ À mon frère ★

★ À mes soeurs ★

Je vous souhaite un avenir plein de joie, de bonheur, de réussite .

★À tous mes professeurs ★

★ À tous mes adorables amis★

ZERGOUN FATIMA

Dédicace

Je dédie ce modeste travail :

★ *À mes chers parents* ★

Je vous remercie pour tout le soutien que vous me portez depuis mon enfance .

Puisse Dieu, le très haut,vous accorde santé, bonheur et longue vie.

★ À mes frères ★

★ À mes soeurs ★

Je vous souhaite un avenir plein de joie, de bonheur, de réussite .

★À tous mes professeurs ★

★ À tous mes adorables amis★

BAGHDAD AHLEM

Table des matières

INTRODUCTION **2**

1 Préliminaire **5**

1.1 Espace G-métrique ordonnés 5
1.2 Espace métrique généralisée 6
1.3 Propriétés des espaces G-métrique 8
1.4 La topologie sur un espace G-métrique 9
1.5 La convergence et la continuité dans les espaces G-métriques 10
1.6 Les contractions 12
1.7 Théorème du point fixe dans espace partiellement ordonné 13
1.7.1 L'existence et unicité de la fonction de Green 15

2 Quelques théorèmes de point fixe **16**

2.1 Principe de contraction de Banach 16
2.2 Ćirić-Reich-Rus contraction-enrichie dans espace de Banach 16
2.3 Théorème du point fixe de Ćirić 27
2.4 Les points fixes communs dans les espaces G-métriques : 28
2.5 Le point fixe triplé 37

3 Quelques applications **44**

3.1 Application(**Équation intégral**) 44
3.2 Application aux problème aux limites pour les EDO 51

INTRODUCTION

Nous avons tous appris que les origines des princes de contraction métrique, la théorie métrique du point fixe elle-même reposent sur la méthode des approximations successives pour prouver l'existence et l'unicité des solutions d'équations différentielles. Cette méthode est associée aux noms de mathématique célèbre du XIXe siècle tels que Cauchy, Liouville, Lipschitz, Peano, et surtout picard. En fait le processus itératif utilisé dans la preuve de théorème de contraction porte le nom d'itération de picard. Il est assez intéressant de savoir qu'en 1429 AL-Kashani publiait déjà un livre intitulé :≪ la clé de l calculatrice ≫, où il utilisait des itérations picardes. En fait, AL-Kashani a ouvert la voie ou soi-disant techniques numériques il y a environ 600 ans. il tenait à développer des idées avec des questions pratiques, comme les valeurs approximatives de sin (1°) qui ont permis aux scientifique musulmans de proposer de très bonnes approximations de la circonférence de la terre.
Ce théorème a une longue histoire. Les idées utilisées dans démonstration étaient connues de Poincaré dés 1886. En 1909, Brouwer démontra le théorème lorsque $n = 3$. Et en 1910, Hadamard a donné la premier preuve de n arbitraire, et Brouwer en a donné une autre en 1912. Tous ces résultats sont plus anciens que la principale de contraction de Banach. Bien que de la nature les deux théorème soient défirent, ils présente certaines similitudes. Une combinaient des deux a conduit au soi-disant théorème de point fixe métrique de l'espace de Banach.
En effet, dans le théorème de Brouwer, la convexité, la compacité et la continuité de T sont cruciales, tandis que la comportement de Lipschitz de la contraction et de la complétude est crucial dans le théorème de point fixe de Banach. Dans l'espace vectorielle linéaire normé infinis, on perd la compacité des ensembles convexes fermés bornés (comme les boules fermés). Donc , c'est nous supposant l'exhaustivité, nous obtenons des espaces de Banach. Sur celles-ci, nous avons une autre topologie naturelle (autre que la topologie normale), c'est la topologie faible. Ainsi, un ensemble convexe faiblement compact n'a pas besoin d'être compact pour la norme. Le meilleur exemple ici est l'espace de Hilbert. Dans celui-ci, tout ensemble convexe fermé borné est faiblement compact. La condition de Lipschitz considérée est lorsque la constante de Lipschitz est égale à 1. De telles applications sont dites non expansif. Autrement dit, si (M, d) est une espace métrique, alors

$T : M \to M$ est non expansif si :

$$d(T(x), T(y)) \leq d(x, y), pourtoutx, y \in M.$$

En1992, le mathématicien polonais Stefan Banach a établi un remarquable théorème du point fixe connu sous le nom de "principe de contraction de Banach" (BCP)qui est l'un des résultats d'analyse les plus important et considéré comme la principale source de la théorie métrique du point fixe. C'est le résultat de point fixe le plus largement appliqué dans de nombreuses branches des mathématique car il nécessite la structure d'un espace métrique complet avec une condition contractive sur la carte qui est facile à tester dans ce cadre.
Le (BCP) a été généralisé dans de nombreuses directions différentes. En fait, il existe une grande quantité de littérature traitant des extensions / généralisations de ce théorème remarquable.
Kannan a prouvé que si X est complet, alors chaque application de Kannan a un point fixe. Notons que théorème du point fixe de Kannan n'est pas une extension du (BCP). À note avis, le théorème de Kannan est également très important car Subrahmanyan [85] a prouvé que le théorème de Kannan caractérise la complétude métrique. Autrement dit, un espace métrique X est complet si et seulement si chaque application de Kannan sur X a un point fixe.
EN 1976, Caristi a prouvé un merveilleux théorème de point fixe sur des espaces métriques complets, qui est lié ou BCP et équivalente au principe variationnel d'EKland. Le théorème du point fixe Caristi a trouvé de nombreuses applications on analyse non linéaire.
Ces dernières année, des distance en métrique ont été introduites qui généralisent les métriques et qui ont des applications pour obtenir les solutions de plusieurs nouveaux problèmes importants en analyse non linéaire. L'effort pionnier dans cette direction est les articles de Kada et al, Suzuki et Takahashi, Suzuki, Lin et Du et Ume dans les espaces métrique. Dans ces articles, entre autres, diverses distances sont introduites, et des relations ntre ces distances avec les applications sont établies.
Kada et al. ont introduite une notion de distance w sur un espace métrique et en utilisant cette notion, ils ont amélioré le théorème du point fixe de Caristi, le principe variationnel d'EKland et le théorème de minimisation de Takahashi. En utilisant la notion de w-distance, Suzuki et Takashi en introduit des notions d'applications faiblement contractives à une valeur est a plusieurs valeurs (en bref, w-contractives) et ont prouvé des résultats de point fixe pour de telles applications. Par conséquent, ils ont généralisé le principe de contraction de Banach et le résultat de point fixe Nadler.
De l'application de l'intervalle fermé borné dans lui même dans un convexe compacte dans un espace euclidien dans lui même aussi.

En 2007, Mustafa et sims ont introduit la notion de G-métrique et ont étudié la topologie de tels espaces.
Les auteurs sont également caractérisé certains de point fixe célèbres dans le contexte de l'espace G-métrique. Suite à cet article initial, un certain nombre d'auteurs ont publié de nombreux résultat en virgule fixe sur la définition de l'espace G-métrique (voir par exemple **([23]), ([24])**). Après Banach et Ćirić à donnés résultat des espaces G-métrique concernent le théorème du point fixe. Sous forme exige uniquement la continuité de l'application d'un intervalle fermé bornés dans lui même dans un convexe compact dans un espace euclidien dans lui même aussi .
En 1955, pour la premier fois karanoslkji à élaboré son théorème de point fixe qui affirme que dans un convexe compacte tout application qui le met sous la forme d'une somme de deux application dont l'une est contractante et l'autre compacte admet un point fixe. Ce théorème est très efficace dans la résolution des équations différentielles non linéaire, il apporte des réponses aux problèmes.
En analyse, un théorème du point fixe est un résultat qui permet d'affirmer qu' une application T admet sous certaines conditions un point fixe. Ces théorème se révèlent être des outils très utiles en mathématique, principalement dans le domaine de la résolution des équations intégrales aux équation aux problème aux limite.
Ce mémoire est composé en trois chapitre comme suit :
✓ **Dans le premier chapitre :**
Nous donnons notations, définitions, quelques propriétés d'espace G-métrique, la topologie, la convergence et la continuité dans l'espace G-métrique.
✓ **Dans le deuxieme chapitre :**
En utilisée quelques théorèmes de point fixe, Ćirić, point fixe commun et triplé dans l'espace G-métrique.
✓**Derniere chapitre :**
Nous étudions quelques applications :
•Premier application (équation intégrale).
•Deuxième application (aux problème aux limite).
Mots clés
- Point fixe, Espaces métriques généralisés, Espace G-métrique, Les points fixe commun.

Chapitre 1

Préliminaire

1.1 Espace G-métrique ordonnés

Définition 1.1.1. *Soit X un ensemble muni d'une application $d : X \times X \to \mathbb{R}$ appelée distance sont satisfait les propriétés suivantes :*

1. $\forall x, y \in X, d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$*(identité)*
2. $\forall x, y \in X,\ d(x,y) > 0$ *si* $x \neq y$ *(non négative)*
3. $\forall x, y \in X, d(x,y) = d(y,x)$ *(symétrie).*
4. $\forall x, y, z \in X, d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$, *(inégalité triangulaire).*

(X,d) *est un espace métrique.*

Définition 1.1.2. ***([9])*** *: Soit X ensemble non vide et $G : X^3 \to \mathbb{R}^+$ une fonction vérifiait les propriétés suivantes :*

(G1) $G(x,y,z) = 0$ *si* $x = y = z$

(G2) $0 < G(x,x,y), \forall x, y \in X$ *avec* $x \neq y$

(G3) $G(x,x,y) \leq G(x,y,z), \forall x, y, z \in X$ *avec* $y \neq z$

(G4) $G(x,y,z) = G(x,z,y) = G(y,z,x) = \cdots$ *(symétrie dans les trois variable)*

(G5) $G(x,y,z) \leq G(x,a,a) + G(a,y,z), \forall x, y, z, a \in X$ *(inégalité rectangle)*

La fonction G est appelée une métrique généralisée au plus précisément une G-métrique sur X.
(X,G) *est un espace G-métrique.*
Notons que tout G-métrique sur X définie par :

$$\forall x, y \in X, d_G(x,y) = G(x,y,y) + G(y,x,x)$$

Exemple 1.1.1. *Soit $X = \mathbb{R}$ un espace métrique. Fonction $G : \mathbb{R}^3 \to [0, +\infty)$, définie par :*

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R}, G(x,y,z) = |x-y| + |y-z| + |z-x| \tag{1.1.0.1}$$

Soit $x, y, z, a \in \mathbb{R}$

1. $G(x,y,z) = 0$ *si seulement si*

$$|x-y|+|y-z|+|z-x| = 0 (car |x^{'} - x^{''}| \geq 0, \forall x^{'}, x^{''} \in X) \quad \Leftrightarrow \begin{cases} |x-y| \geq 0 \\ |y-z| \geq 0 \\ |z-x| \geq 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} |x-y| = 0 \\ |y-z| = 0 \\ |z-x| = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow x = y = z$$

2. $G(x,x,z) = |x-x|+|x-z|+|z-x| = |x-z|+|z-x| > 0$ *si* $x \neq z$

3.
$$\begin{aligned} G(x,x,y) &= |x-x|+|x-y|+|y-x| = |x-y|+|y-x| \\ &= |x-y|+|y-x+z-z| \\ &\leq |x-y|+|y-z|+|z-x| \\ &= G(x,y,z) \end{aligned}$$

4. $G(x,y,z) = |x-y|+|y-z|+|z-x| = G(y,x,z) = G(z,y,x) = \cdots$
car $(|x^{'} - x^{''}| = |x^{''} - x^{'}|, \forall x^{'}, x^{''} \in X)$

5.
$$\begin{aligned} G(x,y,z) &= |x-y|+|y-z|+|z-x| \\ &= |x-y+a-a|+|y-z|+|z-x+a-a| \\ &\leq |x-a|+|a-y|+|y-z|+|z-a|+|a-x| \\ &= G(x,a,a) + G(a,y,z) \\ &\Rightarrow G(x,y,z) = |x-y|+|y-z|+|z-x| \end{aligned}$$

Est une espace G-métrique sur $\mathbb{R}$.

1.2 Espace métrique généralisée

Définition 1.2.1. *([6]) : Soit Ω un ensemble non vide, une fonction $g : \Omega^{n+1} \to \mathbb{R}_+$ est dit g-métrique d'ordre n sur Ω, s' elle satisfait les condition suivantes :*

(g1) *(définitive positive)* $g(x_0, \cdots, x_n) = 0$ *si et seulement* $x_0 = \cdots = x_n$

(g2) *(invariation de permutation)* $g(x_0, \cdots, x_n) = g(x_{\sigma(0)}, \cdots, x_{\sigma(n)})$ *pour tout permutation* σ *sur* $\{0, 1, \cdots, n\}$

(g3) *(monotonie)* $g(x_0, \cdots, x_n) \leq g(y_0, \cdots, y_n), \forall (x_0, \cdots, x_n), (y_0, \cdots, y_n) \in \Omega^{n+1}$ *avec* $\{x_i : i = 0, \cdots, n\} \subsetneq \{y_i : i = 0, \cdots, n\}$,

(g4) $\forall x_0, \cdots, x_s, y_0, \cdots, y_t, w \in \Omega$ *avec* $s+t+1 = n$ $g(x_0, \cdots, x_s, y_0, \cdots, y_t) \leq g(x_0, \cdots, x_s, w, \cdots, w) + g(y_0, \cdots, y_t, w, \cdots, w)$.*(inégalité triangulaire),*

(Ω, g) *est un espace g-métrique.*

Notation : Note $\Omega^n = \prod_{i=1}^{n} \Omega, n \in \mathbb{N}$.

Définition 1.2.2. *Un espace G-métrique* (X, G) *est appelé espace G-métrique symétrique si :*

$$\forall x, y \in X, G(x, y, y) = G(y, x, x)$$

Lemme 1.2.1. ***(La relation binaire)*** *: Soit* (X, G) *est un espace G-métrique et* $\phi : X \to \mathbb{R}$ *plan.*
Définir la relation binaire sur $(\preceq)$ *comme suit :*

$$x \preceq y \Longleftrightarrow G(x, y, y) \leq \phi(x) - \phi(y)$$

alors est un préordonné sur X, il sera appelée préordonné induite par ϕ

Démonstration. On à :

- Reflexivité : pour tout $x \in X$

$$0 = G(x, x, x) \leq \phi(x) - \phi(x) = 0$$

  d'où $x \preceq x$ est réflexif

- transitivité : pour tout $x, y, z \in X$, on à $x \preceq y$ et $y \preceq x$ nous avons :

$$G(x, y, y) \leq \phi(y) - \phi(x) et G(y, z, z) \leq \phi(z) - \phi(y)$$

  par propriété (G5), nous avons :

$$G(x, z, z) \leq G(x, y, y) + G(y, z, z) \leq \phi(y) - \phi(x) + \phi(z) - \phi(y) = \phi(z) - \phi(x)$$

  c'est-à-dire $x \preceq z$ donc $" \preceq "$ est transitif.
  Et donc la relation $" \preceq "$ est une préordonné sur X.

□

Exemple 1.2.1. *Soit $X = [0,\infty)$ et $G(x,y,z) = \max\{x,y,z\}$, donc (X,G) est un espace G-métrique.*
Soit $\phi : X \to \mathbb{R}$, $\phi(x) = 2x$, pour tout $x, y \in X$

$$x \leq y \iff G(x,y,y) \leq \phi(y) - \phi(x)$$

$$\iff \max\{x,y\} \leq 2y - 2x$$

Il s'ensuit que

$$2 \leq 4, \frac{1}{4} \leq \frac{1}{2}, 2 \leq 2$$

Donc X est un espace G-métrique

1.3 Propriétés des espaces G-métrique

Les propriétés utiles suivantes d'un G-métrique sont facilement inférées par les axiomes.

Proposition 1.1. *([22]) : Soit (X,G) un espace G-métrique, alors pour tout x,y,z et $a \in X$, on à :*

1. $G(x,y,z) = 0$ *alors* $x = y = z$
2. $G(x,y,z) \leq G(x,x,y) + G(x,x,z)$
3. $G(x,x,y) \leq 2G(y,x,x)$
4. $G(x,y,z) \leq G(x,a,z) + G(a,y,z)$
5. $G(x,y,z) \leq \frac{1}{2}[G(x,y,a) + G(x,a,z) + G(a,y,z)]$
6. $G(x,y,z) \leq [G(x,a,a) + G(y,a,a) + G(z,a,a)]$
7. $|G(x,y,z) - G(x,y,a)| \leq max\{G(a,z,z), G(z,a,a)\}$
8. $|G(x,y,z) - G(x,y,a)| \leq G(x,a,z)$
9. $|G(x,y,z) - G(y,z,z)| \leq max\{G(x,z,z), G(z,x,x)\}$
10. $|G(x,y,y) - G(y,x,x)| \leq max\{G(y,x,x), G(x,y,y)\}$

Proposition 1.2. *([22]) : Soit (X,G) un espace G-métrique et $k > 0$, alors G_1, G_2 et G_3 sont aussi G-métrique sur X où :*

1. $G_1(x,y,z) = min\{k, G(x,y,z)\}$
2. $G_2(x,y,z) = \dfrac{G(x,y,z)}{k + G(x,y,z)}$.
3. $G_3(x,y,z) = \begin{cases} G(x,y,z) & \textit{si pour certains } i \textit{ on a} : x,y,z \in A_i \\ k + G(x,y,z) & \textit{autrement} \end{cases}$

Avec $X = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ est une partition de X.

Proposition 1.3. *Soit (X, G) un espace G-métrique, alors les éléments suivantes équivalent :*

1. *(X, G) est symétrique*
2. *$G(x, y, y) \leq G(x, y, a)$, pour tout $x, y, a \in X$*
3. *$G(x, y, z) \leq G(x, y, a) + G(z, y, b)$, pour tout $x, y, z, a, b \in X$*

Démonstration. : **Voir [22]** □

1.4 La topologie sur un espace G-métrique

Pour tout ensemble X non vide, nous avons vu qu'à partir du n'importe quelle métrique sur X, on peut construire une G-métrique par (E_s) ou (E_m) telle que :

$$(E_s) : G_s(d)(x, y, z) = \frac{1}{3}(d(x, y) + d(y, z) + d(x, z))$$

$$(E_m) : G_m(d)(x, y, z) = \max\{d(x, y), d(y, z), d(x, z)\}$$

Inversement pour tout G-métrique sur X :

$$(E_d) : d_G(x, y) = G(x, y, y) + G(x, x, y)$$

Se voir facilement pour définir une métrique sur X, la métrique associée à G, qui satisfait :

$$G(x, y, z) \leq G_s(d_G)(x, y, z) \leq 2G(x, y, z)$$

de même

$$\frac{1}{2}G(x, y, z) \leq G_m(d_G)(x, y, z) \leq 2G(x, y, z)$$

De plus, partant d'une métrique d sur X on a :

$$d_{G_s(d)}(x, y) = \frac{4}{3}d(x, y)$$

et

$$d_{G_m(d)}(x, y) = 2d(x, y)$$

Définition 1.4.1. *Soit (X, G) un espace métrique, alors pour $x_0 \in X$, $r > 0$ la boule G de centre x_0 et de rayon r :*

$$B_G(x_0, r) = \{y \in X : G(x_0, y, y) < r\}$$

Proposition 1.4. *: Soit (X,G) un espace G-métrique, alors pour tout $x_0 \in X$ et $r > 0$ on a :*

1. *si $G(x_0,x,y) < r$ alors $x,y \in B_G(x_0,r)$*
2. *si $y \in B_G(x_0,r)$ alors il existe un $\delta > 0$ telle que $B_G(y,\delta) \subseteq B(x_0,r)$*

Démonstration. **Voir[22]**. □

Proposition 1.5. *Soit (X,G) un espace métrique, alors pour tout $x_0 \in X$ et $r > 0$ on a :*

$$B_G(x_0,\frac{1}{3}r) \subseteq B_{d_G}(x_0,r) \subseteq B_G(x_0,r).$$

Par conséquent, la topologie G-métrique $\tau(G)$ coïncide avec la topologie métrique découlant de la d_G aussi bien qu 'isométriquement" distinctes.
Chaque espace G-métrique et topologiquement équivalant à un espace métrique, cela nous permet de transporter facilement de nombreux concepts et de résultats des espaces métriques dans le cadre de l'espace G-métrique.

