REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE & POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR & DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Université Ibn Khaldoun- Tiaret
FACULTÉ DES MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUE
DÉPARTEMENT DES MATHEMATIQUES

MEMOIRE MASTER

Présentée par:

Kaddari Chaimaa

Kaid Gharbi Nour El houda

Laterache Abdessamed

Spécialité : *Mathématiques*

Option : *Analyse fonctionnelle et équation différentielle*

Intitulé

Théorème de Picard

Soutenue le : 23/06/ 2022 devant le jury composé de :

Président : K. Maazouz MCA. *Univ. Ibn Khaldoun Tiaret*

Examinateurs : M.Sofrani *MCA. Univ. Ibn Khaldoun Tiaret*

Encadreur : **A.Ouardani** MCA.Univ.Ibn Khaldoun Tiaret

2021-2022

Remerciements

C'est avec un grand plaisir que nous réservons cette page en signe de gratitude et de profonde reconnaissance à tous ceux qui nouls ont aidés de prés ou de loin pour ca réalisation de ce modeste travail.

Aux membres de notre jury, nous adressons nos vifs remerciements à notre encadreur Dr **A. OUARDANI** qui par ses conseils, ses recommandations, sa patience nous a permis de réaliser ce mémoire avec un très grand plaisir.

Nos remerciements les plus chaleureux vont à Dr **K. MAAZOUZE**, pour nous avoir honoré de présider le jury de notre mémoire.

Nous également remercions beaucoup Dr **M. SOFRANI**, professeur au l'Université Ibn Khaldoune de Tiaret, pour l'honneur qu'il nous a fait en acceptant d'examiner ce mémoire.

À tous les enseignants qui ont participés à notre formation tout au long de notre cycle universitaire.

Enfin, nous ne voulons pas oublier tous les professeurs que nous avons rencontrés tout au long de ces années de licence et tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce travail, merci.

Dédicaces

J'ai le grand plaisir de dédier ce modeste travail.

A ma très chère mère, qui me donne toujours l'espoire de vivre et qui n'a jamais cessé de prier pour moi.

A mes frères et mes sœur.

A mes meilleurs amis : Siham, Nour El houda .

Et tout qui m'aide et compulse ce modeste travail.

En fin, je remercier mes camarades, NOUR ELHOUDA et ABDASSAMED, qui a contribué de ce modeste travail.

KADDARI CHAIMAA

Je dédie ce travail.

A ma mère pour son amour,ces encouragement et ses sacrifies.

A mon père pour son affection et la confiance qu'il m a accordé.

A tout les membres famille.

A tout mes amis.

Et tout ceux qui m'aiment.

KAID GHARBI NOUR ELHOUDA

A mes chers parents, pour tous leurs sacrifices, leur amour, leur tendresse, leur soutien et leurs prières tout au long de mes études.

A mes chères sœurs pour leurs encouragements permanents, et leur soutien moral.

A mes chers frères, pour leur appui et leur encouragement.

Que ce travail soit l'accomplissement de vos vœux tant allégués, et le fuit de votre soutien infaillible .

Que ce travail soit l'accomplissement de vos vœux tant allégués, et le fuit de votre soutien infaillible.

Merci d'être toujours là pour moi.

LATRACHE ABDASSAMED

Résumé

Le théorème de Picard est un outils très important dans l'analyse fonctionnel. On l'utilise afin d'affirmer qu'un problème de Cauchy sous certains conditions admet une unique solution.
Le but de ce travail est de savoire l'importance de théorème de Picard dans l'étude de l'existence et de l'unicité de la solution des équations différentielles avec une condition initiale.

Introduction

Les équations différentielles ont une importance dans les problème pratique. Ceci est du au fait qu'un grand nombre de liens et de relations physiques se traduisent mathématiquement sous forme d'équation différentielle, ces derniers constituent une des branche les plus fertiles des mathématiques l'étude de ce type des équations différentielles est liée à l'étude des phénomènes naturels.
Dans la littératures mathématiques, plusieurs théorèmes ont été développés . Parmi ces théorèmes on **le théorème de Picard** qui apparenté sur l'étendu d'une fonction analytique, il porte le nom **d'Emile Picard**.
Le théorème de Picard est fondamentale en analyse c'est un résultats qui permet d'affirmer qu'une fonction f admet sous certains condition un point fixe, se relevé être un outil très utilise en mathématiques principalement dans le domaine de la résolution des équation différentiels .
Le théorème de Picard à des application nombreuses, a la fois théorique et pratiques, au rang des premières, citons les incontournable de théorème des fonctions implicite ,solution d'une équations différentielles satisfaisons à théorème Cauchy-Lipschitz pour les applications pratiques, ce qui est essentiel d'avoir une estimation de la vitesse de la convergence .
Nous avons considéré le théorème de picard et applications aux équations différentielles. On a structure ce mémoire en trois chapitres comme suit :
Dans le premier chapitre, nous rappelons quelques espaces fonctionnels, espace vectorielle normé, espace complet et espace séparable.

Le deuxième chapitre, nous rappelons quelques notions sur l'équations différentielles : équation différentielle ordinaire et linéaire la différence entre les deux $\cdots$, l'existence, l'unicité, problème de Cauchy, solution maximal et global.
Dans le dernier chapitre représente l'importance de ce mémoire applications de **Théorème de Picard** sur les équations différentielles.

Table des matières

Chapitre 1

Préliminaires

1.1 Espaces vectoriels normés

Soit E un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K}$ designe $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

Définition 1.1.1. *Une norme sur E est une application $N : E \longrightarrow \mathbb{R}_+$ vérifiant les axiomes suivantes :*

(i) ***Séparation :*** $N(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0$.

(ii) ***Homogénéité :*** $\forall x \in E, \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}; \quad N(\lambda\, x) = |\lambda|\, N(x)$.

(iii) ***Inégalité triangulaire :*** $\forall x, y \in E; \quad N(x + y) \leq N(x) + N(y)$.

Ceci entraîne

$$\forall x, y \in E; \quad N(x - y) \geq |N(x) - N(y)|\,.$$

Un espace vectoriel E qui muni d'une norme $N : E \longrightarrow \mathbb{R}_+$ s'appelle espace vectoriel normé (e.v.n) et se note (E, N) ou $(E, \|.\|)$.

Exemple 1.1.1. *1. Pour $E = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.*

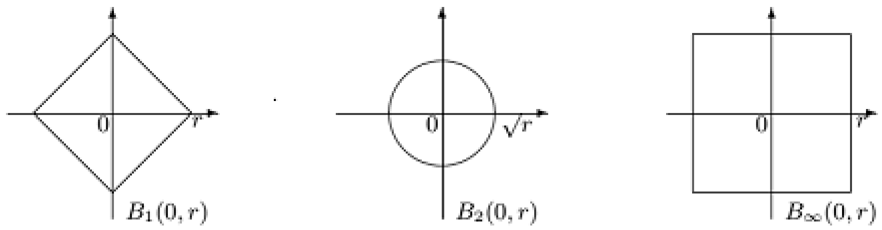
2. ***Normes usuelles sur*** $\mathbb{R}^n$, $\quad x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

· *La norme somme :* $\|x\|_1 = |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|$.

· *La norme euclidienne :* $\|x\|_2 = (|x_1|^2 + |x_2|^2 + \cdots + |x_n|^2)^{\frac{1}{2}}$.

· *La norme infinie :* $\|x\|_\infty = \max(|x_1|, |x_2|, \cdots, |x_n|)$.

Les boules $B_1(0, r)$, $B_2(0, r)$ et $B_\infty(0, r)$ de centre 0 et de rayon $r > 0$ dans $\mathbb{R}^2$, muni des normes $\|.\|_1$, $\|.\|_2$ et $\|.\|_\infty$, sont représentées par :



3. ***Normes usuelles sur*** *$\mathcal{C}([a,b],\mathbb{K})$. Soient a et b des nombres réels tels que $a<b$. L'ensemble $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{K})$ des fonctions continues sur $[a,b]$ à valeur dans $\mathbb{K}$ est un K-espace vectoriel. Les applications*

$$\|.\|_1\,,\ \|.\|_2\,,\ \|.\|_\infty : \mathcal{C}([a,b],\mathbb{K}) \to \mathbb{R}_+,$$

définies, pour toute fonction continue $f:[a,b]\to\mathbb{K}$, par y

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)|\ dx, \quad \|f\|_2 = \left(\int_a^b |f(x)^{\frac{1}{2}}|\right) dx, \quad \|f\|_\infty = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|\,.$$

sont des normes sur $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{K})$.

Proposition 1.1.1. *La fonction*

$$\begin{array}{rccl} d: & E\times E & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ & (x,y) & \longmapsto & d(x,y)=\|x-y\|\,; \end{array}$$

où E est un e.v.n forme une distance sur E. Dans ce cas (E,d) est un espace métrique. La fonction d elle s'appelle la distance associée á la norme définit dans E.

