REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE & POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR & DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Université Ibn Khaldoun- Tiaret
FACULTÉ DES MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUE
DÉPARTEMENT DES MATHEMATIQUES

MEMOIRE MASTER

Présentée par:

MIRI AHMED

TERGOU AHMED

Spécialité : *Mathématiques*

Option : *Analyse fonctionnelle et équation différentielle*

Intitulé

Théorème du point fixe dans les espace de Fréchet et ses applications aux équation intégral non linéaires

Soutenue le : 22/06/ 2022 devant le jury composé de :

Président : *Mme.Sabit Souhila* *MCA. Univ. Ibn Khaldoun Tiaret*

Examinateurs : *Mr. Maazouz Kada* *MCA. Univ. Ibn Khaldoun Tiaret*

Encadreur : *Mr. Baghdad Said* *MCB. Univ. Ibn Khaldoun Tiaret*

2021-2022

Table des matières

Introduction

Le principe de contraction de Banach, qui garantit l'existence d'un point fixe d'une contraction définie sur un espace métrique complet et à valeur dans lui même, a été énoncé par Banach en 1922. Ce principe est le plus simple des théorèmes de point fixe et il a de nombreuses applications, notamment en analyse numérique, dans la théorie des fractales et dans la théorie des équations différentielles et intégrales [6]. Dans [10], les auteurs exposent une preuve élémentaire et directe d'une généralisation de l'alternative non linéaire pour les applications contractantes. M. Frigon ET A.Granas généralisent ces résultats et présentent des théorèmes d'existence de points fixes pour des familles de contractions définies sur un fermé quelconque d'un espace de Fréchet [9].

Mentionnons que les espaces de Fréchet ont joué un rôle important dans l'analyse fonctionnelle depuis ses tout débuts : De nombreux espaces vectoriels de fonctions holomorphes, différentiables ou continues qui se présentent à propos de divers problèmes d'analyse et de ses applications sont définis par (au plus) un nombre dénombrable de conditions, d'où elles portent une topologie de Fréchet naturelle (si elles sont, en plus, complètes) voir [2, 3].

Ce mémoire se compose en trois chapitre.

Dans le premier chapitre, on a collecté les notions de base concernant les espaces métriques et leurs propriétés topologiques (compacité, complétude.. ect), quelque espaces fonctionnels, espaces vectoriels normés et espaces de Hilbert.

Le deuxième chapitre est consacré pour la théorie générale des espaces de Fréchet et principe de contraction dans ces espaces et quelque extensions pour les familles admissibles.

Dans le troisième chapitre, on a étudier l'existence et l'unicité de certains problèmes non linéaires en considérant des espaces de Fréchet muni d'une famille de semi-normes. L'outil principal dans cette étude est l'alternative non linéaire de type Leray-Schauder pour les applications contractantes.

a Problème de Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \quad , \quad \text{p.p. } t \in [0, \infty) \\ x(0) = 0, \forall x \in H, \end{cases}$$

où H est un espace de Hilbert.

- Équation intégrale singulière

$$x(t) = \int_{-\infty}^{t} k(t, s, x(s))ds,$$

- Équation intégrale quadratique

$$y(t) = f(t) + (Ay)(t) \int_{0}^{T} u(t, s, y(s), y(\alpha s))ds, \quad t \in J = [0, +\infty[,$$

Chapitre 1

Préliminaires

1.1 Espaces métriques

1.1.1 Topologie des espaces métriques

Définition 1.1.1. *[7] Soit X un ensemble non vide, on appelle métrique ou distance toute application $d : X \times X \to \mathbb{R}_+$ telle que, pour tout $x, y, z \in X$, on ait :*

1. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$. *(Séparation)*
2. $d(x, y) = d(y, x)$. *(Symétrie)*
3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$. *(Inégalité triangulaire)*

On dit que le couple (X, d) est un espace métrique.

Exemple 1.1.1. *[7] Les applications suivantes sont des métriques sur $\mathbb{R}^n$:*

$$d_1(x, y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| .$$

$$d_2(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2 \right)^{1/2} .$$

$$d_\infty(x, y) = \sup_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i - y_i| .$$

Proposition 1.1.1. *[7] Une distance d d'un ensemble X vérifie :*

1. *La distance est toujours positive ou nulle :* $\forall x, y \in X, d(x, y) \geq 0$.
2. *la distance entre les distance*

$$\forall x, y, z \in X, |d(x, y) - d(x, z)| \leq d(y, z).$$

Proposition 1.1.2. *[15] On dit que deux métriques d_1 et d_2 sur le même ensemble X sont équivalentes s'il existe de constante $k_1 \geq 0$ et $k_2 \geq 0$ telles que :*

$$\forall x, y \in X, k_1 d_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq k_2 d_1(x, y).$$

Définition 1.1.2. *[13] Soit $a \in X$ et $r > 0$;*

On appelle boule ouverte (respectivement boule fermée) de centre a et de rayon r, l'ensemble noté $B(a, r)$ défini dans X par :

$$B(a, r) = \{x \in X \mid d(x, a) < r\} \quad (\textit{respectivement } B_f(a, r) = \{x \in X \mid d(x, a) \leq r\}).$$

On applle sphére de centre a et de rayon r l'ensemble noté $S(a, r)$ défini dans X par :

$$S(a, r) = \{x \in X \mid d(x, a) = r\}.$$

Définition 1.1.3. *[7] Soit (X, d) un espace métrique . On dit qu'une partie A de X bornée s'il existe une boule fermée $B_f(x_0, r)$ telle que $A \subset B_f(x_0, r)$ i.e*

$$\forall x \in A, d(x_0, x) \leq r.$$

Définition 1.1.4. *[7] Soit X un ensemble et (Y, d) un espace métrique. On dit qu'une fonction $f : X \to Y$ est bornée si son image $f(x)$ est bornée . On note $F_b(X, Y)$ l'ensemble des fonctions bornées.*

Définition 1.1.5. *[7] Soit X un espace métrique et A une partie de X. On appelle diamètre de A noté $\Delta(A)$ ou $diam(A)$ le nombre défini par*

$$\Delta(A) = \sup_{x,y \in A} d(x, y).$$

Proposition 1.1.3. *Soit (E, d) un espace métrique. On note $\mathcal{T}$ l'ensemble des parties $O \subset E$ qui vérifient*

$$\forall x \in O, \quad \textit{il existe } r > 0 \mid B(x, r) \subset O.$$

Alors $\mathcal{T}$ définit une topologie sur X.

Définition 1.1.6. *[13] On appelle voisinage d'une partie A de X, toute partie de X qui contient un ouvert contenant A noté $\mathcal{V}_{(A)}$. Pour $x \in X$, $\mathcal{V}_{(x)}$ désigne l'ensemble des voisinages de x.*

Définition 1.1.7. *[13] Pour qu'une partie A de X soit ouverte, il faut et il suffit que A soit voisinage de chacun de ses points. Si $Y \in A$ est ouvert pour le sous espace A, Y n'est pas nécessairement ouvert dans X cependant.*

Proposition 1.1.4. *Soit $x \in X$, on a les propriétés suivantes :*

a) Tout ensemble contenant un voisinage de x est un voisinage de x.

b) L'intersection de toute famille finie de voisinage de x est un voisinage de x.

c) Tout voisinage de x contient x.

Définition 1.1.8. *[13] On dit qu'une partie A de X est fermée si son complémentaire $\complement_X^A$ par rapport à X est ouvert.*

Proposition 1.1.5. *1) X et $\emptyset$ sont des fermés1.1.8.*

2) Toute intersection d'ensembles fermés est un ensemble fermé.

3) Toute réunion finie d'ensembles fermés est un ensemble fermé.

Définition 1.1.9. *[11] On appelle base d'une topologie τ toute partie B de τ telle que tout ouvert $\mathcal{O}$ de τ soit la réunion d'une famille des ouverts de B.*

Définition 1.1.10. *[11] Soit (X, d) un espace métrique et $A \to X$. L'intérieur de A, noté $\overset{\circ}{A}$ est la réunion de tout les ouverts contenus dans A. Les éléments de $\overset{\circ}{A}$ sont appelés les points intérieurs de A.*

Remarque 1.1.1. *$\overset{\circ}{A}$ est le plus grand ouvert inclut dans A. On en déduit que $A \subset X$ est ouvert si et seulement si $A = \overset{\circ}{A}$.*

Proposition 1.1.6. *[11] Soit (X, d) un espace métrique et $A \subset X$. Alors $x \in \overset{\circ}{A}$ si et seulement s'il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset A$.*

Définition 1.1.11. *[11] Soit (X, d) un espace métrique et $A \subset X$. L'adhérence est l'intersection de tous les fermés qui contiennent A, on la note $\overline{A}$.*

Proposition 1.1.7. *[13] Soient $A, B \subset X$ et $x \in X$ alors :*

1. $d(x, A) = 0 \Leftrightarrow x \in \bar{A}$.

2. $A \subset B) \Rightarrow diam(A) \leq diam(B)$.