1.5 La convergence et la continuité dans les espaces G-métriques

Définition 1.5.1. *Soit (X,G) un espace G-métrique, la suite $(x_n) \subseteq X$ et un point $x \in X$ est G-convergent vers x s'il converge vers x dans la topologie G-métrique $\tau(G)$.*

Définition 1.5.2. *Soit (X,G) un espace G-métrique et (x_n) une suite de point de x, un point $x \in X$ est dite limite de la suite (x_n), si $\lim_{n,m\to\infty} G(x,x_n,x_m) = 0$ et on dite que la suite (x_n) est G-convergente vers x.*
Ainsi, que si $(x_n \to x)$ dans un espace G-métrique, alors :
$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n,m \geq N$, telle que :

$$G(x,x_n,x_m) < \varepsilon.$$

Proposition 1.6. *[9] : Soit (X,G) un espace $G-$métrique, alors pour une suite $(x_n) \subset X$ et un point $x \in X$ les éléments suivants sont équivalents :*

1. *(x_n) est G-convergent vers x*
2. *$d_G(x_n,x) \to 0$, comme $n \to \infty$ (c'est à dire que (x_n) converge vers x par apport à la métrique d_G)*
3. *$G(x_n,x_n,x) \to 0$, comme $n \to \infty$*
4. *$G(x_n,x,x) \to 0$, comme $n \to \infty$*
5. *$G(x_m,x_n,x) \to 0$, comme $n,m \to \infty$.*

Démonstration. **Voir[22]** □

Définition 1.5.3. *Soit (X, G) un espace G-métrique, une suite (x_n) est dite G- Cauchy si :*
$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n, m, l \geq 0$ *telle que :*
$G(x_n, x_m, x_l) < 0$ *c'est-à-dire, si* $G(x_n, x_m, x_l) \to 0$ *comme* $n, m, l \to \infty$

Proposition 1.7. *([9]) : Si (X, G) est un espace G-métrique, alors les éléments suivantes sont équivalents.*

(1) La suite (x_n) est G-Cauchy

(2) $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n, m \geq N$ telle que : $G(x_n, x_m, x_m) < \varepsilon$

Définition 1.5.4. *([22]) : Soit $(X, G), (X', G')$ des espace G-métrique, une fonction $f : X \to X'$ et G-continue en un point $x_0 \in X$*

$$f^{-1}(B_{G'}(f(x_0, r)) \in \tau(G),$$

pour tout $r > 0$. On dite f est G-continue elle est G-continue en tout point de X, qui est continue comme fonction de X avec la topologie $\tau(G)$ à X' avec la topologie $\tau(G')$.

Puis que les topologies G-métriques sont des topologies métriques, nous avons :

Proposition 1.8. *Soit $(X, G), (X', G')$ des espaces G-métrique, alors une fonction $f : X \to X'$ est G-continue en un point $x \in X$ si et seulement si G-séquentiellement continue en x, c'est-à-dire que chaque fois que (x_n) est G-convergent vers x, nous avons $f(x_n)$ est G-convergent vers $f(x)$*

Proposition 1.9. *Soit (X, G) un espace G-métrique alors une fonction $G(x, y, z)$ est entièrement continue dans les trois variables.*

Démonstration. Supposons que (x_k), (y_m) et (z_n) sont G-convergents vers x, y et z respectivement, alors par (G_5) on a :

$$G(x, y, z) \leq G(y, y_m, y_m) + G(y_m, x, z)$$

$$G(z, x, y_m) \leq G(x, x_k, x_k) + G(x_k, y_m, z)$$

et

$$G(z, x_k, y_m) \leq G(z, z_n, z_n) + G(z_n, y_m, x_k)$$

alors

$$G(x, y, z) - G(x_k, y_m, z_n) \leq G(y, y_m, y_m) + G(x, x_k, x_k) + G(z, z_n, z_n)$$

de même

$$G(x_k, y_m, z_n) - G(x, y, z) \leq G(x_k, x, x) + G(y_m, y, y) + G(z, z_n, z_n)$$

Ensuite, combinant ceux-ci en utilisant (3) de proposition (1.1), nous avons :

$$|G(x_k, y_m, z_n) - G(x, y, z)| \leq 2(G(x, x_k, x_k) + G(y, y_m, y_m) + G(z, z_n, z_n)),$$

alors $G(x_k, y_m, z_n) \to G(x, y, z)$ comme $k, m, n \to \infty$ est le résultat suit par la proposition (1.8) □

1.6 Les contractions

Définition 1.6.1. *(**lipschitzienne**) : Soit (E, d) un espace métrique, une application $f : E \to E$ est dite lipschitzienne de rapport $k \geq 0$ si :*

$$\forall x, y \in E, d(f(x), f(y)) \leq kd(x, y)$$

k est dite constante de Lipschitz .
L'application lipschitzienne f est appelé :

(1) non expansive si $k \leq 1$

(2) contraction si $k < 1$

Remarque 1.6.1. *Une application lipschitzien est nécessairement continue.*

Définition 1.6.2. *(**Contraction**) : Soit (X, d) un espace métrique complet, une fonction $f : X \to X$ est appelée contraction s'il existe $k < 1$ telle que :*

$$\forall x, y \in X, d(f(x), f(y)) \leq kd(x, y)$$

Définition 1.6.3. *(**Contraction de Banach**) : Soit (X, G) un espace métrique complet et $T : X \to X$ une application de contraction, c'est-à-dire :*

$$\forall x, y \in X, d(Tx, Ty) \leq \alpha d(x, y)$$

et $\alpha \in [0, 1)$, Alors T admet un unique point fixe dans X.

Définition 1.6.4. *(**Contraction de Kannan**) : Soit (X, d) un métrique complet et $T : X \to X$ une application de contraction de Kannan, c'est à dire :*

$$\forall x, y \in X, d(Tx, Ty) \leq \lambda[d(x, Tx) + d(y, Ty)].$$

Où $\lambda \in [0, \frac{1}{2})$, alors T admet un unique point fixe dans X.

Définition 1.6.5. *(**Contraction enrichie**) :([12]) Soit $(X, \|.\|)$ une espace normé, et T est une auto- application linéaire sur X est appelée contraction enrichie s'il existe $b \in [0, \infty)$ et $\theta \in [0, b+1)$ telle que :*

$$\forall u, v \in X, \|b(u-v) + Tu - Tv\| \leq \theta \|u - v\|.$$

Dans ce cas l'application T est appelée une contraction enrichie en (b, θ).

Définition 1.6.6. *(**T-orbitaly**) Une application T définie sur un espace métrique (x, d) est dite orbitale continue en un point z dans X.*
si pour tout suite $\{x_n\} \subset O(x, T)$ (pour quelque $x \in X$), $x_n \to z$ comme $z \to \infty$ implique $Tx_n \to Tz$ comme $n \to \infty$.
clairement chaque application continue d'un espace métrique est orbitalement continue, mais pas l'inverse.

1.7 Théorème du point fixe dans espace partiellement ordonné

Définition 1.7.1. *([13]) : Soit (X, G) un espace G-métrique. Alors une fonction $\Omega : X^3 \to [0, \infty)$ est appelé un Ω-distance sur X, si les condition suivantes sont satisfaites :*
(a) $\Omega(x, y, z) \leq \Omega(x, a, a) + \Omega(a, y, z)$ $\forall x, y, z \in X$;
(b) $\forall x, y \in X, \Omega(x, y, .), \Omega(x, ., y) : X \to [0, \infty)$ sont semi-continues inférieures ;
(c) $\forall \varepsilon > 0$ il existe un $\delta > 0$ tel que $\Omega(x, a, a) \leq \delta$ et $\Omega(a, y, z) \leq \delta$ implique $G(x, y, z) \leq \varepsilon$.

Exemple 1.7.1. *Soit (X, d) un espace métrique et $G : X^3 \to [0, \infty)$ défini par :*

$$\forall x, y, z \in X, G(x, y, z) = \max\{d(x, y) + d(x, y) + d(x, y)\}.$$

Alors $\Omega = G$ est une Ω-distance sur X.

Exemple 1.7.2. *SoitX $= \mathbb{R}$ et considérons la G-métrique*

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R}, G(x, y, z) = \frac{1}{3}(|x-y| + |y-z| + |z-x|).$$

Alors $\Omega : \mathbb{R}^3 \to [0, \infty)$, défini par :

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R}, G(x, y, z) = \frac{1}{3}(|x-y| + |z-x|)$$

est une Ω-distance sur X.

Définition 1.7.2. *([16]) : Une fonction $\phi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ est appelée une fonction de distance ultra-altérante si ϕ est continue et $\phi(t) > 0$, pour tout $t > 0$.*

Définition 1.7.3. *([11]) : Une fonction $\psi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ est appelée distance altérante fonction si les propriétés suivantes sont satisfaites :*
(i) ψ est continue et croissante
(ii) $\psi(t) = 0$ si et seulement si $t = 0$

Définition 1.7.4. *([1]) : Une application $f : [0,\infty)^2 \to \mathbb{R}$ est appelée fonction de classe C si elle continue et satisfait axiomes suivants :*

(1) $f(s,t) \leq s$

(2) $f(s,t) = s$ implique que soit $s = 0$ ou $t = 0$, pour tout $s,t \in [0,\infty)$

Notez que pour certains f nous avons $f(0,0) = 0$. Nous désignons les fonctions de class C par $\mathcal{C}$.

Exemple 1.7.3. *Deux fonction suivantes $f : [0,\infty)^2 \to \mathbb{R}$ sont des éléments de $\mathcal{C}$:*

1 $f(s,t) = s - t, f(s,t) = s \Rightarrow t = 0$

2 $f(s,t) = mt, 0 < m < 1, f(s,t) = s \Rightarrow s = 0$

Définition 1.7.5. *Soit $(X,\leq)$ est un espace partiellement ordonné et $T : X \to X$, on dit que T est non décroissant si pour $x,y \in X$*

$$x \leq y \Rightarrow T(x) \leq T(y)$$

Théorème 1.7.1. *Soit $(X,\leq)$ un ensemble partiellement ordonné, Supposons qu'il existe un G-métrique dans X, (X,G) est un espace G-métrique complet, Ω-distance sur X et T est un application croissante de l'intérieur.*
Supposons qu'il existe un $r \in [0,\infty)$ telle que :

$$\Omega(Tx, T^2y, Tz) \leq r\Omega(x, Tx, w)$$

pour tout $x \leq Tx$ et $w \in X$. Supposons que l'une des conditions suivantes sont vérifiait :
(i) Si $y \neq Ty$, alors :

$$\forall x \in X, \inf\{\Omega(x,y,x) + \Omega(x,y,Tx) + \Omega(x,Tx,y) : x \leq Tx\} > 0$$

pour tout $y \in X$
(ii) Si $\{x_n\}$ et $\{Tx_n\}$ convergent vers y et $\Omega(v,w,.) = \Omega(w,v,.)$ pour tout $u,v \in X$. Alors $y = Ty$
(iii) T est continue et $\Omega(v,w,.) = \Omega(w,v,.)$ pour toutu, $v \in X$

Définition 1.7.6. *Soit $(x, G, \leq)$ un espace G-métrique partiellement ordonné.*
On dit que X est régulier si et seulement si l'hypothèse suivante est vérifier : si z_n est une suite croissante de X avec respect pour $\leq$ tell que $z_n \to z \in X$ comme $n \to \infty$, alors $z_n \leq z$ tout $n \in N$.

1.7.1 L'existence et unicité de la fonction de Green

Théorème 1.7.2. *[4] : Supposons que le problème homogène $(H)-(CB)_h$ n'admet pas de solution non triviale. Alors, il existe une (et une seule) fonction G ne dépendant pas de f, et dite fonction de Green telle que, pour toute fonction f, la solution y de problème non homogène $(NH)-(CB)_h$ s'écrit de manière unique sous la forme :*

$$y(t) = \int_a^b G(t,s) f(s) ds.$$

Chapitre 2

Quelques théorèmes de point fixe

2.1 Principe de contraction de Banach

Soit (X,d) un espace métrique. il ya cinquante ans, en 1971,Ćirić, Reich et Rus ont établé indépendamment un théorème du point fixe pour les applications $T : X \to X$ satisfaisant la contraction suivante :

$$\forall x,y \in X, d(Tx,Ty) \leq ad(x,y) + b\left[d(x,Tx) + d(y,Ty)\right] \tag{2.1.0.1}$$

où $a,b \geq 0$ et $a+2b<1$.
On remarque que $b=0$ la condition (2.1.0.1) se réduit à la condition de contraction de Banach

$$\forall x,y \in X, d(Tx,Ty) \leq ad(x,y) \tag{2.1.0.2}$$

Où $a \in [0,1)$, tandis que pour $a=0$ la condition se réduit à la condition (2.1.0.1) de contraction de Kannan

$$\forall x,y \in X, d(Tx,Ty) \leq b\left[d(x,Tx) + d(y,Ty)\right] \tag{2.1.0.3}$$

et $b \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$.

2.2 Ćirić-Reich-Rus contraction-enrichie dans espace de Banach

Définition 2.2.1. ***([18])*** *: Soit $(X, \|.\|)$ est un espace linéaire normé, $T : X \to X$ est une application et la contraction enrichie en (k,a) s'il existe $k \in [0,\infty)$ et*

$a \in [0, k+1)$ *telle que :*

$$\forall x, y \in X, \|k(x-y) + Tx - Ty\| \leq a\|x-y\| \tag{2.2.0.4}$$

Évidemment, toute contraction de Banach satisfait (2.2.0.4) avec $k = 0$, représente une généralisation efficace du théorème de point fixe de Banach.
Dans la suite, on note $Fix(T)$ l'ensemble de tout le point fixe
$Fix(T) = \{x \in X, T(x) = x\}$

Exemple 2.2.1. *1) Toute contraction T avec une contractante de contraction c est enrichie en $(0, k)$ contraction , c'est-à-dire que T satisfait (2) avec $k = 0$ et $a = c$.*
2) Soit $x \in [0,1]$ muni de la norme usuelle et soit qui définit par :
$T : X \to X$, $T(x) = 1 - x$, pour tout $x \in [0,1]$,
T est expansive (c'est une isométrie), n'est pas une contraction mais T est une contraction enrichie. En effet si T était une contraction alors, d'après (2.1.0.2) il existe $c \in [0,1)$ telle que :

$$\forall x, y \in X, |x-y| \leq c|x-y|. \tag{2.2.0.5}$$

Ce qui, Pour tout $x \neq y$, conduit à la contraction $0 \leq a < 1$, par contre la condition de contraction enrichie (2.2.0.4) est dans le cas équivalent à :

$$\forall x, y \in [0,1], |(k-1)(x-y)| \leq a|x-y| \tag{2.2.0.6}$$

avec $a \in [0, k+1]$, pour l'inégalité précédente est avec vrai si l'on choisit $0 < k < 1$ et $a = 1-k$ Ainsi, pour tout $k \in (0,1)$, T est une contraction enrichie en $(k, k+1)$.
Notez également que $Fix(T) = \left\{\frac{1}{2}\right\}$

Remarque 2.2.1. ***([2])*** *On remarque que pour T dans l'exemple (2.2.1), l'itération de Picard $\{x_n\}$ associé à T, c'est-à-dire la suite $x_{n+1} = 1 - x_n, n \geq 0$ ne pas de convergence pour estimation initiale x_0 différente de $(\frac{1}{2})$, L'unique point fixe vers T, cela nous suggère que pour approximer les points fixes de Contraction enrichies, nous avons besoin de schémas itératifs à point fixe plus élaborés, comme la méthode itérative de Krasnoselskij, pour laquelle nous prouvons dans le suivant un théorème de forte convergence dans la classe des contractions enrichies.*

Théorème 2.2.1. ***([18])*** *: Soit $(X, \|.\|)$ est un espace de Banach et $T : X \to X$ une contraction enrichie en (k, a). Alors :*
(i) $Fix(T) = \{p\}$, pour certain $p \in X$
(ii) Il existe $\lambda \in (0,1]$, telle que la méthode itérative $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ donnée par :

$$x_{n+1} = (1-\lambda)x_n + \lambda T x_n, n \geq 0. \tag{2.2.0.7}$$

Converge vers p pour tout $x_0 \in X$

(iii) L'estimation suivant s'applique :

$$\|x_{n+i-1} - p\| \leq \frac{c^i}{1-c}\|x_n - x_{n-1}\|, n = 1,2,3,\cdots; i = 0,1,2\cdots \tag{2.2.0.8}$$

et $c = \dfrac{a}{k+1}$

Démonstration. **([2])** : Nous divisons la preuve en deux cas différents.

Cas1 : $k > 0$. Dans ce cas note $\lambda = \dfrac{1}{k+1}$, de toute évidence $0 < \lambda < 1$ et la condition constructive enrichie(2.2.0.4) devient :

$$\forall x, y \in X, \|(\frac{1}{\lambda} - 1)(x-y) + Tx - Ty\| \leq a\|x-y\|,$$

Qui peut s'écrire sous forme équivalente comme :

$$\forall x, y \in X, \|T_\lambda x - T_\lambda y\| \leq c\|x-y\|. \tag{2.2.0.9}$$

Ou nous avons noté : $c = \lambda a$

$$\forall x \in X, T_\lambda(x) = (1-\lambda)x + \lambda T(x) \tag{2.2.0.10}$$

Puisque $a \in (0, k+1)$, il s'ensuit que $c \in (0,1)$ et donc l'inégalité (2.2.0.10) montre, T_λ une c- contraction.