Proposition 1.1.2. *Soit E un e.v.n. La distance associée à la norme $\|.\|$, elle véerifie, en plus des conditions (i), (ii) et (iii) , les propriétés suivantes :*

$$\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^+$$

$$(x,y) \longrightarrow d(x,y) = \|x\| + \|y\|$$

(iv) $\forall\lambda\in\mathbb{K},\ \forall(x,y)\in E^2;\ d(\lambda x,\lambda y) = |\lambda|\, d(x,y)$.
(v) $\forall(x,y,z)\in E^3;\ d(x+z,y+z) = d(x,y)$.

Proposition 1.1.3. *Soit (E,d) un espace métrique. On suppose que E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ et que la distance d vérifie aussi les conditions (iv) et (v) de la proposition 1.1.2. Alors l'application $\|.\| : E\times E \to \mathbb{R}_+$ définie par $\|x\| = d(0,x)$ est une norme sur E. La distance associée à cette norme est la distance d.*

Théorème 1.1.1. *Soit E un espace vectoriel de dimension finie, $dimE = n < \infty$:*

a) Toutes les normes sont équivalentes.

b) pour toute norme, les compacts sont les fermée bornés.

1.2 Boule ouverte (fermée) dans un e.v.n

Définition 1.2.1. *Soient E un e.v.n, $a \in E$ et $r > 0$.*

1. *On appelle boule ouverte de centre a et de rayon r l'ensemble*

$$B(a,r) = \{x \in E;\ \|x-a\| < r\}.$$

2. *On appelle boule fermée de centre a et de rayon r l'ensemble*

$$\bar{B}(a,r) = B_f(a,r) = \{x \in E;\ \|x-a\| \leq r\}.$$

3. *On appelle sphères de centre a et de rayon $r > 0$ l'ensemble*

$$S(a,r) = \{x \in E;\ \|x-a\| = r\}.$$

Définition 1.2.2. *Soit E un e.v.n. On dit qu'une partie A de E est bornée s'il existe une boule $B_f(x_0, r)$ telle que $A \subset B_f(x_0, r)$.*

$$\forall x \in A, \quad \|x_0 - x\| \leq r.$$

Définition 1.2.3. *Soient E un e.v.n et A une partie de E. L'intérieur de A, noté est la réunion de tout les ouverts contenus dans A. Les éléments de sont appelés les points intérieurs de A.*

Définition 1.2.4. *Soient E un e.v.n et $A \subset E$. L'adhérence de A (on dit aussi la fermeture de A), est l'intersection de tous les fermés qui contiennent A, on la note $\bar{A}$.*

Remarque 1.2.1. *Une partie A d'un e.v.n E est fermée si et seulement si $A = \bar{A}$.*

Définition 1.2.5. *Une partie A d'un e.v.n E est dite dense dans E si $\overline{A} = E$.*

Proposition 1.2.1. *[Lien entre boule ouverte, fermé et sphère] Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé, $a \in E$, $r > 0$ alors :*

- $B(a,r) \subset B_F(a,r)$
- $S(a,r) \subset B_F(a,r)$
- $S(a,r) \bigcap B_F(a,r) = \emptyset$
- $B(a,r) \bigcup S(a,r) = B_F(a,r)$

1.2.1 Convergence

Soit E un e.v.n et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de E.

On dit que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ converge vers x_0 si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ telle que pour tout $n \geq n_0$ on a

$$\|x_n - x_0\| \leq \varepsilon.$$

Remarque 1.2.2. *On également $(x_n)_n$ converge vers x_0 si et seulement si*

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x_0\| = 0.$$

Proposition 1.2.2. *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ une suite d'élments de E convergente vers $x_0 \in E$. Alors il y a unicité de x_0.*

1.3 Fonctions continues

1.3.1 Continuité en un point

Soient E et F deux espaces vectoriels normés.

Définition 1.3.1. *On dit que la fonction $f : A \subset E \longrightarrow F$ est continue en $a \in A$ si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$, tel que pour tout $x \in A$;*

$$\|x - a\|_E < \eta \Longrightarrow \|f(x) - f(a)\|_F < \varepsilon.$$

1.3.2 Continuité sur un domaine

Définition 1.3.2. *Soient f une fonction définie sur un domaine D d'un e.v.n. E à valeur dans un e.v.n. F. On dit que f est continue sur D si et seulement si elle est continue en tout point de D.*

Théorème 1.3.1. *Soit E un espace vectoriel de dimension finie.*
Si $(F, \|.\|)$ est un autre $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé (dimension quelconque), tout application linéaire de E dans F est continue.

Théorème 1.3.2. *Dans un espace vectoriel normé de dimension infinie, la boule unité fermée n'est jamais compact.*

Proposition 1.3.1. *En dimension finie l'espace normé est complet. mais n'est pas nécessairement complet en dimension infinie.*

Définition 1.3.3. *On appelle espace de Banach un espace vectoriel normé complet.*

Corollaire 1.3.1. *Tout e.v.n de dimension finie est un espace de Banach.*

1.4 Applications k-Lipschitzienne

Définition 1.4.1. *On dit que l'application $f : E \longrightarrow F$ est k-Lipschitzienne si pour tout $x, y \in E$ $k \in \mathbb{R}^+$*

$$\|f(x) - f(y)\|_F \leq k \; \|x - y\|_E \, .$$

Si $k \in [0, 1[$, f est dite contractante.

1.5 Fonction localement lipschitzienne

Définition 1.5.1. *On dit que $f : D \subset E \to \Omega \subset F$ est localement lipschitzienne si tout point de D admet un voisinage V sur lequel f est lipschitzienne.*

Exemple 1.5.1. *Pour $\Omega = \mathbb{R}$.*

- *$f(x) = x^2$ est localement lipschitzienne mais pas globalement.*
- *$f(x) = \sin x$ est globalement lipschitzienne .*

Proposition 1.5.1. *Toute fonction Lipschitzienne est continue.*

Proposition 1.5.2. *On a les équivalences suivantes :*

(i) f continue ;

(ii) f^{-1} est ouvert ;

(iii) f^{-1} est fermé ;

(iv) pour toute suite $x_n \to a$, alors $f(x_n) \to f(a)$.

1.6 Homéomorphisme

L'application $f : A \subset E \longrightarrow B \subset F$ est un homéomophisme si :

1. f est bijective de A dans B
2. f est continue
3. f^{-1} est continue.

1.7 Applications linéaires continues

Définition 1.7.1. *L'application $f : E \longrightarrow F$ est linéaire si, pour tout $x, y \in E$ et pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ on a*

$$f(\alpha\, x + \beta\, y) = \alpha\, f(x) + \beta\, f(y).$$

Proposition 1.7.1. *Soit $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire. Les assertions suivantes sont équivalentes*

(i) f continue

(ii) f continue en 0

(iii) il existe $C > 0$ tel que $\|f(x)\|_F \leq C\, \|x\|_E$.

Définition 1.7.2. *La norme d'une application linéaire continue est donnée par*

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in E\setminus 0} \frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E}.$$

$\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires continues de E à valeurs dans F.

Proposition 1.7.2. *Soit $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire. Si E est de dimension finie, alors f est continue.*

1.8 Compacité

Définition 1.8.1. *Soit E un e.v.n (ou un espace métrique). L'ensemble $K \subset E$ est compact si de toute suite de points de K, on peut extraire une sous-suite convergeant vers un point de K.*

Proposition 1.8.1. *Si K un compact et $F \subset K$ est fermé, alors F est compact.*

Définition 1.8.2. *Soit X une partie d'un e.v.n E. On dit que X est relativement compact si sa fermeture $\bar{X}$ est compact pour la distance d associée à la norme de E.*

Proposition 1.8.2. *L'image d'un compact par une application continue est compact.*

Définition 1.8.3. *Soient X et Y deux espaces métriques, et $\Omega \subset X$ un ouvert. Une application continue $f : \Omega \to Y$ est dite compacte si $\overline{f(\Omega)}$ est compact. Elle est dite complètement continue si l'image de tout borné est relativement compacte*

Proposition 1.8.3. *Une application $f : X \to Y$ est compacte si et seulement si de toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de X, on peut extraire une sous-suite $(x_{n_k})_{n\in\mathbb{N}}$ telle que la suite*

$(f(x_{n_k}))_{k\in\mathbb{N}}$ *converge dans* Y .
$T : X \to Y$ *est appelé un opérateur compact si* $T(X)$ *est un sous-ensemble compact de* Y *est appelé totalement borné si pour tout sous-ensemble borné* S *de* X, $T(S)$ *est un ensemble totalement borné de* Y. *De plus,* T *est dit complètement continu s'il est continu et totalement borné.*
Notons que chaque opérateur compactes totalement borné, mais l'inverse peut ne pas être vrai ; cependant, deux notions sont équivalentes sur un sous-ensemble borné de X.