Proposition 1.1.8. *[11] Soit (X, d) un espace métrique est $A \subset X$. Alors $x \in \overline{A}$ si et seulement si $\forall r > 0,\ B(x, r) \cap A \neq \emptyset$.*

Définition 1.1.12. *[11] Si A est une partie de X, la frontière de A dans X est l'ensemble $Fr(A) = \overline{A} \ / \ \overset{\circ}{A}$.*

Définition 1.1.13 (11). *Une partie A de X est dite dense dans X si $\overline{A} = X$.*

Exemple 1.1.2. *Dans $\mathbb{R}$ muni de la topologie usuelle, l'ensemble des rationnels Q et irrationnels $\mathbb{R} \,/\, Q$ sont denses dans $\mathbb{R}$.*

Définition 1.1.14. *On dit que x est un point d'accumulation de A si $\forall V \in \mathcal{V}_{(x)}$, $(V \cap A \,/\, \{x\} \neq \emptyset)$. On remarque aussi qu'un point d'accumulation est un point adhérent particulier.*

Définition 1.1.15. *[11] On dit que X est séparé si pour tout $x, y \in X$, avec $x \neq y$, il existe deux ouverts U et V avec $x \in U$, $y \in V$ et*

$$U \cap V = \emptyset.$$

Proposition 1.1.9. *Tout espace métrique est séparé.*

Définition 1.1.16. *[11] On dit qu'un espace topologique $(X, \mathcal{T})$ est séparable s'il admet une partie dénombrable et dense.*

Exemple 1.1.3. *L'espace topologique discret est séparé car si $x \neq y$ alors V_x et V_y sont deux voisinages de x et y disjoints.*

Corollaire 1.1.1. *Tout espace métrique compact est séparable.*

Définition 1.1.17. *[13] On dit que X est connexe si et seulement si les seuls sous-espaces à la fois ouverts et fermés sont X et $\emptyset$, i.e : $A \subset X, A$ ouvert et fermé alors $A = \emptyset$ ou $A = X$.*

1.1.2 Complétude

Définition 1.1.18. *[8] On appelle suite dans un espace métrique X toute application de $\mathbb{N}$ dans X. Cette suite est note $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

Définition 1.1.19. *[8] Soit (X, d) un espace métrique. On dit qu'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans X converge vers un point $l \in X$, si $\lim_{n\to+\infty} x_n = l$.*

Proposition 1.1.10. *[13] Une partie F de (X, d) est fermée si la limite de toute suite convergente de F appartient à F.*

Définition 1.1.20. *Soit φ une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ et soit $(x_n)_n$ une suite d'un espace métrique X alors : On appelle sous suite ou suite extraite de la suite $(x_n)_n$ la suite $\left(x_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.*

Définition 1.1.21. *[13] On dit qu'une suite* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *d'un espace métrique (X, d) est de Cauchy si elle vérifie*

$$\forall\varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \mid \forall p, q \geq N_\varepsilon \Rightarrow d\left(x_p, x_q\right) \leq \varepsilon.$$

Proposition 1.1.11. *[11]*

1. *Toute suite convergente est de Cauchy mais la réciproque est fausse.*
2. *Si une suite* $(x_n)_n$ *converge dans un espace métrique* X *sa limite est unique.*
3. *Une suite de Cauchy est toujours bornée.*
4. *Toute suite a un point adhérent admettant une sous-suite convergente.*

Exemple 1.1.4. *La suite* $(x_n)_n = \left(\frac{1}{n}\right)_n$ *est une suite de Cauchy de* $X =]\,0, 1]$ *mais ne converge pas dans* X*. (car* $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0 \notin X$ *).*

Proposition 1.1.12. *Soit* a *une valeur d'adhérence d'une suite* $(x_n)_n$ *alors il existe une suite extraite* $\left(x_{\varphi(n)}\right)_n$ *qui converge vers* a*.*

Définition 1.1.22. *[13] Un espace métrique* (X, d) *est dit complet si toute suite de Cauchy dans* (X, d) *est convergente.*

Théorème 1.1.1. *L'espace* $X \times Y$ *est un espace métrique complet si et seulement si* X *et* Y *sont des espaces métriques complets.*

Exemple 1.1.5. $X = \mathbb{R}$ *est un espace métrique complet pour la distance usuelle.*

Proposition 1.1.13. *[11] Soit* (X, d) *un espace métrique :*

1. *Les sous-espaces complets sont les fermés.*
2. *Une intersection quelconque de sous -espaces complets est complet.*
3. *Une union finie de sous-espaces complets de* (X, d) *est complet .*
4. *Toute partie complète est fermée.*
5. *Dans un espace métrique complet, il y a identité entre les parties fermées et les parties complètes.*

1.1.3 Compacité

Définition 1.1.23. *[11] Un partie* A *d'un espace métrique* (X, d) *sera dite compacte si l'espace métrique* (X, d) *est compact.*

Proposition 1.1.14. *Soient X un espace topologique séparé et A une partie de X alors A compacte quelque soit le recouvrement de A par des ouverts de X, on peut extraire un sous recouvrement fini.*

Définition 1.1.24. *[13] L'espace métrique (X, d) est dit pré-compact (ou totalement borné) si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un recouvrement $(A_i)_{i\in I}$ fini par des ensembles de diamètres inférieurs à ε.*

Définition 1.1.25. *[11] Soient X un espace métrique et $A \subset X$. On dit que A est une partie pré-compacte de X si $\forall\varepsilon > 0$, A peut être recouverte par un nombre fini d'ensemble de diamètre inférieur ou égal à ε.*

Proposition 1.1.15. *[11] Les propriétés suivantes sont équivalentes pour un espace métrique X :*

1. *X est compact.*
2. *X est pré-compact et complet.*
3. *Toute suite de X admet une sous suite convergente (on dit que X est séquentiellement compact).*

Théorème 1.1.2. *Si X est un espace métrique compact alors de toute suite de X on peut en extraire une sous suite convergente.*

Propriété 1.1.1.

1. *Un compacte est toujours fermé.*
2. *Un produit de compacts est un compact.*
3. *L'image d'un compact par une application continue est compact.*
4. *Toute réunion finie de parties compactes de X est une partie compacte*
5. *Toute intersection de parties compactes de X est une partie compacte.*

Proposition 1.1.16. *[15] Soit X un espace métrique compact alors toute partie fermée de X est compacte.*

Définition 1.1.26. *Soient X un espace topologique séparé et A une partie de X. A est relativement compacte dans X si $\overline{A}$ est compacte.*

Théorème 1.1.3. *Soit X un espace métrique complet. Une partie $A \subset X$ est relativement compacte si et seulement si elle est pré-compacte.*

Définition 1.1.27. *Soient X et Y deux espaces métriques, et $\Omega \subset X$ un ouvert. Une application continue $f : f : \Omega \to Y$ est dite compacte si $\overline{f(\Omega)}$ est compact. Elle est dite complètement continue si l'image de tout borné est relativement compacte.*

Proposition 1.1.17. *Une application $f : X \to Y$ est compacte si et seulement si de toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de X, on peut extraire une sous-suite $(x_{n_k})_{n_k\in\mathbb{N}}$ telle que la suite $(f(x_{n_k}))_{k\in\mathbb{N}}$ converge dans Y . Encore, un opérateur $T : X \to X$ est dit compact si $T(X)$ est un sous-ensemble compact de X, et T est appelé totalement borné si pour tout sous-ensemble borné S de X, $T(S)$ est un ensemble totalement borné de X. De plus, T est dit complètement continu s'il est continu et totalement borné. Notez que chaque opérateur compact totalement borné, mais l'inverse peut ne pas être vrai, cependant, deux notions sont équivalentes sur un sous-ensemble borné de X.*

1.1.4 Applications continues

Définition 1.1.28. *Soient (X_1, d_1) et (X_2, d_2) deux espaces métriques et $f : X_1 \to X_2$ une application. On dit que f est continue au point $a \in X_1$ si :*

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0 \;\; d_1(x, a) \leq \delta \Rightarrow d_2(f(x), f(a)) < \varepsilon.$$

Définition 1.1.29. *Soient X, Y deux espaces topologiques, f une application de X dans Y, on dit que f est continue au point $a \in X$ si et seulement si $f(a)$ est limite de $f(x)$ quand x tend vers a. L'application f est continue sur X si f est continue en tout point de X.*

Définition 1.1.30. *Une application $f : X \to Y$ entre espaces métriques X et Y est dite uniformément continue si pour tous x, y dans X,*

$$\forall\epsilon > 0, \exists\delta > 0 \mid d_1(x, y) < \delta \Longrightarrow d_2(f(x), f(y)) < \epsilon.$$

Théorème 1.1.4. *Toute application continue sur un espace métrique compact dans un espace métrique est uniformément continue.*

Proposition 1.1.18. *Soient X et Y deux espaces métriques, $x_0 \in X$ et f une application de X dans Y alors : f continue en $x_0 \Longleftrightarrow f$ transforme toute suite $(x_n)_n$ qui converge vers x_0 en une suite $(f(x_n)_n)$ qui converge vers $f(x_0)$.*

Théorème 1.1.5. *Soient X, Y, Z trois espaces métriques, $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$ deux applications continues respectivement sur X et Y alors $g \circ f : X \to Z$ est une application continue sur X.*

Lemme 1.1.1. *Soient X, Y deux espaces métriques et f une application de X dans Y alors : f uniformément continue sur X si*

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\alpha > 0 \;\; \forall A \subset X, \sigma(A) \leq \alpha \Rightarrow \sigma(f(A)) \leq \varepsilon.$$

Lemme 1.1.2. *Les trois assertions sont équivalentes*

1. $f : X \to Y$ *est continue en tout point de* X.

2. *Pour tout ouvert* V *de* (Y, d_Y), $f^{-1}(V)$ *est un ouvert de* (X, d_X)

3. *Pour tout fermé* F *de* (Y, d_Y) , $f^{-1}(F)$ *est un fermé de* (X, d_X)

Définition 1.1.31. *Une application* $f : (X, d_1) \to (Y, d_2)$ *est dite lipschitzienne s'il existe une constante* $k > 0$ *telle que, pour tout* $(x, y) \in X^2$

$$d_2(f(x), f(y)) \leq k d_1(x, y).$$

Si $k < 1$, *on dit que* f *est une application contractante ou une contraction.*

Remarque 1.1.2. *Si* f *est lipschitzienne alors elle est uniformément continue. La réciproque est fausse.*

Définition 1.1.32. *Soient* X *et* Y *deux espaces métriques et* f *une application de* X *dans* Y. *On dit que* f *est un homéomorphisme si* f *est bijective et bicontinu i.e* f, f^{-1} *sont continues.*

Théorème 1.1.6. *Soit* f *une bijection continue d'un espace métrique compact* X *dans un espace métrique* Y *alors* f *est un homéomorphisme.*

1.1.5 Principe de contraction

Soit f une application lipschitzienne de rapport k. La plus petite valeur k satisfaisant cette propriété pour l'application f est appelée la constante de Lipschitz. Si cette constante k est plus petite que 1, la fonction f est appelée une contraction avec constante de contraction k. La fonction f est dite non-expansive si cette constante k est plus petite ou égale à 1. Le théorème de point fixe le plus élémentaire et certainement le plus utilisé est le principe de contraction de Banach.

