REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE & POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR & DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Université Ibn Khaldoun- Tiaret
FACULTÉ DES MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUE
DÉPARTEMENT DES MATHEMATIQUES

MEMOIRE MASTER

Présentée par :

MANSOURI INES

CHEKOURI RANIA

Spécialité : *Mathématiques*

Option : *Analyse fonctionnelle et applications*

Intitulé

Théorèmes du point fixe dans un espace topologique métrisable

Soutenue le : 13/ 06 / 2022 devant le jury composé de :

Président : SOUID Mohamed Said	*Pr. Univ. Ibn Khaldoun Tiaret*
Examinateur: BENDAOUD Abed Sid Ahmed	*MCA. Univ. Ibn Khaldoun Tiaret*
Encadreur : MOKHTARI Mokhtar	*MCA. Univ. Ibn Khaldoun Tiaret*

2021-2022

Remerciement

Au terme de ce travail, nous tenons tout d'abord à remercier "Allah", qui nous a donné la force et la patience d'accomplir ce modeste travail. En second lieu, nous tenons à remercier nos parents pour nous avoir encouragés . car sans eux, nous n'ont serons pas là. Nous exprimons notre profonde gratitude à notre encadrant Mr. "MOKHTARI "Mokhtar". Nos sincères remerciements vont également aux membres du jury pour avoir bien voulu examiner et juger ce travail. Nos remerciements vont à toutes les personnes qui nous ont été en contact au cours de nos travaux, auprès desquelles nous avons trouvé l'accueil chaleureux et l'aide dont nous avions besoin. Nous ne laisserons pas passer cette occasion sans remercier toute la famille, amis et professeurs du département de mathématiques pour leur aide et leurs précieux conseils et pour leur sollicitude. Enfin, nous remercions tous ceux qui ont contribué de près ou de loin au bon déroulement de ce mémoire

♡

Dédicace

nous dédions ce travail :

A nos chères mères et à nos chers pères qui n'ont jamais cessé de nous ont supporté, nous ont soutenir et encourager durant notre années d'études. Qu'ils trouvent ici le témoignage de notre profonde gratitude

A nos frères, nos grands-parents et nos famille qui nous donnent de l'amour et de la vivacité.

A ma deuxième famille, association Al-Aman pour le soin et l'éducation des orphelins.

A tous ceux qui nous ont aidé de près ou de loin - et ceux qui ont partagé avec nous les moments d'émotion lors de la réalisation de ce travail et qui nous ont encouragé tout au long de notre parcours.

A tous nos amis qui nous ont toujours encouragé, et à qui nous souhaitent plus de succès.

Merci !

Mansouri Ines & Chekouri Rania ✍

Résumé

Dans ce mémoire, on a étudier certaines théorèmes du point fixe de Banach, Brouwer,Schauder, Kannan et Chatterjea et quelques-unes de leurs applications. On suppose f et une application $f : X \to X$, on s'intéresse à donner des conditions qui donne l'existence d'un point fixe de f sur X. Ces résultats théoriques nous permettent de résoudre certains problèmes numériques comme par exemple trouver les racines d'une fonction.

Mots clés : Point fixe, espace métrique, contraction, théorème de Banach.

Abstract

In this memory, we study some theorems of the fixed point of Banach, Brouwer, Kannan and Chatterjea and some of their applications. We assume that f and an application $f : X \to X$, we are interested in giving conditions that gives the existence of a fixed point of f on X. These theoretical results allow us to solve some numerical problems like the roots of a function.

Key words :Fixed point, metric space, contraction, Banach theorem.

Table des matières

Introduction

L'origine du théorème du point fixe proviendrait de l'observation d'une tasse de café par Brouwer.Quand on mélange son sucre,il semble qu'il y ait toujours un point immobile.Il en déduit que :"à tout moment,il y a un point de la surface qui n'aura pas changé de place".Le point fixe n'est pas nécessairement celui qui semble immobile car le centre du tourbillon bouge un petit peu.Le résultat n'est pas intuitif,car le point initialement fixe aura peut-être bougé,mais un autre point fixe apparaîtra.

Il étudie une question analogue à celle du mouvement de la surface d'une tasse de café.Que peut on dire,en général,des trajectoires d'une surface animée par un courant constant Poincaré découvre que la réponse réside dans ce que l'on appelle maintenant les propriétés topologiques de la zone contenant la trajectoire.Si cette zone est compacte,c' est-à-dire à la fois fermée et bornée,soit la trajectoire s' immobilise,soit elle s 'approche de plus en plus d'une boucle qu' elle par court indéfiniment.Poincaré va plus loin ,si la zone est de même nature que celle d'un disque,comme c'est le cas pour la tasse de café,il existe nécessairement un point fixe.

Les théorèmes du point fixe sont les outils mathématiques de base en montrant l'existence des solutions dans divers genres d'équations. La théorie du point fixe est au cœur de l'analyse non linéaire appliquée aux équations intégrales puis qu'elle fournit les outils nécessaires pour avoir des théorèmes d'existence dans beaucoup de problèmes non-linéaires différent.

Dans ce mémoire, on va étudier des différents théorèmes du point fixe tels que le théorème de Banach,Picard, Schauder et de Brouwer et Kannan,Chatterjea.

Étant donnés un ensemble M et une application $T : M \mapsto M$, ces théorèmes donnent certaines conditions sous lesquelles T admet un point fixe dans M. Ces théorèmes sont importants dans les mathématiques car ils ont plusieurs applications, par exemple trouver les racines d'un polynôme, ou montrer l'existence des solutions numériques des équations intégrales.

Le théorème de l'application contractante prouvé par Banach en 1922 dit qu'une contraction d'un espace métrique complet dans lui-même admet un point fixe unique.

De plus, il fournit un algorithme d'approximation du point fixe comme limite d'une suite itérée. Mais d'une part, montrer que la fonction et contractante peut entraîne de laborieux calculs, d'autre part, les conditions sur la fonction est l'espaces étudiés restreignent le nombre de cas aux quels on peut appliquer le théorème.

Le théorème du point fixe de Brouwer est un résultat de topologie algébrique, sous sa forme la plus simple, ce théorème exige uniquement la continuité de l'application d'un intervalle fermée borné dans lui-même. Et de façon plus générale, l'application continue doit être définie dans un convexe compact d'un espace euclidien dans lui-même.

Le théorème du point fixe de Schauder établi en 1930, est une généralisation du théorème du point fixe de Brouwer et affirme qu'une application continue sur un convexe compact admet un point fixe, qui n'est pas nécessairement unique. Il n'est donc pas nécessaire établir des estimées sur la fonction, mais simplement sa continuité. Ceci nous donne la possibilité de traiter plus de cas qu'avec le théorème de Banach (par exemple, l'identité).

En1968, Kannan et en 1972 Chatterjea a étudier la contraction qui donne un point fixe unique sur une espace métrique complet.des généralisations de théorème de Banach du point fixe ont été étudiés fortement par de nombreux auteurs.

Le première chapitre est consacré à des notions que nous avons utilisé au long de ce travail.

Dans le deuxième chapitre nous présentons les théorèmes de point fixe (Banach,Picard, Brouwer, Schauder, Kannan et Chatterjea).

Le troisième chapitre est dédit des applications du théorème du point fixe aux quelques équations intégrales.

Chapitre 1

Préliminaires

Dans ce chapitre, on rappelle quelques définitions,notions,lemmes et théorèmes de base nécessaires qui seront utilisé dans la suite du travail ([5]).

1.1 Espace métrique

1.1.1 Topologie des espaces métriques

Un espace métrique est la donnée d'un ensemble dont les éléments sont considérés comme des points et d'une application qui permet de mesurer si deux points sont proches ou éloignés. Plus précisément on a :

Définition 1.1.1. *Soit X un ensemble,on appelle métrique ou distance toute application* $d : X \times X \mapsto \mathbb{R}_+$ *telle que,pour tout* $x, y, z \in X$ *, on ait :*

1. $d(x, y) = 0, x = y$. *(Séparation)*
2. $d(x, y) = d(y, x)$. *(Symétrie)*
3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$. *(Inégalité triangulaire)*

On dit que le couple (X,d) est un espace métrique

Exemple 1.1.1. *L'ensemble des nombres réels* $\mathbb{R}$ *muni de la distance usuelle*

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, d(x, y) = |x - y|$$

est un espace métrique.
En effet :

1. $\forall x, y \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} d(x,y) = 0 & \\ & \Longleftrightarrow |x-y| = 0 \\ & \Longleftrightarrow |x-y| = 0 \\ & \Longleftrightarrow x = y. \end{aligned}$$

2. $\forall x, y \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} d(x,y) = |x-y| &= |-(y-x)| \\ &= |y-x| \\ &= d(y,x). \end{aligned}$$

3. $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} d(x,y) = |x-y| &= |x-z+z-y| \\ &\leq |x-z| + |z-y| \\ &\leq d(x,z) + d(z,y). \end{aligned}$$

Propriétés 1.1.1. *Une distance d sur un ensemble X vérifie*

a) *la distance est toujours positive ou nulle :*

$$\forall x, y \in X, d(x,y) \geqslant 0.$$

b) *La distance entre les distance est plus petite que la distance :*

$$\forall x, y, z \in X, |d(x,y) - d(x,z)| \leqslant d(y,z).$$

1.1.2 Espace métrique complet

On commence par un résultat assez simple

Définition 1.1.2. *On dit qu'une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'un espace métrique (X,d) est de Cauchy si elle vérifie :*

$$\forall \epsilon > 0, \exists N_\epsilon \in \mathbb{N}, \forall m, n \geq N_\epsilon, d(x_m, x_n) \leq \epsilon$$