Notons ou passage que T et T_λ sont liés par la propriété importante suivante :

$$Fix(T_\lambda) = Fix(T) \tag{2.2.0.11}$$

Au vu de(2.2.0.10), le processus itératif de Krasnoselskij $\{x_n\}_{n\to 0}^{\infty}$ défini par (2.2.0.9) est exactement l'itération de Picard associée à T_λ, c'est-à-dire :

$$x_{n+1} = T_\lambda x_n, n \geq 0 \tag{2.2.0.12}$$

Prendre $x = x_n$ et $y = x_{n-1}$, dans (2.2.0.9) pour obtenir :

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leq c\|x_n - x_{n-1}\|, n \geq 1. \tag{2.2.0.13}$$

On (2.2.0.13) obtient systématiques les deux estimations suivant :

$$\|x_{n+m} - x_n\| \leq c^n \frac{1-c^m}{1-c}\|x_1 - x_0\|, n \geq 0, m \geq 1. \tag{2.2.0.14}$$

et

$$\|x_{n+m} - x_n\| \leq c.\frac{1-c^m}{1-c}\|x_n - x_{n-1}\|, n \geq 0, m \geq 1. \quad (2.2.0.15)$$

Maintenant, par (2.2.0.14) il s'ensuit que $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ est une suite de Cauchy et par conséquent. Elle convergente dans l'espace de Banach $(X, \|\|)$. Notons :

$$p = \lim_{n\to\infty} x_n. \quad (2.2.0.16)$$

Comme $n \to \infty$ dans (2.2.0.12) et on utilisant la continue de T_λ, on a immédiatement obtenir :

$$p = T_\lambda p$$

C'est-à-dire $p \in Fix(T_\lambda)$.
En suite, nous montrons que p est l'unique point fixe T_λ.
Suppose que $q \neq p$ est un autre point fixe de T_λ(2.2.0.9)

$$0 < |p - q| \leq c|p - q| < |p - q|$$

un contraction.
D'où $Fix(T_\lambda) = \{p\}$ et puisque, d'après (2.2.0.12), $Fix(T) = Fix(T_\lambda)$, l'affirmation (i) est prouvée :
La conclusion (ii) d'école de (2.2.0.16) Pour prouver (iii), ou $m \to \infty$ dans (2.2.0.14)(2.2.0.15) pour obtenir :

$$\|x_n - p\| \leq \frac{c^n}{1-c}\|x_1 - x_0\|, n \geq 1. \quad (2.2.0.17)$$

et

$$\|x_n - p\| \leq \frac{c}{1-c}\|x_n - x_{n-1}\|, n \geq 1. \quad (2.2.0.18)$$

Maintenant on peut fusionner (2.2.0.17) et (2.2.0.18), pour obtenir l'estimation d'erreur unificatrice.
Cas.2. $k = 0$. Dans ce cas, $\lambda = 1, c = a$ et on procède comme suit dans le cas (2.2), mais avec $T(= T_1)$ ou lieu de T_λ, lorsque l'itération de KasnoselsKij (2.2.0.7) réduit en fait à la simple itération de Picard associée à T :

$$x_{n+1} = Tx_n, n \geq 0$$

□

Définition 2.2.2. *([18]) : Soit $(X, \|.\|)$ est un espace linéaire normé,*
$T : X \to X$ est Une application et la contraction enrichie de Kannan (k, b) s'il existe $k \in$

$[0, \infty)$ *et* $b \in [0, \frac{1}{2})$ *telle que :*

$$\forall x, y \in X, \|k(x-y) + Tx - Ty\| \leq b\|x - Tx\| + \|y - Ty\|. \tag{2.2.0.19}$$

Exemple 2.2.2. *: 1) Toute application de Kannan est une application de Kannan enrichie (0, b), c'est-à-dire qu'il satisfais (2.2.0.19) avec* $k = 0$
2)Soit $x \in [0, 1]$ *muni de la norme usuelle et* $T : X \to X$ *être défini par :*
$T(x) = 1 - x$, *pour tout* $x \in [0, 1]$. *Il est facile de vérifier que* T *est non expansif (C'est une isométrie),* T *n'est pas une application de Kannan mais* T *est une application de Kannan-enrichie. En effet, si* T *était un Kannan application.Alors il existerait un* $b \in [0, \frac{1}{2})$ *tel que :*

$$\forall x, y \in [0, 1], |x - y| \leq b[|2x - 1| + |2y - 1|]$$

Ce qui, pour $x = \frac{1}{2}$ *et* $y = 1$, *donne la contradiction* $1 \leq 2b < 1$. *La condition de application de Kannan enrichie (2.2.0.19) est dans ce cas équivalente à :*

$$\forall x, y \in [0, 1], |(k-1) + (x - y)| \leq b[|2x - 1| + |2y - 1|] \tag{2.2.0.20}$$

Qui, complet tenu du fait que : $2|x - y| \leq |2x - 1| + |2y - 1|$, *est vrai si l'on choisit* $|k - 1| = 2b$, *pour toute* $b \in [0, \frac{1}{2})$. *Ceci n'est possible que pour* $k < 1$, *ce qui donne* $k = 1 - 2b > 0$. *Donc pour tout* $b \in [0, \frac{1}{2})$, T *est une application de Kannan* $(1 - 2b, b)$*-enrichie et* $Fix(T) = \{\frac{1}{2}\}$.

Remarque 2.2.2. *([3]) On remarque que pour* T *dans l'exemple (2.2.2) itération Picard* x_n *associé à* T, *c'est-à-dire* $x_{n+1} = 1 - x_n, n \geq 0$, *ne converge pas pour tout* x_0 *différent de* $\frac{1}{2}$,*le point fixe unique à* T *Ce la nous suggère que, pour approximer des points fixes d'enrichissement.*
Les applications de kannan nécessitent des schémas itératifs en virgule fixe plus élaborés. Le résultat suivant fournit un théorème de convergence pour la méthode itérative de Krasnosels-Kij Dans la classe des applications de Kannan enrichie.

Théorème 2.2.2. *([18]) Soit* $(X, \|.\|)$ *un espace de Banach et* $T : X \to X$ *est une application de Kannan-enrichie en* (k, b) *par :*
(i) $Fix(T) = \{p\}$, *pour certain* $p \in X$
(ii) Il existe $\lambda \in (0, 1]$ *telle que la méthode itérative* $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$, *donnée par :*

$$x_{n+1} = (1 - \lambda)x_n + \lambda T x_n, n \geq 0. \tag{2.2.0.21}$$

Converge vers p, pour tout $x_0 \in X$

(iii) L'estimation suivant s'applique :

$$\|x_{n+i} - p\| \leq \frac{\delta^i}{1-\delta}\|x_n - x_{n-1}\|, n = 0, 1, 2, 3, \cdots; i = 1, 2, 3, \cdots \quad (2.2.0.22)$$

et $\delta = \dfrac{b}{1-b}$

Démonstration. **([3])** : Pour tout $\lambda \in (0,1)$, condition l'application moyenne T_λ donnée par :

$$\forall x, \in X, T_\lambda(x) = (1-\lambda)x + \lambda T(x) \quad (2.2.0.23)$$

Il est facile de prouver que T_λ posse de la propriété importante suivante :

$$Fix(T_\lambda) = Fix(T)$$

Si $k > 0$ dans(2.2.0.19), alors Posons $\lambda = \dfrac{1}{k+1}$, évidemment on $0 < \lambda < 1$ et ainsi la condition contractive (2.2.0.19) devient Entant que :

$$\forall x, y \in X, \|(\frac{1}{\lambda} - 1)(x-y) + T(x) - T(y)\| \leq b\left[\|x - T(x)\| + \|y - T(y)\|\right]$$

Qui peut s'écrire sous une forme équivalente comme :

$$\forall x, y \in X, \|T_\lambda(x) - T_\lambda(y)\| \leq b\left[\|x - T_\lambda(x)\| + \|y - T_\lambda(y)\|\right] \quad (2.2.0.24)$$

L'inégalité ci-dessus montre T_λ est une application de Kannan. D'âpres (2.2.0.19), le processeur itérative $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$, défini par (2.2.0.21), est l'itération de Picard associé a T_λ, c'est-à-dire :

$$x_{n+1} = T_\lambda x_n, n \geq 0.$$

Prendre $x = x_n$ et $y = x_{n-1}$ dans (2.2.0.24) pour obtenir :

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leq b\left[\|x - x_{n+1}\| + \|x_n - x_{n-1}\|\right]$$

et

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leq \frac{b}{1-b}\|x_n - x_{n-1}\|, n \geq 1.$$

Puis $0 < b < \dfrac{1}{2}$, en notant $\delta = \dfrac{b}{1-b}$, $0 < \delta < 1$ et donc la suite $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ satisfais :

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leq \delta\|x_n - x_{n-1}\|, n \geq 0. \quad (2.2.0.25)$$

Par (2.2.0.25), on obtient symétriquement les deux estimations suivantes :

$$\|x_{n+m} - x_n\| \leq \delta^n \frac{1-\delta^m}{1-\delta}\|x_1 - x_0\|, n \geq 0, m \geq 1. \tag{2.2.0.26}$$

et

$$\|x_{n+m} - x_n\| \leq \delta \frac{1-\delta^m}{1-\delta}\|x_n - x_{n-1}\|, n \geq 1, m \geq 1 \tag{2.2.0.27}$$

Maintenant par (2.2.0.24) s'ensuit que $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ est une de Cauchy et donc est convergente dans espace de Banach $(X, \|.\|)$ notons :

$$p = \lim_{n\to\infty} x_n \tag{2.2.0.28}$$

Nous montrons d'abord que p est un point fixe de T_λ. Nous avons :

$$\|p - T_\lambda p\| \leq \|p - x_{n+1}\| + \|x_{n+1} - T_\lambda p\| = \|x_{n+1} - p\| + \|T_\lambda x_n - T_\lambda p\| \tag{2.2.0.29}$$

D'après (2.2.0.24) il résulte que :

$$\|T_\lambda x_n - T_\lambda p\| \leq b\left[\|x_n - T_\lambda x_n\| + \|p - T_\lambda p\|\right],$$

Donc par (2.2.0.29) on obtient :

$$\|p - T_\lambda p\| \leq \frac{1}{1-b}\|x_{n+1} - p\| + \delta\|x_{n+1} - x_n\|, n \geq 0 \tag{2.2.0.30}$$

Comme $n \to \infty$ dans (2.2.0.30) on obtient $\|p - T_\lambda p\| = 0$ C'est-à-dire :
$p = T_\lambda p$.
Donc $p \in Fix(T_\lambda)$.
Nous montrons que p est l'unique point fixe de T_λ.
Supposons que $q \neq p$ est un autre point fixe de T_λ, puis par (2.2.2)

$$0 < \|p - q\| < b.0$$

Une contraction.
donc $Fix(T_\lambda) = \{p\}$ et puisque :
$Fix(T) = Fix(T_\lambda)$, l'affirmation (i) est prouvée. La conclusion (ii) suit maintenant par (2.2.0.28) Pour prouver, (iii) on laisse $m \to \infty$ dans (2.2.0.26) et (2.2.0.28) pour obtenir :

$$\|x_n - p\| \leq \frac{\delta^n}{1-\delta}\|x_1 - x_0\|, n \geq 1 \tag{2.2.0.31}$$

et

$$\|x_n - p\| \leq \frac{\delta}{1-\delta}\|x_1 - x_0\|, n \geq 1 \tag{2.2.0.32}$$

Respectivement, puis nous fusionnons (2.2.0.31) et (2.2.0.32) pour obtenir l'erreur unificatrice estimations (2.2.0.22).

Le cas restant $k = 0$ est similaire à $k \neq 0$ avec la seule différence que dans ce cas $\lambda = 1$ et donc on Travaille avec $T(= T_1)$, quand l'itération de KasnoselsKij (2.2.0.21) se réduit à l'itération de Picard.

$$x_{n+1} = Tx_n, n \geq 0$$

$\square$

Définition 2.2.3. *([18]) : Soit $(X, \|.\|)$ un espace normé linéaire, $T : X \to X$ est une application et la contraction de Ćirić-Reich-Rus enrichie en (k, a, b), s'il existe $k \in [0, \infty)$ et $a, b \geq 0$, satisfait $a + 2b < 1$ telle que :*

$$\forall x, y \in X, \|k(x-y) + T(x) - T(y)\| \leq a\|x-y\| + b\,[\|x - T(x)\| + \|y - T(y)\|] \tag{2.2.0.33}$$

Évidemment, toute la contraction Ćirić-Reich-Rus satisfait (2.2.0.33) avec $k = 0$, aussi
Si b=0 alors partir on obtient (2.2.0.33) la condition de contraction (2.2.0.4) satisfait par un Contraction enrichie, tandis que :
Si $a = 0$ de (2.2.0.33), nous obtenons la contraction Kannan enrichie Condition (2.2.0.19). En considérant une application T sur X, alors pour tout $\lambda \in (0, 1]$, la soi-disant moyenne application T_λ donnée par :

$$\forall x \in X, T_\lambda(x) = (1-\lambda)x + \lambda Tx, \tag{2.2.0.34}$$

A la propriété que $Fix(T_\lambda) = Fix(T)$.

Théorème 2.2.3. *([18]) : Soit $(X, \|.\|)$ un espace de Banach et $T : X \to X$ Ćirić-Reich-enrichie contraction russe en (k, a, b). Alors :*
(i) $Fix(T) = \{p\}$,pour un certain $p \in X$;
(ii) Il existe $\lambda \in (0, 1]$ telle que la méthode itérative, $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ donné par :

$$x_{n+1} = (1-\lambda)x_n + \lambda Tx_n, n \geq 0 \tag{2.2.0.35}$$

converge vers p, pour tout $x_0 \in X$;
(iii) L'estimation suivant s'applique :

$$\|x_{n+i-1} - p\| \leq \frac{\delta^i}{1-\delta}\|x_n - x_{n-1}\|, n = 0, 1, 2, 3 \cdots ; i = 1, 2, \cdots \tag{2.2.0.36}$$

Où $\delta = \dfrac{1-\delta}{1-\delta}$

Remarque 2.2.3. *([18]) : Le théorème (2.2.3) inclut comme cas particuliers le théorème(2.2.1) et théorème (2.2.2), qui sont obtenus à partir du théorème (2.2.3), pour $b = 0$ et $a = 0$, respectivement. Un résultat de point fixe plus général pleut être obtenu en laissant les coefficients a et b dans la condition de contraction (2.2.0.33) de dépendre de x, y comme dans le théorème (2.2.5)*

Démonstration. **([18])** : On travaille dans le cas où $k > 0$ (le cas $k = 0$ est immédiat) et considère l'application moyenne T_λ par (2.2.0.34) pour $k = \dfrac{1}{\lambda - 1} < 1$ Dans ce cas on que $k = \dfrac{1}{\lambda - 1}$, et dans condition contractive (2.2.0.33) devient. En tant que :

$$\forall x, y \in X, \|(\frac{1}{\lambda} - 1)(x - y) + T(x) - T(y)\| \leq a\|x - y\| + b\,[\|x - T(x)\| + \|y - T(y)\|]$$

Qui peut s'écrire de façon équivalente :

$$\forall x, y \in X, \|T_\lambda(x) + T_\lambda(y)\| \leq a\lambda\|x - y\| + b\,[\|x - T_\lambda(x)\| + \|y - T_\lambda(y)\|]$$

et par ce que $a\lambda \leq a$, cela implique que :

$$\forall x, y \in X, \|T_\lambda(x) - T_\lambda(y)\| \leq a\|x - y\| + b\,[\|x - T_\lambda(x)\| + \|y - T_\lambda(y)\|]. \tag{2.2.0.37}$$

Ce qui signifie qu'est T_λ est un Ćirić application des conditions c-Reich -Rus. En utilisant l'inégalité triangulaire dans (2.2.0.37), nous obtenons que T_λ satisfais :

$$\forall x, y \in X, \|T_\lambda(x) - T_\lambda(y)\| \leq \delta\|x - y\| + 2\delta\|y - T(y)\| \tag{2.2.0.38}$$

Où $\delta = \dfrac{a + b}{1 - b}$<1.

Concéderons le processus itérative $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ défini par (2.2.0.35), qui est en fait le Picard, itération associe à T_λ c'est-à-dire :

$$x_{n+1} = T_\lambda x_n, n \geq 0. \tag{2.2.0.39}$$

Et posons $x = x_{n-1}$ et $y = x_n$ dans (2.2.0.38) pour obtenir :

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leq \delta\|x_n - x_{n+1}\|, n \geq 1 \tag{2.2.0.40}$$

Par (2.2.0.40) systématique les deux estimations suivant :

$$\|x_{n+m} - x_n\| \leq \delta^n \frac{1 - \delta^m}{1 - \delta}\|x_1 - x_0\|, n \geq 0, m \geq 1 \tag{2.2.0.41}$$

et

$$\|x_{n+m}-x_n\| \leq \delta\frac{1-\delta^m}{1-\delta}\|x_n-x_{n+1}\|, n\geq 1, m\geq 1 \tag{2.2.0.42}$$

Maintenant, par (2.2.0.41) il s'ensuit que, $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ est une suite de Cauchy et donc convergente en l'espace de Banach $(X, \|.\|)$, notons :

$$p = \lim_{n\to\infty} x_n, \tag{2.2.0.43}$$

Nous montrons d'abord que p est un point fixe de T_λ, Notons :

$$\|p-T_\lambda(x)\| \leq \|p-x_{n+1}\|+\|x_{n+1}-T_\lambda p\| = \|x_{n+1}-p\|+\|T_\lambda x_n - T_\lambda p\|. \tag{2.2.0.44}$$

Par (2.2.0.38)on déduit que :

$$\|T_\lambda x_n - T_\lambda p\| \leq \delta\|x_n-p\|+2\delta\|p-x_{n+1}\|, n\geq 0$$

et donc, par(2.2.0.44)on obtient :

$$\|p-T_\lambda(p)-T_\lambda(p)\| \leq (2\delta+1)\|x_n-p\|+\delta\|x_n-p\|, n\geq 0 \tag{2.2.0.45}$$

Maintenant, en laisse $n\to\infty$ dans (2.2.0.45) on obtient $\|p-T_\lambda(p)\| = 0$, Ć'est-à-dire $p = T_\lambda(p)$. Donc $p\in Fix(T_\lambda)$.
Maintenant pour prouve que p est l'unique point fixe de T_λ, on note que par (2.2.0.37), de même que nous avons obtenu (2.2.0.38)

$$\forall x,y\in X, \|T_\lambda(x)-T_\lambda(y)\| \leq \delta\|x-y\|+2\delta\|x-T_\lambda(x)\| \tag{2.2.0.46}$$

D'où $\delta = \dfrac{a+b}{1-b}$
Suppose que $q\neq p$ est un autre point fixe de T_λ. Alors, d'après (2.2.0.46) avec $x = p$ et $y = q$ il suit

$$0 < \|p-q\| \leq \delta\|x-y\| < \|p-q\|$$

Une contraction . Donc $Fix(T_\lambda)$= $\{p\}$ et puis que $Fix(T) = Fix(T_\lambda)$,(i) est démontrer. La conclusion (ii) découle de (2.2.0.43), pour prouver (iii), on laisse $m\to\infty$ dans (2.2.0.41) et (2.2.0.42) pour obtenu :

$$\|x_n-p\| \leq \frac{\delta^n}{1-\delta}\|x_1-x_0\|, n>1 \tag{2.2.0.47}$$

et

$$\|x_n - p\| \leq \frac{\delta}{1-\delta}\|x_n - x_{n-1}\|, n > 1. \tag{2.2.0.48}$$

Respectivement, puisque nous fusionnons (2.2.0.47) et (2.2.0.48) pour obtenir l'estimation d'erreur unificatrice (2.2.0.36) □

Définition 2.2.4. *Soit $(X, \|.\|)$ un espace normé linéaire,$T : X \to X$ application et une généralisée contraction Ćirić-Reich- Rus enrichie en (k, a, b), pour tout $x, y \in X$ il existe $k \in [0, \infty)$ et la fonction positive $a, b : X^2 \to [0, \infty)$ vérifiant :*

$$\sup_{x,y\in X} (a(x, y) + 2b(x, y)) = \theta < 1 \tag{2.2.0.49}$$

telle que :

$$\forall x, y \in X, \|k(x-y) + T(x) - T(y)\| \leq a(x-y)\|x-y\| + b(x-y)\left[\|x - T(x)\| + \|y - T(y)\|\right] \tag{2.2.0.50}$$

Théorème 2.2.4. *([18]) : Soit $(X, \|.\|)$ un espace de Banach et $T : X \to X$, un généralisé contraction (k, a, b)-enrichie circulaire-Reich -Rus. Alors :*
(i) $Fix(T) = \{p\}$, pour un certain $p \in X$
(ii) Il existe $\lambda \in (0, 1]$ telle que la méthode itérative $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$, donnée par :

$$x_{n+1} = (1-\lambda)x_n + \lambda T x_n, n \geq 0$$

Converge vers p, pour tout $x_0 \in X$
(iii) L'estimation suivante s'applique :

$$\|x_{n+i+1} - p\| \leq \frac{\theta^i}{1-\theta}\|x_n - x_{n-1}\|, n = 0, 1, 2, \cdots ; i = 1, 2, \cdots$$

De manière similaire à la preuve du théorème (2.2.3), on peut prouver une variante locale du théorème (2.2.4)

Théorème 2.2.5. *([18]) : Soit $(X, \|.\|)$ un espace de Banach et $x \in X$. Notons :*

$$B = B(\overline{x}, r) = \{x \in X, \|x - \overline{x}\| \leq r\}, r > 0,$$

et $T : B \to X$ une généralisée contraction enrichie Ćirić-Reich-Rus (k, a, b) qui satisfait les conditions :
$\|\overline{x} - T\overline{x}\| \leq (1-\theta)r$
(i) T admet un unique point fixe $p \in B$.