1.9 Équation intégrale

Une équation dans laquelle la fonction inconnue d'une ou plusieurs variables figure sous le signe intégral. Cette définition gnérale tient compte de beaucoup de formes naturellement issues de la modélisation des diffrents problèmes de la physique mathématiques ou par remaniement d'une importante classe de problèmes formulés auparavant par des opérateurs différentiels, notamment les problèmes aux limites et ceux de Cauchy.
La forme ordinaire d'une équation intégrale linéaire est donnée par :

$$\alpha(x)u(x) = f(x) + \lambda \int k(x,t)u(t)dt \tag{1.1}$$

où $\alpha(x)$, $f(x)$, $k(x,t)$ sont des fonctions données, la fonction $u(x)$ qui figure á l'intérieur et á l'extérieurs du su signe intégral est l'inconnu á déterminer λ est un paramètre réel ou complexe différent de zéro. La fonction $k(x,t)$ est appelée *noyau* de l'équation intégrale.

Équation intégrales de Fredholm

Une équation de la forme (1.1) dont les bornes d'intégration sont fixées est dite équation intgrale linéaire de Fredholm.

(i) Si $\alpha(x) = 0$, l'équation s'écrit

$$f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)u(t)dt = 0; \tag{1.2}$$

et elle est dite de première espèce.

(*ii*) Si $\alpha(x) = 1$ l'équation s'écrit

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)u(t)dt \tag{1.3}$$

et elle est dite de seconde espèce.

(*iii*) Si $\alpha(x)$ est continue et s'annule en certains points, mais pas en tout point de $[a,b]$ elle est dite de troisième espèce.

(*iv*) Si $f(x) = 0$, l'équation s'écrit

$$u(x) = \lambda \int_a^b k(x,t)u(t)dt; \tag{1.4}$$

et elle est dite homogène.

Exemple 1.9.1. *Équations intégrales linéaires non homogènes de Fredholm de la seconde et première espèce*

$$u(x) = x^2 + \sin x + 1 + \lambda \int_{-1}^{1} \left(x^2 - t\right) u(t)dt, \quad 0 = x^2 + 1 + \lambda \int_{-1}^{1} \left(x^2 - t\right) u(t)dt.$$

Équations intégrales linéaires homogènes de Fredholm de la seconde et première espèce

$$u(x) = \lambda \int_{-1}^{1} \left(x^2 - t\right) u(t)dt, \quad 0 = \lambda \int_{-1}^{1} \left(x^2 - t\right) u(t)dt.$$

Équations intégrales de Volterra

Les équation intégrales de Volterra de première espèce, de seconde espèce ou homogène sont définies de la même manière précédente sauf que la borne d'intégration supérieure est variable, c-á-d, $b = x$. Aussi, notons qu'une équation intégrale de Volterra de première éspace peut être transformée en une équation intégrale de second espèce, par dérivation en utilisant la formule de Leibniz de la manière suivante, soit

$$\int_0^x k(x,t)u(t)dt = f(x); \tag{1.5}$$

alors

$$k(x,x)u(x) + \int_0^x \frac{dk(x,t)}{dx} u(t)dt = f'(x).$$

Si $k(x,x) \neq 0$, on peut diviser les deux cotés de cette équation par $k(x,x)$ on obtient

$$u(x) + \int_0^x \frac{k_x(x,t)}{k(x,x)} u(t)dt = \frac{f'(x)}{k(x,x)}; \tag{1.6}$$

où $k_x(x,t) = \frac{dk(x,t)}{dx}$, et la réduction est achevée.

Exemple 1.9.2. *Équations intégrales linéaires non homogènes de Volterra de la seconde et première espèce*

$$u(x) = x^2 + \sin x + 1 + \lambda \int_0^x \left(x^2 - t\right) u(t)dt, \quad 0 = x^2 + 1 + \lambda \int_0^x \left(x^2 - t\right) u(t)dt.$$

Équations intégrales linéaires homogènes de Volterra de la seconde et première espèce

$$u(x) = \lambda \int_0^x \left(x^2 - t\right) u(t)dt, \quad 0 = \lambda \int_0^x \left(x^2 - t\right) u(t)dt.$$

1.9.1 Théorème de point fixe de Banach

$(E, \|.\|)$ est un espace de Banach et F un fermé non vide de E.

Définition 1.9.1. *On dit que'une application $f : F \longrightarrow E$ est strictement contractante s'il existe une constante $\lambda \in [0.1[$ telle que :*

$$\forall (x,y) \in F \times F, \quad \|f(x) - f(y)\| \leq \lambda \|x - y\|.$$

On dit aussi que f est λ-contractante.
Remarque de vérifier qu'une application contractante est uniformément continue.

Exemple 1.9.3. *Du théorème des accroissements finis on déduit que si $[a,b]$ est un segment non réduit à un point et f une fonction à valeurs réelles qui est continue sur $[a,b]$, dérivable sur $I = [a,b[$ et telle que $\sup_{x \in I} |f'(x)| = \lambda < 1$ elle est alors λ-contractante.*

Théorème 1.9.1. *Si $f : F \longrightarrow F$ est une application λ-contractante, elle admet alors un unique point fixe α dans F.*
De plus, une majoration de l'erreur d'approximation de α par les (x_n) est donnée par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \|\alpha - x_n\| \leq \frac{\lambda^n}{1-\lambda} y \|x_1 - x_0\|.$$

Chapitre 2

Équations différentielles

2.0.1 Équations différentielles ordinaires

dans ce chapitre, on donne quelques définitions. Soient I un ouvert de $\mathbb{R}$, E un espace de Banach sur $\mathbb{R}$ et $U_1, U_2, \cdots, U_n$ des ouvert de E. les équations différentielle ordinaire, seront notées en abrégé EDO dans la suite.

Définition 2.0.1. *Une équation différentielle sur l'espace de Banach E est une équation de la forme*

$$F(t, x, x', x'', \cdots, x^{(n)}) = 0, \tag{2.1}$$

où n est un entier non nul appelé l'ordre de l'équation, F est une fonction donnée de $(n+2)$ variables supposée régulières sur $I \times U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_n$, x est la fonction inconnue de I dans l'espace de Banach E et $x, x', x'', \cdots, x^{(n)}$ sont ses dérivées successives. Plus précisément le problème est de trouver un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ et une fonction $x : t \mapsto x(t)$ dérivable sur cet intervalle jusqu'à l'ordre n et vérifiant l'équation

$$\forall t \in I, \quad F(t, x, x', x'', \cdots, x^{(n)}) = 0, \tag{2.2}$$

cette équation est de forme très générale, on pratique, on préférera travailler avec des équations plus particulières dites du type explicite, pour lesquelles il existe une fonction H régulière sur $I \times U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_{n-1}$ tel que

$$x^{(n)} = H(t, x, x', x'', \cdots, x^{(n-1)}). \tag{2.3}$$

Exemple 2.0.1.

$$F(t, x, x', x'') = 0,$$

est d'ordre 2.

$$F(t, x, x', x'', \cdots, x^{(n)}) = 0,$$

est d'ordre n.

2.0.2 Equation différentielle linéaire

Définition 2.0.2. *Une EDO d'ordre n est linéaire si elle est de la forme*

$$a_n(t)x^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)x^{(n-1)}(t) + \cdots + a_0(t)x(t) = g(t), \tag{2.4}$$

avec tous les $x^{(i)}$ de degré 1 et tous les coefficients dépendant au plus de t, si g est nulle, alors l'équation est dite homogène, ou sans second mombre. L'équation différentielle suivante

$$a_n(t)x^{(n)}(t) + a_{(n-1)}(t)x^{(n-1)}(t) + \cdots + a_0(t)x(t) = 0, \tag{2.5}$$

est appelée l'équation différentielle homogène associée.
Si $a_j(t)$, $0 \leq j \leq n$, sont des constants, on parle d'équation différentielle linéaire a coefficients constants.

Définition 2.0.3. *Soient $x : I \longrightarrow U$ et $\tilde{x} : \tilde{I} \longrightarrow \tilde{U}$ deux solutions de l'équation différentielle. On dit que $\tilde{x}$ est un prolongement de x si : $I \subset \tilde{I}$ et*

$$\tilde{x}(t) = x(t), \quad \textit{pour tout } t \in I.$$

Définition 2.0.4. *Soient I_1 et I_2 , deux intervalles sur $\mathbb{R}$, tels que $I_1 \subset I_2$.*
On dit qu'une solution (x, I) est maximale dans I_2 si et seulement si x n'admet pas de prolongement $(\tilde{x}, \tilde{I})$ solution de l'équation différentielle telle que $I_1 \subsetneqq \tilde{I} \subset I_2$ (on verra même plus tard que I_1 est nécessairement ouvert).

