REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE & POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR & DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Université Ibn Khaldoun- Tiaret
FACULTÉ DES MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUE
DÉPARTEMENT DES MATHEMATIQUES

MEMOIRE MASTER

Présentée par:

Bellahreche Fatima Zahra

Bensaid Nadjet

Ghailani Soumia

Spécialité : *Mathématiques*

Option : *Analyse fonctionnelle et application*

Intitulé

Sur certains problèmes aux limites non linéaires d'ordre fractionnaire

Soutenue le :14/06/ 2022 devant le jury composé de :

Président :	*Mahrouz Tayeb*	*MCB. Univ. Ibn Khaldoun de Tiaret*
Examinateurs :	*Dellal Mohamed*	*MCA. Univ. Ibn Khaldoun de Tiaret*
Encadreur :	*Benmehidi Hammou*	*MCB. Univ. Ibn Khaldoun de Tiaret*

2021-2022

Remerciements

✓ Nous rendons grâce au **Dieu** de nous avoir donné la force, patience, le courage et la volonté pour achever ce travail.

✓ Nous remercions vivement **Mr. Hammou Benmhidi** pour la confiance qu'il nous avons accordées en acceptant de nous encadrer, pour sa disponibilité tout au long de lélaboration de mémoire, pour son aide, ses critiques et ses suggestions, qui ont été pour notre d'un grand apport.

✓ Notre remerciement les plus sincères aux membres du jury qui m'ont fait honneur de juger notre travail plus précisément pour les mombres de jury **Mr. DELLAL Mohamed** et **Mr. MAHROUZ Tayeb** .

✓ Sans oublier l'ensemble des enseignants ayant contribué à ma formation durant mes cycles d'études.

✓ Finalement,nous remercions tous ceux ou celles qui ont contribué de près ou de loin à l'accomplissement de ce mémoire.

★ *A vous tous, un grand Merci*

Dédicace

★ *Avant tout, je remercie le grand dieu qui nous a aidés à élaborer ce modeste travail*

★ *Ma chère maman que dieu la bénisse et la protège dans sa vie je dédie mon père qui a sacrifié toute sa vie afin de me voir devenir se que je suis, merci mes parents.*

★ ***À mes chères soeurs*** *:Asma, Zineb, Azza,Amel,Khadidja,Karima*

★ ***À mes chèr fréres :****Mohamed, Younes*

★***A mon encadreur Hammou Benmhidi*** *qui mérite tous mon respect et tribut.*

★ ***À ma très chère binôme :*** *Nadjet, Soumia*

Et tous mes enseignants, je leurs exprime ma profonde gratitude.

A tous les étudiants de promotion de AFA et AFED .

Et toute personne qui me connait.

Bellahreche Fatima Zohra

Dédicace

★ *Avant tout, je remercie le grand dieu qui nous a aidés à élaborer ce modeste travail*

★ *Ma chère maman que dieu la bénisse et la protège dans sa vie je dédie mon père qui a sacrifié toute sa vie afin de me voir devenir se que je suis, merci mes parents.*

★ ***À mes chères soeurs*** *:Fatima,Bochra*

★ ***À mes chèr fréres :****Mohamed, Houcine,Ibrahim*

★***A mon encadreur Hammou Benmhidi*** *qui mérite tous mon respect et tribut.*

★ ***À ma très chère binôme :*** *Fatima, Soumia*

Et tous mes enseignants, je leurs exprime ma profonde gratitude.

A tous les étudiants de promotion de AFA et AFED .

Et toute personne qui me connait.

Bensaid Nadjet

Dédicace

★

★ *Je remercie tout d'abord,* ***Allah****, le toute puissant et clément de m'avoir aidé à réaliser se travail.*

Je dédie ce mémoire : ★ *A mes chers parents ma mère et mon père pour leur patience, leur amour, leur soutien et leurs encouragements.*

★ ***A mes frères :****Zeno,Ilyes,Khaled .*

★***A mes soeurs :****Romaysa,Ahlem.*

★***A mon encadreur Hammou Benmhidi*** *qui mérite tous mon respect et tribut.*

Ghailani soumia

Résumé

Dans ce mémoire de master, on étudie l'existence et l'unicité de la solution d'un système composé par une équation différentielle fractionnaire non linéaire qui contient la dérivée de Caputo et des conditions aux limites. Pour étudier l'existence et l'unicité de ces solutions, on a utilisé quelques résultats les plus importants des thórèmes de points fixes dans l'espace de Banach. Un exemple concret est aussi donné pour soutenir le coté thèorique qui a été obtenu.
Mots clés : Caputo, point fixe, existence et unicité.

Abstract

In this master thesis, we study the existence and uniqueness of the solution of a system composed by a fractional differential equation which contains the Caputo derivative and boundary conditions. To study the existence and uniqueness of these solutions, some of the most important results of the fixed point theorems in Banach space are used. A concrete example is also given to support the theoretical side that has been obtained.
Key words : Caputo, fixed point, existence and uniqueness.

ملخص

في مذكرة الماستر هذه ، ندرس وجود وتفرد حل نظام يتكون من معادلة تفاضلية كسرية غير خطية تحتوي على مشتق كابوتو والشروط الحدية. لدراسة وجود هذه الحلول وتفردها ، استخدمنا بعضًا من أهم نتائج نظريات النقطة الثابتة في فضاء باناخ. كما يتم إعطاء مثال ملموس لدعم الجانب النظري الذي تم الحصول عليه.

كلمات مفتاحية: كابوتو ، النقطة الثابتة ، الوجود والتفرد.

Table des matières

Introduction générale

Le calcul fractionnaire est une généralisation de la différentiation et de l'intégration usuelles a un ordre arbitraire non entier. Le sujet est aussi ancien que le calcul différentiel et remonte a l'époque ou Leibniz et Newton inventérent le calcul différentiel. La première apparition du calcul fractionnaire est dans une lettre écrite a Guillaume l'Hopital par Gottfried Wilhelm Leibniz , datée du 30 septembre 1695, dans laquelle il a introduit le symbole $\frac{d^n f}{dx^n}$ pour désigner la dérivée d'ordre $n \in \mathbb{N}$ dune fonction f, l'Hopital a répondu :
$\ll$ **que signifier** $\frac{d^n f}{dx^n}$ **si** $n = \frac{1}{2}$ **?** $\gg$. La dérivation et l'intégration dordre fractionnaire remonte à diverses correspondances entre Gottfried Leibniz, Guillaume LHopital et Johann Bernoulli à la fin du 17e siècle. les bases du sujet ont été posées par Liouville dans [20],[21]. La théorie et les applications du calcul fractionnaire se sont considérablement développées au cours des XIX^{eme} et XX^{eme} siècles, et de nombreux contributeurs ont donné des définitions pour les dérivées et les intégrales fractionnaires . Pour la première fois, il semble que la recherche dans le calcul fractionnaire n'ait aucune importance pour les autres sciences, et celle-ci ne reste qu'une recherche purement mathématique, mais il a gagné une popularité et une considération importante dans les autres sciences appliqués comme la biologie, mécaniques de fluides. Pour plus de détails, vous pouvez consulter [13],[27],[29].

Ce mémoire est composée en trios chapitre :
Dans le première chapitre, nous présentons quelques notions d'analyse fonctionnelle, puis nous rappelons les définitions de quelque fonctions spéciales (fonction Gamma,fonction Betta) et leurs propriétés essentiels. Dans le dernière section on donne quelques théorème du point fixe qui jouent un rôle important dans notre travail.
Dans le deuxième chapitre, nous présentons les définitions de quelques intégrales et dérivées fractionnaires qui jouent un rôle majeur dans notre travail et nous présentons certaines de leurs propriétés.
Dans le troisième chapitre, est consacré a l'étude des résultats d'existence et d'unicité de solutions concernant un problème aux limites pour une équation différentielle fractionnaire de type Caputo de la forme :

$$\begin{cases} {}^cD^{\alpha}u(t) = \lambda f\left(t, u(t)\right) \\ u(0) = a_1,\ u^{'}(T) = a_2, \end{cases} \alpha \in \left]1, 2\right],\ t \in \left[0, T\right].$$

ou ${}^cD^{\alpha}$ est la dérivée fractionnaire de type Caputo d'ordre $1 < \alpha \leq 2$, $f : [0, T] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue, $a_i \in \mathbb{R}\,(i = 1, 2)$ et $\lambda \in \mathbb{R}^*$.

Aprés avoir donne la solution générale, nous utilisons le principe de contraction de Banach pour prouver notre premier résultat principal.
Le deuxième résultat principal concerne l'existence et l'unicité des solutions de ce problème il sera établie via le théorème de Schaefer. .

Chapitre 1

Notions préliminaires

Dans ce chapitre, nous présentons les concepts de base liées l'analyse fonctionnelle, puis nous rappelons les définitions et les propriétés essentiels des deux fonctions Gamma et Beta qui jouent un rôle important dans le calcul fractionnaire. Nous terminons ce chapitre en rappelant quelques théorèmes du point fixe que nous avons utilisés dans ce travail. Pour plus de détails sur ces concepts, veuillez consulter les références suivantes [19],[22],[30],[32].

1.1 Notations et définitions de base

Dans cette section, nous rappelons les notations utilisées dans les chapitres suivants, ainsi que quelques notions d'analyse fonctionnelle.
L'ensembles des nombres réels est notée $\mathbb{R}$.
L'ensembles des nombres réels positifs est notée $\mathbb{R}^+$.
L'ensembles des nombres réels non nuls est notée $\mathbb{R}^*$.
On note $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers $\{1, 2, 3, ..., ...\}$ et $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \cup \{0\}$.

On note Ω, l'intervalle finie de la forme $[a, b]$ $(0 \leq a < b < \infty)$.