(ii) il existe $\lambda \in (0,1]$ *telle que la méthode itérative* $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$*,donnée par :*

$$x_{n+1} = (1-\lambda)x_n + \lambda T x_n, n \geq 0.$$

converge vers p*, pour tout* $x_0 \in X$*.*

(iii) L'estimation suivante s'applique :

$$\|x_{n+i+1} - p\| \leq \frac{\theta^i}{1-\theta}\|x_n - x_{n-1}\|, n = 0,1,2,3\cdots; i = 1,2,\cdots$$

où $\theta = \sup_{x,y\in X}(a(x,y) + 2b(x,y))$

2.3 Théorème du point fixe de Ćirić

Définition 2.3.1. *(**Quasi-contraction**) **([8])** : Soit* T *une application d'une espace métrique* X *dans lui-même,* $A \subset X$*,* $\delta(A) = \sup\{d(a,b) : a,b \in A\}$ *et pour chaque* $x \in X$*, soit*

$$O(x,n) = \{x, Tx, \cdots, T^n x\}, n = 1,2,\cdots$$

$$O(x,\infty) = \{x, Tx, \cdots\}$$

Un espace on dit que X est T-Orbitally Achevée, si chaque suite de Cauchy qui continue en $O(x,\infty)$ *pour certains* $x \in X$ *converge dans X.*

Théorème 2.3.1. *[17] : Soit* (X,d) *un espace métrique et* $T : X \to X$ *un plan de telle que :*

1. *X est T-Orbitally complète, pour chaque* $x \in X$*, toute suite de Cauchy dans* $\{x, Tx, \cdots, T^n x\}$ *converge en X.*
2. *il existe une constante q,* $0 \leqslant q < 1$ *avec :*

$$\forall x,y \in X, d(Tx,Ty) \leqslant q \max\{d(x,Tx), d(y,Ty), d(x,Ty), d(y,Tx)\}$$

ensuite nous avons :

1. *T a un unique point fixe u in X.*
2. $\lim T^n x = u$
3. $d(T^n, u) \leqslant \dfrac{q^n}{1-q} d(x,Tx)$

pour tout $x \in X$*.*

2.4 Les points fixes communs dans les espaces G-métriques :

Théorème 2.4.1. *[9] : Soit (X,G) est un espace G-métrique complet et $T : X \to X$ une application satisfaisant la condition suivante :*

$$\forall x,y,z \in X, G(Tx,Ty,Tz) \leq kG(x,y,z) \tag{2.4.0.51}$$

Telle que $k \in [0,1)$ alors il existe unique point fixe.

Lemme 2.4.1. *([9]) Par le rectangle d'inégalité $(G5)$ avec symétrie on à :*

$$G(x,y,z) = G(y,y,x) \leq G(y,x,x) + G(x,y,x) = 2G(y,x,x) \tag{2.4.0.52}$$

Théorème 2.4.2. *([9]) : Soit (X,G) est un espace métrique complet et $T : X \to X$ une application satisfaisant la condition suivante :*

$$\forall x,y \in X, G(Tx,Ty,Ty) \leq kG(x,y,y). \tag{2.4.0.53}$$

Telle que $k \in [0,1)$ alors il existe unique point fixe.

Démonstration. [9] Soit $x_n \in X$ un point arbitraire et définissons la suite (x_n) par $x_n = T^n(x_0)$ par (2.4.0.53) on à :

$$G(x_n,x_{n+1},x_{n+1}) \leq kG(x_{n-1},x_n,x_n) \tag{2.4.0.54}$$

En continuant dans le même argument nous obtiendrons :

$$G(x_n,x_{n+1},x_{n+1}) \leq k^n G(x_0,x_1,x_1) \tag{2.4.0.55}$$

De plus pour tout $n,m \in \mathbb{N}, n < m$ on par inégalité rectangle que :

$$\begin{aligned} G(x_n,x_m,x_m) &\leq G(x_n,x_{n+1},x_{n+1}) + G(x_{n+1},x_{n+2},x_{n+2}) + G(x_{n+2},x_{n+3},x_{n+3}) + \cdots \\ &+G(x_{m-1},x_m,x_m) \\ &\leq (k^n + k^{n+1} + k^{n+2} + \cdots + k^{m-1})G(x_0,x_1,x_1) \\ &\leq \frac{k^n}{1-k} G(x_0,x_1,x_1) \end{aligned} \tag{2.4.0.56}$$

et donc $\lim G(x_n,x_m,x_m) = 0$ comme $n,m \to +\infty$ donc (x_n) est G- suite de Cauchy, en raison de la complétude de (X,G), il existe $u \in X$ tel que (x_n) est G-convergent vers u, Supposons que $Tu \neq u$ ensuite :

$$G(x_n,Tu,Tu) \leq G(x_{n-1},u,u) \tag{2.4.0.57}$$

En prenant la limite comme $n \to +\infty$, et utilisant le fait que la fonction G est continue, ensuite :

$$G(u, Tu, Tu) \leq kG(u, u, u) \tag{2.4.0.58}$$

Cette contradiction implique que $u = Tu$ prouver l'unicité.
Supposons que $u \neq v$ sais que $Tv = v$, et utilise le lemme (2.4.1), alors :

$$G(u, u, v) = G(Tu, Tu, Tv) \leq kG(u, Tu, v) = kG(u, u, v) \tag{2.4.0.59}$$

Ce qui implique que $u = v$. □

Remarque 2.4.1. *La condition (2.4.0.51) implique la condition (2.4.0.53).le converse n'est vrai que si $k \in [0, \frac{1}{2})$.*

Exemple 2.4.1. *Soit $X = [0, +\infty)$ et*

$$G(x, y, z) = \begin{cases} 0 & si x = y = z \\ \max\{x, y, z\}, & autrement \end{cases}$$

Soit une G-métrique sur X définie $T : X \to X$ par $Tx = \dfrac{1}{7}x$
Alors la condition du théorème (2.4.2) est vérifié, en fait :

$$G(Tx, Ty, Ty) = \frac{1}{7}\max\{x, y\}$$

et

$$G(x, y, y) = \max\{x, y\}$$

on à :

$$\begin{aligned} G(Tx, Ty, Ty) &= \frac{1}{7}\max\{x, y\} \\ &= G(x, y, y) = \max\{x, y\} \\ &\leq \frac{1}{6}G(x, y, y) \end{aligned}$$

donc

$$G(Tx, Ty, Ty) \leq \frac{1}{6}G(x, y, y)$$

C'est-à-dire que les conditions du théorème (2.4.2) sont valable pour cet exemple.

Corollaire 2.4.1. *Soit (X, G) un espace G- métrique complet et $T : X \to X$ une application* *vérifiant la condition suivante :*

$$\forall x,y,z \in X, G(Tx,Ty,Tz) \leq a(x,Tx,z) + b(x,Tx,y) \tag{2.4.0.60}$$

Où $0 \leq a+b < 1$, alors T a un unique point fixe.

Théorème 2.4.3. *Soit (X,G) un espace G-métrique complet et $T : X \to X$ une application vérifiant la condition suivante : $\forall x,y,z \in X$*

$$G(Tx,Ty,T^2y) \leq aG(x,Tx,T^2x) + bG(y,Ty,T^2y) + cG(x,Tx,Ty) + dG(y,Ty,T^3x) \tag{2.4.0.61}$$

, où $0 \leq a+b+c+d < 1$. Alors T a un unique point fixe.

Démonstration. Prendre $x_0 \in X$ on construit la suite $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ des points en x de la manière suivante :
$x_{n+1} = Tx_n$ Pour tout $n = 0,1,2\cdots$ Notez que si $x_{n'} = x_{n'+1}$ pour certaine $n^{'} \in \mathbb{N}$ alors évidemment T a un point fixe. Donc on suppose que $x_n \neq x_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. on à :

$$G(x_n,x_{n+1},x_{n+2}) > 0,$$

à partir de (2.4.0.61) avec $x = x_{n-1}$ et $y = x_n$ on à :

$$\begin{aligned} G(Tx_{n-1},Tx_n,T^2x_n) \quad &\leq aG(x_{n-1},Tx_{n-1},T^2x_{n-1}) + bG(x_n,Tx_n,T^2x_n) \\ &+cG(x_{n-1},Tx_{n-1},Tx_n) + dG(x_n,Tx_n,T^3x_{n-1}) \end{aligned} \tag{2.4.0.62}$$

implique :

$$\begin{aligned} G(x_n,x_{n+1},x_{n+2}) \quad &\leq aG(x_{n-1},x_n,x_{n+1}) + bG(x_n,x_{n+1},x_{n+2}) + cG(x_{n-1},x_n,x_{n+1}) \\ &+dG(x_n,x_{n+1},x_{n+2}) \end{aligned} \tag{2.4.0.63}$$

$$G(x_n,x_{n+1},x_{n+2}) - bG(x_n,x_{n+1},x_{n+2}) - dG(x_n,x_{n+1},x_{n+2}) \leq aG(x_{n-1},x_n,x_{n+1}) + cG(x_{n-1},x_n,x_{n+1})$$

$$(1-b-d)G(x_n,x_{n+1},x_{n+2}) \leq (a+c)G(x_{n-1},x_n,x_{n+1})$$

$$G(x_n,x_{n+1},x_{n+2}) \leq \frac{(a+c)}{(1-b-d)}G(x_{n-1},x_n,x_{n+1})$$

$$G(x_n,x_{n+1},x_{n+2}) \leq kG(x_{n-1},x_n,x_{n+1})$$

Où $k = \dfrac{a+c}{1-b-d} < 1$ donc :

$$G(x_n,x_{n+1},x_{n+2}) \leq k^n G(x_0,x_1,x_2) \tag{2.4.0.64}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$.notez qu'à partir de(G3) nous avons que :

$$G(x_n, x_n, x_{n+1}) \leq G(x_n, x_{n+1}, x_{n+2}).$$

Avec $x_n \neq x_{n+1}$, et par le lemme (2.4.1), on à :

$$G(x_{n+1}, x_{n+1}, x_n) \leq 2G(x_n, x_n, x_{n+1})$$

Pius par (2.4.0.64), nous avons :

$$G(x_{n+1}, x_{n+1}, x_n) \leq 2k^n G(x_0, x_1, x_1)$$

En outre, pour tout $n, m \in \mathbb{N}; n < m,$, on à pas inégalité rectangle que :

$$\begin{aligned} G(x_m, x_m, x_n) &\leq G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) + G(x_{n+1}, x_{n+2}, x_{n+2}) + G(x_{n+2}, x_{n+3}, x_{n+3}) + \cdots \\ &+G(x_{m-1}, x_m, x_m) \\ &\leq 2(k^n + k^{n+1} + k^{n+2} + \cdots + k^{m-1})G(x_0, x_1, x_1) \\ &\leq 2(\frac{k^n}{1-k})G(x_0, x_1, x_1) \end{aligned} \tag{2.4.0.65}$$

Et donc $\lim G(x_n, x_m, x_m) = 0$ comme $n, m \to \infty$, donc $\{x_n\}$ est G- Cauchy. Du fait la complétude de (X, G), il existe $u \in X$ telle que $\{x_n\}$ est G- convergent vers z de (2.4.0.60) avec $x = x_n$ et $y = z$ on à :

$$G(Tx_n, Tz, T^2z) \leq aG(x_n, Tx_n, T^2x_n) + bG(z, Tz, T^2z) + cG(x_n, Tx_n, Tz) + dG(z, Tz, T^3x_n)$$

Alors

$$G(x_{n+1}, Tz, T^2z) \leq aG(x_n, x_{n+1}, x_{n+2}) + bG(z, Tz, T^2z) + cG(x_n, x_{n+1}, Tz) + dG(z, Tz, x_{n+3})$$

En prenant la limite comme $n \to \infty$ dans l'inégalité ci- dessus, nous avons :

$$G(z, Tz, T^2z) \leq bG(z, Tz, T^2z) + cG(z, z, Tz) + dG(z, Tz, Tz)$$

$$(1-b)G(z, Tz, T^2z) \leq cG(z, z, Tz) + dG(z, Tz, Tz)$$

$$G(z, Tz, T^2z) \leq \frac{(c+d)}{(1-b)}G(z, z, Tz)$$

et $b \neq 1$

$$G(z, Tz, T^2z) \leq \frac{(c+d)}{1-b} G(z, z, Tz)$$

Maintenant, si $Tz = T^2z$, alors T a un point fixe. Donc on suppose que $Tz \neq T^2z$. Donc par (G3), on obtient :

$$G(z, z, T^2z) \leq \frac{c+d}{1-b} G(z, z, Tz) \leq \frac{c+d}{1-b} G(z, z, T^2z)$$

D'où :

$$1 - \left(\frac{c+d}{1-b}\right) G(z, z, T^2z) \leq 0$$

implique que $G(z, Tz, T^2z) = 0$ c'est-à-dire : $z = Tz = T^2z$. □

Dans un premier temps, nous supposons que :
Ψ ={$\psi : [0, \infty) \to [0, \infty)$ telle que ψ Est croissant et continue}
et
Φ = {$\phi : [0, \infty) \to [0, \infty)$ tel que φ est semi-continue inférieur}. Où
$\psi(t) = \phi(t) = 0$ si et seulement si $t = 0$

Théorème 2.4.4. *Soit (X, G) un espace G- métrique complet et $T : X \to X$ une application satisfaisant la condition suivante :*

$$\forall x, y \in X, \psi(G(Tx, T^2x, Ty)) \leq \psi(G(x, Tx, y)) - \phi(G(x, Tx, y)) \tag{2.4.0.66}$$

où $\psi \in \Psi$ et $\phi \in \Phi$.
Alors T a un unique point fixe.

Démonstration. Prenons $x_0 \in X$ nous construisons la suite $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ des points en x de la manière suivant :
$x_{n+1} = Tx_n$ pour tout $n = 0, 1, 2, \cdots$
Notez que si $x_{n'} = x_{n'+1}$ pour un certain $n' \in \mathbb{N}$, nous supposons que $x_n \neq x_{n+1}$ Pour tout $n \in \mathbb{N}$ par (G2), on à :

$$G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) > 0$$

À partir de (2.4.0.64), avec $x = x_{n-1}$ et $y = x_n$, on à :

$$\psi(G(Tx_{n-1}, T^2x_{n-1}, Tx_n)) \leq \psi(G(x_{n-1}, Tx_{n-1}, Tx_n)) - \phi(G(x_{n-1}, Tx_{n-1}, x_n))$$

implique que :

$$\begin{aligned}\psi(G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1})) &\leq \psi(G(x_{n-1}, x_n, x_n)) - \phi(G(x_{n-1}, x_n, x_n)) \\ &\leq \psi(G(x_{n-1}, x_n, x_n))\end{aligned} \quad (2.4.0.67)$$

Alors :

$$G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) \leq G(x_{n-1}, x_n, x_n)$$

Donc la suite $G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1})$ est une suite décroissante dans $\mathbb{R}^+$, et donc elle est convergente, disons $t \in \mathbb{R}^+$. Nous affirmons que $t = 0$.
Supposons au contraire que $t > 0$ prenant comme limite quand $n \to \infty$ dans(2.4.0.65), on obtient :

$$\psi(t) \leq \psi(t) - \phi(t)$$

implique que $\phi(t) = 0$, c'est $t = 0$, qui est un contraire. Par conséquent $t = 0$, c'est à dire :

$$\lim_{n\to\infty} G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) = 0 \quad (2.4.0.68)$$

Nous allons montre que $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ est une suite G-Cauchy.
Supposons ou contraire qu'il existe $\varepsilon < 0$, et suite $(x_{n(k)})$ de (x_n) telle que :

$$G(x_{m(k)}, Tx_{m(k)}, x_{m(k)}) \geq \varepsilon \quad (2.4.0.69)$$

Avec $n(k) \geq m(k)$ de plus ci pondant à $m(k)$, on peut choisi $n(k)$ telle qu'il soit le plus petit entier avec $n(k) > m(k)$ satisfaisant (2.4.0.68) donc :

$$G(x_{m(k)}, Tx_{m(k)}, x_{n(k)-1}) < \varepsilon \quad (2.4.0.70)$$

D'après le lemme (2.4.1) et $(G5)$, on obtient les inégalité suivantes :

$$\begin{aligned}\varepsilon \leq G(x_{m(k)}, Tx_{m(k)}, x_{n(k)}) &= G(x_{n(k)}, x_{m(k)}, Tx_{m(k)}) \\ &\leq G(x_{n(k)}, x_{n(k)-1}, x_{n(k)-1}) + G(x_{n(k)-1}, Tx_{m(k)-1}, x_{m(k)}) \\ &\leq G(x_{m(k)}, Tx_{m(k)-1}, x_{n(k)-1}) + 2s_{n(k)-1} \\ &\leq \varepsilon + 2s_{n(k)-1}\end{aligned} \quad (2.4.0.71)$$

Où $s_{n(k)-1} = G(x_{n(k)-1}, x_{n(k)}, x_{n(k)})$. Laissant $k \longrightarrow \infty$ dans (2.4.0.70), nous déduisons que :

$$\lim_{k\to\infty} G(x_{m(k)}, Tx_{m(k)}, x_{n(k)}) = \varepsilon \tag{2.4.0.72}$$

Aussi, par lemme (2.4.1) et $(G5)$, on obtient les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned} G(x_{m(k)}, Tx_{m(k)}, x_{n(k)}) &\leq G(x_{m(k)}, x_{m(k)-1}, x_{m(k)-1}) + G(x_{m(k)-1}, Tx_{m(k)}, x_{m(k)}) \\ &= G(x_{m(k)}, x_{m(k)-1}, x_{m(k)-1}) + G(x_{n(k)}, x_{m(k)-1}, Tx_{(k)-1}) \\ &\leq G(x_{m(k)}, x_{m(k)-1}, x_{m(k)-1}) + G(x_{n(k)}, x_{n(k)-1}, x_{n(k)-1}) \\ &+G(x_{n(k)-1}, x_{m(k)-1}, Tx_{m(k)}) \\ &\leq 2s_{m(k)-1} + 2s_{n(k)-1} + G(x_{n(k)-1}, x_{m(k)-1}, Tx_{m(k)}) \end{aligned} \tag{2.4.0.73}$$

Et

$$\begin{aligned} G(x_{n(k)-1}, x_{m(k)-1}, Tx_{m(k)}) &\leq G(x_{n(k)-1}, x_{n(k)-1} x_{n(k)}) + G(x_{n(k)}, x_{m(k)}, Tx_{m(k)}) \\ &= G(x_{n(k)-1}, x_{n(k)}, x_{n(k)}) + G(x_{m(k)-1}, x_{m(k)}, x_{m(k)}) \\ &+G(x_{m(k)}, Tx_{m(k)}, x_{n(k)}) \end{aligned} \tag{2.4.0.74}$$

Laissant $k \longrightarrow \infty$ dans (2.4.0.72) et (2.4.0.73) et en appliquant (2.4.0.72), on trouve que :

$$\lim_{k\to\infty} G(x_{n(k)-1}, x_{m(k)-1}, Tx_{m(k)}) = \varepsilon \tag{2.4.0.75}$$