Définition 2.0.5. *Soit I un intervalle inclus dans $\mathbb{R}$. Une solution (x, I) est dite globale dans I si elle est définie sur l'intervalle I tout entier.*

Définition 2.0.6. • *On appelle solution générale de l'EDO, toute fonction $\Psi = \Psi(t, c)$ qui dépend d'une constante arbitraire c et tel que pour toute valeurs de c la fonction Ψ vérifie identiquement l'EDO, en tout points de $]t_0, t_1[$ qui est le domaine de définition de Ψ.*

• *On appelle solution particulière de l'EDO toute solutions déduite de la solution générale en donnant des valeurs concrètes a la constante arbitraire c, une solution* *particulière s'écrit :*

$$x(t) = \Psi(t, c = c_0),$$

c est un constante, pour chaque valeur donner a c on a une solution particulière trouvé on a en chaque point de $]t_1, t_2[$ *l'unicité de la solution.*

2.0.3 Différents types d'équations

Définition 2.0.7. *Une équation différentielle ordinaire, également notée EDO , d'ordre* n *est une relation entre la variable réelle* t*, une fonction inconnue* $t \longmapsto x(t)$ *et ses dérivées* $x^{'}, x^{''}, \cdots, x^n$ *au point* t *définie par*

$$F(t, x, x^{''}, ..., x^n) = 0 \tag{2.6}$$

ou F *n'est pas indépendante de sa dernière variable* x^n*. On prendra* t *dans un intervalle* I *de* $\mathbb{R}$ *(*I *peut être* $\mathbb{R}$ *tout entier). La solution* x *en général sera a valeur dans* $\mathbb{R}^n$*,* $n \in \mathbb{N}^*$ *où* n *sera le plus souvent égale à* 1*, ou* 3*, On dit que cette équation est scalaire si* F *est à valeur dans* $\mathbb{R}$*.*

Exemple 2.0.2. *l'équation différentielle*

$$x^{'} + x^2 - t = 0,$$

est du premier ordre avec $V = \mathbb{R}^3$ *et* $F(t, x, x^{'}) = x^{'} + x^2 - t$*.*

Définition 2.0.8. *On appelle équation différentielle normale d'ordre* n *toute équation de la forme*

$$x^n = f(t, x, x^{''}, ..., x^{n-1}).$$

Définition 2.0.9. *On appelle équation différentielle autonome d'ordre* n *toute équations de la forme*

$$x^n = f(x, x^{''}, ..., x^{n-1}).$$

Autrement dit, f *ne dépend pas explicitement de* t*.*

Définition 2.0.10. *Une EDO de type* (2.6) *d'ordre* n *est linéaire si elle est de la forme*

$$a_n(t)x^n(t) + a_{n1}(t)x^{n-1}(t) + ... + a_1(t)x^{'}(t) + a_0(t)x(t) = g(t),$$

avec tous les x^i *de degré* 1 *et tous les coefficients dépendant au plus de* t*.*

Exemple 2.0.3. *l'équation* $x^{"} - 2x^{'}(t) + x = 0$ *est une équation ordinaire linéaire d'ordre deux à coefficient constantes.*

2.1 Solutions d'une équation différentielle

Définition 2.1.1. *On appelle solution d'une équation différentielle d'ordre n sur certain intervalle I de* $\mathbb{R}$*, toute fonction x définie sur cet intervalle I, n fois dérivable en tout point de I et qui vérifie cette équation différentielle sur I.*

On notera en général cette solution (x, I)*. Si I contient sa borne inférieur notée a (respectivement sa borne supérieure b), ce sont des dérivées à droite (respectivement à gauche) qui interviennent au point* $t = a$ *(respectivement* $t = b$*).*

Intégrer une équation différentielle consiste à déterminer l'ensemble de ses solutions.

2.1.1 Solution maximale

Nous introduisons d'abord le concept de prolongement d'une solution. L'expression solution maximale est alors entendue implicitement au sens de la relation d'ordre fournie par le prolongement des solutions.

Définition 2.1.2. *On dit qu'une solution* $x : I \to \mathbb{R}^n$ *est maximale si x n'admet pas de prolongement* $\tilde{x} : \tilde{I} \to \mathbb{R}^n$ *avec* $\tilde{I} \supsetneq I$*.*

Théorème 2.1.1. *Toute solution x se prolonge en une solution maximales* $\tilde{x}$ *(pas nécessairement unique).*

Preuve 1. • *Supposons que x soit définie sur un intervalle* $I = |a, b|$ *(cette notation désigne un intervalle ayant pour bornes a et b, incluses ou non dans I).*
Il suffira de montrer que x se prolonge en une solution $\tilde{x} : |a, \tilde{b}| \to \mathbb{R}^n(\tilde{b} \geq b)$ *maximale à droite, c'est-à-dire qu'on ne pourra plus prolonger* $\tilde{x}$ *au delà de* $\tilde{b}$*. Le même raisonnement s'appliquera à gauche.*
Pour cela, on construit par récurrence des prolongements successifs $x_{(1)}, x_{(2)}, \cdots$ *de x avec* $x_{(k)} : |a, b_k[\to \mathbb{R}^n$*. On pose* $x_{(1)} = x$*,* $b_1 = b$*. Supposons* $x_{(k-1)}$ *déjà construite pour un indice* $k \geq 1$*. On pose alors*

$$c_k = \sup\{c; x_{(k-1)};$$

se prolonge sur $|a, c[\}$*.*
On a $c_k \geq b_{k-1}$*. Par définition de la borne supérieure, il existe* b_k *tel que* $b_{k-1} \leq b_k \leq c_k$ *et un prolongement* $x_{(k)} : |a, b_k[\to R^n$ *de* $x_{(k-1)}$ *avec* b_k *arbitrairement voisin de* c_k*, en particulier, on peut choisir*

$$c_k - b_k < \frac{1}{k} \quad si \quad c_k < +\infty,$$

$$b_k > k \quad si \quad c_k = +\infty.$$

La suite (c_k) est décroissante, car l'ensemble des prolongements de $x_{(k-1)}$ contient l'ensemble des prolongements de $x_{(k)}$, au niveau des bornes supérieures on a donc $c_k \geq c_{k+1}$. Si $c_k < +\infty$ à partir d'un certain rang, les suites

$$b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_k \leq \cdots \leq c_k \leq c_{k-1} \leq \cdots \leq c_1;$$

sont adjacentes, tandis que si $c_k = +\infty$ quel que soit k, on a $b_k > k$. Dans les deux cas, on voit que

$$\tilde{b} = \lim_{k\to+\infty} b_k = \lim_{k\to+\infty} c_k.$$

Soit $\tilde{x} : |a, \tilde{b}| \to \mathbb{R}^n$ le prolongement commun des solutions $x_{(k)}$, éventuellement prolongé au point $\tilde{b}$ si cela est possible. Soit $z : |a, c| \to \mathbb{R}^n$ un prolongement de $\tilde{x}$. Alors z prolonge $x_{(k-1)}$ et par définition de c_k il s'ensuit $c \leq c_k$. A la limite il vient $c \leq \tilde{c}$, ce qui montre que la solution $\tilde{x}$ est maximale à droite.

2.2 Fonction lipschitzienne

Soit $\Omega \subset I \times \mathbb{R}^n$, f une application définie de Ω dans $\mathbb{R}^n$.

Définition 2.2.1. *L'application f est dite lipschitzienne par rapport à la deuxième variable sur Ω s'il existe une constante k, appelée la constante de Lipschitz de f, telle que :*

$$\forall x \in I,\ \forall y, z \in \mathbb{R}^n, \quad \|f(x,y) - f(x,z)\| \leq k\|y - z\|.$$

la fonction $x \longmapsto f(t,x)$ est localement lipschitzienne pour tout $t \in I$, c'est-à-dire que pour tout $J \subset I$ compact, pour tout $O \subset \Omega$ compact, il existe une constante $\gamma = \gamma(J,O) > 0$ telle que

$$\|f(t,x) - f(t,y)\| \leq \gamma \|x - y\|, \quad \forall t \in J,\ \forall x, y \in O. \tag{2.7}$$

Remarque 2.2.1. *On dit que f est localement lipschitzienne par rapport à la deuxième variable si tout point de $I \times \mathbb{R}^n$ admet un voisinage Ω sur lequel f est lipschitzienne par rapport à la deuxième variable.*

2.3 Problème de Cauchy

Il arrive qu'on ne recherche pas toutes les solutions d'une EDO mais seulement celles qui vérifient certaines conditions, dites conditions initiales de Cauchy ou tout simplement conditions de Cauchy.
Un problème de Cauchy est un problème constitué d'une équation différentielle dont on recherche une solution vérifiant une certaine condition initiale. Cette condition peut prendre plusieurs formes selon la nature de l'équation différentielle.

Soit U un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ et $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction.