1.1.1 Quelques espaces fonctionnels

Définition 1.1.1 *L'espace des fonctions continues $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ est note $C(\Omega)$ et*

$$\|f\|_{C(\Omega)} = \sup_{x\in\Omega} |f(x)|$$

Définition 1.1.2 *Soit $n \in \mathbb{Z}_+$, on note $C^k(\Omega)$ l'espace des fonctions n-fois continument différentiables sur Ω, et*

$$\|f\|_{C^k(\Omega)} = \sum_{k=0}^{n} \left\|f^{(k)}\right\|_{C(\Omega)}.$$

Définition 1.1.3 *Soit $p \in [1, +\infty]$, on définit $L^p(\Omega)$ l'ensemble des classes de fonctions $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ measurable tel que*

$$\begin{aligned} \|f\|_p &= \left(\int_\Omega |f|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}}, p < +\infty \\ \|f\|_\infty &= ess \sup_{x\in\Omega} |f(x)|. \end{aligned}$$

1.1.2 Fonctions absolument continues

Définition 1.1.4 *On note $AC(\Omega)$ l'espace des fonctions absolument continues sur Ω, not $AC(\Omega)$ est l'espace des fonctions primitives de fonctions Lebesgue-sommables c'est a-dire*

$$f \in AC(\Omega) \Leftrightarrow \exists \varphi \in L^1(\Omega) \text{ telle que } f(x) = c + \int_a^x \varphi(t)dt.$$

Théorème 1.1 *L'espace $AC(\Omega)$ coincide avec l'espace des primitives de fonctions sommable de Lebesgue c'est a-dire.*

$$f \in AC(\Omega) \Leftrightarrow f(x) = c + \int_a^x \varphi(t)dt, \quad \left(\varphi \in L^1(\Omega)\right)$$

Définition 1.1.5 *Soit $n \in \mathbb{N}$. On note $AC^n(\Omega)$, l'espace des fonctions $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ $(n-1)$ −fois continument dérivable sur Ω tel que $f^{(n-1)} \in AC(\Omega)$, i.e. :*

$$AC^n(\Omega) = \left\{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}, f^{(k)} \in C(\Omega), k \in \{0, 1, .., n-1\} \text{ et } f^{(n-1)} \in AC(\Omega)\right\}.$$

En particulier $AC^1(\Omega) = AC(\Omega)$.

Définition 1.1.6 *Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\delta = t\frac{d}{dt}$. L'espace des fonctions f qui ont δ^{n-1}-dérivées absolument continues, noté $AC_\delta^n(\Omega)$ est définie comme suit :*

$$AC_\delta^n(\Omega) = \{f : [a,b] \longmapsto \mathbb{R} : \delta^{n-1} f \in AC(\Omega)\}.$$

Clairement $AC_\delta^1(\Omega) \equiv AC(\Omega)$.

1.2 Fonctions spéciales

1.2.1 La fonction Gamma

Dans cette section, nous présentons les définitions et quelques propriété bases des fonctions Gamma et Bêta. Ces fonctions jouent le rôle le plus important dans la théorie des opérateurs d'intégrations et de dérivations d'ordre non entier et dans la théorie des équations différentielles fractionnaires. Pour plus de détails voir [19],[27],[30].

Définition 1.2.1 *Soit $z \in \mathbb{R}$ tel que $z > 0$. La fonction Gamma notée par Γ, est définie par :*

$$\Gamma(z) := \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt,$$

Proposition 1.2.1 *La fonction Gamma est bien définie sur l'ensemble $\mathbb{R}^+$.*

Démonstration. On écrivons $\Gamma(z)$ sous la forme

$$\Gamma(z) := \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt = \int_0^1 e^{-t} t^{z-1} dt + \int_1^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt.$$

En étudiant la convergence de la première intégrale. On a

$$I_1 = \int_0^1 e^{-t} t^{z-1} dt < \int_0^1 t^{z-1} dt = \frac{1}{z}.$$

D'ou la première intégrale est convergente pour $0 < z \leq 1$.
Maintenant nous étudions la convergence de la seconde. On a

$$\int_1^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt < \int_1^{+\infty} e^{-\frac{t}{2}} dt = 2e^{-\frac{1}{2}}.$$

Par conséquent, la fonction Gamma est définie pour tout $z \in \mathbb{R}^+$.

Proposition 1.2.2 *Soit $z \in \mathbb{R}$ tel que $z > 0$, alors la fonction Gamma vérifie les propriétés suivantes :*

1. $\Gamma(1) = 1$
2. $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$
3. $\Gamma(n+1) = n!, \forall n \in \mathbb{Z}_+$.

Démonstration.

1. $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 1.$
2. Par une intégration par parties , on obtient

$$\begin{aligned} z\Gamma(z) &= \int_0^{+\infty} e^{-t} z t^z dt \\ &= -e^{-t} t^z \Big|_0^{\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-t} t^z dt \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-t} t^z dt \\ &= \Gamma(z+1). \end{aligned}$$

3. En utilisant la propriété 2), nous obtenons :

$$\begin{aligned} \Gamma(n+1) &= n\Gamma(n) \\ &= n(n-1)\Gamma(n-1) \\ &= n(n-1)(n-2)\Gamma(n-2) \\ &\quad ... \\ &\quad ... \\ &\quad ... \\ &= n(n-1)(n-2)(n-3)...\Gamma(1). \end{aligned}$$

ou

$$\Gamma(1) = 1.$$

Donc

$$\Gamma(n+1) = n!.$$

1.2.2 Quelques valeurs de la fonction gamma

Nous avons la relation de récurrence pour la fonction Gamma :

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z).$$

Nous calculons $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$. On a

$$\begin{aligned}
\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &= \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{-\frac{1}{2}} dt = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt \qquad t = x^2 \quad \text{donc} \quad dt = 2xdx \\
&= 2\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx.
\end{aligned}$$

On calcul l'intégrale $I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$.
En conséquence, nous effectuons les manipulations suivantes :

$$\begin{aligned}
I^2 &= \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} du\right)^2 \\
&= \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} du\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx\right) \\
&= \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} du\right) \\
&= \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(x^2+y^2\right)} dxdy.
\end{aligned}$$

Pour calculer la dernière intégrale, on utilise le changement de variables suivant :

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad r \geq 0.$$

Alors

$$\begin{aligned}
I^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(x^2+y^2\right)} dxdy \\
&= \int_0^{+\infty} \int_0^{2\pi} e^{-r^2} rdrd\theta \\
&= \int_0^{+\infty} e^{-r^2} rdr \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi \int_0^{+\infty} e^{-r^2} rdr \quad r^2 = w \quad \text{donc} \quad rdr = \frac{1}{2} dw \\
&= \pi \int_0^{+\infty} e^{-w} dw = \pi.
\end{aligned}$$

D'où

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

Ainsi, nous avons démontré que

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

Proposition 1.2.3 *Pour tout $n \in \mathbb{N}$,*

$$\Gamma\left(\frac{1}{2} + n\right) = \frac{(2n)!}{2^{2n} n!} \sqrt{\pi} \tag{1.1}$$

Démonstration. On procède par récurrence. Si $n = 0$, on a $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.
On suppose que la formule est vraie au rang n. Alors

$$\begin{aligned}
\Gamma\left(\frac{1}{2} + 2\left(n+1\right)\right) &= \Gamma\left(\frac{2n+1}{2} + 1\right) \\
&= \frac{2n+1}{2} \times \Gamma\left(\frac{2n+1}{2}\right) \\
&= \frac{2n+1}{2} \times \Gamma\left(\frac{1}{2} + n\right) \\
&= \frac{2n+1}{2} \times \frac{(2n)!}{2^{2n} n!} \sqrt{\pi} \\
&= \frac{(2n+1)!}{2^{2n+1} n!} \sqrt{\pi} \\
&= \frac{(2n+2)}{(2n+2)} \frac{(2n+1)!}{2^{2n+1} n!} \sqrt{\pi} \\
&= \frac{(2n+2)!}{2^{2n+2} \left(n+1\right) n!} \sqrt{\pi} = \frac{(2n+2)!}{2^{2n+2} \left(n+1\right)!} \sqrt{\pi}.
\end{aligned}$$

Donc la formule est vraie au rang $n+1$. En utilisant la formule (1.1), on obtient :

$$\Gamma\left(\frac{9}{2}\right) = \frac{105}{16}\sqrt{\pi} \approx 11,63$$
$$\Gamma\left(\frac{11}{2}\right) = \frac{945}{32}\sqrt{\pi} \approx 52,34$$
$$\Gamma\left(\frac{13}{2}\right) = \frac{10395}{64}\sqrt{\pi} \approx 287,89.$$

1.2.3 La Fonction Bêta

Définition 1.2.2 *Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha, \beta > 0$. La fonction Bêta, notée $B(\alpha,\beta)$ est définie par*

$$B(\alpha,\beta) := \int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}\,dt. \tag{1.2}$$

Proposition 1.2.4 *La fonction $B(\alpha,\beta)$ est bien définie pour $\alpha > 0$ et $\beta > 0$.*

Démonstration.
On a $t \longmapsto t^{x-1}(1-t)^{y-1}$ est continue sur l'intervalle $]0,1[$.
Au voisinage de 0 : $t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1} \underset{t\longrightarrow 0^+}{\sim} \frac{1}{t^{1-\alpha}}$ et

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{t^{1-\alpha}} \text{ converge car } 1-\alpha < 1.$$

Au voisinage de 1 : $t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1} \underset{t\longrightarrow 1^-}{\sim} \frac{1}{(1-t)^{1-\beta}}$ et

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dt}{(1-t)^{1-\beta}} \underset{u=1-t}{=} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{du}{u^{1-\beta}} \text{ converge car } 1-\beta < 1.$$

Proposition 1.2.5 *La fonction Bêta vérifie la propriété suivante*

$$B(\alpha,\beta) = B(\beta,\alpha).$$

Démonstration. Soient $\alpha, \beta > 0$

$$\begin{aligned} B(\alpha, \beta) &= \int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}\, dt \quad u = 1-t \quad donc \quad dt = -du \\ &= \int_1^0 (1-u)^{\alpha-1} u^{\beta-1} (-du) \\ &= \int_0^1 u^{\beta-1}(1-u)^{\alpha-1}\, du \\ &= B(\beta, \alpha). \end{aligned}$$

La forme trigonométrique de la fonction Bêta est donnée dans la proposition suivante :

Proposition 1.2.6 *Soit $\alpha, \beta > 0$, alors*

$$B(\alpha, \beta) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin\theta)^{2\alpha-1}(\cos\theta)^{2\beta-1}\, d\theta$$

Démonstration. On pose $t = \sin^2\theta$ donc $dt = 2\sin\theta\cos\theta d\theta$.