Théorème 1.1.7. *Soient* X *un espace métrique complet et* $f : X \to X$ *une contraction. Alors,* f *a un unique point fixe.*

La preuve est bien connue. Elle établit que toute suite $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ définie inductivement par $x_{n+1} = f(x_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ converge vers $z = f(z)$. En ce qui concerne l'unicité du point fixe, remarquons que toute contraction a au plus un point fixe. En effet, nous obtenons la contradiction suivante en supposant l'existence de deux points fixes distincts z_1 et z_2 pour une contraction $d(z_1, z_2) = d(f((z_1), f(z_2)) \leq kd(z_1, z_2) < d(z_1, z_2)$.

1.2 Espace vectoriel normé

Définition 1.2.1. *soit E un espace vectoriel, on appelle norme toute application p de E dans $\mathbb{R}_+$ telle que pour tout $x, y \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on ait*

(N_1) $\quad p(x) = 0 \Longrightarrow x = 0$ $\quad$ *condition de séparation*

(N_2) $\quad p(\lambda x) = \mid \lambda \mid p(x)$ $\quad$ *condition d'homogénéité*

(N_3) $\quad p(x+y) \leq p(x) + p(y)$ $\quad$ *inégalité du triangle*

Remarque 1.2.1. *Si $\lambda = 0$, alors $(N_2) \Rightarrow p(0) = 0$. Donc $N_1 \cup N_2$ équivant à*

$$p(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0.$$

Si on n'impose pas (N_1), on dit que p est une semi-norme.

Définition 1.2.2. *Un espace vectoriel normé est un espace vectoriel E sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ muni d'une norme $\| \cdot \|$. On a immédiatement la proposition suivante qui permet d'utiliser les résultats précédents.*

Proposition 1.2.1. *Un espace vectoriel normé $(E, \| \cdot \|)$ est un espace métrique pour la distance associée à la norme $d(x, y) = \|x - y\|$.*

Définition 1.2.3. *Si E est complet pour la distance associée à la norme, on dit que E est un espace de Banach.*

1.2.1 Espaces vectoriels normés de dimension finie

Proposition 1.2.2. *Tout espace vectoriel E de dimension finie est un espace de Banach et toutes les normes sur E sont équivalentes.*

Exemple 1.2.1. *Soit $\{e_1, \ldots, e_n\}$ une base de E, donc pour tout $x \in E$,*

$$x = \sum_{k=1}^{n} \xi_k e_k.$$

Les applications suivantes

$$\|x\|_\infty = \max \{|\xi_1|, \ldots, |\xi_n|\}; \quad \|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |\xi_i|,$$

sont des normes équivalentes sur E.

Corollaire 1.2.1. *Tout espace normé de dimension finie n est isomorphe avec $\mathbb{K}^n$, muni de l'une de ses normes usuelles.*

Corollaire 1.2.2. *Si E est un espace normé de dimension finie, ses parties compactes sont les parties fermées bornées.*

Corollaire 1.2.3.
- *Tout sous-espace vectoriel de dimension finie dans un espace normé est fermé dans cet espace.*
- *Si E est un espace normé de dimension finie, alors toute application linéaire T définie sur E dans un espace normé arbitraire est continue.*

1.2.2 Espaces fonctionnels

Définition 1.2.4. *Soit X un espace métrique compact et $\mathbb{K} = \{\mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}\}$. On note $C(X, \mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues de X valeurs dans $\mathbb{K}$ muni de la norme*

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{K}} |f(x)|.$$

$(C(X, \mathbb{K}), \|\cdot\|_\infty)$ est un espace de Banach. Notons par $(BC)(I)$ l'espace de Banach des fonction réelle définie et continues sur un intervalle borné et fermé I, muni de la norme :

$$\|x\| = \max_{t \in I} |x(t)|.$$

Et par BC l'espace de Banach des fonctions continues bornées définies sur R_+, muni de la norme :

$$\|x\| = \sup_{t \in \mathbb{R}_+} |x(t)|.$$

Définition 1.2.5. *Le sous-espace de $C(X, \mathbb{K})$ des fonction qui s'annulent l'infini est noté par $C_0(X, \mathbb{K})$. En particulier les fonctions de $C_0(X, \mathbb{K})$ sont bornées. On note aussi que si X est compact, $C_0(X) = C(X)$.*

Définition 1.2.6. *Tant donne deux points $\{a, b\} \subset E$, on définit le segment reliant a, b comme suit :*

$$[a, b] := \{(1-t)a + tb; t \in [0, 1]\}$$

Définition 1.2.7. *$C \subset E$ est convexe si : $\forall x, y \in C$, $\forall t \in [0, 1]$*

$$(tx + (1-t)y) \in C.$$

Exemple 1.2.2. *Les boules ouvertes ou fermées sont convexes.*

Définition 1.2.8. *Soit C un convexe non vide de X et $f : C \to \mathbb{R}$.*

1) *f est dite convexe sur C si $\forall t \in]0,1[, \forall x, y \in C$.*

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y).$$

2) *f est dite strictement convexe sur C si $\forall t \in]0,1[, \forall x, y \in C, x \neq y$.*

$$f(tx + (1-t)y) < tf(x) + (1-t)f(y)$$

3) *f est dite fortement convexe sur C s'il existe $\alpha > 0$ tel que $\forall t \in]0,1[, \forall x, y \in C, x \neq y$.*

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y) - \frac{1}{2}\alpha t(1-t)\|x-y\|^2$$

On dit aussi que f est α-convexe

Remarque 1.2.2. **1)** *α-convexe $\Rightarrow$ strictement convexe $\Rightarrow$ convexe.*

2) *f est α-convexe sur C si et seulement si $f - \frac{1}{2}\alpha\|\cdot\|^2$ est convexe sur C.*

Définition 1.2.9. *Soit P une partie de X, le plus petit convexe contenant P, qui est donc l'intersection de tous les convexes contenant P. Ce qu'on appelle l'enveloppe convexe de P. On la note :*

$$convP := \bigcap\{C;\ C \ \text{ est un convexe contenant } P\}.$$

Proposition 1.2.3. *$convP$ est l'ensemble des combinaisons linéaires de X, de la forme $\sum_{i=1}^{n} t_i x_i$ où $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{i=1}^{n} t_i = 1$ et les vecteurs $x_i \in P$.*

Définition 1.2.10. *Soit X un ensemble. On dit qu'une partie $\mathcal{M} \subset P(\Omega)$ tribu (ou σ-algèbre) sur X si, elle satisfait les conditions pour les réunions dénombrable :*

i) *$X \in \mathcal{M}$.*

ii) *Si $A \in \mathcal{M}$, alors $\complement_X^A \in \mathcal{M}$*

iii) *Si $A_n \in \mathcal{M}, \forall n \in \mathbb{N}$, alors $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{M}$*

.

Lemme 1.2.1. *Soit $\{\mathcal{M}_i\}_{i\in I}$ une famille quelconque de tribu sur X. Alors $\mathcal{M} = \bigcap_{i\in I} \mathcal{M}_i$ est encore une tribu sur X.*

Définition 1.2.11. *Les éléments de* $\mathcal{M}$ *sont appels les parties mesurables de* X*. On dit que* $(X, \mathcal{M})$ *est un espace mesurable.*

Définition 1.2.12. *Soit* $(X, \mathcal{M})$ *un espace mesurable. On appelle mesure (mesure positive) sur* X *une application* $\mu : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ *vérifiant :*

1. $\mu(\emptyset) = 0.$
2. *Si* $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ *est une suite disjointe, alors*

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu\left(A_n\right).$$

On dit que (X, M, μ) *est un espace mesuré.*

Définition 1.2.13. *Soit* $(X, \mathcal{M})$ *et* $(Y, \mathcal{M}')$ *deux espaces mesurables. On dit qu'une application* $f : X \longrightarrow Y$ *est mesurable (pour les tribus* $\mathcal{M}$ *et* $\mathcal{M}'$ *) si*

$$\forall B \in \mathcal{M}', f^{-1}(B) \in \mathcal{M}.$$

Définition 1.2.14. *Soit* (X, M, μ) *un espace mesurable . Un ensemble* $N \in M$ *est* μ*-négligeable si* $\mu(N) = 0$*; i,e : s'il est de* μ*-mesure nulle.*

Définition 1.2.15. *Soit* (X, M, μ) *un espace mesurable. On dit qu'une propriété est vraie presque partout par rapport* μ*, (* μ*-p.p) si elle est vraie sur* $X\backslash N$*, où* N *est un ensemble* μ*-négligeable.*

Corollaire 1.2.4. *Soient* $f, g : X \to \mathbb{R}$ *deux fonctions mesurables. Alors* $f+ g, fg, \min(f, g)$ *et* $\max(f, g)$ *sont mesurables.*

Définition 1.2.16. *On dit qu'une fonction mesurable* $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ *est intégrable au sens de Lebesgue si*

$$\int_\Omega |f| < \infty$$

Définition 1.2.17. *soit* Ω *un ouvert de* $\mathbb{R}^n$*,l'espace* $L^1(\Omega)$ *est l'ensemble des fonction mesurable et intégrable sur* Ω*. On note*

$$\|f\|_{L^1(\Omega)} = \int_\Omega |f(x)|dx.$$

On définit en suite pour tout $1 \leqslant p < \infty$*, l'espace :*

$$\mathcal{L}^p(\Omega) = \left\{f : \Omega \to \mathbb{R}, f \text{ mesurable et } \|f\|^p \in L^1(\Omega)\right\}$$

que l'on munit de la norme :

$$\|f\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |f(x)|^p dx\right)^{1/p}.$$

lorsque $p = \infty$, on a la définition suivante :

$$\mathcal{L}^\infty(\Omega) = \left\{f : \Omega \to \mathbb{R} f \ \textit{mesurable et} \ \exists c \in \mathbb{R}^+ \textit{telle que} \ : |f| \leqslant c \ p.p \ \right\}.$$

on note :

$$\|f\|_{\mathcal{L}^\infty}(\Omega) = \inf\{c, |f(x)| \leqslant c \quad p \cdot p\}.$$