Définition 2.3.1. *Étant donnée une équation différentielle du premier ordre sous la forme suivante :*

$$x'(t) = f(t, x),$$

pour $(t, x(t)) \in U$, *et un point* $(t_0, x_0) \in U$ *le problème de cauchy correspondant consiste a chercher des solution* x, *tell que* $x(t_0) = x_0$. *On note le problème de cauchy de la forme suivante :*

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), \quad (t, x(t)) \in U \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} . \tag{2.8}$$

Interprétation physique - Dans de nombreuses situations concrètes, la variable t représente le temps et $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ est une famille de paramètres décrivant l'état d'un système matériel donné. L'équation (2.8) traduit physiquement la loi d'évolution du système considéré en fonction du temps et de la valeur des paramètres. Résoudre le problème de Cauchy (2.8) revient à prévoir l'évolution du système au cours du temps, sachant qu'en $t = t_0$ le système est décrit par les paramètre $x_0 = (x_{0,1}, \cdots, x_{0,n})$. On dit que (t_0, x_0) sont les données initiales du problème de Cauchy (2.8).

Définition 2.3.2. *Une solution du problème de Cauchy* (2.8) *sur un intervalle ouvert* I *de* $\mathbb{R}$ *avec la condition initiale* $(t_0; x_0) \in U$ *et* $t_0 \in I$ *est une fonction dérivable* $x : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ *telle que :*

- *pour tout* $t \in I$, $(t, x(t)) \in U$,
- *pour tout* $t \in I$, $x'(t) = f(t, x(t))$,
- $x(t_0) = x_0$

Théorème 2.3.1. *Soit* $f : I \times V \longrightarrow X$ *une application continue,* I *un ouvert de* $\mathbb{R}$ *et* V *un ouvert connexe non vide d'un* $\mathbb{R}$*-espace de Banach et* (t_0, x_0) *un point fixe de*

$\mathbb{R} \times V$ et x une fonction définie sur un intervalle ouvert qui contient t_0, alors x est une solution du problème de Cauchy (2.8) *sur I si et seulement si*

1. *pour tout $t \in I$, $(t, x(t)) \in I \times V$,*
2. *x est continue sur I,*
3. *pour tout $t \in I$*
$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\, ds.$$

Preuve 2. *Soit $x : I \longrightarrow V$ une fonction continue sur un intervalle ouvert I qui contient t_0 et que $(t, x(t)) \in I \times V$.*
Supposons que x est une solution du problème de Cauchy (2.8)*. Alors x est dérivable sur I et vérifie :*

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{2.9}$$

En intégrant les deux membres de t_0 à t, on obtient pour tout $t \in I$

$$\int_{t_0}^{t} x'(t)\, ds = \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\, ds,$$

ce qui donne, en remplaçant $x(t_0)$ par x_0

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\, ds, \quad \text{pour tout} \quad t \in I.$$

Inversement, supposons que pour tout $t \in I$, x vérifie :

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\, ds, \tag{2.10}$$

alors, d'aprés la continuité de x et f, donc la derivvabilité de la fonction $t \mapsto f(t, x(t))$, on obtient

$$x'(t) = f(t, x(t)), \quad \text{pour tout} \quad t \in I, \tag{2.11}$$

de plus x vérifie $x(t_0) = x_0$ ce qui signifie que x est solution du problème (2.8)*.*

2.3.1 Théorème de Cauchy Lipschitz

Théorème 2.3.2 (forme faible)**.** *Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}^n$. Si la fonction $f : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ alors pour toute donnée de Cauchy $(t_0, x_0) \in I \times \mathbb{R}^n$, il existe, au voisinage de t_0, une unique solution du problème de Cauchy associé.*
En particulier, pour toute telle donnée, il existe une unique solution maximale associée

et toute autre solution vérifiant la condition de Cauchy est une restriction de cette solution maximale.

Théorème 2.3.3. *Soient $I \subset \mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{C}(I \times E, E)$. Soit le problèleme de Cauchy*

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \tag{C}$$

avec $(t_0, x_0) \in I \times E$. Supposons que f est lipschitzienne par rapport à la deuxième variable uniformément sur I. Alors pour tout t_0 dans I et pour tout x_0 dans E le problème de Cauchy (C) admet une solution unique définie sur I.

2.4 l'existence et l'unicité

2.4.1 Solution locale

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et D un connexe de E.
Soit $f \in \mathcal{C}(I \times D, E)$ et Soit le problème de Cauchy (2.8). avec $(t_0, x_0) \in I \times D$. Supposons que f est localement lipschitzienne par rapport à la deuxième variable sur $I \times D$. Alors pour tout $(t_0, x_0) \in I \times D$, il existe un intervalle $J \subset I$ contenant t_0 tel que le problème de Cauchy (2.8) admet une unique solution définier sur J.

Définition 2.4.1. *La solution $x(t)$ définie sur J du problème de Cauchy* (2.8) *du théorème précédent s'appelle* ***solution locale*** *et on note $(x(t), J)$.*

Théorème 2.4.1. *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et D un connexe de E. Soit $f \in \mathcal{C}(I \times D, E)$. Soit le problème de Cauchy* (2.8), *avec $(t_0, x_0) \in I \times D$. Supposons que f est localement lipschitzienne par rapport à la deuxiéme variable sur $I \times D$. Alors pour tout $(t_0, x_0) \in I \times D$, le problème de Cauchy* (2.8) *admet une unique solution définie sur un intervalle I_0 inclue dans I, tel que toute solution locale $(x(t), J)$ du problème* (2.8) *vérifie $J \subset I_0$.*

Preuve 3. *Comme f est localement lipschitzienne. Soient $(y_1(t), J_1)$ et $(y_2(t), J_2)$ deux solution locales. Par unicité $y_1(t) = y_2(t)$ pour tout $t \in J_1 \bigcap J_2$. Soit I_0 la réunion de tout les intervalles des solutions. Donc pour tout $t \in I_0$ il existe une solution locale $(y(t), J)$ telle que $t \in J$, posons alors $x(t) = y(t)$.*
Donc $x(t)$ est définie sur I_0 tout entier de plus par unicitè si $(y^*(t), J^*)$ est une solution locale alors $J^* \subset I_0$ et $y^*(t) = x(t)$ sur J^*.

Le théoreme précédent affirme l'existence d'une solution sur l'intervalle ouvert maximal I_0 inclue dans I. Intuitivement l'intervalle I_0 est le plus grand intervalle dans I contenant t_0 où la solution du (2.8) est définie.

Définition 2.4.2. *La solution $x(t)$ définie sur I_0 du problème de Cauchy (2.8) du théoréme précédent s'appelle* ***solution maximale*** *et I_0 s'appelle* ***intervalle maximale****.*

Remarque 2.4.1. *Si $f : I \times E \longrightarrow E$ est localement lipschitzienne par rapport à la deuxième variable et si l'intervalle maximale $I_0 \subset I$ d'une solution $x(t)$ de l'équation est de la forme $]-\infty, b[$, $]a, +\infty[$ ou $]a, b[$ et $a, b \in I$ alors*

$$\lim_{t \to a} |x(t)| = +\infty \quad et \quad \lim_{t \to b} |x(t)| = +\infty.$$

Remarque 2.4.2. *Grâce au théorème des accroissements finis, on vérifie que toute fonction de classe $\mathcal{C}^1$ est localement lipschitzienne par rapport à sa deuxième variable. C'est pourquoi le théorème suivant est bien plus fort que le théorème 2.3.2.*

Théorème 2.4.2 (forme forte)**.** *Soient $I \subset \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{C}(I \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ et le problèleme de Cauchy*

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \tag{PC}$$

Si la fonction $f : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et localement lipschitzienne par rapport à sa deuxième variable, alors pour toute donnée de Cauchy $(t_0, x_0) \in I \times \mathbb{R}^n$, il existe, au voisinage de t_0, une unique solution du problème de Cauchy associé.
En particulier, pour toute telle donnée, il existe une unique solution maximale associée et toute autre solution vérifiant la condition de Cauchy est une restriction de cette solution maximale.

La démonstration de ce théorème peut se faire de plusieurs manières.
Elles partent toutes de la constatation que (J, x) est solution du problème de Cauchy si et seulement si $t_0 \in J$ et si x est une fonction continue sur J qui vérifie

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\, ds. \tag{2.12}$$

Il s'agit donc de résoudre l'équation intégrale (2.12) dans l'espace fonctionnel $\mathcal{C}^0(J, \mathbb{R}^n)$, c'est pourquoi il est naturel que les preuves du théorème utilisent de façon fondamentale les grands théorèmes de l'analyse fonctionnelle : ou bien le théorème d'Ascoli (méthode de compacité) ou bien le théorème du point fixe de Banach.

Un outil central dans tous les problèmes d'équations différentielles est le lemme de Grönwall qui permet de déduire des bornes sur les solutions à partir d'inégalité intégrales qu'elles vérifient.