Proposition 1.1.1. *Toute suite convergente est de Cauchy.*

Preuve 1.1.1. *Soit* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de (X, d) telle que :*
$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l \in X$. *Pour* $\epsilon > 0$ *il existe* $N_\epsilon \in \mathbb{N}$ *tel que* $d(x_n, l) \leq \dfrac{\epsilon}{2}$ *pour* $n \geq N_\epsilon$. *On a alors*

$$\forall m, n \geq N_\epsilon, d(x_m, x_n) \leq d(x_m, l) + d(l, x_n) \leq \epsilon$$

et la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est de Cauchy.*

Définition 1.1.3. *On dit que l'espace métrique (X, d) est **complet** si toute suite de Cauchy converge.*

Espace normé

Définition 1.1.4. *On appelle **norme** sur* E *une application de* E *dans* $\mathbb{R}_+$ *habituellement notée* $\|.\|$ *vérifiant pour tout* $x, y \in E$ *et* $\lambda \in (\mathbb{R} \quad ou \quad \mathbb{C})$ *:*

$i)$ $(\|x\| = 0) \Leftrightarrow (x = 0)$. *(Séparation)*

$ii)$ $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$. *(Homogénéité)*

$iii)$ $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$. *(Inégalité du triangle)*

Définition 1.1.5. *Un espace vectoriel normé est un couple* $(E, \|.\|)$ *où E est un espace vectoriel sur* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$ *et* $\|.\|$ *est une norme sur E.*

Définition 1.1.6. *Deux normes* $\|.\|$ *et* $\|.\|'$ *sur un même espace vectoriel réel ou complexe sont **équivalentes** si et seulement s'il existe* $C_1, C_2 > 0$ *tels que :*

$$\forall x \in \mathbb{K},\ \ C_1\|x\| \leq \|x\|' \leq C_2\|x\|.$$

Proposition 1.1.2. *Les* $\mathbb{K}$ *-espaces vectoriels de dimension finie sont des espaces de Banach.*

1.1.3 Structure topologie

Définition 1.1.7. *Soit (E, d) un espace métrique,* $a \in X$ *et* $r > 0$. *On définit :*

<u>1-</u> *On appelle **boule ouverte** (respectivement **boule fermée**) de centre a et de rayon r, l'ensemble noté B(a,r)(respectivement* $B_f(a, r)$*) défini dans X par :*

$$B(a, r) = \{x \in X | d(x, a) < r\}$$

$$(respectivement : B_f(a, r) = \{x \in X | d(x, a) \leq r\})$$

<u>2-</u> *On appelle **sphère** de centre a et de rayon r :*

$$S(a, r) = \{x \in X | d(x, a) = r\}$$

1.1.4 Diamètre

Définition 1.1.8. *Soit X un espace métrique et A une partie de X alors : On appelle* ***diamètre*** *de A noté $\sigma(A)$ le nombre défini par*

$$\sigma(A) = \sup_{(x,y\in A)} d(x,y)$$

Proposition 1.1.3. *Soient $A, B \subset X$ et $x \in X$ alors :*

1) $d(x,A) = 0 \Leftrightarrow x \in \overline{A}$.

2) $A \subset B \Rightarrow daim(A) \leqslant daim(B)$.

1.1.5 Espace topologie

Définition 1.1.9. *Soit X un ensemble. Une topologie sur X est la donnée d'une famille O de parties de X, appelées ouverts, vérifiant :*
__1.__ $\emptyset$ et X sont des ouverts .
__2.__ toute réunion d'ouverts est un ouvert .
__3.__ une intersection finie d'ouverts est un ouvert.
Autrement dit, O est stable par union quelconque, intersection finie, et contient $\emptyset$ et X. On dit alors que X muni de cette topologie est un ***espace topologique.***

Exemple 1.1.2. 1. *Si $X = \emptyset, P(X) = \emptyset$ est la seule topologie sur X.*

2. *Si $X = a, P(X) = \emptyset, a$ est la seule topologie sur X.*

1.2 Continuité ,Compacité et Convexité

1.2.1 Continuité

Définition 1.2.1. *Soient $(E, \|.\|) et (E', \|.\|')$ deux espaces normé, et $f : E \mapsto E'$ une application f est continue en $x_0 \in E$ si et seulement si :*

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in E : \|x - x_0\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(x_0)\| < \epsilon,$$

C-à-d :

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Remarque 1.2.1. *Elle est dit continue sur E si elle est continue en tout point de E.*

Définition 1.2.2. *On dit que f est uniformément continue sur E si*

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, y \in E : \|x - y\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(y)\| < \epsilon.$$

Proposition 1.2.1. *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *f est continue dans X.*
2. *L'image réciproque par f de tout fermé F' de X' est un fermé de X.*
3. *L'image réciproque par f de tout ouvert O' de X' est un ouvert de X.*

Exemples 1.2.1. *Toute application constante f est continue. En effet, soit y_0 la valeur constante de f, $y_0 \in X'$. Soit alors O' un ouvert dans X' alors :*

1. *Si $y_0 \in O^{'}, f^{1}(O^{'}) = X$.*
2. *Si $y_0 \notin O^{'}, f^{1}(O^{'}) = \emptyset$.*
   Dans les deux cas, l'image réciproque est un ouvert.

Proposition 1.2.2. *Si f est continue de X dans X' et g est continue de X' dans X" alors $h = gof$ est continue dans X".*

1.2.2 Compacité

Définition 1.2.3. *. Soient E un ensemble quelconque et A une partie de E, Une recouvrement de A est une famille $(B_i)_{i\in I}$ des parties de E vérifiant :*

$$A \subset \bigcup_{i\in I} B_i.$$

Définition 1.2.4. *Soit$(E, ||.||)$ un espace normé. On dit que E est relativement compact si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un recouvrement fini de E par des parties de E dans le diamètre est inférieure à ε.*

Définition 1.2.5. *Une partie A d'un espace normé$(E||.||)$ est dite compacte si le sous-espace normé $(A, ||.||)$ est compact.*

Théorème 1.2.1. *Soit $(E, ||.||)$ un e.v.n sur $\mathbb{R}$ où $\mathbb{C}$ de dimension fini. Alors les parties compactes de E sont les parties fermées et bornées de E.*

Proposition 1.2.3. *L'image réciproque d'un ensemble compact par une application continue n'est pas nécessairement compact.*

Définition 1.2.6. *Une famille ϕ définies sur un intervalle [a, b], est dite uniformément bornée s'il existe une constante k telle que :*

$$\forall x \in [a, b], ||\phi(x)|| < k.$$

Définition 1.2.7. *Un espace topologique X est localement compact si et seulement s'il est séparé,et tout point de X admet un voisinage compact.*

Proposition 1.2.4. *Tout espace métrique compact est complet*

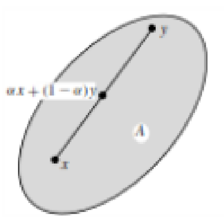
Preuve 1.2.1. *Soit* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de Cauchy d'un espace métrique compact Alors* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *a une valeur d'adhérence (au moins), et donc* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge. Par conséquent X est complet.*

1.2.3 Convexité

Définition 1.2.8. *On dit que* $C \subset E$ *est un ensemble convexe si :*

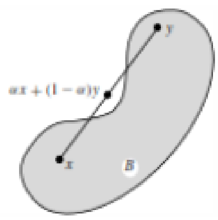
$$\forall (a,b) \in C^2, \forall t \in [0,1], ta + (1-t)b \in C$$

A convexe



A est un ensemble convexe car tous les segments $[x,y]$ *sont inclus dans A.*

B non convexe



B n'est pas convexe car il existe au moins un segment $[x,y]$ *qui n'est pas inclus dans B.*

1.3 Espace métrisable

Définition 1.3.1. *On dit qu'une topologie T sur un ensemble X est métrisable si on peut trouver une distance d sur X qui donne la topologie T.*

1.3.1 Théorème d'Urysohn

Théorème 1.3.1. *: Soient X un espace localement compact, K un compact de X et U un ouvert de X contenant K. Alors il existe* $f \in C_c(x)$ *(continue,compact)telle que :*

1. *Pour tout* $x \in X$*, on ait* $0 \leq f(x) \leq 1$.
2. *Pour tout* $x \in K$*, on ait* $f(x) = 1$.
3. *On ait* $\sup(f) \subset U$*. En particulier, on a* $f(x) = 0$ *pour tout* $x \in X \diagup U$.

1.3.2 Topologie induite

Soit (E, d) est un espace métrique et $A \subset E$, alors d induit une distance sur A (définie par d(x,y) pour tous $x, y \in A$). Ainsi A devient un espace métrique, dans lequel :

$$\forall a \in A, \forall r > 0, B_A(a,r) = \{x \in A | d(a,x) < r\} = A \cap B_E(a,r).$$

Définition 1.3.2. *Soit X un espace topologique et $A \subset X$. On définit la topologie induite sur A par X de la façon suivante :*
O est un ouvert de A $\Leftrightarrow$ il existe O' ouvert de X tel que $O = A \cap O'$
Cela définit bien une topologie sur A, pour laquelle :

i. *$F \subset A$ est un fermé de A $\Leftrightarrow$il existe F' fermé de X tel que $F = A \cap F'$*

ii. *Si $a \in A$: V est un voisinage de a dans A ssi il existe un voisinage V' de a dans X tel que $V = A \cap V'$.*

1.3.3 Homéomorphismes

Définition 1.3.3. *Soit(X, τ)et$(X\prime, \tau\prime)$ deux espaces topologiques. On appelle homéomorphisme toute bijection f de X sur $X\prime$ bicontinue, i.e. telle que f et f^{-1}soient continues. Si f est un homéomorphisme, l'image réciproque et l'image (puisque $f(O) = (f^{-1})^{-1}(O)$de tout ouvert (resp. fermé) est un ouvert (resp. fermé).*
Ainsi un homéomorphisme établit une bijection entre O et O' (resp. entre F et F'). Les homéomorphismes sont les isomorphismes associés à la structure "Espace topologique".