Théorème 1.2.1. *Soient $X \subseteq \mathbb{R}$ un ensemble mesurable, $f, g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ des fonctions intégrable sur X, et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Alors $\alpha f + \beta g$ est intégrable sur X et*

$$\int_E \alpha f + \beta g = \alpha \int_E f \quad df + \beta \int_E g \quad dg$$

Proposition 1.2.4. **1)** *Si $f \leqslant g$, alors $\int_X f d\mu \leqslant \int_X g d\mu$.*

2) *Si $A \subset B$ alors $\int_A f d\mu \leqslant \int_B f d\mu$.*

3) *Si C est une constante $0 \leqslant C \leqslant \infty$ alors $\int_X C f d\mu = C \int_X f d\mu$.*

4) *Si $f(x) = 0$ pour tous $x \in X$, alors $\int_X f d\mu = 0$, même si $\mu(X) = \infty$.*

5) *Si $\mu(X) = 0$, alors $\int_X f d\mu = 0$ même si $f = \infty$.*

6) *Si f est une fonction intégrable, alors $|f|$ est aussi intégrable et on a : $\left|\int f d\mu\right| \leqslant \int |f| d\mu$.*

Définition 1.2.18. *Soit $p \in [1, +\infty]$. On appelle exposant conjugué de p (noté q dans toute la suite) le nombre $q \in [1, +\infty]$ tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.*

Proposition 1.2.5. *(Inégalité de Hölder)*
Soient $f \in L^p(\Omega)$, $g \in L^q(\Omega)$, avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Alors $f \times g \in L^1(\Omega)$

$$\|fg\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}.$$

Corollaire 1.2.5. *Soient $f \in L^p(\Omega).g \in L^q(\Omega)$. Alors $f.g \in L^r(X)$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$.*

Corollaire 1.2.6. *(Inégalité de Minkowski)*
Pour $f, g \in L^p(\Omega)$, on a

$$\|f + g\|_p \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Corollaire 1.2.7. *(Inégalité de Cauchy Schwarz)*
Soit $f, g \in L^2(\Omega)$, alors $f.g \in L^1(\Omega)$

$$\int_X |f.g| d\mu \leqslant \left(\int_X |f|^2 d\mu\right)^{1/2} \left(\int_X |g|^2 d\mu\right)^{1/2}.$$

Lemme 1.2.2. *(lemme de Fatou)*
Soit $(f_n)_n, f_n : X \to \mathbb{R}_+$une suite de fonctions mesurables Alors

$$\int \left(\liminf_{n\to+\infty} f_n\right) d\mu \leqslant \liminf_{n\to+\infty} \int f_n d\mu.$$

Théorème 1.2.2. *(Fubini)*
On suppose que $F \in L^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$. Alors, pour presque tout $x \in \Omega_1$,

$$F(x,y) \in L^1_Y(\Omega) \text{ et } \int_{\Omega_2} F(x,y)dy \in L^1_X(\Omega_1).$$

De même, pour presque tout $y \in \Omega_2$,

$$F(x,y) \in L^1_X(\Omega_1) \text{ et } \int_{\Omega_1} F(x,y)dx \in L^1_Y(\Omega_2).$$

De plus on a :

$$\int_{\Omega_1} dx \int_{\Omega_2} F(x,y)dy = \int_{\Omega_2} dy \int_{\Omega_1} F(x,y)dx = \iint_{\Omega_1\times\Omega_2} F(x,y)dxdy.$$

Définition 1.2.19. *[14] Une fonction $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dite de carathéodory si :*

i) *$t \to f(t,y)$ est mesurable $\forall y \in \mathbb{R}$.*

ii) *$y \to f(t,y)$ est continue $\forall t \in \mathbb{R}$.*

Théorème 1.2.3. *Gronwall (1919)*
Soit u une fonction continue définie sur l'intervalle $J = [\alpha, \alpha + h]$ et

$$0 \leq u(t) \leq \int_\alpha^t [bu(s) + a]ds; \quad t \in J,$$

où a et b sont des constantes positives. Alors

$$0 \leq u(t) \leq ahe^{bh}, t \in J.$$

Théorème 1.2.4. *(La convergence dominée de Lebesgue)*
Soit $(f_n)_n$ une suite des fonctions de L^1. On suppose que

1. *$f_n(x) \to f(x)$ p.p sur Ω.*

2. *Il existe une fonction $g \in \mathcal{L}^1$ telle que pour chaque n_1 $|f_n(x)| \leq g(x)$ p.p sur Ω. Alors $f \in L^1(\Omega)$ et $\|f_n - f\|_{L^1} \to 0$.*

1.2.3 Espaces l^p

Pour $p \geq 1$, on considère

$$l^a = \left\{ x = (x_i)_i \quad \text{telle que} \quad \sum_{t=0}^{\infty} |x_i|^p < \infty \right\}$$

l^1 et l^2 sont les espaces les plus importants.

Proposition 1.2.6. *1. L'espace l^p est un espace vectoriel de dimension infinie.*

2. Pour tout $1 \leq p < \infty$, l'espace l^p muni de l'application

$$x \longrightarrow \|x\| = \left(\sum_{i=0}^{\infty} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

est un espace de Banach.

1.2.4 Espaces de Hilbert

Définition 1.2.20. *Soit H un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$. Un produit scalaire sur H est une forme sesquilinéaire $(\cdot|\cdot)$ de $H \times H$ dans $\mathbb{C}$ (linéaire en la première variable et antilinéaire en la seconde), hermitienne, définie positive : elle vérifie pour tous $x, x', y, y' \in H$, $\lambda \in \mathbb{C}$*

$$\begin{aligned}
(x + \lambda x'|y) &= (x|y) + \lambda(x'|y), \\
(x|y + \lambda y') &= (x|y) + \overline{\lambda}(x|y'), \\
(x|y) &= \overline{(y|x)}, \\
(x|x) \geq 0, \quad \text{et} \quad (x|x) &= 0 \Leftrightarrow x = 0.
\end{aligned}$$

La norme $x \mapsto \|x\| = \sqrt{(x|x)}$ associée au produit scalaire vérifie les propriétés suivantes :

(1) $|(x|y)| \leq \|x\|\|y\|$ (Inégalité de Cauchy-Schwarz),

(2) $\left\|\frac{x+y}{2}\right\|^2 + \left\|\frac{x-y}{2}\right\|^2 = \frac{1}{2}(\|x\|^2 + \|y\|^2)$ (Identité de la médiane)

Définition 1.2.21. *Un espace pré-hilbertien est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ muni d'un produit scalaire. Un espace de Hilbert est un espace préhilbertien, complet pour la norme $x \to \|x\|$.*

Exemples 1.2.1.

1. *L'espace $\mathbb{C}^n$ muni du produit scalaire*

$$(x|y) = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i},$$

est un espace de Hilbert séparable (car de dimension finie).

2. *L'espace $L^2(\Omega)$, avec Ω ouvert de $\mathbb{R}^n$, muni du produit scalaire*

$$(f|g) = \int_{\Omega} f\overline{g}(t)dt,$$

est un espace de Hilbert séparable.

3. *L'espace l^2 muni du produit scalaire*

$$(a|b) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \overline{b_n},$$

est un espace de Hilbert.

Chapitre 2

Espaces vectoriels topologiques

2.1 Espaces de Fréchet

2.1.1 Semi-normes

Définition 2.1.1. *Un espace vectoriel topologique est un espace vectoriel E muni d'une topologie $\mathcal{T}$ pour laquelle les applications*

$$\begin{aligned} +: \quad (E,\mathcal{T}) \times (E,\mathcal{T}) &\longrightarrow (E,\mathcal{T}) \\ (a,b) &\longmapsto a+b, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cdot: \quad \mathbb{K} \times (E,\mathcal{T}) &\longrightarrow (E,\mathcal{T}) \\ (\lambda,b) &\longmapsto \lambda \cdot b, \end{aligned}$$

sont continues. Explicitement, il revient au même de dire que les deux conditions suivantes sont satisfaites :

(1) *Pour tous $e, f \in E$ et tout voisinage U de $e+f$, il existe des voisinages V de e et W de f tels que $V + W \subset U$.*

(2) *Pour tous $c_0 \in \mathbb{K}, e_0 \in E$ et voisinage U de $c_0 e_0$, il existe $r > 0$ et un voisinage V de e_0 tels que $\{ce : c \in \mathbb{K}, |c - c_0| \leq r, e \in V\} \subset U$.*

Théorème 2.1.1. *Dans un espace vectoriel topologique, pour tout voisinage U de 0 , il existe un voisinage V de 0 tel que $V + V \subset U$.*

Remarque 2.1.1. *Comme $0 + 0 = 0$, il existe en effet des voisinages V_1 et V_2 de 0 tels que $V_1 + V_2 \subset U$; alors $V = V_1 \cap V_2$ convient.*

Proposition 2.1.1. *Dans un espace vectoriel topologique* $(E, \mathcal{T})$*, Pour tout voisinage* U *de* 0 *et tout élément non nul* e*, il existe* $m \in \mathbb{N}^*$ *tel que* $\frac{1}{m}e \in U$*. En particulier, on a* $E = \bigcup_{m=1}^{\infty} mU$.

En effet, pour tout l'élément e de E, on a $0.e = 0$. Il existe donc $r > 0$ et un voisinage V de e tels que

$$\{cf : c \in \mathbb{K}, |c| \leq r, f \in V\} \subset U.$$

Il suffit alors de prendre $m \in \mathbb{N}_0$ tel que $1/m \leq r$.

Théorème 2.1.2. *Si* $(E, \mathcal{T})$ *est un espace vectoriel topologique, alors, pour tous* $e_0 \in E$ *et* $c_0 \in \mathbb{K}\backslash\{0\}$*, l'application*

$$u : (E, \mathcal{T}) \to (E, \mathcal{T}); \quad e \mapsto c_0 e + e_0$$

est un homéomorphisme.