Lemme 2.4.1 (Lemme de Grönwall)**.** *Soient $I =]a, b[$, $u : I \to \mathbb{R}_+$ une fonction continue, $t_0 \in I$ ainsi que deux constantes α, $\beta \geq 0$, telles que*

$$0 \leq u(t) \leq \alpha + \beta \left| \int_{t_0}^{t} u(\tau) d\tau \right|, \quad \forall t \in I.$$

Alors

$$0 \leq u(t) \leq \alpha e^{\beta |t - t_0|}, \quad \forall t \in I.$$

Preuve 4. ***Etape 1*** *Supposons que $\alpha > 0$. Posons*

$$\nu(t) = \alpha + \beta \left| \int_{t_0}^{t} u(\tau) d\tau \right|.$$

On a que $\nu \in \mathcal{C}^1$ sauf en $t = t_0$:

$$\nu'(t) = \begin{cases} \beta\, u(t), & t > t_0 \\ -\beta\, u(t), & t < t_0. \end{cases}$$

De plus,

$$0 \leq u(t) \leq \nu(t), \quad \forall t \in I.$$

Et

$$0 \leq \nu(t_0) = \alpha \leq \nu(t), \quad \forall t \in I.$$

Distinguons trois cas :

$t > t_0$ *Observer qu'alors,*

$$0 \leq \frac{\nu'(t)}{\nu(t)} = \frac{\beta\, u(t)}{\nu(t)} \leq \beta;$$

que l'on intègre :

$$\int_{t_0}^{t} \frac{d}{d\tau} \left[\ln \left(\nu(\tau) \right) \right] \leq \beta (t - t_0);$$

ce qui implique que,

$$O \leq u(t) \leq \nu(t) \leq \alpha e^{\beta |t - t_0|}.$$

$t = t_0$ *Le résultat est trivial.*

$t < t_0$ *Ressemble au premier cas.*

Etape 2 *Supposons que $\alpha = 0$. On choisit une suite $(\alpha_n)_n \subset \mathbb{R}_+^{\star}$ telle que α_n converge* *vers* α*. Ainsi,*

$$\begin{aligned} 0 \leq u(t) &\leq \alpha + \beta \left| \int_{t_0}^{t} u(\tau) d\tau \right| \\ &\leq \alpha_n + \beta \left| \int_{t_0}^{t} u(\tau) d\tau \right|. \end{aligned}$$

On applique ensuite l'étape 1 *aux* α_n*, ce qui nous donne*

$$0 \leq u(t) \leq \alpha_n \, e^{\beta|t-t_0|} \longrightarrow 0.$$

Preuve 5 (**Démonstration du théorème 2.4.2**

)**.** ***Unicité*** *Dans le cas où* f *est localement Lipschitzienne par rapport à sa seconde variable, on peut démontrer l'unicité d'un éventuelle solution en utilisant le Lemme de Grönwall. En effet, soient* (J_1, x_1)*,* (J_2, x_2) *deux solutions du même problème de Cauchy en* t_0 *. On veut montrer que* x_1 *et* x_2 *sont égales sur* $J_0 = J_1 \bigcap J_2$*. Pour cela on introduit l'ensemble*

$$S = \{t \in J_0, \ \textit{tel que } x_1(s) = x_2(s), \quad \forall s \in [t_0, t]\},$$

où $[t_0, t]$ *est remplacé par* $[t, t_0]$ *si* $t < t_0$*.*
Cet ensemble est non vide car il contient t_0 *(*x_1 *et* x_2 *vérifient la même donnée de Cauchy à l'instant* t_0*). On va montrer que* $S \bigcap [t_0, +\infty[= J_0 \bigcap [t_0, +\infty[$ *(la même idée montrerait l'égalité de* $S \bigcap] - \infty, t_0]$ *et de* $J_0 \bigcap] - \infty, t_0]$*).*
Supposons que $S \bigcap [t_0, +\infty[\neq J_0 \bigcap [t_0, +\infty[$*. On pose alors* $t^* = \sup(S)$*. On a* $t^* \geq t_0$ *et* $t_0 \in J_0$*. En effet, si ce n'était pas le cas on aurait* $t^* \in \partial J_0$ *et alors* $x_1 = x_2$ *sur* $[t_0, \sup J_0[$ *et donc* $x_1 = x_2$ *sur* $J_0 \bigcap [t_0, +\infty[$ *par continuité de* x_1 *et* x_2*. Ceci contredit l'hypothèse. Par ailleurs, par continuité de* x_1 *et* x_2*, on sait que* $x_1(t^*) = x_2(t^*) = \tilde{x}$*.*
Soit L *une constante de Lipschitz de* f *sur le compact* $K = [t^*, t^* + 1] \times \bar{B}(\tilde{x}, 1)$*. Par continuité, il existe* $\delta > 0$ *tel que* $t^* + \delta \in J_0$ *et tel que*

$$x_i(t) \in \bar{B}(\tilde{x}, 1), \ \forall t \in [t^*, t^* + \delta], \ \forall i = 1, 2.$$

Par ailleurs, comme x_1 *et* x_2 *vérifient l'équation on a*

$$x_i(t) = x_i(t^*) + \int_{t^*}^{t} f(s, x_i(s)) ds.$$

Par soustraction, on trouve

$$|x_1(t) - x_2(t)| \leq \int_{t^*}^{t} |f(s, x_1(s)) - f(s, x_2(s))| \, ds, \quad \forall t \in [t^*, t^* + \delta].$$

Comme x_1 et x_2 prennent leur valeurs dans K, on en déduit

$$|x_1(t) - x_2(t)| \leq L \int_{t^*}^{t} |x_1(s) - x_2(s)|\, ds, \quad \forall t \in [t^*, t^* + \delta].$$

Le lemme de Grönwall donne alors $x_1(t) = x_2(t)$ pour tout $t \in [t^*, t^* + \delta]$. Ceci montre que $t^* + \delta$ est dans S et contredit donc la définition de t^*.

Existence : *Soit $J = [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ un intervalle contenant t_0 dans son intérieur. On pose $x^0(t) = x_0$ pour tout $t \in J$ et on construit, par récurrence, la suite de fonctions*

$$x^{n+1}(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x^n(s))ds, \quad \forall t \in j.$$

Ceci revient à définir $x^{n+1} = \varphi(x^n)$ où $\varphi : \mathcal{C}^0(J, \mathbb{R}^n) \to \mathcal{C}^0(J, \mathbb{R}^n)$ est l'application qui à x associe

$$\varphi(x)(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds, \quad \forall t \in J.$$

Résoudre l'équation (2.12) *revient à trouver un point fixe de l'application φ. Comme J est compact on peut munir $E = \mathcal{C}^0(J, \mathbb{R}^n)$ de la norme infinie, ce qui en fait un espace complet. On peut donc espérer appliquer le théorème du point fixe de Banach à cette fonction. Pour cela, il faudrait montrer que φ est contractante. Comme on ne possède aucune information globale sur F, il se peut que $\|F(s,x)\|$ soit trés grand quand $\|x\|$ est grand et il y a donc aucune chance que nous arrivions à montrer que φ est contractante sur E.*
On va donc essayer d'appliquer le théorème sur le sous-espace fermé $F = \mathcal{C}^0(J, \bar{B}(x_0, r))$ de E (qui est donc bien complet). Pour cela, on peut jouer sur les paramètres α et r pour faire en sorte que $\varphi(F) \subset F$ et que φ soit contractante.

- Fixons une valeur $\alpha_0 > 0$ et un nombre $r_0 > 0$ tels que le compact $K_0 = [t_0 - \alpha_0, t_0 + \alpha_0] \times \bar{B}(x_0, r_0)$ soit inclus dans l'ouvert U sur lequel (2.7) *est vraie.*

- On note maintenant $M = \sup_{[t_0 - \alpha_0, t_0 + \alpha_0] \times \bar{B}(x_0, r_0)} \|F\|$. Ainsi, pour toute fonction $x \in \mathcal{C}^0([t_0 - \alpha_0, t_0 + \alpha_0], \bar{B}(x_0, r_0))$ on a

$$\|\varphi(x)(t) - x_0\| \leq \left\| \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds \right\| \leq |t - t_0|\, M.$$