Définition 1.3.4. *Si il existe un homéomorphisme de (X, τ) sur (X', τ') on dit que (X, τ) et (X', τ') sont homéomorphes.*

Proposition 1.3.1. *Deux topologies τ et τ' sur un même ensemble X sont égales si et seulement si l'application identité $Id : X \mapsto X$ est un homéomorphisme de (X, τ) sur (X, τ').*

Preuve 1.3.1. *L'image réciproque Id^{-1} donne une bijection entre les éléments de O' et les éléments de O. Comme $Id^{-1}(O') = O'$ cela signifie que les ouverts de τ' sont des ouverts de τ et inversement. Les deux topologies ont les mêmes ouverts, elles sont égales.*

Exemple 1.3.1. *On prend $X = [0,1[\cup[2,3[$ et on considère l'application $f : X \mapsto [0,2]$ donnée par :*

$$f(x) = \begin{cases} x \quad si \quad x < 1 \\ x-1 \quad si \quad x \geq 2. \end{cases}$$

Cette fonction f est continue bijective mais n'est pas un homéomorphisme de X sur $f(X) = [0,2]$ car $(lim_{x \longrightarrow 1^-} f^{-1}(x) = 1 \neq f^{-1}(1) = 2)$.

1.4 Espaces fonctionnels

([8],[16])

Définition 1.4.1. *Sur un $\mathbb{R}$- (resp. $\mathbb{C}$) espace vectoriel H, on appelle produit scalaire toute forme :*

i. *Bilinéaire (resp. sesquilinéaire) Pour tout $x, x_1, x_2, y, y_1, y_2 \in H$ et tout scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$*
a) *linéarité à droite :*
$$(x, \lambda y_1 + y_2) = \lambda(x, y_1) + (x, y_2).$$
b)*(anti) linéarité à gauche :*
$$(\lambda x_1 + x_2, y) = \lambda(x_1, y) + (x_2, y)$$

ii. *symétrique (resp. hermitienne)*
$$\forall x, y \in H, (y, x) = \overline{(x, y)}.$$

iii. *définie*
$$\forall x \in H, ((x, x) = 0) \Leftrightarrow (x = 0).$$

iiii. *positive*
$$\forall x \in H, (x, x) \geq 0.$$

Définition 1.4.2. ***(Espace de Hilbert)****Un espace de Hilbert est un espace vectoriel muni d'un produit scalaire, et qui est complet pour la norme associée à ce produit scalaire.*

Définition 1.4.3. ***(Espace C[a,b])*** *Des fonctions continues sur $[a, b]$de norme*
$$\|x\| = \max_{t \in [a,b]} |x(t)|.$$

Définition 1.4.4. ***(Espace** $L^1(\Omega)$**)*** *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, on désigne par $L^1(\Omega)$ des fonctions intégrable sur Ω à valeur dans $\mathbb{R}$ on pose*
$$\|f\|_1 = \int_\Omega |f(x)| dx.$$

1.5 Point fixe et application contractante

Définition 1.5.1. ***(Point fixe)*** *Soit (E,d) un espace métrique, et $f : E \mapsto E$ une application, on dit qu'un point $x \in E$ et un point fixe de f si et seulement si $f(x) = x$*

Définition 1.5.2. ***(Application lipschitzienne)*** *Soit (E, d) un espace métrique, une application $f : E \mapsto E$ est dite lipschitzienne de rapport $k \geq 0$ si pour tout $x, y \in E$*

$$d(f(x), f(y)) \leq kd(x, y) \tag{1.5.0.1}$$

k est dite constante de Lipschitz.

Remarque 1.5.1. *Une application Lipschitzienne est nécessairement continue.*

Définition 1.5.3. *L'application lipschitzienne f est appelée*

1. *non expansive si $k \leq 1$*
2. *contraction si $k < 1$*

Proposition 1.5.1.

$$f lipschitzienne \Rightarrow f uniformment \quad continue \Rightarrow f continue$$

et les deux réciproques sont fausses.

Preuve 1.5.1.

$\Leftarrow$) *Pour la première implication, prendre*

$$\alpha = \frac{\varepsilon}{k}\ pour\ x, y \in X \text{ tel que } d(x, y) < \alpha$$

on a

$$d(f(x), f(y)) \leq kd(x, y) < k\alpha = \varepsilon$$

$\Leftarrow$) *La seconde implication est évidente.*

Définition 1.5.4. ***(Application contractante)*** *On dit que $f : X \mapsto X$ est une application contractante si :*

$$\forall x, y \in X, \exists k \in [0, 1[\quad d(f(x), f(y)) \leq kd(x, y) \tag{1.5.0.2}$$

1.6 Quelques Définition des équations intégrales

([3],[9],[10],[13])

Définition 1.6.1. *On appelle équation intégrale une équation fonctionnelle où la fonction inconnue figure sous le singe d'intégration C'est en générale l'équation par rapport à l'inconnue φ de la forme :*

$$\int_E k(x, t, \varphi(t))dt = \lambda\varphi(x) + f(x), x \in E \tag{1.6.0.1}$$

où E est un espace mesuré, $f(x)$ une fonction mesurable donnée sur E, λ un scalaire donné qui peut être réel ou complexe, et $K(x,t,\varphi(t))$ une fonction mesurable sur E^3 appelée noyau de l'équation intégrale.
*Avec toutes ces données, notre problème est de chercher la fonction φ qui satisfait l'équation*1.6.0.1

1.7 Équations intégrales linéaires

1.7.1 Équation intégrale de Fredholm

On appelle équation intégrale linéaire de Fredholm tel que les deux limites d'intégration sont constantes une équation, à une inconnue $\varphi(x)$ de la forme :

$$h(x)\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)\varphi(t)dt \tag{1.7.1.1}$$

où $f(x), K(x,t)$ sont des fonctions connues et λ est un paramètre non nul, réel ou complexe.
La fonction $h(x)$ détermine le type de l'équation intégrale.

1. Si $h(x) = 0$,l'équation 1.7.1.1 s'écrit

$$f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)\varphi(t)dt = 0 \tag{1.7.1.2}$$

   et s'appelle équation intégrale de Fredholm de première espèce.

2. Si $h(x) = c = constante \neq 0$, l'équation 1.7.1.1 s'écrit

$$C\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)\varphi(t)dt. \tag{1.7.1.3}$$

   et s'appelle équation intégrale de Fredholm de second espèce.

3. Si $h(x) \neq 0$, donc la formule 1.7.1.1 est appelée équation intégrale de Fredholm de troisième espèce.

Remarque 1.7.1. *1. Si $f(x) = 0$, l'équation* 1.7.1.1 *est dite homogène.*

2. Si $f(x) \neq 0$, l'équation 1.7.1.1 *est dite non homogène.*

1.7.2 Équation intégrale de volterra

On appelle équation intégrale linéaire de Volterra telle que l'un des deux limites d'intégration est variable, une équation de la forme

$$h(x)\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x,t)\varphi(t)dt \tag{1.7.2.1}$$

1. On appelle équation intégrale de Volterra de première espèce, si $h(x) = 0$, donc l'équation 1.7.2.1 s'écrit

$$f(x) + \lambda \int_a^x K(x,t)\varphi(t)dt = 0 \tag{1.7.2.2}$$

2. On appelle équation intégrale de Volterra de seconde espèce, si $h(x) = c = constante \neq 0$, donc l'équation 1.7.2.1 s'écrit

$$c\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x,t)\varphi(t)dt \tag{1.7.2.3}$$

3. Si $h(x) \neq 0$, donc la formule 1.7.2.1 est appelée équation intégrale de Volterra de troisième espèce.

Remarque 1.7.2. *1. Si $f(x) = 0$, donc l'équation est* 1.7.2.1 *dite homogène.*

2. Si $f(x) \neq 0$, donc l'équation 1.7.2.1 *est dite non homogène.*

Remarque 1.7.3. *L'équation intégrale de Volterra est un cas particulier de l'équation intégrale de Fredholm, il suffit de prendre le noyau K vérifie la condition*

$$K(x,t) = 0, \quad pour \quad x < t$$

1.8 Équation intégral non-linéaire

1.8.1 Équation intégrale de volterra

L'équation intégrale non linéaire de Volterra de première espèce prendre la forme

$$f(x) + \lambda \int_a^x K(x,t,\varphi(t))dt = 0 \tag{1.8.1.1}$$

est appelée équation intégrale de Volterra de second espèce, de la forme

$$c\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x,t,\varphi(t))dt \tag{1.8.1.2}$$

où $c = constante \neq 0$
et troisième espèce, de la forme

$$h(x)\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x,t,\varphi(t))dt \qquad (1.8.1.3)$$

Remarque 1.8.1. *1. Si $f(x) = 0$, donc l'équation* 1.8.1.2 *est dite homogène.*

2. Si $f(x) \neq 0$, donc l'équation 1.8.1.2 *est dite non homogène.*

1.9 Opérateurs intégrales linéaires

Définition 1.9.1. *Soit $K : C[a,b] \times C[a,b] \mapsto \mathbb{R}$ une fonction continue, l'opérateur intégral linéaire A sur $C[a,b]$ est définit par :*

$$A : \varphi \in C[a,b] \mapsto A\varphi \in C[a,b]$$

$$(A\varphi)(x) = \int_a^b K(x,t)\varphi(t)dt.$$

où la fonction $K(x,t)$ s'appelle noyau de l'opérateur intégrale A.

Chapitre 2

Quelques Théorèmes du point fixe

En analyse, les théorèmes de point fixe sont un résultat qui permet d'affirmer qu'une fonction f admet sous certaines conditions un point fixe.