On vérifie de suite que cette application est injective, surjective et d'inverse donne par

$$v : (E, \mathcal{T}) \to (E, \mathcal{T}); \quad e \mapsto \frac{1}{c_0}e - \frac{e_0}{c_0},$$

c'est à dire par une application du même type. Pour conclure, il suffit alors de prouver qu'une telle application est continue. C'est direct : pour tout voisinage U de $c_0e + e_0$, il existe des voisinages V' de c_0e et W de e_0 tels que $V' + W \subset U$ puis $r > 0$ et un voisinage V de e tels que $\{cf : |c - c_0| \leq r, f \in V\} \subset V'$. Au total, pour tout $f \in V$, on a $u(f) = c_0 f + e_0 \in V' + W \subset U$.

Corollaire 2.1.1. *Si* $(E, \mathcal{T})$ *est un espace vectoriel topologique,*

(a) *Une partie* U *de* E *est un voisinage de* $e \in E$ *si et seulement si* $U - e$ *est un voisinage de 0 ,*

(b) *Pour tout* $c \in \mathbb{K}\backslash\{0\}$ *et tout voisinage* U *de 0 ,* cU *est un voisinage de* 0.

Remarque 2.1.2. *Sur le plan théorique, ce corollaire est fort important : dans un espace vectoriel topologique.*

a) *Signalons que les voisinages de* $e \in E$ *s'obtiennent en translatant de* e *les voisinages de 0 . La connaissance de* $\mathcal{V}_{(0)}$ *détermine donc la topologie de* $(E, \mathcal{T})$.

b) *Signalons que tout homothétique d'un voisinage de 0 est aussi un voisinage de* 0.

Voici un renseignement supplémentaire sur les voisinages de 0.

Théorème 2.1.3. *Si $(E, \mathcal{T})$ est un espace vectoriel topologique, alors tout voisinage de 0 contient un voisinage de 0 équilibré et fermé.*

Si U est un voisinage de $0 = 0 \cdot 0$, alors il existe $r > 0$ et un voisinage V de 0 tels que

$$W = \{ce : c \in \mathbb{K}, |c| \leq r, e \in V\} \subset U$$

or w est équilibrer et contient rV, donc est un voisinage de 0 . Cela tant, pour tout voisinage $0U$ de 0, il existe un voisinage équilibrer V de 0 tel que $V + V \subset U$.On a alors $V^- \subset U$ car, pour tout $e \in V^-$, on a $(e + V) \cap V \neq \emptyset$ et il existe donc $f, g \in V$ tel que $e + f = g$ donc tel que $e = g - f \in U$.pour conclure,il suffit alors de vérifier que V^- est équilibrer, ce qui est direct.

Remarque 2.1.3. *Au total, la topologie d'un espace vectoriel topologique est donc connue de que les voisinages équilibrés et fermés de* 0.

Proposition 2.1.2. *Si E est un espace vectoriel topologique, alors,*
a) *L'adhérence d'un sous-espace vectoriel de E est un sous-espace vectoriel de E,*
b) *L'adhérence d'une partie (absolument) convexe de E est une partie (absolument) convexe de E,*
c) *L'intérieur d'un sous-espace vectoriel propre de E est vide,*
d) *L'intérieur d'une partie (absolument) convexe de E est une partie (absolument) convexe de E si elle n'est pas vide.*

Remarque 2.1.4. **a)** *Soit L un sous-espace vectoriel de E. D'une part, établissons que $L^- + L^- \subset L^-$. De fait, $L^- \times L^-$est bien sur inclus dans $(L \times L)^-$ et,+ tant une application continue de $E \times E$ dans $E, +(L \times L)^- \subset L^-$. D'autre part, pour tout $c \in \mathbb{K}$, on a $cL^- \subset L^-$car $\mathbb{K} \times L^-$ est bien sur inclus dans $(\mathbb{K} \times L)^-$ et ,tant une application continue de $\mathbb{K} \times E$ dans $E, \cdot(\mathbb{K} \times L) \subset L^-$..*

b) *S'établit au moyen d'un raisonnement analogue.*

Définition 2.1.2. *L'enveloppe linéaire fermé (resp. l'enveloppe convexe fermé, l'enveloppe absolument convexe fermé) d'une partie non vide A de l'espace vectoriel topologique E est l'intersection des sous-espaces vectoriels fermés (resp. des parties convexes fermées ; des parties absolument convexes et fermées) de E contenant A.*

Définition 2.1.3. *Soit E un espace vectoriel. Une semi-norme sur E est une fonction $p : E \to \mathbb{R}_+$ telle que*

a) $p(ce) = |c|p(e)$ *pour tout* $c \in \mathbb{K}$ *;*

b) $p\left(e_1 + e_2\right) \leq p\left(e_1\right) + p\left(e_2\right)$.

Proposition 2.1.3. *Soit* E *un espace vectoriel.*

a) *Si* p, q *sont des normes (resp. semi-normes) sur* E *et si* $r > 0$*, alors* rp, $p + q, \sup\{p, q\}$ *et* $\sqrt{p^2 + q^2}$ *sont des normes (resp. semi-normes) sur* E.

b) *Si* p *est une semi-norme sur* E *et* L *un sous-espace vectoriel de* E*, alors*

$$P_L : E \to \mathbb{R}; \quad e \mapsto \inf_{l \in L} p(e + l)$$

est une semi-norme sur E.

c) *Si* T *est un opérateur linéaire de* E *dans un espace vectoriel* F *et si* q *est une semi-norme sur* F*, alors* $qT(\cdot)$ *est une semi-norme sur* E*. En particulier, pour toute forme linéaire continue* $e^* \in E^*$ *(dual topologique de* E*),* $|e^*(\cdot)|$ *est une semi-norme sur* E.

Voici quelques propriétés fondamentales des semi-normes.

Proposition 2.1.4. *Si* p *est une semi-norme sur l'espace vectoriel* E*, alors*

a) $p(0_E) = 0_E$.

b) $p(e) \geq 0$.

c) $p\left(\sum_{j=1}^{J} c_j e_j\right) \leq \sum_{j=1}^{J} |c_j|\, p\left(e_j\right)$.

d) $|p\left(e_1\right) - p\left(e_2\right)| \leq p\left(e_1 - e_2\right)$.

Preuve.

a) Il suffit de noter qu'on a $p(0) = p(c0) = |c|p(0)$ pour tout $c \in \mathbb{K}$.

b) De fait, pour tout $e \in E$, on a alors

$$0 = p(0) = p(e - e) \leq p(e) + p(-e) = 2p(e).$$

c) est immédiat par récurrence sur J.

d) résulte aussitôt de la majoration

$$p(e) = p(e - f + f) \leq p(e - f) + p(f)$$

■

Proposition 2.1.5. *Si A est une partie absolument convexe de l'espace vectoriel E, on note* $\mathrm{span}(A)$ *l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires d'éléments de A. Alors*

a) $\mathrm{span}(A) = \cup_{r>0} rA$.

b) $0 < r < s \Rightarrow rA \subset sA$.

c) $p_A : \mathrm{span}(A) \to \mathbb{R} \quad e \mapsto \inf\{r > 0 : e \in rA\}$ *est une semi-norme sur span* (A) *telle que*

$$\{e \in \mathrm{span}(A) : p_A(e) < 1\} \subset A \subset \{e \in \mathrm{span}(A) : p_A(e) \leq 1\}$$

Preuve.

(a) L'inclusion $\supset$ est claire. Inversement, pour toute combinaison linéaire $e = \sum_{j=1}^{J} c_j e_j$ d'élément de A , on a bien sur $e = 0 \in A$ si $\sum_{j=1}^{J} |c_j| = 0$ et

$$e = \sum_{k=1}^{J} |c_k| \left(\sum_{j=1}^{J} \frac{c_j}{\sum_{l=1}^{J} |c_l|} e_j \right) \in \sum_{k=1}^{J} |c_k| \, A$$

sinon.

(b) est clair.

(c) Bien sur , p_A est valeurs dans

$[0, +\infty[$. De plus,

(i) pour $c = 0$, il vient $p_A(ce) = p_A(0) = 0 = |c| p_A(e)$ pour tout $e \in \mathrm{span}(A)$. Pour tous $c \in \mathbb{K}$ non nul et $e \in \mathrm{span}(A)$, on a ce $\in rA$ si et seulement si $e \in (r/|c|)A$. Au total, on a $p_A(ce) = |c| p_A(e)$ pour tous $c \in \mathbb{K}$ et $e \in \mathrm{span}(A)$.

(ii) pour tous $e, f \in \mathrm{span}(A)$ et tous $r > p_A(e)$ et $s > p_A(f)$, on a $e + f \in rA + sA = (r + s)A$ donc $p_A(e + f) \leq r + s$. On en déduit aussitôt que $p_A(e + f) \leq p_A(e) + p_A(f)$. Des lors p_A est une semi-norme sur span (A). Les inclusions sont immédiates.