Si on veut s'assurer que $\varphi(x)(t)$ reste dans la boule $\bar{B}(x_0, r_0))$, il faut se restreindre à un intervalle $[t_0 - \alpha_0, t_0 + \alpha_0]$ avec $0 < \alpha < \alpha_0$ choisi pour que

$$\alpha M \leq r_0. \tag{2.13}$$

Ainsi, l'espace $F_\alpha = \mathcal{C}^0([t_0-\alpha_0, t_0+\alpha_0], \bar{B}(x_0, r_0))$ *est laissé fixe par* φ *dés que* (2.13) *est vérifiée. − Essayons maintenant d'étudier le caractère contractant de* φ *sur un tel espace. Soient* $x, z \in F_\alpha$*, on a*

$$\|\varphi(x)(t) - \varphi(z)(t)\| \leq \left| \int_{t_0}^{t} \|f(s, x(s)) - f(s, z(s))\| \, ds \right| \leq C_{t_0,x_0} |t - t_0| \, \|x - z\|_\infty \,,$$

et donc

$$\|\varphi(x) - \varphi(z)\| \leq C_{t_0,x_0}\alpha \, \|x - z\|_\infty \,.$$

En conclusion, φ *sera contractante dés que*

$$\alpha C_{t_0,x_0} < 1. \tag{2.14}$$

- En conclusion, on va choisir $0 < \alpha \leq \alpha_0$ *qui satisfait* (2.13) *et* (2.14)*, ce qui est bien entendu possible. La fonction* φ *laisse alors invariant le sous-espace fermé* $F_\alpha \subset E$ *et elle est contractante dans cet espace.*
D'aprés le théorème du point fixe de Banach, il existe donc une unique solution $x \in F_\alpha$ *à l'équation* (2.12) *et ainsi* $([t_0 - \alpha, t_0 + \alpha], x)$ *est une solution du problème de Cauchy considéré. C'est également l'unique solution sur cet intervalle qui prend ses valeurs dans la boule* $\bar{B}(x_0, r_0)$.

- Il reste à montrer que toute autre solution éventuelle z *du problème de Cauchy définie sur un intervalle de la forme* $[t_0 - \beta, T_0 + \beta]$ *avec* $\beta \leq \alpha$ *coincide avec* x.

$\cdot$ *Si* z *prend ses valeurs dans la boule* $\bar{B}(x_0, r_0)$*, alors la propositionriété d'unicité dans le théorème du point fixe donne le résultat.*

$\cdot$ *Si* z *ne prend pas ses valeurs dans cette boule, on note* $\tilde{B}$ *le plus grand nombre dans* $[0, \beta]$ *tel que* $z([t_0 - \beta, t_0 + \beta])$ *est contenu dans cette boule. On a* $\tilde{B} < \beta$ *par hypothèse et* $\tilde{B} > 0$ *car* $z(t_0) = x_0$ *est dans l'intérieur de la boule et que* z *est continue. On a alors*

$$\|z(t) - x_0\| \leq |t - t_0| \, M \leq \beta M \leq \alpha M \leq r_0, \ \forall t \in [t_0 - \tilde{B}, t_0 + \tilde{B}],$$

ce qui contredit la maximalité de $\tilde{B}$.

Chapitre 3

Théorème de Picard

3.1 Théorème de Picard

Proposition 3.1.1. *Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et f une fonction définie de Ω dans $\mathbb{R}^p$. Alors*

(i) *Si f est localement lipschitzienne sur Ω, elle est continue sur Ω.*

(ii) *Si $f \in \mathcal{C}^1$, alors f est localement lipischtzienne. De plus, sur un compact, la meilleure constante est la norme du maximum de la dérivée.*

Théorème 3.1.1 (Théorème de Picard)**.** *Soit $I =]\alpha, \beta[$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un domaine, $(t_0, x_0) \in I \times \Omega$ et $f : I \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $f = f(t,x)$ satisfaisant*

(i) $f \in \mathcal{C}\left(I \times \Omega, \mathbb{R}^n\right)$ *;*

(ii) *la fonction $x \longmapsto f(t,x)$ est localement lipschitzienne pour tout $t \in I$, c'est-à-dire que pour tout $J \subset I$ compact, pour tout $O \subset \Omega$ compact, il existe une constante $\gamma = \gamma(J, O) > 0$ telle que*

$$\|f(t,x) - f(t,y)\| \leq \gamma \|x - y\|, \quad \forall t \in J, \ \forall x, y \in O.$$

Alors,

Existence *Il existe $I_0 \subset I$ un intervalle fermé avec $t_0 \in \mathring{I_0}$ et $x \in \mathcal{C}^1(I_0, \Omega)$ qui est une solution de*

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), & \forall t \in I_0 \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

Unicité *De plus, s'il existe $J \subset I$ un intervalle fermé tel que $t_0 \in J$ et $y \in \mathcal{C}^1(J, \Omega)$*

est une solution de

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), & \forall t \in J \\ y(t_0) = x_0. \end{cases}$$

Alors $x = y$ sur $I_0 \cap J$.

Preuve 6. *Nous procéderons en quatre étapes.*

Etape 1 (équation intégrale) *En partant de l'équation*

$$x'(t) = f(t, x(t)),$$

on trouve, en intégrant :

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau)) d\tau.$$

Il est évident que toute solution de notre problème est solution de l'équation intégrale. Intéressons-nous maintenant à la réciproque. En fait, c'est vrai, car toute solution continue est $\mathcal{C}^1$, et donc on a le droit de permuter dérivée et intégrale.

Etape 2 (opérateur T) *Soit $X \subset \mathcal{C}(I_0, \Omega)$, où I_0 est à définir. Soit $T : X \to X$, une application définie de la manière suivante*

$$Tx(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau)) d\tau.$$

On aimerait montrer que T possède un point fixe, qui serait alors solution de notre équation. Pour cela, on commence par choisir $r > 0$ suffisament petit pour que $[t_0 - r, t_0 + r] \subset I$ et $\overline{B_r(x_0)} \subset \Omega$. On définit alors $M = M(r) > 0$ de la manière suivante :

$$M = \sup \left\{ \|f(t, x)\| : \ t \in [t_0 - r, t_0 + r], \ x \in \overline{B_r(x_0)} \right\}.$$

Par hypothèse, il existe $\gamma = \gamma(r)$ une constante telle que

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq \gamma \|x - y\|, \quad \forall t \in [t_0 - r, t_0 + r], \ x, y \in \overline{B_r(x_0)}.$$

Soit alors,

$$\delta = \min \left\{ r, \frac{r}{M}, \frac{1}{2\gamma} \right\}.$$

Dans ce cas, $I_0 = [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ *et* $t_0 \in \mathring{I}_0$*. Soit maintenant,*

$$\begin{aligned} X &= \{x \in \mathcal{C}(I_0, \mathbb{R}^n) : \ \|x(t) - x_0\| \leq r \ \forall t \in I_0\} \\ &= \mathcal{C}(I_0, \overline{B_r(x_0)}). \end{aligned}$$

On va montrer que les choses sont telles que
(i) $T : X \to X$*,*
(ii) $\|Tx - Ty\| \leq \frac{1}{2} \|x - y\|, \quad \forall x, y \in X$*,*
avec la norme $\|x\|_X = \sup \{|x(t)| : \ t \in I_0\}$*.*

Etape 3 *Montrons les points (i) et (ii).*

Soient $x \in X, \ y = Tx$ *et calculons*

$$\|y(t) - x_0\| = \left\| \int_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau)) d\tau \right\|.$$

Puisque $t \in I_0$*, pour tout* $\tau \in [t_0, t]$ *on a que* $\|f(\tau, x(\tau))\| \leq M$*, puisque* $|t - t_0| \leq \delta$ *et* $x \in X$*. Ainsi,*

$$\|y(t) - x_0\| \leq M \left| \int_{t_0}^{t} d\tau \right| \leq M\delta \leq r.$$

Ce qui implique que $y(t) \in \overline{B_r(x_0)}$*, et donc* $y \in X$*.*
On va maintenant montrer que l'application est contractante. Pour cela, on aimerait estimer :

$$\begin{aligned} |Tx(t) - Ty(t)| &= \left| \int_{t_0}^{t} [f(t, x(\tau)) - f(t, y(\tau))] \, d\tau \right| \\ &\leq \int_{t_0}^{t} |f(t, x(\tau)) - f(t, y(\tau))| \, d\tau \\ &\leq \int_{t_0}^{t} \gamma \, |x(\tau) - y(\tau)| \, d\tau. \end{aligned}$$

Ainsi, on a que

$$\begin{aligned}
\|Tx - Ty\| &= \sup_{t \in I_0} |Tx(t) - Ty(t)| \\
&\leq \gamma \cdot \sup_{t \in I_0} \left| \int_{t_0}^{t} |x(\tau) - y(\tau)| \, d\tau \right| \\
&\leq \gamma \cdot \sup_{t \in I_0} \left| \int_{t_0}^{t} \sup_{\tau \in I_0} |x(\tau) - y(\tau)| \, d\tau \right| \\
&\leq \gamma \cdot \|x - y\| \sup_{t \in I_0} |t - t_0| \\
&\leq \gamma \cdot \delta \cdot \|x - y\| \\
&\leq \frac{1}{2} \|x - y\| .
\end{aligned}$$

Etape 4 (unicité) *L'unicité découle de l'unicité du point fixe de Banach.*

Remarque 3.1.1. *L'existence est encore vraie si f est seulement continue (théorème de Cauchy-Peano). Le fait que f soit localement lipschitzienne est nécessaire pour l'unicité.*

Remarque 3.1.2. *Sous ces hypothèses, le résultat n'est pas plus fort.*

(i) Non-existence de solution globale *Soient $\Omega = I = \mathbb{R}$ et $f(x) = x^2$. On cherche à résoudre*

$$\left[\begin{array}{l} x'(t) = (x(t))^2 \\ x(0) = 1 \end{array}\right.$$

L'unique solution est donnée par

$$x(t) = \frac{1}{1-t}$$

et donc la solution existe uniquement sur $]-\infty, 1[$ mais pas sur $\mathbb{R}$.