$$\text{Si } t = 1, \theta = \frac{\pi}{2} \text{ et si } t = 0, \theta = 0$$

et on a $1 - t = 1 - \sin^2\theta = \cos^2\theta$. En remplace dans (1.2), on obtient

$$\begin{aligned} B(\alpha, \beta) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2\theta)^{\alpha-1}(\cos^2\theta)^{\beta-1}(2\sin\theta\cos\theta)d\theta \\ &= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin\theta)^{2(\alpha-1)}(\cos\theta)^{2(\beta-1)}(\sin\theta\cos\theta)d\theta \\ &= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin\theta)^{2\alpha-1}(\cos\theta)^{2\beta-1}\, d\theta. \end{aligned}$$

Proposition 1.2.7 *Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha, \beta > 0$. Alors*

$$B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}. \tag{1.3}$$

Démonstration. On a $\Gamma(\alpha) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{\alpha-1}e^{-t}dt.$

Posons $t = x^2$ d'o $dt = 2xdx$, on a alors

$$\Gamma(\alpha) = 2\int_0^{+\infty} x^{2(\alpha-1)}e^{-x^2}xdx = 2\int_0^{+\infty} x^{2\alpha-1}e^{-x^2}dx. \tag{1.4}$$

D'autre part,

$$\Gamma(\beta) = 2\int_0^{+\infty} y^{2\beta-1}e^{-y^2}dy. \tag{1.5}$$

Multiplions les deux intégrales (1.4) et (1.5) et passons en coordonnées polaires, on trouve

$$\begin{aligned}
\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta) &= 4\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} x^{2\alpha-1}y^{2\beta-1}e^{-(x^2+y^2)}dxdy \\
&= 4\int_0^{+\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (r\cos\theta)^{2\alpha-1}(r\sin\theta)^{2\beta-1}e^{-r^2}rdrd\theta \\
&= 2\int_0^{+\infty} r^{2(\alpha+\beta)-1}e^{-r^2}dr \times 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin\theta)^{2\alpha-1}(\cos\theta)^{2\beta-1}d\theta \\
&= \Gamma(\alpha+\beta)\, B(\alpha,\beta).
\end{aligned}$$

Proposition 1.2.8 *Soit $\alpha, \beta > 0$. Alors on a*

$$B(\alpha,\beta) = \int_0^{+\infty} \frac{s^{\alpha-1}}{(s+1)^{\alpha+\beta}}ds.$$

Démonstration. On pose $t = \dfrac{s}{s+1}$ donc $dt = \dfrac{ds}{(s+1)^2}$. Alors

$$\begin{aligned}
B(\alpha,\beta) &= \int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}dt \\
&= \int_0^{+\infty}\left(\frac{s}{s+1}\right)^{\alpha-1}\left(1-\frac{s}{s+1}\right)^{\beta-1}\frac{ds}{(s+1)^2} \\
&= \int_0^{+\infty}\frac{s^{\alpha-1}}{(s+1)^{\alpha-1}}\left(\frac{1}{(s+1)^{\beta-1}}\right)\left(\frac{1}{(s+1)^2}\right)ds \\
&= \int_0^{+\infty}\frac{s^{\alpha-1}}{(s+1)^{\alpha+\beta}}ds.
\end{aligned}$$

1.3 Théorèmes de point fixe

Dans cette section, nous exposons divers théorèmes l'existence et d'unicité inspirés de théorèmes classiques qui assurent l'existence et l'unicité des points fixes de certains opérateurs. Nous utiliserons des définitions et des notions classiques de l'analyse fonctionnelle que l'on peut trouver, par exemple dans [9],[32].

Dans ce qui suit, $\mathcal{E}$ désigne un espace de Banach .

Définition 1.3.1 *Un opérateur* $\mathcal{T} : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ *est dite contraction s'il existe une constante* $k \in]0,1[$, *tels que,pour tout* $x, y \in \mathcal{E}$, *on a*

$$\|\mathcal{T}(x) - \mathcal{T}(y)\| \leq k \|x - y\| .$$

Définition 1.3.2 *L'opérateur* $\mathcal{T} : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ *est completement continue s'il transforme tout borné de* $\mathcal{E}$ *en une partie relativement compacte.*

Définition 1.3.3 *Soit* $\mathcal{T} : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$. *On a appelle point fixe de* $\mathcal{T}$ *tout point* $x \in \mathcal{E}$ *tel que*

$$\mathcal{T}(x) = x.$$

Théorème 1.2 (*Théorème de point fixe de Banach*) *soit* $\mathcal{T} : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ *un opérateur de contraction . Alors,* T *admet un unique point fixe dans* $\mathcal{E}$.

Théorème 1.3 (*Théorème d'Arzela-Ascoli*) *Soit* Ω *un ensemble de* $\mathcal{E}$. *alors* Ω *est relativement compact dans* $\mathcal{E}$ *si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées :*

$i)$ Ω est uniformément bornée.
$ii)$ Ω est équicontinue.

Théorème 1.4 (*Théorème de point fixe de Schaefer*) *soit* $\mathcal{T} : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ *un opérateur complètement continue. Si l'ensemble*

$$\Omega = \{x \in \mathcal{E} : x = \lambda x, 0 < \lambda < 1\} .$$

est borné, alors T *a au moins un point fixe .*

Chapitre 2

Opérateurs d'intégration et de dérivation fractionnaire

2.1 Intégration fractionnaire

Il existe plusieurs définitions et approximations de l'intégration d'ordre fractionnaire, dans cette section nous allons introduire les opérateurs d'intégrations fractionnaires les plus utilisés dans notre travail et leurs propriétés. pour plus de détails sur ces intégrales veuillez consulter les références [1],[19],[22],[25],[27],[30].

2.1.1 Approche de Riemann-Liouville

Définition 2.1.1 *Soit $f \in L^1(\Omega)$. L'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre $\alpha > 0$ de f est donnée par*

$$\left({}^{RL}I_a^{\alpha} f\right)(t) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} f(s)\, ds, \ t > a. \tag{2.1}$$

Remarque 2.1.1 *i) Dans le cas $\alpha = 0$, L'intégrale fractionnaire I^0 est l'opérateur identité .*

ii) Si $\alpha = n \in \mathbb{N}$, la définition (2.1) *coincide avec les n-ièmes intégrale de la forme*

$$\begin{aligned} \left(I_a^n f\right)(t) &= \int_a^x dt_1 \int_a^{t_1} dt_2 ... \int_a^{t_n} f\left(t_n\right) dt_n \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} f\left(t\right) dt. \end{aligned}$$

Exemple 2.1.1 *A titre d'exemple, prenons la fonction $f(x) = x$. Nous calculons l'intégrale de Riemann-Liouville d'ordre $\frac{1}{2}$ de f. On a*

$$\begin{aligned} {}^{RL}I^{\frac{1}{2}} f\left(x\right) &= \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int_0^x (x-t)^{\frac{1}{2}-1} f(t)dt \\ &= \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int_0^x (x-t)^{\frac{1}{2}-1} \left(t\right) dt \quad x - t = \tau \quad donc \quad dt = -d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int_0^x \frac{(x-\tau)}{\tau^{\frac{1}{2}}} d\tau = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \\ &= \frac{4}{3\sqrt{\pi}} x^{\frac{3}{2}}. \end{aligned}$$

Exemple 2.1.2 *Soit f la fonction définie par $f\left(x\right) = (x-a)^{\gamma}, \gamma > -1$. Calculons l'intégrale de Riemann-Liouville d'ordre $\alpha > 0$ de f. On a*

$$\begin{aligned} {}^{RL}I_a^{\alpha} f\left(x\right) &= \frac{1}{\Gamma\left(\alpha\right)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)dt \\ &= \frac{1}{\Gamma\left(\alpha\right)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} (t-a)^{\gamma} dt. \end{aligned}$$

On pose $t = a + (x-a)\zeta$, on obtient donc $dt = (x-a)\,d\zeta$ et $x - t = (x-a)(1-\zeta)$.

Alors

$$\begin{aligned}
{}^{RL}I_a^{\alpha} f(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (x-a)^{\alpha-1} (1-\zeta)^{\alpha-1} (x-a)^{\gamma} (x-a)\, d\zeta \\
&= \frac{(x-a)^{\alpha+\gamma}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 \zeta^{\gamma} (1-\zeta)^{\alpha-1} d\zeta \\
&= \frac{(x-a)^{\alpha+\gamma}}{\Gamma(\alpha)} B(\alpha, \zeta+1) \\
&= \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\alpha+\gamma+1)} (x-a)^{\alpha+\gamma}.
\end{aligned}$$

Remarque 2.1.2 *Pour $\gamma = 0$, on trouve*

$$ {}^{RL}I_a^{\alpha}(1) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha} $$

Proposition 2.1.1 *Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ Tel que $\alpha > 0$, alors l'opérateur ${}^{RL}I_a^{\alpha}$ est bien définie.*

Démonstration. Soit $f \in L^1(\Omega)$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ $(\alpha > 0)$. D'aprés le théorème de Fubini , on a

$$\begin{aligned}
\int_a^t |I_a^{\alpha} f(t)|\, dt &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^b \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} |f(s)|\, ds dt \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^b |f(s)| \left(\int_s^b (t-s)^{\alpha-1} dt \right) ds \\
&\leq \frac{1}{\alpha\Gamma(\alpha)} \int_a^b |f(s)| (b-s)^{\alpha} ds \\
&\leq \frac{b^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} \int_a^b |f(s)|\, ds < \infty.
\end{aligned}$$

Proposition 2.1.2 *Soit $f, g \in L^1(\Omega)$. Alors pour tout $\alpha \geq 0$, on a*

$$ {}^{RL}I_a^{\alpha}(c_1 f(t) + c_2 g(t)) = c_1^{RL} I_a^{\alpha} f(t) + c_2^{RL} I_a^{\alpha} g(t), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R} $$

Démonstration. On a

$$\begin{aligned}
{}^{RL}I_a^{\alpha}(c_1 f(t) + c_2 g(t)) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} [c_1 f(t) + c_2 g(t)]\, ds \\
&= c_1 \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds + c_2 \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} g(s) ds \\
&= c_1^{RL} I_a^{\alpha} f(t) + c_2^{RL} I_a^{\alpha} g(t).
\end{aligned}$$

Proposition 2.1.3 *Soit $f \in L^1(\Omega)$. Alors.*

$$^{RL}I_a^{\alpha}\left(I_a^{\beta} f(x)\right) =^{RL} I_a^{\alpha+\beta} f(t),\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}\ (\alpha, \beta > 0).$$

Démonstration. En utilisant la formule de Dirichlet , on a

$$\begin{aligned} ^{RL}I_a^{\alpha} I_a^{\beta} f(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-u)^{\alpha-1} du \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_a^u (u-t)^{\beta-1} f(t)\, dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_a^x f(t)\, dt \int_t^x (x-u)^{\alpha-1} (u-t)^{\beta-1} du. \end{aligned}$$

On pose $y = \dfrac{u-t}{x-t}$, donc on a

$$\begin{aligned} ^{RL}I_a^{\alpha} I_a^{\beta} f(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_a^x f(t)\, dt\, (x-t)^{\alpha+\beta-1} \int_0^1 (1-y)^{\alpha-1} y^{\beta-1} dy \\ &= \frac{B(\alpha, \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x (x-t)^{\alpha+\beta-1} f(t)\, dt =^{RL} I_a^{\alpha+\beta} f(t). \end{aligned}$$

2.1.2 Approche de Hadamard

Dans cette section, nous donnons la définition et certaines propriétés de base, par exemple, les propriétés de semi-groupe de l'opérateur d'intégration fractionnaire de type Hadamard. Pour plus de détails sur ces opérateurs veuillez consulter [19],[22],[25].