■

Définition 2.1.4. *Un espace vectoriel topologique est dit localement convexe si chaque point a une base de voisinages convexes (autrement, si pour tout voisinage V de x, il existe un ouvert U inclus dans V et contenant x qui est de plus convexe). De façon équivalente , un espace vectoriel localement convexe est un espace vectoriel dont la topologie est définie par une famille de semi-normes.*

Définition 2.1.5. *[4] (Fréchet (1878-1973)). On dit qu'un espace vectoriel E est un pré-Fréchet s'il existe une famille dénombrable $P = (p_j)_{j \in \mathbb{N}}$ de semi-normes séparantes* *sur E telles que $p_j(x) \leq p_{j+1}(x), \forall j \in \mathbb{N}, \forall x \in E$: Notons que l'hypothèse de croissance n'est pas strictement nécessaire mais on peut toujours s'y ramener en remplaçant $\sum k \leq jp_k$ par exemple. La topologie d'un pré-Fréchet est métrisable avec la distance (invariante par translation)*

$$d(x;y) := \sum_{j\in\mathbb{N}} 2^{-j} min(1, p_j(x-y)).$$

Définition 2.1.6. *Un espace de Fréchet est un pré-Fréchet complet.*

Exemples 2.1.1. **a)** *Soit K un compact de $\mathbb{R}_{\ltimes}$ l'ensemble des fonctions $C^{\infty}(K)$ est un espace de Fréchet, muni des semi-normes*

$$\forall j \in \mathbb{N}.p_j(f) = \sup_{|\alpha \leq j} \sup_{x\in k} |\partial^{\alpha} f(x)|.$$

b) *L'espace des fonctions localement intégrables $L^p_{loc}\mathbb{R}^{\ltimes}$ est un Fréchet.*

c) *Tout sous-espace fermé d'un Fréchet est un Fréchet.*

Lemme 2.1.1. *Soient $(E, (p_j)_{j\in\mathbb{N}})$ et $(F, (q_k)_{k\in\mathbb{N}})$ deux pré-Fréchet, et soit T une application linéaire de E dans F. Alors T est continue si et seulement si*

$$\forall k \in \mathbb{N}, \exists C > 0, j \in \mathbb{N}, \forall x \in E, q_k(K) \leq Cp_j(x).$$

2.2 Principe de contraction

Définition 2.2.1. *Soit E un espace de Fréchet muni d'une famille se semi-norme $\{|\cdot|_n;\ n \in \mathbb{N}\}$. Une application $F : E \to E$ est appelée contraction si pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $K_n < 1$ tel que*

$$|F(x) - F(y)|_n \leq k_n|x-y|_n$$

pour tout $x, y \in X$.

Remarque 2.2.1. *Remarquons qu'une application F peut être une contraction au sens de la définition précédente sans être une contraction au sens usuel lorsque E est muni de la métrique*

$$d(x,y) = \sum_{n\in\mathbb{N}} |x-y|_n / 2_n(1 + |x-y|_n).$$

Le théorème suivant est une généralisation du principe des contractions de Banach.

Théorème 2.2.1. *Soit Q un fermé de E. Alors toute contraction $T : Q \to Q$ a un point fixe unique.*

Preuve. Soit $x_0 \in X$. On définit inductivement $x_i = T(x_{i-1})$, et on vérifie que $\{x_i\}$ est une suit de Cauchy par rapport à $|.|_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Puisque X est complet, il existe $x \in X$ tel que $x_i \to x$, il s'ensuit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|x - T(x)|_n \leq |x - x_i|_n + |T(x_{i-1}) - T(x)|_n \leq |x - x_i|_n + k_n|x_{i-1} - x|_n$, en passant à la limite lorsque $i \to \infty$, on déduit que $|x - F(x)|_n = 0$. D'où, $x = T(x)$.

■

2.2.1 Famille admissible de contractions

Définition 2.2.2. *Soit X un fermé de E. Une famille $\{F_t : X \to E\}_{t\in[0,1]}$ est appelée famille admissible de contractions si pour tout $n \in \mathbb{N}$,*

(a) *il existe $k_n < 1$ tel que $|F_t(x) - F_t(y)|_n \leq k_n|x - y|_n$ pour tout $t \in [0, 1]$ et pour tous $x, y \in X$.*

(b) *il existe $L_n > 0$ tel que $|F_t(x) - F_s(x)|_n \leq L_n|t - s|$ pour tout $x \in X$, et pour tous $s, t \in [0, 1]$.*

Théorème 2.2.2. *Soit X un fermé de E et considérons une famille admissible de contractions $\{F_t : X \to E\}_{t\in[0,1]}$ telle que $|z - F_t(z)|_n \neq 0$ pour tout $z \in \partial_n X^n$, tout $t \in [0, 1]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$. Si F_t a un point fixe pour un $t \in [0, 1]$, alors F_t a un unique point fixe pour tout $t \in [0, 1]$.*

Preuve. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $t \in [0, 1]$, soit $\mathbb{F}_t^n : \overline{X^n} \to \mathbb{E}^n$ la fonction obtenue à partir de F_t. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $\{\mathbb{F}_t^n\}_{t\in[0,1]}$ est une famille admissible de contractions. Si F_t a un point fixe pour un certain $t, \mathbb{F}_t^n$ en a un aussi qui est dans $int_n\left(X^n\right)$ par hypothèse. Ce qui implique que pour tout $t \in [0, 1]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $z_t^n \in \overline{X^n}$ tel que $\left|z_t^n - F_t\left(z_t^n\right)\right|_n = 0$. On déduit que

$$\left|z_t^m - z_t^l\right|_n = 0 \quad \text{pour tous } l, m \geq n.$$

Alors il existe $x_t \in X$ tel que $x_t = F_t(x_t)$.

■

2.2.2 Alternative non linéaire

On dira que la condition $(\star)$ est satisfaite si la famille de semi-normes $\{|\cdot|_n\}$ vérifie

$$|x|_1 \leq |x|_2 \leq |x|_3 \leq \cdots \quad \text{pour tout } x \in E. \qquad (\star)$$

Ainsi, si la condition $(\star)$ est satisfaite, la semi-norme $|\cdot|_n$ induit une semi-norme (encore notée $|\cdot|_n$) sur $\mathbb{E}^m$ pour tout $m > n$. De nouveau, pour $z, \hat{z} \in \mathbb{E}^m$, on dira que $z \sim_n \hat{z}$ si $|z - \hat{z}|_n = 0$.

Dans la preuve de notre résultat principal, on utilisera le lemme suivant dans lequel on identifie chaque élément d'un fermé X de E à une suite appropriée d'éléments de X^n.

Théorème 2.2.3. *Soit X un fermé de E tel que $0 \in X$, et soit $F : X \to E$ une contraction telle que $F(X)$ soit borné. Alors un des deux énoncés suivants est vérifié :*

(a) *F a un unique point fixe ;*

(b) *il existe $t \in [0,1), n \in \mathbb{N}$ et $z \in \partial_n X^n$ tels que $|z - tF(z)|_n = 0$.*

Corollaire 2.2.1. *Soit X un fermé de E tel que $0 \in t_n(X^n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et soit $F : X \to E$ une contraction telle que $F(X)$ soit borné. Supposons que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $z \in \partial_n X^n$, une des conditions suivantes soit satisfaite :*

(i) $|F(z)|_n \leq \max\{|z|_n, |z - F(z)|_n\}$.

(ii) $-z \in \overline{X^n}$ *et* $|F(z) + F(-z)|_n = 0$ *i.e (* $\mathbb{F}^n(z) = -\mathbb{F}^n(-z)$ *). Alors F a un unique point fixe.*

Remarque 2.2.2. *Lorsqu'une famille admissible de contractions est définie sur la fermeture d'un ouvert de E, les hypothèses du théorème 2.2.3 peuvent être affaiblies. dans ce qui suit, on ne suppose pas que la condition $(\star)$ est satisfaite.*

Théorème 2.2.4. *Soient U un ouvert de E, et $\left\{F_t : \bar{U} \to E\right\}_{t\in[0,1]}$, une famille admissible de contractions telle que $F_t(x) \neq x$ pour tout $x \in \partial U$, et tout $t \in [0,1]$. Alors, si F_t a un point fixe pour un $t \in [0,1], F_t$ a un unique point fixe pour tout $t \in [0,1]$.*

Preuve. Posons $Q = \{t \in [0,1] : F_t$ a un point fixe $\}$. Par hypothèse, $Q \neq \emptyset$. On montre que Q est à la fois fermé et ouvert. La connexité de $[0,1]$ implique que $Q = [0,1]$.

■

Du théorème précédent, nous déduisons les résultats suivants.

Théorème 2.2.5. *Soit U un ouvert de E tel que $0 \in U$, et soit $F : \bar{U} \to E$ une contraction telle que $F(U)$ soit borné. Alors un des deux énoncés suivants est vérifié :*

(a) *F a un unique point fixe ;*

(b) *il existe* $t \in]0,1[$ *et* $x \in \partial U$ *tel que* $x = tF(x)$.

Corollaire 2.2.2. *Soit* U *un ouvert de* E *tel que* $0 \in U$, *et soit* $F : \bar{U} \to E$ *une contraction telle que* $F(U)$ *soit borné. Supposons que pour tout* $x \in \partial U$, *il existe* $n \in \{i : |x|_i \neq 0\}$ *tel qu'un des énoncés suivants soit vérifié :*

(a) $|F(x)|_n \leq \max\{|x|_n, |x - F(x)|_n\}$ *;*

(b) $-x \in \bar{U}$ *et* $|F(x) + F(-x)|_n = 0$.

Alors F *a un unique point fixe.*

Chapitre 3

Applications aux problèmes non linéaires

3.1 Résultats d'existence et d'unicité pour un problème de Cauchy

Nous présentons deux exemples d'applications de l'alternative non linéaire. Considérons le problème de Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \quad , \quad t \in [0, \infty) \\ x(0) = 0 \in H, \end{cases} \tag{3.1}$$

où H est un espace de Hilbert, et $f : [0, \infty) \times H \to H$ est une fonction localement Carathéodory i.e

(a) $t \mapsto f(t, x)$ est mesurable pour tout $x \in H$;

(b) $x \mapsto f(t, x)$ est continue pour presque tout $t \in [0, \infty)$;

(c) pour tout $R > 0$, il existe une fonction $h_R \in L^1_{\text{loc}}[0, \infty)$ telle que $\|f(t, x)\| \leq h_R(t)$ pour presque tout $t \in [0, \infty)$ et pour tout $x \in H$ tel que $\|x\| \leq R$.

Théorème 3.1.1. *Soient $(H, \|\cdot\|)$ un espace de Hilbert, et $f : [0, \infty[\times H \to H$ une fonction localement Carathéodory. Supposons que*

(a) *pour tout $R > 0$, il existe $l_R \in L^1_{loc}[0, \infty)$ telle que pour presque tout $t \in [0, \infty[$, et pour tous $x, y \in H$ vérifiant $\|x\|, \|y\| \leq R$, on ait*

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq l_R(t)\|x - y\|;$$

(b) *il existe $\theta \in L^1_{loc}[0, \infty)$ et $\psi : [0, \infty) \to (0, \infty)$, une fonction mesurable au sens de Borel, telles que $\|f(t, x)\| \leq \theta(t)\psi(\|x\|)$, $t \in [0, \infty[$, et tout $x \in H$, avec*

$1/\psi \in L^1_{loc}[0,\infty)$; *et*

$$\int_0^{\infty} \frac{dz}{\psi(z)} > \|\theta\|_{L^1[0,r]} \qquad \textit{pour tout } r>0$$

Alors le problème (3.1) a une solution unique dans $C([0,\infty[, H)$.