Le but de ce chapitre est rappeler quelques théorèmes du point fixe.
On commencera par le plus simple et le plus connu d'entre eux : le théorème du point fixe de Banach pour les applications contractantes et de picard, théorème de Brouwer puis le Théorème de Schauder (qui en est la "généralisation" en dimension infinie) puis le théorème du point fixe de Kannan et chatterjia.

2.1 Théorème du point fixe de Banach

Ce théorème est dite principe de l'application contractante, il est la base de la théorie du point fixe. Ce principe garantit l'existence d'un unique point fixe pour toute application contractante d'un espace métrique complet dans lui-même. Ce théorème prouvé en 1922 par Stefan Banach est basé essentiellement sur les notions d'application contractante.([11],[14],[16])

Théorème 2.1.1. *Soit (X, d) un espace métrique complet et $f : X \mapsto X$ une application contractante de constant k. Alors, il existe un point unique $x \in X$ tel que $f(x) = x$. De plus, pour tout point initial $x_0 \in X$, la suite itérée $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée par :*

$$\begin{cases} x_0 \in X \\ x_{n+1} = f(x_n), n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

converge vers x.

avec

$$d(x, x_n) \leq \frac{k^n}{1-k} d(x_0, f(x_0)),$$

Preuve 2.1.1. *(a) Existence : Soit x_0 un point initial quelconque et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :*

$$\begin{cases} x_0 \in X \\ x_{n+1} = f(x_n), n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Nous allons établir que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, puisque f est contractante, on a :

$$d(x_n, x_{n+1}) = d(f(x_{n-1}), f(x_n)) \leq kd(x_{n-1}, x_n) \leq \cdots \leq k^n d(x_0, x_1)$$

Ainsi, pour $m > n$,où $n \geq 0$, on a

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{x+2}) + \cdots + d(x_{m-1}, x_m) \\ &\leq k_n d(x_1, x_0) + k^{n+1} d(x_1, x_0) + \cdots + k^{m-1} d(x_0, x_1) \\ &\leq k^n [1 + k + k^2 + \cdots + k^{m-n-1}] d(x_0, x_1) \\ &\leq k^n \frac{1-k^{m-n}}{1-k} d(x_0, x_1) \; puisque \; 1 - k^{m-n} < 1 \end{aligned}$$

on obtient

$$\leq \frac{k^n}{1-k} d(x_0, f(x_0)) \mapsto 0 \quad quand \quad n \mapsto \infty \quad car \quad k \in [0, 1]$$

Ceci montre que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy et comme X est espace complet, alors il existe $x \in X$ tel que $x_n \mapsto x$.
Par ailleurs puisque f est continue,on a :

$$x = \lim_{n\mapsto\infty} x_{n+1} = \lim_{n\mapsto\infty} f(x_n) = f(\lim_{n\mapsto\infty} x_n) = f(x)$$

Donc x est un point fixe de f.
(b) Unicité : Supposons qu'il existe de points $x, y \in X$ tel que $x \neq y, x = f(x)$ et $y = f(y)$
Alors,on a

$$d(f(x), f(y)) = d(x, y)$$

donc

$$\frac{d(f(x), f(y))}{d(x, y)} = 1$$

D'autre part, f est contractante donc

$$\frac{d(f(x), f(y))}{d(x,y)} \leq k < 1$$

Ce qui est contradictoire, d'où l'unicité.

Théorème 2.1.2. *Soit F un sous-ensemble fermé dans un espace de Banach et soit $T : F \mapsto F$ une application contractante, alors*

1. *L'équation $Tx = x$, a une seul solution unique.*
2. *La solution unique x peut être obtenir par la limite de la suite (x_n) de F définie par : $x_n = Tx_n, n = 1,2,\ldots$, où x_0 est un arbitraire de F,*

$$x = \lim_{n \to \infty} T^n x_0$$

2.2 Théorème du point fixe de Picard

Définition 2.2.1. *Soient (X, d) et (Y, δ) deux espaces métriques. $f : X \mapsto Y$ est dite contractante s'il existe une constante $k \in]0,1[$ telle que*

$$\forall (x,y) \in X^2, \delta(f(x), f(y)) \leq kd(x,y),$$

i.e. telle que f soit k lipschitzienne.

Exemple 2.2.1. *Soit U un ouvert connexe de $\mathbb{R}^n$ et f une fonction différentiable sur U telle que $\forall x \in U \quad \|df(x)\| \leq k < 1$.*
Alors f est contractante sur U .

Théorème 2.2.1. *(Picard) Soit (X, d) un espace métrique complet et $f : X \mapsto X$ une application contractante. Alors f possède un unique point fixe a et pour tout $x_0 \in X$, la suite $f^n(x_0)$ converge vers a , la vitesse de convergence vérifie alors*

$$d(a, f^n(x_0)) \leq \frac{k^n}{1-k} d(x_1, x_0)$$

Exemples 2.2.1.

1. *$f :]0,1] \mapsto]0,1]; x \mapsto \frac{x}{2}$ ne possède pas de point fixe : $]0,1]$ n'est pas un Banach.*

2. *$f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}; x \mapsto \sqrt{1+x^2}$ ne possède pas de point fixe , elle n'est pas contractante (même si $\forall x \neq y, |f(x) - f(y)| < |x - y|$).*

3. $f : [0,1] \mapsto \mathbb{R}, x \mapsto x/2+1$ *ne possède pas de point fixe : on n'a pas* $f([0,1]) \subset [0,1]$

2.3 Théorème du point fixe de type Brouwer

le Théorème du point fixe de Brouwer est un résultat de topologie algébrique. Il fait partie de la grande famille des théorèmes du point fixe. Il existe plusieurs formes de ce théorème selon le contexte d'utilisation. Ce Théorème donne l'existence d'un point fixe pour une fonction continue sur une boule fermée dans un espace de dimension finie ([2],[4],[7]).

Théorème 2.3.1. *Soit* K *une partie non vide, compacte et convexe de* $\mathbb{R}^n$ *et* $f : K \to K$ *une fonction continue. Il existe alors* $x \in K$ *tel que* $f(x) = x$

Remarques 2.3.1. **1. Les parties compactes et convexes de $\mathbb{R}$ sont les segments. Le théorème de Brouwer prends donc dans le cas $n = 1$ la forme particulière suivante :**

Théorème 2.3.2. *Si* $T : [a,b] \to [a,b]$ *est continue, alors il existe* $x \in [a,b]$ *tel que* $f(x) = x$

Preuve 2.3.1. *Si f est continue de*$[a,b]$ *dans lui même, la fonction* $g \to f(x) - x$ *est continue, et prend en a la valeur* $f(a) - a \geq 0$ *(ou* $f(a) - a \leq 0$*) et en b la valeur* $f(b) - b \leq 0$ *(ou* $f(b) - b \geq 0$*) Alors par le théorème des valeurs intermédiaires, la fonction g s'annule en un point* x_0 *qui est un point fixe de* f *.*

2. De même dans le plan, Les parties compactes et convexes sont les disques fermés ou bien les boules fermées, le théorème de Brouwer prend la forme suivante

Théorème 2.3.3. *Toute application T continue du disque fermé dans lui-même admet au moins un point fixe.*

Preuve 2.3.2. *Il est bon de donner juste un croquis de la démonstration, Si K est le domaine de définition de T d'intérieur vide, c'est un segment. Sinon, K est semblable à une boule unité fermée. Le terme semblable signifie qu'il existe un homéomorphisme* $\emptyset$ *de la boule unité vers K, L'équation définissant le point fixe peut encore s'écrire si* $h = To\emptyset, h(x) = x$*. Autrement dit, On peut supposer que K est la boule unité fermée. On peut de plus choisir la norme de manière quelconque. Si on choisit celle qui associe la valeur absolue de la plus grande coordonnée, cela revient à dire que l'on peut choisir pour compact K, l'ensemble* $[-1,1] \times [-1,1]$*, sans perte de généralité. Si l'on définit la fonction f comme suit :*

$$f : [-1,1] \times [-1,1] \mapsto [-1,1] \times [-1,1]$$

$$x \mapsto f(x) = h(x) - x$$

cela revient à montrer que la fonction atteint le vecteur nul sur $[-1,1] \times [-1,1]$ *Si* f_k*, pour* $k = 1,2$*, sont les deux fonctions cordonnées de f cela revient à montrer l'existence d'un point*

x_0,telle que f_1 et f_2 admettent toutes deux pour zéro la valeur x_0,
la fonction f_1 est une fonction de $[-1,1]\times[-1,1]$ dans $[-1,1]$ sur $\{-1\}\times[-1,1]$, elle est positive, en revanche sur $\{-1\}\times[-1,1]$, elle est négative. ceci laisse penser que la courbe de niveau 0 est une ligne qui parte d'un point $[-1,1]\times\{-1\}$ pour finir sur un point $[-1,1]\times\{-1\}$ le même raisonnement appliquée f_2 laisse penser que la courbe de niveau 0 est cette fois-ci une ligne qui part d'un point $\{-1\}\times[-1,1]$, pour terminer sur un point de $\{-1\}\times[-1,1]$.
Intuitivement, il semble évident que ces deux lignes de niveaux doivent nécessairement se croiser et ce point de croisement est un point fixe de $To\emptyset$.

Notation 2.3.1. *Il est important de voir que l'unicité n'est pas assurée par le théorème de Brouwer du fait que chaque point de K est un point fixe de l'application identité.*
Il est possible de généraliser en toute dimension finie. Donc dans un espace euclidien,on retrouve

Théorème 2.3.4. *Toute application T continue d'une boule fermée d'un espace euclidien dans elle-même admet un point fixe.*

Il peut encore être un peu plus général, en considérant toute partie convexe compact d'un espace euclidien.