Définition 2.1.2 *L'intégrale fractionnaire de type Hadamard d'ordre $\alpha \geq 0$, pour une fonction continue f sur Ω est définie par*

$$\mathcal{H}_a^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \left(\log \frac{t}{\tau}\right)^{\alpha-1} f(\tau) \frac{d\tau}{\tau},\ \alpha > 0,\ a \leq t \leq b \tag{2.2}$$

En particulier si $\alpha = 0$, on a $\mathcal{H}_a^0 f(t) = f(t)$.

Exemple 2.1.3 *Soit f la fonction définie par*

$$f(t) = \log^{\beta}\left(\frac{t}{a}\right), \beta > -1.$$

On a

$$\mathcal{H}_a^\alpha f(t)=\mathcal{H}_a^\alpha \log^\beta\left(\frac{t}{a}\right)=\tfrac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t \log^{\alpha-1}\left(\frac{t}{\tau}\right)\log^\beta\left(\frac{\tau}{a}\right)\frac{d\tau}{\tau}.$$

En utilisant le changement de variable $x=\dfrac{\log(\tau)-\log(a)}{\log(t)-\log(a)}$, *on obtient*

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_a^\alpha \log^\beta\left(\frac{t}{a}\right) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1\left[\log\left(\frac{t}{a}\right)-x\log\left(\frac{t}{a}\right)\right]^{\alpha-1} x\log^\beta\left(\frac{t}{a}\right)\log\left(\frac{t}{a}\right)dx\\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\log^{\alpha+\beta}\left(\frac{t}{a}\right)\int_0^1(1-x)^{\alpha-1}x^\beta dx\\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\log^{\alpha+\beta}\left(\frac{t}{a}\right)B(\alpha,\beta+1)\\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\log^{\alpha+\beta}\left(\frac{t}{a}\right)\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}\\
&= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}\log^{\alpha+\beta}\left(\frac{t}{a}\right). \qquad (2.3)
\end{aligned}$$

Remarque 2.1.3 *Si on prend* $\beta=0$ *dans* (2.3), *on obtient*

$$\mathcal{H}_a^\alpha(1)=\frac{\left(\log\frac{x}{a}\right)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}$$

Proposition 2.1.4 *L'opérateur* $\mathcal{H}_a^\alpha$ *est linéaire.*

Démonstration. La linéarité est une conséquence de la linéarité de l'intégrale.

Proposition 2.1.5 *Soit* $f\in L^1(\Omega)$. *Alors* $\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}\ (\alpha,\beta>0)$, *on a*

$$\mathcal{H}_a^\alpha\left(\mathcal{H}_a^\beta f(x)\right)=\mathcal{H}_a^{\alpha+\beta}f(t)=\mathcal{H}_a^\beta\left(\mathcal{H}_a^\alpha f(x)\right)$$

Démonstration.

En utilisant la relation (2.2) et le thorme de Fubini, on obtient

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_a^\alpha\left(\mathcal{H}_a^\beta f(x)\right) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x\left(\frac{\log x}{t}\right)^{\alpha-1}\mathcal{H}_a^\beta f(t)\frac{dt}{t}\\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x\left(\log\frac{x}{t}\right)^{\alpha-1}\left(\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_a^t\left(\log\frac{t}{\xi}\right)^{\beta-1}f(\xi)\frac{d\xi}{\xi}\right)\frac{dt}{t}\\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_a^x\frac{1}{\xi}f(\xi)\left[\int_\xi^x\left(\log\frac{x}{t}\right)^{\alpha-1}\left(\log\frac{t}{\xi}\right)^{\beta-1}\frac{dt}{t}\right]d\xi \qquad (2.4)
\end{aligned}$$

En utilisant le changement de variables $z=\dfrac{\log t-\log \xi}{\log x-\log \xi}$, on a

$$\begin{aligned}
\int_{\xi}^{x}\left(\log\frac{x}{t}\right)^{\alpha-1}\left(\log\frac{t}{\xi}\right)^{\beta-1}\frac{dt}{t} &= \left(\log\frac{x}{\xi}\right)^{\alpha+\beta-1}\int_{0}^{1}(1-z)^{\alpha-1}z^{\beta-1}dz \\
&= \left(\log\frac{x}{\xi}\right)^{\alpha+\beta-1}B(\alpha,\beta). \qquad (2.5)
\end{aligned}$$

En utilisant (2.4) et (2.5) et la définition de la fonction beta, on obtient

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_{a}^{\alpha}\left(\mathcal{H}_{a}^{\beta}f(x)\right) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_{a}^{x}\left(\log\frac{x}{\xi}\right)^{\alpha+\beta-1}f(\xi)\frac{d\xi}{\xi} \\
&= \mathcal{H}_{a}^{\alpha+\beta}f(x).
\end{aligned}$$

2.2 Dérivation fractionnaire

Il existe plusieurs approximations de dérivation fractionnaire,dans cette section nous allons présenter les approches de Riemann-Liouville et Caputo qui sont trés utiles dans notre travail, pour plus détail, voir [19],[22],[30].

2.2.1 Approche de Riemann-Liouville

Définition 2.2.1 *Soit $f\in L^{1}(\Omega)$. La dérivée fractionnaire Riemann-Liouville d'ordre $\alpha\in\mathbb{R}$ $(\alpha>0)$ est donnée par*

$$\begin{aligned}
\left({}^{RL}D_{a}^{\alpha}f\right)(t) \quad : &= \left(\frac{d}{dt}\right)^{n}\left(I_{a}^{n-\alpha}f\right)(t) \qquad (2.6)\\
&= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{d}{dt}\right)^{n}\int_{a}^{t}(t-s)^{n-\alpha-1}f(s)\,ds,\ \ n\in\mathbb{N}^{*},n-1<\alpha\leq n,t>a.
\end{aligned}$$

Remarque 2.2.1 *Si $\alpha=n\in\mathbb{Z}_{+}$, Alors*

$$\begin{aligned}
\left({}^{RL}D_{a}^{0}f\right)(t) &= f(t);\\
\left({}^{RL}D_{a}^{\alpha}f\right)(t) &= f^{(n)}(t),
\end{aligned}$$

ou $f^{(n)}$ est la dérivée usuel d'ordre n de la fonction f.

Exemple 2.2.1 *Prenons la fonction $f(x) = x^{\beta}, \beta > -1$. En appliquant la dérivation fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre $\alpha > 0$, on obtient*

$$^{RL}D_0^{\alpha} f(x) = \frac{d^n}{x^n}\left(\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_0^x (x-u)^{n-\alpha-1} u^{\beta} du\right)$$

Pour calculer l'intégrale dans (citation), on utilise le changement de variable suivant :

$$u = xy \quad \text{donc} \quad du = xdy; \quad (x-u) = x(1-y)$$

dans l'expression précédente, on obtient

$$\begin{aligned}
^{RL}D_0^{\alpha} f(x) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^n}{x^n}\left(\int_0^1 x^{n-\alpha-1}(1-y)^{n-\alpha-1} x^{\beta} y^{\beta} x dy\right) \\
&= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^n}{x^n}\left(x^{n-\alpha+\beta}\int_0^1 (1-y)^{n-\alpha-1} y^{\beta} dy\right) \\
&= \frac{\int_0^1 (1-y)^{n-\alpha-1} y^{\beta} dy}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{d^n\left[x^{n-\alpha+\beta}\right]}{x^n}\right) \\
&= \frac{B(n-\alpha, \beta+1)}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{d^n\left[x^{n-\alpha+\beta}\right]}{x^n}\right).
\end{aligned}$$

En utilisant que $\dfrac{d^n x^p}{dx^n} = \dfrac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-n+1)} x^{n-p}$, *on aura*

$$\begin{aligned}
^{RL}D_0^{\alpha} f(x) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \times \frac{\Gamma(\beta+1)\Gamma(n-\alpha)}{\Gamma(\beta+1+n-\alpha)}\left(\frac{d^n\left[x^{n-\alpha+\beta}\right]}{x^n}\right) \\
&= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1+n-\alpha)} \times \frac{\Gamma(n-\alpha+\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha+\beta-n+1)} x^{\beta-\alpha} \\
&= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} x^{\beta-\alpha}, \quad \beta > -1.
\end{aligned}$$

Remarque 2.2.2 *Pour $\beta = 0$, on obtient*

$$^{RL}D_0^{\alpha}(1) = \frac{x^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}$$

Remarque 2.2.3 *La dérivée fractionnaire d'une fonction constante au sens de Riemann-Liouville n'est pas nul.*

Proposition 2.2.1 *Soit $\alpha, \beta > 0$ tels que $n-1 < \alpha \leq n$ et $m-1 < \beta \leq m$ avec $n, m \in \mathbb{N}^*$. Si $\alpha > \beta > 0$, alors pour $f \in L^1(\Omega)$, on a*

$$\left({}^{RL}D^{\beta} I_a^{\alpha} f\right)(t) = I_a^{\alpha-\beta} f(t)$$

Démonstration. Pour $\alpha > \beta > 0$, on a

$$D^{\beta}\left(I^{\alpha} f(t)\right) = D^{n} I^{n-\beta}\left(I^{\alpha} f(t)\right)$$

On utilise la propriété du semi-groupe, on trouve

$$\begin{aligned} D^{\beta}\left(I^{\alpha} f(t)\right) &= D^{n}\left(I^{n-\beta+\alpha} f(t)\right) \\ &= D^{n} I^{n}\left(I^{\alpha-\beta} f(t)\right) \\ &= I^{\alpha-\beta} f(t). \end{aligned}$$

Proposition 2.2.2 *Soit $\alpha > 0$ tels que $n-1 < \alpha \leq n, n \in \mathbb{N}^*$. Pour $f \in L^1(\Omega)$, on a*

$$\left({}^{RL}D^{\alpha} I_a^{\alpha} f\right)(t) = f(t)$$

.