Preuve. Définissons $F : C([0,\infty[, H) \to C([0,\infty[, H)$ par

$$F(x)(t) = \int_0^t f(s, x(s))ds.$$

En utilisant l'hypothèse (b), on montre que pour tout $n \in \mathbb{N}$, et tout x vérifiant pour un certain $\lambda \in [0,1], x(t) = \lambda F(x)(t)$ pour tout $t \leq n$, on a

$$\|x(s)\| < M(s) \text{ pour tout } s \leq n, \text{ où } \quad \int_0^{M(s)} \frac{dz}{\psi(z)} = \|\theta\|_{L^1[0,s]} + 1.$$

Posons $l(s) = l_{M(n)}(s)$ pour $s \in (n-1, n], n \in \mathbb{N}$, où $l_{M(n)}$ est donnée en (a). Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on définit sur $C([0,\infty), H)$ la semi-norme

$$|x|_n = \sup\left\{ e^{-\int_0^t l(s)ds} \|x(t)\| : t \in [0,n] \right\}.$$

On pose $X = \{x \in C([0,\infty), H) : \|x(t)\| \leq M(t) \text{ pour } t \in [0,\infty)\}$. Ainsi, l'énoncé (b) du théorème 2.2 ne peut avoir lieu. Vu l'hypothèse (a), $F : X \to C([0,\infty[, H)$ est une contraction. L'existence d'une solution au problème (3.1) découle alors du théorème 2.2.3.

■

3.2 Résultats d'existence et d'unicité pour des équations intégrales

3.2.1 Équation intégrale singulière

Théorème 3.2.1. *Soient* $(B, \|\cdot\|)$ *un espace de Banach et* $k : \mathbb{R} \times R \times B \to B$ *une fonction continue. Supposons que*

(a) *pour tout* $r > 0$, *il existe une fonction positive* $A_r \in L^1(-\infty, 0) \cap L^1_{loc}[0,\infty)$ *telle que*

$$\|k(t,s,x) - k(t,s,y)\| \leq A_r(s)\|x - y\|$$

pour $s \leq t$ *et* $\|x\|, \|y\| \leq r$ *;*

(b) *il existe des fonctions positives C et $D \in L^1(-\infty, 0] \cap L^1_{loc}[0, \infty)$ telle que*

$$\|k(t, s, x)\| \leq C(s)\|x\| + D(s),$$

pour tout $x \in B$ et pour $s \leq t$. Alors l'équation intégrale

$$x(t) = \int_{-\infty}^{t} k(t, s, x(s))ds, \tag{3.2}$$

a une solution unique.

Preuve. Posons

$$E = \{x \in C(\mathbb{R}, B) : \sup\{\|x(t)\| : t \leq R\} < \infty \text{ pour tout } R \in \mathbb{R}\},$$

et définissons $F : E \to E$ par

$$F(x)(t) = \int_{-\infty}^{t} k(t, s, x(s))ds.$$

L'hypothèse (b) et l'inégalité de Gronwall impliquent l'existence pour tout $n \in \mathbb{N}$ d'une constante positive N_n telle que pour tout $x \in E$ vérifiant pour un certain $\lambda \in [0, 1], x(t) = \lambda F(x)(t)$ pour tout $t \leq n$, on ait

$$\|x(t)\| < N_n \quad \text{pour tout } t \leq n.$$

Posons $A(s) = A_{N_n}(s)$ pour $s \in (n-1, n], n \in \mathbb{N}$, où A_{N_n} est donnée en (a). Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on définit sur E la semi-norme

$$|x|_n = \sup\left\{e^{-\int_{-\infty}^{t} A(s)ds}\|x(t)\| : t \leq n\right\}.$$

On pose $X = \{x \in E : \|x(t)\| \leq N_n$ pour tout $t \leq n$ et pour tout $n \in \mathbb{N}\}$. On vérifie que $F : X \to E$ est une contraction. La conclusion découle du théorème 2.2.3.

■

3.2.2 Équation intégrale quadratique

Introduction

Les équations intégrales apparaissent naturellement dans de nombreuses applications pour décrire de nombreux problèmes du monde réel. Les équations intégrales quadratiques ont également de nombreuses applications utiles pour décrire de nombreux événements et problèmes du monde réel. Par exemple, les équations intégrales quadratiques sont souvent applicables dans la théorie du transfert radiatif, la théorie cinétique des gaz, dans la théorie du transport des neutrons et dans la théorie du trafic. En particulier, l'équation intégrale dite quadratique de type Chandrasekher peut être très souvent rencontrée dans de nombreuses applications voir [1].

Considérons l'équation intégrale quadratique suivantes avec une modification linéaire de l'argument

$$y(t) = f(t) + (Ay)(t)\int_0^T u(t,s,y(s),y(\alpha s))ds, \quad t \in J = [0,+\infty[, \tag{3.3}$$

où $fJ \to \mathbb{R}$, $u : J \times J_T \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sont des fonctions données, $0 < \alpha < 1$, $J_T = [0,T]$ et $A : C(J,\mathbb{R}) \to C(J,\mathbb{R})$ est un opérateur approprié.

En supposant que les hypothèses suivantes sont satisfaites :

(a_1) $f : J \to \mathbb{R}$ est une fonction continue.

(a_2) Pour chaque $n \in \mathbb{N}$ il existe $L_n > 0$ tel que

$$|(Ax)(t) - (A\bar{x})(t)| \leq L_n|x(t) - \bar{x}(t)|,$$

pour chaque $x, \bar{x} \in C(J;\mathbb{R})$ et $t \in [0,n]$.

(a_3) Il existe des constantes non négatives a et b telles que

$$|(Ax)(t)| \leq a + b|x(t)|,$$

pour chaque $x \in C(J;\mathbb{R})$ et $t \in J$.

(a_4) $u : J \times J_T \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est une fonction continue et, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, il existe une constante $L_n^* > 0$ telle que

$$|u(t,s,x,y) - u(t,s,\bar{x},\bar{y})| \leq L_n^*(|x-\bar{x}| + |y-\bar{y}|),$$

pour tous les $t \in [0,n]$, $s \in J_T$, et $x, y, \bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}$.

(a_5) Il existe une fonction continue non décroissante $\psi : J^2 \to]0,\infty[$ et $p \in C(J,\mathbb{R}_+)$ telles que

$$|u(t,s,x,y)| \leq p(s)\psi(|x|,|y|),$$

pour chaque $(t,s) \in J \times J_T$ et $x, y \in \mathbb{R}$, et de plus, il existe des constantes

$M_n \in J, n \in \mathbb{N}$, tels que

$$\frac{M_n}{\|f\|_n + T(a+bM_n)\psi(M_n.(M_n)p^*} > 1, \tag{3.4}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$, où $p^* = \sup\{p(s) \ : \ s \in J_T\}$.

Théorème 3.2.2. *Soient les hypothèses $(a_1)-(a_5)$ être satisfaites. Si, en outre, l'inégalité*

$$2\,(a+bM_n)\,L_n^* T + TL_n\psi\,(M_n, M_n)\,p^* < 1, \tag{3.5}$$

vaut pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors l'équation (3.3) a une solution unique.

Preuve. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, nous définissons dans $C(J;\mathbb{R})$ les semi-normes par la formule

$$\|y\|_n := \sup\{|y(t)| : t \in [0,n]\}.$$

Alors $C(J;\mathbb{R})$ est un espace de Fréchet avec la famille des semi-normes $(\|\cdot\|_n)\,n \in \mathbb{N}$ Transformé le problème est un problème à point fixe. Considérons l'opérateur $\mathcal{F}$: $C(J;\mathbb{R}) \to C(J;\mathbb{R})$ défini par la relation

$$(\mathcal{F}y)(t) = f(t) + (Ay)(t)\int_0^T u(t,s,y(s),y(\alpha s))ds, \quad t \in J.$$

Soit y une solution possible du problème (3.3). Pour donné $n \in \mathbb{N}$ et $t \leq n$, en vue de $(a_1)\,,(a_2)$, et (a_5), nous avons

$$\begin{aligned}
|y(t)| &\leq |f(t)| + |(Ay)(t)|\int_0^T |u(t,s,y(s),y(\alpha s))|ds \\
&\leq |f(t)| + (a+b|y(t)|)\int_0^T p(s)\psi(|y(s)|,|y(\alpha s)|)ds \\
&\leq \|f\|_n + T\,(a+b\|y\|_n)\,\psi\,(\|y\|_n, \|y\|_n)\,p^*
\end{aligned}$$

et donc

$$\frac{\|y\|_n}{\|f\|_n + T\,(a+b\|y\|_n)\,\psi\,(\|y\|_n, \|y\|_n)\,p^*} \leq 1.$$

De , ils en suit que $|y|_n \neq M_n$ pour chaque $n \in \mathbb{N}$. Maintenant, défini

$$\Omega = \{y \in (J;\mathbb{R}) : \|y\|_n < M_n \text{ for every } n \in \mathbb{N}\}$$