À nouveau, d'après le lemme (2.4.1). Et $(G5)$ on a :

$$\begin{aligned} G(x_{n(k)-1}, x_{m(k)-1}, Tx_{m(k)}) &= G(Tx_{m(k)}, x_{m(k)-1}, x_{n(k)-1}) \\ &= G(x_{m(k)+1}, x_{m(k)-1}, x_{n(k)-1}) \\ &\leq G(Tx_{m(k)+1}, x_{m(k)}, x_{m(k)}) + G(x_{m(k)}, x_{m(k)-1}, x_{n(k)-1}) \\ &= G(x_{m(k)+1}, x_{m(k)}, x_{n(k)}) + G(x_{m(k)-1}, x_{m(k)}, x_{n(k)-1}) \\ &\leq 2s_{m(k)} + G(x_{m(k)-1}, Tx_{m(k)-1}, x_{n(k)-1}) \end{aligned} \tag{2.4.0.76}$$

et

$$\begin{aligned}
G(x_{m(k)-1}, Tx_{m(k)-1}, x_{n(k)-1}) &= G(x_{m(k)-1}, x_{m(k)}, x_{n(k)-1}) \\
&\leq G(x_{m(k)-1}, x_{m(k)+1}, x_{m(k)-1}) + G(x_{m(k)+1}, x_{m(k)}, x_{n(k)-1}) \\
&\leq G(x_{m(k)-1}, x_{m(k)}, x_{m(k)}) + G(x_{m(k)}, x_{m(k)+1}, x_{m(k)+1}) \\
&+G(x_{m(k)-1}, x_{m(k)}, x_{m(k)-1}) \\
&= s_{m(k)-1} + s_{m(k)} + G(x_{m(k)+1}, x_{m(k)}, x_{n(k)-1}) \\
&= s_{m(k)-1} + s_{m(k)} + G(x_{m(k)+1}, Tx_{m(k)}, x_{n(k)-1}) \\
&< s_{m(k)-1} + s_{m(k)} + \varepsilon
\end{aligned} \tag{2.4.0.77}$$

En prenant comme limite $n \to \infty$ dans (2.4.0.75) et (2.4.0.76) et en appliquant (2.4.0.74), on :

$$\lim_{k\to\infty} G(x_{m(k)-1}, Tx_{m(k)-1}, x_{n(k)-1}) = \varepsilon \tag{2.4.0.78}$$

Par (2.4.0.65), avec $x = x_{m(k)-1}$ et $y = x_{n(k)-1}$ on à :

$$\begin{aligned}
\psi(G(x_{m(k)}, Tx_{m(k)}, x_{n(k)})) &= \psi(G(Tx_{m(k)-1}, T^2x_{m(k)-1}, Tx_{n(k)-1})) \\
&\leq \psi(G(x_{m(k)-1}, Tx_{m(k)-1}, x_{n(k)-1})) - \phi(G(x_{m(k)-1}, Tx_{m(k)-1}, x_{n(k)-1}))
\end{aligned}$$

En prenant la limite comme $k \to \infty$ dans l'inégalité ci- dessus et en appliquant, on a :

$$\psi(\varepsilon) \leq \psi(\varepsilon) - \phi(\varepsilon)$$

qui implique $\varepsilon = 0$, qui est une contradiction ensuite :

$$\lim_{m,n\to\infty} G(x_m, Tx_m, x_n) = \lim_{m,n\to\infty} G(x_m, x_{m+1}, x_n) = 0$$

C'est-à-dire $\{x_n\}_0^\infty$ est une suite de Cauchy, puis que (X, G) est un G-complet, alors il existe $z \in$ X tel que $x_n \to z$ comme $n \to \infty$ de (2.4.0.64), avec $x = x_n$ et $y = z$, on à :

$$\begin{aligned}\psi(G(x_{n+1}, x_{n+2}, Tz)) &= \psi(G(Tx_n, T^2x_n, Tz)) \\ &\leq \psi(G(x_n, Tx_n, z)) - \phi(G(x_n, Tx_n, z)) \\ &= \psi(G(x_n, x_{n+1}, z)) - \phi(G(x_n, x_{n+1}, z))\end{aligned}$$

En prenant limite comme $n \to \infty$, on obtient :

$$\psi(G(z, z, Tz)) \leq \psi(0) - \phi(0) = 0$$

Puis $G(z, z, Tz) = 0$,donc $z = Tz$.
Pour prouver l'unicité, supposons que $z \neq u$, telle que $Tu = u$ maintenant par (2.4.0.64), on obtient :

$$\psi(G(Tz, T^2z, Tu)) \leq \psi(G(z, Tz, u)) - \phi(G(z, Tz, u))$$

Ce qui implique que $\phi(G(z, Tz, u)) = 0$ c'est-à-dire $z = u$. Si on prend $\psi(t) = t$ et $\psi(t) = (1 - r)t$ dans théorème (2.4.4), où $0 \leq r \leq 1$, alors on déduit le corollaire suivante. □

Corollaire 2.4.2. *Soit* (X, G) *un espace G-métrique complet et* $T : X \to X$ *une application satisfaisant la condition suivant :*

$$\forall x, y \in X, G(Tx, T^2x, Ty) \leq rG(x, Ty, y)$$

$0 \leq r \leq 1$ *Alors* T *a un unique point fixe.*

Exemple 2.4.2. *Soit* $X = [0, +\infty)$ *et*

$$G(x, y, z) = \begin{cases} 0 & six = y = z \\ \max\{x, y\} + \max\{y, z\} + \max\{x, z\} & autrement \end{cases}$$

Soit une G-métrique sur X *définie par* $T : X \to X$, $Tx = \frac{1}{5}x$.
Alors tout les conditions du corollaire (2.4.2) théorème (2.4.4) Sont vraies, en effet :

$$G(Tx, T^2x, Ty) = \frac{1}{5}x + \frac{1}{5}\max\{\frac{1}{5}x, y\} + \frac{1}{4}\max\{x, y\}$$

Et

$$G(x, Tx, y) = x + \max\{\frac{1}{5}x, y\} + \max\{x, y\}$$

On à :

$$\begin{aligned} G(Tx,T^2x,Ty) &= \frac{1}{5}x+\frac{1}{5}\max\{\frac{1}{5}x,y\}+\frac{1}{5}\max\{x,y\} \\ &= \frac{1}{5}\Big(x+\max\{\frac{1}{5}x,y\}+\max\{x,y\}\Big) \\ &\leq \frac{1}{3}G(x,Tx,y) \end{aligned}$$

Donc

$$G(Tx,T^2x,Ty) \leq \frac{1}{3}G(x,Tx,y)$$

Telle que $r \in [0,1)$, c'est-à-dire que les conditions du corollaire (2.4.2) sont valables pour cet exemple

Corollaire 2.4.3. *Soit (X,G)un espace G-métrique complet et $T : X \to X$ une application satisfaisant la condition suivante :*
Pour tout $x,y,z \in X$, où $0 \leq a+b < 2$ Vérifie :

$$G(Tx,T^2x,Ty)+G(Tx,T^2x,Tz) \leq aG(x,Tx,y)+bG(x,Tx,z)$$

Alors T a un unique point fixe.

Démonstration. **Voir([9])** □

2.5 Le point fixe triplé

Définition 2.5.1. ***([5])*** *: Soit $(X,\leq)$ un ensemble partiellement ordonné et $F : X^3 \to X$. L'application F est dit avoir la propriété monotone mixte, si pour tout $x,y,z \in X$.*

$$\begin{aligned} &x_1,x_2 \in X, x_1 \leq x_2 \Rightarrow F(x_1,y,z) \leq F(x_2,y,z) \\ &y_1,y_2 \in X, y_1 \leq y_2 \Rightarrow F(x,y_1,z) \geq F(x,y_2,z) \\ &z_1,z_2 \in X, z_1 \leq z_2 \Rightarrow F(x,y,z_1) \leq F(x,y,z_2) \end{aligned} \tag{2.5.0.79}$$

Définition 2.5.2. *Soit $F : X^3 \to X$. Un élément (x,y,z) est appelé un point fixe triplé de F si :*

$$F(x,y,z) = x, F(y,x,y) = y, F(z,y,x) = z \tag{2.5.0.80}$$

Théorème 2.5.1. *[5] : Soit $(X,\leq,d)$ un ensemble partiellement ordonné et supposons qu'il existe une métrique d sur X telle que (X,d) un espace métrique complet.*
Supposer $F : X^3 \to X$, F la monotone mixte propriété et

$$d(F(x,y,z),F(u,v,w)) \leq jd(x,u)+kd(y,v)+ld(z,w) \tag{2.5.0.81}$$

pour tout $x, y, z \in X$, pour $x \leq u, v \leq y$ et $z \leq w$.
Supposons que F est continue sur X a les propriétés suivantes :

(1) *Si une suite croissante $x_n \to x$ alors $x_n \leq x$ pour tout n,*

(2) *Si une suite décroissante $y_n \to y$, alors $y \leq y_n$ pour tout n,*

(3) *Si une suite croissante $z_n \to z$ alors $z_n \leq z$ pour tout n*

S'il existe $x_0, y_0, z_0 \in X$ telle que $x_0 \leq F(x_0, y_0, z_0), y_0 \leq F(y_0, x_0, z_0)$ et
$z_0 \leq F(z_0, y_0, x_0)$, il existe $x, y, z \in X$ ainsi :

$$F(x,y,z) = x, F(y,x,y) = y, F(z,y,x) = z \tag{2.5.0.82}$$

C'est-à-dire que F a un point fixe triplé.

Définition 2.5.3. *Soit (X, G) un espace G-métrique. Une application $F : X^3 \to X$ est dit continue si pour trois suites G-convergentes (x_n), (y_n) et (z_n) convergent vers x, y et z respectivement, $F(x_n, y_n, z_n)$ en G-convergent vers $F(x, y, z)$.*

Théorème 2.5.2. *[5] : Soit $(X, \leq)$ partiellement ordonné, (X, G) un espace G-métrique et $F : X^3 \to X$ une application continue dans la propriété monotone mixte sur X.*
Supposons qu'il existe $\phi \in \Phi$ telle que pour $x, y, z, a, b, c, u, v, w \in X$, avec $x \geq a \geq u, y \leq b \leq v$ et $z \geq c \geq w$ on a :

$$G(F(x,y,z), F(a,b,c), F(u,v,w)) \leq \phi(\max\{G(x,a,u), G(y,b,v), G(z,c,w)\}). \tag{2.5.0.83}$$

s'il existe $x_0, y_0, z_0 \in X$ telle que $x_0 \leq F(x_0, y_0, z_0), y_0 \geq F(y_0, x_0, y_0)$ et
$z_0 \leq F(z_0, y_0, x_0)$ alors F a un point fixe triplé en X, c'est-à-dire qu'il existe x, y, z donc :

$$F(x,y,z) = x, F(y,x,y) = y, F(z,y,x) = z \tag{2.5.0.84}$$

Démonstration. Supposons que $x_0, y_0, z_0 \in X$ telle que :
$x_0 \leq F(x_0, y_0, z_0), y_0 \geq F(x_0, y_0, z_0)$ et $z_0 \leq F(z_0, y_0, x_0)$.
Définissons $x_1 = F(x_0, y_0, z_0), y_1 = F(y_0, x_0, y_0)$ et $z_1 = F(z_0, y_0, x_0)$.
Alors $x_0 \leq x_1, y_0 \leq y_1$ et $z_0 \leq z_1$.
Encore une fois, définissez
$x_2 = F(x_1, y_1, z_1), y_2 = F(y_1, x_1, y_1)$ et $z_2 = F(z_1, y_1, x_1)$
Puisque F a la propriété monotone mixte, nous avons $x_0 \leq x_1 \leq x_2, y_2 \leq y_1 \leq y_0$ et $z_0 \leq z_1 \leq z_2$. En continuant ce processus, nous pouvons construire trois suites $(x_n), (y_n)$ et

$(z_n) \in X$ telle que :

$$\begin{aligned}
x_n &= F(x_{n-1}, y_{n-1}, z_{n-1}) \leq x_{n+1} = F(x_n, y_n, z_n) \\
y_{n+1} &= F(y_n, x_n, y_n) \leq y_n = F(y_{n-1}, x_{n-1}, y_{n-1}) \\
z_n &= F(z_{n-1}, y_{n-1}, x_{n-1}) \leq z_{n+1} = F(z_n, y_n, x_n)
\end{aligned} \tag{2.5.0.85}$$

Si pour certains entier n, nous avons $(x_{n+1}, y_{n+1}, z_{n+1}) = (x_n, y_n, z_n)$, alors $F(x_n, y_n, z_n) = x_n, F(y_n, x_n, y_n) = y_n$ et $F(z_n, y_n, x_n) = z_n$ c'est-à-dire (x_n, y_n, z_n) est un point fixe triplé de F.
Ainsi, nous allons supposer que :
$(x_{n+1}, y_{n+1}, z_{n+1}) \neq (x_n, y_n, z_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire que nous supposons que : $x_{n+1} \neq x_n$ où $y_{n+1} \neq y_n$ où $z_{n+1} \neq z_n$.
Pour tout $n^* \in \mathbb{N}$, nous avons on (2.5.0.83)

$$\begin{aligned}
G(x_{n+1}, x_n, x_n) = \quad & G(F(x_n, y_n z_n), F(x_{n-1}, y_{n-1}, z_{n-1}), F(x_{n-1}, y_{n-1}, z_{n-1})) \\
& \leq \phi(\max G(x_n, x_{n-1}, x_{n-1}, x_{n-1}), G(y_n, y_{n-1}, y_{n-1}), G(z_n, z_{n-1}, z_{n-1})) \\
G(y_{n+1}, y_n, y_n) = \quad & G(F(y_n, x_n, y_n), F(y_{n-1}, x_{n-1}, y_{n-1}), F(y_{n-1}, x_{n-1}, y_{n-1})) \\
& \leq \phi(\max\{G(y_n, y_{n-1}, y_{n-1}), G(x_n, x_{n-1}, x_{n-1})\}) \\
& \leq \phi(\max\{G(y_n, y_{n-1}, y_{n-1}), G(x_n, x_{n-1}, x_{n-1}), G(z_n, z_{n-1}, z_{n-1})\}) \\
G(z_{n+1}, z_n, z_n) = \quad & G(F(z_n, y_n, x_n), F(z_{n-1}, y_{n-1}, x_{n-1}), F(z_{n-1}, y_{n-1}, x_{n-1})) \\
& \leq \phi(\max\{G(z_n, z_{n-1}, z_{n-1}), G(y_n, y_{n-1}, y_{n-1}), G(x_n, x_{n-1}, x_{n-1})\})
\end{aligned} \tag{2.5.0.86}$$

De (2.5.0.86) il suit que :

$$\begin{aligned}
& \max\{G(x_{n+1}, x_n, x_n), G(y_n, y_n, y_{n+1}), G(z_{n+1}, z_n, z_n)\} \\
& \leq \phi(\max\{G(x_n, x_{n-1}, x_{n-1}), G(y_n, y_{n-1}, y_{n-1}), G(z_n, z_{n-1}, z_{n-1})\}))
\end{aligned} \tag{2.5.0.87}$$

En répétant (2.5.0.87) n fois et en utilisant le fait que ϕ est non réduit, nous obtenons que :

$$\begin{aligned}
&\max\{G(x_{n+1},x_n,x_n),G(y_{n+1},y_n,y_n),G(z_{n+1},z_n,z_n)\}\\
&\leq \phi(\max\{G(x_n,x_{n-1},x_{n-1}),G(y_n,y_{n-1},y_{n-1}),G(z_n,z_{n-1},z_{n-1})\})\\
&\leq \phi^2(\max\{G(x_{n-1},x_{n-2},x_{n-2}),G(y_{n-1},y_{n-2},y_{n-2}),G(z_{n-1},z_{n-2},z_{n-2})\})\\
&\vdots\\
&\leq \phi^n(\max\{G(x_1,x_0,x_0),G(y_1,y_0,y_0),G(z_1,z_0,z_0)\}).
\end{aligned} \tag{2.5.0.88}$$

Maintenant, nous montrons que (x_n) est une suite G-Cauchy dans X.
Soit $\varepsilon \leq 0$. De puis

$$\lim_{n\to\infty}\phi^n(\max\{G(x_1,x_0,x_0),G(y_1,y_0,y_0),G(z_1,z_0,z_0)\})=0 \tag{2.5.0.89}$$

et $\varepsilon > \phi(\varepsilon)$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ telle que :

$$\phi^n(\max\{G(x_1,x_0,x_0),G(y_1,y_0,y_0),G(z_1,z_0,z_0)\}) < \varepsilon-\phi(\varepsilon), \forall n \geq n_0. \tag{2.5.0.90}$$

Par (2.5.0.88), cela implique que :

$$\max\{G(x_{n+1},x_n,x_n),G(y_{n+1},y_n,y_n),G(z_{n+1},z_n,z_n)\} < \varepsilon-\phi(\varepsilon), \forall n \geq n_0 \tag{2.5.0.91}$$

Pour $m,n \in \mathbb{N}$, nous prouvons par indiction sur m que :

$$\max\{G(x_n,x_n,x_m),G(y_n,y_n,y_m),G(z_n,z_n,z_m)\} < \varepsilon-\phi(\varepsilon), \forall n \geq n_0. \tag{2.5.0.92}$$

de puis $\varepsilon-\phi(\varepsilon) \leq \varepsilon$, alors en utilisant (2.5.0.91) et la propriété (G4), nous concluons que (2.5.0.92) tient quand $m = n+1$. Supposons maintenant que (2.5.0.92) est titulaire de $m = k$ pour $m = k+1$, nous avons :

$$\begin{aligned}
&G(x_n,x_n,x_{k+1})\\
&\leq G(x_n,x_n,x_{n+1})+G(x_{n+1},x_{n+1},x_{k+1})\\
&< \varepsilon-\phi(\varepsilon)+G\left(F(x_n,y_n,z_n),F(x_n,y_n,z_n),F(x_k,y_k,z_k)\right)\\
&\leq \varepsilon-\phi(\varepsilon)+\phi(\max(G(x_n,x_n,x_k),G(y_n,y_n,y_k),G(z_n,z_n,z_k)\})\\
&\leq \varepsilon-\phi(\varepsilon)+\phi(\varepsilon)=\varepsilon
\end{aligned} \tag{2.5.0.93}$$

De même, nous montrons que

$$\begin{aligned}
&G(y_n,y_n,y_{k+1}) < \varepsilon,\\
&G(z_n,z_n,z_{k+1}) < \varepsilon.
\end{aligned} \tag{2.5.0.94}$$

Par conséquent, nous avons :

$$\max\{G(x_n, x_n, x_{k+1}), G(y_n, y_n, y_{k+1}), G(z_n, z_n, z_{k+1})\} < \varepsilon. \tag{2.5.0.95}$$

Ainsi (2.5.0.92) peut contenir pour tout $m \geq n \geq n_0$.
Par conséquent (x_n), (y_n) et (z_n) les suite G-Cauchy sont-elle dans X. Étant donné que X est un espace métrique complet, il existe $x, y, z \in X$ telle que :
(x_n), (y_n) et (z_n) converger à x, y et z, respectivement.
Enfin, nous montrons que (x, y, z) est un point de vue en forme de F.
Depuis F est continue et $(x_n, y_n, z_n) \longrightarrow (x, y, z)$, nous avons :
$x_{n+1} = F(x_n, y_n, z_n) \longrightarrow (x, y, z)$.
Par le caractère unique de la limite, nous avons $x = F(x, y, z)$.
De même nous montrons que $y = F(y, x, y)$ et $z = F(z, y, x)$.
Alors (x, y, z) est un point fixe triplé de F. □

Corollaire 2.5.1. ***([5])*** *: Soit $(X, \leq)$ partiellement ordonnée, (X, G) un espace G-métrique, $F : X^3 \longrightarrow X$ une application continue dans la propriété monotone mixte sur X. Supposons qu'il existe $k \in [0, 1)$ telle que pour $a, y, z, a, b, c, u, v, w \in X$, avec $x \geq a \geq u, y \leq b \leq v$ et $z \geq c \geq w$ on a :*

$$G(F(x, y, z), F(a, b, c), F(u, v, w)) \leq k \max\{G(x, a, u), G(y, b, v), G(z, c, w)\}. \tag{2.5.0.96}$$

s'il existe $x_0, y_0, z_0 \in X$ telle que :
$x_0 \leq F(x_0, y_0, z_0), y_0 \geq F(y_0, x_0, y_0)$ et $z_0 \leq F(z_0, y_0, x_0)$.
Alors F a un point fixe triplé en X, c'est-à-dire qu'il existe $x, y, z \in X$ tel que :

$$F(x, y, z) = x, F(y, x, y) = y, F(z, y, x) = z \tag{2.5.0.97}$$

Corollaire 2.5.2. *Soit $(X, \leq)$ partiellement ordonnée, (X, G) un espace G-métrique et $F : X^3 \longrightarrow X$ une application continue dans la propriété monotone mixte sur X. Supposons qu'il existe $k \in [0, 1)$ tel que pour $x, y, z, a, b, c, u, v, w \in X$, avec $x \geq a \geq u, y \leq b \leq v$, et $z \geq c \geq w$ on a :*

$$G(F(x, y, z), F(a, b, c), F(u, v, w)) \leq \frac{k}{3}(G(x, a, u), G(y, b, v), G(z, c, w)). \tag{2.5.0.98}$$

S'il existe x_0, y_0, z_0 telle que :
$x_0 \leq F(x_0, y_0, z_0), y_0 \geq F(y_0, x_0, y_0)$, et $z_0 \leq F(z_0, y_0, x_0)$
Alors F a un point fixe triplé en X, c'est-à-dire qu'il existe $x, y, z \in X$ telle que :

$$F(x, y, z) = x, F(y, x, y) = y, F(z, y, x) = z \tag{2.5.0.99}$$

Théorème 2.5.3. *Soit $(X, \leq)$ partiellement ordonné, (X, d) un espace métrique complet et $F : X^3 \to X$ une application dans la propriété monotone mixte.*
Supposer qu'il existe un $\phi \in \Phi$ telle que :

$$G\left(F(x,y,z), F(a,b,c), F(u,v,w)\right) \leq \phi\left(\max\left\{G(x,a,u), G(y,b,v), G(z,c,w)\right\}\right). \quad (2.5.0.100)$$

Pour tout $x, y, z, a, b, c, u, v, w \in X$, avec $x \geq a \geq u, y \leq b \leq v$ et $z \geq c \geq w$. Supposons aussi que X a les propriétés suivantes :

(i) *Si suite croissante $x_n \to x$, alors $x_n \leq x$ pour tous $n \in \mathbb{N}$*

(ii) *Si une suite décroissante $y_n \to y$, alors $y_n \geq y$ pour tous $n \in \mathbb{N}$*

s'il y a $x_0, y_0, z_0 \in X$ comme :

$$x_0 \leq F(x_0, y_0, z_0), y_0 \geq F(y_0, x_0, y_0) et z_0 \leq F(z_0, y_0, x_0)$$

Alors F a un point fixe triplé.