Démonstration. En utilisant la définition de la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville, on obtient

$$\left(D^{\alpha} I^{\alpha} f\right)(t) = \left(D^{n} I^{n-\alpha} I^{\alpha} f\right)(t).$$

Puisque l'opérateur I^{α} vérifier la propriété du semi-groupe, alors

$$\left(D^{\alpha} I^{\alpha} f\right)(t) = \left(D^{n} I^{n-\alpha+\alpha} f\right)(t) = D^{n} I^{n} f(t) = f(t).$$

Proposition 2.2.3 *Soient $\alpha > 0, m \in \mathbb{N}^*$ et $f \in L^1(\Omega)$. Si les dérivées fractionnaires $\left({}^{RL}D^{\alpha} f\right)(t)$ et $\left(D^{\alpha+m} f\right)(t)$ existe, alors*

$$\left(D^{m} D^{\alpha} f\right)(t) = \left(D^{\alpha+m} f\right)(t)$$

.

Démonstration. Par définition de l'opérateur ${}^{RL}D^{\alpha}$, on obtient

$$D^{m}\left(D^{\alpha}f\left(x\right)\right)=D^{m}\left(D^{n}I^{n-\alpha}f(x)\right).$$

On utilise la propriété du semi-groupe de l'opérateur D^{n}, on obtient

$$\begin{aligned}D^{m}\left(D^{\alpha}f\left(x\right)\right)&=D^{m+n}\left(I^{n-\alpha}f(x)\right)\\&=D^{m+n}\left(I^{n-\alpha+m-m}f(x)\right)\\&=D^{m+n}\left(I^{m+n-(\alpha+m)}f(x)\right)\\&=D^{m+\alpha}f(x).\end{aligned}$$

2.2.2 Approche de Caputo

Dans cette partie nous donnons la définition de la dérivée fractionnaire au sens de Caputo ainsi que quelque propriétés essentielles. Pour plus de détails, vous pouvez consulter les références [1],[19],[22].

Définition 2.2.2 *La dérivée fractionnelle de Caputo d'order $\alpha\in\mathbb{R}$ $(\alpha>0)$ d'une fonction $f\in C^{n}\left(\Omega\right)$ est définie par*

$${}^{c}D_{a}^{\alpha}f(t):={}^{RL}I_{a}^{n-\alpha}f^{(n)}\left(t\right)=\frac{1}{\Gamma\left(n-\alpha\right)}\int_{a}^{t}\left(t-s\right)^{n-\alpha-1}f^{(n)}\left(s\right)ds,\;\; n\in\mathbb{N}^{*},n-1<\alpha<n,t>a.$$

Remarque 2.2.4 1. *L'orsque $0<\alpha<1$ et $f\in C\left(\Omega\right),$ alors*

$${}^{c}D_{a}^{\alpha}f(t)=\tfrac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_{a}^{t}\left(t-s\right)^{-\alpha}f'\left(s\right)ds=I_{a}^{1-\alpha}f'\left(t\right).$$

2. *Si $\alpha\in\mathbb{Z}_{+}$, on aura*

$${}^{c}D_{a}^{\alpha}f(t)=f^{(n)}\left(t\right).$$

Exemple 2.2.2 *Si f est une fonction constante, alors on a*

$${}^{c}D_{a}^{\alpha}f(t)=0$$

Proposition 2.2.4 *Soient f et g deux fonctions tels que ${}^{c}D^{\alpha}f(t),{}^{c}D^{\alpha}g(t)$ existes. Alors la dérivation fractionnaire de Caputo est un opérateur linéaire :*

$${}^{c}D_{a}^{\alpha}\left(\lambda f+\gamma g\right)(t)=\lambda{}^{c}D_{a}^{\alpha}f\left(t\right)+\gamma{}^{c}D_{a}^{\alpha}g(t),\;\lambda,\gamma\in\mathbb{R}.$$

Démonstration. Cette propriété de linéarité de l'opérateur différentiel fractionnaire est une conséquence immédiate de la définition de ${}^{C}D_{a}^{\alpha}$.

Le théorème suivant établit la relation entre la dérivée fractionnaire au sens de caputo et celle au sens de Riemann-Liouville.

Théorème 2.1 *Soit $\alpha > 0$ avec $n-1 < \alpha < n, n \in \mathbb{N}^{*}$, et soit f une fonction telle que ${}^{c}D_{a}^{\alpha}f(t)$ et ${}^{RL}D_{a}^{\alpha}f(t)$ existes, alors :*

$$^{RL}D_{a}^{\alpha}f(t) = ^{C}D_{a}^{\alpha}f(t) + \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k-\alpha+1)}(t-a)^{k-\alpha}.$$

Démonstration. On considère seulement le cas $n = 1, 0 < \alpha < 1$ et $a = 0$. On a

$$\begin{aligned}
^{RL}D_{0}^{\alpha}f(t) &= D^{1}\left(^{RL}D_{0}^{\alpha-1}f(t)\right) \\
&= \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_{0}^{t}(t-s)^{-\alpha}f(s)\,ds\right] \\
&= \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left[-\frac{(t-s)^{1-\alpha}}{1-\alpha}f(s)\right]_{s=0}^{s=t} + \int_{0}^{t}\frac{(t-s)^{1-\alpha}}{1-\alpha}f'(s)ds\right) \\
&= \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left[\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}f(0) + \int_{0}^{t}\frac{(t-s)^{1-\alpha}}{1-\alpha}f'(s)ds\right]\right) \\
&= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}f(0) + \frac{d}{dt}\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_{0}^{t}\frac{(t-s)^{1-\alpha}}{1-\alpha}f'(s)ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}f(0) + \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_{0}^{t}\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{(t-s)^{1-\alpha}}{1-\alpha}f'(s)ds\right] \\
&= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}f(0) + \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_{0}^{t}(t-s)^{-\alpha}f'(s)ds \\
&= ^{C}D_{0}^{\alpha}f(t) + \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}f(0).
\end{aligned}$$

En suivant la meme méthode, on peut montrer que pour $n-1 < \alpha < n, n > 1$,

$$^{RL}D_{a}^{\alpha}f(t) = ^{C}D_{a}^{\alpha}f(t) + \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k-\alpha+1)}(t-a)^{k-\alpha}.$$

Remarque 2.2.5 *Si $f^{(k)}(a) = 0$ pour $k = 0, 1, ..., n-1$, on obtient*

$$^{RL}D_{a}^{\alpha}f(t) = ^{C}D_{a}^{\alpha}f(t)$$

2.2.3 Approche de Hadamard

Dans cette section on donne la définition et quelques propriétés de la dérivée fractionnaire de type Hadamard. Pour plus de détailles, voir [1],[19],[24],[27].

Définition 2.2.3 *La dérivée fractionnaire de type Hadamard dordre $\alpha \geq 0$, d'une fonction $f \in AC^n[a,b]$ est définie comme suit :*

$$\begin{aligned} {}^{H}\mathcal{D}^{\alpha} f(t) &= \delta^n \left(\mathcal{H}_a^{n-\alpha} f(t)\right) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(t\frac{d}{dt}\right)^n \int_a^t \left(\log\frac{t}{\tau}\right)^{n-\alpha-1} f(\tau) \frac{d\tau}{\tau} \end{aligned}$$

o $\delta = t\dfrac{d}{dt}, n-1 < \alpha < n, t > a.$

Exemple 2.2.3

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \left(\log\tfrac{x}{a}\right)^{\gamma-1}, \gamma > 0.$$

Dans cet exemple on considère seulement le cas $0 < \alpha < 1$. On a

$${}^{H}\mathcal{D}_a^{\alpha} f(x) = {}^{H}\mathcal{D}_a^{\alpha}\left(\left(\log\frac{x}{a}\right)^{\gamma-1}\right) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left(x\frac{d}{dx}\right)^1 \int_a^x \left(\log\frac{x}{\tau}\right)^{-\alpha}\left(\log\frac{\tau}{a}\right)^{\gamma-1}\frac{d\tau}{\tau}$$

On utilise le changement de variable $u = \dfrac{\log\frac{\tau}{a}}{\log\frac{x}{a}}$, alors $\left(\log\dfrac{\tau}{a}\right) = \left(\log\dfrac{x}{a}\right) u$ et $d\tau = \tau\left(\log\dfrac{x}{a}\right) du$. Donc

$$\begin{aligned} {}^{H}\mathcal{D}_a^{\alpha}\left(\left(\log\frac{x}{a}\right)^{\gamma-1}\right) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \times \left(x\frac{d}{dx}\right)^1 \left(\log\frac{x}{a}\right)^{\gamma-\alpha} \int_0^1 u^{\beta-1}(1-u)^{-\alpha} du \\ &= \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma-\alpha+1)}\left[\left(x\frac{d}{dx}\right)^1\left(\log\frac{x}{a}\right)^{\gamma-\alpha}\right] \\ &= \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma-\alpha+1)}\left[(\gamma-\alpha)\left(\log\frac{x}{a}\right)^{\gamma-\alpha-1}\right]. \end{aligned}$$

La propriété de récurrence la fonction Gamma nous permette d'obtenir

$$^{H}\mathcal{D}_a^{\alpha}\left(\left(\log \frac{x}{a}\right)^{\gamma-1}\right) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma-\alpha)}\left(\log \frac{x}{a}\right)^{\gamma-\alpha-1}.$$

Proposition 2.2.5 *Soit f, g deux fonction dont les dérivées fractionnaires de type Hadamard existes. Alors pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, on a*

$$^{H}\mathcal{D}_a^{\alpha}\left(\lambda f(t) + \mu g(t)\right) = \lambda ^{H}\mathcal{D}_a^{\alpha} f(t) + \mu ^{H}\mathcal{D}_a^{\alpha} g(t).$$

Démonstration. Soit $\alpha \geq 0$. On a

$$^{H}\mathcal{D}_a^{\alpha}\left(\lambda f(t) + \mu g(t)\right) = \delta^n \mathcal{H}_a^{n-\alpha}\left(\lambda f(t) + \mu g(t)\right).$$

Puisque l'opérateur $^{H}\mathcal{H}_a^{n-\alpha}$ est linéaire, alors

$$\begin{aligned}
\delta^n \mathcal{H}_a^{n-\alpha}\left(\lambda f(t) + \mu g(t)\right) &= \delta^n \left(\lambda ^{H}\mathcal{H}_a^{n-\alpha} f(t) + \mu ^{H}\mathcal{H}_a^{n-\alpha} g(t)\right) \\
&= \lambda \delta^n \mathcal{H}_a^{n-\alpha} f(t) + \mu \delta^n \mathcal{H}_a^{n-\alpha} g(t) \\
&= \lambda ^{H}\mathcal{D}_a^{\alpha} f(t) + \mu ^{H}\mathcal{D}_a^{\alpha} g(t).
\end{aligned}$$

2.3 Lemmes Fondamentaux

Dans cette section , nous fournissons quelques lemmes de dérivées fractionnaire, qui joueront un rôle majeur dans notre étude. Pour plus de détails, voir[19],[24],[30].