Théorème 2.3.5. *Toute application T continue d'un convexe compact K d'un espace euclidien à valeur dans K admet un point fixe.*

Nous allons donner un résultat de Brouwer qu'on oura besoin dans la démonstration du théorème de Schauder.

Définition 2.3.1. *On dit qu'un espace topologique a la propriété du point fixe si toute application continue $T : E \mapsto E$ possède un point fixe.*

On note par B_n la boule unité fermée de E^n et on a le résultat suivant :

Théorème 2.3.6. *La boule B_n a la propriété du point fixe pour tout $n \in \mathbb{N}$*

2.4 Théorème du point fixe du type Schauder

Ce théorème prolonge le résultat du théorème de Brouwer pour montrer l'existence d'un point fixe pour une fonction continue sur un convexe compact dans un espace de Banach. Le théorème du point fixe de Schauder est plus topologique, est affirme qu'une application continue sur un convexe compact admet un point fixe, qui n'est pas nécessairement unique.
Et nous avons le résultat suivant ([4]) :

Théorème 2.4.1. *Soit K un sous-ensemble non vide, compact, convexe dans un espace de Banach E et supposons $T : K \to K$ une application continue. Alors T admet au moins un point fixe.*

Preuve 2.4.1. *Soit $T : K \to K$ une application continue. Comme K est compact,T est uniformément continue , donc, si on fixe $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $x, y \in K$, on a :*

$$\|x-y\| \leq \delta \Rightarrow \|T(x)-T(y)\| \leq \varepsilon \tag{2.4.0.1}$$

de plus, il existe un ensemble fini de points $\{x_1, x_2, \cdots, x_p\} \subset K$ tel que les boules ouvertes de rayon δ centrées aux x_i recouvrent K, i.e.$K \subset \bigcup_{i\leq j\leq p} B(x_j, \delta)$
Si on désigne $L := Vec(T(x_j))_{1\leq j\leq p}$ alors L est de dimension finie, et $K^* := K \cap L$ est compact convexe de dimension finie. Pour $1 \leq j \leq p$, on définie la fonction continue $\psi_j : E \to \mathbb{R}$ par :

$$\psi_j = \begin{cases} 0 & si\|x-x_j\| \geq \delta \\ 1 - \dfrac{\|x-x_j\|}{\delta} & sinon \end{cases} \tag{2.4.0.2}$$

il est clair que ψ_j est strictement positive sur $B(x_j, \delta)$ et nulle en dehors.
On a donc, pour tout $x \in K, \sum_{j=1}^{p} \psi_j(x) > 0$, on peut définir sur K les fonctions continue positives φ_j par

$$\varphi_j = \frac{\psi_j}{\sum_{k=1}^{p} \psi_k(x)} \tag{2.4.0.3}$$

pour les quelles on a $\sum_{j=1}^{p} \varphi_j(x) = 1$ pour tout $x \in K$,
Posant,pour $x \in K$

$$g(x) = \sum_{j=1}^{p} \varphi_j(x) T(x_j) \tag{2.4.0.4}$$

La fonction g est continue (car elle est la somme des fonctions continues)et prend ses valeurs dans K^*(car $g(x)$ est un barycentre des $T(x_j)$). Si on prend la restriction g/k^* :$K^* \to K^*$, (d'après théorème de Brouwer)g possède un point fixe $y \in K*$,
De plus :

$$\begin{aligned} T(y) - y &= T(y) - g(y) \\ &= \sum_{j=1}^{p} \varphi_j(y) T(y) - \sum_{j=1}^{p} \varphi_j(x) T(x_j) \\ &= \sum_{j=1}^{p} \varphi_j(x)[T(y) - T(x_j)] \end{aligned}$$

Or si $\varphi_j(y) \neq o$ alors $\|y - x_j\| < \delta$,et par suite $\|T(y) - T(x_j)\| < \varepsilon$. On a pour tout j

$$\begin{aligned}\|f(y) - y\| &\leq \sum_{j=1}^{p} \varphi_j(x)[T(y) - T(x_j)] \\ &\leq \sum_{j=1}^{p} \varepsilon \varphi_j(y) = \varepsilon\end{aligned}$$

Pour tout entier m , en peut trouver un point $y_m \in K$ tel que $\|f(y_m) - y_m\| \leqslant 2^{-m}$. Et puisque K est compact, de la suite $(y_m)_{m\in\mathbb{Z}}$ on peut extraire une sous-suite (y_{m_k}) qui converge vers un point $y* \in K$. Alors T étant continue, la suite $(T(y_{m_k}))$ converge vers $T(y*)$, et on conclut que $T(y*) = y*$, i.e y^* est un point fixe de T sur K.

2.5 Théorème du point fixe de Kannan

Il fût le premier résultat en littérature qui garantit l'existence et l'unicité de points fixes pour les applications non continues ([6],[10],[12])

Théorème 2.5.1. *(R. Kannan 1968) Soit (X,d) un espace métrique complet et $T : X \mapsto X$ une application. Supposons qu'il existe $\lambda \in [0, \frac{1}{2}[$ tel que pour tous $x, y \in X$ on a :*

$$d(T(x), T(y)) \leq \lambda[d(x, T(x)) + d(y, T(y))] \tag{2.5.0.1}$$

Alors T admet un point fixe unique dans X.

Preuve 2.5.1. ***Existence :*** *Soit $x_0 \in X$ arbitraire, on définit la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par $x_n = T(x_{n-1}), n = 1, 2, ...,$ en utilisant la condition 2.5.0.1, on obtient :*

$$\begin{aligned}d(x_n, x_{n+1}) &= d(T(x_{n-1}), T(x_n)) \\ &\leq \lambda[d(x_{n-1}, T(x_n)) + d(x_n, T(x_{n+1}))] \\ &= \lambda[d(x_{n-1}, x_n) + d(x_n, x_{n+1})]\end{aligned}$$

ce qui implique :

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq \left(\frac{\lambda}{1-\lambda}\right)^n d(x_0, x_1)$$

On pose $h = \dfrac{\lambda}{1-\lambda}$ *Si n,p sont deux entiers naturels, alors :*

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+p}) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + ... + d(x_{n+p-1}, x_{n+p}) \\ &\leq (h^n + h^{n+1} + ... + h^{n+p-1}) d(x_0, x_1) \\ &\leq \frac{h^n}{1-h} d(x_0, x_1). \end{aligned}$$

Comme $\lambda \in [0, \frac{1}{2}[$ *on a* $h \in [0,1[$ *et donc* $d(x_n, x_{n+p}) \longrightarrow 0$ *lorsque* $n \longrightarrow \infty$
La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est alors de Cauchy. Comme X est complet, il existe* $x \in X$.
x est un point fixe de X car

$$\begin{aligned} d(x, T(x)) &\leq d(x, x_n) + d(x_n, T(x)) \\ &\leq d(x, x_n) + \lambda[d(x_{n-1}, x_n) + d(x, T(x))] \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned} d(x, T(x)) &\leq d(x, x_n) + \lambda d(x_{n-1}, x) + \lambda d(x, T(x)), \\ (1-\lambda) d(x, T(x)) &\leq d(x, x_n) + \lambda d(x_{n-1}), \\ d(x, T(x)) &\leq \frac{1}{1-\lambda} d(x, x_n) + \frac{\lambda}{1-\lambda} d(x_{n-1}, x_n) \end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0$ *un réel arbitraire, comme* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers x, il existe un entier naturel* $N = N(\varepsilon)$ *tel que*

$$n \geq N \geq 1 \Rightarrow d(x, x_n) \leq \varepsilon \frac{1-\lambda}{1+\lambda} \quad et \quad d(x_{n-1}, x_n) \leq \varepsilon \frac{1-\lambda}{1+\lambda}$$

Il en résulte que

$$d(x, T(x)) \leq \frac{\varepsilon}{1-\lambda} + \frac{\varepsilon\lambda}{1+\lambda} = \varepsilon$$

Comme ε *est arbitraire, on déduit que* $T(x) = x$

Unicité :

Supposons que y est un autre point fixe de $T, x = T(x)$ **et** $y = T(y)$**,**
on a :

$$d(x, y) = d(T(x), T(y)) \leq \lambda[d(x, T(x)) + d(y, T(y))] \tag{2.5.0.2}$$

Á partir l'inégalité 2.5.0.2 **, on obtient :**

$$\begin{aligned} d(x,y) &\leq 2\lambda d(x,y) \\ (1-2\lambda)d(x,y) &\leq 0 \\ d(x,y) &\leq 0 \end{aligned}$$

car $(0 < 1-2\lambda) \leq 1)$

$$d(x,y) = 0$$

Donc x = y, d'où l'unicité.