Exemple 2.5.1. *Nous prenons $n = 3$, Soit $X = [0, \infty)$ et :*

$$G(x,y,z) = \max\left\{|x-y| + |x-z| + |y-z|\right\}$$

Alors (X, G) est un espace G-métrique complet et $'' \leq ''$ est l'ordre induit par $\phi(x) = 2x$.
Soit $F : X^3 \to X$ défini par :

$$F(x,y,z) = x(1+y)(2+z)$$

Et F est évidemment une fonction croissant sur X. Si nous laissons $x_0 = 1$ et $y_0 = z_0 = 0$ alors :

$$F(x_0, y_0, z_0) = 1(1+0)(2+0) = 2$$

$$F(y_0, z_0, x_0) = 0(1+0)(2+1) = 0$$

Et

$$F(z_0, x_0, y_0) = 0(1+1)(2+0) = 0$$

Donc :

$$x_0 \leq F(x_0, y_0, z_0), y_0 \leq F(y_0, z_0, x_0)$$

Et

$$z_0 \leq F(z_0, x_0, y_0)$$

Aussi

$$F(0,y,z) = 0(1+y)(2+z) = 0, F(0,z,x) = 0(1+z)(2+x) = 0$$

Et

$$F(0,x,y) = 0(1+x)(2+y) = 0$$

Donc $(0,0,0)$ *est un point fixe triplé dans* F.

Remarque 2.5.1. ***(Point fixe n-uplet) ([20])*** *:*

Définition 2.5.4. *Un élément* $(x^1, x^2, \cdots, x^n) \in X^n$ *est appelé :*

*(E1) Un **point fixe n-uplet** d'application* $F : X^n \to X$ *si :*

$$\forall i \in [1,n], F(x^i, x^{i+1}, \cdots, x^n, x^1, \cdots, x^{i-1}) = x^i$$

*(E2) Un **coïncidence fixe n-uplet** d'application* $F : X^n \to X$ *et* $T : X \to X$ *si :*

$$\forall i \in [1,n], F(x^i, x^{i+1}, \cdots, x^n, x^1, \cdots, x^{i-1}) = Tx^i$$

Et dans ce cas $(Tx^1, Tx^2, \cdots, Tx^n)$ *est appelé le point n-uplet de coïncidence.*

*(E3) un **point fixe commun aux n-uplet** d'application* $F : X^n \to X$ *et* $T : X \to X$ *si :*

$$\forall i \in [1,n], F(x^i, x^{i+1}, \cdots, x^n, x^1, \cdots, x^{i-1}) = Tx^i = x^i$$

Définition 2.5.5. *Un élément* $(x^1, x^2, \cdots, x^n) \in X^n$ *est appelé :*

*(D1) Un **point fixe n-uplet** d'application* $F : X^n \to X$ *et* $T, R : X \to X$ *si :*

$$\forall i \in [1,n], F(x^i, x^{i+1}, \cdots, x^n, x^1, \cdots, x^{i-1}) = Tx^i = Rx^i = x^i$$

*(D2) Un **point fixe commun aux n-uplet** d' application* $F : X^n \to X$ *et* $T, R : X \to X$ *si :*

$$\forall i \in [1,n], F(x^i, x^{i+1}, \cdots, x^n, x^1, \cdots, x^{i-1}) = Tx^i = Rx^i = x^i$$

Théorème 2.5.4. *Soit* (X,G) *un espace G-métrique complet,* $\phi : X \to \mathbb{R}$ *une fonction bornée à partir d'en haut et* $'' \leq ''$ *le préordre induit par* ϕ.
Soit $F : X^n \to X$, $n \geq 2$ *un préordre préservant et une application séquentiellement continu sur X telle qu'il existe n élément* $(x_0^1, \cdots, x_0^n) \in X$ *avec :*

$$\forall i \in [1,n], x_0^1 \leq F(x_0^i, x_0^{i+1}, \cdots, x_0^n, x_0^1, \cdots, x_0^{i-1})$$

Alors F a un n-uple point fixe dans X^n

Chapitre 3

Quelques applications

3.1 Application(Équation intégral)

Théorème 3.1.1. *([16]) Soit $(X, \preceq)$ un espace partiellement ordonné et f une fonction de classe C. Suppose qu'il existe une G-métrique sur X telle que (X, G) un espace G-métrique complet. De plus Ω est une distance sur X et T est une application croissante de X dans lui-même .*
Supposer que :

$$\forall x, y \in X, \psi(\Omega(Tx, Ty, Tz)) \leq f\,(\psi(\Omega(x, y, z)), \phi(\Omega(x, y, z))).$$

avec $x \preceq y \preceq z$, où $\phi \in \Phi$ et $\psi \in \Psi$ et $f \in C$, aussi :

$$\forall x \in X, \inf\{\Omega(x, y, x) + \Omega(x, y, Tx) + \Omega(x, Tx, y) : x \preceq Tx\} > 0.$$

Pour tout $y \in X$ avec $y \neq Ty$, s'il existe un $x_0 \preceq Tx_0$, alors T admet un point fixe . De plus, si $v = Tv$, alors $\Omega(v, v, v) = 0$

Démonstration. : Si $x_0 = Tx_0$, alors le résultat est prouvé.
On suppose $x_0 \neq Tx_0$.
Depuis $x_0 \preceq Tx_0$, T croissante on obtient :

$$x_0 \preceq Tx_0 \preceq T^2x_0 = T(T(x_0)) \preceq \cdots \preceq T^{n+1}x_0 \preceq \cdots$$

Maintenant si pour tout un certain $n \in N$, $\Omega(T^nx_0, T^{n+1}x_0, T^{n+1}x_0) = 0$
Alors :

$$\psi(\Omega(T^{n+1}x_0, T^{n+2}x_0, T^{n+2}x_0)) \leq f\left(\psi(\Omega(T^nx_0, T^{n+1}x_0, T^{n+1}x_0)), \phi(\Omega(T^nx_0, T^{n+1}x_0, T^{n+1}x_0))\right).$$

Donc :

$$\Omega(T^{n+1}x_0, T^{n+2}x_0, T^{n+2}x_0) = 0$$

Et par la partie (c) de la définition (1.7.1) $G(T^{n+1}x_0, T^{n+2}x_0, T^{n+2}x_0) = 0$, et par conséquent $T^n x_0 = T^{n+2}x_0$, ce qui implique que $T^n x_0$ est point fixe de T.
Si n est pair, et que $T^2 x_0$ est un point fixe .
Si n est impair, alors la preuve est complète. Sinon $\Omega(T^n x_0, T^{n+1}x_0, T^{n+1}x_0) > 0$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \psi(\Omega(T^n x_0, T^{n+1}x_0, T^{n+1}x_0)) \leq f(\psi(\Omega(T^{n-1}x_0, T^n x_0, T^n x_0)), \phi(\Omega(T^{n-1}x_0, T^n x_0, T^n x_0))), \tag{3.1.0.1}$$

puis

$$\psi(\Omega(T^n x_0, T^{n+1}x_0, T^{n+1}x_0)) \leq \psi(\Omega(T^{n-1}x_0, T^n x_0, T^n x_0))$$

De la même manière :

$$\psi(\Omega(T^{n-1}x_0, T^n x_0, T^n x_0)) \leq \psi(\Omega(T^{n-2}x_0, T^{n-1}x_0, T^{n-1}x_0))$$

Ceci montre que $\{\Omega(T^n x_0, T^{n+1}x_0, T^{n+1}x_0)\}$ est décroissante.
Alors, il existe $r > 0$ telle que :

$$\lim_{n\to\infty} \Omega(T^n x_0, T^{n+1}x_0, T^{n+1}x_0) = r$$

Si $r > 0$, $\phi(r) > 0$ et en prenant $n \to \infty$ sur (3.1.0.1), on obtient :

$$\psi(r) \leq f(\psi(r), \phi(r))$$

qui est une contraction. Alors :

$$\lim_{n\to\infty} \Omega(T^n x_0, T^{n+1}x_0, T^{n+1}x_0) = 0$$

Nous affirmons que $\{T^n x_0\}$ est suite de G-Cauchy.
Suppose $\{T^n x_0\}$ n'est pas une suite de G-Cauchy.
Ensuite l'existe $\varepsilon > 0$ et des sous-suites $\{T^{n_k}x_0\}$ et $\{T^{m_k}x_0\}$ telles que n_K est le plus petit entier avec $n_k > m_k > k$ et

$$\Omega(T^{m_k}x_0, T^{n_k}x_0, T^{n_k}x_0) > \varepsilon$$

puis

$$\Omega(T^{m_k}x_0, T^{n_k - 1}x_0, T^{n_k - 1}x_0) \leq \varepsilon$$

Par partie (a) partie de la définition (1.7.1),on obtient :

$$\begin{aligned}\varepsilon < \Omega(T^{m_k}x_0, T^{n_k}x_0, T^{n_k}x_0) &\leq \Omega(T^{m_k}x_0, T^{n_k-1}x_0, T^{n_k-1}x_0) + \Omega(T^{n_k-1}x_0, T^{n_k}x_0, T^{n_k}x_0)\\ &\leq \varepsilon + \Omega(T^{n_k-1}x_0, T^{n_k}x_0, T^{n_k}x_0)\end{aligned}$$

Ainsi

$$\lim_{k\to\infty} \Omega(T^{m_k}x_0, T^{n_k}x_0, T^{n_k}x_0) = \varepsilon$$

Depuis

$$\Omega(T^{m_k-1}x_0, T^{n_k-1}x_0, T^{n_k-1}x_0) \leq \Omega(T^{m_k-1}x_0, T^{n_k-1}x_0, T^{n_k-1}x_0)+\Omega(T^{m_k}x_0, T^{n_k-1}x_0, T^{n_k-1}x_0)$$

et

$$\begin{aligned}\psi(\varepsilon) &< \psi(\Omega(T^{m_k}x_0, T^{n_k}x_0, T^{n_k}x_0))\\ &\leq f(\psi(\Omega(T^{m_k-1}x_0, T^{n_k-1}x_0, T^{n_k-1}x_0), \phi(\Omega(T^{m_k-1}x_0, T^{n_k-1}x_0, T^{n_k-1}x_0)))\\ &< \psi(\Omega(T^{m_k}x_0, T^{n_k}x_0, T^{n_k}x_0))\end{aligned}$$

Alors,on obtient :

$$\lim_{k\to\infty} \Omega(T^{m_k-1}x_0, T^{n_k-1}x_0, T^{n_k-1}x_0) = \varepsilon$$

Encore une fois, nous avons :

$$\begin{aligned}\psi(\varepsilon) &< \psi(\Omega(T^{m_k}x_0, T^{n_k}x_0, T^{n_k}x_0))\\ &\leq f(\psi(\Omega(T^{m_k-1}x_0, T^{n_k-1}x_0, T^{n_k-1}x_0)), \phi(\Omega(T^{m_k-1}x_0, T^{n_k-1}x_0, T^{n_k-1}x_0)))\end{aligned}$$

Donc

$$\psi(\varepsilon) \leq f(\psi(\varepsilon), \phi(\varepsilon))$$

Ce qui est une contraction.
Donc $\{T^n x_0\}$ est une suite G-Cauchy . Puisque X est G-complet, $\{T^n x_0\}$ converge vert un point $u \in X$.
Alors, pour $\varepsilon > 0$ et par semi-continuité inférieure de Ω,

$$\Omega(T^n x_0, T^m x_0, u) \leq \lim_{p\to\infty} \inf(T^n x_0, T^m x_0, T^p x_0) \leq \varepsilon, m \geq n$$

et

$$\Omega(T^n x_0, u, T^l x_0) \leq \lim_{p\to\infty} \inf(T^n x_0, T^p x_0, T^l x_0) \leq \varepsilon, l \geq n.$$

Supposons que $u \neq Tu$. Puis que $T^n x_0 \leq T^{n+1} x_0$,

$$0 \leq \inf\Big\{\Omega(T^n x_0, u, T^n x_0) + \Omega(T^n x_0, u, T^{n+1} x_0) + \Omega(T^n x_0, T^{n+1} x_0, u) : n \in \mathbb{N}\Big\} \leq 3\varepsilon,$$

Qui est une contraction. Par conséquence, nous avons $u = Tu$.
Maintenant, si $v = Tv$, nous avons :

$$\psi(\Omega(v,v,v)) = \psi(\Omega(Tv,Tv,Tv)) \leq f\,(\psi(\Omega(v,v,v)), \phi(\Omega(v,v,v)))$$

Donc, $\Omega(v,v,v) = 0$. □

Dans cette section, nous donnons un théorème d'existence pour une solution de l'équation intégrale suivante :

$$x(t) = \int_0^1 K(t,s,x(s))ds + g(t), t \in [0,1] \tag{3.1.0.2}$$

Que $X = C([0,1])$ soit l'ensemble des fonctions continues définies par $[0,1]$.
Définissez par $G : X^3 \to \mathbb{R}^+$ à partir de :

$$G(x,y,z) = \|x-y\| + \|y-z\| + \|z-x\|,$$

Où

$$\|x\| = \sup\{|x(t)|, t \in [0,1]\}$$

Alors (X,G) est un G-métrique complet. Soit $\Omega = G$. Est un Ω-distance sur X.
Définir une relation ordonnée $\preceq$ sur X par $x \preceq y$ si et seulement si :

$$x(t) \leq y(t), \forall t \in [0,1].$$

Alors $(X, \preceq)$ est un ensemble partiellement ordonnée.
Maintenant, on prouve le résultat suivant vérifiées :

Théorème 3.1.2. ***([16])*** *Supposons que les hypothèses suivantes sont vérifiées :*

(1) $K : [0,1]\times[0,1]\times\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ *et* $g : [0,1] \to \mathbb{R}$*, sont continues ;*

(2) K *est croissant dans sa première variable et* g *est croissant*

(3) Il existe une fonction continue $F : [0,1]\times[0,1] \to [0,+\infty)$ *telle que :*

$$|K(t,s,u) - K(t,s,v)| \leq F(t,s)|u-v|$$

Pour tout comparable $u, v \in \mathbb{R}^+$ *et* $s, t \in [0,1]$ *avec :*

$$\sup_{t\in[0,1]} \int_0^1 F(t,s)ds \leqslant \frac{1}{2}$$

(4) Soit $\phi \in \Phi$, $\psi \in \Psi$ et $f \in C$, alors $\psi(r) \leq f(\psi(2r), \phi(2r))$, $\forall r \in [0, \infty)$

l'équation intégral (3.1.0.2) admet une solution dans $C([0,1])$.

Démonstration. : **([16])** Définir :

$$Tx(t) = \int_0^1 K(t, s, x(s))ds + g(t)$$

Par l'hypothèse (2), on a que T est croissant . Maintenant si :

$$\inf\{\Omega(x, y, x) + \Omega(x, y, Tx) + \Omega(x, Tx, y); x \leq Tx\} = 0,$$

Pour tout $y \in X$ avec $y \neq Ty$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe $x_n \in C([0.1])$ avec $x_n \leq Tx_n$ telle que :

$$\Omega(x_n, y, x_n) + \Omega(x_n, y, Tx_n) + \Omega(x_n, Tx_n, y) \leqslant \frac{1}{n}.$$

En suite nous avons :

$$\Omega(x_n, y, Tx_n) = \sup_{t\in[0,1]} |x_n - y| + \sup_{t\in[0,1]} |y - Tx_n| + \sup_{t\in[0,1]} |Tx_n - x_n| \leqslant \frac{1}{n}.$$

Ainsi

$$\lim_{n\to\infty} x_n(t) = y(t)$$

$$\lim_{n\to\infty} Tx_n = y(t)$$

Par la continuité de K, on a :

$$y(t) = \lim_{n\to\infty} Tx_n(t) = \int_0^1 K(t, s, \lim_{n\to\infty} x_n(s))ds + g(t) = \int_0^1 K(t, s, y(s))ds + g(t) = Ty(t).$$

Ce qui est une contradiction, donc :

$$\inf\{\Omega(x, y, x) + \Omega(x, y, Tx) + \Omega(x, Tx, y); x \leq Tx\} > 0$$

Donc pour tout $x, y, z \in X$ avec $x \leq y$, on a :

$$\begin{aligned}
\psi(\Omega(Tx,Ty,Tz)) =& \psi\left(\sup_{t\in[0,1]}|Tx(t)-Ty(t)| + \sup_{t\in[0,1]}|Ty(t)-Tz(t)| + \sup_{t\in[0,1]}|Tz(t)-Tx(t)|\right) \\
&\leq \psi\left(\sup_{t\in[0,1]}\int_0^1 |K(t,s,x(s))-K(t,s,y(s))|ds\right. \\
&\quad + \sup_{t\in[0,1]}\int_0^1 |K(t,s,y(s))-K(t,s,z(s))|ds \\
&\quad \left. + \sup_{t\in[0,1]}\int_0^1 |K(t,s,z(s))-K(t,s,x(s))|ds\right) \\
&\leq \psi\left(\sup_{t\in[0,1]}\left(\int_0^1 F(t,s)|x(s)-y(s)|ds\right) + \sup_{t\in[0,1]}\left(\int_0^1 F(t,s)|y(s)-z(s)|ds\right)\right. \\
&\quad \left. + \sup_{t\in[0,1]}\left(\int_0^1 F(t,s)|z(s)-x(s)|ds\right)\right) \\
&\leq \psi\left(\sup_{t\in[0,1]}(|x(t)-y(t)|)\sup_{t\in[0,1]}\int_0^1 F(t,s)ds\right. \\
&\quad + \sup_{t\in[0,1]}(|y(t)-z(t)|)\sup_{t\in[0,1]}\int_0^1 F(t,s)ds \\
&\quad \left. + \sup_{t\in[0,1]}(|z(t)-x(t)|)\sup_{t\in[0,1]}\int_0^1 F(t,s)ds\right) \\
&\leq \psi\left(\frac{1}{2}\sup_{t\in[0,1]}(|x(t)-y(t)|) + \frac{1}{2}\sup_{t\in[0,1]}(|y(t)-z(t)|) + \frac{1}{2}\sup_{t\in[0,1]}(|z(t)-x(t)|)\right) \\
&\leq \psi\left(\frac{1}{2}\Omega(x,y,z)\right) \leq f\left(\psi(\Omega(x,y,z)),\phi(\Omega(x,y,z))\right).
\end{aligned}$$