(ii) Non-unicité si f n'est pas localement lipschitzienne *On cherche à résoudre*

$$\left[\begin{array}{l} x'(t) - \sqrt{|x(t)|} \\ x(0) = 0. \end{array}\right.$$

Une première solution est $x \equiv 0$, l'autre est $x(t) = \frac{t^2}{4}$.

3.2 propositionriétés qualitatives des solutions

Théorème 3.2.1. *Soit $I =]a, b[$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un domaine et $f \in \mathcal{C}(I \times \Omega; \mathbb{R}^n)$ une fonction telle que $x \mapsto f(t, x)$ soit lipschitzienne pour tout t. Soient $y = y(t)$ et $z = z(t)$ deux solutions de*

$$x'(t) = f(t, x(t)), \quad \forall t \in I.$$

Alors, pour $t_0 \in I$

$$|y(t) - z(t)| \leq |y(t_0) - z(t_0)| \, .e^{\beta|t-t_0|},$$

où β est la constante de lipschitz mentionnée ci-dessus.

Preuve 7. *Appelons $u(t) = |y(t) - z(t)|$. Puisque y et z sont des solutions de $x' = f(t, x)$, on a que*

$$y(t) - z(t) = y(t_0) - z(t_0) + \int_{t_0}^{t} [f(\tau, y(\tau)) - f(\tau, z(\tau))] \, d\tau.$$

Ceci implique que

$$\begin{aligned} 0 \leq u(t) &\leq |y(t_0) - z(t_0)| + \left| \int_{t_0}^{t} |f(\tau, y(\tau)) - f(\tau, z(\tau))| \, d\tau \right| \\ &\leq a + b \left| \int_{t_0}^{t} u(\tau) d\tau \right|. \end{aligned}$$

En appliquant le lemme de Grönwal précédent, on obtient le résultat désiré.

3.3 Prolongement maximal

Soit $I =]\alpha, \beta[$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un domaine et $f \in \mathcal{C}(I \times \Omega, \mathbb{R}^n)$.

Définition 3.3.1 (Prolongement à droite, à gauche, maximal)**.** *On définit les prolongements de la manière suivante :*

(i) *Soit $x :]a, b[\subset I \to \Omega$ une solution de l'équation*

$$x'(t) = f(t, x(t)), \quad \forall t \in]a, b[.$$

On dit que $y :]a, c[\subset I \to \Omega$ est un prolongement à droite de x si :

- *$c > b$;*
- *y est une solution de l'équation ci-dessus ;*
- *$y(t) = x(t)$ pour tout $t \in]a, b[$.*

(*ii*) *On définit de la même manière un prolongement à gauche.*

(*iii*) *y est un prolongement maximal si on ne peut pas le prolonger à droite et à gauche.*

Proposition 3.3.1. *Si la fonction, $x \mapsto f(t,x)$ est localement lipschitzienne pour tout t, alors toute solution de l'équation $x'(t) = f(t, x(t))$ admet un prolongement maximal. L'intervalle correspondant est ouvert.*

Preuve 8. *Par le théorème de Picard, il existe un intervalle fermé $I_0 \subset I$, $I_0 \in \mathring{I}_0$ ainsi qu'une unique solution x telle que $x'(t) = f(t, x(t))$ et $x(t_0) = x_0$.*
Soit

$$\begin{aligned}\omega = \{J =]t_0 - \delta, t_0 + \varepsilon[:\ \delta, \varepsilon > 0,\ J \subset I, \\ \text{tel que } \exists x = x_J \\ \text{tel que } x_J'(t) = f(t, x_J(t)) \text{ et } x_J(t_0) = x(t_0) = x_0\}.\end{aligned}$$

On a que ω est non vide, puisque $\mathring{I}_0 \in \omega$. Posons maintenant,

$$J_0 = \bigcup_{J \in \omega} J,$$

et donc J_0 est ouvert. A partir de toutes les solutions trouvées on va construire une solution maximale x_{J_0}. Pour cela, remarquons que toutes les solutions sont définies en t_0. De plus, si x_1 et x_2 sont des solutions définies sur I_1 et I_2 respectivement, on sait, par le théorème de Picard, que pour tout $t \in I_1 \cap I_2$, on a $x_1(t) = x_2(t)$. Pour tout $t \in J_0$, il existe $J \in \omega$ tel que $t \in J$. On pose alors, $x_{J_0}(t) = x_J(t)$ et, par la remarque précédente, la fonction x_{J_0} est bien définie.

Théorème 3.3.1. *Soit $(t_0, x_0) \in I \times \Omega$, $x \in \mathcal{C}^1(J, \Omega)$ le prolongement maximal où $t_0 \in J =]a, b[\subset I =]\alpha, \beta[$ satisfaisant l'équation habituelle. Alors, deux possibilités peuvent se produire :*

(*i*) *$J = I$, dans ce cas x est appelée solution globale ;*

(*ii*) *pour tout compact $K \subset \Omega$, il existe $t \in J$ tel que $x(t) \notin K$.*

Preuve 9. *La démonstration ce distingue en deux étapes.*

Etape 1. *On pose $I =]\alpha, \beta[$. Supposons que la condition (i) ne soit pas satisfaite avec $b < \beta$ et supposons, par l'absurde, qu'il existe un compact $K \subset \Omega$ tel que $x(t) \in K$ pour tout $t \in]t_0, b[$. On va montrer que cela contredit la maximalité de J.*
Comme $b < \beta$ et que K est compact, alors il existe une constante M telle que $|f(t,x)| \leq M$ pour tout $(t,x) \in [t_0, b] \times K$.

Etape 2. *Soient* $t_1, t_2 \in [t_0, b[$

$$\begin{aligned} |x(t_2) - x(t_1)| &= \left| \int_{t_1}^{t_2} x'(t)dt \right| \\ &= \left| \int_{t_1}^{t_2} f(t, x(t))dt \right| \\ &\leq \left| \int_{t_1}^{t_2} M dt \right| = M\,|t_2 - t_1|\,, \end{aligned}$$

ce qui implique que x *est uniformément continue sur* $[t_0, b[$, *donc* $\lim\limits_{t \to b} x(t)$ *est bien définie et on la note* $x(b)$. *Montrons qu'en fait* $x \in \mathcal{C}^1([t_0, b], \Omega)$ *et en particulier* $x'(b) = f(b, x(b))$, *ce qui sera en contradiction avec la maximalité supposée de l'intervalle.*
En effet, pour $t < b$, *on a* $x'(t) = f(t, x(t))$. *Lorsque* t *va tendre vers* b, *on aura*

$$x'(t) = f(b, x(b)) := x'(b).$$

Le théorème de Picard nous permet de trouver une solution à l'équation $x'(t) = f(t, x(t))$ *dans un voisinage de* b *avec* b *jouant le rôle de* t_0. *Cette solution prolonge la solution précédente, ce qui est en contradiction avec sa maximalité supposée.*

Conclusion

Ce mémoire à été concerné à étudier le théorème de Picard avec des applications aux équations différentielles.
On a commencé par une introduction et généralité sur l'analyse fonctionnel puis des résultats préliminaire que nous avons utilisé dans ce mémoire.
Ainsi nous avons rappelé les équations différentielles et on à traité les résultats d'existence et d'unicité.
En fin on a résoudre des équations différentielles par le théorème de Picard.

Bibliographie

[1] H. Brize : Analyse fonctionnelle, Théorie et Application, Collection Mathématiques appliquée pour la Maitrise, Masson, Paris, France, 1983.

[2] PDF 206 : Téorème de point fixe, Exemples et Application, Pierre Lissy, May 29, 2010.

[3] Y. Yves Sonntag : Topologie et Analyse Fonctionnelle, cours de licence avec 240 exercice et 30 problème corrigés, ellipses, universités mathématiques de Provence.

[4] M, Guesba : Sur quelques Équation Intégrales non Linéaires, Mémoires de Magister, Université Kasdi Merbah Ouargla 04/07/2012.

[5] B. Dacorogna, Théorie de Picard et Application (polycopié), Version du 20 décembre 2010.

[6] J. Saint Raymond Topologie, calcul différentiel et variable complexe ; Calvage et Mounet, Paris (2007).