Exemple 2.5.1. ***a)*** *Soit* $E = [0,1]$ *et considérons la fonction* $T : E \to E$ *définie par :*

$$Tx = \begin{cases} \frac{x}{4} & si \quad x \in [0, \frac{1}{2}[\\ \frac{x}{5} & si \quad x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

ici, T est discontinue en $x = \frac{1}{2}$ *; Par conséquent, la condition* 1.5.0.2 *n'est pas satisfaite . Pour montrer que la condition* 2.5.0.1 *est satisfaite, on considère trois cas :*

1. *Si x et y sont dans* $[0, \frac{1}{2}[$*, il est clair que :*

$$\frac{1}{4}|x-y| \leq \frac{1}{3}(|x|-|y|).$$

Donc

$$\begin{aligned} |Tx - Ty| &\leq \frac{1}{9}(|3x| + |3y|) \\ &= \frac{1}{9}(|4x - x| + |4y - y|) \\ &= \frac{4}{9}(|x - Tx| + |y - Ty|). \end{aligned}$$

2. *Si* $x, y \in [\frac{1}{2}, 1]$*, il est clair que :*

$$\frac{1}{5}|x-y| \leq \frac{1}{4}(|x|-|y|).$$

De la même façon, on montre que

$$\forall x, y \in [\frac{1}{2}, 1] \quad |Tx - Ty| \leq \frac{5}{16}(|x - Tx| + |y - Ty|)$$

et puisque $\frac{15}{4} < \frac{4}{9}$ *donc*

$$|Tx - Ty| < \frac{4}{9}(|x - Tx| + |y - Ty|) \quad pour \quad x, y \in [\frac{1}{2}, 1].$$

3. *Si* $x \in [0, \frac{1}{2}[$ *et* $y \in [\frac{1}{2}, 1]$ *il est clair que :*

$$|\frac{x}{4} - \frac{y}{5}| \leq |\frac{x}{4}| + |\frac{y}{5}|$$

Alors

$$\begin{aligned}
|Tx - Ty| &\leq |\frac{x}{4}| + |\frac{y}{5}| \\
&= \frac{1}{12}|4x - x| + \frac{1}{20}|5x - x| \\
&= \frac{1}{3}|x - Tx| + \frac{1}{4}|x - Tx| \\
&\leq |Tx - Ty| \leq \frac{4}{9}(|x - Tx| + |y - Ty|).
\end{aligned}$$

Donc pour $\lambda = \frac{4}{9} < \frac{1}{2}$, *la condition* 2.5.0.1 *est satisfaite .i.e,*

$$\forall x, y \in [0, 1], |Tx - Ty| \leq \frac{4}{9}(|x - Tx| + |y - Ty|)$$

b) *Dans le même espace E en considérant la fonction* $T : E \to E$ *définie par* $Tx = \frac{x}{3}$. *La condition* 1.5.0.2 *est satisfaite pour* $k = \frac{1}{3}$

$$|Tx - Ty| = \frac{1}{3}|x - y|.$$

Mais la condition 2.5.0.1 *n'est pas satisfaite, si on suppose* $0 < \lambda < \frac{1}{2}$ *tel que*

$$|Tx - Ty| \leq \lambda(|x - Tx| + |y - Ty|) \quad pour \quad x, y \in [0, 1]$$

et si en prenant $x = \frac{1}{3}$ *et* $y = 0$ *on a :*

$$\frac{1}{9} \leq \frac{2}{9}\lambda.$$

donc $\lambda \geq \frac{1}{2}$, *contradiction.*

2.6 Théorème du point fixe de Chatterjea

En 1971 Chatterjea a obtenu la variante du théorème de point fixe de Kannan suivant ([15]) :

Théorème 2.6.1. *Soit (X, d) un espace métrique complet et $T : X \mapsto X$ une application. Supposons qu'il existe $\lambda \in [0, \frac{1}{2}[$ tell que pour tous $x, y \in X$, on a*

$$d(T(x), T(y)) \leq \lambda[d(x, T(y)) + d(y, T(x))] \tag{2.6.0.1}$$

Alors T admet un point fixe unique dans X.

Preuve 2.6.1. ***<u>Existence</u>*** *: Soit $x_0 \in X$ arbitraire, on définit la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par $x_n = T(x_{n-1}) = T^n x_0, n = 1, 2, \cdots$ en utilisant la condition 2.6.0.1, on obtient :*

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+1}) &= d(T(x_{n-1}), T(x_n)) \\ &\leq \lambda[d(x_{n-1}, T(x_n)) + d(x_n, T(x_{n-1}))] \\ &= \lambda[d(x_{n-1}, x_{n+1}) + d(x_n, x_n)] \\ &\leq \lambda[d(x_{n-1}, x_n) + d(x_n, x_{n+1})] \end{aligned}$$

ce qui implique :

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq \left(\frac{\lambda}{1-\lambda}\right)^n d(x_0, x_1)$$

On pose $h = \frac{\lambda}{1-\lambda}$ Si n,p sont deux entiers naturels, alors :

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+p}) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \cdots + d(x_{n+p-1}, x_{n+p}) \\ &\leq (h^n + h^{n+1} + \cdots + h^{n+p-1}) d(x_0, x_1) \\ &\leq \frac{h^n}{1-h} d(x_0, x_1) \end{aligned}$$

Comme $\lambda \in [0, \frac{1}{2}[$, on a $h \in [0, 1[$ et donc $d(x_n, x_{n+p}) \mapsto 0$ lorsque $n \mapsto \infty$. La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est alors de Cauchy. Comme X est complet, il existe $x \in X$.x est un point fixe de X car :

$$\begin{aligned} d(x, T(x)) &\leq d(x, x_n) + d(x_n, T(x)) \\ &\leq d(x, x_n) + \lambda[d(x_{n-1}, x_n) + d(x, T(x))] \end{aligned}$$

et donc

$$d(x, T(x)) \leq \frac{1}{1-\lambda} d(x, x_n) + \frac{\lambda}{1-\lambda} d(x_{n-1}, x_n).$$

Soit $\varepsilon > 0$ un réel arbitraire, comme $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x, il existe un entier naturel

$N = N(\varepsilon)$ *tel que*

$$n \geq N \geq 1 \Rightarrow d(x, x_n) \leq \varepsilon \frac{1-\lambda}{1+\lambda} \quad et \quad d(x_{n-1}, x_n) \leq \varepsilon \frac{1-\lambda}{1+\lambda}$$

Il en résulte que

$$d(x, T(x)) \leq \frac{\varepsilon}{1+\lambda} + \frac{\varepsilon\lambda}{1+\lambda} = \varepsilon.$$

Comme ε *est arbitraire, on déduit que* $T(x) = x$

Unicité *: Supposons que* y *est un autre point fixe de T. En suite, nous avoir* $Ty = y$ *et*

$$d(x, y) = d(Tx, Ty) \tag{2.6.0.2}$$
$$\leq \lambda[d(x, Ty) + d(y, Tx)] \tag{2.6.0.3}$$

À partir l'inégalité, on obtient :

$$d(x, y) \leq 2\lambda d(x, y)$$
$$(1 - 2\lambda)d(x, y) \leq 0$$
$$d(x, y) \leq 0$$

car $(0 < 1 - 2\lambda) \leq 1)$

$$d(x, y) = 0$$

Donc $x = y$ *d'où l'unicité.*

Remarque 2.6.1. *Dans un espace métrique (X,d), la contraction de type Banach, le type de Kannan la contraction de type Chatterjea sont indépendantes et différentes les unes des autres. Par exemple, soit* $X = [-1, 1]$ *avec la métrique* $d(x, y) = |x - y|$ *pour* $x, y \in X$, *et définissez une correspondance* $T : X \mapsto X$ *par*

$$Tx = -\frac{1}{2}x, \quad pour \ \ tout \quad x \in X$$

Alors, T n'est pas seulement une contraction de type Banach, mais également une contraction de type Kannan. Cependant, T n'est pas un contraction de type Chatterjea.

Chapitre 3

Applications

Ce chapitre représente le but de ce mémoire, où on va présenter quelques applications du principe de contraction de Banach et théorème de Schauder sur l' équation intégrale de Fredholm et Volterra.

3.1 Applications du principe de Banach

3.1.1 a) Application sur l'équation intégrale de Fredholm, (cas linéaire)

Théorème 3.1.1. *Soit l'équation suivante :*

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x,t)\varphi(t)dt = f(x)$$

cette l'équation admet une solution unique $\varphi \in L^2([a,b])$, si le noyau K est continu sur l'intervalle $[a,b]$ avec

$$f \in L^2([a,b]) \quad et \quad |\lambda|K < 1, \quad K = \sqrt{\int_a^b \int_a^b |k(x,t)|^2 dxdt}$$

Preuve 3.1.1. *On considère l'équation :*

$$(T\varphi)(x) = f(x) + \int_a^b K(x,t)\varphi(t)dt \tag{3.1.1.1}$$

puisque $f \in L^2([a,b]), T\varphi \in L^2([a,b])$.Si

$$\int_a^b K(x,t)\varphi(t)dt \in L^2([a,b])$$

En utilisant l'inégalité de Schwartz, donc

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b K(x,t)\varphi(t)dt\right| &\leq \int_a^b |K(x,t)\varphi(t)|dt \\ &\leq \left(\int_a^b |K(x,t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b |\varphi(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

donc

$$\left|\int_a^b K(x,t)\varphi(t)dt\right|^2 \leq \left(\int_a^b |K(x,t)|^2 dt\right)\left(\int_a^b |\varphi(t)|^2 dt\right)$$

alors

$$\begin{aligned}\int_a^b \left|\int_a^b K(x,t)\varphi(t)dt\right|^2 dx &\leq \int_a^b \left(\int_a^b |K(x,t)|^2 dt\right)\left(\int_a^b \varphi(t)|^2 dt\right)dx \\ &\leq \int_a^b \int_a^b |K(x,t)|^2 dt dx \int_a^b |\varphi(t)|^2 dt\end{aligned}$$

Puisque

$$\int_a^b \int_a^b |K(x,t)|^2 dt dx < \infty \quad et \quad \int_a^b |\varphi(t)|^2 dt < \infty$$

alors l'équation 3.1.1.1 *est satisfaisante et* T *de* $L^2([a,b])$ *dans lui-même.*
Notons que la démonstration ci-dessous est également que l'opérateur défini par :

$$(T\varphi) = \int_a^b K(x,t)\varphi(t)dt$$

est borné, donc par le théorème (2.1.2) *l'équation* $T\varphi = \varphi$ *admet une solution unique, pour* $|\lambda|k < 1$.

Théorème 3.1.2. *Soit* A *est un opérateur borné dans l'espace de Hilbert* $L_2([a,b])$ *tel que :*

$$(T\varphi) = \int_a^b K(x,t,\varphi(t))dt$$

et que

$$|K(x,t,z_1) - K(x,t,z_2)| \leq V(x,t)|z_1 - z_2|$$

avec la condition

$$\int_a^b \int_a^b |V(x,t)| dx dt = P^2 < \infty.$$

alors l'equation

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x,t,\varphi(t))dt = f(x) \tag{3.1.1.2}$$

admet une solution unique pour tout second membre $f(x) \in L_2([a,b])$*, à condition que* $|\lambda|P < 1$.