Ainsi, d'après le Théorème (3.1.1) , il existe une solution $u \in C([0,1])$ de l'équation intégral (3.1.0.2).
Maintenant, nous présentent les corolaires suivant comme exemple de notre résultat. □

Corollaire 3.1.1. *Supposons que les hypothèses suivantes qui vérifiées :*

(1) $K : [0,1]\times[0,1]\times\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ *et* $g : [0,1] \to \mathbb{R}$*, sont continue*

(2) K *est un croissante dans sa première variable et* g *est un croissante*

(3) Il existe une fonction continue $F : [0,1]\times[0,1] \to [0,+\infty)$ *telle que :*

$$|K(t,s,u)-K(t,s,v)| \leq F(t,s)|u-v|$$

Pour tout $u, v \in \mathbb{R}^+$ *et* $s, t \in [0,1]$ *avec :*

$$\sup_{t\in[0,1]} \int_0^1 F(t,s)ds \leq \frac{1}{2}$$

(4) *Il existe une fonction continue croissante* $\psi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ *avec :* $\psi^{-1}(0) = 0$ *et* $\psi(r) \leq k\psi(2r)$, $0 < k < 1$ *pour tout* $r \in [0,\infty)$

Alors l'équation intégral (3.1.0.2) *admet une solution dans* $C([0,1])$

Corollaire 3.1.2. *Supposons que les hypothèses suivantes soit vérifiées :*

(1) $K : [0,1]\times[0,1]\times\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ *et* $g : [0,1] \to \mathbb{R}$, *sont continue*

(2) *K est un croissante dans sa première variable et g est un croissante*

(3) *Il existe une fonction continue* $F : [0,1]\times[0,1] \to [0,+\infty)$ *telle que :*

$$|K(t,s,u) - K(t,s,v)| \leq F(t,s)|u-v|$$

Pour tout $u, v \in \mathbb{R}^+$ *et* $s, t \in [0,1]$ *avec :*

$$\sup_{t\in[0,1]} \int_0^1 F(t,s)ds \leq \frac{1}{2}$$

(4) *Soit* $\phi \in \Phi$, $\psi \in \Psi$, *alors* $\psi(r) \leq \dfrac{\psi(r)}{1+\phi(2r)}$, *pour tout* $r \in [0,\infty)$

Alors l'équation intégral (3.1.0.2), *admet une solution dans* $C([0,1))$

Corollaire 3.1.3. *Supposons que les hypothèses suivantes soit vérifiées :*

(1) $K : [0,1]\times[0,1]\times\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ *et* $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ *sont continue*

(2) *K est un croissante dans sa première variable et g est un croissante*

(3) *Il existe une fonction continue* $F : [0,1]\times[0,1] \to [0,+\infty)$ *telle que :*

$$|K(t,s,u) - K(t,s,v)| \leq F(t,s)|u-v|$$

pour tout $u, v \in \mathbb{R}^+$ *et* $s, t \in [0,1]$ *avec :*

$$\sup_{t\in[0,1]} \int_0^1 F(t,s)ds \leq \frac{1}{2}$$

(4) *Soit* $\phi \in \Phi$, $\psi \in \Psi$, *alors* $\psi(r) \leq \psi(2r)\log_{a+\phi(2r)} a$, *pour tout* $r \in [0,\infty)$

Alors l'équation intégral (3.1.0.2) *admet une solution dans* $C([0,1])$

Corollaire 3.1.4. *Supposons que les hypothèses suivantes soit vérifiées :*

(1) $K : [0,1] \times [0,1] \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ *et* $g : [0,1] \to \mathbb{R}$*, sont continue*

(2) *K est un croissante dans sa première variable et g est un croissante*

(3) *Il existe une fonction continue* $F : [0,1] \times [0,1] \to [0,+\infty)$ *tel que :*

$$|K(t,s,u) - K(t,s,v)| \leq F(t,s)|u-v|$$

Pour tout $u, v \in \mathbb{R}^+$ *et* $s, t \in [0,1]$ *avec :*

$$\sup_{t\in[0,1]} \int_0^1 F(t,s)ds \leq \frac{1}{2}$$

(4) *Il existe une fonction continue croissant* $\psi : [0,\infty) \to (0,\infty)$*, avec* $\psi^{-1}(0) = 0$ *et*

$$\psi(r) = \sqrt[n]{\log(1+\psi(2r)^n)}, n \in \mathbb{N}, \forall r \in [0,\infty)$$

Alors l'équation intégral (3.1.0.2)*, admet une solution dans* $C([0,1])$

3.2 Application aux problème aux limites pour les EDO .

Théorème 3.2.1. *([7]) Soit* $(X, G, \preceq)$ *un espace G-métrique complet partiellement ordonnée et* $T : X \to X$ *une application croissante.*
Supposons qu'il existe $\psi \in \Psi$*,* $\alpha \in \phi_1$*, et* $\beta \in \phi_2$ *pour tout* $s, t > 0$

$$t > 0, et(s = tous = 0) \Rightarrow \psi(t) - \alpha(t) - \beta > 0qqq \tag{3.2.0.3}$$

Et

$$\psi(G(Tx,Ty,Tz)) \leq \alpha\left(\Theta(x,y,z) - \Theta(x,y,z)\right) \tag{3.2.0.4}$$

Où

$$\begin{aligned}\Theta(x,y,z) = \max\{&G(x,y,z), G(x,Tx,Tx), G(y,Ty,Ty), G(z,Tz,Tz)\\ &\frac{1}{3}[G(x,Ty,Ty) + G(y,Tz,Tz) + G(z,Tx,Tx)]\Big\}\end{aligned}$$

pour tout $x, t, z \in X$ *avec* $z \preceq y \preceq x$*.*
Nous supposons les hypothèses suivantes :

i *T est continue, ou*

ii *T est régulier*

S'il existe $x_0 \in X$ *telle que* $x_0 \preceq T_0$,
alors T admet un point fixe,
C'est-à-dire qu'il existe $z \in X$ *que* $z = Tz$

Démonstration. Soit x_0 le point donné de X.
Supposons $Tx_0 \neq x_0$.On choisit $x_0 \in X$ telle que $Tx_0 = x_1$.
Puisque T est une fonction croissante, nous avons :
$x_0 \leq x_1 = Tx_0 \leq Tx_1$.
Encore une fois
$x_2 = Tx_1$, ensuite nous avoir :

$$x_0 \leq x_1 = Tx_0 \leq x_2 = Tx_1 \leq Tx_2$$

Si $(x_{n_0} = x_{n_0+1})$ pour certain $n_0 \in \{0, 2, \cdots\}$, alors $x_{n_0+1} = x_{n_0} = Tx_{n_0}$, et donc nous avons terminé.
Maintenant nous peut supposer :

$$G(x_{n+1}, x_{n+2}, x_{n+2}) > 0, \forall n > 0 \tag{3.2.0.5}$$

On va d'abord montrer que :
$\lim_{n\to\infty} G(x_{n+1}, x_{n+2}, x_{n+2}) = 0.$
Puis que $x_n \preceq x_{n+1}$ on peut utiliser (3.2.0.4) pour ces point, et on a pour $n \geq 0$.

$$\begin{aligned}\Theta(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) = &\max\{G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}), G(x_n, Tx_n, Tx_n), G(x_{n+1}, Tx_{n+1}, Tx_{n+1}) \\ &\frac{1}{3}\left[G(x_n, Tx_{n+1}, Tx_{n+1}) + G(x_{n+1}, Tx_{n+1}, Tx_{n+1}) + G(x_{n+1}, Tx_n, Tx_n)\right]\Big\} \\ = &\max\{G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}), G(x_{n+1}, x_{n+2}, x_{n+2}) \\ &\frac{1}{3}\left[G(x_n, x_{n+2}, x_{n+2}) + G(x_{n+1}, x_{n+2}, x_{n+2})\right]\Big\}\end{aligned}$$

Par (G5) on à :

$$G(x_n, x_{n+2}, x_{n+2}) \leq G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) + G(x_{n+1}, x_{n+2}, x_{n+2})$$

Ainsi

$$\frac{1}{3}\left[G(x_n, x_{n+2}, x_{n+2}) + G(x_{n+1}, x_{n+2}, x_{n+2})\right] \leq \max\{G(x_n, x_{n+2}, x_{n+2}) + G(x_{n+1}, x_{n+2}, x_{n+2})\}.$$

Par conséquent nous avons :

$$\Theta(x_n, x_{n+2}, x_{n+2}) = \max\{G(x_n, x_{n+2}, x_{n+2}) + G(x_{n+1}, x_{n+2}, x_{n+2})\}$$

Maintenant, nous affirmons que

$$G(x_{n+1}, x_{n+2}, x_{n+2}) \leq G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}), \forall n \geq 0 \tag{3.2.0.6}$$

Supposant que ce n'est pas vrai, c'est-à-dire qu'il existe $n_0 \geq 0$ telle que :

$$G(x_{n_0+1}, x_{n_0+2}, x_{n_0+2}) > G(x_{n_0}, x_{n_0+1}, x_{n_0+1})$$

Or puis que $x_{n_0} \preceq x_{n_0+1}$, on peut utiliser l'inégalité (3.2.0.4) pour si élément, et on a :

$$\begin{aligned}
\psi(G(x_{n_0+1}, x_{n_0+2}, x_{n_0+2})) &= \psi(G(x_{n_0}, x_{n_0+1}, x_{n_0+1})) \\
&\leq \alpha(\max\left\{G(x_{n_0}, x_{n_0+1}, x_{n_0+1}), G(x_{n_0+1}, x_{n_0+2}, x_{n_0+2})\right\}) \\
&-\beta(\max\left\{G(x_{n_0}, x_{n_0+1}, x_{n_0+1}), G(x_{n_0+1}, x_{n_0+2}, x_{n_0+2})\right\})
\end{aligned}$$

Si

$$\max\left\{G(x_{n_0}, x_{n_0+1}, x_{n_0+1}), G(x_{n_0+1}, x_{n_0+2}, x_{n_0+2})\right\} = G(x_{n_0+1}, x_{n_0+2}, x_{n_0+2})$$

Alors

$$\psi(G(x_{n_0+1}, x_{n_0+2}, x_{n_0+2})) \leq \alpha(G(x_{n_0+1}, x_{n_0+2}, x_{n_0+2})) - \beta(G(x_{n_0+1}, x_{n_0+2}, x_{n_0+2}))$$

Par l'hypothèse (3.2.0.3) il s'ensuit que :

$$G(x_{n_0+1}, x_{n_0+2}, x_{n_0+2}) = 0$$

ce qui contredit la condition (3.2.0.5). Donc :

$$\max\left\{G(x_{n_0}, x_{n_0+1}, x_{n_0+1}), G(x_{n_0+1}, x_{n_0+2}, x_{n_0+2})\right\} = G(x_{n_0}, x_{n_0+1}, x_{n_0+1})$$

par conséquent, nous avons :

$$G(x_n, x_{n+2}, x_{n+2}) \leq G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) \forall n \in \mathbb{N}.$$

Donc, (3.2.0.6) est vrai et donc la suite $\{G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) : n \in \mathbb{N}\}$ est croissante et bornée au dessous de. Il existe $\rho \geq 0$ telle que :

$$\lim_{n\to\infty} G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) = \rho$$

Supposons maintenant que $\rho > 0$.Il découle de (3.2.0.4) que :

$$\psi(G(x_{n+1}, x_{n+2}, x_{n+2})) \leq \alpha\left(G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) - \beta(G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}))\right)$$

Et utilisant les propriétés des fonctions ψ, α, β on obtient :

$$\begin{aligned}
\psi(\rho) &\leq \liminf \psi(G(x_{n+1}, x_{n+2}, x_{n+2})) \leq \limsup \psi(G(x_{n+1}, x_{n+2}, x_{n+2})) \\
&\leq \limsup\left[\alpha\left(G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) - \beta(G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}))\right)\right] \\
&= \limsup \alpha\left(G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1})\right) - \liminf \beta\left(G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1})\right) \\
&\leq \alpha(\rho) - \beta(\rho)
\end{aligned}$$

En reprenant la condition (3.2.0.3), on obtient que ce n'est possible que si $\rho = 0$ ainsi :

$$\lim_{n \to \infty} G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) = 0 \tag{3.2.0.7}$$

En suite, nous montrons que $\{x_n\}$ est une suite G-Cauchy dans X.
Supposons le contraire , c'est-à-dire que $\{x_n\}$ est G-Cauchy.
Alors il existe $\varepsilon > 0$ pour lequel on peut trouver deux sous-suite $\{x_{m_i}\}$ et $\{x_{n_i}\}$ de $\{x_n\}$ telle que $\{n_i\}$ le plut petit indice pour le quel :

$$n_i > m_i > i, G(x_{m_i}, x_{n_i}, x_{n_i}) \geq \varepsilon \tag{3.2.0.8}$$

Cela signifie que :

$$n_i > m_i > i, G(x_{m_i}, x_{n_i-1}, x_{n_i-1}) < \varepsilon \tag{3.2.0.9}$$

De (3.2.0.8) (3.2.0.9) (G5), on obtient :

$$\begin{aligned}
\varepsilon &\leq G(x_{m_i}, x_{n_i}, x_{n_i}) \\
&\leq G(x_{m_i}, x_{n_i-1}, x_{n_i-1}) + G(x_{n_i-1}, x_{n_i}, x_{n_i}) \\
&< \varepsilon + G(x_{n_i-1}, x_{n_i}, x_{n_i})
\end{aligned}$$

En passant à limite lorsque $i \to \infty$ et en utilisant (3.2.0.7) on obtient :

$$\lim_{i \to \infty} G(x_{m_i}, x_{n_i}, x_{n_i}) = \varepsilon \tag{3.2.0.10}$$

En utilisant (G5), ona :

$$\begin{aligned} G(x_{m_i}, x_{n_i}, x_{n_i}) &\leq G(x_{m_i}, x_{m_i}, x_{m_i}) + G(x_{m_i+1}, x_{n_i+1}, x_{n_i+1}) + G(x_{n_i+1}, x_{n_i}, x_{n_i}) \\ &\leq G(x_{m_i}, x_{m_i+1}, x_{m_i+1}) + G(x_{m_i+1}, x_{m_i}, x_{m_i}) + G(x_{m_i}, x_{n_i}, x_{n_i}) \\ &+G(x_{n_i}, x_{n_i+1}, x_{n_i+1}) + G(x_{n_i}, x_{n_i}, x_{n_i}) \end{aligned}$$

En passant à la limite lorsque $i \longrightarrow \infty$ dans les inégalités ci-dessus et en utilisant (3.2.0.7) (3.2.0.10)

$$\lim_{i \to \infty} G(x_{m_i+1}, x_{n_i+1}, x_{n_i+1}) = \varepsilon \tag{3.2.0.11}$$

à nouveau en utilisant (G5)

$$\begin{aligned} G(x_{m(i)}, x_{n(i)+1}, x_{n(i)+1}) &\leq G(x_{m(i)}, x_{n(i)}, x_{n(i)}) + G(x_{n(i)}, x_{n(i)}, x_{n(i)+1}) \\ &\leq G(x_{m(i)}, x_{n(i)+1}, x_{n(i)+1}) + G(x_{n(i)}, x_{n(i)}, x_{n(i)}) + G(x_{n(i)}, x_{n(i)}, x_{n(i+1)}) \end{aligned}$$

en passant à la limite comme $i \longrightarrow \infty$ dans les inégalités ci-dessus et en utilisant (3.2.0.7), (3.2.0.10), on obtient que

$$\lim_{i \to \infty} G(x_{m(i)}, x_{n(i)+1}, x_{n(i)+1}) = \varepsilon \tag{3.2.0.12}$$

utiliser (G5)pour obtenir

$$\begin{aligned} G(x_{m(i)+1}, x_{n(i)}, x_{n(i)}) &\leq G(x_{m(i)+1}, x_{n(i)+1}, x_{n(i)+1}) + G(x_{n(i)+1}, x_{n(i)}, x_{n(i)}) \\ &\leq G(x_{m(i+1}, x_{n(i)}, x_{n(i)}) + G(x_{n(i)}, x_{n(i)+1}, x_{n(i)+1}) + G(x_{n(i)+1}, x_{n(i)}, x_{n(i)}) \end{aligned}$$

en passant à la limite dans les inégalités ci-dessus et en utilisant (3.2.0.7), (3.2.0.11), on obtient que

$$\lim_{i \to \infty} G(x_{m(i)+1}, x_{n(i)}, x_{n(i)}) = \varepsilon \tag{3.2.0.13}$$

puis que $x_{m(i)} \leq x_{n(i)}$ on à :

$$\begin{aligned}
&\Theta\left(x_{m(i)}, x_{n(i)}, x_{n(i)}\right)\\
&=\max\Big\{G\left(x_{m(i)}, x_{n(i)}, x_{n(i)}\right), G\left(x_{m(i)}, Tx_{m(i)}, Tx_{m(i)}\right), G\left(x_{n(i)}, Tx_{n(i)}, Tx_{n(i)}\right),\\
&\quad \frac{1}{3}\Big[G\left(x_{m(i)}, Tx_{n(i)}, TI_{n(i)}\right)+G\left(x_{n(i)}, Tx_{n(i)}, TI_{n(i)}\right)+G\left(x_{n(i)}, Tx_{m(i)}, Tx_{m(i)}\right)\Big]\Big\}\\
&=\max\Big\{G\left(x_{m(i)}, x_{n(i)}, x_{n(i)}\right), G\left(x_{m(i)}, x_{m(i)+1}, x_{m(i)+1}\right), G\left(x_{n(i)}, x_{n(i)+1}, x_{n(i)+1}\right),\\
&\quad \frac{1}{3}\Big[G\left(x_{m(i)}, x_{n(i)+1}, I_{n(i)+1}\right)+G\left(x_{n(i)}, x_{n(i)+1}, I_{n(i)+1}\right)+G\left(x_{n(i)}, x_{m(i)+1}, I_{m(i)+1}\right)\Big]\Big\}\\
&\leq\max\Big\{G\left(x_{m(i)}, x_{n(i)}, x_{n(i)}\right), G\left(x_{m(i)}, x_{m(i)+1}, x_{m(i)+1}\right), G\left(x_{n(i)}, x_{n(i)+1}, x_{n(i)+1}\right),\\
&\quad \frac{1}{3}\Big[G\left(x_{m(i)}, x_{n(i)+1}, x_{n(i)+1}\right)+G\left(x_{n(i)}, x_{n(i)+1}, x_{n(i)+1}\right)+2G\left(x_{n(i)}, x_{n(i)}, x_{m(i)+1}\right)\Big]\Big\}.
\end{aligned}$$

à la partir de (3.2.0.4), on à :

$$\psi(G(x_{m(i)}, x_{n(i)+1}, x_{n(i)+1})) = \psi(G(Tx_{m(i)}, Tx_{n(i)}, Tx_{n(i)}))$$

$$\leq \alpha(\max\{G(x_{m(i)}, x_{n(i)}, x_{n(i)}), G(x_{m(i)}, x_{m(i)+1}, x_{m(i)+1}), G(x_{n(i)}, x_{n(i)+1}, x_{n(i)+1}),$$

$$\frac{1}{3}[G(x_{m(i)}, x_{n(i)+1}, x_{n(i)+1}) + G(x_{n(i)}, x_{n(i)+1}, x_{n(i)+1}) + 2G(x_{n(i)}, x_{n(i)}, x_{m(i)+1})]\})$$

$$-\beta(\max\{(x_{m(i)}, x_{n(i)}, x_{n(i)}), G(x_{m(i)}, x_{m(i)+1}, x_{m(i)+1}), G(x_{n(i)}, x_{n(i)+1}, x_{n(i)+1}),$$

$$\frac{1}{3}[G(x_{m(i)}, x_{n(i)+1}, x_{n(i)+1}) + G(x_{n(i)}, x_{n(i)+1}, x_{n(i)+1}) + 2G(x_{n(i)}, x_{n(i)}, x_{m(i)+1})]\})$$