Lemme 2.1 *Soit $\alpha > 0$. Alors la solution générale de l'equation différentielle $^{c}D_a^{\alpha} x(t) = 0$ est donnée par :*

$$x(t) = \sum_{i=0}^{n-1} c_i (t-a)^i,$$

tel que $c_i \in \mathbb{R}, i = 0, 1, 2, .., n-1,$ $n = [\alpha] + 1$.

Démonstration. On a

$$^{c}D_a^{\alpha} x(t) = 0 \tag{2.7}$$

En utilisant la définition de la dérivée de Caputo, l'identité (2.7) s'écrit sous la forme

$$I^{n-r}\left(\frac{d}{dt}\right)^{n} x(t)=0. \tag{2.8}$$

En appliquant l'opérateur ${}^{c}D_{a}^{n-\alpha}$ aux deux membres de (2.8), on obtient

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^{n} x(t)=0.$$

Puisque la fonction $f \in C^{n}[a,b]$, alors elle est développable en série de Taylor.
D'ou

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n-1} c_k (x-a)^{k},$$

tels que $c_k=\dfrac{f^{(k)}(a)}{k!}, k=0,1,...,n-1.$

Lemme 2.2 *Soit $\alpha>0$. Alors, on obtient que*

$$^{RL}I^{\alpha}D^{\alpha}x(t)=x(t)+\sum_{k=0}^{n-1} c_k (t-a)^{k},$$

pour $c_k \in \mathbb{R}, k=0,1,2,...,n-1,\ n=[\alpha]+1.$

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}^{*}, n-1<\alpha<n$ et $f \in C^{n}[a,b]$.
Par définition de l'opérateur de dérivation de Caputo, on a

$$^{RL}I^{\alpha}D^{\alpha}x(t)={}^{RL}I^{\alpha}\left({}^{RL}I^{n-\alpha}\left(\frac{d}{dt}\right)^{n} x(t)\right). \tag{2.9}$$

Puisque l'opérateur${}^{RL}I^{\alpha}$ vérifie la propriété du semi-groupe, l'identité(2.9) devienne sous la forme

$$\begin{aligned} ^{RL}I^{\alpha}D^{\alpha}x(t) &={}^{RL}I^{n}\left(\left(\frac{d}{dt}\right)^{n} x(t)\right) \\ &=\frac{1}{\Gamma(n)}\int_a^t (t-\tau)^{n-1} x^{(n)}(\tau)d\tau. \end{aligned}$$

Calculons l'intégrale $\displaystyle\int_a^t (t-\tau)^{n-1} x^{(n)}(\tau)d\tau$.
En utilisant l'intégration par partie, on obtient

$$\int_a^t (t-\tau)^{n-1} x^{(n)}(\tau)d\tau = \frac{1}{\Gamma(n)}\left[(t-\tau)^{n-1} x^{(n-1)}(\tau)\right]_a^t + \frac{(n-1)}{\Gamma(n)}\int_a^t (t-\tau)^{n-2} x^{(n-2)}(\tau)d\tau.$$

On utilise la propriété de récurrence de la fonction Γ, on trouve

$$^{RL}I^{\alpha}D^{\alpha}x(t) = -\frac{1}{\Gamma(n)}(t-a)^{n-1} x^{(n-1)}(a) + \frac{1}{\Gamma(n-1)}\int_a^t (t-\tau)^{n-2} x^{(n-2)}(\tau)d\tau$$

.

D'aprés une intégration par partie de l'intégrale $\displaystyle\int_a^t (t-\tau)^{n-2} x^{(n-2)}(\tau)d\tau$, on obtient

$$^{RL}I^{\alpha}D^{\alpha}x(t) = -\frac{1}{\Gamma(n)}(t-a)^{n-1} x^{(n-1)}(a) - \frac{1}{\Gamma(n-1)}(t-a)^{n-2} x^{(n-2)}(a) + \frac{1}{\Gamma(n-2)}\int_a^t (t-\tau)^{n-3} x^{(n-3)}(\tau)d\tau$$

.

En répétant cette méthode successivement, il résulte

$$\begin{aligned} ^{RL}I^{\alpha}D^{\alpha}x(t) &= -\frac{1}{\Gamma(n)}(t-a)^{n-1} x^{(n-1)}(a) - \frac{1}{\Gamma(n-1)}(t-a)^{n-2} x^{(n-2)}(a) \\ &- ... + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t x^{(1)}(\tau)d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(n)}(t-a)^{n-1} x^{(n-1)}(a) - \frac{1}{\Gamma(n-1)}(t-a)^{n-2} x^{(n-2)}(a) - x(t) + x(a) \\ &= x(t) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^{(k)}(a)}{\Gamma(k+1)}(t-a)^{k}. \end{aligned}$$

Posons $c_k = \dfrac{x^{(k)}(a)}{\Gamma(k+1)}$, on aura

$$^{RL}I^{\alpha} D^{\alpha} x(t) = x(t) + \sum_{k=0}^{n-1} c_k (t-a)^k .$$

Chapitre 3

Problèmes aux limites pour les équations différentielles non linéaires d'ordre fractionnaires

3.1 Introduction

Les problèmes aux limites avec des dérivés fractionnels de Caputo ont été étudiés par de nombreux auteurs, voir, par exemple [3],[11],[14],[18],[34].
Dans ce chapitre, nous étudions les critères d'existence et d'unicité pour les solutions du problème aux limites pour les l'équations différentielles fractionnaires non linéaires avec la dérivée de Caputo :

$$\begin{cases} {}^{c}D_{0}^{\alpha}u(t) = \lambda f\left(t, u(t)\right) \\ u(0) = a_1,\ u^{'}\left(T\right) = a_2 \end{cases},\ t \in \left[0, T\right], \lambda \in \mathbb{R}^* \tag{3.1}$$

où ${}^{c}D_{0}^{\alpha}$ est la dérivée fractionnaire de Caputo d'ordre $\alpha \in \left]1, 2\right]$, $f : [0, T] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction donnée et a_1, a_2 sont deux réels.

3.2 Existence de Solutions

Définition 3.2.1 *Une fonction $u \in AC^2\left[0, T\right]$ est dite une solution du problème* (3.1) *si u satisfait l'équation*

$$^{c}D_{0}^{\alpha}u(t) = \lambda f\left(t, u(t)\right)$$

avec les conditions

$$u(0) = a_1,\ u^{'}(T) = a_2.$$

Dans le lemme suivant on donne la solution intégrale du problème linéaire associe (3.1).

Lemme 3.1 *Soit $h \in C\left([0,T], \mathbb{R}\right)$. Alors la solution unique du problème*

$$\begin{cases} ^{c}D_{0}^{\alpha}u(t) = h(t) \\ u(0) = a_1\ ,\ u^{'}(T) = a_2 \end{cases} \tag{3.2}$$

est donne par

$$u(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} h(s)ds + a_1 + \big(a_2 - I_0^{\alpha-1}h(T)\big)t. \tag{3.3}$$

Démonstration. On a

$$^{c}D_{0}^{\alpha}u(t) = h(t). \tag{3.4}$$

Par l'application de l'opérateur I_0^{α} aux deux membres de (3.4), on obtient

$$I_0^{\alpha}\left(^{c}D_{0}^{\alpha}u(t)\right) = I_0^{\alpha}h(t).$$

En appliquant le lemme (2.2), on trouve

$$\begin{aligned} u(t) &= I_0^{\alpha}h(t) + c_0 + c_1 t \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} h(s)ds + c_0 + c_1 t, \end{aligned} \tag{3.5}$$

avec c_0 et c_1 sont deux constantes réelles.
On utilise la condition $u(0) = a_1$, on aura

$$u(0) = c_0 = a_1.$$

En prenant la dérivée de (3.5), on obtient

$$\begin{aligned} u^{'}(t) &= I_0^{\alpha-1}h(t) + c_1 \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha-1)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-2}\, h(s)ds + c_1. \end{aligned}$$

On utilise la condition $u^{'}(T) = a_2$, on aura

$$I_0^{\alpha-1}h(T) + c_1 = a_2.$$

D'où

$$c_1 = a_2 - I_0^{\alpha-1}h(T).$$

En substituant les valeurs de c_0 et c_1 dans (3.5), nous obtenons la relation (3.3).
Inversement,

$$\begin{aligned} {}^cD_0^{\alpha}u(t) &= {}^c D_0^{\alpha}\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\, h(s)ds + a_1 + \left(a_2 - I_0^{\alpha-1}h(T)\right)t\right) \\ &= h(t) + \left(a_2 - I_0^{\alpha-1}h(T)\right){}^c D_0^{\alpha}\,(t) \\ &= h(t) + \left(a_2 - I_0^{\alpha-1}h(T)\right) I^{2-\alpha}\left(\frac{d^2}{dt^2}t\right) \\ &= h(t) \end{aligned}$$

Notons $C\left([0,T],\mathbb{R}\right)$ l'espace de Banach de toutes les fonctions continues de $[0,T]$ dans $\mathbb{R}$ muni de la norme usuelle définie par $\|x\| = \sup\left\{|x(t)|, t \in [0,T]\right\}$.