Preuve 3.1.2. *Pour l'équation intégrale de Fredholm on considère l'opérateur :*

$$T\varphi = f(x) + \lambda A\varphi = f(x) + \lambda \int_a^b (x,t,\varphi(t))dt$$

alors

$$\begin{aligned}
\|T\varphi_1 - T\varphi_2\| &= |\lambda|\|A\varphi_1 - A\varphi_2\| \\
&= |\lambda| \left\| \int_a^b (K(x,t,\varphi_1(t)) - K(x,t,\varphi_2(t)))dt \right\| \\
&= |\lambda| \left[\int_a^b \left[\int_a^b |K(x,t,\varphi_1(t)) - K(x,t,\varphi_2(t))|dt \right]^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} \\
&\leq |\lambda| \left[\int_a^b \left[\int_a^b |V(x,t)|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)|dt \right]^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} \\
&\leq |\lambda| \left[\int_a^b \left[\left(\int_a^b |V(x,t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b |\varphi_1(t) - \varphi_2(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \right]^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} \\
&= |\lambda| \left[\int_a^b \left[\left(\int_a^b |V(x,t)|^2 dt \right) \|\varphi_1 - \varphi_2\|^2 \right] dx \right]^{\frac{1}{2}} \\
&= |\lambda| \left[\|\varphi_1 - \varphi_2\|^2 \int_a^b \int_a^b |V(x,t)|^2 dt dx \right]^{\frac{1}{2}} \\
&= |\lambda| \left[\|\varphi_1 - \varphi_2\|^2 P^2 \right]^{\frac{1}{2}} = |\lambda| \|\varphi_1 - \varphi_2\| P
\end{aligned}$$

Si $|\lambda|P < 1$*, l'opérateur* T *est une contraction qu'il implique que l'équation* $T\varphi = \varphi$ *admet une solution unique, d'ou l'équation* 3.1.1.2.

3.1.2 b) Application sur l'équation intégrale de Volterra

A : cas linéaire

Théorème 3.1.3. *Soit* $K(x,t)$ *est une fonction continue pour* $x, t \in [a,b]$*, et bornée unifor-*

mément, tel que :

$$|K(x,t)| \leq M, \quad M > 0$$

alors l'équation de Volterra

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^x K(x,t)\varphi(t)dt = f(x) \tag{3.1.2.1}$$

admet une solution unique $\varphi(x)$ pour tout $f(x)$ dans $L_2([a,b])$ et tout λ de $\mathbb{R}$.

Preuve 3.1.3. *Pour l'équation intégrale de Volterra on considère l'opérateur :*

$$T\varphi = f(x) + \lambda A\varphi = f(x) + \lambda \int_a^x K(x,t)\varphi(t)dt$$

avec

$$A\varphi = \int_a^x K(x,t)\varphi(t)dt$$

et on démontre que l'opérateur T^n est un contraction pour $n \in \mathbb{N}$, ainsi $T\varphi$ admet un point fixe

$$\begin{aligned}
T\varphi &= f + \lambda A\varphi \\
T^2\varphi &= T(T\varphi) = T(f + \lambda A\varphi) = f + \lambda A(f + \lambda A\varphi) = f + \lambda Af + \lambda^2 A^2\varphi \\
&. \\
&. \\
&. \\
T^n\varphi &= f + \lambda Af + \lambda^2 A^2 f + \ldots + \lambda^{n-1}A^{n-1}f + \lambda^n A^n\varphi
\end{aligned}$$

Afin que

$$\begin{aligned}
\|T^n\varphi_1 - T^n\varphi_2\| &= \|\lambda^n A^n\varphi_1 - \lambda^n A^n\varphi_2\| = |\lambda|^n \|A^n\varphi_1 - A^n\varphi_2\| \\
\|T^n\varphi_1 - T^n\varphi_2\| &= |\lambda|^n \| \int_a^x K_n(x,t)(\varphi_1(t) - \varphi_2(t))dt\|
\end{aligned}$$

Pour déterminer $K_n(x,t)$, on utilise la relation.

$$\begin{aligned} A\varphi &= \int_a^x K(x,t)\varphi(t)dt \\ A^2\varphi &= \int_a^x K(x,t)\int_a^t K(t,z)\varphi(z)dz \\ &= \int_a^x \varphi(z)dz \int_z^x K(x,t)K(t,z)dt \\ &= \int_a^x K_2(x,z)\varphi(z)dz, \quad \text{où} \quad K_2(x,t) = \int_t^x K(x,z)K(z,t)dz \end{aligned}$$

par récurrence on obtient

$$\begin{aligned} K_1(x,t) &= K(x,t) \\ K_2(x,t) &= \int_t^x K(x,z)K(z,t)dz \\ K_3(x,t) &= \int_t^x K_2(x,z)K(z,t)dz \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ K_n(x,t) &= \int_t^x K_{n-1}(x,z)K(z,t)dz \end{aligned}$$

puisque par l'hypothèse on a $|K(x,t)| \leq M$ *alors*

$$|K_n(x,t)| \leq \frac{M^n(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} \quad , a \leq t \leq x \leq b \tag{3.1.2.2}$$

pour $n = 1$ *l'expression* 3.1.2.2 *est vrai. On Suppose qu'elle est vrai pour* $m \in \mathbb{N}$*,*

$$|K_m(x,t)| \leq \frac{M^m(x-1)^{m-1}}{(m-1)!}$$

alors

$$\begin{aligned}
|K_{m+1}(x,t)| &= |\int_t^x K_m(x,z)K(z,t)dz| \\
&\leq \int_t^x |K_m(x,z)K(z,t)|dz \\
&\leq \frac{M^{m+1}}{(m-1)}\int_t^x (x-z)^{m-1}dz \\
&\leq \frac{M^{m+1}}{m}(x-z)^m.
\end{aligned}$$

ainsi

$$\|T^n\varphi_1 - T^n\varphi_2\| \leq \frac{|\lambda|^n M^n}{(n-1)!}\|\varphi_1-\varphi_2\|$$

. Pour $n \in \mathbb{N}$ assez grand, on obtient

$$\frac{|\lambda|^n M^n}{(n-1)!} < 1$$

. Afin que T^n un opérateur est une contraction implique T admet un point fixe unique

$$T\varphi = \varphi \Leftrightarrow \varphi(x) = f(x) + \lambda\int_a^x K(x,t)\varphi(t)dt$$

Ce point fixe est la solution de l'équation 3.1.2.1.

<u>B : cas non-linéaire</u>

Théorème 3.1.4. *Soit $K : [0,T]\times[0,T]\times\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, est une fonction continue satisfait la condition de Lipschitz suivante :*

$$|K(x,t,u) - K(x,t,v)| \leq L|u-v|$$

pour tout : $(x,t) \in [0,T]\times[0,T]$, et $u,v \in \mathbb{R}$. Alors pour tout $f \in C[0,T]$ l'équation

$$\varphi(x) = f(x) + \int_0^x K(x,t,\varphi(t))dt \quad (0 \leq x \leq T) \tag{3.1.2.3}$$

admet une solution unique $\varphi \in C[0,T]$. De plus, pour tout $\varphi_0 \in C[0,T]$ la suite des fonctions $\{\varphi_n\}$ définie par :

$$\varphi_{n+1}(x) = f(x) + \int_0^x K(x,t,\varphi_n(t))dt \quad (0 \leq x \leq T)$$

la suite $\{\varphi_n\}$ converge uniformément dans $C[0,T]$ vers une solution unique φ .

Preuve 3.1.4. *Soit E est l'espace de Banach de* $C[0,T]$ *muni de la norme :*

$$|g| = \max_{0\leq x\leq T} |g(x)| exp(-Lx)$$

cette norme est équivalente à la norme sup $\|y\|$*.En effet*

$$exp(-Lx)\|y\| \leq |y| \leq \|y\|$$

de plus, elle est aussi complète.
On définit $F : E \mapsto E$ *par :*

$$F(\varphi)(x) = f(x) + \int_0^x K(x,t,\varphi(t))dt$$

A fin de prouver que l'équation 3.1.2.3 *admet une solution, il faut montrer que* $F : E \mapsto E$ *admet un point fixe.*
On montre que F est contractante :

$$\begin{aligned}
|F(\varphi_1) - F(\varphi_2)| &\leq \max_{0\leq x\leq T} exp(-Lx) \int_0^x |K(x,t,\varphi_1(t)) - K(x,t,\varphi_2(t))|dt \\
&\leq L \max_{0\leq x\leq T} exp(-Lx) \int_0^x |\varphi_1(t) - \varphi_2(t)|dt \\
&= L \max_{0\leq x\leq T} exp(-Lx) \int_0^x exp(Lt)exp(-Lt)|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)|dt \\
&\leq L|\varphi_1 - \varphi_2| \max_{0\leq x\leq T} exp(-Lx) \int_0^x exp(Lt)dt \\
&= L|\varphi_1 - \varphi_2| \max_{0\leq x\leq T} exp(-Lx) \frac{exp(Lx) - 1}{L} \\
&\leq (1 - exp(-Lx))|\varphi_1 - \varphi_2|
\end{aligned}$$

Puisque $(1 - exp(-Lx)) < 1$, *alors F est contractante, d'après le principe de Banach F admet un point fixe unique* $\varphi \in E$ *de plus la suite* (φ_n) *définie ci-dessus converge uniformément vers le point fixe* φ *pour la norme* $|y|$ *ainsi que pour la norme* $\sup \|y\|$.