Passant à la limite comme $i \to \infty$ et utilisant (3.2.0.7), (3.2.0.10), (3.2.0.11), (3.2.0.12), (3.2.0.13) et les propriétés de fonctions ψ, α, β on à :

$$\begin{aligned}
\psi(\epsilon) \leq &\limsup \alpha\Big(\max\Big\{G\left(x_{m(i)}, x_{n(i)}, x_{n(i)}\right), G\left(x_{m(i)}, x_{m(i)+1}, x_{m(i)+1}\right), G\left(x_{n(i)}, x_{n(i)+1}, x_{n(i)+1}\right),\\
&\frac{1}{3}\Big[G\left(x_{m(i)}, x_{n(i)+1}, x_{n(i)+1}\right)+G\left(x_{n(i)}, x_{n(i)+1}, x_{n(i)+1}\right)+2G\left(x_{n(i)}, x_{n(i)}, x_{m(i)+1}\right)\Big]\Big\}\Big)\\
&-\liminf \beta\Big(\max\Big\{G\left(x_{m(i)}, x_{n(i)}, x_{n(i)}\right), G\left(x_{m(i)}, x_{m(i)+1}, x_{m(i)+1}\right), G\left(x_{n(i)}, x_{n(i)+1}, x_{n(i)+1}\right),\\
&\frac{1}{3}\Big[G\left(x_{m(i)}, x_{n(i)+1}, x_{n(i)+1}\right)+G\left(x_{n(i)}, x_{n(i)+1}, x_{n(i)+1}\right)+2G\left(x_{n(i)}, x_{n(i)}, x_{m(i)+1}\right)\Big]\Big\}\Big)\\
&\leq \alpha(\epsilon)-\beta(\epsilon).
\end{aligned}$$

En utilisant (3.2.0.3) on obtient $\varepsilon = 0$, une contradiction. donc x_n est une suite G-Cauchy dans X. donc il y a $z \in X$telle que

$$\lim_{n\to\infty} x_n = z. \tag{3.2.0.14}$$

Supposons que (i)tient. Puis que T est des G-continuons, on obtient que$x_{n+1} = Tx_n$ est une suite G-convergente vers Tz par l'unicité de limite on obtient que $z = Tz$ et donc z est un point fixe de T. Supposons que (ii) cela tient. Puis que x_n est une suit croisante telle que $x_n \to z$ et z est régulière, il s'ensuit que $x_n \leq z$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a donc :

$$\begin{aligned}\Theta(x_n, z, z) = &\max\{G(x_n, z, z), G(x_n, Tx_n, Tx_n), G(z, Tz, Tz)\\ &\frac{1}{3}[G(x_n, Tz, Tz) + G(u, Tz, Tz) + G(z, Tx_n, Tx_n)]\Big\}\\ = &\max\{G(x_n, z, z), G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}), G(z, Tz, Tz)\\ &\frac{1}{3}[G(x_n, Tz, Tz) + G(z, Tz, Tz) + G(z, x_{n+1}, x_{n+1})]\Big\}.\end{aligned}$$

par (3.2.0.4), on obtient :

$$\begin{aligned}\psi(G(x_{n+1}, Tz, Tz)) = &\psi(G(Tx_n, Tz, Tz))\\ \leq &\alpha(\max\{G(x_n, z, z), G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}), G(z, Tz, Tz)\\ &\frac{1}{3}[G(x_n, Tz, Tz) + G(u, Tz, Tz) + G(z, x_{n+1}, x_{n+1})]\Big\}\Big)\\ &-\beta(\max\{G(x_n, z, z), G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}), G(z, Tz, Tz)\\ &\frac{1}{3}[G(x_n, Tz, Tz) + G(u, Tz, Tz) + G(z, x_{n+1}, x_{n+1})]\Big\}\Big)\end{aligned}$$

en passant à la limite supérieure comme $n \to \infty$ dans les inégalités ci-dessus et en utilisant (3.2.0.14) et le fait que G est continue sur ses varaibles, on obtient que :

$$\psi(G(z, Tz, Tz)) \leq \alpha(G(z, Tz, Tz)) - \beta(G(z, Tz, Tz))$$

en utilisant (3.2.0.3), on obtenir $(G(z, Tz, Tz)) = 0$ et donc $z = Tz$. Alors z est un point fixe de T. $\square$

Dans cette section, nous présentes un autre exemple où le théorème(3.2.1) et ses corollaires peuvent être appliqués .
Nous étudions l'existante d'une solution pour le problème aux limites en de point suivant pour la seconde équation différentielle d'ordre :

$$\begin{cases}\frac{d^2u}{dt^2} = K(t, u(t)), t \in [0,1], u \in [0, +\infty),\\ u(0) = u(1) = 0.\end{cases}$$

Ce problème est équivalent à l'équation intégrale :

$$u(t) = \int_0^1 G(t,s)K(s,u(s))ds, \forall t \in [0,1] \tag{3.2.0.15}$$

Où
$K : [0,1] \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ et $G(t,s)$ est fonction de Green

$$G(t,s) = \begin{cases} t(1-s), 0 \leq s \leq t \leq 1 \\ s(1-t), 0 \leq t \leq s \leq 1 \end{cases}$$

Notons $X = C([0,1], \mathbb{R}^+)$-l'ensemble des fonctions continues réelles non négatives sur $[0,1]$.
Nous dotons X avec le G-métrique :

$$\forall u, v, w \in X, G(u,v,w) = \max_{t\in[0,1]} |u(t) - v(t)| + \max_{t\in[0,1]} |u(t) - w(t)| + \max_{t\in[0,1]} |v(t) - w(t)|.$$

Alors (X, G) est un espace G-métrique complet.
X peut également être équipé de l'ordre partielle $\preceq$ donnée par :

$$u, v \in X, u \preceq v \Leftrightarrow u(t) \leq v(t), \forall t \in X$$

De plus, il est prouvé que $(x, G, \preceq)$ est régulier (voir la définition 1.7.6)
Considérer l'application $T : X \to X$ définie par :

$$Tu(t) = \int_0^1 G(t,s)K(s,u(s))ds, \forall t \in [0,1] \tag{3.2.0.16}$$

Clairement, u est une solution de (3.2.0.15) si et seulement si u est un point fixe de T.
Nous prouverons l'existence et l'unicité du point fixe de T sous conditions suivantes :

Théorème 3.2.2. *([7]) : Supposons que les hypothèses suivantes s'appliquent :*

(i) K(s, .) est une fonction croissante pour tout fixe $s \in [0,1]$ c'est-à-dire :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^+, x \leq y \Rightarrow K(s,x) \leq K(s,y)$$

(ii) $\forall t, s \in [0.1]$, $u \in X$, on a :

$$K(t, u(s)) \leq K\left(t, \int_0^1 K(s, u(\tau))d\tau\right)$$

(iii) $\forall t \in [0.1]$ et $x, y \in \mathbb{R}$ telle que $x \geq y$

$$|K(t,x) - K(t,y)| \leq 6|x-y|$$

(iv) Il existe $u_0 \in C([0.1])$ telle que $u_0 \leq Tu_0(t)$ pour $t \in [0,1]$

Alors l'équation intégrale (3.2.0.15) admet une solution $u^* \in C([0,1])$

Démonstration. **([7])** : Considérons $T : X \to X$ donnée par (3.2.0.16). Prouvons que :

$$Tu \leq T(Tu), \forall u \in X. \tag{3.2.0.17}$$

Soit $u \in C([0,1])$. D'après (ii), pour tout $t, s \in [0,1]$, on a :

$$\begin{aligned} Tu(t) &= \int_0^1 G(t,s)K(s,u(s))\,ds \\ &\leq \int_0^1 G(t,s)\,K\left(s, \int_0^1 G(t,s)\,K(s,u(\tau)d\tau)\right)ds \\ &= \int_0^1 G(t,s)\,K(s,Tu(s))\,ds \\ &= T(Tu)(t) \end{aligned}$$

Alors (3.2.0.17) est vérifie. Puisque $G(t,s) \geq 0$ pour tout $t, s \in [0,1]$, on déduit de (i)que pour $u \leq v$

$$\int_0^1 G(t,s)K(s,u(s))\,ds \leq \int_0^1 G(t,s)K(s,v(s))\,ds$$

C'est-à-dire que $Tu(t) \leq Tv(t)$ est vrai pour tout $t \in [0,1]$.
Ainsi T est une application croissante. Aussi de (iv), $u_0 \leq Tu_0$ pour
$u_0 \in X$, puis que :
$G(s,t) \geq 0$, $\forall s, t \in [0,1]$, donc pour tout $u, v, w \in X$, Tel que $u \leq v \leq w$, d'après (iii), on a :

$$\begin{aligned} G(Tu,Tv,Tw) &= \max_{t\in[0,1]}|Tu(t)-Tv(t)| + \max_{t\in[0,1]}|Tu(t)-Tw(t)| + \max_{t\in[0,1]}|Tv(t)-Tw(t)| \\ &= \max_{t\in[0,1]} \int_0^1 G(t,s)\,|K(s,u(s)) - K(s,v(s))|\,ds \\ &+ \max_{t\in[0,1]} \int_0^1 G(t,s)|K(s,u(s)) - K(s,w(s))|ds \\ &+ \max_{t\in[0,1]} \int_0^1 G(t,s)|K(s,v(s)) - K(s,w(s))|ds \\ &\leq \max_{t\in[0,1]} \int_0^1 G(t,s)\,(|u(s)-v(s)| + |u(s)-w(s)| + |v(s)-w(s)|)\,ds \\ &\leq G(u,v,w)\max_{t\in[0,1]} \int_0^1 G(t,s)ds. \end{aligned} \tag{3.2.0.18}$$

Il est facile de vérifier :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 G(t,s)ds &= \int_0^t s(1-t)ds + \int_0^t t(1-s)ds \\
&= 1-t\int_0^t sds + t\int_0^t 1-sds \\
&= 1-t\left[\frac{s^2}{2}\right]_0^t + t\left[s-\frac{s^2}{2}\right]_t^1 \\
&= 1-t\left[\frac{t^2}{2}\right] + t\left[\left(1-\frac{1}{2}\right)-\left(t-\frac{t^2}{2}\right)\right] \\
&= 1-t\left[\frac{t^2}{2}\right] + t\left[\frac{1}{2}-t+\frac{t^2}{2}\right] \\
&= \frac{t^2}{2}-\frac{t^3}{2}+\frac{t}{2}-t^2+\frac{t^3}{2} \\
&= -\frac{t^2}{2}+\frac{t}{2}
\end{aligned}$$

Donc :

$$\int_0^1 G(t,s)ds = \frac{-t^2}{2}+\frac{t}{2}.$$

on pose :

$$f(x) = -\frac{x^2}{2}+\frac{x}{2} \tag{3.2.0.19}$$

On à :

$f'(x) = -x+\dfrac{1}{2}$

$\forall x \in \left]-\infty,\dfrac{1}{2}\right[: f'(x) < 0$

et

$\forall x \in \left]\dfrac{1}{2},+\infty\right[: f'(x) > 0$

aussi :

$\forall x \in \left]-\infty,\dfrac{1}{2}\right[, f \leq \dfrac{1}{8}$ avec $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{8}$ et cela

$$\sup_{t\in[0,1]} \int_0^1 G(t,s)ds = \frac{1}{8}.$$

Avec ces faits, l'inégalité (3.2.0.18) nous donne :

$$G(Tu,Tv,Tw) \leq \frac{3}{4}G(u,v,w) \leq \frac{3}{4}\Theta(u,v,w).$$

Maintenant, en considérant les fonction de contrôle $\psi, \alpha, \beta : [0,\infty) \to [0,\infty)$ définis par : $\psi(t) = t + \frac{3}{2}$, $\alpha(t) = t + \frac{5}{2}$ et $\beta(t) = \frac{t}{4} + 1$, pour $t > 0$
On a :

$$\psi(G(Tu,Tv,Tw)) \leq \alpha(\Theta(u,v,w) - \beta(\Theta(u,v,w))),$$

pour tout $u,v,w \in C(I)$, tel que $u \leq v \leq w$.
Maintenant, toutes les hypothèses requises du théorème (3.2.1) sont satisfait. Alors T admets un point fixe $u^* \in C([0,1])$, u^* est une solution de (3.2.0.15)(et donc aussi de le problème aux limites donné). $\square$

CONCLUSION

Ce mémoire, présente quelques théorème du point fixe et application dans les espaces G-métrique ordonnée qui sont parmi les outils les plus puissants de l'analyse et dont la littérature regorge d'applications dans divers domaines, notamment lorsqu'il s'agit d'établir l'existence de solutions pour des équations intégrales ou différentielles. Par ailleurs, ils servent aussi de pont entre l'analyse et la topologie, ce qui leur permet d'interagir et de donner de bons et d'intéressants résultats.

Bibliographie

[1] **A. H. Ansari**, *Note on '- -contractive type mappings and related fixed point, The 2nd Regional Conference on Mathematics and Applications* (Payame Noor University), 2014 (2014), 377–380. 1, 1.8, 1.9

[2] **Berinde, V. and Păcurar, M.**, *Approximating fixed points of enriched contractions in Banach spaces, J. Fixed Point* Theory Appl., 22 (2020), No. 2, Paper 38, 10 pp.

[3] **Berinde, V. and Păcurar, M**. *Kannan's fixed point approximation for solving split feasibility and variational inequality* problems, J. Comput. Appl. Math., 386 (2021), 113217, 9 pp

[4] **D. H. Hyers**, *On the stability of linear functional equations*, National Academy of Sciences U.S.A. 27 (1941) 222-224.

[5] **Hassen Aydi,1 Erdal Karapınar,2 and Wasfi Shatanawi3**, *Tripled Fixed Point Results in Generalized Metric Spaces*, Hindawi Publishing Corporation Journal of Applied Mathematics Volume 2012, Article ID 314279, 10 pages doi :10.1155/2012/314279

[6] **HAYONG CHOIA, SEGONG KIMB, SEUNG YEOP YANGC** *Structure for g-Metric Spaces and Related Fixed Point Theorems*, aSchool of Information Science and Technology, ShanghaiTech University, Pudong district, Shanghai 200031, China bDepartment of Mathematics, Chungbuk National University, Cheongju 361-763, Republic of Korea cDepartment of Mathematics, University of Denver, Denver, CO 80208, USA

[7] **Hemant Kumar Nachine(a,*), Atule Kumar Sharma(b)** *Fixed point theorems under weakly contractive conditions via auxiliary functions in ordered G-metric spaces*, Int. J. Nonlinear Anal. Appl. 9 (2018) No. 2, 85-109 ISSN : 2008-6822 (electronic)

[8] **L. B. Ćirić**, *A generalization of Banach's contraction principle, Proc. Amer. Math. Soc., 45 (1974), 267–273.*

[9] **Mehdi Asadi1, Erdal Karapınar2* and Peyman Salimi3**, *A new approach to G-metric and related fixed point theorems*, Asadi et al. Journal of Inequalities and Applications 2013, 2013 :454

[10] **Mustafa, Z** *A new structure for generalized metric spaces with applications to fixed point theory.* PhD thesis, The University of Newcastle, Australia (2005)

[11] **M.S. Khan, M. Swaleh and S. Sessa**, *Fixed point theorems by altering distancces between the points*, Bull. Aust. Math. Soc. 30 (1984) 19.

[12] **partikshan mondal(1), Hiranmoy Garai(2), LakshminKanta Dey(3)** *On some enriched contractions in banach spaces*, New Delhi, India, for their financial supports under the CSIR-SRF fellowship scheme (Award Number : 09/973(0018)/2017-EMR-I).

[13] **R. Saadati, S. M. Vaezpour, P. Vetro, B. E. Rhoades,** *Fixed point theorems in generalized partially ordered G-metric spaces*, Math. Comput. Modelling, 52 (2010), 797–801. 1, 1.3, 1.6

[14] **S. Moradi**, *Kannan Fixed-Point Theorem On Complete Metric Spaces And On Generalized Metric Spaces Depended an Another Function* , arXiv :0903.1577v1 [math.FA] 9 Mar 2009

[15] **S¸ TEFAN MĂ RUS¸TER and IOAN A. RUS**, *Kannan contractions and strongly demicontractive mappings*, CREAT. MATH. INFORM. 24 (2015), No. 2, 173 - 182

[16] **Stojan Radenovi'ca,b, Arslan Hojat Ansaric,d, Ali Turabe, Muaadh Almahalebif**, *A fixed point theorem in ordered G-metric spaces with its application via new functions*, Math. Nat. Sci., 3 (2018), 1–11

[17] **Tran Van Anaa,Nguyen Van Dung b,*,Vo Thi Le Hangb,** *Anew approach to fixed point theorem on G-metric spaces*, TopologyanditsApplications160(2013)1486–1493

[18] **VASILE** $BERINDE^{1,2}$ **and** $MDLINA\ PCURAR^{3}$, *Fixed point theorems for enriched Ćirić-Reich-Rus contractions in Banach spaces and convex metric spaces*,CARPATHIAN J. MATH. Volume 37 (2021), No. 2, Pages 173 - 184

[19] **VASILE** $BERINDE^{1,2}$ **and** $MDLINA\ PCURAR^{3}$, *FIXED POINT THEOREMS FOR KANNAN TYPE MAPPINGS WITH APPLICATIONS TO SPLIT FEASIBILITY AND VARIATIONAL INEQUALITY PROBLEMS*, arXiv :1909.02379v1 [math.FA] 5 Sep 2019

[20] **YAÉ ULRICH GABA1,2 AND COLLINS AMBURO AGYINGI**2, *n-TUPLE FIXED POINT IN* $\phi - ORDERED$ *G-METRIC SPACES*, arXiv :1709.0768v1 [math.GN] 22 Sep 2017

[21] **Y. U. Gaba**. *Fixed point theorems in G-metric spaces.* J. Math. Anal. Appl., 455(1) :528–537, 2017.

[22] **ZEAD MUSTAFA AND BRAILEY SIMS**(ch1), *A new approach to generalized metric space.* Journal of Nonlinear and Convex Analysis Volurne 7, Number 2, 2006, 289-297

[23] **Zead Mustafa, Hamed Obiedat, and Fadi Awawdeh**, *Some Fixed Point Theorem for Mapping on Complete G-Metric Spaces*, Volume 2008, Article ID 189870, 12 pages doi :10.1155/2008/189870

[24] **Z. Mustafa and B. Sims**, *A new approach to generalized metric spaces*, J. Nonlinear Convex Anal. 7 (2006) 289297.

Remerciement

Avant toute chose, nous tenons à remercier « **Allah** » le tous puisant, pour nous avoir donné la force et la patience.

✓ Je tiens à exprimer ma gratitude à mon gestionnaire de mémoire **Dr. Mokhtari Mokhtar** . Je la remercie de m'avoir encadré orienté, aidé et conseillé.

✓ Mes remerciement les plus sincères aux membres du jury qui m'ont fait honneur de juger mon travail plus précisément pour examinateur **Sofrani Mohammed** président du jury et pour **Pr.Souid Mohammed Said** .

✓ Sans oublier l'ensemble des enseignants ayant contribué à ma formation durant mes cycles d'études.

✓ Finalement, je remercie tous ceux ou celles qui ont contribué de près ou de loin à l'accomplissement de ce mémoire.

★ *A vous tous, un grand Merci*