3.2.1 Premier Résultat

Le premier résultat de ce travail est basé sur le principe de contraction de Banach. Nous introduisons les conditions suivantes :

(H_1) : La fonction $f : [0,T] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue.

(H_2) : Il existe une constante $k > 0$ telle que,

$$|f(u(t) - f(v(t)| \leq k\,|u(t) - v(t)|,$$

pour tout $t \in [0,T]$ et tout $u, v \in C\left([0,T],\mathbb{R}\right)$.

(H_3) : Il existe une constante $M > 0$ tel que

$$|f(t,0)| \leq M, \text{ pour tout } t \in [0,T]$$

Théorème 3.1 *Supposons que les conditions* (H_1) *et* (H_2) *sont vérifiées. Si*

$$\left(\frac{k\,|\lambda|\, T^{\alpha-1}\,(T+\alpha)}{\Gamma(\alpha+1)} \right) < 1, \tag{3.6}$$

alors le problème (3.1) *admet une solution unique sur* $[0,T]$.

Démonstration. On transforme le problème (3.1) en un problème de point fixe équivalent comme suit

$$\mathcal{T} : C([0,T],\mathbb{R}) \longrightarrow C([0,T],\mathbb{R})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(u)(t) = \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s,u(s))\,ds + a_1 \\ + \left(a_2 - \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha-1)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-2} f(s,u(s))\,ds \right) t \end{aligned} \tag{3.7}$$

En appliquant le principe de contraction de Banach, on va montrer que $\mathcal{T}$ est une contraction. Pour tout $u,v \in C([0,T],\mathbb{R}), t \in [0,T]$, on a

$$\begin{aligned} |\mathcal{T}(u)(t) - \mathcal{T}(v)(t)| &= \Bigg| \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s,u(s))\,ds + a_1 \\ &+ \left(a_2 - \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha-1)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-2} f(s,u(s))\,ds \right) t \\ &- \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s,v(s))\,ds + a_1 \\ &+ \left(a_2 - \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha-1)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-2} f(s,v(s))\,ds \right) t \Bigg| \\ &\leq |f(s,u(s)) - f(s,v(s))| \\ &\times \left[\frac{|\lambda|}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1}\,ds + \frac{|\lambda|}{\Gamma(\alpha-1)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-2}\,ds \right]. \end{aligned}$$

En utilisant l'hypothèse (H_2), on obtient

$$|\mathcal{T}(u)(t) - \mathcal{T}(v)(t)| \leq k\,|u(t)-v(t)| \left[\frac{|\lambda|}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1}\,ds + \frac{|\lambda|}{\Gamma(\alpha-1)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-2}\,ds \right].$$

On simplifiant l'expression entre les deux crochets, on obtient

$$|\mathcal{T}(u)(t)-\mathcal{T}(v)(t)| \leq k\,|u(t)-v(t)| \left(-\left[\frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)}\frac{(T-s)^{\alpha}}{\alpha}+\frac{\lambda}{\Gamma(\alpha-1)}\frac{(T-s)^{\alpha-1}}{\alpha-1}\right]_0^T\right).$$

En conséquence, nous avons

$$|\mathcal{T}(u)(t)-\mathcal{T}(v)(t)| \leq |u(t)-v(t)| \left(\frac{k\,|\lambda|\,T^{\alpha-1}(T+\alpha)}{\Gamma(\alpha+1)}\right).$$

D'où nous déduisons que

$$\|\mathcal{T}(u)-\mathcal{T}(v)\|_{\infty} \leq \|u-v\|_{\infty} \left(\frac{k\,|\lambda|\,T^{\alpha-1}(T+\alpha)}{\Gamma(\alpha+1)}\right).$$

Ce qui implique que $\mathcal{T}$ est une contraction par la condition (3.6). Par conséquent, $\mathcal{T}$ à un point fixe unique dans $C([0,T],\mathbb{R})$. De manière équivalente, on en déduit que le problème (3.1) a une solution unique sur $[0,T]$.

3.2.2 Deuxième Résultat

Le deuxième résultat de ce travail est le suivant :

Théorème 3.2 *On suppose que les conditions* (H_1) *et* (H_3) *sont vérifiées. Alors le problème* (3.1) *à au moins une solution définie sur* $[0,T]$.

Démonstration. On utilise le théorème du point fixe de Schéafer pour démontrer que l'opérateur $\mathcal{T} : C([0,T],\mathbb{R}) \longrightarrow C([0,T],\mathbb{R})$ définie dans (3.7) à au moins un point dans l'espace $C([0,T],\mathbb{R})$.

Nous division la démonstration en quatre étapes :

Étape1 : Montrons que l'opérateur $\mathcal{T}$ est continu.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions qui converge vers u dans l'espace $C([0,T],\mathbb{R})$. Alors

$\forall t\in[0,T]$, on a

$$\begin{aligned}
\left|\mathcal{T}(u_n)(t)-\mathcal{T}(u)(t)\right| &= \bigg|\frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s,u_n(s))\,ds + a_1\\
&+\left(a_2-\frac{\lambda}{\Gamma(\alpha-1)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-2} f(s,u_n(s))\,ds\right)t\\
&-\frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s,u(s))\,ds - a_1\\
&-\left(a_2-\frac{\lambda}{\Gamma(\alpha-1)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-2} f(s,u(s))\,ds\right)t\bigg|\\
&=\bigg|\frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s,u_n(s))\,ds-\frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s,u(s))\,ds\\
&+\frac{\lambda t}{\Gamma(\alpha-1)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-2} f(s,u(s))\,ds\\
&-\frac{\lambda t}{\Gamma(\alpha-1)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-2} f(s,u_n(s))\,ds\bigg|.
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
\left|\mathcal{T}(u_n)(t)-\mathcal{T}(u)(t)\right| &\leq \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}\left|f(s,u_n(s))-f(s,u(s))\right|ds\\
&+\frac{\lambda T}{\Gamma(\alpha-1)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-2}\left|f(s,u_n(s))-f(s,u(s))\right|ds\\
&\leq \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}\sup_{s\in[0,T]}\left|f(s,u_n(s))-f(s,u(s))\right|ds\\
&+\frac{\lambda T}{\Gamma(\alpha-1)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-2}\sup_{s\in[0,T]}\left|f(s,u_n(s))-f(s,u(s))\right|ds\\
&\leq\left[\frac{|\lambda|}{\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}\,ds+\frac{|\lambda|\,T}{\Gamma(\alpha-1)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-2}\right]\\
&\times\sup_{s\in[0,T]}\left|f(s,u_n(s))-f(s,u(s))\right|\\
&\leq\left[\frac{|\lambda|\,T^{\alpha-1}(T+\alpha)}{\Gamma(\alpha+1)}\right]\left\|f(.,u_n(.))-f(.,u(.))\right\|_\infty.
\end{aligned}$$

On utilise l'hypothèse (H_1), on à donc

$$\left\|\mathcal{T}(u_n)(t)-\mathcal{T}(u)(t)\right\|_\infty\longrightarrow 0\quad\text{quand}\quad n\longrightarrow+\infty.$$

Alors l'opérateur $\mathcal{T}$ est continu dans $C([0,T],\mathbb{R})$.

Étape2 : Montrons que l'image d'un ensemble borné par $\mathcal{T}$ est un ensemble borné.

Soit $\rho > 0$ et $B_\rho = \{u \in C([0,T],\mathbb{R}) : \|u\| \leq \rho\}$. Pour tout $u \in B_\rho$, on a

$$\begin{aligned} |\mathcal{T}u(t)| = &\left| \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s,u(s))\, ds + a_1 \right. \\ &\left. + \left(a_2 - \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha-1)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-2} f(s,u(s))\, ds \right) t \right|. \end{aligned} \tag{3.8}$$

On remarque que

$$\begin{aligned} |f(s,u(s))| &= |f(s,u(s)) - f(s,0) + f(s,0)| \\ &\leq |f(s,u(s)) - f(s,0)| + |f(s,0)| \\ &\leq k\,|u(s)| + M \\ &\leq k\rho + M. \end{aligned} \tag{3.9}$$

En utilisant (3.8) et (3.9), on obtient

$$\begin{aligned} |\mathcal{T}u(t)| &\leq \frac{|\lambda|(k\rho+M)}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} ds + \frac{|\lambda|\,T\,(k\rho+M)}{\Gamma(\alpha-1)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-2} ds + |a_1| + |a_2|\,T \\ &\leq (k\rho+M)\left(\frac{T^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{T^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \right) + |a_1| + |a_2|\,T. \end{aligned}$$

Donc $\|\mathcal{T}u(t)\| < \infty, \forall t \in [0,T]$.

Par conséquent, l'image d'un borné par $\mathcal{T}$ est un borné dans $C([0,T],\mathbb{R})$.