De toute évidence, Ω est un sous-ensemble ouvert de $C(J\mathbb{R})$. Nous montrerons que $\mathcal{F} : \bar{\Omega} \to C(J;\mathbb{R})$ est un opérateur de contraction. En effet, considérons $y, \bar{y} \in C(J;\mathbb{R})$, pour chaque $t \in [0,n]$ est $n \in \mathbb{N}$,de $(a_2)-(a_5)$ nous obtenons

$$\begin{aligned}
&|(\mathscr{F}y)(t)-(\mathscr{F}\bar{y})(t)| \\
&\qquad \leq \left|(Ay)(t)\int_0^T u(t,s,y(s),y(\alpha s))ds-(A\bar{y})(t)\int_0^T u(t,s,\bar{y}(s),\bar{y}(\alpha s))ds\right| \\
&\qquad \leq \left|(Ay)(t)\int_0^T u(t,s,y(s),y(\alpha s))ds-(Ay)(t)\int_0^T u(t,s,\bar{y}(s),\bar{y}(\alpha s))ds\right| \\
&\qquad\quad + \left|(Ay)(t)\int_0^T u(t,s,\bar{y}(s),\bar{y}(\alpha s))ds-(A\bar{y})(t)\int_0^T u(t,s,\bar{y}(s),\bar{y}(\alpha s))ds\right| \\
&\qquad \leq |(Ay)(t)|\int_0^T |u(t,s,y(s),y(\alpha s))-u(t,s,\bar{y}(s),\bar{y}(\alpha s))|ds \\
&\qquad\quad + |(Ay)(t)-(A\bar{y})(t)|\int_0^T |u(t,s,\bar{y}(s),\bar{y}(\alpha s))|ds \\
&\qquad \leq (a+b|y(t)|)L_n^*\int_0^T (|y(s)-\bar{y}(s)|+|y(\alpha s)-\bar{y}(\alpha s)|)ds \\
&\qquad\quad + L_n|y(t)-\bar{y}(t)|\int_0^T p(s)\psi(|\bar{y}(s)|,|\bar{y}(\alpha s)|)ds \\
&\qquad \leq [2\left(a+bM_n\right)L_n^*T+TL_n\psi\left(M_n,M_n\right)p^*]\,\|y-\bar{y}\|_n.
\end{aligned}$$

donc

$$\|\mathcal{F}y-\mathscr{F}\bar{y}\|_n \leq [2\left(a+bM_n\right)L_n^*T+TL_n\psi\left(M_n,M_n\right)p^*]\,\|y-\bar{y}\|_n. \tag{3.6}$$

Donc par (3.6) l'opérateur $\mathcal{F}$ est une contraction pour tout $n \in \mathbb{N}$. Du choix de Ω, il n'y a pas $y \in \partial\Omega$ de telle sorte que $y=\lambda\mathscr{F}(y)$ pour certains $\lambda \in (0,1)$. Ensuite, l'instruction (C2) dans le théorème 2.2.3 ne tient pas. Une conséquence de l'alternative non linéaire nous déduisons que l'opérateur $\mathcal{F}$ a un point fixe unique y dans $\bar{\{\Omega\}}$, qui est une solution à l'équation (3.3). Cela complète la preuve.

■

Exemple 3.2.1. *[1] Considérons l'équation intégrale quadratique du type d'Urysohn*

$$x(t)=1+\frac{|x(t)|}{1+|x(t)|}\int_0^T \frac{ts}{t^3+1}\left(x(s)+x\left(\frac{s}{2}\right)\right)ds, t \in J:=[0,+\infty). \tag{3.7}$$

Posons $f(t)=1$ pour chaque $t \in J, \psi(x,y)=x+y$ pour tous $x,y \geq 0$,

$$(Ax)(t)=\frac{|x(t)|}{1+|x(t)|}, \quad t \in J \text{ and } x \in C(J;\mathbb{R}),$$

et

$$u(t,s,x,y)=\frac{ts}{t^3+1}(x+y),$$

pour tout $(t,s) \in J \times J_T$ et $x,y \in \mathbb{R}$. Il est clair que (3.7) est un cas particulier *d'équation (3.3). Montrons que les conditions* $(a_1)-(a_5)$ *sont vérifiées. Pour chaque* $n \in \mathbb{N}$, $t \in [0,n]$, *et* $x, \bar{x} \in C(J, \mathbb{R}_+)$, *Nous avons*

$$\begin{aligned}|(Ax)(t)-(A\bar{x})(t)| &= \left|\frac{|x(t)|}{1+|x(t)|}-\frac{|\bar{x}(t)|}{1+|\bar{x}(t)|}\right| = \left|\frac{|x(t)|-|\bar{x}(t)|}{(1+|x(t)|)(1+|\bar{x}(t)|)}\right| \\ &\leq \frac{|x(t)-\bar{x}(t)|}{(1+|x(t)|)(1+|\bar{x}(t)|)} \leq |x(t)-\bar{x}(t)|\end{aligned}$$

Donc (a_2) *est satisfait de* $L_n = 1$. *Pour chaque* $t \in J$ *et* $x \in C(J;\mathbb{R})$, *nous avous*

$$|(Ax)(t)| = \left|\frac{|x(t)|}{1+|x(t)|}\right| \leq |x(t)|.$$

Donc (a_3) *Donc* $a = 0$ *et* $b = 1$. *pour chaque* $n \in \mathbb{N}, (t,s) \in [0,n] \times J_T$, *et* $x, y, \bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}$, *nous avous*

$$\begin{aligned}|u(t,s,x,\bar{x})-u(t,s,y,\bar{y})| &= \left|\frac{ts}{t^3+1}[(x+\bar{x})-(y+\bar{y})]\right| \\ &\leq \left|\frac{ts}{t^3+1}[(x-y)+(\bar{x}-\bar{y})]\right| \\ &\leq \frac{nT}{n^3+1}[|x-y|+|\bar{x}-\bar{y}|] \\ &\leq T[|x-y|+|\bar{x}-\bar{y}|].\end{aligned}$$

donc (a_4) *est satisfait de* $L_n^* = T$. *pour chaque* $n \in \mathbb{N}, (t,s) \in [0,n] \times J_T$, *et* $x, y \in \mathbb{R}$, *nous avons*

$$\begin{aligned}|u(t,s,x,y)| &= \left|\frac{ts}{t^3+1}(x+y)\right| \\ &\leq s(|x|+|y|) = s\psi(|x|,|y|).\end{aligned}$$

Pour conclure que (a_5) *est vérifiée nous montrerons que (3.4) est satisfait. Ainsi*

$$\begin{aligned}\frac{M_n}{\|f\|_n + T\,(a+bM_n)\,\psi\,(M_n,M_n)\,p^*} > 1 &\iff \frac{M_n}{1+2T^2M_n^2} > 1 \\ &\iff 2T^2M_n^2 - M_n + 1 < 0.\end{aligned}$$

Notez que la dernière inégalité vaut pour T *telle que* $1-8T^2 > 0$, *i. e.,*

$$T < \frac{1}{2\sqrt{2}}. \tag{3.8}$$

Par conséquent, pour $T > 0$ *satisfaisant (3.8), il existe* $M_n > 0$ *satisfaisant (3.4).*

Enfin, montrons que (3.5) est satisfait.

$$\begin{aligned} 2\left(a+bM_n\right)L_n^*T+TL_n\psi\left(M_n,M_n\right)p^*-1 &= 2M_nT^2+2T^2M_n-1 \\ &= 4M_nT^2-1. \end{aligned}$$

Par conséquent, (3.5) est satisfait pour T *ou* M_n *satisfaisant* $4M_nT^2-1<0$, *i. e., pour*

$$0<T<\frac{1}{2\sqrt{M_n}}$$

ou $0<M_n<\frac{1}{4}T^{-2}$. *Par conséquent, si* T *satisfait les inégalités*

$$\frac{1}{2\sqrt{M_n}}<T<\min\left\{\frac{1}{2}\right\},$$

alors il découle du théorème 3.2.2 que l'équation (3.7) a une solution unique.

Conclusion

Dans ce mémoire, on a présenté quelque généralisations du principe de contraction et l'alternative non linéaire de type Leray-Schauder pour les espaces de Fréchet. Des applications ont été également données aux problème non linéaire différentielle et intégrale dans l'espaces de fonction continue.

L'intérét de cette étude est la possibilité de traiter plusieurs équations non linéaires sur des domaines non bornés et dans différents espaces fonctionnels, d'autre part, assurer l'existence et l'unicité.

Plusieurs théorèmes d'existence de points fixes pour des familles de contractions via des familles d'applications condensantes ont été obtenus dans des espaces de Fréchet. De plus, ils sont aussi valables dans des espaces vectoriels topologiques quelconques.

Bibliographie

[1] M. Benchohra, M.A. Darwish, On unique solvability of quadratic integral equations with linear modification of the argument. *Miskolc Math. Notes* **10** (2009), no. 1, 3–10.

[2] K. D. Bierstedt, J. Bonet, Some aspects of the modern theory of Fréchet spaces. *RACSAM. Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fs. Nat. Ser. A Mat.* **97**.(2003), no. 2, 159-188.

[3] V. Dietmar, *Lectures on Fréchet spaces*, Bergische Universitat Wuppertal Sommer semester 2000.

[4] I.Gallagher, *Analyse Fonctionnelle, École Normale Supérieure de Paris* 2019–2020.

[5] A. Granas, Continuation method for contractive maps. *Topol. Methods Nonlinear Anal.* **3** (1994), no. 2, 375–379.

[6] C. Dazé, *Théorèmes de point fixe et principe variationnel d'ekeland*, 10 février 2010.

[7] Francis Nier Dragos Iftimie. *Introduction à la topologie licence de mathématiques* Université de Rennes01.

[8] Franck Boyer *Analyse fonctionnelle,Master mathématique et applications première année* Aix Marseille université, 13 décembre 2015.

[9] M. Frigon, A. Granas, Résultats de type Leray-Schauder pour des contractions sur des espaces de Fréchet. *Ann. Sci. Math. Québec* **22** (1998), no. 2, 161–168.

[10] M. Frigon, A. Granas, et Z.E.A. Guenoun *alternative non linéaire pour les application contractantes. Ann. Sci. Math. Québec* **19** (1995), no. 1, 65–68.

[11] L. Jeanjean.*Espace métrique,Cours et TD*. Université de Franche-Comté16 route de Gray 25030 Besan, con cedex.

[12] J.Schmets *Analyse Fonctionnelle université de liege Faculté des Sciences Institut de Mathématique* 2004–2005

[13] A.El jai. Eléments de topologie et espaces métriques, Presses Universitairesde Perpignan.

[14] J. Villani, *Unité de Mathématiques Pures et Appliquées, École normale supérieure de Lyon 46 allée d'Italie.*

[15] F. Ronga *Topologie et géométrie* , Genéve , MMVI ap.J.-C.