3.2 Application du théorème de Schauder

3.2.1 L'équation intégrale de Volterra

Soit l'équation intégrale suivante :

$$\varphi(x) = f(x) + \int_a^x K(x,t,\varphi(t))dt \ (a \leq x \leq b) \tag{3.2.1.1}$$

Telle que $K : [a,b] \times [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ une fonction continue vérifie les conditions suivantes :

1. $K(x,t,0) = 0$ pour tout : $x,t \in [a,b]$

2. $\dfrac{\partial K(x,t,z)}{\partial z} < \left|\dfrac{1-\|f\|}{b-a}\right|$

alors pour tout $f \in C([a,b])$ telle que $\|f\| < 1$ l'équation 3.2.1.1 admet au moins une solution $\varphi \in C([a,b])$.

Preuve 3.2.1. *B(0.1) fermé non vide convexe, T (continue, relativement compact)*
On va montrer que $T(B(0,1)) \subset B(0,1)$ i.e. pour si $\|\varphi\| < 1$, alors $\|T\varphi\| < 1$. En effet :

$$\begin{aligned}
\|T\varphi\| &= \|f(x) + \int_a^x K(x,t,\varphi(t))dt\| \\
&\leq \|f(x)\| + \|\int_a^x K(x,t,\varphi(t))dt\| \\
&\leq \|f(x)\| + \int_a^x |K(x,t,\varphi(t))|dt \\
&\leq \|f(x)\| + \int_a^x |K(x,t,\varphi(t)) - K(x,t,0)|dt \\
&\leq \|f(x)\| + \int_a^x \left|(\varphi - 0)\frac{\partial k(x,t,\varphi(t))}{\partial \varphi}\right| dt \\
&\leq \|f(x)\| + \|\varphi\|\frac{1-\|f(x)\|}{b-a}(b-a) < 1
\end{aligned}$$

D'après le Théorème Schauder T admet un point fixe, d'où l'équation admet une solution.

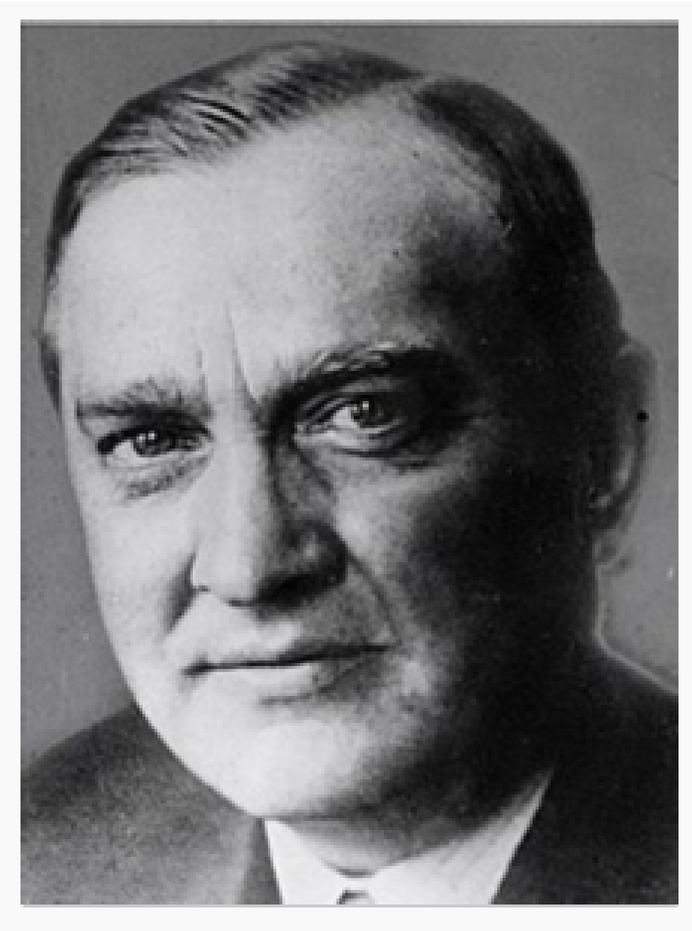
Conclusion

Dans ce mémoire, on a présenté quelques résultats en théorie du point fixe dans des espaces de Banach,qui sont des résultat qui permet d'affirmer qu'une fonction f admet un point fixe sous certaines hypothèses, ces Théorèmes révèlent être des outils très importantes en mathématiques,De nombreux théorèmes d'existence sont obtenus à partir des Théorèmes de Banach et Schauder, en transformant le problème d'existence en un problème de point fixe. Mais celui de Brouwer est particulièrement célèbre.

Le Théorème du point fixe de Banach ne s'appuie pas sur les propriétés topologiques du domaine de définition mais sur le fait que la fonction étudiée soit contractante. Ainsi, le théorème du point fixe de Brouwer garantit l'existence d'un point fixe d'une fonction continue définie de la boule unité fermée euclidienne sur elle même et le théorème du point fixe de Schauder prolonge le résultat du Théorème de Brouwer en dimension infinie pour montrer l'existence d'un point fixe pour une fonction continue sur un convexe compact dans un espace de Banach, et contrairement au théorème de Banach, les démonstrations de ces deux derniers résultats ne sont pas distractivités.

Le Théorème du point fixe de Kannan garantit l'existence et l'unicité d'un point fixe pour les applications n'est pas nécessairement continue dans un espace métrique complet.

Annexe



Stefane Banach : est un mathématicien Polonais, ses travaux ont surtout prote sur l'analyse fonctionnelle dont il est l'un des fondateurs. Il est né le 30 mars 1892 à Cracovie, Galicie(Autriche-Hongrie). Autodidacte, il est découvert fortuitement par Hugo Steinhaus et obtient son doctorat en 1920. Il effectue l'essentiel de sa carrière à LWOW, où il enseigne à l'université et à l'école polytechnique. Ses publications, au nombre d'une soixantaine, font de lui l'un des mathématiciens les plus influents du XXe siècle. Il est l'un des membres fondateurs de la société mathématique de Pologne dont il devient vice président en 1932 et président en 1939. Son nom reste associé un certain nombre de théorèmes et a été donné entre autres aux espaces de Banach et aux algèbres de Banach et aux point fixe de Banach. Il meurt d'un cancer de 31 août 1945 (à 53 ans)

Luitzen Egbertns Jan Brouwer (1881 - 1966) : Est un grand mathématicien hollandais qui de 1909-1913 découvre la majeure partie des théorèmes aux quels son nom est rattaché où on peut citer le théorème de point fixe. Brouwer est le père de la topologie moderne. Après la guerre, il consacrera le reste de sa carrière aux mathématiques intuitionnistes et défendant le rôle de l'intuition pour éviter les antinomies que peuvent faire naître le développement de la science.

Juliusz Schauder : Est un mathématicien polonais, connu pour ses travaux dans les domaines de l'analyse fonctionnelle, les équations aux dérivées partielles et la physique mathématique. Il est né en 1899 à Lemberg, ils est entré à l'université de Lwòw en 1919 et a passé son doctorat en 1923. Il a continué ses recherches tout en travaillant comme enseignant dans une école secondaire, mais grâce à ses résultats remarqués, il a obtenu une bourse d'étude en 1932 qui lui permis de passer plusieurs années d'abord à Leipzig et ensuite à Paris. Vers 1953 Schauder a obtenu un poste de maître assistant à l'université de Lwòw. Schauder est surtout connu pour le théorème de Banach-Schauder, le théorème du point fixe de Schauder qui est un outil majeur pour prouver l'existence de solutions dans différents problèmes. Schauder était juif. Il a été exécuté par gestapo, probablement en octobre 1943.

Bibliographie

[1] Abdelhaq El Jai. *Eléments de topologie et espaces métriques*. Presses Universitaires de Perpignan, 2007, 9782354120078. hal-01267268

[2] A. Monier, *Théorème du point fixe de Brouwer, j. des élève, ENS Lyon, vol 1, 1998, no. 4*, p 202-206.

[3] A.M.Wazwaz,*Linear and nonlinear integral equations methods and applications*, Saint Xavier University chicago, IL 60655, USA.

[4] E. Zeidler, *Non lineair analysis and its application Fixed point Theorem*, Springer Verlage, New York Berlin Heiderberg, Tokyo 1985

[5] Francis Nier Dragons , *Iftimie Introduction à la topologie licence de mathématiques* Université de Rennes 01.

[6] J. Córnicki, *Fixed Point Theorem for Kannan type mappings. J.Fixed Point Theory, App. 19*, 2145-2152(2017)

[7] J. Nachbar, *Fixed point theorems. Econ 511(2010)* ; 1 - 16.

[8] L. Debnath and P. Mikusninski, *Introduction to Hilbert Spaces with application*, Academic press, New York, 1990.

[9] M. Guesba, *Sur quelques équations intégrales non linéaires*, Mémoire de magister université de M'sila 2012.

[10] N.Redjel, *Quelques résultat de points fixes et applications*, mémoire doctorat Université Mentouri Constantine 1, 2016

[11] Q.H.Ansari, *Metric Spaces Including Fixed Point Theory and Set valued Maps*. Norosa publisling House, New Delhi (2010).

[12] R. Kannan, *Somme results on fixed points Bull. Calcutta. Math. Soc.*, 60(1968) ; 71 - 76

[13] R. Precup, *Methods in Nonlinear Integral Equations*, Springer-Science+Business Media, 2002.

[14] S. Banach, *Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application au équation intégrales*, Fund. Math, 3(1922) ; 133-181.

[15] S. Chatterjea, *Fixed Point Theorem*, C.R.Acad. Bulgare. Sci., 25(1972) ; 727-730

[16] S. Willard, *General topology*, Adison wesley(1970) .

[17] T. Goudron, *Intégration intégrale de Lebesgue et introduction à l'analyse fonctionnelle*, Ellipses Édition Marketing S.A., 2011.