Étape3 : On montre que $\mathcal{T}$ est équicontinu dans $C([0,T],\mathbb{R})$. Soit $u \in B_\rho$ et $t_1, t_2 \in [0,T]$

avec $t_1 < t_2$. On a

$$\begin{aligned}
|\mathcal{T}u(t_2)-\mathcal{T}u(t_1)| &= \left|\frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{t_2}(t_2-s)^{\alpha-1} f(s,u(s))\,ds + a_1\right.\\
&+\left(a_2-\frac{\lambda}{\Gamma(\alpha-1)}\int_0^{T}(T-s)^{\alpha-2} f(s,u(s))\,ds\right)t_2\\
&-\frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{t_1}(t_1-s)^{\alpha-1} f(s,u(s))\,ds - a_1\\
&-\left.\left(a_2-\frac{\lambda}{\Gamma(\alpha-1)}\int_0^{T}(T-s)^{\alpha-2} f(s,u(s))\,ds\right)t_1\right|\\
&\leq \left|\frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{t_2}(t_2-s)^{\alpha-1} f(s,u(s))\,ds - \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{t_1}(t_1-s)^{\alpha-1} f(s,u(s))\,ds\right.\\
&+\left.\left(a_2-\frac{\lambda}{\Gamma(\alpha-1)}\int_0^{T}(T-s)^{\alpha-2}\right)(t_2-t_1)\right|\\
&\leq \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)}\left[\int_0^{t_2}(t_2-s)^{\alpha-1}-\int_0^{t_1}(t_1-s)^{\alpha-1}\right]|f(s,u(s))|\,ds\\
&+\left|\left(a_2-\frac{\lambda}{\Gamma(\alpha-1)}\int_0^{T}(T-s)^{\alpha-2}\right)(t_2-t_1)\right|.
\end{aligned}$$

Vu l'hypothèse (H_3) et (3.9), on aura

$$\begin{aligned}
|\mathcal{T}u(t_2)-\mathcal{T}u(t_1)| \leq{}& \frac{|\lambda|(k\rho+M)}{\Gamma(\alpha)}\left[\int_0^{t_2}(t_2-s)^{\alpha-1}-\int_0^{t_1}(t_1-s)^{\alpha-1}\right]ds\\
&+\left|\left(a_2-\frac{\lambda}{\Gamma(\alpha-1)}\int_0^{T}(T-s)^{\alpha-2}\right)\right||(t_2-t_1)|.
\end{aligned}$$

Aprés un calcul simple, on trouve

$$|\mathcal{T}u(t_2)-\mathcal{T}u(t_1)| \leq \frac{|\lambda|(k\rho+M)}{\Gamma(\alpha)}|t_2^{\alpha}-t_1^{\alpha}|+\left|\left(a_2-\frac{\lambda}{\Gamma(\alpha-1)}\int_0^{T}(T-s)^{\alpha-2}\right)\right||(t_2-t_1)|.$$

Quand $t_1 \longrightarrow t_2$, le second membre de l'inégalité précédente tend vers zéro.
Au vu des étapes $1, 2, 3$ et le théorème de Arzela-Ascoli, on déduit que $\mathcal{T} : C([0,T],\mathbb{R}) \longrightarrow C([0,T],\mathbb{R})$ est continu et complètement continu.
Étape4 : Soit $\Omega = \{u \in C([0,T],\mathbb{R}) : u = \mu\mathcal{T}(u), 0 < \mu < 1\}$.

On va montrer que l'ensemble Ω est borné. Soit $u \in \Omega$ et $t \in [0,T]$, on a

$$\begin{aligned}
|u(t)| = \mu\, |\mathcal{T}u(t)| = \mu & \left| \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s,u(s))\, ds + a_1 \right. \\
& \left. + \left(a_2 - \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha-1)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-2} f(s,u(s))\, ds \right) t \right| \\
& \leq \frac{|\lambda|(k\rho + M)}{\Gamma(\alpha)} \left| \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} - \frac{T}{\Gamma(\alpha-1)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-2} \right| |f(s,u(s))|\, ds \\
& + |a_1| + T\,|a_2| \\
& \leq |\lambda|(k+M) \left| \frac{T^{\alpha-1}}{\alpha} - \frac{T^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \right| + |a_1| + T\,|a_2|.
\end{aligned}$$

D'où $\|u\| < \infty$. Ce qui montre que l'ensemble Ω est borné.
Comme conséquence du théorème de point fixe de Scheafer, le problème (3.1) à ou moins une solution définie sur $[0,T]$.

3.3 Exemple

Exemple 3.3.1 *On considère le problème aux limites suivant :*

$$\begin{cases} {}^cD^{\frac{5}{7}}u(t) = \dfrac{1}{3}\left(\sqrt{2}e^{-t} + \dfrac{\cos u}{(1+t)^3}\right), \ t \in [0,4] \\ u(0) = 0, \quad u'(4) = \dfrac{4}{9}. \end{cases} \tag{3.10}$$

On a $\alpha = \frac{5}{7}, T = 4$ *et*

$$f(t,u) = \left(\sqrt{2}e^{-t} + \frac{\cos u}{(1+t)^3}\right).$$

On va vérifier que la fonction f est lipschitzienne.
Soit $u, v \in \mathbb{R}$ et $t \in [0,4]$. Alors

$$\begin{aligned}
|f(t,u) - f(t,v)| &= \left| \left(\sqrt{2}e^{-t} + \frac{\cos u}{(1+t)^3} \right) - \left(\sqrt{2}e^{-t} + \frac{\cos v}{(1+t)^3} \right) \right| \\
&= \frac{1}{(1+t)^3} \left| \cos u - \cos v \right| \\
&= \frac{1}{(1+t)^3} \left| -2 \sin \frac{u-v}{2} \sin \frac{u+v}{2} \right| \\
&\leq \frac{1}{(1+t)^3} \left| u - v \right|.
\end{aligned}$$

Pour $t \in [0,4]$, on aura

$$|f(t,u) - f(t,v)| \leq \frac{1}{125} |u - v|$$

et

$$\frac{1}{125} \left(\frac{\frac{1}{3} \times 4^{\frac{5}{7}-1} \times \left(4 + \frac{5}{7} \right)}{\Gamma\left(\frac{5}{7}\right) + 1} \right) \simeq 0,0091 < 1.$$

Puisque toutes les hypothèses du théorème (3.1) *sont satisfaites, alors le problème* (3.10) *admet une solution unique définie sur* $[0,4]$.

Bibliographie

[1] S. Abbas, M. Benchohra, G.M. NGuérékata : Topics in Fractional Differential Equations, Springer-Verlag, New York, 2012.

[2] R.L. Bagley, P.J. Torvik : A theoretical basis for the application of fractional calculus to viscoelasticity. Journal of Rheology, 27(3), 1983 201-210.

[3] M. Benchohra, S. Hamani, S. K. Ntouyas : Boundary value problems for differential equations with fractional order, Surveys Math. Appl. 3 (2008), 1-12.

[4] P.L. Butzer, A.A. Kilbas and J.J. Trujillo : Compositions of Hadamard-type fractional integration operators and the semigroup property. J. Math. Anal. Appl., (269), 2002, 387-400.

[5] D. Delbosco, L. Rodino : Existence and uniqueness for a nonlinear fractional differential equation, J. Math. Anal. Appl. 204 (1996), 609-625.

[6] K. Diethelm, N.J. Ford : Analysis of fractional differential equations. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 265(2), 2002, 229-248.

[7] H.T. Davis : The application of fractional operators to functional equations. American Journal of Mathematics 49.1 (1927), 123-142.

[8] A. M. A. El-Saybd : Fractional differential equations. Kyungpook mathematical journal 28.2 (1988), 119-122.

[9] A. Granas, J. Dugundji : Fixed Point Theory. Springer-Verlag, New York, 2005.

[10] J. Hadamard : Essai sur l'tude des fonctions donnes par leur développement de Taylor, Journal of pure and applied mathematics, 4(8) (1892), 101-186.

[11] S. B. Hadid, A. A.Ta'ani, S. M. Momani : Some existence theorems on differential equation of generalized order through a fixed-point theorem, J. Fract. Calc, 9, (1996), 45-49.

[12] G.H. Hardy, J.E. Littlewood : Some properties of fractional integrals. I. Mathematische Zeitschrift, 27(1), (1928), 565-606.

[13] R. Hilfer (Ed.) : Applications of fractional calculus in physics, World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ, 2000.

[14] M. Houas, Z. Dahmani : New results for a Caputo boundary value problem. American Journal of Computational and Applied Mathematics, 3(3), (2013), 143-161.

[15] S.Kempfle, I.Schaefer : Functional calculus method versus Riemann-Liouville Approach, Fract. Calc. Appl. Anal, 2(4), (1999), 415-427.

[16] A.A. Kilbas : Hadamard-type fractional calculus. J.Korean Math. Soc., (38), (2001), 1191-1204.

[17] A. A. Kilbas, S. A. Marzan : Nonlinear differential equations with the Caputo fractional derivative in the space of continuously differentiable functions. Differential Equations 41 (2005), 8489

[18] A. A. Kilbas, J.J. Trujillo : Differential equations of fractional order : methods results and problem . Applicable Analysis 78(1), (2001), 153-192.

[19] A.A. Kilbas, H.M. Srivastava and J.J. Trujillo : Theory and applications of fractional differential equations. Vol. 204. Elsevier, 2006.

[20] J. Liouville : Mémoire sur quelques questions de géométrie et de mécanique et sur un nouveau genre de calcul pour rsoudre ces équations. Ecole polytechnique 13 (1832), 71-162.

[21] J. Liouville : Mémoire sur l'usage que l'on peut faire de la formule de Fourier, dans le calcul des différentielles indices quelconques. Journal de l'École Polytechnique (1835), 219-232.

[22] K.S. Miller, B.Ross : An Introduction to The Fractional Calculus and Fractional Differential Equations. John-Wily and Sons. Inc. New York, 1993.

[23] S. Mubeen, G. M. Habibullah, k-fractional integrals and application, Int. J. Contemp. Math. Sci. 7 (2012), 8994.

[24] K.B. Oldham, J.Spanier : The Fractional Calculus. Acadimic Press, New York, 1974.

[25] I. Podlubny : Fractional Differential Equations. Academic Press, San Diego, 1999.

[26] L.G. Romero, L.L. Luque, G. A. Dorrego, R. A. Cerutti : On the k-RiemannLiouville Fractional Derivative, Int. J. Contemp. Math. Sciences, 8(1) (2013), 4151.

[27] B. Ross : Fractional calculus and its applications. Springer, Berlin, Heidelberg, 1975.

[28] B.Ross : Le développement du calcul fractionnaire 1695-1900. Historia Mathḿatique.4 (1977), 75-89.

[29] J.A.T.M.J. Sabatier, O.P. Agrawal, J.T. Machado : Advances in Fractional Calculus. Theoretical Developments and Applications in Physics and Engineering. Springer, 4(9), 2007.

[30] S.G. SamKo, A.A. Kilbas, O.I. Marichev : Fractional Integrals and Derivatives-Theory and Applications Gordon and Breach. Linghorne, PA, 1993.

[31] L.Schwartz : Topologie générale et analyse fonctionnelle, Hermann, Paris, Vol. 11, 1970. 13. s

[32] D.R. Smart : Fixed Point Theorems, CambridgeUniversity Press, London, UK, 1980.

[33] L. Tabharit, Z. Dahmani : Solvability of a boundary value problem with caputo derivative. Journal of Interdisciplinary Mathematics, 19(5-6), (2016), 907-915.

[34] S. Zhang : Existence of solutions for a boundary value problem of fractional order, Acta Math. Scientia, Vol. 26, No. 2 (2006), 220-228.